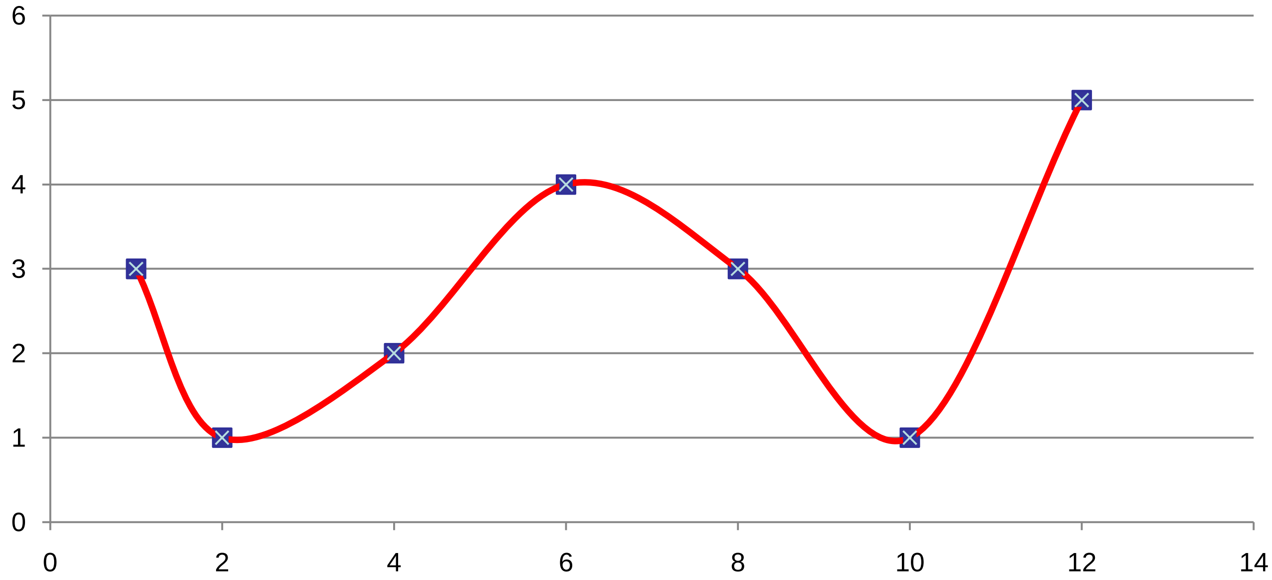
BÀI 4



NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC VÀ LÀM KHỚP DỮ LIỆU

NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC (1)

BÀI TOÁN NỘI SUY: Cho $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là n + 1 điểm phân biệt trên trục số thực và f(x) là hàm nhận giá trị thực, xác định trên khoảng I = [a, b] chứa các điểm này. Hãy xây dựng một đa thức $p_n(x)$ có bậc $\leq$ n mà tại các điểm $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \ldots, n$$

SỰ TỒN TẠI ĐA THỨC NỘI SUY: (Đa thức nội suy Lagrange)

Cho hàm f(x) nhận giá trị thực và n + 1 điểm phân biệt

$x_0, x_1, \ldots, x_n$, khi đó tồn tại đúng một đa thức bậc $\leq$ n nôi suy f(x) tại $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là $p_n(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \ldots + a_n l_n(x)$ với

$a_i = f(x_i)$ và

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC (2)

SỰ DUY NHẤT CỦA ĐA THỨC NỘI SUY

Bổ đề: Nếu $z_1, \ldots, z_n$ là các nghiệm phân biệt của đa thức p(x) thì

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n)\, r(x)$$

với r(x) là một đa thức.

Hệ quả: Nếu p(x) và q(x) là hai đa thức bậc $\leq k$ có giá trị trùng nhau ở k+1 điểm $z_0, \ldots, z_k$ phân biêt, thì $p(x) \equiv q(x)$

→ *có nhiều nhất một đa thức bậc $\leq n$ nội suy f(x) ở n + 1 điểm phân biệt $x_0, x_1, \ldots, x_n$*

Mặt khác, từ sự tồn tại của đa thức nội suy Lagrange

→ *có ít nhất một đa thức bậc $\leq n$ nội suy f(x) ở n + 1 điểm phân biệt $x_0, x_1, \ldots, x_n$*

→ **Kết luận:** *có đúng một đa thức bậc $\leq n$ nội suy f(x) ở n + 1 điểm phân biệt $x_0, x_1, \ldots, x_n$*

NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC (3)

Ví dụ 1: trường hợp n = 1, nghĩa là cho biết hàm f(x) và hai điểm phân biệt x_0, x_1. Vậy ta có hai đa thức bậc nhất

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

→ Trong ví dụ này, đa thức nội suy Lagrange là đa thức **nội suy tuyến tính (n = 1)**

$$\mathbf{p_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

$$\mathbf{= \frac{f(x_0)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_0)}{x_0 - x_1} = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

Đây chính là PT đường thẳng đi qua 2 điểm (x_0, y_0) và (x_1, y_1)

NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC (4)

Ví dụ 2: Từ bảng các giá trị của tích phân sau, tính giá trị của đa thức nội suy Lagrange K(3.5), biết K(1) = 1.5709, K(4) = 1.5727, và K(6) = 1.5751

Ta có
$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{[1-(\sin k)^2 \sin^2 x]^{1/2}}$$

$$l_0(3.5) = \frac{(3.5-4)(3.5-6)}{(1-4)(1-6)} = \frac{1.25}{15} = 0.08333$$

$$l_1(3.5) = \frac{(3.5-1)(3.5-6)}{(4-1)(4-6)} = \frac{-6.25}{-6} = 1.04167$$

$$l_2(3.5) = \frac{(3.5-1)(3.5-4)}{(6-1)(6-4)} = \frac{-1.25}{10} = -0.12500$$

→ $K(3.5) \approx (1.5709)(0.08333)+(1.5727)(1.04167)+(1.5751)((-0.12500)$

$= 1.57225$

NỘI SUY BẰNG ĐA THỨC (5)

NHƯỢC ĐIỂM CỦA ĐA THỨC NỘI SUY Lagrange:

- Việc ước lượng nó ở một điểm x cần ít nhất 2(n+1) phép nhân/chia và (2n+1) phép cộng và trừ sau khi tất cả các mẫu số của các đa thức nội suy Lagrange đã được tính toán và chia vào trong các giá trị hàm tương ứng
- Việc dùng đa thức Lagrange dường như là lãng phí, bởi vì khi tính $p_k(x)$ không dùng lại được các kết quả đã tính ở $p_{k-1}(x)$

→ Nên tìm đa thức nội suy dạng khác

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (1)

Lập công thức

$$p_n(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ A_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$
$$= \mathbf{q_k(x)} + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k)r(x)$$

với $q_k(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)(x - x_1)$
$+ \ldots \quad + A_k(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$

Nhận xét: $p_n(x) = q_k(x)$ tại các điểm $x_0, x_1, \ldots, x_k$,

nghĩa là **$q_k(x)$ nội suy $f(x)$ tại $x_0, \ldots, x_k$**

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (2)

Lập công thức: Xây dựng dãy đa thức **có tính kế thừa** $p_0(x), p_1(x), \ldots$

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + A_k(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$$

$A_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ là hệ số của lũy thừa bậc cao nhất x^k của $p_k(x)$, chỉ phụ thuộc vào các giá trị của f(x) tại các điểm, $x_0, \ldots, x_k$ được gọi là tỉ sai phân cấp k của f(x) tại $x_0, \ldots, x_k$

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (3)

Công thức tính tỉ sai phân

Với n = 1, công thức nội suy Newton sẽ là

$$\mathbf{p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)}$$

so sánh với công thức nội suy Lagrange

$$\mathbf{p_1(x) = f(x_0) + [f(x_1) - f(x_0)](x - x_0) / [x_1 - x_0]}$$

→ $\mathbf{f[x_0] = f(x_0)}$

$$\mathbf{f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}$$

…………

$$\mathbf{f[x_0, x_1, \dots, x_k]} = \frac{f[x_1,\dots,x_k] - f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (3)

Bảng tỉ sai phân

x_i	f[ ]=f( )	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (4)

Ví dụ: Từ ví dụ 2 về đa thức nội suy Lagrange

$$K(1,4) = \frac{1.5709 - 1.5727}{1 - 4} = 0.0006$$

$$K(4,6) = \frac{1.5727 - 1.5751}{4 - 6} = 0.0012$$

$$K(1,4,6) = \frac{0.0006 - 0..0012}{1 - 6} = 0.00012$$

x_i	K[ ]=f( )	K[,]	K[, ,]
1	1.5709		
		0.0006	
4	1.5727		0.00012
		0.0012	
6	1.5751		

