MÔN HỌC:

PHƯƠNG PHÁP SỐ

CHƯƠNG 4

PHÉP NỘI SUY V‡ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

4.1. Phép nội suy

- Giả sử có y phụ thuộc liên tục v‡o x có dạng y=f(x). Cần tính f(c) với c bất kỳ thuộc [a,b]. Tuy nhiên:
  - Không biết biểu thức tường minh của f(x) hoặc hoặc đã biết biểu thức tường minh của f(x) nhưng khó khăn để tính f(c)
  - Trong khi có thể xác định được các giá trị của y tại các giá trị rời rạc của x:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

  (x_i, y_i), i=0,1,.., n gọi l‡ các mốc
- Xấp xỉ f(x) bởi g(x) tốt nhất theo một nghĩa n‡o đó
- Tính $f(c) \approx g(c)$ với $c \neq x_i$, i=0,..n
  - Nếu $c \in (x_0, x_n)$: B‡i toán nội suy, g(x) gọil‡ h‡m nội suy.
  - Nếu $c \notin (x_0, x_n)$: Ngoại suy

Nội suy đa thức

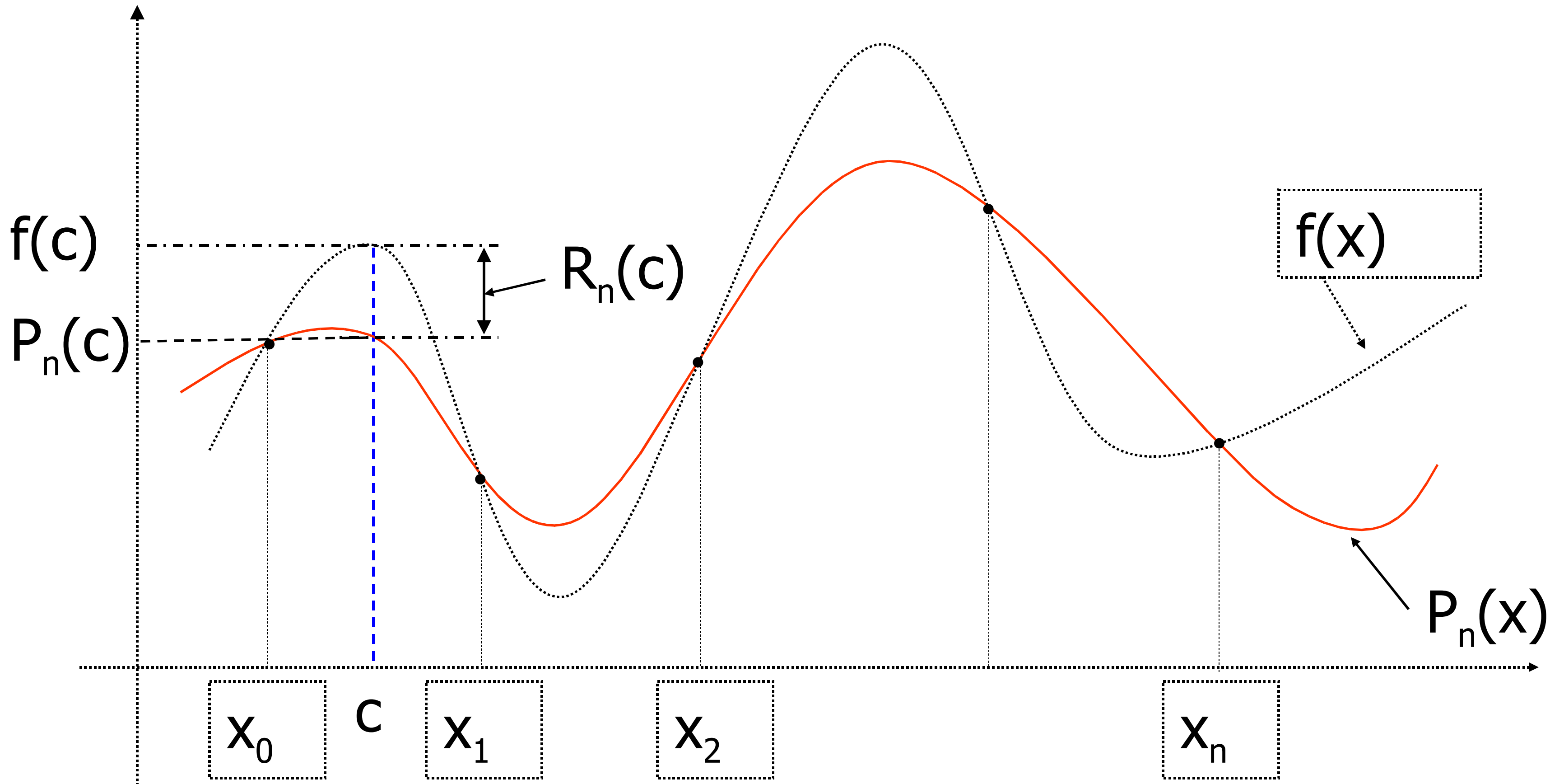
- **Ta biết rằng:**
  - **Mọi hàm sơ cấp** đều có thể **xấp xỉ** bởi một **đa thức**.
  - Có giải thuật **tính dễ dàng** giá trị của **đa thức** tại x= c.
- Cho n+1 mốc nội suy (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n, y_n). Nội suy đa thức l‡ xấp xỉ h‡m f(x) bởi một đa thức $P_n(x)$ có bậc không quá n:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

  thỏa điều kiện $P_n(x_i)=f(x_i)$

- Sai số: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

Ý nghĩa hình học



Xấp xỉ đường cong f(x) bởi đa thức $P_n(x)$ (với $P_n(x_i)=f(x_i)$). Ước lượng f(c) bởi $P_n(c)$: $f(c) \approx P_n(c)$ với sai số $R_n(c)$

Nội suy đa thức

- ***Định lý***: Cho n+1 mốc nội suy (x_0,y_0), (x_1, y_1),…, (x_n, y_n). Đa thức nội suy bậc n tìm đượcdựa trên các mốc nội suy n‡y l‡ duy nhất.
- **Chứng minh:** Giả sử tìm được 2 đa thức nội suy $P_n(x)$ v‡ $Q_n(x)$ v‡ $P_n(x) \neq Q_n(x)$. Xét h‡m phụ:

  $u_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$

  $u_n(x)$ cũng l‡ đa thức có bậc $\leq n$

  Hơn nữa: $P_n(x_i) = y_i = Q_n(x_i)$, i=0..n

  $\Rightarrow P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0$, i=0..n

  $\Rightarrow u_n(x)$ có ít nhất n+1 nghiệm $x_0, x_1, .., x_n$. Vô lý (vì $u_n(x)$ l‡ đa thức có bậc $\leq n$ m‡ lại có nhiều hơn n nghiệm).

