Analysis and Design of Algorithms

Lecture 6,7 **The Greedy algorithms**

Instructor: Ha Dai Duong duonghd@mta.edu.vn

08/03/2016

Nội dung

- 1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán cái túi
- 3. Bài toán người du lịch
- 4. Đường đi ngắn nhất
- 5. Cây bao trùm nhỏ nhất
- 6. Bài toán tô màu
- 7. Bài toán các khoảng không giao nhau

Bài toán

- Cho đơn đồ thị G=(V,E)
 - V: Tập các đỉnh
 - E: Tập các cạnh
- Cây T gọi là cây bao trùm của G nếu T là đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh thuộc G (có số đỉnh =V)



Tìm cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất (Minimal Spanning Tree) MST

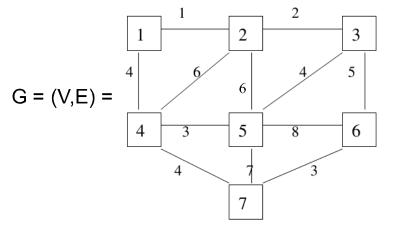
08/03/2016

Thuật toán Prim

- T = G(V_T,E_T) là cây khung tối thiểu cần tìm
- Ý tưởng (tham lam)
 - Chọn 1 đỉnh tùy ý vào V_T
 - Khi $|V_T| < |V|$
 - Tìm cạnh (s,t) $s \in V_T$, $t \in V \setminus V_T$ có trọng số nhỏ nhất (nối V_T và $V \setminus V_T$)
 - Thêm đỉnh t vào V_T , (s,t) vào E_T