→ $p_2(x)$ = 1.5709 + 0.0006 (x – 1) + 0.00012 (x – 1) (x – 4)

thế x = 3.5 vào công thức nội suy Newton, ta nhận được

$p_2(x)$ = 1.5709 + 0.0006 (2.5) + 0.00012 (2.5) (–0.5) = 1.57225

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (5)

- **Thuật toán tính các hệ số của đa thức nội suy Newton**

Cho n + 1 điểm phân biệt $x_0, x_1, \ldots, x_n$, và $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ tương ứng, với $f(x_i)$ được chứa trong vector **d** = (d_i), i =0, ..., n

Với k = 1, …, n, lặp công việc (**tính d ở lần lặp k)**

Với i = 0, …, n – k, lặp công việc:

$$\mathbf{d_i = (d_{i+1} - d_i)/ (x_{i+k} - x_i)}$$

Vậy **$f[x_0, \ldots , x_k] = d_0$, ở lần lặp thứ k**

- **Sai số của đa thức nội suy $p_n(x)$ trên [a, b] chứa** $x_0, x_1, , x_n$:

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi = \xi(x) \in (a, b):$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$= f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (6)

Chương trình:

```
double noiSuyNewton(vector<double> x,
                    vector<double> y, double x0) {
    vector <double> d = y;
    double tong = d[0], tich = 1;
    for (unsigned k = 1; k <= d.size() – 1; k++) {
        for (unsigned i = 0; i <= d.size() –  k; i++)
                d[i] = (d[i+1] – d[i])/(x[i+k] – x[i]);
        tich *= (x0 – x[k – 1]);
        tong += d[0] * tich;
        }
    return  tong;
}
```

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (1)

Giả sử f(x) **được lập thành bảng** đối với $x_i = a + ih$ với các giá trị $f(x_i)$, i = 0, . . . , N đã biết, dùng phép đổi biến tuyến tính

$$\mathbf{s = s(x) = \frac{x - x_0}{h} \leftrightarrow\ x = x(s) = x_0 + sh \text{ và } f(x) = f(x_0 + sh) = f_s}$$

→**đưa đa thức bậc n của x về đa thức bậc n của s theo các tâm nguyên**.

Định nghĩa các **sai phân tiến**

$$\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s & i = 0 \\ \Delta(\Delta^{i-1} f_s) = \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s & i > 0 \end{cases}$$

→ $$\mathbf{f[x_k, ..., x_{k+i}] = \frac{1}{i!h^i} \Delta^i f_k \quad \forall i > 0}$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (2)

Đa thức Newton bậc ≤ n nội suy f(x) **tại $x_k, \ldots, x_{k+n}$** trở thành

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!h^i} \Delta^i f_k \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_{k+j}), k = 0, 1, \ldots$$

Do $(x - x_{k+j}) = x_0 + sh - [x_0 + (k+j)h] = (s - k - j)h$ nên ta có

công thức sai phân tiến

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f_k \prod_{j=0}^{i-1} \frac{s - k - j}{j + 1}$$

$$= f_k + (s-k)\Delta f_k + \frac{(s-k)(s-k-1)}{2} \Delta^2 f_k$$

$$+ \ldots + \frac{(s-k)\ldots(s-k-n+1)}{n!} \Delta^n f_k$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (3)

Bảng sai phân tiến

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (4)

Công thức nội suy Newton tiến

Phép nội suy hàm f(x) tại $x_0, \ldots, x_n$ khi k = 0, trở thành

$$f(s) = f(x_0 + sh) \approx p_n(x_0 + sh)$$

$$= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$+ \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

Các hệ số $\Delta^i f_0$ ở công thức trên chỉ đơn thuần là hiệu số giữa đầu vào phía dưới bên trái và đầu vào phía trên bên trái.

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (5)

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
-4	-64				
		56			
-2	-8		−48		
		8		48	
0	0		0		0
		8		48	
2	8		48		
		56			
4	64				

Ví dụ:

Cho các giá trị của f(x) tại các điểm cách đều như bảng bên. Tính f(-3).

Do x = - 3 ở đầu bảng giá tri x_k nên ta chọn x_0 = -4.

→ s = [-3 - (-4)]/2 = 0,5

→f(-3) = -64 + 56.0,5

-48.0,5.(0,5-1)/2!

+ 48. 0,5.(0,5-1)(0,5-2)/3!

= -27

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (6)

```
double noiSuyNewtonTien (vector <double> x,
                         vector <double> y, double x0) {
    unsigned i, k, n = y.size();
    vector<double> d = y;
    double h = x[1] – x[0], s = (x0 – x[0]) / h, mauSo = 1. ;
    double f = y[0],  tich = s;
    for (k = 1; k <= n – 1; k++) {   // Tinh tong thu k
        for (i = 0; i <= n – k; i++)   d[i] = d[i+1] – d[i];// cac sf cap k
        f += tich * d[0] * mauSo;
        tich *= (s – k);
        mauSo /= (k+1);
    }
    return f;
}
```

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (7)

Công thức nội suy Newton lùi

Khi điểm cần tính nội suy **x ở cuối bảng**, ta lập đa thức nội suy

$$p_n(x) = A_0 + A_1(x - x_n) + A_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + A_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_0)$$

Tương tự như khi tính toán các hệ số A_i cho công thức nội suy ở đầu bảng, dẫn đến công thức

$$p_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_0)$$

Khi các mốc nội suy cách đều nhau một khoảng h, dùng phép biến đổi tuyến tính

$$\boxed{s = s(x) = \frac{x - x_n}{h} \leftrightarrow x = x(s) = x_n + sh \text{ và } f(x) = f(x_n + sh) = f_s}$$

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (8)

Công thức nội suy Newton lùi

Việc nội suy hàm f(x) tại $x_n, \ldots, x_0$ trở thành

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!\,h^i} \Delta^i f_{n-i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_{n-j})$$

$$f(s) = f(x_n + sh) \approx p_n(x_n + sh)$$

$$= f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 f_{n-2}$$

$$+ \ldots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!} \Delta^n f_0$$

Các hệ số $\Delta^i f_{n-i}$ ở công thức trên là các sai phân nằm ở cạnh bên dưới của bảng tam giác sai phân

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON VỚI MỐC CÁCH ĐỀU (9)

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
-4	-64				
		56			
-2	-8		-48		
		8		48	
0	0		**0**		**0**
		8		**48**	
2	8		**48**		
		56			
4	**64**				

Ví dụ:

Cho bảng sai phân của f(x) tại các điểm cách đều. Tính f(3).

Do x = 3 ở cuối bảng giá tri x_k nên ta chọn $x_n = 4$.

→ s = [3 - 4]/2 = -0,5

→ f(3) = **64** + **56**.(-0,5)
+ **48**.(–0,5) (–0,5+1)/2!
+ **48**.(–0,5)(–0,5+1)(–0,5+2)/3!
= 27

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (1)

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

- Biểu thức tính sai số của đa thức nội suy Newton gợi ý rằng việc tăng bậc của đa thức nội suy sẽ cung cấp một xấp xỉ tốt hơn. Nhưng, **sai số phụ thuộc vào độ lớn của khoảng chứa các điểm nội suy,** làm cho thủ thuật này không thành công
- Xét ví dụ sau: Dữ liệu thực nghiệm về hệ số khuyếch tán D đối với chất dung môi C_0 được cho trong bảng dưới đây

