Phân tích và Thiết kế THUẬT TOÁN

Hà Đại Dương
<u>duonghd@mta.edu.vn</u>
Web: fit.mta.edu.vn/~duonghd

Bài 2 - Đánh giá độ phức tạp thuật toán

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬ TOÁN

2

NỘI DUNG

- I. Giới thiệu
- II. Phân tích trực tiếp các đoạn mã
- III. Phân tích đoạn mã có lời gọi chươn trình con
- IV. Đánh giá dựa trên thực nghiệm
- V. Bài tập

1		G	iới	th	iêι
---	--	---	-----	----	-----

- Trước khi thực hiện tính độ phức tạp thuật toán A giải bài toán P ta
 - Tiêu chí độ dài dữ liệu n: có thể là số ký tự, số phần tử của mảng,
 Tiêu chí đánh giá: thống nhất là số các thao tác cơ bản (gán, so sánh..)
- Để đánh giá có thể sử dụng:
 - Phân tích trực tiếp để tính số các thao tác
 - Phương pháp đệ quy

1.	Giới	

- Dựa trên một số quy tắc
 - Quy tắc cộng
 - Quy tắc nhân
 - Quy tắc phân tích một số câu lệnh
 Xét tính chất của chương trình con

1. Giới thiệu

- Quy tắc cộng
 T1(n) và T2(n) là thời gian thực hiện của hai đoạn chương trình con nối tiếp nhau (độc lập) P1, P2 và
 T1(n)= O(f1(n)); T2(n)=O(f2(n))
 Khi đó thời gian (độ phức tạp thời gian) thực hiện của 2 đoạn chương trình đó là T(n)=T1(n)+T2(n) = O(max{f1(n),f2(n)})
 Chứng minh: Theo đầu bài, tồn tại các hằng M1, M2, n1, n2 để T1(n)≤M1*f1(n), √n>n1, T2(n)≤M2*f2(n), √n>n2
 Khi đó

Khi đó

$$\begin{split} T(n) &= T1(n) + T2(n) \leq M1^*f1(n) + M2^*f2(n), \\ &\leq M.f(n) \ v\acute{o}i \ n>n0, \ M=max(M1,M2), \ n0=max(n1,n2) \\ &f(n)=max(f1(n),f2(n)) \end{split}$$

1.	Giới	thiệu

- Quy tắc nhân
 - T1(n) và T2(n) là thời gian thực hiện của hai đoạn chương trình con lồng nhau (phụ thuộc) P1, P2 và
 T1(n)= O(f1(n)); T2(n)=O(f2(n))

 - Khi đó thời gian (độ phức tạp thời gian) thực hiện của 2 đoạn chương trình đó

T(n)=T1(n)*T2(n) = O(f1(n)*f2(n))Chứng minh: (tương tự với quy tắc cộng)

1	1 - 1	\sim 1	- +1	n	\sim	
	\ ¬	ΙớΙ	- 11		_	ı

- Quy tắc phân tích câu lệnh
 - Các câu lệnh đơn (gán, đọc, ghi...) có độ phức tạp là Hằng O(1)
 - Ví dụ:

vi dụ:

(1) - read(a)
(2) - read(b)
(3) - read(c)
(4) - delta = b*b – 4*a*c

Nhận xết: Trong đoạn chương trình chỉ bao gồm các lệnh đơn kế tiếp nhau (không chứa các vòng lặp), theo quy tắc cộng => Độ phức tạp thuật toán là hằng O(1)

1. Giới thiệu

- Quy tắc phân tích câu lệnh
 - Cấu trúc if: thời gian kiểm tra điều kiện + thời gian thực hiện sau THEN hoặc ELSE
 - Cấu trúc lặp:

 - thời gian thực hiện vòng lập là tổng thời gian thực hiện của thân vòng lập.
 Nếu số bước tính trong vòng lặp không đối (theo mỗi bước lặp) thì thời gian thực hiện vòng lặp bằng tích của số lần lặp nhân với thời gian thực hiện thân vòng lặp.

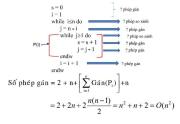
Phương pháp chung:
 Phân tích trực tiếp đoạn mã và sử dụng các kỹ thuật:
 Phép đếm
 Tính tổng hữu hạn
 Xét đầu hàm

Phép toán chủ yếu trong các đoạn mã là phép gán và so sánh.

Phương pháp này không giải quyết được tất cả các trường hợp.

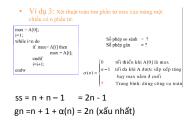
2. Phân tích trực tiếp

Khảo sát độ phức tạp trên số phép gán và so sánh trong thuật toán.



