

Analysis and Design of Algorithms

Lecture 9,10 Dynamic Programming

Lecturer: Ha Dai Duong
duonghd@mta.edu.vn

2/2/2017

1

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/2/2017

2

Nội dung

- 1. Lược đồ chung**
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/2/2017

3

Chia để trị

- Khi chia bài toán thành các bài toán con, trong nhiều trường hợp, các bài toán con khác nhau lại chứa các bài toán con hoàn toàn giống nhau.
- Ví dụ: Tính số **Fibonacci** thứ **n**, **F(n)**:
 - $F(0)=0$, $F(1)=1$
 - $F(n)=F(n-2)+F(n-1)$ với $n>1$
 - $F(2)=1$, $F(3)=2$, $F(4)=3$, $F(5)=5$, $F(6)=8$...

2/2/2017

4

Chia để trị ...

- $Fib(n)$: Tiếp cận theo hướng chia để trị

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Function **Fib(n)**

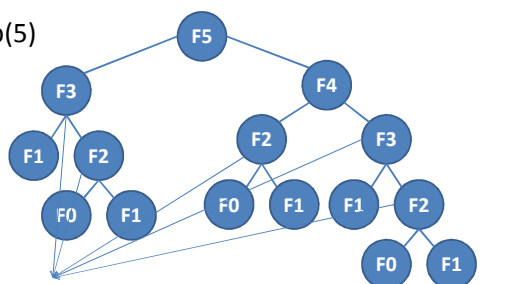
```
{
    If n<2 then
        return n;
    else
        return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

2/2/2017

5

Chia để trị ...

- $Fib(5)$



Tính lại các bài toán con nhiều lần

Khắc phục?

Quy hoạch động

2/2/2017

6

Qui hoạch động

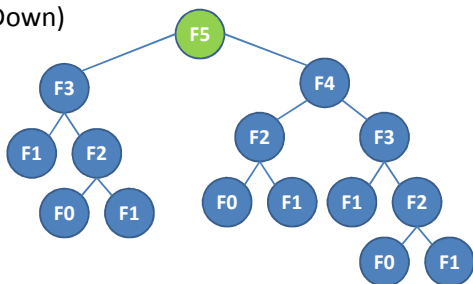
- Là một kĩ thuật thiết kế thuật toán theo kiểu chia bài toán lớn thành các bài toán con, sử dụng lời giải của các bài toán con để tìm lời giải cho bài toán ban đầu.
- Khác với chia để trị, quy hoạch động, thay vì gọi đệ quy, sẽ **tính trước** lời giải của các bài toán con và lưu vào bộ nhớ (thường là một mảng), và sau đó lấy lời giải của bài toán con ở trong mảng đã tính trước để giải bài toán lớn

2/2/2017

7

Qui hoạch động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

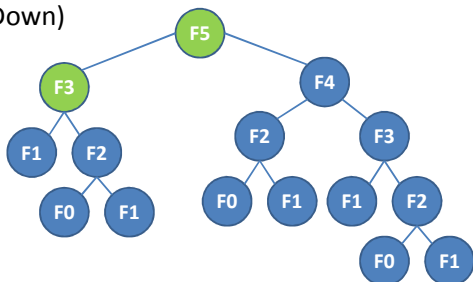


2/2/2017

8

Qui hoạch động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

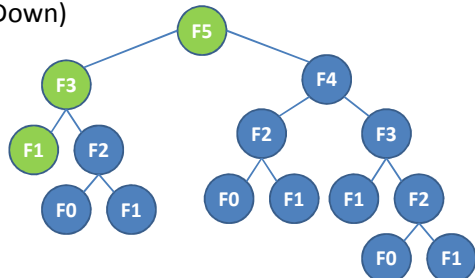


2/2/2017

9

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

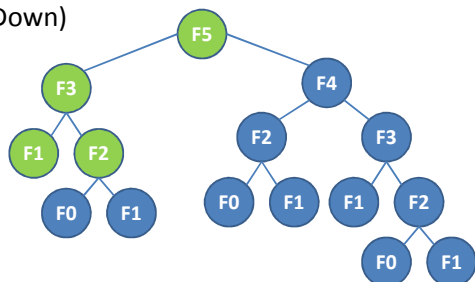


2/2/2017

10

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