Minh họa

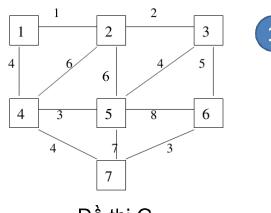
• Cho đồ thị



08/03/2016

Khởi tạo

• Bắt đầu từ đỉnh 1

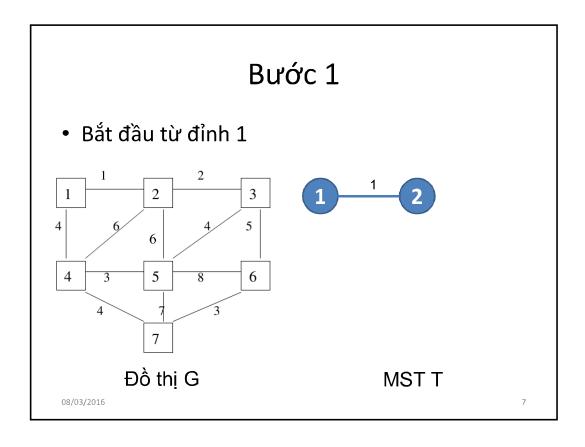


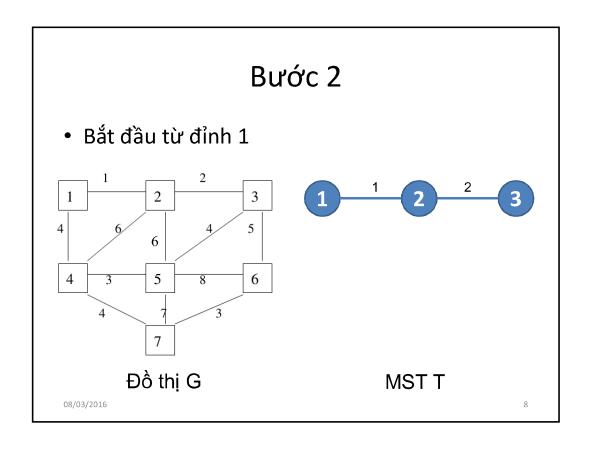
Đồ thị G

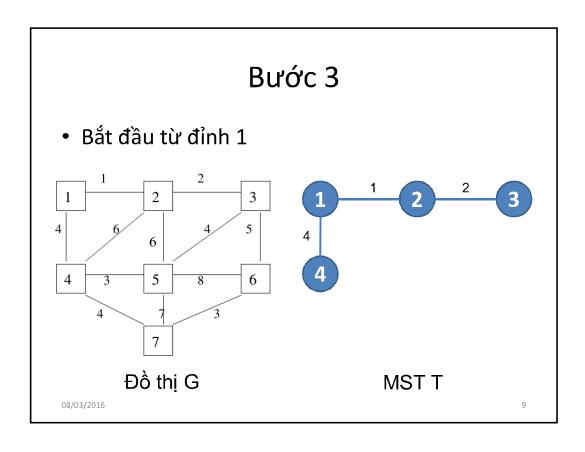
08/03/2016

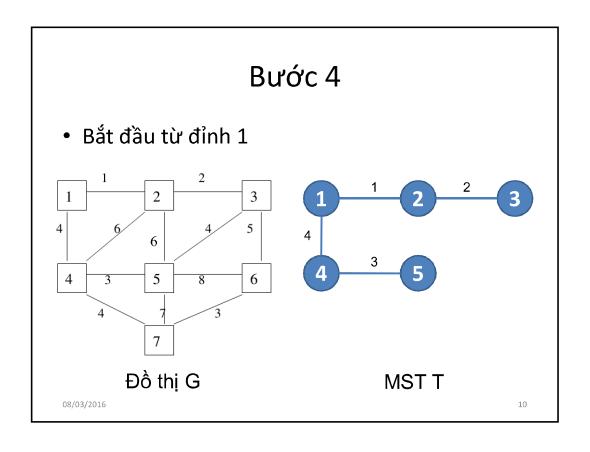
MST T

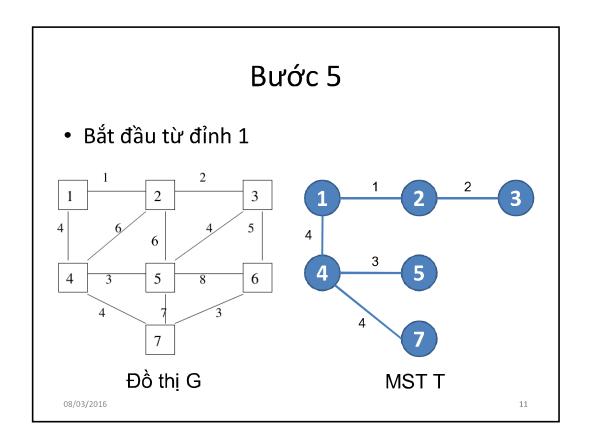
6

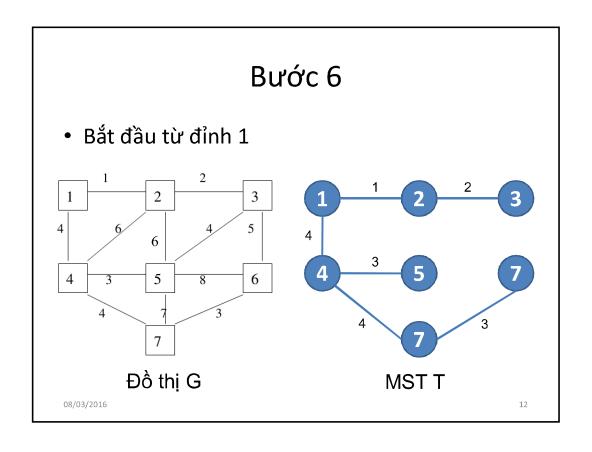




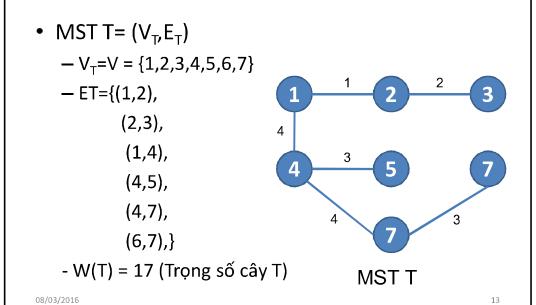








Kết quả



Cài đặt

• Biểu diễn G qua ma trận trọng số cạnh

$$c[i][j] = \begin{cases} Trong \ s\overline{\hat{o}} \ (i,j); N\overline{\hat{e}}u \ (i,j) \ t\overline{\hat{o}}n \ tai; \\ 0; i = j \\ \infty; N\overline{\hat{e}}u \ (i,j) \ kh\hat{o}ng \ t\overline{\hat{o}}n \ tai; \end{cases}$$

- Mång Closest[i]: Giá trị của nó đỉnh kề gần i nhất.
- Mång lowcost[i]: cho trong số của cạnh (i,closest[i]).

```
for (i=2;i <= n;i++)
                                              Min = Lowcost[2];
                                              k = 2;
void Prim (Mat c)
                                              for (j=3; j \le n; j++) // Chọn k
                                                      if (Lowcost[j] < Min)
       double Lowcost[MAX];
       int Closest[MAX];
                                                             Min = Lowcost[j];
       int i,j,k,Min;
                                                             k = j;
       for (i=2;i<=n;i++)
                                              cout<<endl<<k<<closest[k];
               Lowcost[i] = c[1][i];
                                              lowcost[k] = \infty;
               Closest[i] = 1;
                                              // Khởi động lại Closest[], Lowcost[]
                                              for (j=2; j<=n; j++)
                                                      if ((c[k][j] < lowcost[j]) && (lowcost[j] < \infty))
                                                             lowcost[j] = c[k][j];
                                                             closest[j] = k;
    08/03/2016
```

Bài toán

- Cho đơn đồ thị G=(V,E)
 - V: Tập các đỉnh
 - E: Tập các cạnh
- Cây T gọi là cây bao trùm của G nếu T là đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh thuộc G (có số đỉnh =V)



Tìm cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất (Minimal Spanning Tree) MST