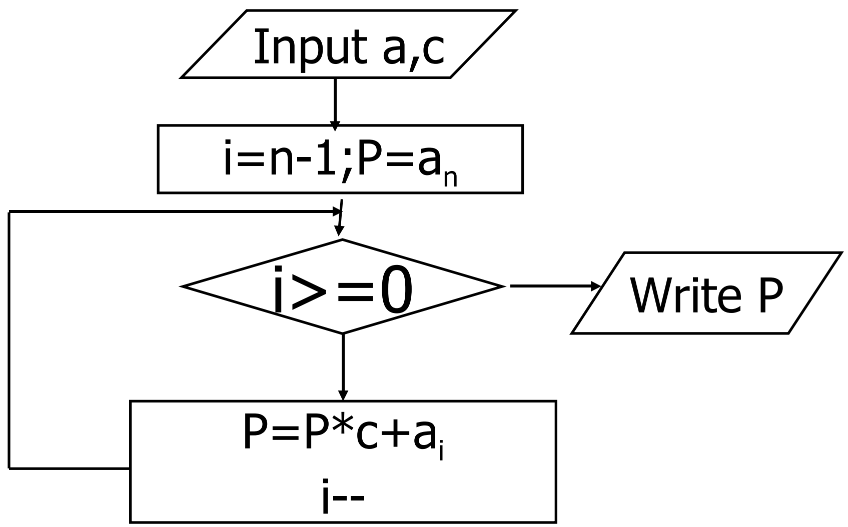
Vậy $P_n(x_i) \equiv Q_n(x_i)$

Tính giá trị của đa thức – thuật toán Horner (hạn chế số lượng phép tính)

- Cho $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
- Có thể phân tích $P_n(x)$ th‡nh:

$$P_n(x)=((\ldots(((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\ldots.a_1)x+a_0 \qquad (4.1.1)$$

- Giải thuật tính $P_n(c)$ hạn chế số phép tính:



Tính giá trị của đa thức

- Nhận xét:
  - Tính theo cách thông thường (thay x = c v‡o đa thức)
    - Số phép cộng: n
    - Số phép nhân: $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1+0=n(n+1)/2$
  - Tính theo thuật toán Horner:
    - Số phép cộng: n
    - Số phép nhân: $n < n(n+1)/2$

Tính giá trị của đa thức

<u>Ví dụ 4.1</u>: Cho $P_4(x)=3x^4+4x^3+5x^2-6x+2$

Tính $P_4(2)=?$

- ✓ *Tính theo cách thông thường,* thay x=2 v‡o đa thức:

$$P_4(2)=3.2^4+4.2^3+5.2^2-6.2+2=90$$

-Số phép nhân:10

- Số phép cộng: 4

Tính giá trị của đa thức

✓ *Tính theo thuật toán Horner*:

$p=3$; $i=3$

$i=3$; $p=p*2+a_3=3*2+4=10$

$i=2$; $p=p*2+a_2=10*2+5=25$

$i=1$; $p=p*2+a_1=25*2-6=44$

$i=0$; $p=p*2+a_0=44*2+2=90$

$i=-1$ Dừng

Kết quả: $P_4(2)=p=90$

Số phép nhân: 4 **< 10**

Số phép cộng: 4

1.1 Đa thức nội suy Lagrange

- Cho trước n+1 điểm mốc: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$
- Đa thức nội suy $P_n(x)$ theo Lagrange được xác định như sau:
  - *<u>Bước 1</u>*: Xác định các đa thức Lagrange cơ bản: $l_i^{(n)}(x)$ có dạng:

$$l_i^{(n)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\quad i=0,2,3,\ldots,n \qquad (4.1.2)$$

<u>Nhận xét:</u>

$$l_i^{(n)}(x_k)=\begin{cases}1 & (\mathrm{k}=i)\\ 0 & (\mathrm{k}\neq i)\end{cases}$$

Đa thức nội suy Lagrange

– ***<u>Bước 2</u>***: Đa thức nội suy Lagrange $P_n(x)$ được xác định bởi:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0; j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} +$$

$$y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)\ldots(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \qquad (4.1.3)$$

$$+ \ldots. +$$

$$y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Đa thức nội suy Lagrange

<u>Ví dụ 4.2</u>: Xây dựng đa thức nội suy Lagrange cho h‡m y=sin(πx) rồi tính gần đúng sin(π/5) với các mốc nội suy cho trong bảng:

x	0	1/6	1/2
y=sin(πx)	0	1/2	1

<u>Giải</u>:

- *Các đa thức Lagrange cơ bản:*

$$l_0^2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}$$

(Không cần tính, vì $y_0=0$)

Đa thức nội suy Lagrange

$$l_1^2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} = ?$$

$$l_2^2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} = ?$$

- *Đa thức nội suy Lagrange cần tìm*

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i . l_i^{(2)}$$

$$= 0 \times \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \times \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} + 1 \times \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}$$

$$= -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

Thay x=1/5 vào $P_2(x)$ tìm được , ta có $\sin(\pi/5) \approx P_2(1/5)=0,58$

Đa thức nội suy Lagrange

- Ví dụ 4.3: Tìm đa thức nội suy Lagrange đối với h‡m y=f(x) được cho như trong bảng

x	0	0,1	0,3	0,5
y	-0,5	0	0,2	1

Tính gần đúng f(0,2)?

Giải

- Các đa thức Lagrange cơ bản:

$$l_0^3(x) = \frac{(x-0{,}1)(x-0{,}3)(x-0{,}5)}{(0-0{,}1)(0-0{,}3)(0-0{,}5)} = -\frac{x^3 - 0{,}9x^2 + 0{,}23x - 0{,}015}{0{,}015}$$

$$l_1^3(x) = \frac{(x-0)(x-0{,}3)(x-0{,}5)}{(0{,}1-0)(0{,}1-0{,}3)(0{,}1-0{,}5)}$$

(Không cần tính vì y_1=0)

$$l_2^3(x) = \frac{(x-0)(x-0{,}1)(x-0{,}5)}{(0{,}3-0)(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}5)} = -\frac{x^3 - 0{,}6x^2 + 0{,}05x}{0{,}012}$$

Đa thức nội suy Lagrange

$$l_3^3(x) = \frac{(x-0)(x-0,1)(x-0,3)}{(0,5-0)(0,5-0,1)(0,5-0,3)} = \frac{x^3 - 0,4x^2 + 0,03x}{0,04}$$

Đa thức nội suy Lagrange $P_3(x)$ cần tìm:

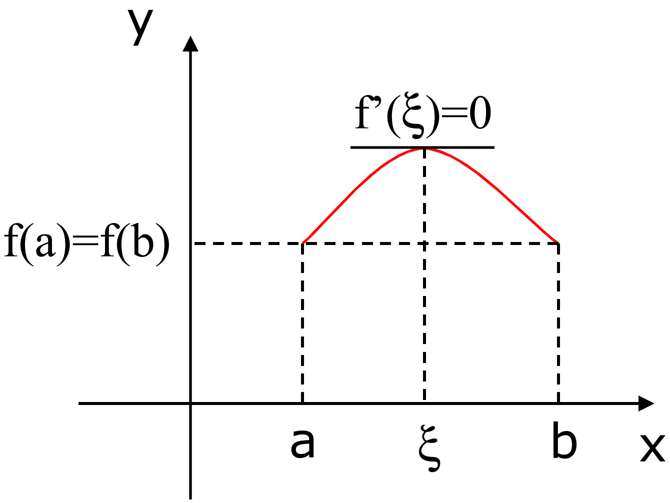
$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i^n = y_0 l_0^3(x) + y_1 l_1^3(x) + y_2 l_2^3(x) + y_3 l_3^3(x)$$

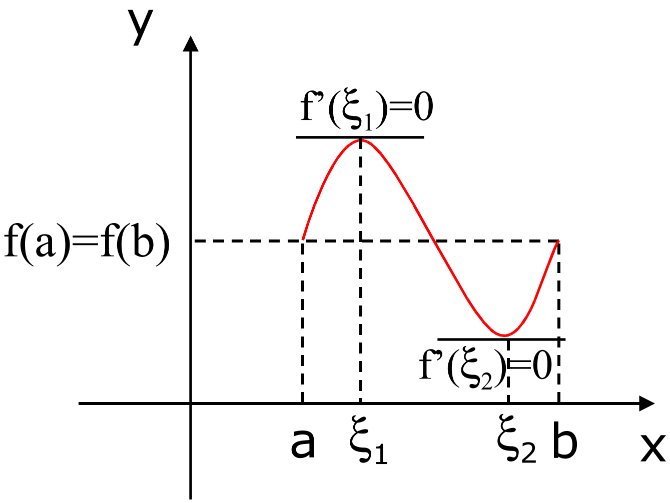
$$= \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{91}{12}x - 0,5$$

Ta có: $f(0,2) \approx P_3(0,2) = 0,15$

Đánh giá sai số của đa thức nội suy Lagrange

- ***Định lý Rolle***: Nếu f(x) liên tục trên [a,b], khả vi tại mọi $x \in (a,b)$ v‡ $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất $\xi \in (a,b)$ sao cho $f'(\xi)=0$.





Đa thức nội suy Lagrange

❖ ***Áp dụng để đánh giá sai số khi tính $f(c) \approx P_n(c)$?***

- Giả sử f(x) có đạo h‡m liên tục đến cấp n+1 trên $[x_0, x_n]$
- Tìm phần dư có dạng: $$R_{n+1}(x) = k\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Đặt: $$F(x) = f(x) - P_n(x) - k\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Tìm k sao cho F(x) có ít nhất n+2 nghiệm ($x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ và c)?

- F(x) có n+2 nghiệm $\Rightarrow$ F'(x) có n+1 nghiệm (định lý Rolle)
- F'(x) có n+1 nghiệm $\Rightarrow$ F''(x) có n nghiệm (định lý Rolle)
- …
- Tương tự: $F^{(n+1)}(x)$ có 1 nghiệm,ta gọi nghiệm n‡y l‡ ξ.

Đa thức nội suy Lagrange (tt)

$$F^{(n+1)}(\xi)=0 \Leftrightarrow \mathrm{f}^{(n+1)}(\xi)+P_n^{(n+1)}(\xi)+(k\prod_{i=1}^{n}(x-x_i))^{(n+1)}=0$$

Mà: $P_n^{(n+1)}(x)=0 \quad \forall \mathrm{x}$

$$(\mathrm{k}\prod_{i=0}^{n}(\mathrm{x}-\mathrm{x_i}))^{(n+1)}=k(n+1)! \quad \forall \mathrm{x}$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi)-k.(n+1)!=0 \Rightarrow k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Vậy sai số cần tìm có dạng :

$$R_{n+1}(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\mathrm{x}-\mathrm{x_i}) \qquad \textit{(4.1.4)}$$

Đa thức nội suy Lagrange (tt)

- Nếu $\left|f^{(n+1)}(x)\right| <= M \quad \forall x \in (x_0, x_n)$

  - Thì sai số của công thức Lagrange có thể được viết:

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \qquad (4.1.5)$$

Ví dụ 4.4: Cho hàm y=sin(πx), dùng đa thức nội suy Lagrange tính gần đúng sin(π/5), đánh giá sai số. Biết các mốc nội suy:

x	0	1/6	1/2
y=sin(πx)	0	1/2	1

Đa thức nội suy Lagrange (tt)

- Đa thức nội suy Lagrange tìm được:

$$P_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

$$\sin(\pi/5) \approx P_2(1/5) = -3.(\frac{1}{5})^2 + \frac{7}{2}.\frac{1}{5} = 0{,}58$$

Sai số: $$|R_3(x)| \le \left|\frac{\sin^{(3)}(\pi x)}{3!}\right| \left|\prod_{i=0}^{2}(x - x_i)\right|$$

Mà: $|\mathrm{Sin}^3(\pi x)| = \pi^3|\cos(\pi x)| \le \pi^3$

$$|R_3(x)| \le \frac{\pi^3}{6}\left|\prod_{i=0}^{2}(x - x_i)\right| = \frac{\pi^3}{6}\,|\,x(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})\,|$$

$$|R_3(1/5)| \le \frac{\pi^3}{6}\left|\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - \frac{1}{6})(\frac{1}{5} - \frac{1}{2})\right| = 0{,}010335$$

ChỌn mốc nội suy tối ưu

- Với công thức đánh giá sai số

$$|R_{n+1}(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| = \frac{M}{(n+1)}|\pi_{n+1}(x)|$$

Cần chọn các $x_i \in [a;b]$ để $\max\limits_{x\in[a;b]}|\pi_{n+1}(x)|$ là nhỏ nhất

Nhận xét: Với phép biến đổi $t = \frac{1}{b-a}[2x - (a+b)]$

Thì đoạn [a;b] chuyển thành [-1;1]

Nên các mốc nội suy trên [a;b] đều có thể chuyển về các mốc nội suy trên [-1;1]

ChỌn mốc nội suy tối ưu

- Đa thức Chebyshev:

$\boxed{T_n(x) = \cos(n.\arccos x) \text{ với } |x| \le 1,\ n \in N^*}$ *(4.1.6)*

<u>*Tính chất*</u>:

$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$

$T_n(x)$ là đa thức bậc n, hệ số cao nhất là 2^{n-1}

Nhận xét:

$T_n(x)$ có đúng n nghiệm: $x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n})\pi, i = 0,1,2,\ldots,n-1$

Mọi nghiệm của $T_n(x)$ đều thuộc [-1;1]

$\max_{x\in[-1;1]} |T_n(x)| = 1$ Khi $x = x_i = \cos(\frac{i\pi}{n}), i = 0,1,2,\ldots,n$