C_0	5	7.5	9.9	12.8	13.2	15.1	16.3	16.8
D	0.0240	0.0437	0.0797	0.1710	0.1990	0.326	0.8460	0.9720

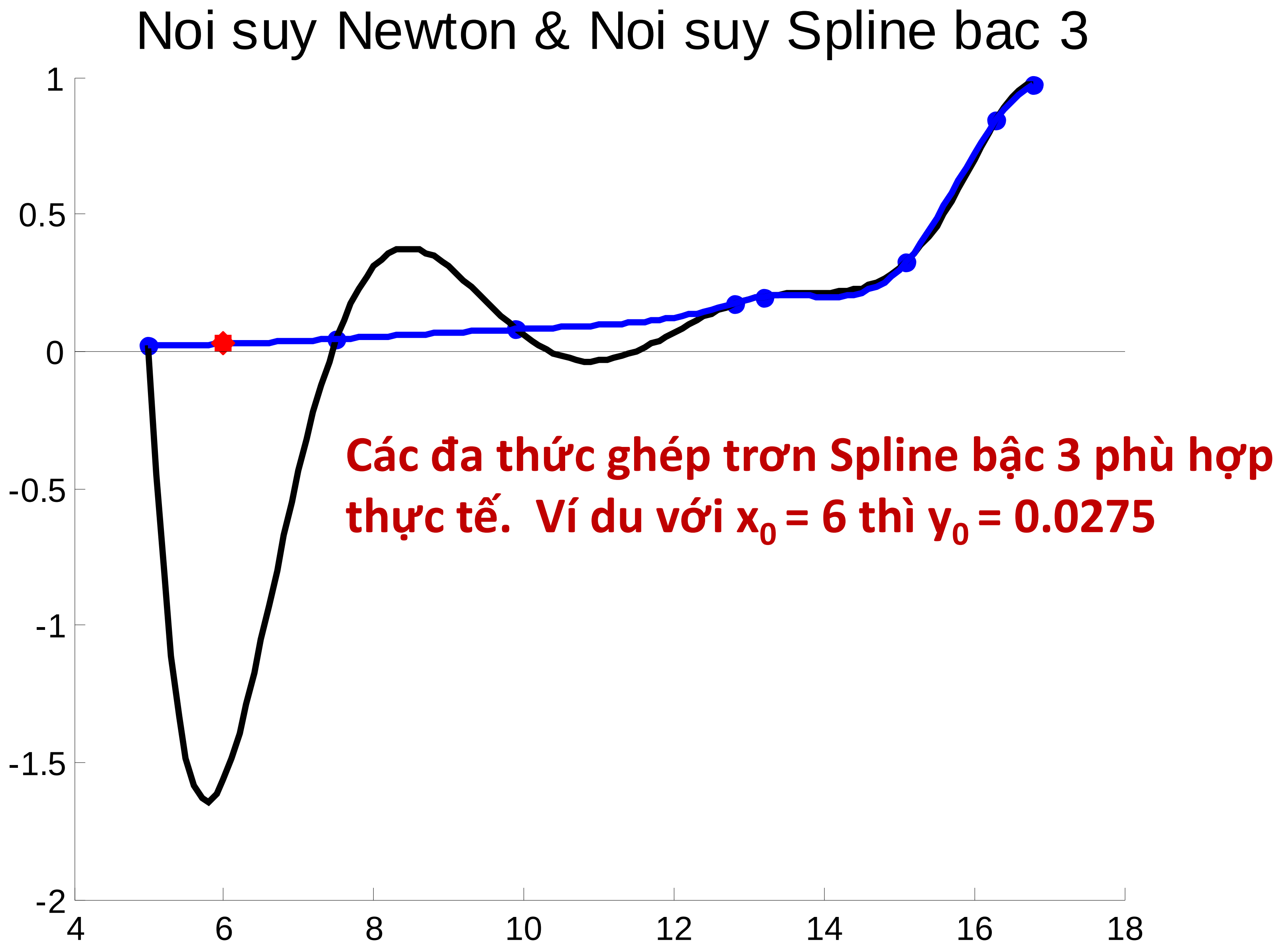
P (x) có nhiều giá trị âm không phù hợp thực tế. Ví du với $x_0 = 6$ thì $y_0 = -1.565$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (2)

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

- *Tìm các đa thức bậc ba nội suy f(x) từng khúc,* nối 2 điểm liên tiếp x_i, $x_{i+1,}$ và *ghép trơn* với nhau, tức là chúng **trơn** ở các điểm nối $M_i(x_i,y_i)$ đã cho
- Giả sử có hàm f(x) xác định trên đoạn $[x_0,x_N]$ và biết giá trị của nó tại các điểm $x_0 < x_2 < \ldots < x_N$ là $f(x_0), f(x_1) \ldots , f(x_N)$ tương ứng. Hãy tìm N đa thức bậc ba ghép trơn trên $[x_i,x_{i+1}]$ nội suy f(x) tại các điểm này.

$$P_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x-x_i) + c_{3,i}(x-x_i)^2 + c_{4,i}(x-x_i)^3,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$$


Noi suy Newton & Noi suy Spline bac 3
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
4
6
8
10
12
14
16
18
Các đa thức ghép trơn Spline bậc 3 phù hợp thực tế. Ví du với x0 = 6 thì y0 = 0.0275

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (3)

2. ĐA THỨC NỘI SUY HERMIT:

Do các đa thức $P_i(x)$nội suy f(x) trên $[x_i\ x_{i+1}]$ nên ta có

$P_i\ (x_i) = f(x_i),\ P_i\ (x_{i+l}) = f(x_{i+1})$ $\qquad i = 0, ... , N\text{-}1$ và

$P_{i\ -1}\ (x_i) = P_i(x_i),$ $\qquad i = 1, ... , N\text{-}1$

Các đa thức này trơn tại các điểm trong x_i, tức là

$P_i'\ (x_i) = f'\ (x_i)$ $\qquad i = 1, ... , N\text{-}1$ (1)

$P_i'\ (x_{i+l}) = f'\ (x_{i+l})$ $\qquad i = 1, ... , N\text{-}1$ (2)

Từ công thức nội suy Newton bậc ba tại 4 điểm x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}

$$P_i(x) = f(x_i) + f[x_i, x_i](x - x_i) + f[x_i, x_i, x_{i+1}](x - x_i)^2$$
$$+ f\ [x_{i,}, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}](x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

Bởi vì $(x - x_{i+1}) = (x - x_i) + (x_i - x_{i+1}) = (x - x_i) - h_i,\ h_i = x_{i+1} - x_i$

nên $P_i(x) = f(x_i) + f\ '(x_i)\ (x - x_i)$

$$+ (f\ [x_i, x_i, x_{i+1}] - f\ [x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]\ h_i)\ (x - x_i)^2$$
$$+ f[x_i, x_i, x_{i+l}, x_{i+l}]\ (x - x_i)^3$$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (4)

2. ĐA THỨC NỘI SUY HERMIT: SAI SỐ

Với $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $g_3(x) = P_i(x)$, ở đây $P_i(x)$ nội suy $f(x)$ tại 4 điểm $x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}$, từ công thức sai số của đa thức nội suy Newton, suy ra với $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$f(x) - g_3(x) = f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+l}, x]\,(x - x_i)^2\,(x - x_{i+1})^2$$

với giả thiết f(x) khả vi liên tục cấp bốn. Hơn nữa,

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2| \le \left(\tfrac{1}{2} h_i\right)^2 \left(\tfrac{1}{2} h_i\right)^2 \le \frac{(h_i)^4}{16}$$

$$\rightarrow |f(x) - g_3(x)| \le \frac{1}{4!}\frac{1}{16} \max_k \left\{ (h_k)^4 \max_{x_k \le \xi \le x_{k+1}} |f^{(4)}(\xi)| \right\}$$

nên với $a \le x \le b$:

$$|f(x) - g_3(x)| \le \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \frac{(\max_j h_i)^4}{384}$$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (3)

2. ĐA THỨC NỘI SUY HERMIT:

Kí hiệu **$f_i = f(x_i)$, $s_i = f'(x_i)$**, $i = 0 \dots, N$ ta nhận được

$$P_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x-x_i) + c_{3,i}(x-x_i)^2 + c_{4,i}(x-x_i)^3 \text{ với}$$

$$c_{1,i} = f_i \qquad c_{2,i} = s_i$$

$$c_{3,i} = f[x_i, x_i, x_{i+1}] - f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]\, h_i = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - s_i}{h_i} - c_{4,i} h_i$$

$$c_{4,i} = \frac{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] - f[x_i, x_i, x_{i+1}]}{h_i} = \frac{s_{i+1} + s_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(h_i)^2}$$

Khi không biết thông tin về các số **$s_i = f'(x_i)$,** ta sử dụng trung bình trọng số

$$s_i \approx \frac{h_{i-1} f[x_i, x_{i+1}] + h_i f[x_{i-1}, x_i]}{h_{i-1} + h_i}$$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (5)

3. PHÉP NỘI SUY SPLINE BẬC BA

Nhận xét:

$$P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i) = s_i = f'(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

Từ điều kiện **khả vi liên tục hai lần của các đa thức ghép trơn bậc ba** $P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1$

$\rightarrow \quad 2c_{3,i-1} + 4c_{4,i-1}h_{i-1} = 2c_{3,i} - 2c_{4,i}h_i, \; i = 1, \ldots, N-1$

Hệ PTTT trên cần thêm hai điểm x_0, x_N để cung cấp giá trị bằng số cho các đạo hàm biên s_0, s_N của các đa thức ghép trơn. Các điểm này được chọn để thỏa mãn các điều kiện "đầu mút tự do"

$$P''_0(x_0) = P''_{N-1}(x_N) = 0$$

$$\rightarrow h_i s_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)s_i + h_{i-1}s_{i+1} = 3(f[x_{i-1}, x_i]h_i + f[x_i, x_{i+1}]h_{i-1}) \quad i = 1, \cdots, N-1$$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (6)

3. PHÉP NỘI SUY SPLINE BẬC BA

Hệ có tính chéo trội nên luôn có nghiệm duy nhất.

