

Analysis and Design of Algorithms

Lecture 6,7 The Greedy algorithms

Instructor: Ha Dai Duong
duonghd@mta.edu.vn

08/03/2016

1

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán cái túi
3. Bài toán người du lịch
4. Đường đi ngắn nhất
5. Cây bao trùm nhỏ nhất
6. Bài toán tô màu
7. Bài toán các khoảng không giao nhau

08/03/2016

2

Nội dung

1. Lược đồ chung

2. Bài toán cái túi
3. Bài toán người du lịch
4. Đường đi ngắn nhất
5. Cây bao trùm nhỏ nhất
6. Bài toán tô màu
7. Bài toán các khoảng không giao nhau

08/03/2016

3

Bài toán tối ưu

- PP Tham lam thường dùng cho các bài toán tối ưu tổ hợp (tối ưu rời rạc)
- Bài toán tối ưu tổ hợp có dạng chung
$$\min\{f(x):x \in D\}$$

Trong đó D tập hữu hạn các điểm rời rạc nào đó thuộc không gian \mathbb{R}^n

08/03/2016

4

Ví dụ

- Máy ATM có 4 (m) loại tiền: 100.000, 50.000, 20.000, 10.000; một người muốn rút số tiền là n (n chia hết cho 10.000). Hãy tìm phương án trả tiền sao cho số tờ tiền phải trả là ít nhất.
- Gọi $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ là một phương án trả tiền; x_1, x_2, x_3, x_4 là số tờ tiền phải trả tương ứng với các mệnh giá 100.000, 50.000, 20.000, 10.000.
- Theo bài ra ta cần giải:

$$\min(f=x_1+x_2+x_3+x_4)$$
 Với: điều kiện
 - $100.000x_1+50.000x_2+20.000x_3+10.000x_4 = n$
 - $x_i \geq 0$ ($i=1..4$)

08/03/2016

5

Giải quyết ...

- Với bài toán tối ưu tổ hợp

$$\min\{f(x): x \in D\}$$
- Để tìm phương án tối ưu của bài toán trên người ta có thể so sánh lần lượt giá trị của f tại tất cả các phương án thuộc D ; cách này gọi là “**duyệt vét cạn**”.
- Khi số phần tử của D lớn (dù là hữu hạn) thì việc duyệt vét cạn vẫn gặp nhiều khó khăn.

08/03/2016

6

PP Tham lam

- PP tham lam đưa ra quyết định dựa ngay vào thông tin đang có, và trong tương lai sẽ **không xem xét lại tác động của các quyết định trong quá khứ**.
- Chính vì thế các thuật toán dạng này rất **dễ đề xuất**, và thông thường chúng **không đòi hỏi nhiều thời gian tính**.
- Tuy nhiên, các thuật toán dạng này thường **không cho kết quả tối ưu**.

08/03/2016

7

Ý tưởng

- Xuất phát từ lời giải rỗng, thuật toán xây dựng lời giải của bài toán theo từng bước, ở mỗi bước sẽ chọn một phần tử từ tập ứng cử viên và bổ sung vào lời giải hiện có.
- Hàm **Solution(S)** nhận biết tính chấp nhận được của lời giải S.
- Hàm **Select(C)** chọn từ tập C ứng cử viên có triển vọng nhất để bổ sung vào lời giải hiện có.
- Hàm **Feasible(S+x)** kiểm tra tính chấp nhận được của lời giải bộ phận S+x.

08/03/2016

8

Lược đồ chung

```

procedure Greedy;
(* Giả sử C là tập các ứng cử viên *)
begin
  S :=  $\emptyset$ ; (* S lời giải xây dựng theo thuật toán *)
  while (C  $\neq \emptyset$ ) and not Solution(S) do
    begin
      x  $\leftarrow$  Select(C);
      C := C \ x;
      if Feasible (S  $\cup$  x) then S := S  $\cup$  x ;
    end;
    if Solution(S) then return S;
  end;

```

08/03/2016

9

Tính đúng đắn của kết quả

- Để chỉ ra thuật toán không đúng đắn chỉ cần đưa ra một phản ví dụ (một bộ dữ liệu mà đối với nó thuật toán không cho lời giải đúng)
- Chứng minh tính đúng đắn của thuật toán khó hơn nhiều

08/03/2016

10

Nội dung

1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán cái túi**
3. Bài toán người du lịch
4. Đường đi ngắn nhất
5. Cây bao trùm nhỏ nhất
6. Bài toán tô màu
7. Bài toán các khoảng không giao nhau

08/03/2016

11

Bài toán



(Knapsack Problem)

- Có n đồ vật, đồ vật i có trọng lượng w_i và giá trị c_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Tìm cách chắt các đồ vật này vào cái túi có dung lượng là b sao cho tổng trọng lượng của các đồ vật được chắt vào túi là không quá b , đồng thời tổng giá trị của chúng là lớn nhất.

08/03/2016

12

Khái quát

- Ký hiệu $C = \{1, 2, \dots, n\}$ tập chỉ số các đồ vật.
- Bài toán đặt ra là Tìm $I \subset C$ sao cho

$$V = \sum_{i \in I} c_i \rightarrow \max$$

với

$$\sum_{i \in I} w_i \leq b,$$

08/03/2016

13

Tham lam 1 (Greedy1)

- Ý tưởng (tham lam): Đồ vật có giá trị lớn (nhất) còn lại được lấy trước (nếu có thể).
- Chi tiết:
 - Sắp xếp các đồ vật theo thứ tự **không tăng của giá trị**.
 - Chọn đồ vật từ đầu đến cuối (từ có giá trị cao đến có giá trị thấp hơn) nếu dung lượng còn lại của túi đủ chứa nó.

08/03/2016

14

Ví dụ 1

- Số lượng đồ vật $n = 3$
- Trọng lượng và giá trị các đồ vật là:

Đồ vật	1	2	3
Giá trị	20	16	8
Trọng lượng	14	6	10

- Trọng lượng cái túi $b = 19$

Greedy1 $\Rightarrow I = \{1\}$ $V = 20$ Tối ưu $\Rightarrow I^* = \{2, 3\}$ $V^* = 24$

08/03/2016

15

Tham lam 2 (Greedy2)

- Ý tưởng (tham lam): Đồ vật có trọng lượng nhỏ (nhất) còn lại được lấy trước (nếu có thể).
- Chi tiết:
 - Sắp xếp các đồ vật theo thứ tự **không giảm của trọng lượng**.
 - Chọn đồ vật từ đầu đến cuối (từ có trọng lượng cao đến có trọng lượng thấp hơn) nếu dung lượng còn lại của túi đủ chứa nó.

08/03/2016

16

Ví dụ 2

- Số lượng đồ vật $n = 3$
- Trọng lượng và giá trị các đồ vật là:

Đồ vật	1	2	3
Giá trị	10	16	28
Trọng lượng	5	6	10

- Trọng lượng cái túi $b = 11$

Greedy2 \Rightarrow $I = \{1, 2\}$
 $V = 26$ Tối ưu \Rightarrow $I^* = \{3\}$
 $V^* = 28$

08/03/2016

17

Tham lam 3 (Greedy3)

- Ý tưởng (ít tham lam): Đồ vật có đơn giá lớn (nhất) còn lại được lấy trước (nếu có thể).
- Chi tiết:
 - Sắp xếp các đồ vật theo thứ tự không tăng của giá trị một đơn vị trọng lượng (c_i/w_i), nghĩa là.

$$\frac{c_{i_1}}{w_{i_1}} \geq \frac{c_{i_2}}{w_{i_2}} \geq \dots \geq \frac{c_{i_n}}{w_{i_n}}$$

- Chọn đồ vật từ đầu đến cuối ...