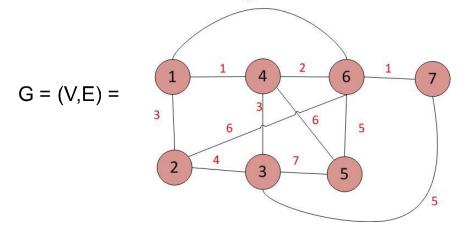
Thuật toán Kruskal

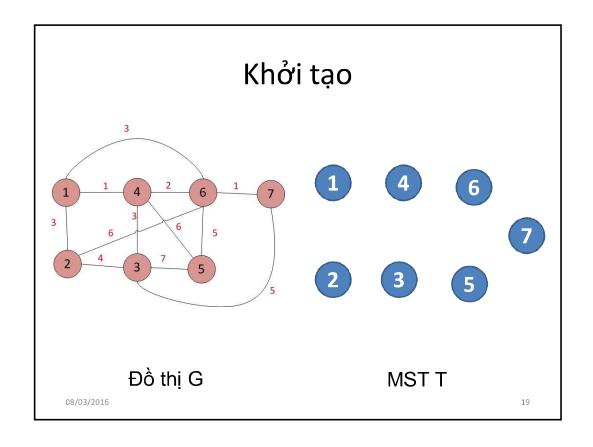
- T = $G(V_T, E_T)$ là cây khung tối thiểu cần tìm
- Khi G có n đỉnh thì T có n-1 cạnh
- Ý tưởng (tham lam): Xây dựng tập n-1 cạnh của T theo nguyên tắc:
 - Khởi tạo $E_T = \{\}, V_T = V$
 - Xét lần lượt các cạnh có trọng số nhỏ đến lớn nếu không tạo thành chu trình trong T thì thêm cạnh đó vào V_T .