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_2+h_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{N-3}+h_{N--2}) & h_{N-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{N-1} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Vế phải của hệ là vectơ n-1 chiều **w** = $[w_1, w_2, \ldots, w_{N-1}]^T$ với

$$w_i = 3(f[x_{i-1}, x_i]h_i + f[x_i, x_{i+1}]h_{i-1}) \quad i = 1, \cdots, N-1$$

Sử dụng nghiệm $[\mathbf{s}_1^*, \mathbf{s}_2^*, \ldots, \mathbf{s}_{N-1}^*]$ và đ/k $s_0^* = s_N^* = 0$ ta tính được các hệ số của các đa thức cục bộ $P_i(x)$ trong công thức $c_{4,j}$ từ đó tính được $c_{3,j}$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (7)

3. PHÉP NỘI SUY SPLINE BẬC BA

Ví dụ: Cho trước các giá trị của hàm f(x), tính gần đúng f(6,46) bằng đa thức ghép trơn Spline bậc ba.

i	x_i	h_i	f_i	$f_{i+1} - f_i$	$f[x_{i-1}, x_i]$	w_i
0	1	1	2	-0.5	-0.5	
1	2	2	1.5	-0.25	-0.125	-3.375
2	4	1	1.25	-0.05	-0.05	-0.675
3	5	3	1.2	-0.075	-0.025	-0.525
4	8	2	1.125	-0.025	-0.0125	-0.2625
5	10		1.1			

Ta có hệ 3 đ/c

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 0 & 0 & -3,375 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & -0,675 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & -0,525 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & -0,2625 \end{array}\right)$$

$$s_1 = -0.5630 \quad s_2 = 0.0030$$

$$s_3 = -0.0651 \quad s_4 = -0.0132$$

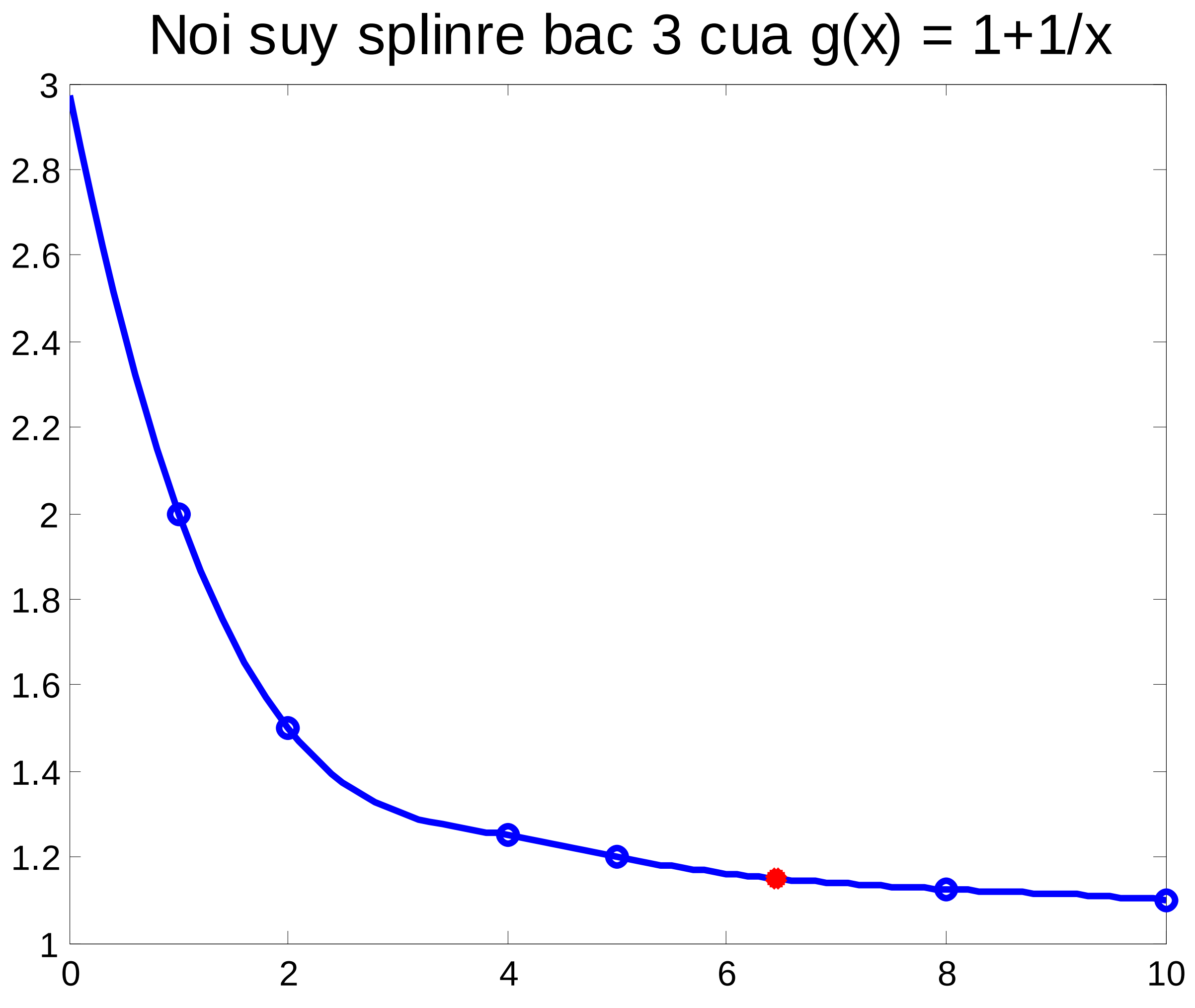
$$c_3 = 0.0228 \quad c_4 = -0.0031$$

Do x = 6,46 є [5; 8] = [x_3; x_4] nên f(6.46) ≈ P_3(6.46), $c_{1,3} = f_3$, $c_{2,3} = s_3$

$f(6.46) \approx 1.2 - 0.0651\ (1.46) + 0.0228\ (1.46)^2 - 0.0032\ (1.46)^3 = 1.1438$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (7)

3. PHÉP NỘI SUY SPLINE BẬC BA



CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (8)

3. PHÉP NỘI SUY SPLINE BẬC BA: SAI SỐ

Có thể chỉ ra sai số trong nội suy spline bậc ba với $a \le x \le b$:

$$|f(x) - g_3(x)| \le \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \frac{5\left(\max_j h_i\right)^4}{384}$$

Biên của sai số này chỉ lớn bằng 5 lần biên của sai số nội suy Hermite, nhưng nội suy Hermite bậc ba sử dụng các thông tin về hàm f(x) nhiều gấp hai lần,do thêm các giá trị f'(x_i),i = 2, …, N Các đạo hàm $g'_3(x_i)$ phải xấp xỉ tốt các **f'(x_i).** Có thể chỉ ra rằng

$$|f'(x) - g'_3(x)| \le \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \frac{5\left(\max_i h_i\right)^3}{24}$$

trong trường hợp dãy điểm cách đều, $x_i = x_0 + ih$, với mọi i ta có

$$|f'(x) - g'_3(x)| \le \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(5)}(\xi)| \frac{h^4}{60}, \quad i = 2, \ldots, N:$$