08/03/2016

18

Ví dụ 3

- Trường hợp 1

Đồ vật	1	2	3
Giá trị	20	16	8
Trọng lượng	14	6	10

- Trường hợp 2

Đồ vật	1	2	3
Giá trị	10	16	28
Trọng lượng	5	6	10

08/03/2016

19

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán cái túi
- 3. Bài toán người du lịch**
4. Đường đi ngắn nhất
5. Cây bao trùm nhỏ nhất
6. Bài toán tô màu
7. Bài toán các khoảng không giao nhau

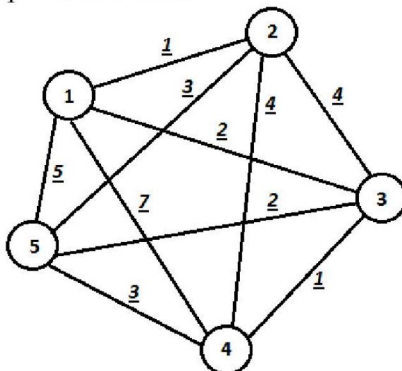
08/03/2016

20

Bài toán

Một người du lịch muốn tham quan n thành phố T_1, \dots, T_n . Xuất phát từ một thành phố nào đó, người du lịch muốn đi qua tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đi qua đúng 1 lần rồi quay trở lại thành phố xuất phát.

Gọi C_{ij} là chi phí đi từ thành phố T_i đến T_j . Hãy tìm một hành trình thỏa yêu cầu bài toán sao cho chi phí là nhỏ nhất.

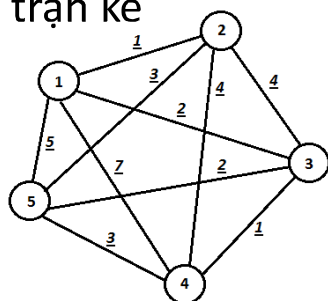


08/03/2016

21

Ý tưởng

- Ý tưởng (tham lam): Chọn thành phố gần nhất tình từ thành phố hiện thời.
- Tổ chức dữ liệu: Đồ thị $G = (V, E)$, V – tập đỉnh ($\equiv T$), E – Tập các cạnh ($\equiv C$). Mô tả đồ thị dạng ma trận kề



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

08/03/2016

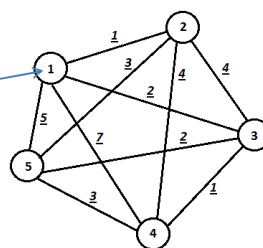
22

Minh họa ...

- TOUR: Danh sách cạnh của hành trình
- COST: Chi phí theo hành trình TOUR
- u: Đỉnh hiện tại
- w: Kề với u có chi phí thấp nhất

Với bài toán

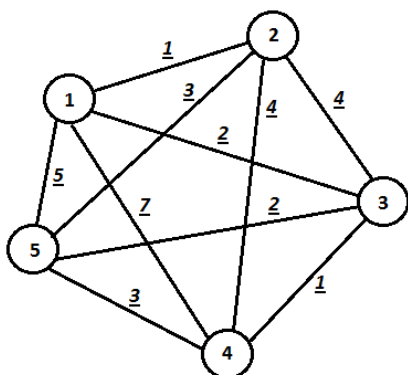
Xuất phát từ **1**



08/03/2016

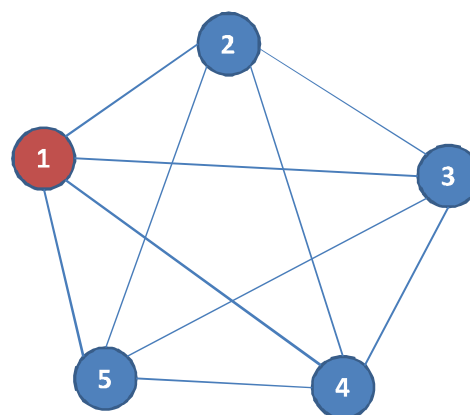
23

Minh họa ...



TOUR={}

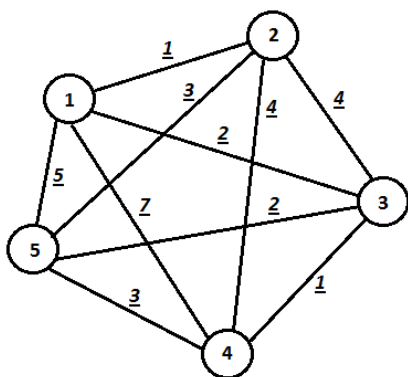
COST=0



08/03/2016

24

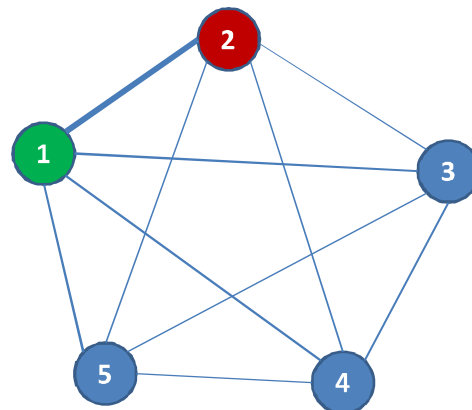
Minh họa ...



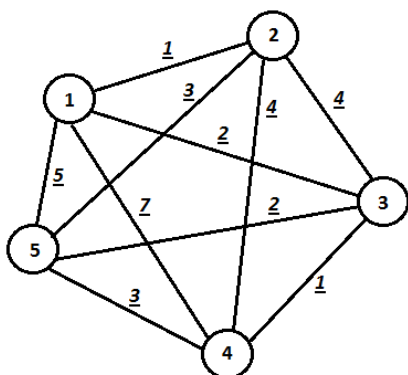
TOUR= $\{(1,2)\}$
COST=1

08/03/2016

25



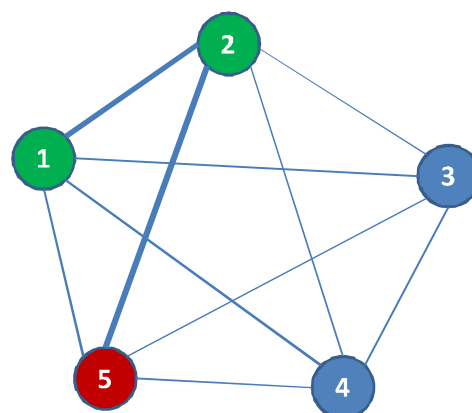
Minh họa ...



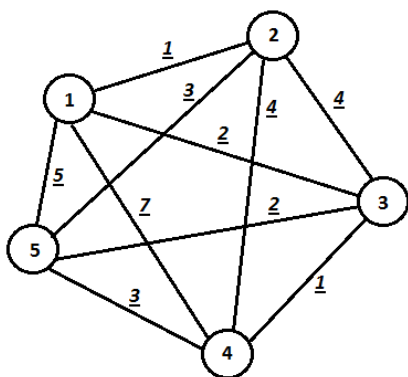
TOUR= $\{(1,2), (2,5)\}$
COST=1+3

08/03/2016

26



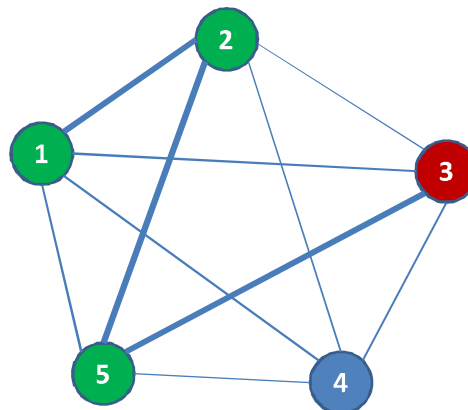
Minh họa ...