Chọn mốc nội suy tối ưu

<u>Trường hợp 1</u>: Các các mốc nội trong [-1, 1], khi đó các mốc nội suy được chọn l‡ nghiệm của $T_{n+1}(x)$:

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)}{2(n+1)}\pi, i = 0,1,..,n \qquad (4.1.7)$$

Khi đó

$$\pi_{n+1}(x) = T_{n+1}(x)$$

$$|\pi_{n+1}(x)| = |T_{n+1}(x)| \le \frac{1}{2^n}$$

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\pi_{n+1}(x)| = \frac{M}{(n+1)!}.\frac{1}{2^n}$$

Chọn mốc nội suy tối ưu

Trường hợp 2: Trường hợp các mốc nội suy được chọn trong [a, b] bất kỳ. Đặt:

$$t = \frac{(2x - a - b)}{(b - a)} \qquad -1 \le t \le 1$$

Chọn các mốc t_i theo trường hợp 1, suy ra các mốc x_i

Giải thuật tính gần đúng f(c) dựa trên đa thức nội suy Lagrange

- **Input**: c v‡ mảng $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$
- **P=0;**
- **i=0,1,…,n**

  {

  //Tinh giá trị của da thuc Lagrange co ban thu i

  $l_i= 1$

  - **j=0,1,…,n**

    if $i \neq J$ then

    $l_i = l_i * (c-x_j)/(x_i - x_j)$

  //Cộng y_i*l_i v‡o kết quả

  - $p = p + y_i * l_i;$

  }
- **Return p**;//p l‡ giá trị gần đúng của f(c) tìm được

1.2. Đa thức nội suy Newton

Hạn chế của đa thức nội suy Lagrange

- Mỗi khi thêm mốc nội suy, ta phải tính lại to‡n bộ đa thức (Các đa thức Lagrange cơ bản v‡ đa thức nội suy Lagrange)

- Đa thức nội suy Newton khắc phục hạn chế n‡y

Đa thức nội suy Newton

- ***Tỷ hiệu***:

  Giả sử h‡m y=f(x) được cho ở dạng bảng:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

- Tỷ hiệu cấp 1 của h‡m y=f(x) tại x_i :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f[x_{i+1}, x_i]$$

- Tỷ hiệu cấp 2 của h‡m y=f(x) tại x_i :

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

- Tổng quát, tỷ hiệu cấp k của h‡m y=f(x) tại x_i được tính dựa v‡o tỷ hiệu cấp k-1:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad (4.1.8)$$

Đa thức nội suy Newton

- Tính chất của tỷ hiệu
  - $$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = f[x_{i+k}, x_{i+k-1}, \dots, x_i]$$
  - Tỷ sai phân cấp n+1 của đa thức bậc n bằng 0.
- Bảng tỷ hiệu

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
x_1 & y_1 & f[x_0\ x_1] & & & \\
x_2 & y_2 & f[x_1\ x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
x_3 & y_3 & f[x_2, x_3] & f[x_1\ x_2\ x_3] & \dots. & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-1}] & \dots.. & \\
x_n & y_n & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \dots. & f[x_0, x_2, \dots, x_n]
\end{array}
$$

Giải thuật lập bảng tỷ hiệu

- Cho các điểm mốc $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_{n,}y_n)$.
- Ma trận tỷ hiệu F cấp (n+1)x(n+2)
  - //Khởi tạo F

    for (i=0, i<=n ; i++) { $f_{i0}=x_i$; $f_{i1}=y_i$ };
  - Tính f_{ij} còn lại
  - **for (j=2j<=n+1;j++)**

    //Tính tỷ hiệu cấp j-1

    for (i=j-1, i<=n,i++) $f_{ij}=(f_{i,j-1}-f_{i-1,j-1})/(f_{i,0}-f_{i-j+1,0})$

Lưu ý: không dùng các f_{ij} với j>i+1

Giải thuật lập bảng tỷ hiệu

Hoặc có thể tính $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j]$ bằng giải thuật đệ quy sau:

```
double Tyhieu(i,j)
{       if  (j==i+1)
                return  (yj-yi)/(xj-xi);
    else
                return (Tyhieu(i+1,j)-Tyhieu(i,j-1))/(xj-xi);
}
```

1.2.1. Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

Gọi $P_n(x)$ là đa thức nội suy cần tìm ($P_n(x_i)=y_i$)

- Xét tỷ hiệu cấp 1:

$$P_n[x,x_0]=\frac{P_n(x)-P_n(x_0)}{x-x_0} \qquad \textbf{(4.1.9)}$$

✍ *$P_n(x)$ có bậc n, $P_n[x,x_0]$ là đa thức có bậc n-1*

- Xét tỷ hiệu cấp 2: $$P_n[x,x_0,x_1]=\frac{P_n[x,x_0]-P_n[x_0,x_1]}{x-x_1} \qquad \textbf{(4.1.10)}$$

✍ *$P_n[x,x_0,x_1]$ là đa thức có bậc n-2*

- Xét tỷ hiệu cấp n:

$$P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]=\frac{P_n[x,x_0,\ldots,x_{n-2}]-P_n[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x-x_{n-1}} \qquad \textbf{(4.1.11)}$$

✍ *$P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]$ là đa thức có bậc 0*

1.2.1. Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

- Xét tỷ hiệu cấp n+1:

$$P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n] = \frac{P_n[x,x_0,\ldots,x_{n-1}] - P_n[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n} \qquad \textbf{\textit{(4.1.12)}}$$

Mà $P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_m]=0$ với $m>n-1$ nên:$P_n[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=P_n[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

Từ 4.1.9, ta có: $P_n(x) = P_n(x_0) + (x-x_0)P_n[x,x_0]$

Từ 4.1.10, ta có: $P_n[x,x_0] = P_n[x_0,x_1] + (x-x_1)P_n[x,x_0,x_1]$

....

Từ 4.1.11,4.12 ta có:

$$\begin{aligned} P_n[x,x_0,\ldots,x_{n-2}] &= P_n[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}] + (x-x_{n-1})P_n[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}] \\ &= P_n[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}] + (x-x_{n-1})P_n[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n] \end{aligned}$$

1.2.1. Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

Cuối cùng, ta có:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)P_n[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})P_n[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

M‡

$$P_n(x_0) = y_0 = f(x_0)$$
$$P_n[x_0, x_1, \ldots, x_i] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Vậy

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \qquad \textbf{\textit{(4.1.13)}}$$

Đa thức 4.1.13 gọi là đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0, thường dùng để tính gần đúng f(c) với c gần x_0.

1.2.1. Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

Tương tự, ta cũng có đa nội nội suy Newton Lùi xuất phát từ x_n: (thường dùng để tính gần đúng f(c) khi c gần x_n)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_n) + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \\ &+ \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] \end{aligned} \quad \textbf{\textit{(4.1.14)}}$$

- Đa thức nội suy Newton cũng chính l‡ đa thức nội suy Lagrange chỉ khác về cách trình b‡y.