CÁC ĐA THỨC GHÉP TRƠN (9)

```
double spline (vector< double > x, vector< double > f, double x0) {
    unsigned i, j, n = x.size();
    double c3, c4;
    vector< double > h(n - 1, 0), y(n - 1, 0), u(1, 0), l(1, 0),
                     d(n - 2, 0), w(n - 2, 0), z(n - 2, 0), s(n, 0); // Khởi tạo các vector
    for (i = 0; i < n - 1; i++)  h[i] = x[i+1] - x[i];          // số gia của x
    for (i = 0; i < n - 1; i++)  y[i] = (f[i+1] - f[i]) / h[i];  // tỉ sai phân cấp 1
    for (i = 0; i < n - 2; i++)  d[i] = 2 * (h[i+1] + h[i]);    // ĐC chính
    l.insert (l.end (), h.begin () + 2, h.end ());              // ĐC dưới
    u.insert (u.begin (), h.begin () , h.end () – 2);           // ĐC trên
    for (i = 0; i < n - 2; i++)  w[i] = 3 * (y[i] * h[i+1] + y[i+1] * h[i]); // vế phải
    baDuongCheo (u, d, l, w, z);          // Giải hệ ba đường chéo tìm nghiệm z
    for (i = 1; i < n - 1; i++)  s[i] = z[i-1];   // Gán các giá tri s1, ... sN-2
    i = 0;                                        // Tim khoảng thứ i [xi, xi+1] chứa x0
    while (x0 > x[i+1]) i++;
    c4 = (s[i+1] + s[i] - 2 * y[i]) / h[i] / h[i];
    c3 = (y[i] - s[i]) / h[i] - c4 * h[i];
    return  f[i] + s[i] * (x0 - x[i]) + c3 * (x0 - x[i]) * (x0 - x[i])
                 + c4 * (x0 - x[i]) * (x0 - x[i]) * (x0 - x[i]);
}
```

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (1)

1. BÀI TOÁN: Hãy phục hồi quan hệ hàm y = f(x) từ các dữ liệu đo được y_i, tại các x_i, i = 1, … , n

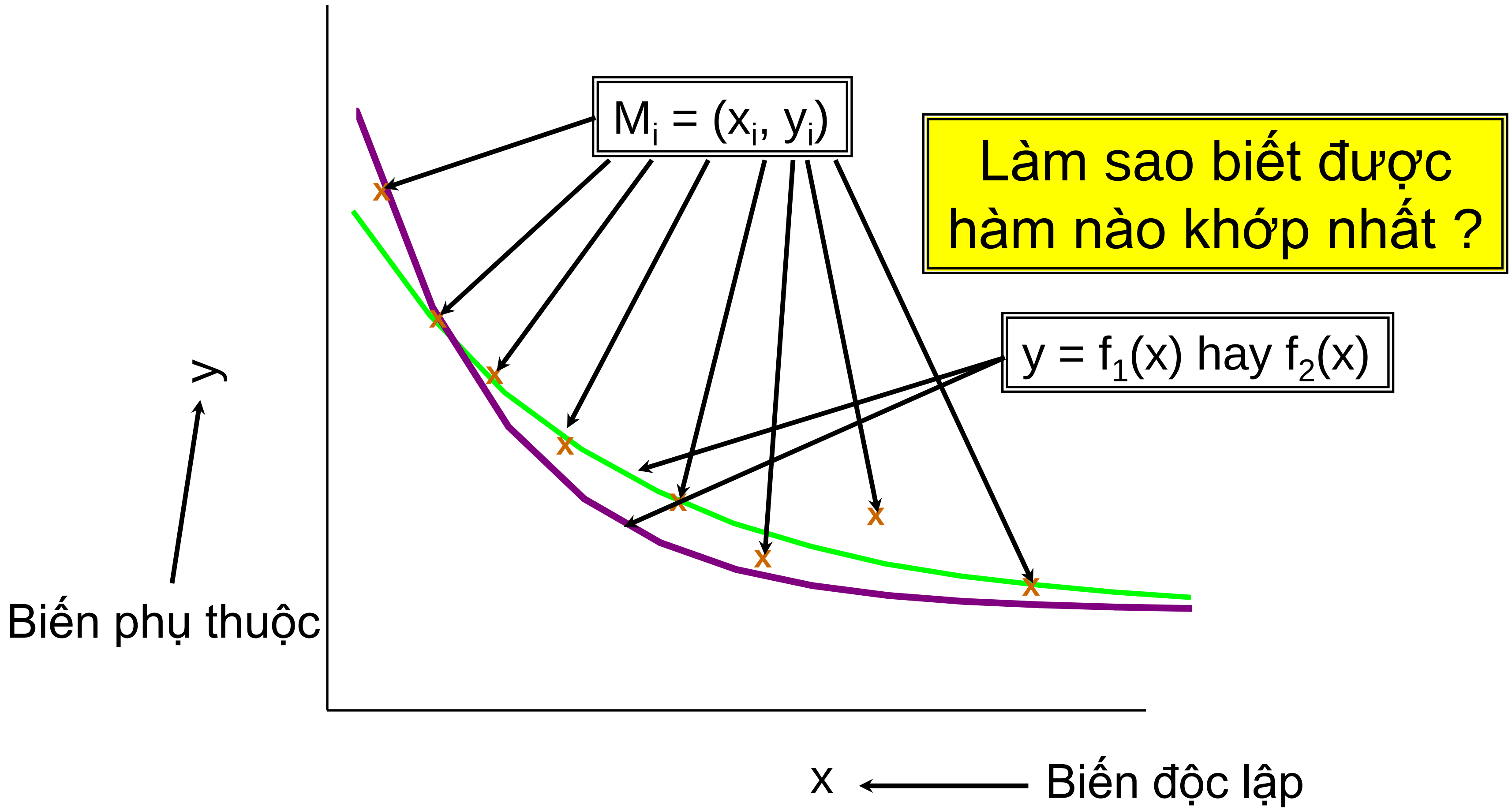
x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Các dữ liệu y_i có chứa một thành phần biến đổi chậm là tính *xu thế của f(x),* hay **các thông tin** về f(x), và một thành phần biến đổi khá nhanh có biên độ tương đối nhỏ được gọi là *sai số* hay **nhiễu**

$$y_i = f(x_i) + e_i$$

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (2)

1. BÀI TOÁN:



ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (3)

2. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT:

Tìm hàm f(x) = f(c_1, c_2, … , c_k; x) thể hiện hầu hết các thông tin về *f(x)* có trong dữ liệu và một phần nhỏ nhiễu. Hàm này *phụ thuộc vào các tham số* c_1, . . . , c_k *một cách tuyến tính,*

$$\mathbf{f(c_1, c_2, \ldots, c_k; x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \ldots + c_k\Phi_k(x)}$$

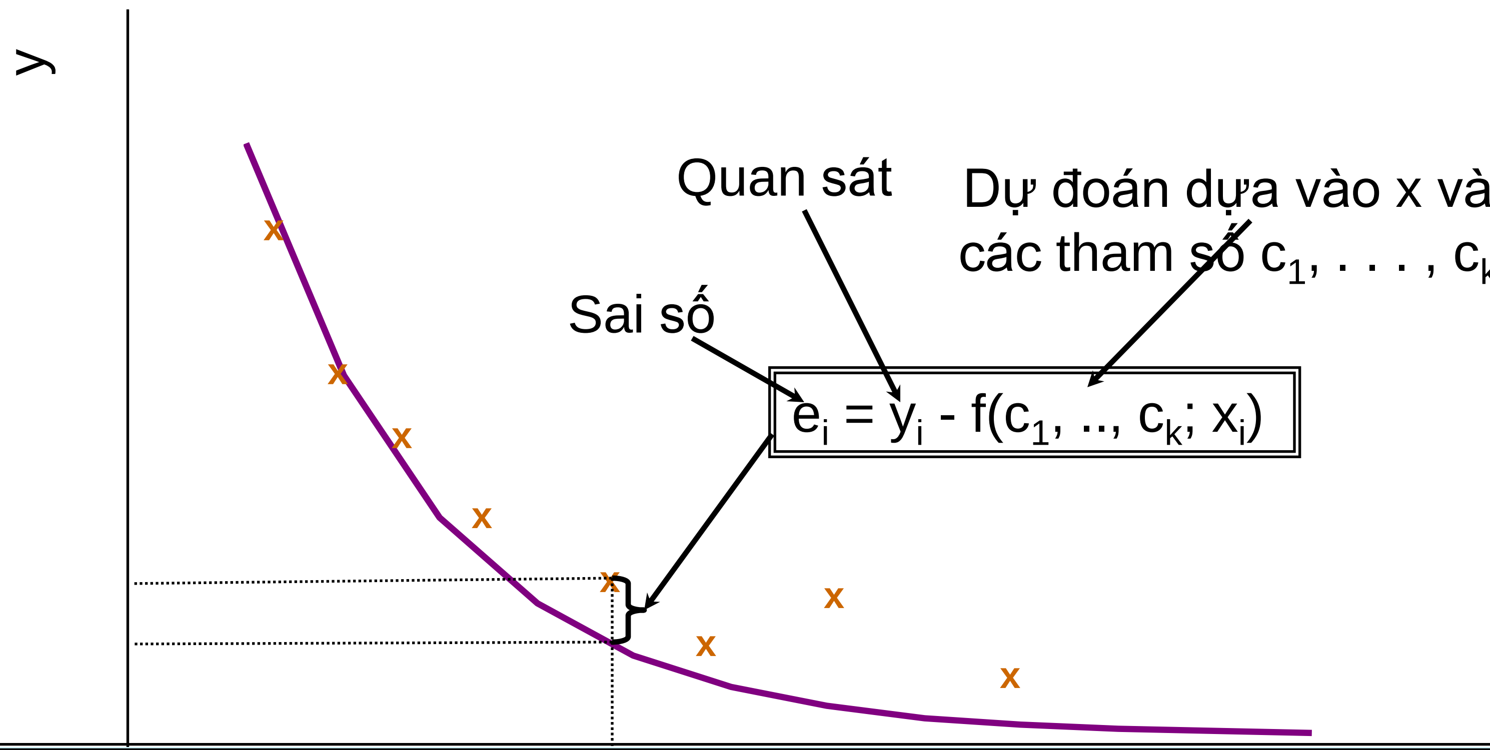
trong đó { Φ_i } là một tập các hàm được lựa chọn trước và { c_i } là các tham số cần phải xác định.

