

## Analysis and Design of Algorithms

### Lecture 11,12 Backtracking Method

Lecturer: Ha Dai Duong  
duonghd@mta.edu.vn

2/2/2017

1

---

---

---

---

---

---

---

### Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/2/2017

2

---

---

---

---

---

---

---

### Nội dung

- 1. Lược đồ chung**
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/2/2017

3

---

---

---

---

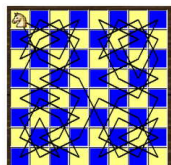
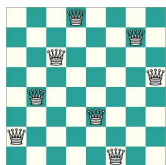
---

---

---

## Giới thiệu

- Phương pháp quay lui dùng để giải các bài toán mà lời giải của nó **X** là một tập các phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
- Ví dụ: Bài toán 8 hậu, Mã đi tuần ...



2/2/2017

4

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ý tưởng

- Ý tưởng chính của phương pháp quay lui là các bước hướng tới lời giải cuối cùng của bài toán dựa trên việc **Thử-và-Sai**.
- Tại mỗi bước:
  - Nếu có 1 lựa chọn được chấp nhận thì ghi nhận lại lựa chọn này và tiến hành các bước thử tiếp theo;
  - Nếu tất cả các lựa chọn không được chấp nhận thì trở lại bước trước, xóa bỏ sự ghi nhận của ứng viên và chọn lựa ứng viên tiếp theo.

2/2/2017

5

---

---

---

---

---

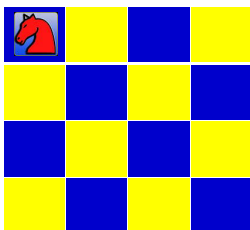
---

---

---

## Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))



2/2/2017

6

---

---

---

---

---

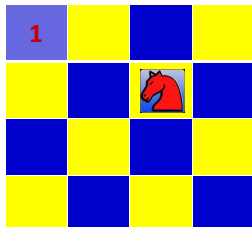
---

---

---

### Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))



2/2/2017

7

---

---

---

---

---

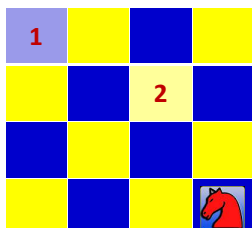
---

---

---

### Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))



2/2/2017

8

---

---

---

---

---

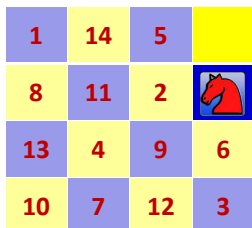
---

---

---

### Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))



2/2/2017

9

---

---

---

---

---

---

---

---

### Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
13	4	9	6
10	7	12	3

2/2/2017

10

---

---

---

---

---


---

---

---

### Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7	12	3

2/2/2017

11

---

---

---

---

---


---

---

---

### Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7		3

2/2/2017

12

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7	12	3

2/2/2017

13

---

---

---

---

---

---

---

---

## Quay lui

- Khi quay lui điểm quan trọng của thuật toán là phải ghi nhớ tại mỗi bước đi để tránh trùng lặp khi quay lui.
- Dễ thấy cấu trúc ngăn xếp khá phù hợp để lưu trữ các thông cần ghi nhớ như đề cập ở trên.
- Đệ qui là kỹ thuật thường được sử dụng trong phương pháp quay lui.

2/2/2017

14

---

---

---

---

---

---

---

---

## Lược đồ chung

- Lời giải bài toán có thể mô tả dạng 1 vector  $n$  chiều  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn một điều kiện nào đó.
- Giả sử đã xây dựng được  $i-1$  thành phần  $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ , cần xác định thành phần thứ  $i$ :
  - Nếu khả năng  $k$  nào đó phù hợp  $\rightarrow$  lấy  $x_i=k$ , ghi nhận trạng thái đã dùng của  $k$ . Nếu  $i=n \rightarrow$  có được 1 lời giải.
  - Nếu không có khả năng nào cho  $x_i$  thì quay lui và chọn lại  $x_{i-1}$ .