- Nếu thêm một mốc (x_{n+1}, y_{n+1}), đa thức nội suy $P_{n+1}(x)$ trên tập điểm mốc mới được tính theo $P_n(x)$ như sau:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$$

- Đánh giá sai số: Tương tự như đa thức nội suy Lagrange

Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

- Lập bảng tỷ hiệu:

x_0	y_0	$f[x_1,x_0]$	$f[x_2,x_1,x_0]$		$\mathbf{f[x_n,x_{n-1},..,x_0]}$
x_1	y_1	$f[x_2,x_1]$	$f[x_3,x_2,x_1]$		
…	…	…			
x_{n-2}	y_{n-2}	$f[x_{n-1},x_{n-2}]$	$\mathbf{f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}]}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\mathbf{f[x_n,x_{n-1}]}$			
x_n	y_n				

$=(f[x_n,..x_1]-f[x_{n-1}..x_0])/(x_n-x_0)$

$=(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}])/(x_n-x_{n-2})$

$=(y_n-y_{n-1})/(x_n-x_{n-1})$

Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

- <u>Ví dụ 4.5</u>: Xây dựng đa thức nội suy theo phương pháp newton cho h‡m y=sin(πx) với các mốc nội suy cho trong bảng:

x	0	1/6	1/2
y=sin(πx)	0	1/2	1

Lập bảng tỷ hiệu

$$
\begin{array}{llll}
x_0 & y_0 & & \\
x_1 & y_1 & f[x_0,x_1] & \\
x_2 & y_2 & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2]
\end{array}
$$

Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

Đa thức nội suy cần tìm có dạng:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
&= 0 + 3x + x(x - 1/6)(-3) \\
&= -3x^2 + \frac{7}{2}x
\end{aligned}
$$

- ***Ví dụ 4.6***: Tìm đa thức nội suy Newton cho h‡m y=log$_{10}$(x). Với các mốc nội suy trong bảng

x	1	10	100
y=Log$_{10}$(x)	0	1	2

Đa thức nội suy Newton với các mốc bất kỳ

- Bảng tỷ hiệu của y=log$_{10}$(x)

$$\begin{array}{llll} x_0 & y_0 & & \\ x_1 & y_1 & f[x_0,x_1] & \\ x_2 & y_2 & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ 10 & 1 & 1/9 & \\ 100 & 2 & 1/90 & -1/990 \end{array}$$

- Đa thức cần tìm theo newton có dạng:

$$P_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

$$= f(1) + (x-1).\frac{1}{9} + (x-1)(x-10).(-\frac{1}{990})$$

$$= -\frac{9}{8910}x^2 + \frac{99}{810}x - \frac{1080}{8910}$$

Đa thức nội suy Newton lùi

- <u>Ví dụ 4.7</u> : Tìm đa thức nội suy newton lùi cho hàm y=sin(πx) với các mốc nội suy cho trong bảng:

x	0	1/6	1/2
y=sin(πx)	0	1/2	1

Giải: Bảng tỷ hiệu

$$\begin{array}{llll} x_0 & y_0 & f[x_1,x_0] & f[x_2,x_1,x_0] \\ x_1 & y_1 & f[x_2,x_1] & \\ x_2 & y_2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1/6 & 1/2 & 3/2 & \\ 1/2 & 1 & & \end{array}$$

Vậy đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x2 là:

$p(x) = y_2+(x-x_2)f[x_2,x_1]+(x-x_2)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]$

$= 1 +(x-1/2)(3/2)+(x-1/2)(x-1/6)(-3)=-3x^2+(7/2)x$

Giải thuật tính gần đúng f(c) bằng đa thức nội suy newton tiến với các mốc bất kỳ

- Không đệ quy:
  - Cho các mốc nội suy (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n,y_n)
  - Xây dựng ma trận tỷ hiệu TyHieucấp (n+1)x(n+2) (xem lại giải thuật ở slide trước)
  - $p=y_0$;
  - i=1,…, n :

    begin

    tich = 1;

    j**=0;1,…i-1**: tich = tich * $(c-x_j)$;

    P=P+tich*tyhieu[i][i+1];

    end
  - **Return p;**

Giải thuật tính gần đúng f(c) bằng đa thức nội suy newton tiến với các mốc bất kỳ

- **<u>Giải thuật đệ quy</u>**: Goi F(i,j) l‡ tỷ hiệu $f[x_i, x_{i+1},,x_j]$. Ta có giải thuật đệ quy tính f(i,j) như sau:

  F(int i, int j) {

      if (j=i+1) return $(y_j\text{-}y_i)/(x_j\text{-}x_i)$

      else

          return (F(i+1,j)-F(i,j-1))/$(x_j\text{-}x_i)$;

  }

Giải thuật tính gần đúng f(c) bằng đa thức nội suy newton tiến với các mốc bất kỳ

❖ **<u>Tính gần đúng f(c)</u>**:

```
p=y0;
i=1,1,…,n
begin
   temp=1;
      j=0,1,…,j-1:  temp=temp*(c-xj);
     p=p+temp*F(0,i);
end;
```

Giải thuật tính gần đúng f(c) bằng đa thức nội suy newton lùi với các mốc bất kỳ

- Cho các mốc nội suy (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n,y_n)
- Xây dựng ma trận tỷ hiệu TyHieucấp (n+1)x(n+2)
  $p=y_n$;
- i=n-1,…, 0 ;

  begin

  tich = 1;

  j=n;n-1,…i+1: tich = tich * $(c-x_j)$;