Chọn các tham số phù hợp nhất với các điểm thực nghiệm: **tổng các bình phương của sai số ở các điểm thực nghiệm là bé nhất**, tức là bộ tham số phù hợp nhất phải là bộ

$$E(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(c_1, c_2, \ldots, c_k; x_i)]^2$$

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (4)

2. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT:



Tim c¸c $c_1, \ldots, c_k$ lµm cùc tiÓu $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[y_i - f(c_1, \ldots, c_k; x_i)]^2}_{\text{Bình phương sai số}}$

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (5)

3. LẬP CÔNG THỨC

- Điểm làm cực tiểu hàm $E(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ phải là điểm dừng, nghĩa là phải thoả mãn hệ k phương trình

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{c_j}} = 2\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}[y_i\text{-}f(c_1,c_2,\ldots c_k;x_i)]\frac{\partial f(c_1,c_2,\ldots,c_k;x_i)}{\partial c_j} = \mathbf{0},\ \forall \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1,k}}$$

- Thay $x = x_i$, $f(c_1,c_2,\ldots,c_k;\, x_i) = c_1\Phi_1(x_i) + c_2\,\Phi_2(x_i) + \ldots + c_k\,\Phi_k(x_i)$

vào hệ trên ta được hệ PTTT đối xứng

$$\begin{cases} c_1(\boldsymbol{\Phi_1},\boldsymbol{\Phi_1}) + c_2(\boldsymbol{\Phi_1},\boldsymbol{\Phi_2}) + \ldots + c_k(\boldsymbol{\Phi_1},\boldsymbol{\Phi_k}) = (\boldsymbol{\Phi_1},\mathbf{y}) \\ c_1(\boldsymbol{\Phi_2},\boldsymbol{\Phi_1}) + c_2(\boldsymbol{\Phi_2},\boldsymbol{\Phi_2}) + \ldots + c_k(\boldsymbol{\Phi_2},\boldsymbol{\Phi_k}) = (\boldsymbol{\Phi_2},\mathbf{y}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1(\boldsymbol{\Phi_k},\boldsymbol{\Phi_1}) + c_2(\boldsymbol{\Phi_k},\boldsymbol{\Phi_2}) + \ldots + c_k(\boldsymbol{\Phi_k},\boldsymbol{\Phi_k}) = (\boldsymbol{\Phi_k},\mathbf{y}) \end{cases}$$

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (6)

3. LẬP CÔNG THỨC

$\mathbf{\Phi_i}=[\Phi_i(x_1), \ldots, \Phi_i(x_n)]^T$, $i = 1, \ldots, k$; $\mathbf{y} = [f(x_1) \ldots, f(x_n)]^T$

(Φ_i, Φ_j) là tích vô hướng giữa 2 véc tơ **Φ_i** và **Φ_j**, cụ thể

$$(\mathbf{\Phi_i},\mathbf{\Phi_j}) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_i(x_k)\,\Phi_j(x_k) \quad , \quad (\mathbf{\Phi_i}\,,\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_i(x_k) f(x_k)$$

Một số hàm làm khớp dạng tham số tuyến tính thường gặp

$f(x) = a+ bx$; $f(x) = a + bx + cx^2$;

$f(x) = a + b/x$ $f(x) = a + b\cos x + c\sin x$;

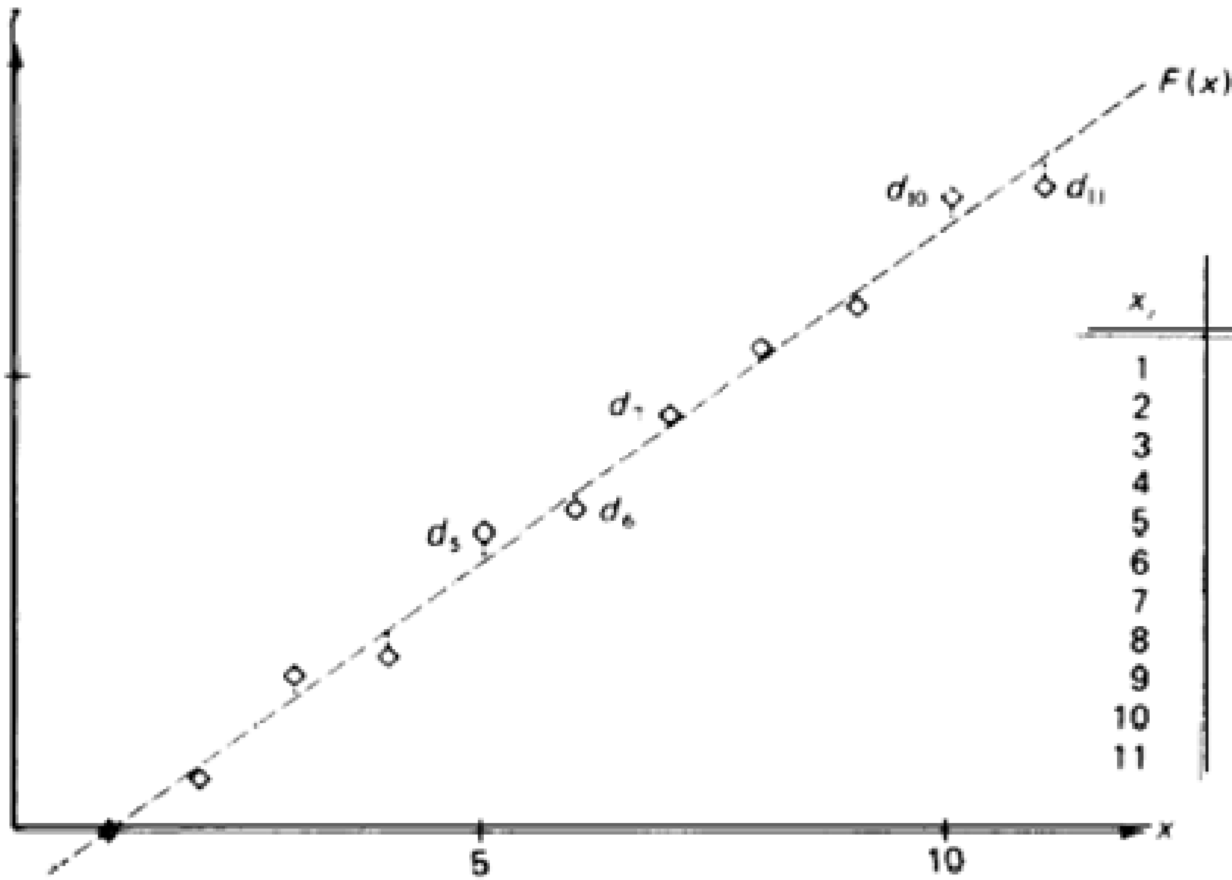
hoặc có thể biến đổi về dạng tham số tuyến tính như

$f(x) = ae^{bx}$; $(a>0)$, $f(x) = a\ln x + b$

$f(x) = ax^b$; $(a>0, b>0)$

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (7)

4. VÍ DỤ 1: Giả sử ta có 11 điểm thực nghiệm có thể xấp xỉ bởi đường thẳng dạng $f(x) = c_1 + c_2 x$. Hãy xác định c_1 và c_2 bằng phương pháp bình phương bé nhất



x_i	f_i
1	.0
2	.6
3	1.77
4	1.92
5	3.31
6	3.52
7	4.59
8	5.31
9	5.79
10	7.06
11	7.17

ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (8)

4. VÍ DỤ 1:

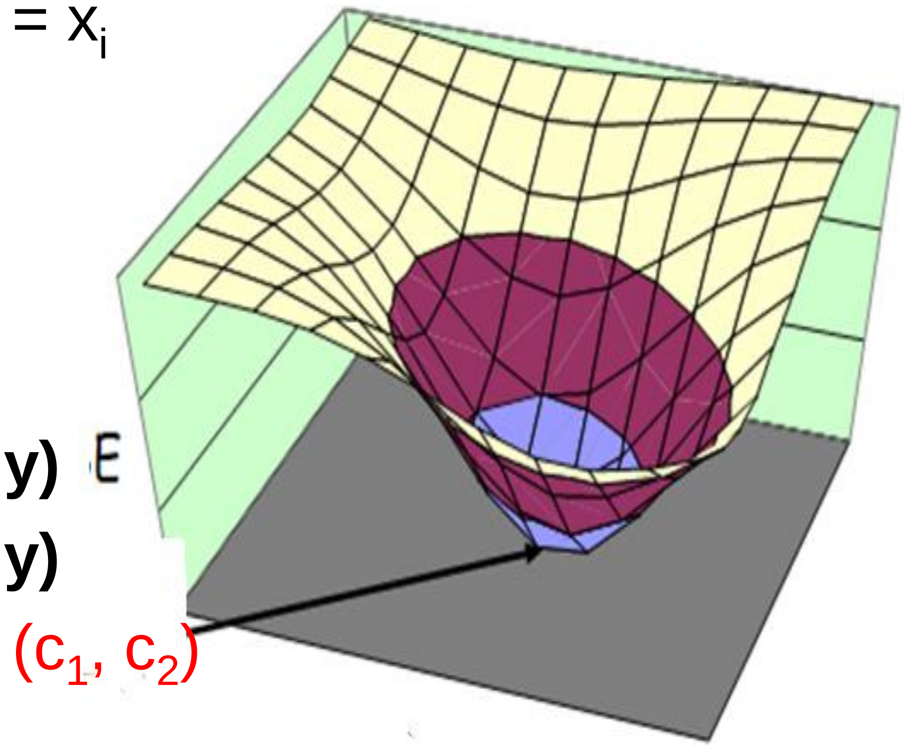
Tim c¸c $\mathbf{c_1, c_2}$ lµm cùc tiÓu $E = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{e_i^2} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \left[\mathbf{y_i} - (\mathbf{c_1} + \mathbf{c_2 x_i})\right]^2$

1. Xác định $\Phi_1(x_i) = 1$, $\Phi_2(x_i) = x_i$
2. Tính các tích vô hướng

(Φ_1, Φ_1), (Φ_1, Φ_2),(Φ_2, Φ_2), (Φ_1, y), (Φ_2, y)

3. Giải hệ PTTT

$$\begin{cases} c_1(\boldsymbol{\Phi_1},\boldsymbol{\Phi_1}) + c_2(\boldsymbol{\Phi_1},\boldsymbol{\Phi_2}) = (\boldsymbol{\Phi_1},\mathbf{y}) \\ c_1(\boldsymbol{\Phi_1},\boldsymbol{\Phi_2}) + c_2(\boldsymbol{\Phi_2},\boldsymbol{\Phi_2}) = (\boldsymbol{\Phi_2},\mathbf{y}) \end{cases}$$



ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (9)

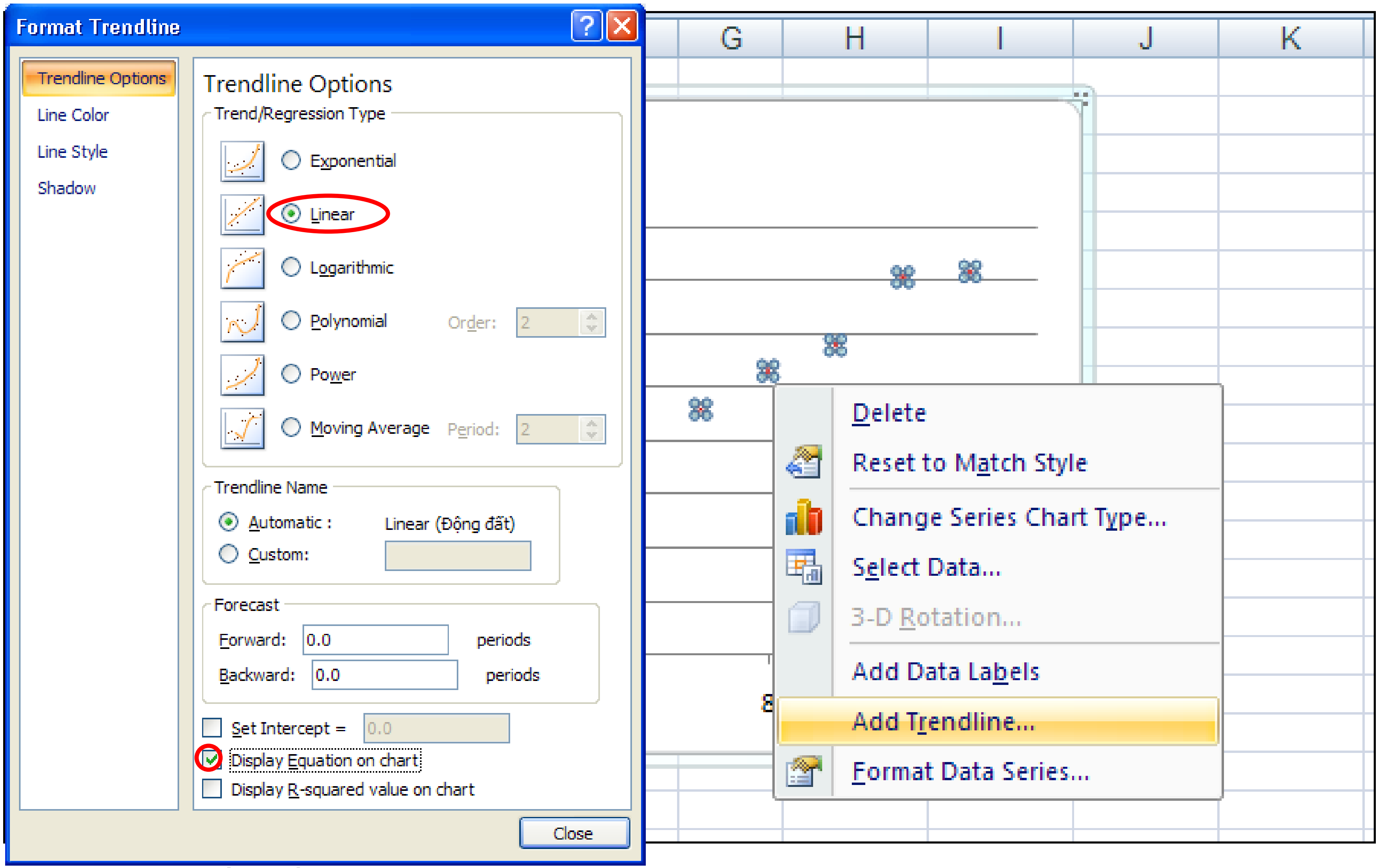
i	$x = \Phi_2$	y	Φ_1	(Φ_1, Φ_1)	(Φ_1, Φ_2)	(Φ_1, y)	(Φ_2, Φ_2)	(Φ_2, y)
1	1	0.00	1	1	1	0	1	0
2	2	0.60	1	1	2	0.6	4	1.2
3	3	1.77	1	1	3	1.77	9	5.31
4	4	1.92	1	1	4	1.92	16	7.68
5	5	3.31	1	1	5	3.31	25	16.55
6	6	3.52	1	1	6	3.52	36	21.12
7	7	4.59	1	1	7	4.59	49	32.13
8	8	5.31	1	1	8	5.31	64	42.48
9	9	5.79	1	1	9	5.79	81	52.11
10	10	7.06	1	1	10	7.06	100	70.6
11	11	7.17	1	1	11	7.17	121	78.87
			Tổng	**11**	**66**	**41.04**	**506**	**328.05**

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{11} & \mathbf{66} & \mathbf{41.04} \\ \mathbf{66} & \mathbf{506} & \mathbf{328.05} \end{array}\right)$$