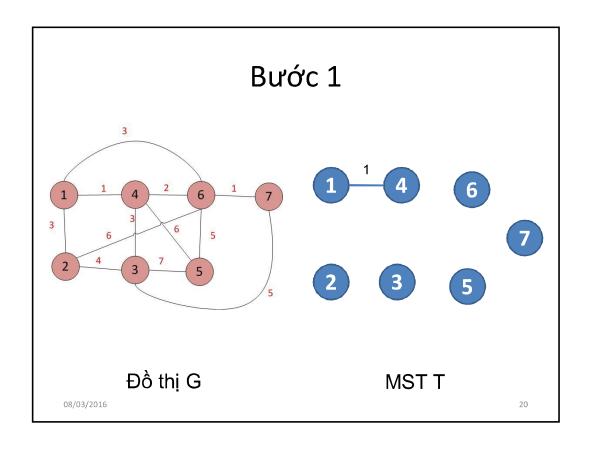
08/03/2016

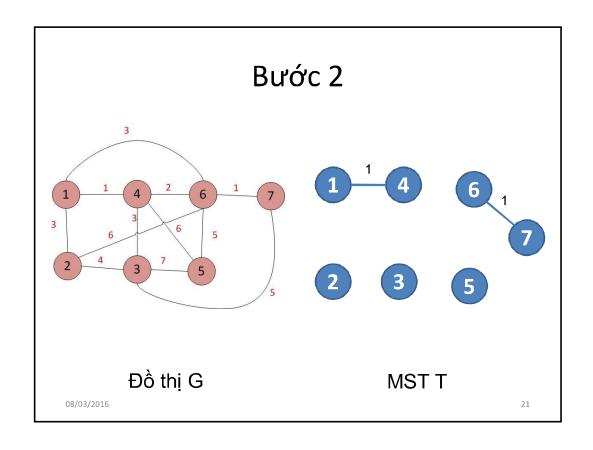
Minh họa

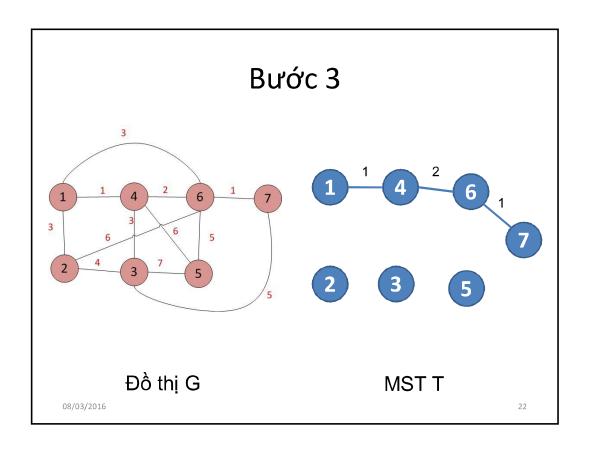
• Cho đồ thị

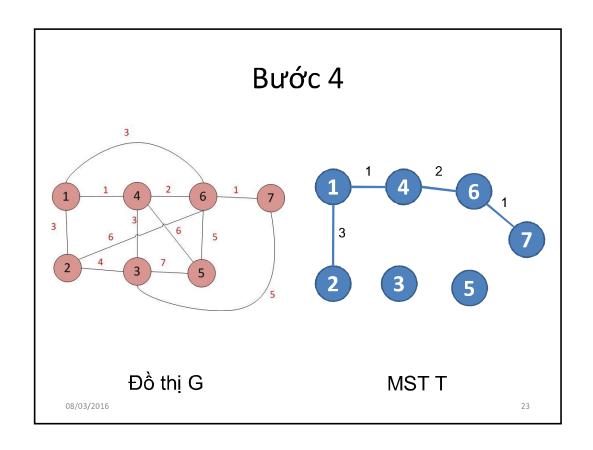


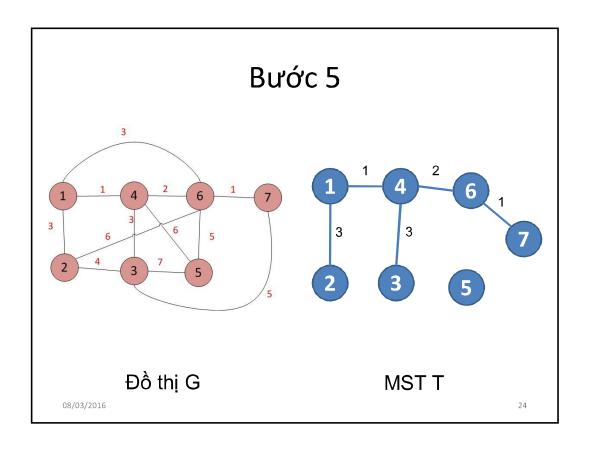


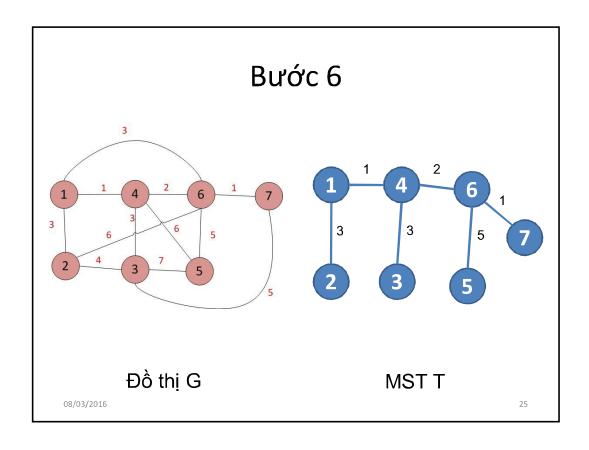


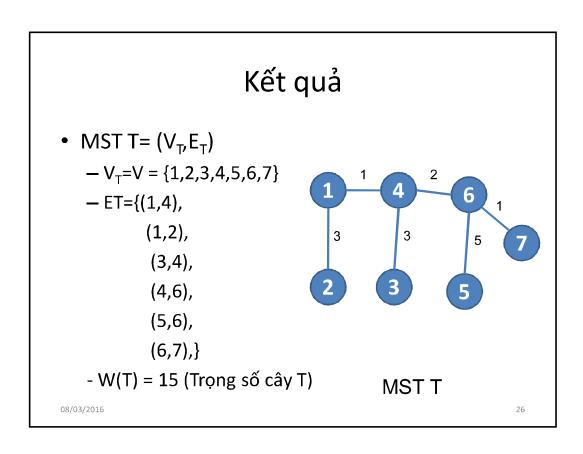












- Mô tả G bằng ma trận trọng số cạnh A[i,j].
- D mảng 1 chiều, nếu D[i]=k thì đỉnh i thuộc vào cây thứ k, D[i] = 0 thì đỉnh i chưa thuộc vào cây.
- Tìm min {A[i][j] } j = 1..n, i =1..n trừ các cạnh
 (i,j) mà D[i]=D[j]<>0 (những cạnh đó tạo thành
 chu trình).
- Thêm cạnh vừa tìm vào cây T, lặp lại bước 2 khi T còn là rừng.

08/03/2016

Cài đặt

- Xử lý cạnh (i,j) khi được thêm vào T:
 - Nếu D[i]=D[j]=0, cạnh (i,j) chưa thuộc vào cây nên khi lấy 2 đỉnh này vào tập cạnh ta cho chúng thuộc vào 1 cây mới. Khi đó k=k+1 và D[i]=D[j]=k.
 - Nếu D[i]=0 và D[j]<>0: i chưa thuộc vào T, j thuộc
 T => Ghép i vào cùng cây chứa j, D[i]=D[j].
 - Nếu D[i]<>0 và D[j]=0: i thuộc vào T, j không thuộc
 T => Ghép j vào cùng cây chứa i, D[j]=D[i].
 - Nếu D[i]<>D[j] và D[i]<>0, D[j]<>0: i, j thuộc 2 cây khác nhau trong T => Ghép 2 cây thành 1.

- Xử lý cạnh (i,j) khi được thêm vào T:
 - Nếu D[i]=D[j]=0, cạnh (i,j) chưa thuộc vào cây nên khi lấy 2 đỉnh này vào tập cạnh ta cho chúng thuộc vào 1 cây mới. Khi đó k=k+1 và D[i]=D[j]=k.
 - Nếu D[i]=0 và D[j]<>0: i chưa thuộc vào T, j thuộc
 T => Ghép i vào cùng cây chứa j, D[i]=D[j].
 - Nếu D[i]<>0 và D[j]=0: i thuộc vào T, j không thuộc
 T => Ghép j vào cùng cây chứa i, D[j]=D[i].
 - Nếu D[i]<>D[j] và D[i]<>0, D[j]<>0: i, j thuộc 2 cây khác nhau trong T => Ghép 2 cây thành 1.

08/03/2016

Cài đặt

- Xử lý cạnh (i,j) khi được thêm vào T:
 - Nếu D[i]=D[j]=0, cạnh (i,j) chưa thuộc vào cây nên khi lấy 2 đỉnh này vào tập cạnh ta cho chúng thuộc vào 1 cây mới. Khi đó k=k+1 và D[i]=D[j]=k.
 - Nếu D[i]=0 và D[j]<>0: i chưa thuộc vào T, j thuộc
 T => Ghép i vào cùng cây chứa j, D[i]=D[j].
 - Nếu D[i]<>0 và D[j]=0: i thuộc vào T, j không thuộc
 T => Ghép j vào cùng cây chứa i, D[j]=D[i].
 - Nếu D[i]<>D[j] và D[i]<>0, D[j]<>0: i, j thuộc 2 câykhác nhau trong T => Ghép 2 cây thành 1.