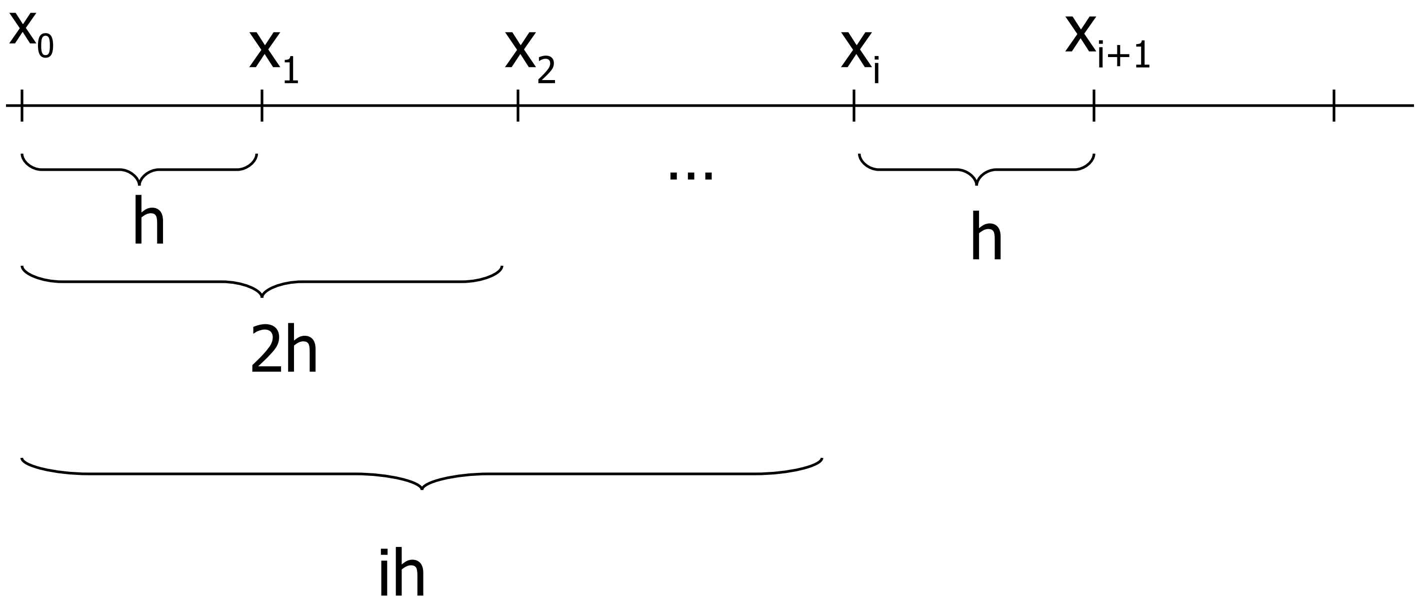
  P=P+tich*tyhieu[i][n-i+1];

  end

  Return p;

4.2.2.Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

$x_{i+1}-x_i = h$ (hằng số) $\Rightarrow x_i = x_0 + ih$



Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

- Định nghĩa sai phân hữu hạn:
  - Sai phân tiến cấp 1 tại x_i:

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) \qquad (4.1.15)$$

  - Sai phân tiến cấp 2 tại x_i:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) &= \Delta f(x_i + h) - \Delta f(x_i)) \\ &= [f(x_i + h + h) - f(x_i + h)] - [f(x_i + h) - f(x_i)] \\ &= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)\end{aligned}$$

- Sai phân tiến cấp n tại x_i được tính theo sai phân tiến cấp n-1:

$$\Delta^n f(x_i) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x_i)) \qquad (4.1.16)$$

Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

- Đa thức nội suy Newton tiến tổng quát

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \ldots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Với:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

...

$$f[x_0, x_1, x_{2,} x_3] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}$$

Nên: $$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} + \ldots$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} \qquad (4.1.17)$$

Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

- Đặt $x = x_0+th$, ta có: Với $0 \le t \le n$

  $x - x_0 = th$

  $x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) = (t - 1)h$

  …

  $x - x_{n-1} = (x-x_0) - (x_{n-1}-x_0) = (t - n + 1)h$

- Từ 4.1.17, ta có:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th)$$

$$= y_0 + t.\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{n!}.\Delta^n y_0 \qquad (4.1.18)$$

Đa thức trong 4.1.18 gọi là đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0 với các mốc cách đều

Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

Sai phân tiến các cấp tại x0 có thể tính theo bảng:

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	…	$\Delta^{n-1} y_1$	$\Delta^n y_i$
y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$		$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^n y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$		$\Delta^{n-1} y_1$	
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$			
…					
y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$			
y_{n-1}	Δy_{n-1}				
y_n					

Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

- Sai số

$$R(x) = R(x_0 + th)$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)(t-2)...(t-n) \qquad (4.1.19)$$

- Tương tự, bằng cách đặt x = x_n + th, ta có đa thức nội suy Newton lùi với các mốc cách điều

$$P_n(x) = P_n(x_n + th)$$
$$= y_n + t.\Delta y_n + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_n + ... + \frac{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)}{n!}.\Delta^n y_n \qquad (4.1.20)$$

Đa thức nội suy Newton tiến-các mốc cách điều

Ví dụ: Cho h‡m y=f(x) xác định bởi bảng:

x	1	2	3
y	2	7	14

Tính gần đúng f(4/3) bằng đa thức nội suy Newton (tiến)?

Giải: Ta thấy: $x_{i+1}-x_i=1,\ \forall i=0,1,\ldots,n-1$

Nên các mốc nội suy là cách đều

Đặt $x = x_0+th=1+t$; $x = 4/3 \Rightarrow t = 1/3$

Bảng sai phân hữu hạn:

Bảng sai phân hữu hạn

y	Δy	$\Delta^2 y$
2	5	2
7	7	
14		

Đa thức nội suy Newton:

$p(t) = y_0+t.\Delta y_0+(t^2/2!)\ \Delta^2 y_0$

$= 2+ 5t + ½.t(t-1).2 = 2+4t+t^2$

$f(4/3) \approx p(1/3) = 31/9$

Đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n, trường hợp các mốc nội suy cách điều

Bảng sai phân hữu hạn cho đa thức nội suy newton lùi:

y	Δy	$\Delta^2 y$	…	$\Delta^n y$
y_0				
y_1	Δy_1			
…				
y_{n-2}	Δy_{n-2}			
y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}$		
y_n	$\boldsymbol{\Delta y_n}$	$\boldsymbol{\Delta^2 y_n}$	…	$\boldsymbol{\Delta^n y_n}$

Ví dụ: Giá trị hàm Lgx (log cơ số 10) được cho trong bảng dưới. Tính gần đúng lg7=?

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	0.6989700	0.301030	-0.12494	0.07379
10	1.0000000	0.176091	-0.05115	
15	1.1760913	0.124939		
20	1.3010300			

Tính Tính Tính

Đa thức nội suy newton tiến xuất phát từ x_0=5 có dạng

$$P_3(x) = P_3(x_0 + th)$$

$$= y_0 + t.\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

- Trong đó: $x=x_0+th \Rightarrow$ $$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{7-5}{5}=\frac{2}{5}$$
- Thay t=2/5 v‡ các sai phân cấp 1, cấp 2,…, cấp n (dòng đầu tiên của bảng) ta được giá trị gần đúng của lg7 $\approx$ $P_3(7)$ = ?
- Sai số: ? B‡i tập

4.1.3. Nội suy Spline

- Thông thường, bậc của đa thức nội suy Lagrange, Newton tăng theo số lượng lấy mẫu (số lượng điểm mốc). Do vậy chi phí tính toán cũng tăng
- Một phương pháp khác, thường dùng trong thực tế là nội suy bởi đa thức Spline bậc 3

Nội suy spline

- Cho n+1 điểm mốc: (x_0,y_0), (x_1,y_1),..,(x_n,y_n), với $x_{i+1}-x_i=h$
- H‡m nội suy cubic-spline tổng quát:

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x) & \text{nếu} \quad x_0 \le x \prec x_1 \\ f_1(x) & \text{nếu} \quad x_1 \le x \prec x_2 \\ \ldots & \\ f_{n-2}(x) & \text{nếu} \quad x_{n-2} \le x \prec x_{n-1} \\ f_{n-1}(x) & \text{nếu} \quad x_{n-1} \le x \prec x_n \end{cases} \qquad (1)$$

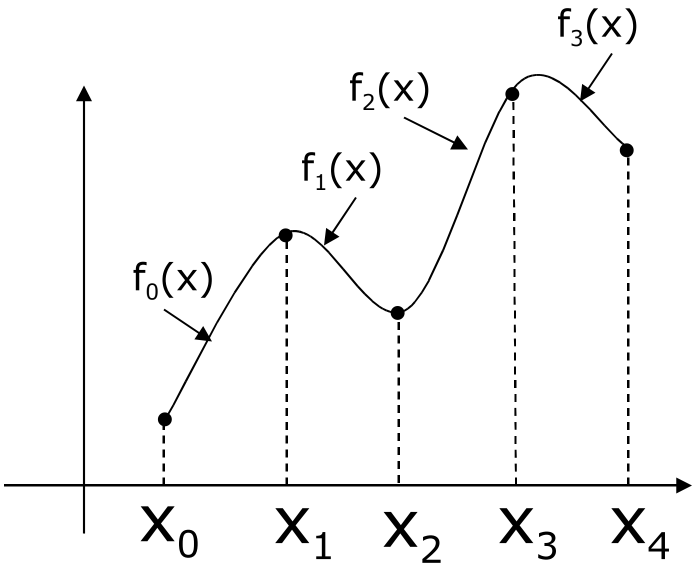
Với mỗi $f_i(x)$ l‡ đa thức bậc 3 có dạng:

$$f_i(x)=a_i(x-x_i)^3+b_i(x-x_i)^2+c_i(x-x_i)+d_i \qquad \textbf{(2)}$$

Nội suy spline (2)

Thỏa các tính chất:

$$
\begin{cases}
f_i(x_i) = y_i & i = 0,1..n-1 & (3) \\
f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1}) & i = 0,2..n-2 & (4) \\
f_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}'(x_{i+1}) & i = 0,2,...,n-2 & (5) \\
f_i''(x_{i+1}) = f_{i+1}''(x_{i+1}) & i = 0,2,...,n-2 & (6)
\end{cases}
$$



$$a_i, b_i, c_i, d_i \; ? \; (\mathrm{i} = 0,1,2,...,\mathrm{n}-1)$$

Nội suy spline (3)

Tính d_i?

Từ pt (3): $f_i(x_i)=y_i$

Hay: $a_i(x_i-x_i)^3+b_i(x_i-x_i)^2+c_i(x_i-x_i)+d_i = y_i$

$$\Leftrightarrow \boxed{d_i = y_i}$$

Tính các hệ số khác?

Bắt đầu từ:

$$f_i^{'}(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i \qquad (7)$$

$$f_i^{''}(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i \qquad (8)$$

Nội suy spline (4)

- Đặt $$M_i = f_i''(x_i)$$

Từ pt (8), ta có:

$$f_i''(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i$$

Hay

$$b_i = \frac{M_i}{2} \qquad i=0,1,\ldots, n-1$$

Nội suy spline (5)

- Cũng từ (8), suy ra: $f''_{i+1}(x_{i+1}) = 2b_{i+1}$

  Và $$f''_i(x_{i+1}) = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i$$
  $$= 6a_i h + 2b_i$$

 Theo pt (6) thì:

$$f''_i(x_{i+1}) = f''_{i+1}(x_{i+1})$$

Hay: $6a_i h + 2b_i = 2b_{i+1}$

$$\Leftrightarrow \quad a_i = \frac{2b_{i+1} - 2b_i}{6h} = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}$$

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}, i = 0,1,..,n-2$$

Nội suy spline (6)

- Từ pt (4): $f_i(x_{i+1}) \;=\; f_{i+1}(x_{i+1}) \qquad\qquad i=0,1,\ldots,n-2$

Mà: $\qquad f_{i+1}(x_{i+1}) \;=\; d_{i+1}$

Và: $\qquad f_i(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1}-x_i)^3+b_i(x_{i+1}-x_i)^2+c_i(x_{i+1}-x_i)+d_i$

$$= a_ih^3+b_ih^2+c_ih+d_{i-}$$

$$\Rightarrow \qquad d_{i+1} = a_ih^3+b_ih^2+c_ih+d_i$$

$$c_i = \frac{d_{i+1}-d_i}{h} - (a_ih^2+b_ih)$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h} - (\frac{M_{i+1}+2M_i}{6})h$$

Nội suy spline (7)

- Cuối cùng, ta có:

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{M_{i+1} - M_i}{6h} \\ b_i = \dfrac{M_i}{2} \\ c_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - (\dfrac{M_{i+1} + 2M_i}{6})h \\ d_i = y_i \end{cases}$$

Để có được các a_i, b_i, c_i, d_i, cần tìm các M_i!!!

Nội suy spline (8)

- Từ pt (5): $$f_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad i=0,1,\dots,n-2$$

Với $$f_{i+1}''(x_{i+1}) = 3a_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})^2 + 2b_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1}) + c_{i+1}$$

$$= c_{i+1}$$

Và $$f_i''(x_{i+1}) = 3a_i(x_{i+1}-x_i)^2 + 2b_i(x_{i+1}-x_i) + c_i$$

$$f_i''(x_{i+1}) = 3a_ih^2 + 2b_ih + c_i$$

Nên $$c_{i+1} = 3a_ih^2 + 2b_ih + c_i$$

Nội suy spline (9)

$$\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h}-(\frac{M_{i+2}+2M_{i+1}}{6})h=3\frac{M_{i+1}-M_i}{6h}h^2+2\frac{M_i}{2}h$$

$$+\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-(\frac{M_{i+1}+2M_i}{6})h$$

$$3\frac{M_{i+1}-M_i}{6h}h^2+2\frac{M_i}{2}h-(\frac{M_{i+1}+2M_i}{6})h+(\frac{M_{i+2}+2M_{i+1}}{6})h=\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$$

$$3\frac{M_{i+1}-M_i}{6h}h^2+2\frac{M_i}{2}h-(\frac{M_{i+1}+2M_i}{6})h+(\frac{M_{i+2}+2M_{i+1}}{6})h=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h}$$

$$3\frac{M_{i+1}-M_i}{6}+2\frac{M_i}{2}-(\frac{M_{i+1}+2M_i}{6})+(\frac{M_{i+2}+2M_{i+1}}{6})=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}$$

$$M_i+4M_{i+1}+M_{i+2}=6\frac{y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{h^2}\qquad i=0,1,\ldots,n-2$$

Nội suy spline (10)

- Hay:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \\ \\ M_{i-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n
\end{bmatrix}
= \frac{6}{h^2}
\begin{bmatrix}
y_0 - 2y_1 + y_2 \\
y_1 - 2y_2 + y_3 \\
y_2 - 2y_3 + y_4 \\
.. \\
.. \\
y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-3} \\
y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\
y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n
\end{bmatrix}
$$

Có n+1 cột nhung chỉ có n-1 dòng!!!