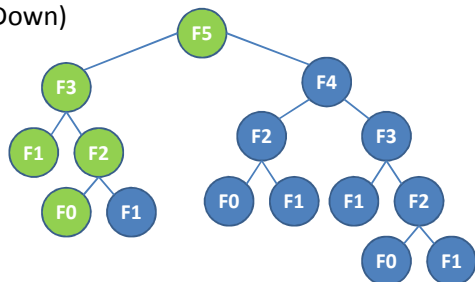


2/2/2017

11

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

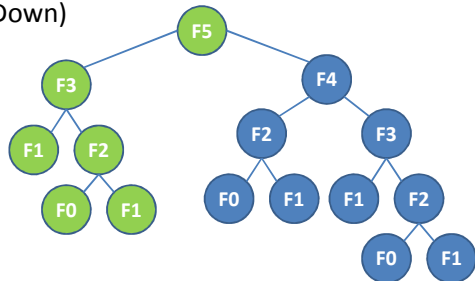


2/2/2017

12

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

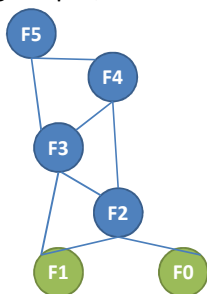


2/2/2017

13

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

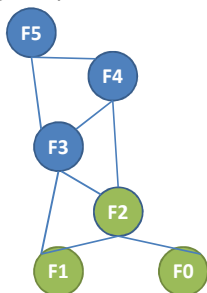


2/2/2017

14

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

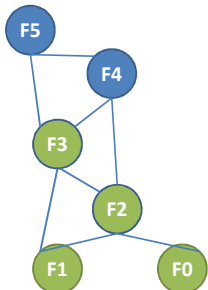


2/2/2017

15

Qui hoạch động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

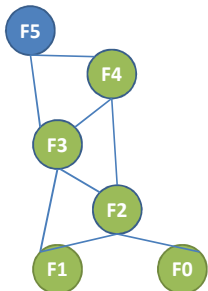


2/2/2017

16

Qui hoạch động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

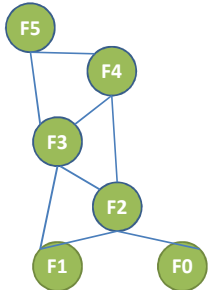


2/2/2017

17

Qui hoạch động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)



2/2/2017

18

Lược đồ chung

- **Phân rã:** Chia bài toán cần giải thành những bài toán con nhỏ hơn đến mức có thể giải trực tiếp được hay không?? -> Nếu được
- **Giải các bài toán con và ghi nhận lời giải:** Lưu trữ lời giải của các bài toán con vào một bảng để sử dụng về sau.
- **Tổng hợp lời giải:**
 - Tổng hợp lời giải các bài toán con kích thước nhỏ hơn thành lời giải bài toán lớn hơn.
 - Tiếp tục cho đến khi thu được lời giải của bài toán xuất phát (là bài toán con có kích thước lớn nhất)

2/2/2017

19

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/2/2017

20

Tính số Fibonacci bằng QHD

- **Phân rã:**

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$
- **Giải bài toán con**

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$
- **Tổng hợp**

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

2/2/2017

21

Cài đặt

Function DPFib(n)

```
{
  F[0] = 0; F[1] = 1;
  If (n>1)
  {
    For k = 2 to n { F[k] = F[k-1] + F[k-2];}
  }
  return F[n];
}
```

2/2/2017

22

Minh họa

- Tính DPFib(5) = 5

Function DPFib(n)