- Xử lý cạnh (i,j) khi được thêm vào T:
 - Nếu D[i]=D[j]=0, cạnh (i,j) chưa thuộc vào cây nên khi lấy 2 đỉnh này vào tập cạnh ta cho chúng thuộc vào 1 cây mới. Khi đó k=k+1 và D[i]=D[j]=k.
 - Nếu D[i]=0 và D[j]<>0: i chưa thuộc vào T, j thuộc
 T => Ghép i vào cùng cây chứa j, D[i]=D[j].
 - Nếu D[i]<>0 và D[j]=0: i thuộc vào T, j không thuộc
 T => Ghép j vào cùng cây chứa i, D[j]=D[i].
 - Nếu D[i]<>D[j] và D[i]<>0, D[j]<>0: i, j thuộc 2 câykhác nhau trong T => Ghép 2 cây thành 1.

08/03/2016

31

Cài đặt

```
typedef struct Egde {
         int x,y;
       void Kruskal(int **A, int n){
         char *D = new char[n];
         Egde *L = new Egde[n-1];
         int min, Dem = 0, Sum = 0, T = 0, Temp;
         for(int i=0; i<n; i++)
           D[i] = 0;
         do{
           min = MAXINT;
           for( i=0; i<n; i++)
           for(int j=0; j<n; j++)
           if(A[i][j]>0 && min>A[i][j]&&!(D[i]!=0 && D[i]==D[j])){
               min = A[i][j];
               L[Dem].x = i;
               L[Dem].y = j;
08/03/2016
```

32

```
/*Tạo ra cây mới*/
           if(D[L[Dem].x] == 0 && D[L[Dem].y] == 0){
            D[L[Dem].x] = D[L[Dem].y] = T;
          /*Đưa đỉnh tương ứng vào cây*/
          if(D[L[Dem].x] == 0 \&\& D[L[Dem].y]!= 0)
            D[L[Dem].x] = D[L[Dem].y];
          /*Đưa đỉnh tương ứng vào cây*/
          if(D[L[Dem],x]!= 0 \&\& D[L[Dem],y] == 0)
            D[L[Dem].y] = D[L[Dem].x];
          /*Ghép 2 cây thành 1 cây mới*/
           if(D[L[Dem].x]!= D[L[Dem].y] && D[L[Dem].y]!=0) {
            Temp = D[L[Dem].x];
            for( i=0; i<n; i++)
            if(Temp==D[i])
              D[i]=D[L[Dem].y];
           Sum+=min;
           Dem++;
         } while(Dem<n-1);
08/03/2016
```

Nội dung

- 1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán cái túi
- 3. Bài toán người du lịch
- 4. Đường đi ngắn nhất
- 5. Cây bao trùm nhỏ nhất
- 6. Bài toán tô màu
- 7. Bài toán các khoảng không giao nhau

Vấn đề

- Suppose that you are responsible for scheduling times for lectures in a university .
- You want to make sure that any two lectures with a common student occur at different times to avoid a conflict.
- We could put the various lectures on a chart and mark with an \X" any pair that has students in common.

08/03/2016

Vấn đề ...

Lecture	Α	\mathbf{C}	G	Н	Ι	L	Μ	Р	S
Astronomy		Χ	Χ	Х			Χ		
Chemistry	Х								Χ
Greek	Χ			Χ		Χ	Χ	Χ	
History	Х		Χ			Χ			Χ
Italian						Χ	Χ		Χ
Latin			Χ	Χ	Χ		Χ	Χ	Χ
Music	Х		Χ		Χ	Χ			
Philosophy			Χ			Χ			
Spanish		Χ		Χ	Χ	Χ			

 A more convenient representation of this information is a graph: One vertex for each lecture and in which two vertices are joined if there is a conflict between them

Lecture	A	\mathbf{C}	G	Н	Ι	L	Μ	P	\mathbf{S}	
Astronomy		Χ	Χ	X			Х			
Chemistry	X								X	S H C
Greek	X			X		\mathbf{X}	Χ	X		S H P C
History	Χ		Χ			Χ			Χ	
Italian						X	X		X	
Latin			X	X	X		X	X	X	7 , • • • • • • • • • • • • • • • • • • •
Music	Χ		Χ		Χ	Χ				I I I I I I I I I I
Philosophy			X			Χ				
Spanish		X		X	X	Χ				
										\mathbf{M}
08/03/201	16									37

Bài toán s H P C G A

- Bài toán: Tô mỗi đỉnh 1 màu sao cho 2 đỉnh kề nhau có màu khác nhau. Tìm cách tô tất cả đỉnh của đồ thị với số màu ít nhất.
- Ý nghĩa: Xếp lịch thi cuối kỳ sao cho số buổi cần tổ chức là ít nhất.

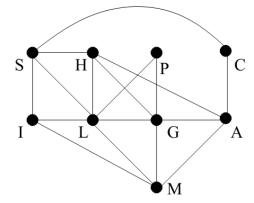
Tô màu tham lam

- Ý tưởng
 - Qui ước màu là các số: 1, 2, 3, ...
 - 1. Tô màu một đỉnh bất kỳ với màu 1
 - 2. Với đỉnh v chưa tô màu: Tô nó với màu là số nhỏ nhất chưa dùng với các đỉnh kề và đã được tô màu của v. (Nếu tất cả các đỉnh kề của v đã tô màu -> v sẽ được tô với màu mới).
 - 3. Lặp lại bước 2 cho đến khi tất cả các đỉnh được tô màu.