2. Phân tích trực tiếp

$$\begin{array}{lll} &= \; 2 \; + \; 2 \; n \; + \; \sum_{i=1}^{n} \; \left(\; 2 \; \alpha_{i} \; \right) \; = \; 2 \; + \; 2 \; n \; + \; 2 \; \sum_{i=1}^{n} \; \alpha_{i} \; \\ &\; \text{N\'eu} \text{ thay doing leinh } \; j = n + i \; \text{bằng dóng leinh} \; j = 1 \; \text{th} \; \alpha_{i} = i^{2} \; \\ &\; \text{Vông lập } \; p_{i} \; \text{bit thực hiện khi n} \; n^{2} \leq i \; \text{ch} \; i^{2} \; \text{cm} \; 2 \; \\ &\; \text{Từ dây suy ra} \; : \\ &\; \alpha_{i} = \begin{bmatrix} 0 & \text{nổu } \; i^{2} \; < \frac{n}{2} & \text{libit thy } \; p_{i} \; \text{Hiy viết channeg trinh interaction of doin a divelop plan that a public nổu dóin a divelop plan that a plan though the doin a divelop plan that a plan the plan the plan the plan the plan that a plan the plan$$



- Những tính toán lặp
 Tùy tình huống
- 2. Các loại tính toán lặp
- Số lần lặp xác định tường minh: được thể hiện rõ ràng trong đoạn mã. Có thể tính toán bằng một công thức xác định.
 Ví dụ: Tổng n số nguyên.
- Nói hai lập không tường minh: biến sẽ ngẫu nhiên phụ thuộc vào dữ liệu đầu vào và phân bố. Ví dụ: Tim số lớn nhất.

2. Phân tích trực tiếp

• Ví dụ 4: Xét đoạn mã.



- Vòng lặp while ngòai cùng: số lần lặp tường minh: n lần .
 Vòng lặp while bên trong: số lần lặp không xác định. Cách giải quyết:

 Goi a, là só lần lập của vòng while này (quy ước linh độc lập).

 Việc xác định số phép gán, so sánh trong
 - đoạn mã sẽ quy về tính $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i}$ theo α_{i}
- Ta thấy j là tổng với các số là 1, 3, 5, ...
 Nên là các số chính phương.
 ⇒ α_i là số phần từ của {r/ r≥1 & r² ≤i}.
 ⇒ α_i = [√i]

2. Phân tích trực tiếp	2.	Phân	tích	trực	tiếp
------------------------	----	------	------	------	------

• Ví dụ 5: Xét đoạn mã tương tự ví dụ 4.

$$\begin{array}{l} |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-1|:\\ |-$$

2. Phân tích trực tiếp

• Ví dụ 6: xét đoạn mã

Đoạn chương trình dùng khi nào?

 $i=0; \\ A[n]=x; \\ while \ A[i] \neq x \ do \\ i=i+1;$

$$\begin{split} &\text{Do an chang trinh ding trong các trường hợp sau:} \\ &\bullet | i = n \Leftrightarrow x \neq A[i], \ \forall i \in \{0,1,...,n-1\} \\ &\bullet | i < n \Leftrightarrow \exists \ i_0 \in \{0,1,...,n-1\} \text{ sao cho } x = A[i_0] \ và \\ &\quad x \neq A[i_j], \ \forall j < i_0 \end{split}$$

Vậy số lần lặp không xác định tưởng minh, nhưng lại tưởng minh cho một máng dữ liệu cụ thể

- Rế nhánh tất định:
 Cân bằng cách nhánh
 Độ lệch các nhánh rẽ tính được
 Không phụ thuộc dữ liệu nhập
 Rẽ nhánh phụ thuộc phân bố dữ liệu:
 Phải tính toán theo xác suất phân bố của dữ liệu

Ví dụ 7: Tìm số lớn nhất trong mảng một chiều.

Biến α_n là biến ngẫu nhiên lấy các giá trị Rời rạc $\{0,\,1,\,2,\,...,\,\text{n-}1\}$

2. Phân tích trực tiếp

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \text{V (d_{\sc i}$ 8:} \\ & \stackrel{s=0;}{\underset{j=1}{\text{in }}} \\ & \text{while } \inf_{j=1} o \\ & \text{p_1} \xrightarrow{\text{c odd}} \\ & \underset{i=j+1}{\text{c odd}} \\ & \underset{i=j+1}{\text{c odd}} \end{array}$$

số phép so sánh = n+1+
$$\sum_{i=1}^{n} P(i)|_{\text{so sideh}} = n+1+\sum_{i=1}^{n} (i^2+1)$$

$$= 2n+1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{n^3}{}$$

số phép gán = $2n+2+\sum_{i=1}^{n} P(i)|_{so sánh} = ?$

2. Phân tích trực tiếp

• Ví dụ 9:



So sánh = α +1 Gán = 2 +2 α

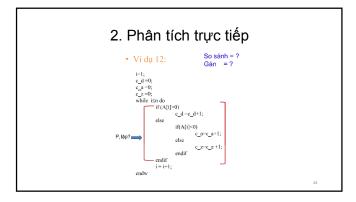
—→ Cần ước lượng α Có $\alpha(n) \approx \log_2 n$

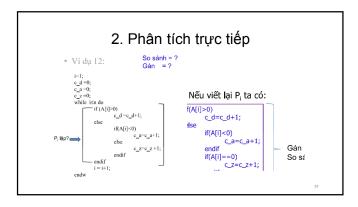
2. Phân tích trực tiếp

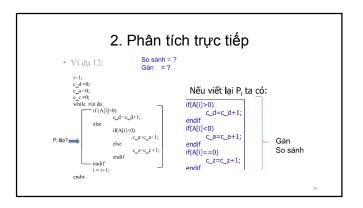
• Ví dụ 10: $\sup_{\substack{i=1;\\ \text{while isin do}\\ \text{j=i;}\\ \text{while } = 0 \text{ do}}} \sup_{\substack{j=1,\\ \text{j=j/2:}\\ \text{endw}}} w_{i} = \sum_{j=j/2:} \sup_{\substack{j=j/2:\\ \text{j=j/2:}}} w_{i} = \sum_{j=j/2:} w_{i} = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha(i)+1) = 2n+1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(i)$ So sánh = n+1 + $\sum_{j=1}^{\infty} P_{i} = n+1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha(i)+1) = 2n+1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(i)$ Gán = ? Bài tập 4

2. Phân tích trực tiếp

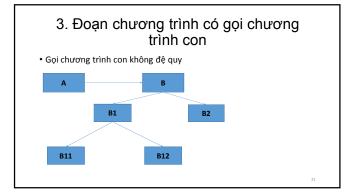


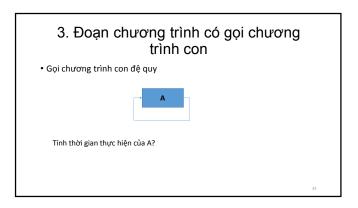






2. Phân tích trực tiếp • Ví dụ 13: tound = false; i=1; sum=0; while i = 10 if (((found)&&(A[i]==X)) idx. [=i; ound=true; endif sum=sum+A[i]; endw • Ví dụ 13: • Khi $x \in \{A[i] / i = 1...n\}$ - So sánh = 3n + 1 • Khi $x \in \{A[i] / i = 1...n\}$ - So sánh = 3n + 1 • So sánh = 3n + 2n - So sánh = 3n + 1





3.	Đoạn	chương	trình	CÓ	gọi	chươi	าดู
		trìr	nh cor	1			

- Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
 - Cách giải quyết:
 - 1. Thành lập phương trình đệ quy
 - 2. Giải phương trình đệ quy Nghiệm của lời giải ở bước 2 là thời gian thực hiện chương trình

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

- Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
 - Phương trình đệ quy: Biểu diễn mỗi liên hệ giữa T(n) với T(k), k < n. Trong đó T(n) thời gian thực hiện chương trình và T(k) thời gian thực hiện với kích thước bộ dữ liệu là k, và k<n.
 - Để lập phương trình: Căn cứ vào chương trình đệ quy.

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

- Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
 - Dạng tổng quát:

$$T(n) = \begin{cases} C(n_0), & \text{v\'oi } n = n_0 \\ T(k) + d^* & \text{v\'oi } n > k > n_0 \end{cases}$$

- $C(n_0)$: Thời gian thực hiện khi $n=n_0$
- T(k): thời gian thực hiện khi n>k>n₀

 d*: Thời gian phân chia và tổng hợp kết quả

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
Ví dụ: xét hàm tính giai thừa

```
Function gt(n)
begin
if n=0 then gt=1
else gt=n*gt(n-1)
end
```

Gọi T(n) là thời gian tính n!, thì T(n-1) là thời gian tính (n-1)! Khi n=0, ta có C(0)=1 (phép gán)

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

• Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy

```
Ví dụ: xét hàm tính giai thừa
Function gt(n)
begin
if n=0 then gt=1
else gt=n*gt(n-1)
end
Khi n>0, hàm gọi đệ quy gt(n-1), tốn T(n-1)
Tổng hợp kết quả ở đây cần 1 phép gán, d*=1
```

38

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
Ví dụ: xét hàm tính giai thừa

Khi n>0, hàm gọi đệ quy gt(n-1), tốn T(n-1) Tổng hợp kết quả ở đây cần 1 phép gán, $d^*=1$

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

- Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
 - Giải phương trình đệ quy Phương pháp truy hồi
 - 1. Với $n>k>n_0$: dùng phương trình đệ quy lần lượt thay thế T(k) vào vế phải
 - 2. Dừng khi $k=n_0$
 - 3. Thế $T(n_0)$ để tìm T(n)