Giải ra ta được $\mathbf{c_1 = -0.7314}$ **và** $\mathbf{c_2 = 0.7437}$

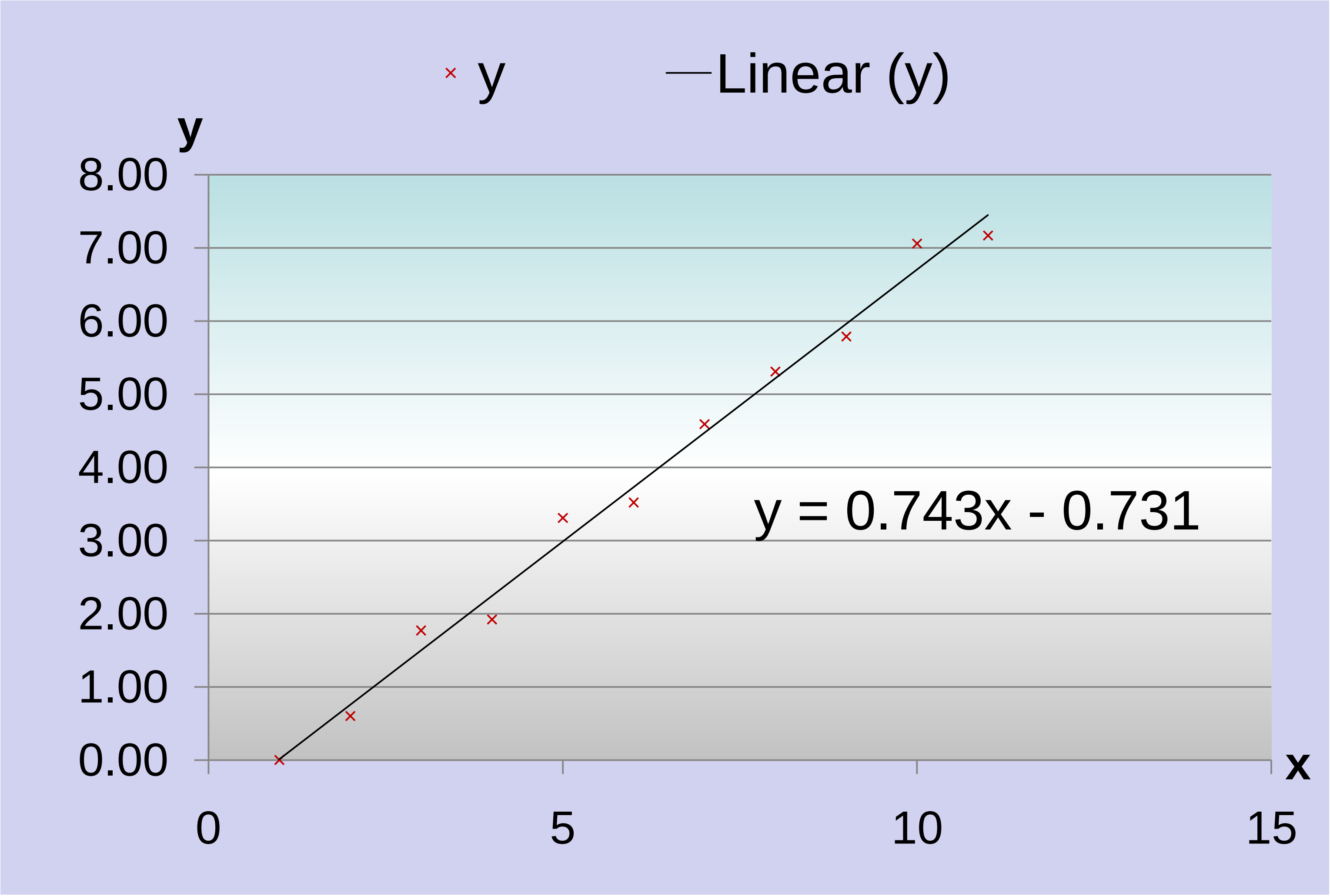
ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (10)

5. SỬ DỤNG HÀM TRENDLINE TRONG VẼ ĐỒ THỊ EXCEL



ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (11)

5. SỬ DỤNG HÀM TRENDLINE TRONG VẼ ĐỒ THỊ EXCEL

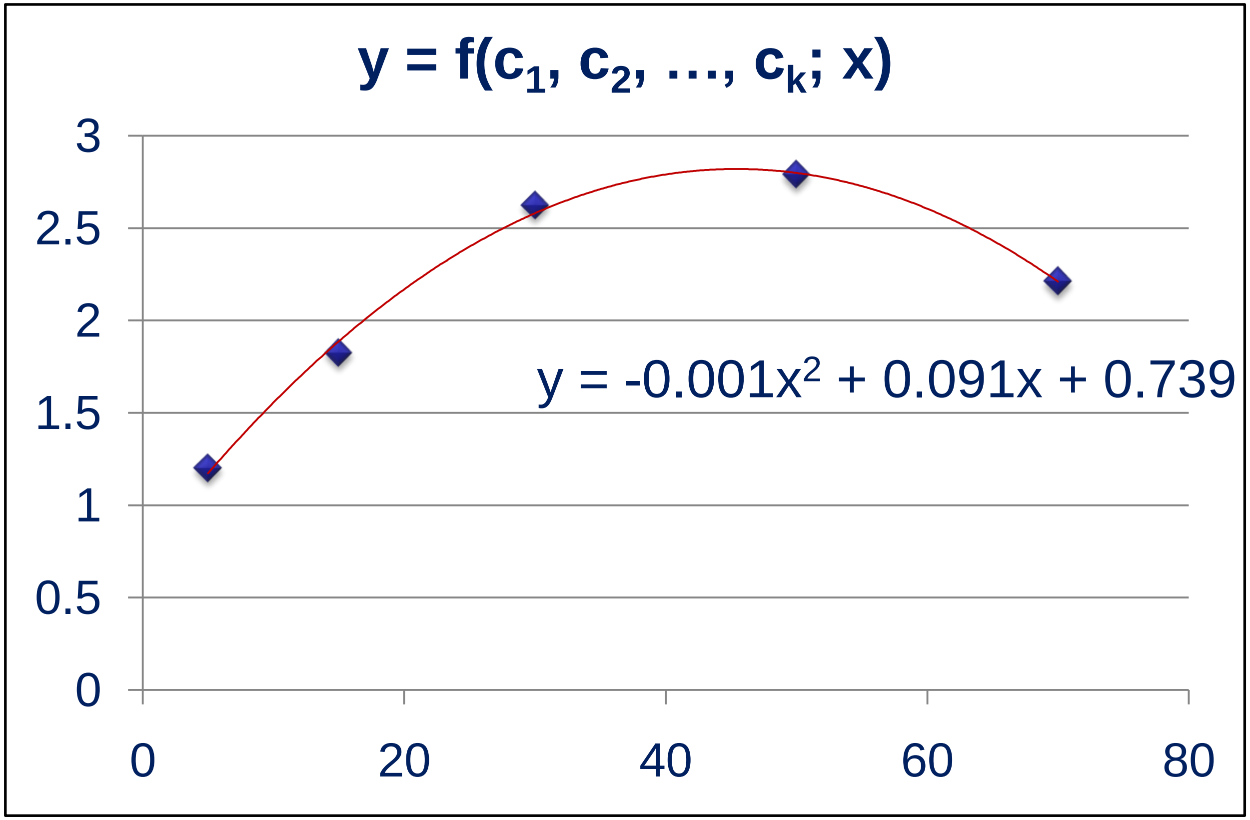


ĐƯỜNG CONG LÀM KHỚP DỮ LIỆU (12)

5. SỬ DỤNG HÀM TRENDLINE TRONG VẼ ĐỒ THỊ EXCEL

VÍ DỤ 2: Tìm đường cong làm khớp dữ liệu tại 5 điểm thực nghiệm sau

x	y
5	1.201
15	1.824
30	2.624
50	2.787
70	2.210



BÀI TẬP

1. Bài tập tính toán:

a) 2.2-1, 2.2-3, 2.2-5, 2.3-2, 2.6-2, 2.6-4, 6.2-2

b) Cho bảng dữ liệu quan trắc được của hàm y = f(x)

x	1	2	3	5	6
y	4.75	4	5.25	19.75	36

Hãy tính f(4) bằng cách sử dụng

- Đa thức nội suy Newton,
- Đa thức ghép trơn spline bậc 3

2. Bài tập lập trình:

Hãy viết các chương trình

- Nội suy Newton với bước không cách đều và cách đều,
- Nội suy spline bậc ba