2/2/2017

15

---

---

---

---

---

---

---

---

## Lược đồ chung ...

```

Try(i) ≡
  for ( j = 1 → k)
    If (  $x_i$  chấp nhận được khả năng j)
    {
      Xác định  $x_i$  theo khả năng j;
      Ghi nhận trạng thái mới;
      if( i < n)
        Try(i+1);
      else
        Ghi nhận nghiệm;
        Trả lại trạng thái cũ cho bài toán;
    }
  
```

2/2/2017

---

---

---

---

---

---

---

---

## Nội dung

1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán 8 hậu**
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/2/2017

17

---

---

---

---

---

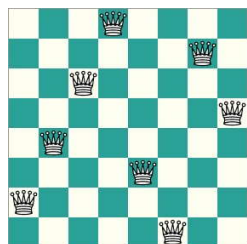
---

---

---

## Bài toán

- Hãy tìm cách xếp 8 con hậu trên một bàn cờ vua sao cho không con nào ăn được nhau.



- Ví dụ: Đây là 1 PA

2/2/2017

18

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán 8 hậu

1. Lần lượt xếp các con hậu vào bàn cờ
2. Giả sử đã xếp được  $i$  con hậu (từ 1 đến  $i$ )
3. Xếp hậu thứ  $i+1$ 
  - a. Nếu tìm được 1 ô hợp lệ (không bị các con hậu trước đó ăn)  $\rightarrow$  xếp hậu thứ  $i+1$  vào vị trí vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
  - b. Nếu không tìm được ô hợp lệ  $\rightarrow$  tìm vị trí phù hợp khác để đặt lại hậu thứ  $i$ .

2/2/2017

19

---

---

---

---

---

---

---

---

## Phương án (nghiệm) của bài toán

- Nhận xét: Mỗi con hậu phải nằm trên 1 hàng
- Dùng mảng  $x[1..8]$  để thể hiện một phương án của bài toán:
  - Chỉ số mảng  $i$ : dòng chứa con hậu thứ  $i$  (chỉ số dòng là cố định)
  - Giá trị  $x[i]$  ( $i=1..8$ ): là cột đặt con hậu thứ  $i$
- Bài toán xếp hậu trở thành: Lần lượt xác định giá trị các thành phần của  $x[i]$ ,  $i=1..8$ .

2/2/2017

20

---

---

---

---

---

---

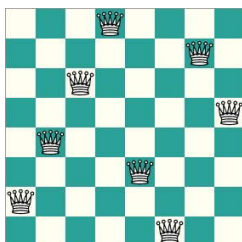
---

---

## Ví dụ

- Phương án nghiệm

$x[1]=4$   
 $x[2]=7$   
 $x[3]=3$   
 $x[4]=8$   
 $x[5]=2$   
 $x[6]=5$   
 $x[7]=1$   
 $x[8]=6$



2/2/2017

21

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ứng viên

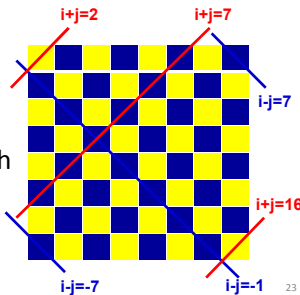
- Tại bước  $i$ 
  - Cần xác định giá trị  $k$ , là chỉ số cột, cho  $x[i]$ ,  $k=\{1,\dots,8\}$ .
  - Nếu ứng viên được chọn là  $j$ , nghĩa là  $x[i]=j$ , khi đó cần “đánh dấu” là cột  $j$  đã được chọn để bước sau không chọn lại.
- Tổ chức mảng  $a[j]$ ,  $j=1..8$ , để ghi nhận cột  $j$  đã được chọn hay chưa,  $a[j]=1$  là cột  $j$  chưa được chọn và  $a[j]=0$  là cột  $j$  đã được chọn.