08/03/2016

Minh họa

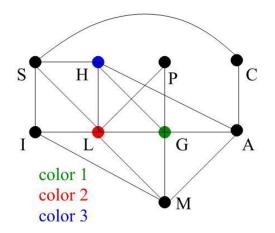
• Tô màu (tham lam) đồ thị sau



• Giả sử tô theo thứ tự: G, L, H, P, M, A, I, S, C

Minh họa ...

Then we would color G with color 1 (green), L with color 2 (red) since adjacency with G prevents it from receiving color 1 (green), and we color H with color 3 (blue) since adjacency with G and L prevents it from receiving colors 1 and 2 (green and red)

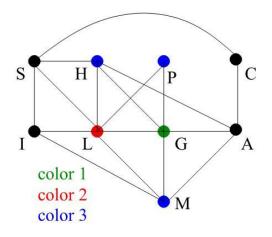


• Tô theo thứ tự: G, L, H, P, M, A, I, S, C

08/03/2016

Minh họa ...

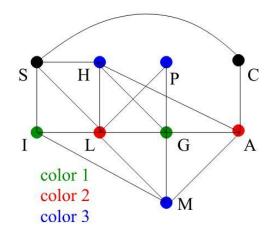
P and M also cannot receive colors 1 and 2 (green and red), so they are given color 3 (blue):



• Tô theo thứ tự: G, L, H, P, M, A, I, S, C

Minh họa ...

Then A cannot receive colors 1 and 3 (green and blue), so we give it color 2 (red), while I cannot receive colors 2 and 3 (red and blue), so we give it color 1 (green)

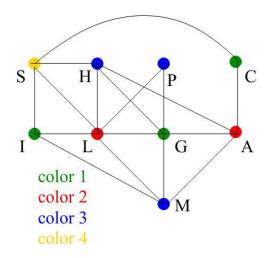


Tô theo thứ tự: G, L, H, P, M, A, I, S, C

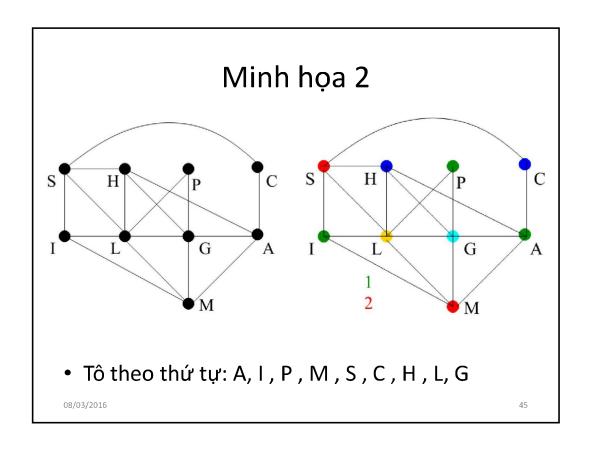
08/03/2016

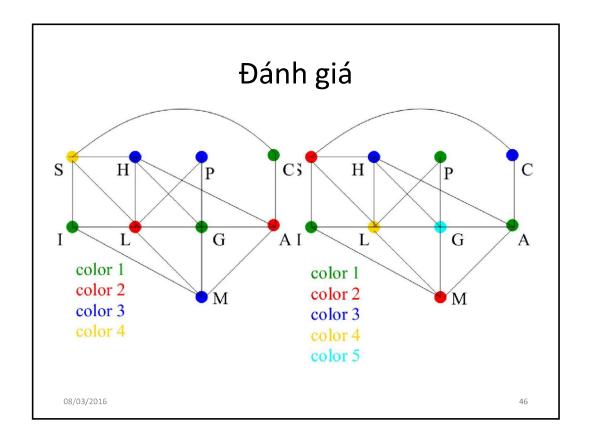
Minh họa ...

Vertex S cannot receive color 1, 2, or 3, and so we give it color 4 (say, yellow). Vertex C cannot receive color 2 or 4 (red or yellow), so we give it color 1 (green)



• Tô theo thứ tự: G, L, H, P, M, A, I, S, C





Nội dung

- 1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán cái túi
- 3. Bài toán người du lịch
- 4. Đường đi ngắn nhất
- 5. Cây bao trùm nhỏ nhất
- 6. Bài toán tô màu
- 7. Bài toán các khoảng không giao nhau

08/03/2016

Bài toán

- Có n công việc cần thực hiện; a_i thời điểm bắt đầu, b_i - thời điểm kết thúc công việc i (i=1..n)
- Hãy chọn ra các công việc để một người có thể thực hiện được nhiều việc nhất.
- Các dạng tương tự: Bài toán xếp thời gian biểu cho các hội thảo, bài toán lựa chọn hành động (Activity Selection)...

Thuật toán xếp lịch 1

- Ý tưởng (tham lam):
 - Gọi C là tập các công việc ban đầu
 - Gọi S là tập các công việc được lựa chọn
 - Sắp xếp các công việc theo thứ tự tăng dần của đầu mút trái (a_i).
 - Lần lượt xét các đoạn trong danh sách theo thứ tự đã sắp xếp và bổ sung đoạn thẳng đang xét vào S nếu nó không có điểm chung với bất cứ đoạn nào trong S.