```
{
  F[0] = 0; F[1]=1;      k=2: F(2)=F(1)+F(0)=1+0=1
  If (n>1)
  {
    For k = 2 to n      K=3: F(3)=F(2)+F(1)=1+1=2
    {
      F[k] = F[k-1] + F[k-2]; K=4: F(4)=F(3)+F(2)=2+1=3
    }
    K=5: F(5)=F(4)+F(3)=3+2=5
  }
  return F[n];
}
```

2/2/2017

23

Cài đặt khác

Function DPFib2(n)

```
{
  Fk2 = 0; Fk1 = 1; k=2
  While (k<=n)
  {
    tg = Fk1;
    Fk1 = Fk1 + Fk2;
    Fk2 = tg; k = k+1;
  }
  return Fk1;
}
```

2/2/2017

24

Đánh giá

- Thuật toán 1 DPFib(n)
 - Bộ nhớ ??
 - Thời gian ??
- Thuật toán 2 DPFib2(n)
 - Bộ nhớ ??
 - Thời gian ??

2/2/2017

25

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/2/2017

26

Bài toán

(Knapsack Problem)

- Có n đồ vật, đồ vật i có trọng lượng w_i và giá trị c_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Tìm cách chất các đồ vật này vào cái túi có dung lượng là b sao cho tổng trọng lượng của các đồ vật được chất vào túi là không quá b , đồng thời tổng giá trị của chúng là lớn nhất.



2/2/2017

27

Bài toán



(Knapsack Problem)

- Có n đồ vật, đồ vật i có trọng lượng w_i và giá trị c_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Tìm cách chắt các đồ vật này vào cái túi có dung lượng là b

PP Tham lam



Kết quả nhận được thường là không tối ưu

2/2/2017

28

Giải bằng QHD ???

- Có: n - Số đồ vật, b - trọng lượng túi (nguyên)
- Phân rã: Với các giá trị i ($1..n$) và L ($0..b$) Gọi $\text{MaxV}(i, L)$ là tổng giá trị lớn nhất có thể chọn trong i đồ vật (từ 1 đến i) với trọng lượng tối đa của túi là L . Khi đó $\text{MaxV}(n, b)$ là giá trị lớn nhất mang đi được.
- Giải bài toán con: $\text{MaxV}(0, L) = 0$ với $\forall L$, và $\text{MaxV}(i, 0) = 0$ với $\forall i$.

2/2/2017

29

Giải bằng QHD ???

- Tổng hợp:
 - Đã có $\text{MaxV}(i-1, L)$: Giá trị lớn nhất mang đi được với $i-1$ đồ vật khi trọng lượng túi là L .
 - Xét đồ vật thứ i khi trọng lượng túi vẫn là L :
 - Chỉ mang thêm đồ vật thứ i khi giá trị của túi lúc mang $i-1$ đồ vật ở trọng lượng túi là $L - w[i]$ (như thế mới đảm bảo mang thêm được đồ vật i có trọng lượng $w[i]$ khi trọng lượng túi là L) cộng với giá trị của đồ vật thứ i , $c[i]$, lớn hơn khi không mang đồ vật thứ i , $\text{MaxV}(i-1, L)$.
 - Nghĩa là

$$\text{MaxV}(i, L) = \text{Max}\{\text{MaxV}(i-1, L-w[i]) + c[i], \text{MaxV}(i-1, L)\}$$

2/2/2017

30

Cài đặt

```
Procedure Bag_best
{
  For L= 0 to b do MaxV[0,L] =0 ;
  For i= 0 to n do MaxV[i,0] =0 ;
  For i = 1 to n do
    For L = 1 to b do
      MaxV[i,L] = MaxV[ i-1,L];
      If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
        MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] ;
    return MaxV(n, b) ;
}
```

2/2/2017

31

Minh họa

- Cho 6 đồ vật (n = 6), và túi có trọng lượng b = 19. Các đồ vật có trọng lượng và giá trị như sau:

i	c	w
1	7	3
2	10	4
3	20	5
4	19	7
5	13	6
6	40	9

2/2/2017

32

Khởi tạo

- n = 6, b = 19

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0																		
10 4	2	0																		
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

2/2/2017

33

Lặp ...

• n = 6, b = 19

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0																		
10 4	2	0																		
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