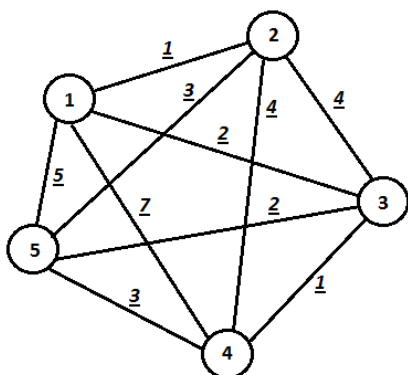
TOUR = {(1,2), (2,5), (5,3)}
COST = 1 + 3 + 2

08/03/2016

27



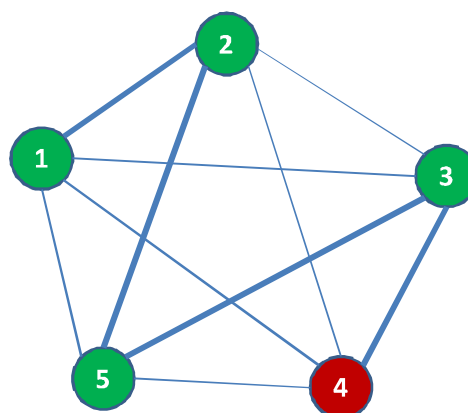
Minh họa ...



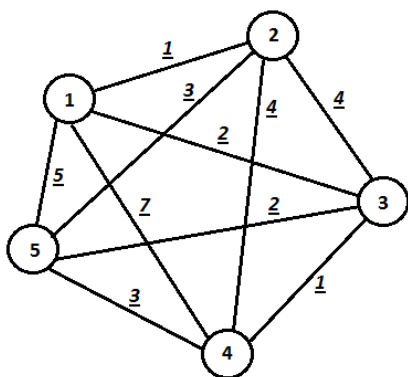
TOUR = {(1,2), (2,5), (5,3), (3,4)}
COST = 1 + 3 + 2 + 1

08/03/2016

28



Minh họa ...

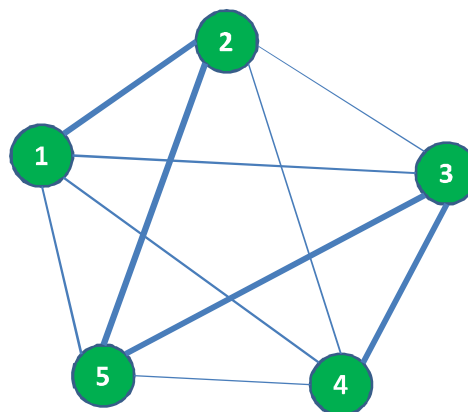


TOUR={ $(1,2)$, $(2,5)$, $(5,3)$, $(3,4)$ }

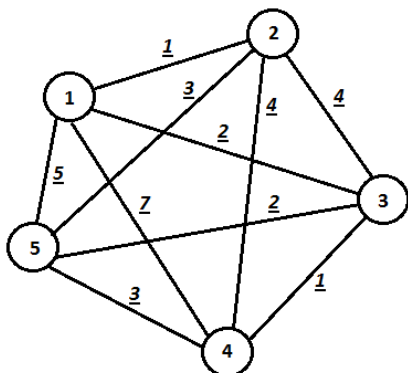
COST=1+3+2+1=7

08/03/2016

29



- Trở về đỉnh đầu

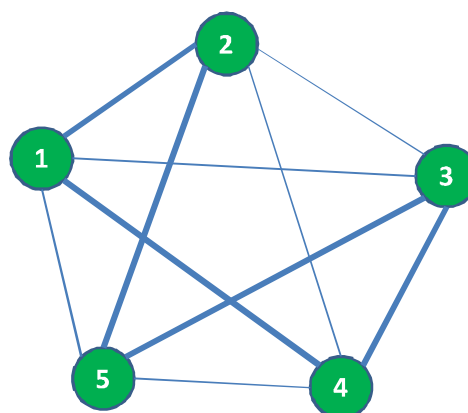


TOUR={ $(1,2)$, $(2,5)$, $(5,3)$, $(3,4)$, $(4,1)$ }

COST=1+3+2+1=7+7

08/03/2016

30



```

int GTS (mat a, int n, int TOUR[max], int Ddau)
{
    int    v,      //Dinh dang xet
           k,      //Duyet qua n dinh de chon
           w;      //Dinh duoc chon trong moi buoc
    int    mini;   //Chon min cac canh(cung) trong moi buoc
    int COST;      //Trong so nho nhat cua chu trinh
    int daxet[max]; //Danh dau cac dinh da duoc su dung
    for(k = 1; k <= n; k++)
        daxet[k] = 0; //Chua dinh nao duoc xet
    COST = 0;      //Luc dau, gia tri COST == 0

    int i; // Bien dem, dem tim du n dinh thi dung
    v = Ddau; //Chon dinh xuat phat la 1
    i = 1;
    TOUR[i] = v; //Dua v vao chu trinh
    daxet[v] = 1; //Dinh v da duoc xet

```

08/03/2016

31

```

int GTS (mat a, int n, int TOUR[max], int Ddau)
{
    while(i < n)
    {
        int v, //Dinh dang xet
            k, //Duyet qua n dinh de chon
            w; //Dinh duoc chon trong moi buoc
        int mini; //Chon min cac canh(cung) trong moi buoc
        int COST; //Trong so nho nhat cua chu trinh
        int daxet[max]; //Danh dau cac dinh da duoc su dung
        for(k = 1; k <= n; k++)
            daxet[k] = 0; //Chua dinh nao duoc xet
        COST = 0; //Luc dau, gia tri COST == 0

        int i; // Bien dem, dem tim du n dinh thi dung
        v = Ddau; //Chon dinh xuat phat la 1
        i = 1;
        TOUR[i] = v; //Dua v vao chu trinh
        daxet[v] = 1; //Dinh v da duoc xet

        mini = VC;
        for (k = 1; k <= n; k++)
            if(!daxet[k])
                if(mini > a[v][k])
                {
                    mini = a[v][k];
                    w = k;
                }
        v = w;
        i++;
        TOUR[i] = v;
        daxet[v] = 1;
        COST += mini;
    }
    COST += a[v][Ddau];
    return COST;

```

08/03/2016

32

Độ phức tạp

```

while(i < n)
{
    mini = VC;
    for (k = 1; k <= n; k++)
        if(!daxet[k])
            if(mini > a[v][k])
            {
                mini = a[v][k];
                w = k;
            }
    v = w;
    i++;
    TOUR[i] = v;
    daxet[v] = 1;
    COST += mini;
}
COST += a[v][Ddau];
return COST;

```

$T(n) = O(n^2)$

08/03/2016

33

Nội dung

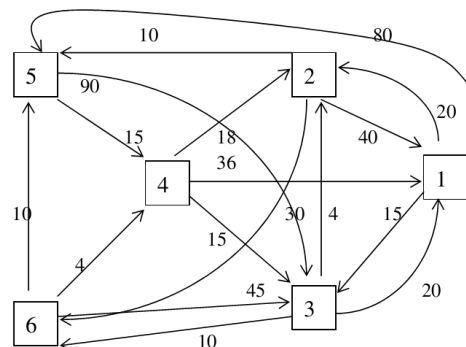
1. Lược đồ chung
2. Bài toán cái túi
3. Bài toán người du lịch
- 4. Đường đi ngắn nhất**
5. Cây bao trùm nhỏ nhất
6. Bài toán tô màu
7. Bài toán các khoảng không giao nhau

08/03/2016

34

Bài toán

- Đồ thị $G=(V,E)$
 - Đơn đồ thị liên thông (vô hướng hoặc có hướng)
 - Có trọng số.
 - V : Tập đỉnh
 - E : Tập cạnh
- Tìm đường đi ngắn nhất từ $s_0 \in V$ đến tất cả các đỉnh còn lại.