2/2/2017

22

## Tính hợp lệ

- Hậu ở dòng  $i$ , chỉ được đặt vào cột  $j$  nếu  $i-1$  hâu đã đặt trước đó không “ăn” được hậu ở vị trí  $[i,j]$  (dòng  $i$ , cột  $j$ ).
- Trên đường chéo đỏ:
  - Giá trị  $i+j$  là hằng số
  - Có giá trị từ **2** đến **16**
- Trên đường chéo xanh:
  - Giá trị  $i-j$  là hằng số
  - Có giá trị từ **-7** đến **7**

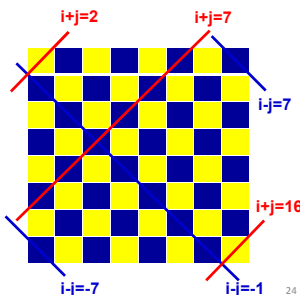


2/2/2017

23

## Tính hợp lệ ...

- Mảng  $b[k]$ ,  $k=2..16$ , nếu  $b[k]=1$ , được đặt ở đường chéo thuận  $k$ .
- Mảng  $c[k]$ ,  $k=-7..7$ , nếu  $c[k]=1$ , được đặt ở đường chéo nghịch  $k$ .



2/2/2017

24



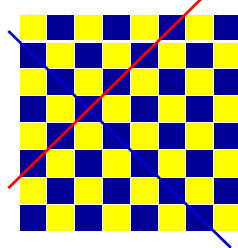
## Tính hợp lệ ...

- Như vậy hậu i (dòng i) được đặt vào cột j nếu:

$$b[i+j] = 1$$

và

$$c[i-j] = 1$$



2/2/2017

25

---

---

---

---

---

---

---

---

## Cài đặt

### Khởi tạo

$a[j] = 1$

$b[i+j] = 1$

$c[i-j] = 1$

```
Try(i) ≡
{
  for (j = 1; j <= 8; j++)
    if (a[j] && b[i+j] && c[i-j])
    {
      x[i] = j; a[j] = 0;
      b[i+j] = 0; c[i-j] = 0;
      if (i < 8)
        Try(i+1);
      else
        Xuất(x);
      /* Sau khi in 1 lời giải xong, trả lại
         tình trạng ban đầu còn trống cho hàng
         a[j], đường chéo i+j và đường chéo
         i-j, để tìm lời giải khác */
      a[j] = 1; b[i+j] = 1; c[i-j] = 1;
    }
}
```

2/2/2017

---

---

---

---

---

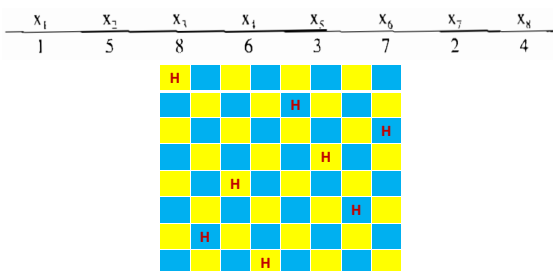
---

---

---

## Minh họa

- Một lời giải của bài toán với  $N=8$



2/2/2017

27

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kết quả

- Độ phức tạp thuật toán:  $T(n) = ???$
- Viết hàm  $Xuat(x)$ : in phương án lựa chọn ra màn hình.
- Code, chạy thử và trình bày kết quả

2/2/2017

28

---

---

---

---

---

---

---

---

## Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
- 3. Bài toán ngựa đi tuần**
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/2/2017

29

---

---

---

---

---

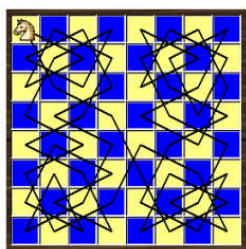
---

---

---

## Bài toán

- Trên bàn cờ vua, con mã ở vị trí  $(x_0, y_0)$
- Hãy chỉ ra hành trình để con mã đi qua tất cả các ô, mỗi ô 1 lần.
- Ví dụ: Đây là 1 PA trên bàn cờ 8x8 khi mã bắt đầu từ ô (1,1)



2/2/2017

30

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán mã đi tuần

1. Đặt ngựa tại vị trí  $(x_0, y_0)$  di chuyển ngựa theo luật cờ vua.
2. Giả sử đã đi được  $i-1$  bước.
3. Xét nước đi thứ  $i$ 
  - a. Nếu tìm được 1 nước đi hợp lệ (và ngựa chưa qua lần nào)  $\rightarrow$  xếp nước đi thứ  $i$  của ngựa vào vị trí vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
  - b. Nếu không tìm được ô hợp lệ  $\rightarrow$  tìm vị trí phù hợp khác để đặt lại bước đi thứ  $i-1$  của ngựa.