ın

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
 Giải phương trình đệ quy – Phương pháp truy hồi

$$\begin{array}{lll} \text{1. V\'i dụ: Giải} & & & \text{T(n)} = \left\{ \begin{array}{lll} 1, & & \text{v\'oi } n = 0 \\ \\ T(n) = T(n - 1) + 1 & & & \text{T(n - 1)} + 1 & \text{v\'oi } n > k > 0 \\ \\ = T(n - 2) + 1 + 1 & & & & \\ & & \dots & & \\ = T(n - i) + i & & & \end{array} \right.$$

Dừng khi n-i = 0, hay i=n, khi đó T(n) = 1 + n = O(n)

3. Đoạn chương trình có gọi chương trình con

Độ phức tạp chương trình con dạng đệ quy
 Giải phương trình đệ quy – Phương pháp truy hồi

1. Ví dụ: Giải
$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{với } n=1 \\ T(n/2) + 1 & \text{với } n>1 \end{cases}$$

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

$$= T(n/2^2) + 1 + 1$$
....
$$= T(n/2^i) + i$$
Dừng: $n/2^i = 1$ (n_0), hay $i = log_2 n$, khi đó $T(n) = 0 + log_2 n$

- Chèn thêm lệnh đếm trong đoạn mã
- Phát sinh dữ liệu để thực thi đoạn mã
- Ghi xuống file (dạng văn bản)
- Dùng Excel vẽ đồ thị tính phương sai, độ lệch chuẩn → ước lượng độ phức tạp.

4.7

4. Đánh giá bằng thực nghiệm

```
Ví dụ: Thuật toán tim giá trị lớn nhất

max = A[0]:
i=1;
while i ≤ n do
if(max-A[i])
max = A[i]:
endif
endw

1. Câi đặt hàm
int findMax(int n, int a∏) {
...
}
```

4. Đánh giá bằng thực nghiệm

```
2. Cài dật đếm
int evaluace i ind Max(int n, int a[], long &gan, long &sosanh){
int max=q[0];
int i=1;
gan=2;
sosanh=0;
while(i=n);
int max=a[i];
max=a[i];
gan++;
j++;
gan++;
}
sosanh++;
return max;
```

4. Đánh giá bằng thực nghiệm

```
3. Phát sinh dữ liệu void generateData(int n, int *a){
// dùng hám random hay rank hoặc kết hợp nhiều // hám, hay tự viết (sách)

A. Chay thử nghiệm và ghi dữ liệu
#define à LOP 200
#define à LOP 200
int a flà MAX;
void runData(char *name){
FIELE **Pe - Greenfanme, "wt");
if(p==d ULL){
printf;"Can not open to write file!!!");
retum;
```

4. Đánh giá bằng thực nghiệm

```
int n=1;
white(n=å LOOP){
long gan=0;
long sosanh=0;
generateData(å MAX,a);
evaluteFindMax(å MAX,a,gan,sosanh);
fprintff(fp,"%dtv%etv%e\n",n,gan,sosanh);
n++;
  fclose(fp);
```

4. Đánh giá bằng thực nghiệm

Chú ý

- Phân biệt rõ ràng: phép gán, so sánh khóa, sao chép mẫu tin, so sánh
 Ví dụ khi so sánh khóa là chuỗi k kỳ tự thi?
- Vì dụ khi số sanh khôa là chuôi k kỳ tự t
 Sao chép một record sinh viên?
 Phép hoán đổi 2 phần tử swap(a[i],a[j]):
 Chi là 2 số nguyên → 3 phép gán
 2 phần tử bắt kỳ?

	NÔI	DUNG	BÀI	HOC
--	-----	-------------	-----	-----

- I. Giới thiệu
- II. Phân tích trực tiếp các đoạn mã
- III. Phân tích đoạn mã có lời gọi chươn trình con
- IV. Đánh giá dựa trên thực nghiệm
- V. Bài tập

49

5. Bài tập

- 1. Tính số phép so sánh trong đoạn mã ở ví dụ 1 slide 11.
- Sử dụng công thức tính tổng dãy lüy thừa tính ra độ phức tạp lý thuyết ở ví dụ 2 slide 13, đánh giấ bằng thực nghiệm chương trình trong ví dụ 2 slide 13 và so sánh với đánh giá lý thuyết.
- 3. Tính tham số $\alpha(i)$ qua đó tính số phép so sánh ở ví dụ 10 slide 26
- 4. Tính số phép gán ở ví dụ 10 trang 26.
- 5. Tính số phép so sánh, số phép gán trong đoạn chương trình ở ví dụ 11 slide 27.
- 6. Tính số phép so sánh, số phép gán trong đoạn chương trình ở ví dụ 12 slide 28.