08/03/2016

35

Thuật toán Dijkstra

- Ý tưởng (tham lam): Có đồ thị $G=(V,E)$, s_0 .
 - $L(v)$: độ dài đường đi ngắn nhất từ s_0 đến đỉnh v (gọi là nhãn của v).
 - Gọi S là tập đỉnh đã xét.
 - Khởi tạo: $S = \{s_0\}$, $L(s_0) = 0$, $L(v) = \infty \forall v \in V \setminus S$
 - Tại mỗi bước lặp:
 - **Cập nhật lại nhãn** các đỉnh thuộc $V \setminus S$ (tập V trừ tập S)
 - **Tìm đỉnh thuộc tập $V \setminus S$ có nhãn nhỏ nhất** (tham lam) kề với S để đưa vào S .

08/03/2016

36

Cập nhật nhãn $L(v)$

- Khởi tạo: $S = \{s_0\}$, $L(s_0) = 0$, $L(v) = \infty \forall v \in V \setminus S$

Với $\forall v \in V \setminus S$:

$$\text{Với } \forall s \in S: \quad L(v) = \min(L(v), L(s) + m(s, v))$$

Trong đó $m(s, v)$ là độ dài đường đi từ s với v

- Vì chỉ có $L(s^*)$ với s^* là đỉnh vừa duyệt xong ở bước trước là có thay đổi về giá trị nên việc tính lại $L(v)$ chỉ có ý nghĩa với các đỉnh kề với s^*

Với $\forall v \in V \setminus S$ kề với s^* :

$$L(v) = \min(L(v), L(s^*) + m(s^*, v))$$

08/03/2016

37

Tìm đỉnh có nhãn nhỏ nhất s^*

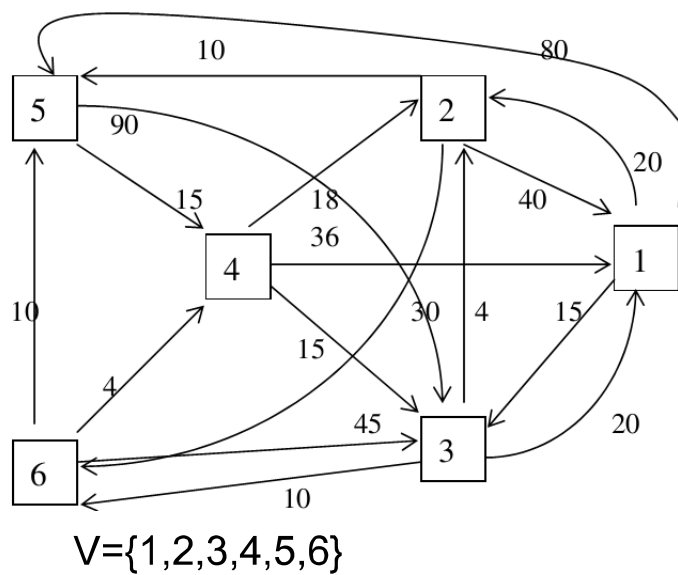
- Đỉnh có nhãn nhỏ nhất s^* :
 - Kề với 1 trong các đỉnh $\in S$
 - Và
 - $L(s^*) = \min(L(v): \forall v \in V \setminus S)$

08/03/2016

38

$s_0=1$

Minh họa



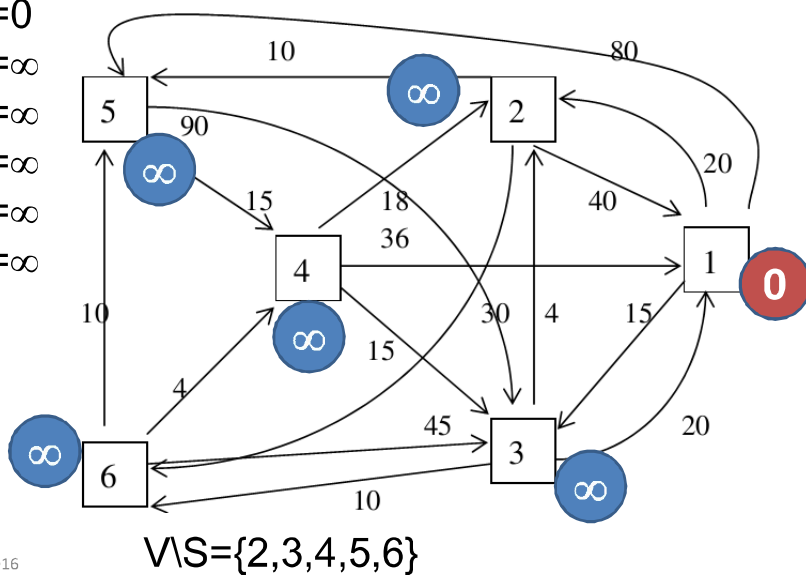
08/03/2016

39

 $s_0=1$

Khởi tạo

$S=\{1\}$
 $L(1)=0$
 $L(2)=\infty$
 $L(3)=\infty$
 $L(4)=\infty$
 $L(5)=\infty$
 $L(6)=\infty$
 $s^*=1$



08/03/2016

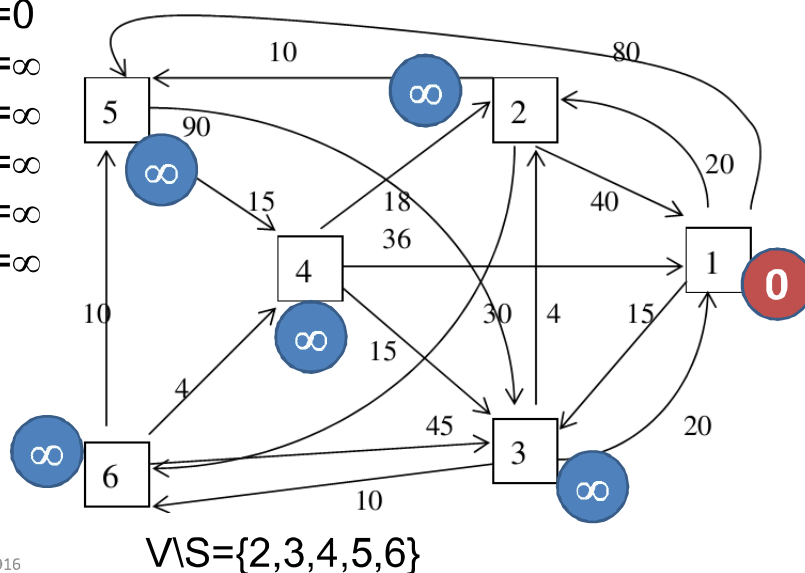
40

$s_0=1$

Cập nhật nhãn

 $S=\{1\}$ $L(1)=0$ $L(2)=\infty$ $L(3)=\infty$ $L(4)=\infty$ $L(5)=\infty$ $L(6)=\infty$ $s^*=1$