2/2/2017

31

## Phương án nghiệm

- Dùng mảng 2 chiều  **$h[x,y]$**  ( $x=1..N, y=1..N$ ) với qui ước:
  - $h[x,y] = 0$**  là ô  $(x,y)$  chưa có ngựa đi qua
  - $h[x,y] = k$**  là ngựa đã qua ô  $(x,y)$  ở nước thứ  $k$ .
- Bài toán trở thành: Xác định giá trị mảng  **$h$**  là nước đi của mã trong hành trình đi qua tất cả các ô bắt đầu từ  $(x_0, y_0)$ . Khi  $N \times N$  ô được đi qua ta có 1 phương án (nghiệm) thể hiện cách đi của mã.

2/2/2017

32

## Ví dụ

- Một phương án để mã đi tuần trên bàn cờ  $5 \times 5$  bắt đầu từ ô  $(1,1)$  là

1	18	13	8	3
12	7	2	19	14
17	24	21	4	9
22	11	6	15	20
25	16	23	10	5

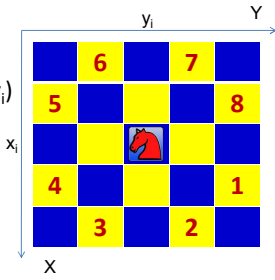
2/2/2017

33

## Ứng viên

### Tại bước i

- Vị trí mã đang đứng là  $(x_i, y_i)$
- Theo luật cờ vua mã có thể di chuyển tới nhiều nhất là 8 ô (hình bên)
- Tọa độ 8 vị trí so với vị trí hiện tại  $(x_i, y_i)$  lần lượt là:  
 $(x_i+1, y_i+2), (x_i+2, y_i+1), (x_i+2, y_i-1), (x_i+1, y_i-2)$   
 $(x_i-1, y_i-2), (x_i-2, y_i-1), (x_i-2, y_i+1), (x_i-1, y_i+2)$



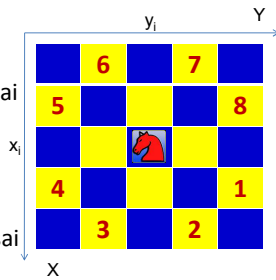
2/2/2017

34

## Ứng viên

### Tại bước i

- Dùng mảng  $a[1..8]$  mô tả sai khác tọa độ X so với  $x_i$ , theo trên ta có:  
 $a=(1,2,2,1,-1,-2,-2,-1)$
- Dùng mảng  $b[1..8]$  mô tả sai khác tọa độ Y so với  $y_i$ , theo trên ta có:  
 $b=(2,1,-1,-2,-2,-1,1,2)$



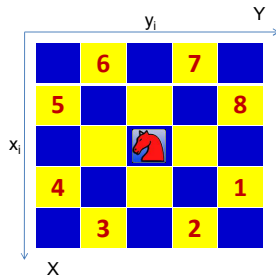
2/2/2017

35

## Tính hợp lệ

### Tại bước i

- Vậy ứng viên của bước  $i+1$  được xác định tại tọa độ  $(x_i+a[k], y_i+b[k])$  với  $k=1..8$
- Tính hợp lệ:
  - Ứng viên tại tọa độ  $(x_i+a[k], y_i+b[k])$  với  $k=1..8$  được chấp nhận nếu  $h[x_i+a[k], y_i+b[k]] = 0$ .
  - Ngoài ra  $(x_i+a[k], y_i+b[k])$  phải nằm trong bàn cờ