Nội suy spline (11)

- Spline tự nhiên (Natural spline)

$$M_0 = M_n = 0$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \dots \\ \dots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ .. \\ .. \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-3} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Hệ có n -1 phương trình, n-1 biến. Giải hệ, tìm được M_2, M_3, M_4,…,M_{n-1},M_0=0, M_n=0 $\Rightarrow$ Tính a_i, b_i, c_i, d_i ?

4.2. Phương pháp bình phương tối thiểu

- Giả sử có đại lượng y phụ thuộc v‡o đại lượng x nhưng chưa biết công thức của . Qua đo đạt, thí nghiệm, quan sát,… ta có được bảng số liệu:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2		y_n

Từ số liệu n‡y, tìm ra công thức đúng (gọi l‡ công thức nghiệm) của h‡m y?

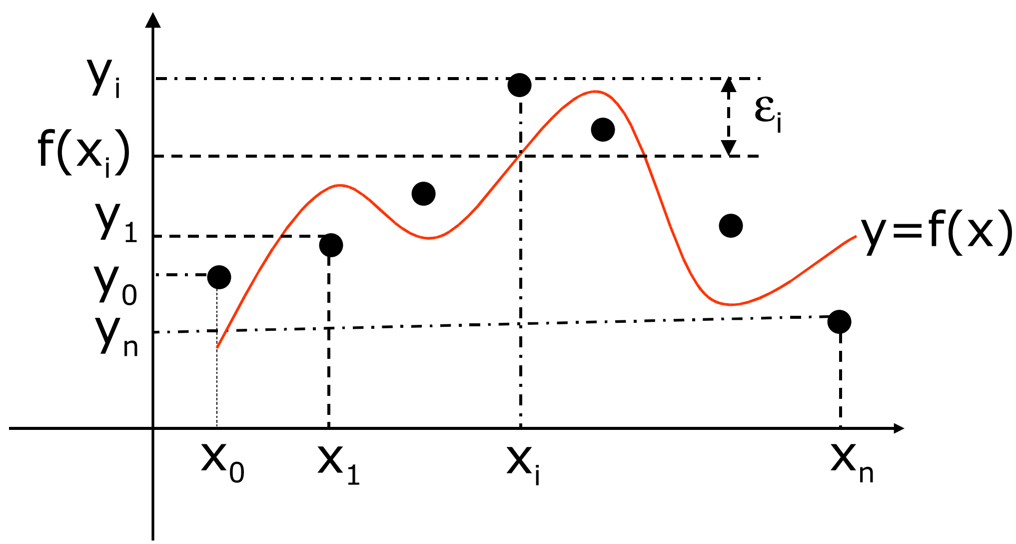
- Nói chung, Không thể tìm công thức đúng của y. Chỉ có thể tìm được y ở một số dạng đơn giản:

$y=ax+b$; $y=ax^2+bx+c$

$y=a\cos(x)+b\sin(x)$ $y=ae^{bx}$.

Nội dung của phương pháp

- Gọi y=f(x) l‡ công thức nghiệm cần tìm.
- Do các y_i chỉ l‡ giá trị thực nghiệm nên $y_i \neq f(x_i)$
- Đặt $\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$



f(x) cần tìm sao cho $\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$ bé nhất

Công thức nghiệm dạng: y=ax+b (y phụ thuộc tuyến tính các hệ số)

- Ta có:

$$\begin{cases} y_0 - ax_0 - b = \varepsilon_0 \\ y_1 - ax_1 - b = \varepsilon_1 \\ \ldots \\ y_n - ax_n - b = \varepsilon_n \end{cases}$$

- $s(a,b) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2$ nhỏ nhất $\Rightarrow$ a, b l‡ nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b)^2\right)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b)^2\right)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Công thức nghiệm dạng: y=ax+b (y phụ thuộc tuyến tính các hệ số)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=0}^{n} x_i + (n+1)b = \sum_{i=}^{n} y_i \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được a,b.

Ví dụ:

Sự phụ thuộc của y v‡o x cho như trong bảng:

X	0	1	2	3
y	0,5	2,5	5,5	6,5

Tìm công thức nghiệm dạng y=ax+b?

Giải: Các hệ số a, b l‡ nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(0^2+1^2+2^2+3^2)a+(0+1+2+3)b=0.0,5+1.2,5+2.5,5+3.6,5\\(0+1+2+3)a+4b=0,5+2,5+5,5+6,5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}14a+6b=33\\6a+4b=15\end{cases}\Rightarrow a,b=?$$

Công thức nghiệm dạng: $y=ax^2+bx+c$ (y phụ thuộc tuyến tính các hệ số)

- Ta có:

$$\begin{cases} y_0 - ax_0^2 - bx_0 - c = \varepsilon_0 \\ y_1 - ax_1^2 - bx_1 - c = \varepsilon_1 \\ \dots \\ y_n - ax_n^2 - bx_n - c = \varepsilon_n \end{cases}$$

- $s(a,b,c) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2$ nhỏ nhất $\Rightarrow$ a, b, l‡ nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i^2) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-1) = 0 \end{cases}$$

Công thức nghiệm dạng: $y=ax^2+bx+c$ (y phụ thuộc tuyến tính các hệ số)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sum x_i^4)a + (\sum x_i^3)b + (\sum x_i^2)c = \sum x_i^2 y_i \\ (\sum x_i^3)a + (\sum x_i^2)b + (\sum x_i)c = \sum x_i y_i \\ (\sum x_i^2)a + (\sum x_i)b + (n+1)c = \sum y_i \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được a,b, c

Ví dụ:

- Sự phụ thuộc của y v‡o x cho như trong bảng:

X	0	1	2	3
y	0,5	-1,75	-1	1,25

- Tìm công thức nghiệm dạng $y=ax^2+bx+c$?

Giải: ?????

Công thức nghiệm dạng: $y=ae^{bx}$ (y không phụ thuộc tuyến tính các hệ số)

$y=ae^{bx}$ (với a>0)

- Lấy logarit 2 vế, ta được: $\lg y = \lg a + (b\lg e)x$
- Đặt $Y = \lg y$, $X = x$, $A = b\lg e$, $B=\lg a$; Ta có: $Y = AX+B$
- Chuyển từ bảng :

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Sang bảng

X	X_0	X_1	X_2	…	X_n
Y	Y_0	Y_1	Y_2	…	Y_n

Áp dụng công thức đã biết, tìm A, B $\Rightarrow$ a, b?