$$L(v) = \min(L(v), L(s^*) + m(s^*, v))$$



08/03/2016

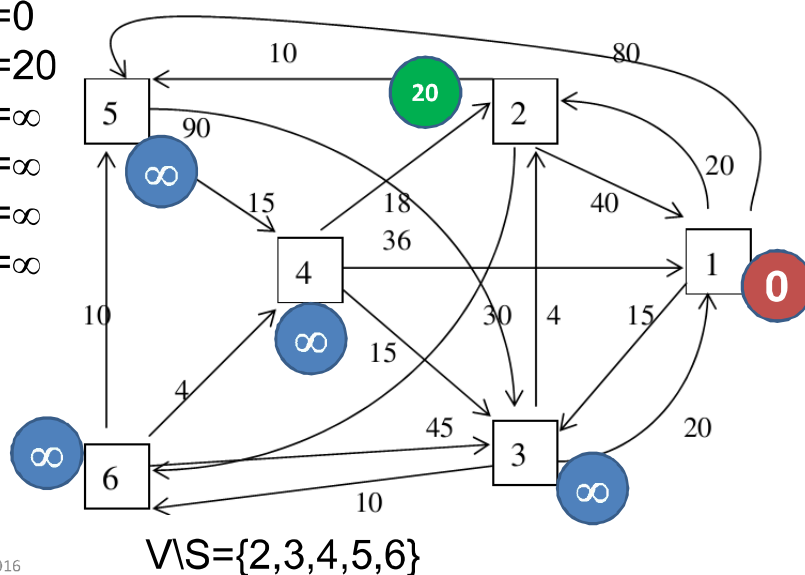
41

 $s_0=1$

Cập nhật nhãn

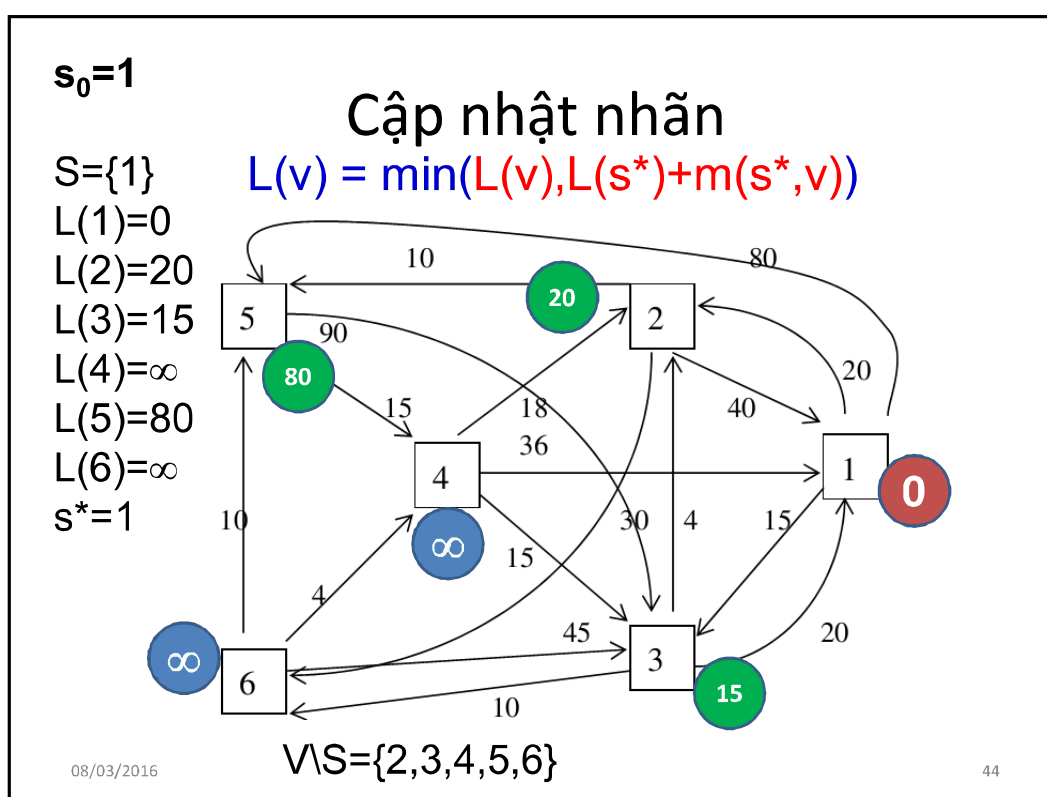
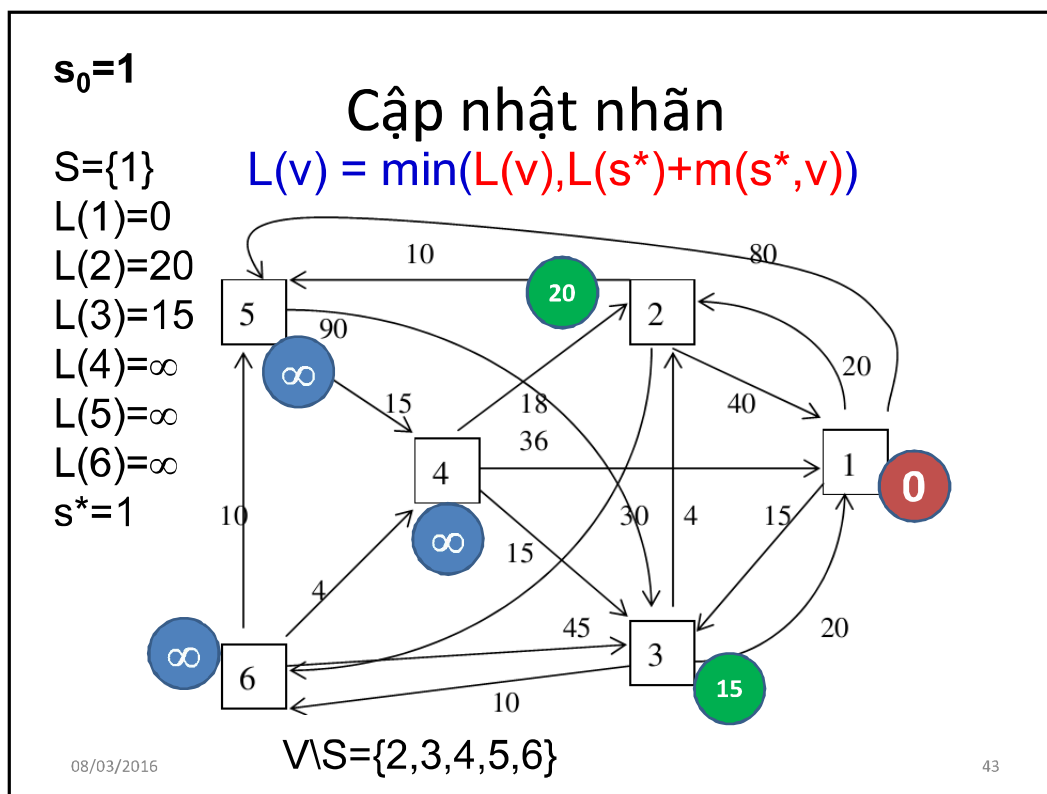
 $S=\{1\}$ $L(1)=0$ $L(2)=20$ $L(3)=\infty$ $L(4)=\infty$ $L(5)=\infty$ $L(6)=\infty$ $s^*=1$