```
MaxV[i,L] = MaxV[ i-1,L];
If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
    MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];
```

2/2/2017

34

Lặp ...

• n = 6, b = 19

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0																	
10 4	2	0																		
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

```
MaxV[i,L] = MaxV[ i-1,L];
If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
    MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];
```

2/2/2017

35

Lặp ...

• n = 6, b = 19

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0																
10 4	2	0																		
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

```
MaxV[i,L] = MaxV[ i-1,L];
If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
    MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];
```

2/2/2017

36

Lặp ...

• n = 6, b = 19

		i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7 3	1	0	0	0	7																
	10 4	2	0																			
	20 5	3	0																			
	19 7	4	0																			
	13 6	5	0																			
40 9	6	0																				

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];
If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/2/2017

37

Lặp ...

• n = 6, b = 19

		i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7 3	1	0	0	0	7	7															
	10 4	2	0																			
	20 5	3	0																			
	19 7	4	0																			
	13 6	5	0																			
40 9	6	0																				

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];
If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/2/2017

38

Lặp ...

• n = 6, b = 19

		i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	10 4	2	0																			
	20 5	3	0																			
	19 7	4	0																			
	13 6	5	0																			
40 9	6	0																				

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];
If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/2/2017

39

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7															
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L];$

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i];$

2/2/2017

40

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10														
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L];$

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i];$

2/2/2017

41

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10	10													
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L];$

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i];$

2/2/2017

42

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10	10	10												
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/2/2017

43

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10	10	10	?											
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/2/2017

44

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10	10	10	17											
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/2/2017

45

Lập ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20 5	3	0																		
19 7	4	0																		
13 6	5	0																		
40 9	6	0																		

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L];$

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i];$

2/2/2017

46

Lập ...

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20 5	3	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	37	37	37	37	37	37	37	37
19 7	4	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	39	39	39	46	49	49	49	56
13 6	5	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	33	39	39	40	46	49	49	52	56
40 9	6	0	0	7	10	20	20	20	27	40	40	40	40	50	60	60	60	67	70	70

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L];$

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

$\text{MaxV}[i, L] = \text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i];$

2/2/2017

47

Kết thúc

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20 5	3	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	37	37	37	37	37	37	37	37
19 7	4	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	39	39	39	46	49	49	49	56
13 6	5	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	33	39	39	40	46	49	49	52	56
40 9	6	0	0	7	10	20	20	20	27	40	40	40	40	50	60	60	60	67	70	70

Những vật được mang đi:

Tổng trọng lượng vật:

Tổng giá trị:

2/2/2017

48

Kết thúc

- $n = 6, b = 19$

i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20 5	3	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	37	37	37	37	37	37	37	37
19 7	4	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	39	39	39	46	49	49	49	56
13 6	5	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	33	39	39	40	46	49	49	52	56
40 9	6	0	0	7	10	20	20	20	27	40	40	40	50	60	60	60	67	70	70	70

Những vật được mang đi: {2, 3, 6}

Tổng trọng lượng vật: 18

Tổng giá trị: 70

2/2/2017

49

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/2/2017

50

Bài toán

- Cho mảng N số: $A[1..N]$
- Hãy tìm dãy con các phần tử liên tiếp của A có tổng lớn nhất.
- Ví dụ: 13, -15, 2, 18, 4, 8, 0, -5, -8
Thì dãy con cần tìm là $A(3)-A(6)$
13, -15, 2, 18, 4, 8, 0, -5, -8
(Đã giải quyết theo phương pháp chia để trị)

2/2/2017

51

Tiếp cận qui hoặc động

- Phân rã:
 - Gọi **MaxS[i]** là tổng lớn nhất của dãy con liên tiếp có i phần tử $a[1]..a[i]$.
 - Khi đó **MaxS[N]** là giá trị lớn nhất của dãy con liên tiếp cần tìm
- Bài toán cơ sở:
 - Với $i = 1$ ta có $\text{MaxS}[i] = a[i]$

2/2/2017

52

Tổng hợp

- Giả sử $i > 1$ và $\text{MaxS}[k]$ là đã biết với $k = 1, \dots, i-1$. Ta cần tính $\text{MaxS}[i]$ là tổng của dãy con liên tiếp lớn nhất của dãy $a[1]..a[i-1], a[i]$.
- Các dãy con liên tiếp của dãy này có thể là một trong hai trường hợp:
 - Các dãy con liên tiếp có chứa $a[i]$
 - Các dãy con liên tiếp không chứa $a[i]$

2/2/2017

53

Tổng hợp ...

- Gọi **MaxE[i]** là tổng lớn nhất của các dãy con liên tiếp của dãy $a[1]..a[i]$ chứa chính $a[i]$.
- Tổng lớn nhất của các dãy con liên tiếp của dãy $a[1]..a[i]$ không chứa $a[i]$ chính là tổng lớn nhất của các dãy con của dãy $a[1]..a[i-1]$, nghĩa là $\text{MaxS}[i-1]$.

 **$\text{MaxS}[i] = \max\{\text{MaxS}[i-1], \text{MaxE}[i]\}$**

2/2/2017

54

Tính MaxE[i]

- Để tính MaxE[i], $i = 1, 2, \dots, n$, ta cũng có thể sử dụng công thức đệ quy như sau:
 - Với $i=1$ thì $\text{MaxE}[i] = a[1]$;
 - Với $i > 1$, Gọi C là dãy con kế tiếp lớn nhất của dãy $a[1]..a[i]$ có chứa $a[i]$. Có hai khả năng:
 - Nếu C chứa $a[i-1]$ thì tổng lớn nhất là $\text{MaxE}[i-1] + a[i]$;
 - Nếu C không chứa $a[i-1]$ thì C chỉ gồm $a[i]$ và tổng lớn nhất là $a[i]$

➔ **$\text{MaxE}[i] = \max \{a[i], \text{MaxE}[i-1] + a[i]\}, i > 1$**

2/2/2017

55

Cài đặt

- s - chỉ số đầu
- e - chỉ số cuối
- s1 - chỉ số đầu tạm