2/2/2017

36

```
Try(i, x, y) ≡
for(k = 1; k <= 8; k++)
{
    u = x + a[k];
    v = y + b[k];
    if (1 <= u ,v <= n &&h[u][v] == 0)
    {
        h[u][v] = i;
        if (i < n*n)
            Try(i+1,u,v);
        else
            xuất_h(); // In ma trận h
    }
    h[u][v] = 0;
}
```

Cài đặt

---

---

---

---

---

---

---

Minh họa

- Với N=5, mã xuất phát tại (1,1)

1	6	15	10	21
14	9	20	5	16
19	2	7	22	11
8	13	24	17	4
25	18	3	12	23

---

---

---

---

---

---

---

Minh họa

- Với N=6, mã xuất phát tại (2,3)

36	17	6	29	8	11
19	30	1	10	5	28
16	35	18	7	12	9
23	20	31	2	27	4
34	15	22	25	32	13
21	24	33	14	3	26

---

---

---

---

---

---

---

## Kết quả

- Độ phức tạp thuật toán:  $T(n) = ???$
- Viết hàm `Xuat_h(x)`: in phương án lựa chọn ra màn hình.
- Code, chạy thử và trình bày kết quả
- Lưu ý: Tùy vào kích thước bàn cờ, bài toán chỉ có lời giải ở một số vị trí bắt đầu  $(x_0, y_0)$  nhất định.

2/2/2017

40

---

---

---

---

---

---

---

---

## Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
- 4. Trò chơi Sudoku**
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/2/2017

41

---

---

---

---

---

---

---

---

## Bài toán

- Trò chơi: Cho hình vuông được chia thành  $9 \times 9$  ô, trên đó 1 số ô đã có sẵn các số từ 1 đến 9.



- Hãy đặt các số từ 1-9 vào các ô trống sao cho: 1 hàng, 1 cột, 1 vùng  $3 \times 3$  đều có đủ các số từ 1-9.

2/2/2017

42

---

---

---

---

---

---

---

---

### Ví dụ

Ban đầu

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

2/2/2017

43

### Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán Sudoku

1. Cần xếp N ô trống
2. Giả sử đã xếp được đến ô thứ i.
3. Xét ô thứ i+1
  - a. Nếu tìm được 1 giá trị thích hợp -> xếp giá trị đó vào ô thứ i+1 vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
  - b. Nếu không tìm được 1 giá trị hợp lệ -> tìm giá trị phù hợp khác để đặt lại cho ô thứ i.

2/2/2017

44

### Phương án nghiệm

- Dùng mảng 2 chiều **S[x,y]** (x=1..9, y=1..9) để lưu giá trị số Sudoku:
  - S[x,y]** = 0 là ô (x,y) chưa được xử lý
  - S[x,y]** = k (k=1..9) là giá trị số Sudoku.
- Bài toán trở thành: Xác định giá trị mảng **S** là các số Sukodu. Khi tất cả các ô được đặt ta có 1 phương án (nghiệm) thể hiện 1 cách chơi Sukodu.

2/2/2017

45

## Ứng viên

- Ứng viên (giá trị) có thể đặt cho ô có tọa độ  $(x_i, y_i)$  là giá trị  $k$ :  
 $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2/2/2017

46

---

---

---

---

---

---

---

---

## Tính hợp lệ

- Ứng viên  $k$  được đặt vào ô  $(x_i, y_i)$  nếu
  - Trên hàng  $x_i$  chưa có giá trị  $k$
  - Trên cột  $y_i$  chưa có giá trị  $k$
  - Vùng  $3 \times 3$  chứa  $(x_i, y_i)$  chưa có giá trị  $k$

2/2/2017

47

---

---

---

---

---

---

---

---

## Cài đặt

- Tính hợp lệ, hàm `FEASIBLE( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, \text{FEASIBLE}(S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y, k)$ ):`

```

for  $i \leftarrow 1$  to 9
  if  $S[x][i] = k$ 
    return FALSE
for  $i \leftarrow 1$  to 9
  if  $S[i][y] = k$ 
    return FALSE
 $a \leftarrow \lfloor (x-1)/3 \rfloor, b \leftarrow \lfloor (y-1)/3 \rfloor$ 
for  $i \leftarrow 3a+1$  to  $3a+3$ 
  for  $j \leftarrow 3b+1$  to  $3b+3$ 
    if  $S[i][j] = k$ 
      return FALSE
return TRUE
```