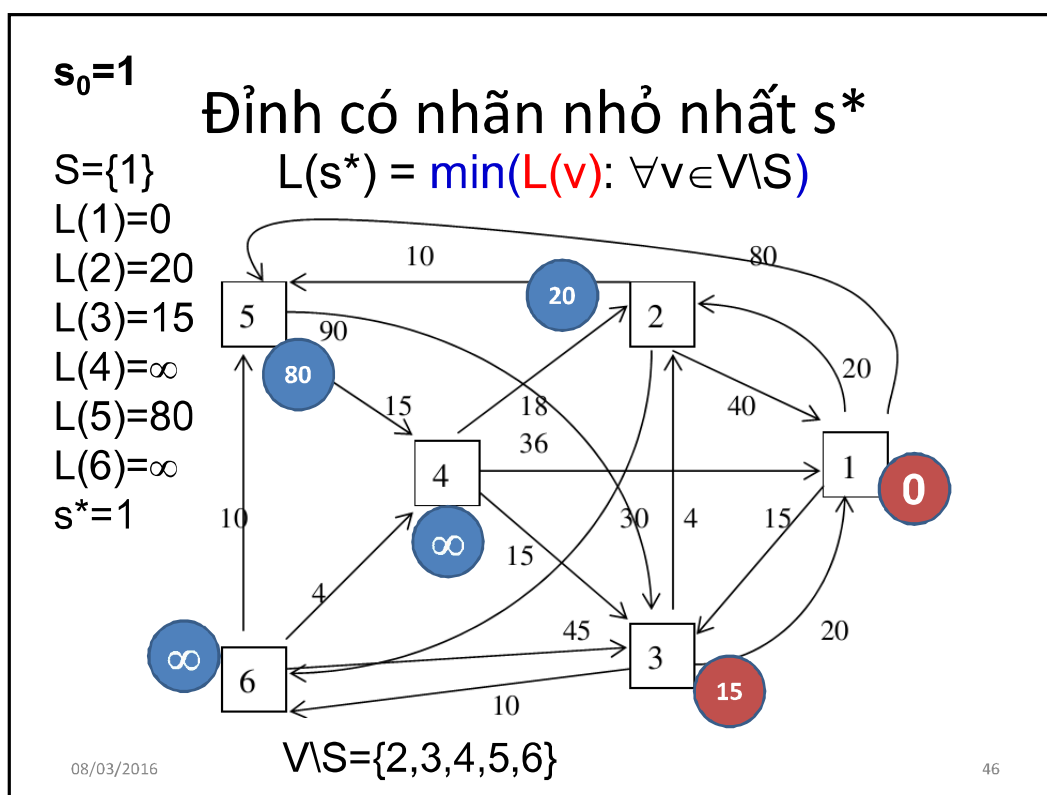
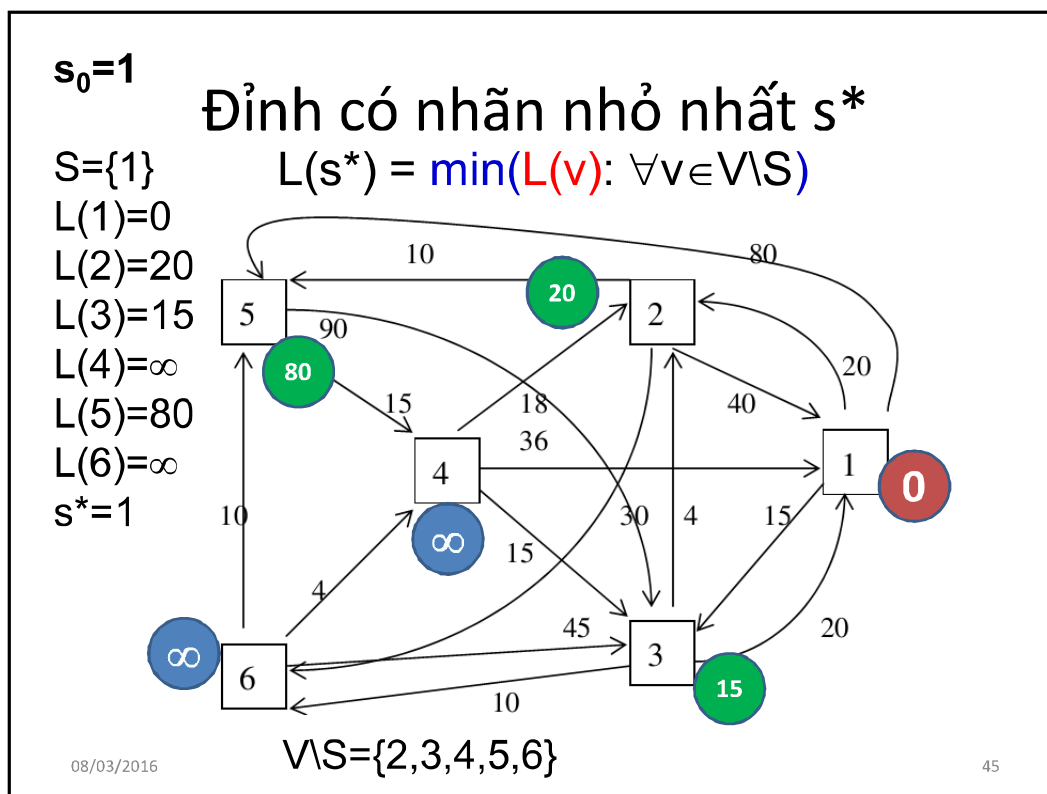
$$L(v) = \min(L(v), L(s^*) + m(s^*, v))$$



08/03/2016

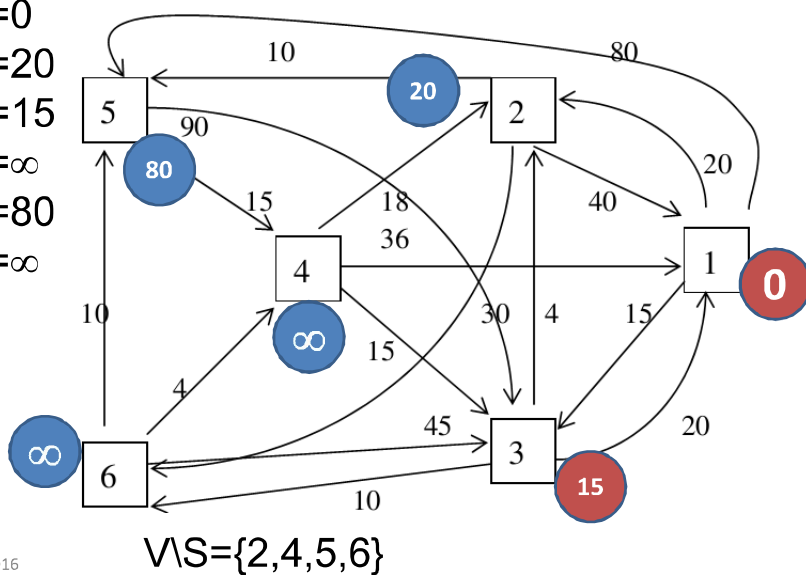
42





$s_0=1$

Tiếp ...