```

Procedu subMax
{
    MaxS=a[1]; MaxE= a[1];
    s=1; e=1; s1=1;
    For i = 2 to n do
    {
        if MaxE>0 then MaxE=MaxE+a[i]
        else {MaxE = a[i]; s1=i; }
        if (MaxE > MaxS) then {
            MaxS = MaxE;
            e=i; s=s1; }
    }
}
  
```

2/2/2017

56

Minh họa

- Dãy $a[1..9] = 13, -15, 2, 18, 4, 8, 0, -5, -8$

i	a[i]	MaxE	s1	MaxS	s	e	Dãy con tổng lớn nhất
1	13	13	1	13	1	1	13,
2	-15	-2	1	13	1	1	13,
3	2	2	3	13	1	1	13,
4	18	20	3	20	3	4	2, 18,
5	4	24	3	24	3	5	2, 18, 4,
6	8	32	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,
7	0	32	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,
8	-5	27	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,
9	-8	19	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,

2/2/2017

57

Bài tập

- Thực hiện từng bước bài toán cái túi với dữ liệu:
 - Trọng lượng túi $b=10$
 - Số lượng đồ vật $n=6$
 - Các vật $w\{6, 3, 3, 7, 4, 3\}$
giá trị $v\{12, 1, 8, 1, 10, 3\}$
- Cho dãy $A=\{-98, 54, 67, 65, -879, 78, 65, 21, -6, 67\}$, tìm dãy con dài nhất theo phương pháp qui hoạch động.

2/2/2017

58

Bài tập

- Cài đặt thuật toán giải bài toán cái túi theo phương pháp qui hoạch động. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.
- Cài đặt thuật toán tìm dãy con lớn nhất theo phương pháp qui hoạch động. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.

2/2/2017

59