2/2/2017

48

---

---

---

---

---

---

---

---



```

SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y$ ):
  if  $y = 10$ 
    if  $x = 9$ 
      print  $S$ 
    else
      SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x + 1, 1$ )
  else if  $S[x][y] = \emptyset$ 
    for  $k \leftarrow 1$  to 9
      if FEASIBLE( $S, x, y, k$ )
         $S[x][y] \leftarrow k$ 
        SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y + 1$ )
         $S[x][y] \leftarrow \emptyset$       [[for next branching]]
  else
    [[ $S[x][y]$  is given]]
    SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y + 1$ )

```

2/2/2017

49

### Minh họa

9	1	3	6	5	2	8	7	4
7	5	8	9	4	1	6	2	3
6	2	4	7	3	8	5	1	9
2	9	7	3	8	5	4	6	1
1	3	6	4	2	9	7	5	8
8	4	5	1	6	7	3	9	2
3	7	1	8	9	6	2	4	5
4	6	2	5	1	3	9	8	7
5	8	9	2	7	4	1	3	6

2/2/2017

50

### Minh họa ...

4	8	3	7	5	9	1	6	2
9	2	1	8	4	6	3	5	7
5	7	6	1	3	2	9	8	4
2	5	7	6	9	1	8	4	3
8	1	9	3	7	4	5	2	6
6	3	4	2	8	5	7	9	1
3	4	2	5	1	8	6	7	9
1	6	8	9	2	7	4	3	5
7	9	5	4	6	3	2	1	8

2/2/2017

51

### Minh họa ...

4	2	3	6	9	7	8	1	5
6	9	1	5	3	8	4	7	2
5	8	7	4	2	1	6	3	9
3	1	9	8	7	5	2	6	4
2	5	6	1	4	9	3	8	7
7	4	8	3	6	2	5	9	1
9	6	4	2	1	3	7	5	8
1	3	5	7	8	4	9	2	6
8	7	2	9	5	6	1	4	3

2/2/2017

52

---

---

---

---

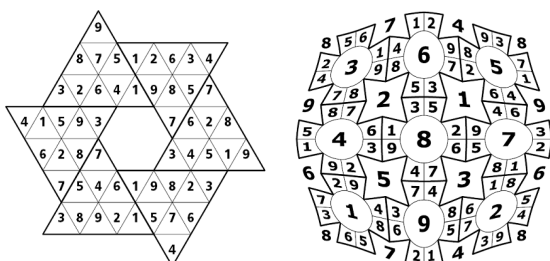
---

---

---

---

### Minh họa ...



2/2/2017

53

---

---

---

---

---

---

---

---

### Bài tập

1. Thực hiện việc đặt 5 con hậu trên bàn cờ, thể hiện kết quả từng bước.
2. Thực hiện các nước đi của con ngựa trên bàn cờ 5x5 bắt đầu từ ô (1,2) thể hiện kết quả từng bước.

2/2/2017

54

---

---

---

---

---

---

---

---

## Bài tập

3. Chơi trò sudoku (theo thuật toán) với các số đã cho như sau:

5	3		7				
6			1	9	5		
	9	8				6	
8			6				3
4			8		3		1
7			2				6
	6				2	8	
			4	1	9		5
			8			7	9

2/2/2017

55

---

---

---

---

---

---

---

---

## Bài tập

4. Hoàn thiện cài đặt bài toán 8 hậu
5. Hoàn thiện cài đặt bài toán mã đi tuần.
6. Hoàn thiện cài đặt trò chơi Sukodu.
- 7. Sử dụng phương pháp quay lui để xuất giải thuật đánh cờ caro (tự động) cho máy tính.**
8. Giải bài toán cái túi theo giải thuật quay lui.

2/2/2017

56

---

---

---

---

---

---

---

---