 $S=\{1,3\}$ $L(1)=0$ $L(2)=20$ $L(3)=15$ $L(4)=\infty$ $L(5)=80$ $L(6)=\infty$ $s^*=3$ 

08/03/2016

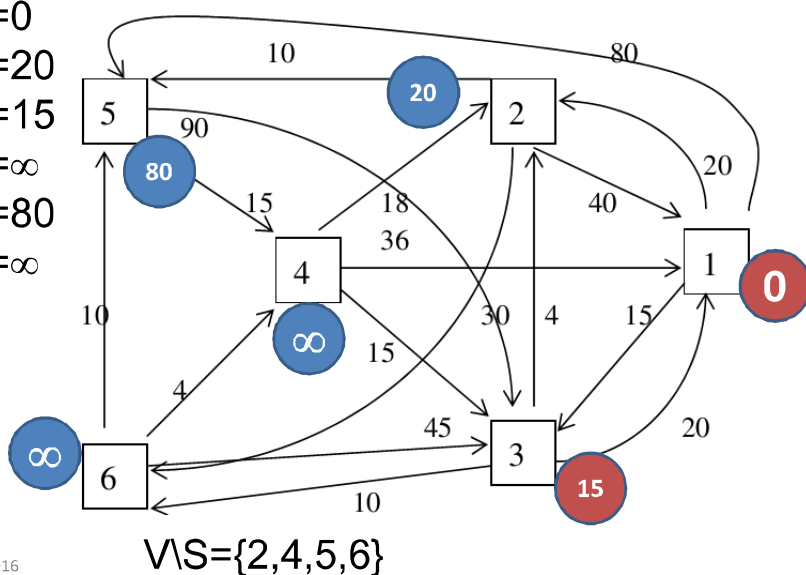
47

 $s_0=1$

Cập nhật nhãn

 $S=\{1,3\}$

$$L(v) = \min(L(v), L(s^*) + m(s^*, v))$$

 $L(1)=0$ $L(2)=20$ $L(3)=15$ $L(4)=\infty$ $L(5)=80$ $L(6)=\infty$ $s^*=3$ 

08/03/2016

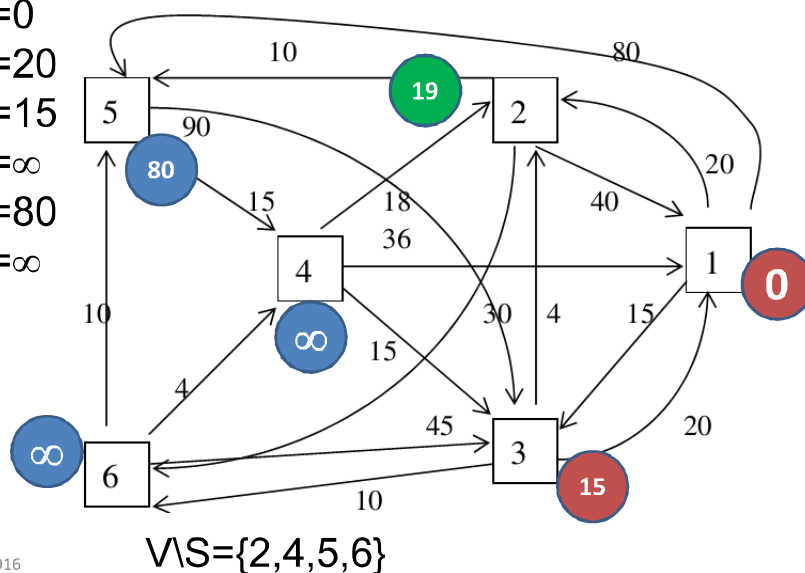
48

$s_0=1$

Cập nhật nhãn

 $S=\{1,3\}$

$$L(v) = \min(L(v), L(s^*) + m(s^*, v))$$

 $L(1)=0$ $L(2)=20$ $L(3)=15$ $L(4)=\infty$ $L(5)=80$ $L(6)=\infty$ $s^*=3$ 

08/03/2016

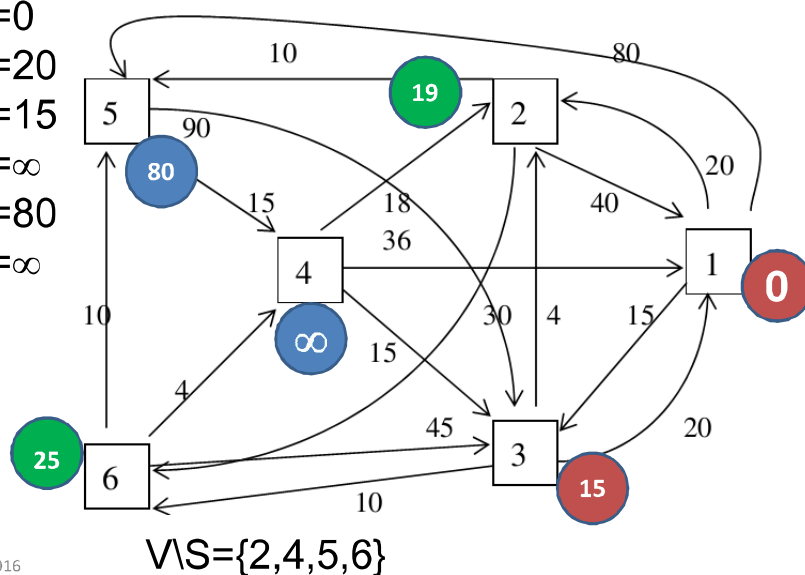
49

 $s_0=1$

Cập nhật nhãn

 $S=\{1,3\}$

$$L(v) = \min(L(v), L(s^*) + m(s^*, v))$$

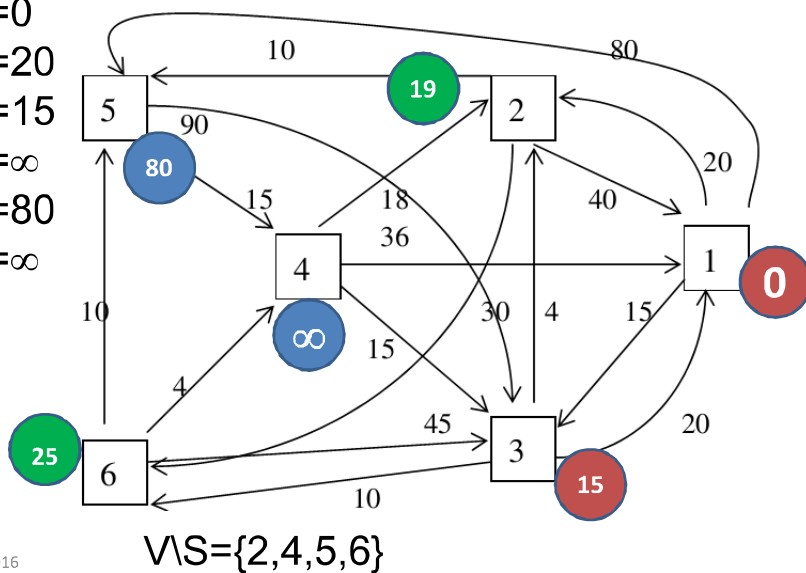
 $L(1)=0$ $L(2)=20$ $L(3)=15$ $L(4)=\infty$ $L(5)=80$ $L(6)=\infty$ $s^*=3$ 

08/03/2016

50

$s_0=1$

Tiếp tục ...