08/03/2016 4

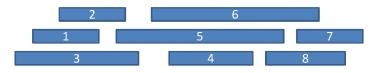
Thuật toán xếp lịch 1 ...

Chi tiết

```
procedure Greedy1; begin S:=\varnothing; (*\ S\ là\ tập\ các\ đoạn\ thẳng\ cần\ tìm\ *) <\underset{\check{S} \not= p}{\check{S}} x\acute{e}p\ các\ đoạn\ trong\ C\ theo\ thứ\ tự\ không\ giảm\ của\ mút\ trái> while <math>(C\neq\varnothing) do begin (a_c\ ,b_c\ ) \leftarrow doạn\ dầu\ tiên\ trong\ C; \\ C:=C\ \backslash\ (a_c\ ,b_c\ ); \\ if\ <(a_c\ ,b_c\ )\ không\ giao\ với\ bất\ cứ\ đoạn\ nào\ trong\ S> then\ S:=S\cup(a_c\ ,b_c\ ); \\ end; \\<S\ là\ tập\ cần\ tìm> end;
```

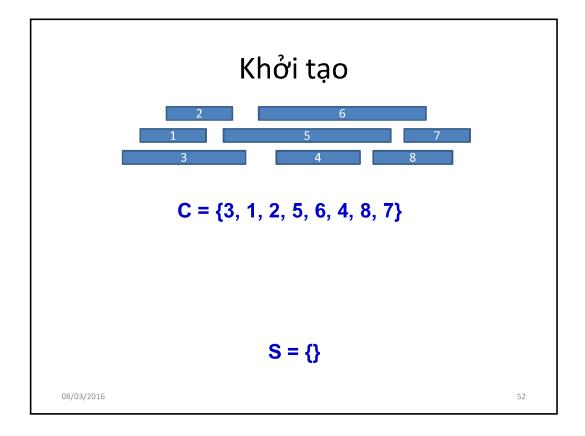
Minh họa

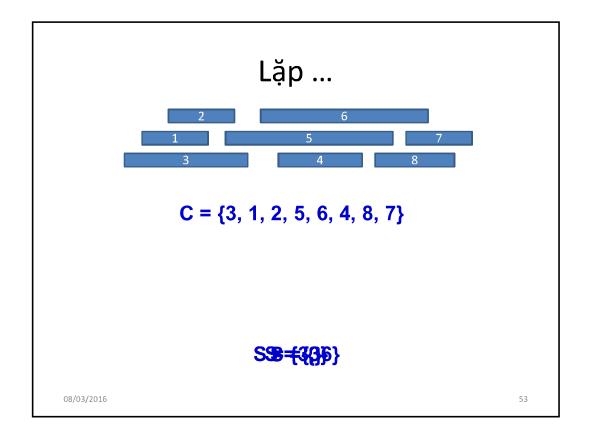
• Cho 8 công việc

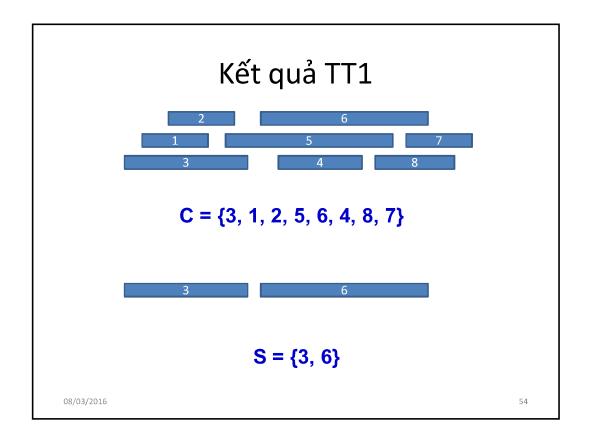


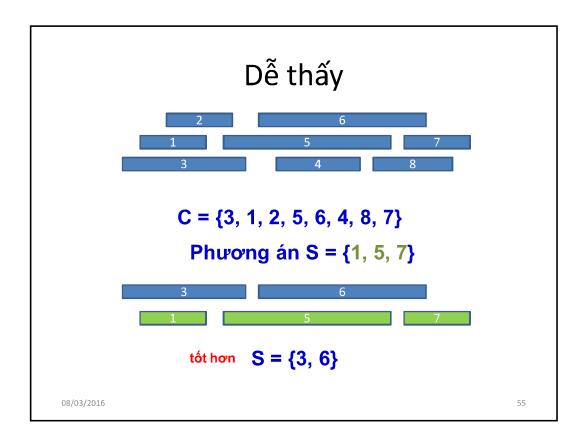
 Sắp xếp công việc theo thứ tự tăng dần của nút trái ta được thứ tự các công việc

$$C = \{3, 1, 2, 5, 6, 4, 8, 7\}$$









Thuật toán xếp lịch 2

- Ý tưởng (tham lam):
 - Gọi C là tập các công việc ban đầu
 - Gọi S là tập các công việc được lựa chọn
 - Sắp xếp các công việc theo thứ tự tăng dần của thời gian thực hiện công việc (b_i - a_i).
 - Lần lượt xét các đoạn trong danh sách theo thứ tự đã sắp xếp và bổ sung đoạn thẳng đang xét vào S nếu nó không có điểm chung với bất cứ đoạn nào trong S.

Thuật toán xếp lịch 3

- Ý tưởng (tham lam):
 - Gọi C là tập các công việc ban đầu
 - Gọi S là tập các công việc được lựa chọn
 - Sắp xếp các công việc theo thứ tự không giảm của đầu mút phải (b_i).
 - Lần lượt xét các đoạn trong danh sách theo thứ tự đã sắp xếp và bổ sung đoạn thẳng đang xét vào S nếu nó không có điểm chung với bất cứ đoạn nào trong S.

08/03/2016 5

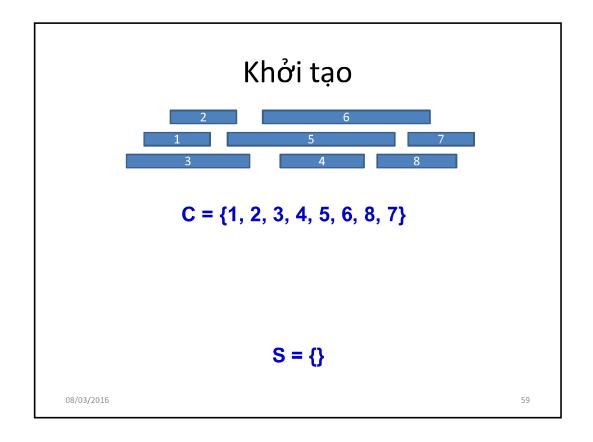
Minh họa

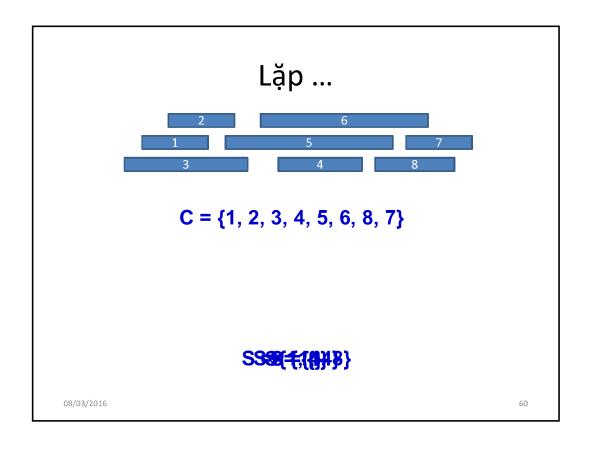
• Cho 8 công việc

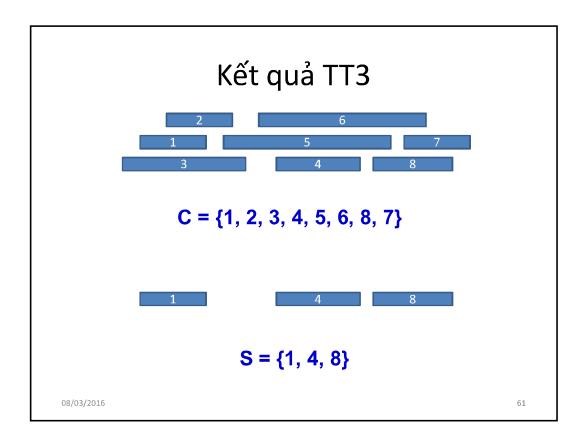


 Sắp xếp công việc theo thứ tự không giảm của mút phải ta được thứ tự các công việc

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7\}$$







- ACTIONSELECTION3(a[i], b[i]):
 - Sort (a[i],b[i]) in increasing order by b[i]
 - $S = \{1\}$
 - t = 1
 - for i = 2 to n
 if b[t]≤a[i] //C[i] does not confict with C[t]
 t = i
 S = S U {i}
 - return S

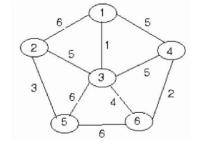
Đánh giá

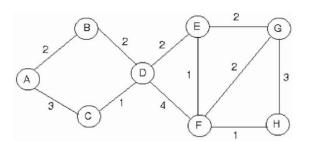
- Độ phức tạp T(n) = ?
- Mệnh đề: Thuật toán xếp lịch 3 cho lời giải tối ưu của bài toán

08/03/2016 63

Bài tập

1. Thực hiện từng bước giải thuật Prim trên các đồ thị sau:



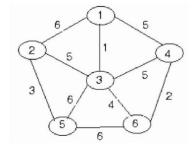


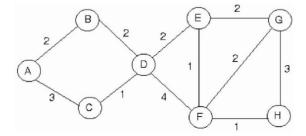
08/03/2016

64

Bài tập

2. Mô tả chi tiết thuật toán Kruskal và thực hiện từng bước giải thuật đó trên các đồ thị sau và so sánh kết quả với bài 1





08/03/2016

65

Bài tập

- 3. Cài đặt thuật toán Prim. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.
- 4. Cài đặt thuật toán Kruskal. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.
- Cài đặt thuật toán xếp lịch theo ý tưởng tham lam.
 Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.
- 6. Cài đặt thuật toán tô màu đồ thị. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.

Nội dung đã học

- 1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán cái túi
- 3. Bài toán người du lịch
- 4. Đường đi ngắn nhất
- 5. Cây bao trùm nhỏ nhất
- 6. Bài toán tô màu
- 7. Bài toán các khoảng không giao nhau