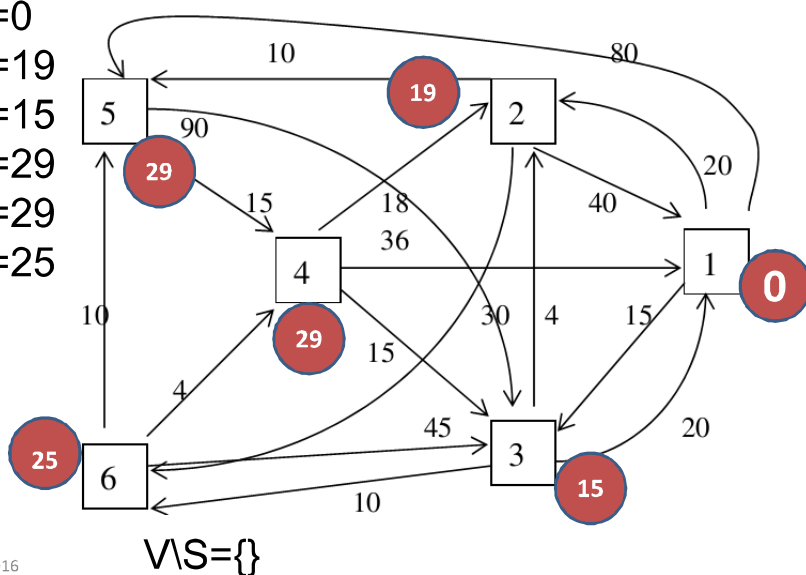
 $S=\{1,3\}$ $L(1)=0$ $L(2)=20$ $L(3)=15$ $L(4)=\infty$ $L(5)=80$ $L(6)=\infty$ $s^*=3$ 

08/03/2016

51

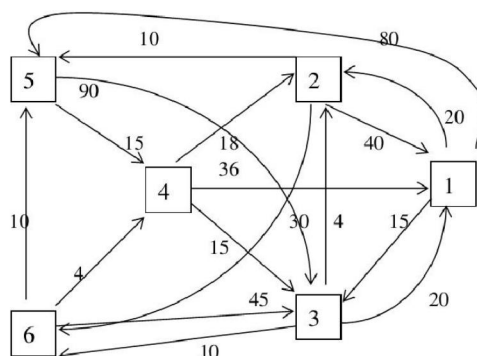
 $s_0=1$

Kết thúc

 $S=\{1,3,2,6,4,5\}$ $L(1)=0$ $L(2)=19$ $L(3)=15$ $L(4)=29$ $L(5)=29$ $L(6)=25$ 

08/03/2016

52



Bước lập	Đường đi ngắn nhất là đường đi từ đỉnh 1	đến đỉnh	Chiều dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh s (=1) đến các đỉnh khác : tsnn[]					
			1	2	3	4	5	6
Bước 1	1 → 3	3	-	20	15	∞	80	∞
Bước 2	1 → 3 → 2	2	-	19	-			25
Bước 3	1 → 3 → 6	6	-	-	-		29	25
Bước 4	1 → 3 → 6 → 4	4	-	-	-	29		-
Bước 5	1 → 3 → 2 → 5	5	-	-	-	-	29	-

Cài đặt

- Biểu diễn G qua ma trận trọng số cạnh

$$a = (a_{uv})_{n \times n};$$

$$a_{uv} = \begin{cases} \text{trọng số của } (u, v); (u, v) \in E; \\ \infty; (u, v) \notin E; \end{cases}$$

- Mảng L[i] nhãn đỉnh i
- Mảng Daxet[i]: 0 i chưa xét, 1 i đã xét
- Mảng Ddnn[i]: Giá trị của nó là đỉnh trước trong đường đi ngắn nhất đến i

Cài đặt ...

```
void dijkstra( int s)
{
    int Ddnn[max]; // Chứa đường đi ngắn nhất từ s đến đỉnh t tại mỗi bước
    int i,k,Dht,Min;
    int Daxet[max]; //Đánh dấu các đỉnh đã đưa vào S
    int L[max];
    for ( i = 1; i <= n; i++)
    {
        Daxet[i] = 0;
        L[i] = VC;
    }
    //Đưa đỉnh s vào tập đỉnh S đã xét
    Daxet[s] = 1;
    L[s] = 0;
    Dht = s;
    int h = 1; //đếm mỗi bước : cho đủ n-1 bước
```

08/03/2016

55

```
while (h<= n-1)
{
    Min = VC;
    for ( i = 1; i <= n; i++)
        if(!Daxet[i])
        {
            if ( L[dht] + a[dht][i] < L[i] ) //Tính lại nhãn
            {
                L[i] = L[dht] + a[dht][i] ;
                Ddnn[i] = dht;
                //gan đỉnh hiện tại là đỉnh trước đỉnh i trên lộ trình
            }
            if(L[i] < Min) // Chọn đỉnh k
            {
                Min = L[i];
                k = i;
            }
        }
    // Tại bước h : tìm được đường đi ngắn nhất từ s đến k : Ddnn[]
    xuatdd(s,k,Ddnn);
    cout<<"\nTrong số : "<<L[k];
    dht = k; // Khởi động lại Dht
    Daxet[dht] = 1; //Đưa nút k vào tập nút đã xét
    h++;
}
```

08/03/2016

56

Cài đặt ...

```

}
//*****
void xuatdd(int s, int k, int Ddnn[max])
{
    int i;
    cout<<"\nDuong di ngan nhut tu "<<s<<" den "<<k<<" la : ";
    i = k;
    while(i != s)
    {
        cout<<i<<"<--";
        i = Ddnn[i];
    }
    cout<<s;
}

```

08/03/2016

57

Kết quả thuật toán

- Thuật toán Dijkstra cho kết quả tối ưu
- $T(n) = O(n^2)$

08/03/2016

58

Bài tập

- Thực hiện từng bước bài toán người du lịch theo giải thuật tham lam với các dữ liệu sau: Bắt đầu từ đỉnh 1, ma trận chi phí được mô tả như sau:

0	3	5	2	6
3	0	6	7	3
5	6	0	5	4
2	7	5	0	1
6	3	4	1	0

0	1	6	3	2
1	0	5	7	1
6	5	0	6	3
3	7	6	0	2
2	1	3	2	0

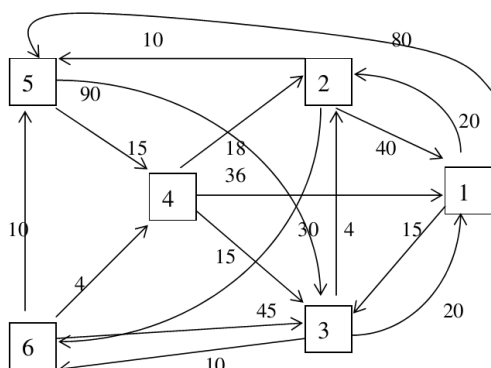
0	7	2	6	1
7	0	5	4	7
2	5	0	1	3
6	4	1	0	5
1	7	3	5	0

08/03/2016

59

Bài tập

- Thực hiện từng bước thuật toán Dijkstra bắt đầu từ đỉnh 2, 3, 4 trên đồ thị sau



08/03/2016

60

Bài tập

3. Đề xuất giải thuật tham lam giải bài toán trả tiền máy ATM?
4. Cài đặt thuật toán người du lịch. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết
5. Cài đặt thuật toán Dijkstra. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết