HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM

BỘ MÔN TOÁN TIN ỨNG DỤNG

THS NGUYỄN THỊ THÚY HẠNH

BÀI GIẢNG

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Hà Nội, tháng 2 – 2018

Mục lục

Chương 1. Số xấp xỉ và sai số

§1 Số xấp xỉ và sai số

1.1 Định nghĩa

(1) Số a gọi là *số xấp xỉ* của số đúng A, kí hiệu $a \approx A$, nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.
(2) Trị tuyệt đối của hiệu số $|A - a| = \Delta$ gọi là *sai số tuyệt đối* của số xấp xỉ a.
(3) *Sai số tuyệt đối giới hạn* của số xấp xỉ a, kí hiệu Δ_a, là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. (Tức là $\Delta \le \Delta_a$ hay Δ_a là ***một cận trên*** của Δ)
(4) *Sai số tương đối* của số xấp xỉ a, kí hiệu δ, được xác định là $\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|A-a|}{|A|}$ $(A \neq 0)$.
(5) *Sai số tương đối giới hạn* của số xấp xỉ a, kí hiệu δ_a, là số không nhỏ hơn sai số tương đối của số xấp xỉ a. (Tức là $\delta \le \delta_a$ hay δ_a là ***một cận trên*** của δ)

Các lưu ý :

(1) Ta có $\Delta = |A - a| \le \Delta_a$ **(*)** hay : $a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a$. Khi đó ta viết: $A = a \pm \Delta_a$.

Ví dụ 1.1.1. Trọng lượng của một gói mì tôm đóng gói đúng tiêu chuẩn là $m = 80 \pm 5\ (g)$. Cân trọng lượng của một gói mì được kết quả 78g. Hỏi gói mì đó có đóng gói đúng tiêu chuẩn không?

(2) Sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a không đơn trị, tức là Δ_a có thể nhận giá trị là số bất kì trong tập vô hạn các số không âm thỏa mãn (*). Vì vậy trong thực hành, ta thường chọn Δ_a là số dương nhỏ nhất ***có thể chấp nhận được thỏa mãn (*).***

Ví dụ 1.1.2. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ $a = 3,14$ thay cho số π.

Giải. $\Delta = |\pi - a| = \pi - 3{,}14 < 3{,}1416 - 3{,}14 = 0{,}0016$. Chọn $\Delta_a = 0{,}0016$.

Cách khác: Đánh giá $\Delta = |\pi - a| = \pi - 3{,}14 < 3{,}142 - 3{,}14 = 0{,}002$ thì lấy $\Delta_a = 0{,}002$.

(3) Do $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$ mà $\Delta \le \Delta_a$ suy ra $\le \frac{\Delta_a}{|A|}$. Vậy biết Δ_a ta có thể chọn $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}$.

Ngược lại, $\Delta = |A|.\delta$ mà $\delta \le \delta_a$ suy ra $\Delta \le |A|.\delta_a$. Vậy biết δ_a ta cũng có thể lấy $\Delta_a = |A|.\delta_a$.

Trong thực hành ta thường dùng công thức $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ hay $\Delta_a = |a|.\delta_a$ (Do A chưa biết). Khi đó, ta viết $A = a(1 \pm \delta_a)$.

Ví dụ 1.1.3a. Đo trọng lượng của $1dm^3$ nước ở 0^0C nhận được : $p = 999{,}847g \pm 0{,}001g$. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn của phép đo trên.

Đáp số : $\delta_p = \frac{\Delta_p}{|p|} = \frac{0{,}001}{999{,}847} = 0{,}0001\%$.

Ví dụ 1.1.3b. Lấy $a = 2{,}72$ thay cho số *e*. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a.

ĐS: Có $e = 2{,}718281828 \ldots$ => $\Delta = |e - 2{,}72| = 2{,}72 - e < 2{,}72 - 2{,}718 = 0{,}002$.

Lấy $\Delta_a = 0{,}002$. *Vậy :* $\delta_p = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0{,}002}{2{,}72} = 0{,}07\%$.

(4) Sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a và số xấp xỉ *a* có cùng thứ nguyên (cùng đơn vị đo).

Nhưng sai số tương đối giới hạn δ_a không có thứ nguyên (đơn vị đo). Sai số tương đối thường được viết dưới dạng tỉ số phần trăm.

Ví dụ 1.1.4. Trọng lượng của giống lợn *A* khi cho ăn thức ăn *X* dự đoán là tăng *23kg/tháng*. Thực tế tăng *20kg/tháng*. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của trọng lượng lợn tăng dự đoán so với thực tế trong một tháng.

- *Sai số tuyệt đối* $\Delta = |20 - 23| = 3\ (kg)$ => $\Delta_a = 3\ (kg)$.

Nếu tính theo gam thì $\Delta = |20000 - 23000| = 3000\ (g)$ => $\Delta_a = 3000\ (g)$.

Vậy sai số tuyệt đối Δ_a *phụ thuộc vào đơn vị đo.*

- *Nhưng sai số tương đối* $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$. *Sai số tương đối giới hạn* δ_a *không phụ thuộc vào đơn vị đo.*

(5) Sai số tương đối giới hạn của một phép đo hoặc một kết quả tính toán càng nhỏ thì phép đo hay kết quả tính toán đó càng chính xác.

Ví dụ 1.1.5. Cho hai phép đo: Đo chiều dài một cái bàn $a_1 = 120cm$ có sai số $\Delta_{a1} = 2cm$ và chiều dài một cây cầu $a_2 = 1200m$ với sai số $\Delta_{a2} = 1m$. Phép đo nào chính xác hơn?

Ý nghĩa các sai số: Biết sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a ta xác định được khoảng giá trị của kết quả hoặc phép đo, còn biết sai số tương đối giới hạn δ_a thì ta biết độ chính xác của kết quả hay phép đo.

1.2 Cách viết số xấp xỉ

Định nghĩa: Cho số thập phân *a* là số xấp xỉ của số đúng *A*, với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a.

Giả sử : $a = \pm\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_0,\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-m}}$.

Hay nói cách khác, số thập phân *a* được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cơ số *10* là :

$$a = \pm(\alpha_n.10^n + \alpha_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + \alpha_0.10^0 + \alpha_{-1}.10^{-1} + \alpha_{-2}.10^{-2} + \cdots + \alpha_m.10^{-m})$$

trong đó: α_k là chữ số ở hàng 10^k , $\alpha_k \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$. Ta có định nghĩa:

(1) Những *chữ số có nghĩa* của số thập phân *a* là những chữ số của số đó, tính từ chữ số khác không đầu tiên xét từ trái sang phải.

(2) *Chữ số có nghĩa* α_k của số thập phân *a* gọi là một *chữ số đáng tin* nếu $\Delta_a \le \frac{1}{2}.10^k$.

Một chữ số không đáng tin được gọi là *chữ số nghi ngờ*.

Nói cách khác, chữ số α_s là *chữ số nghi ngờ* của số thập phân *a* thì $\Delta_a > \frac{1}{2}.10^s$.

Nhận xét:

(1) Bên phải của một chữ số nghi ngờ là những chữ số nghi ngờ, bên trái của một chữ số đáng tin là những chữ số đáng tin.

(2) Khi viết số xấp xỉ nên giữ lại một hoặc hai chữ số nghi ngờ để khi tính toán, sai số chỉ tác động lên các chữ số nghi ngờ thôi.

Ví dụ 1.2.1. Xác định số các chữ số có nghĩa, số các chữ số đáng tin trong các số xấp xỉ sau:

(1) $a_1 = 0{,}012345$; $\Delta_{a1} = 0{,}00007$.

HD: Các chữ số có nghĩa của a_1 là $1; 2; 3; 4; 5$. Số các chữ số có nghĩa của a_1 là 5 (chữ số).

- Có: $\Delta_{a1} = 0{,}7.10^{-4}$ => $\frac{1}{2}.10^{-4} < \Delta_{a1} < \frac{1}{2}.10^{-3}$

  => Chữ số 2 ở hàng phần nghìn là chữ số đáng tin.

Vậy các chữ số đáng tin của a_1 là *:* $2; 1$. **Đáp số:** Số các chữ số đáng tin là 2 (chữ số).

(2) $a_2 = 7832456$; $\delta_{a2} = 0{,}5\%$.

HD: Các chữ số có nghĩa của *a*2 là *:* $7;\ 8;\ 3;\ 2;\ 4;\ 5;\ 6$. ĐS: 7 (chữ số).

Có: $\Delta_{a2} = \delta_{a2}.a_2 = 7832456.0{,}5\% = 39162{,}28 \approx 0{,}4.10^5$

=> $0{,}5.10^4 < \Delta_{a2} < 0{,}5.10^5$ => Chữ số 8 ở hàng 10^5 là đáng tin.

Vậy các chữ số đáng tin của a_2 là: $8;\ 7$. **Đáp số :** 2 (chữ số).

Cách viết số xấp xỉ:

Cho số xấp xỉ *a* của số đúng *A* với sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a. Có hai cách viết số xấp xỉ:

(1) Viết số xấp xỉ *a* kèm theo sai số tuyệt đối giới hạn : $A = a \pm \Delta_a$. Cách này thường được dùng để *biểu diễn kết quả tính toán* hoặc *phép đo*.

(2) Viết số xấp xỉ *a* theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đồng thời là chữ số đáng tin.

Có nghĩa là $\Delta_a \le \frac{1}{2}$ *đơn vị của chữ số hàng cuối cùng bên phải*. Cách này thường được viết trong các bảng số *logarit*, bảng *các hàm số lượng giác…*

1.3 Sự quy tròn và sai số quy tròn

Khái niệm: Khi tính toán, nếu số *a* có quá nhiều chữ số, ta bỏ bớt đi một vài chữ số ở cuối và nhận được *số quy tròn* a_1. *Sai số quy tròn tuyệt đối* của số quy tròn a_1, kí hiệu là $\theta_{a1} = |a - a_1|$. (Số quy tròn a_1cũng là một số xấp xỉ của số đúng *a*).

Quy tắc làm tròn số: *Sai số quy tròn tuyệt đối* của số quy tròn $\le \frac{1}{2}$ *đơn vị của chữ số hàng giữ lại cuối cùng bên phải.*

Thực hiện như sau: Nếu chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5 thì ***thêm vào*** chữ số giữ lại ở cuối cùng bên phải *một đơn vị*, nếu chữ số bỏ đi đầu tiên < 5 thì ***để nguyên*** chữ số giữ lại cuối cùng bên phải.

Ví dụ 1.3.1.

(1) Cho số $= 2,718281828459045 \ldots$. Hãy quy tròn số e đến chữ số có nghĩa thứ 5, thứ 6 và thứ 12 và xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số quy tròn.

(2) Cần quy tròn $\sqrt{2} = 1,414213562 \ldots$ với bao nhiêu chữ số thập phân (chữ số có nghĩa) để sai số quy tròn tuyệt đối không vượt quá $0,0002$.

Hướng dẫn (2): Sai số $\Delta_a \leq 0,0002 = 0,2.10^{-3}$. Suy ra $\theta_a \leq 0,5.10^{-4} = \frac{1}{2}10^{-4}$. Vậy cần làm tròn $\sqrt{2}$ đến chữ số thập phân thứ 4 sau dấu phẩy, tức là lấy số xấp xỉ của $\sqrt{2}$ là a $=$ $1,4142$.

Nhận xét:

(1) Giả sử a là số xấp xỉ của số đúng A, có sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a. Ta quy tròn số a thành số a_1. Khi đó, ta có $|A - a_1| \leq |A - a| + |a - a_1| \leq \Delta_a + \theta_{a1}$. Do vậy, có thể chọn sai số tuyệt đối giới hạn của số quy tròn a_1 của số đúng A là $\Delta_{a1} = \Delta_a + \theta_{a1}$.

(2) Ta luôn có $\Delta_{a1} > \Delta_a$ nên một chữ số ở hàng nào đó vốn đáng tin, sau khi quy tròn có thể lại là chữ số nghi ngờ.

Ví dụ 1.3.2. Cho $a = 0,465$ và $\Delta_a = 0,0002$. Quy tròn a đến hàng thập phân thứ hai. Xác định các chữ số đáng tin của a và số quy tròn.

Giải. Các chữ số có nghĩa của a là 4, 6, 5.

Ta có $\Delta_a = 0,2.10^{-3} < \frac{1}{2}.10^{-3}$ nên số thập phân a có các chữ số đáng tin là $4, 6, 5$.

- Sau khi quy tròn đến hàng thập phân thứ hai, thu được số $a_1 = 0,47$.

Sai số quy tròn tuyệt đối của a_1 so với số xấp xỉ a là $\theta_{a1} = |a - a_1| = |0,47 - 0,465| = 0,005$.

Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a_1 sau khi quy tròn là : $\Delta_{a1} = \Delta_a + \theta_{a1} = 0,0002 + 0,005 = 0,0052 = 0,52.10^{-2} > \frac{1}{2}.10^{-2}$. Do vậy chữ số 7 ở hàng 10^{-2} là chữ số nghi ngờ.

(Trong trường hợp này ta không nên quy tròn nữa hoặc phải viết số đã quy tròn đầy đủ là $a_1 = 0,47 \pm 0,0052$).

1.4 Nguồn gốc các loại sai số

Trong thực tế ta thường gặp các sai số

(1) Sai số trong dữ liệu đầu vào : Các dữ liệu đầu vào có thể là kết quả của các phép đo hoặc kết quả của các phép toán thực hiện trước đó.

(2) Sai số rút gọn : Xuất hiện khi ta phải ngắt các quá trình vô hạn, hẳng hạn khi tính tổng chuỗi vô hạn cần ngắt tại số hạng nào đó.

(3) Sai số mô hình : Xuất hiện khi phải lý tưởng hóa trong việc xây dựng mô hình toán học.

(4) Sai số làm tròn : Sai số làm tròn xuất hiện khi phải làm việc với các số vô tỷ (Chẳng hạn với số π, số e).

§2 Các qui tắc tính sai số

2.1. Công thức tổng quát của sai số

Công thức: Cho hàm số : $u = u(x, y)$ khả vi với hai biến x, y trên một lân cận nào đó, trong đó các biến *x* và *y* có các sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_x và Δ_y.

Khi đó ta có sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u của hàm *u* là:

$$\Delta_u = |u'_x|.\Delta_x + |u'_y|.\Delta_y \quad \text{và} \quad \delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|}.$$

Tổng quát: Cho hàm số khả vi $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trong đó các biến x_i có các sai số tuyệt đối giới hạn là Δ_{xi}.

Khi đó ta có sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u của hàm *u* là:

$$(**) \quad \Delta_u = \sum_{i=1}^{n} |u'_{x_i}| \Delta_{x_i} \quad ; \quad \delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|}.$$

Ví dụ 2.1.1. Tính *V* và các sai số Δ_V, δ_V của thể tích hình cầu $V = \frac{1}{6}\pi d^3$.
Biết $d = 2{,}70cm \pm 0{,}05cm$. Lấy $\pi \approx 3{,}14$.

Hướng dẫn: Có hai biến π và *d*. Cần đánh giá sai số Δ_π sau đó áp dụng (**).

+) $V = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}.3{,}14.2{,}7^3 = 10{,}30077\ (cm^3)$.

+) $\Delta_V = |V'_\pi|\Delta_\pi + |V'_d|\Delta_d = \frac{1}{6}d^3.\Delta_\pi + \frac{1}{2}\pi d^2.\Delta_d = 0{,}58\ (cm^3)$

Vậy : $V = 10{,}3cm^3 \pm 0{,}58cm^3$.

+) $\delta_V = \frac{\Delta_V}{|V|} = \frac{0{,}58}{10{,}3} = 0{,}056 \approx 5{,}6\%$.

2.2. Sai số của một tổng, hiệu

Công thức: Nếu $u = x \pm y$ thì $\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y$ và $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|}$

Tổng quát : Nếu $u = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$ thì ta có $\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}$ và $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}}{|u|}$.

TH đặc biệt: $u = n.x\ (n \in \mathbb{N})$ thì $\Delta_u = n.\Delta_x$ và $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \delta_x$.

Nhận xét: Khi tính sai số của hiệu $u = x - y$ trong trường hợp các biến x, y có giá gần bằng nhau (có thể dẫn tới $u = x - y \to 0$) thì sai số tương đối $\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|}$ có thể rất lớn.

Nếu bắt buộc phải tính thì cần lấy số bị trừ và số trừ có nhiều chữ số đáng tin để dự trữ (Chẳng hạn khi trừ bị triệt tiêu *m* chữ số đầu tiên bên trái và ở kết quả cần lấy *n* chữ số đáng tin thì ở số bị trừ và số trừ phải có *m*+*n* chữ số đáng tin).

Ví dụ 2.2.1. Tính hiệu sau với 2 chữ số đáng tin $u = \sqrt{2{,}01} - \sqrt{2}$.

Đáp số : $\sqrt{2{,}01} = 1{,}41774469\ldots$; $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$.

Cần ở kết quả 2 chữ số đáng tin nên cần lấy ở mỗi số trừ và bị trừ là 4 chữ số đáng tin. Kết quả là : $u = 1{,}4177 - 1{,}4142 = 0{,}0035$.

2.3. Sai số của tích, thương

Công thức: **(1)** Nếu $u = x_1.x_2.\ldots x_n$ thì $\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$; $\Delta_u = |u|.\delta_u$.

(2) Nếu $u = \frac{x_1}{x_2}$ thì $\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$; $\Delta_u = |u|.\delta_u$.

Đặc biệt $u = x^n$ thì $\delta_u = n.\delta_x$; $\Delta_u = |u|.\delta_u$.

$u = k.x\ (k \in \mathbb{R})$ thì $\delta_u = \delta_x$; $\Delta_u = |u|.\delta_u$.

Ví dụ 2.3.1. Cho biết đại lượng E được tính theo công thức : $E = \frac{l^3 p}{4a^3 bs}$. Biết các đại lượng $\mathrm{p, a, b, l, s}$ đo được với các sai số tương đối giới hạn là: $\boldsymbol{\delta_p = 0,1\%}$, $\boldsymbol{\delta_a = 1\%}$, $\boldsymbol{\delta_b = 1\%}$, $\boldsymbol{\delta_l = 1\%}$, $\boldsymbol{\delta_s = 1\%}$. Hãy tính sai số tương đối giới hạn của E.
Nếu biết : $p = 200, a = 3, b = 44, l = 500, s = 25$ thì E và sai số tuyệt đối giới hạn của E là bao nhiêu?

Giải. *Có* $\delta_E = \delta_{l^3.p} + \delta_{4a^3.b.s} = 3\delta_l + \delta_p + \delta_{a^3.b.s} = 3\delta_l + \delta_p + 3\delta_a + \delta_b + \delta_s = 8{,}1\%$.

Có : $E = \frac{500^3.200}{4.3^3.44.25} = 2{,}1.10^9 \;=>\; \Delta_E = 1{,}7.10^8$.

Ví dụ 2.3.2. Cho hàm số $u = \ln(x_1 + x_2^2)$. Hãy xác định giá trị của u tại $x_1 = 0{,}97; x_2 = 1{,}132$ và sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u, sai số tương đối giới hạn δ_u. Biết mọi chữ số có nghĩa của x_1, x_2 đều là các chữ số đáng tin.

Giải. - Tính Δ_u : $\Delta_u = |u'_{x1}|.\Delta_{x1} + |u'_{x2}|.\Delta_{x2}$

Có $u'_{x1} = \frac{1}{x_1 + x_2^2}$; $u'_{x2} = \frac{2x_2}{x_1 + x_2^2}$.

$\Delta_a = |u'_{x1}|.\Delta_{x1} + |u'_{x2}|.\Delta_{x2}$.

Lại có: $x_1 = 0{,}97 \;=>\; \Delta_{x1} = \frac{1}{2}.10^{-2} = 0{,}005$;

$x_2 = 1{,}132 \;=>\; \Delta_{x2} = \frac{1}{2}.10^{-3} = 0{,}0005$.

Vậy $\Delta_u = \left|\frac{1}{x_1 + x_2^2}\right|.\Delta_{x1} + \left|\frac{2x_2}{x_1 + x_2^2}\right|.\Delta_{x2} = 0{,}27.10^{-2}$.

- Tính u:

$u = \ln(0{,}97 + 1{,}132^2) = 0{,}812$.

- Tính δ_u :

Có $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{0{,}27.10^{-2}}{0{,}812} = 0{,}33\%$.

2.4. Bài toán ngược của sai số

Bài toán: Giả sử $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Cần lấy Δ_{x_i} bằng bao nhiêu để $\Delta_y \le \varepsilon$ cho trước.

Nguyên lý ảnh hưởng đều

a) Ta coi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = c \text{ (const)} \quad (i = \overline{1,n}),$$

suy ra

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = nc,$$

vậy

$$\Delta x_i = \frac{c}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|} = \frac{\Delta y}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|} \quad (i = \overline{1,n})$$

b) Nếu coi $\Delta x_i = \text{const}\ (i = \overline{1,n})$ thì

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|}$$

c) Nếu coi $\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_n$ và đặt $k = \frac{\Delta x_i}{|x_i|}$ thì

$$\Delta y = k\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \text{ hay } k = \frac{\Delta y}{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|},$$

do đó

$$\Delta x_i = \frac{|x_i|\Delta y}{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Ví dụ. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 2m$, chiều cao $h = 3m$. Hỏi ΔR và Δh phải bằng bao nhiêu để thể tích V được tính chính xác tới $0.1m^3$

Ta có $V = \pi R^2 h$. Áp dụng nguyên lý ảnh hưởng đều thứ nhất (xem phần (a)), ta có $\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 h = 12$ nên

$$\Delta\pi = \frac{0.1}{3\times 12} < 0{,}003; \quad \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h = 37.7$$

suy ra

$$\Delta R = \frac{0.1}{3\times 37.7} < 0.001; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2 = 12.6,$$

do đó

$$\Delta h = \frac{0.1}{3\times 12.6} < 0.003.$$

Bài tập tự luyện chương 1.

Bài 1.1. Cho $a = 1,20 \pm 0,03$; $b = 3,56 \pm 0,02$; $c = 1,300 \pm 0,002$. Biết :

$$S = a - 3b + 5c\ ;\ \ P = 3a^2b^2c.$$

a) Tính gần đúng S, P.
b) Tìm sai số tuyệt đối giới hạn Δ_S, Δ_P và sai số tương đối giới hạn δ_S, δ_P của các đại lượng trên.
c) Xác định số các chữ số có nghĩa và đáng tin của các giá trị gần đúng tính được ở ý a).

Bài 1.2. Biết $\pi = 3.141592654 \ldots\ldots$. Nếu lấy $a = 3.14156$ xấp xỉ thay cho π thì sai số tương đối giới hạn là bao nhiêu ?

Bài 1.3.

a) Phải lấy bao nhiêu chữ số sau dấu phẩy thập phân của số e để có sai số tương đối giới hạn là 0.0001. Biết $e = 2,718281828 \ldots$.
b) Cần làm tròn $\sqrt{3} = 1.732050808 \ldots$ đến chữ số thập phân thứ mấy để có sai số không vượt quá 0.01%.

Bài 1.4. Cho hình trụ với bán kính đáy $R = 0.55m$, chiều cao $H = 1.13m$. Biết các chữ số của R, H đều là các chữ số đáng tin. Hãy tìm sai số tuyệt đối giới hạn Δ_S và sai số tương đối giới hạn δ_S của diện tích toàn phần S của hình trụ đó. Lấy $\pi = 3.14$. Biết $S = 2\pi R(R + H)$.

Bài 1.5. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a và sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a, số các chữ số đáng tin của cạnh a của hình vuông, biết diện tích hình vuông $S = 16,45\ cm^2$ và $\Delta_S = 0,01\ cm^2$.

Bài 1.6. Hình cầu có bán kính $R = 12.5cm$. Hãy tính sai số tuyệt đối giới hạn của bán kính để đảm bảo có sai số tuyệt đối giới hạn của thể tích V là $0.1cm^3$ trong trường hợp lấy $\pi = 3.14$ và $\pi = 3.1416$. Biết $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Bài 1.7. Một hình hộp chữ nhật có các cạnh $a = 15cm, b = 20cm, c = 7cm$. Hãy tính sai số tuyệt đối giới hạn của các cạnh để có sai số thể tích không vượt quá $1.5cm^3$. Biết $V = abc$.

Bài 1.8. Cho hình chóp nón có bán kính đáy là $R = 0.3m$, chiều cao là $H = 1.2m$.

a) Biết mọi chữ số của R, H đều có nghĩa, hãy tính sai số tương đối giới hạn δ_V và sai số tuyệt đối giới hạn Δ_V của thể tích V của hình chóp nón.
b) Nếu lấy sai số tương đối giới hạn của thể tích là 0.1% thì sai số tương đối giới hạn của bán kính đáy R và chiều cao H có thể lấy là bao nhiêu?

Biết $= \pi R^2 H,\ \pi = 3.141592654$ .... . Lấy giá trị gần đúng của π là 3.1416.

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP TÍNH	Người soạn: Hoàng Thị Thanh Giang
VERSION 10.2017	BM Toán Tin ứng dụng

BÀI TẬP CHƯƠNG I: SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

Bài 1.1: Đo trọng lượng của 1dm^3 nước ở 0^{o}C nhận được $p = 999.847 \pm 0.001(g)$. Hãy xác định sai số tuyệt đối, tương đối và nêu ý nghĩa rút ra từ phép đo trên.

Bài 1.2: Cho $e = 2.718281828...$. Cần quy tròn số e với bao nhiêu chữ số thập phân để sai số không vượt quá 0.0003 (*nghĩa là* $\left|e - e_{quy\ tron}\right| \le 0.0003$).

Chú ý: *Câu hỏi trên tương đương với 2 câu hỏi:*

- Cần quy tròn số e với bao nhiêu chữ số thập phân để sai số tuyệt đối giới hạn không vượt quá 0.0003.

- Cần quy tròn số e với bao nhiêu chữ số thập phân để sai số tuyệt đối giới hạn bằng 0.0003

Bài 1.3: a/ Cho $a = 0.5833$, $\Delta_a = 0.4.10^{-3}$. Tính δ_a.

b/ Cho $b = 20^0 35'$. $\delta_b = 0.02$. Tính Δ_b.

Bài 1.4: Hãy xác định các chữ số đáng tin, đáng nghi của a_1, a_2 với:

$$a_1 = 0.53822, \quad \Delta_{a_1} = 0.0005, \quad a_2 = 24.5314, \quad \delta_{a_2} = 10^{-3}.$$

Bài 1.5: Quy tròn một số thập phân thành số thập phân có k chữ số sau dấu phẩy thì sai số tuyệt đối giới hạn là bao nhiêu? Rút ra ý nghĩa thực tế. Suy ra kết quả với $k = 4$, $k = 5$.

Bài 1.6: Cho $a = 34.12565$ $\Delta_a = 0.2.10^{-2}$. Làm tròn a đến 3 chữ số lẻ thập phân. Hãy xác định sai số tuyệt đối (giới hạn) và sai số tương đối (giới hạn) của số làm tròn.

Bài 1.7: Cho tam giác có độ dài cạnh $a = 5 \pm 0,01\,(m)$. Tính gần đúng diện tích và sai số tuyệt đối, tương đối giới hạn của diện tích S biết $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(m^2\right)$.

Bài 1.8: Cho hàm số hai biến số $u = x^y$. Tính gần đúng u và tính các sai số Δ_u, δ_u tại $x = 5 \pm 0,1$; $y = 2 \pm 0,08$.

Bài 1.9: Vào thế kỉ thứ 3, ở Trung Hoa có tìm ra số $\pi \approx 3.1556$. Tính Δ_π, sau đó tính diện tích S, sai số Δ_S của hình tròn bán kính $r = 8 \pm 0.04\,(cm)$. Biết:

$$S = \pi r^2, \quad \pi = 3.1556 \pm \Delta_\pi$$
$$\pi = 3.141592653589...$$

Bài 1.10: Hãy xác định giá trị của hàm số u tại $x = 0.85$, $y = 1.364$, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u biết mọi chữ số có nghĩa của x, y là những chữ số đáng tin với:

a/ $u = \ln(x + y^2)$

b/ $u = \dfrac{5x^3}{y}$

Bài 1.11: Giả sử đại lượng vật lí E được tính theo các đại lượng biến thiên độc lập r,s,u theo công thức $E = \dfrac{\sqrt{2}\, r^2}{s.u^3}$. Hãy chỉ ra một cách đo r,s,u với độ chính xác như thế nào để sai số tương đối giới hạn δ_E không vượt quá $0.5.10^{-3}$.

Bài 1.12: Biết các đại lượng u,v phụ thuộc vào các đại lượng độc lập x,y,z theo hàm:

$$u = x + y + z$$

$$v = 4x - y + \frac{1}{3}z$$

a/ Hãy chỉ ra một cách đo x,y,z như thế nào để sai số $\Delta_u \le 0.05$

a/ Hãy chỉ ra một cách đo x,y,z như thế nào để sai số $\Delta_v = 0.01$

Bài 1.13: Biết số e (số Euler) luôn viết được dưới dạng:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{R_n}{(n+1)!} \quad \text{với mọi } n \text{ và } 1 < R_n < 3.$$

Tính gần đúng e sao cho sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-4}.

Chương 2. Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình một ẩn

§1. Đặt vấn đề

Bài toán: Tìm một hoặc tất cả các nghiệm thực của phương trình (PT): $f(x) = 0$ (1), trong đó $f(x)$ là một hàm số nào đó. Chẳng hạn $f(x) = x^8 - 7x^3 + 1,$ hoặc $f(x) = \cos x + 7x$ ...

Định nghĩa: Khoảng $(a; b)$ gọi là một khoảng cách ly nghiệm của PT(1) nếu trong khoảng đó *chỉ chứa một và chỉ một* nghiệm thực của phương trình.

Phương pháp giải: Việc tìm một nghiệm thực gần đúng của PT(1) được thực hiện như sau:
- ***Bước 1:*** Tìm một *khoảng cách ly nghiệm* $(a; b)$.
- ***Bước 2:*** Từ khoảng cách ly $(a; b)$ chứa một nghiệm đúng ξ của PT, ta tìm một dãy $\{x_k,\ k = \overline{1,2,\ldots}\}$, với $x_k \in (a; b)$, hội tụ đến nghiệm đúng ξ, bằng một phương pháp giải gần đúng. Khi đó, có thể coi x_k là các nghiệm gần đúng của PT đã cho. Để đạt độ chính xác theo yêu cầu, ta có thể dừng với $k = k_0$ nào đó và lấy x_{k_0} là nghiệm gần đúng cần tìm.

§2. Khoảng cách ly nghiệm

Dấu hiệu nhận biết: Xét PT: $f(x) = 0$ (1). Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(Điều kiện đủ) $$\begin{cases} f(a).f(b) < 0 \\ f(x) \text{ liên tục trong khoảng đóng } [a; b] \\ f'(x) \text{ tồn tại và không đổi dấu trong khoảng } (a; b) \end{cases}$$

thì trong khoảng $(a; b)$ có chứa duy nhất một nghiệm thực ξ của PT(1).

Ví dụ. Chứng tỏ rằng : $(1; 2)$ là một khoảng cách ly nghiệm của PT: $\log_{10} x - 3x + 5 = 0$.

Giải. Đặt $f(x) = \log_{10} x - 3x + 5$. Có $f(1) = 2$; $f(2) = \log_{10} 2 - 1$; $f'(x) = \frac{1}{x.\ln 10} - 3$.

Suy ra: $$\begin{cases} f(1).f(2) < 0 \\ f(x) \text{ liên tục trong khoảng } [1; 2] \\ f'(x) < 0, \forall x \in (1; 2) \text{ hay } f'(x) \text{ tồn tại và không đổi dấu trong khoảng } (1; 2) \end{cases}$$

Vậy khoảng $(1; 2)$ là một khoảng cách ly nghiệm của PT đã cho.

2.1. Phương pháp giải tích.

Nội dung PP: Xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại các *điểm mút* của miền xác định của hàm số $f(x)$ và tại các điểm trung gian $x = a_1,\ x = a_2, \ldots, x = a_n$

trong đó, $a_1, a_2, \ldots$ có thể là *không điểm* - điểm mà tại đó $f'(x) = 0$, hoặc các *điểm gần các không điểm* của $f'(x)$, hoặc các *điểm chia* của quá trình chia đôi miền xác định.

Sau đó, kiểm tra 3 điều kiện của dấu hiệu nhận biết khoảng cách ly ở trên.

Ví dụ 2.1.1. Tìm một khoảng cách ly nghiệm của PT :

(1) $f(x) = x^3 + 2x + 0{,}5 = 0.$ **Đáp số :** $(-1; 0)$

(2) $f(x) = \cos x + 3x - 2 = 0.$ **Đáp số :** $(0; 1)$.

2.2. Phương pháp hình học

Nội dung PP: Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên giấy kẻ ô vuông. Khi đó hoành độ của các giao điểm của đồ thị với trục *Ox* chính là các nghiệm của PT(1). Từ đồ thị, dễ dàng tìm được các khoảng cách ly nghiệm.

Lưu ý: Ta có thể biến đổi PT(1) $\Leftrightarrow$ $g(x) = h(x)$ sao cho đồ thị của hai hàm $y = g(x)$, $y = h(x)$ dễ vẽ. Khi đó hoành độ các giao điểm của hai đồ thị chính là các nghiệm thực của PT(1). Từ đồ thị, dễ dàng tìm được các khoảng cách ly nghiệm.

Ví dụ 2.2.1. Dùng đồ thị tìm một khoảng cách ly nghiệm của các PT trong **Ví dụ 2.1.1**.

HD: PT $\cos x + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2 - 3x$. Vẽ đồ thị hai hàm $y = \cos x\,;\ y = 2 - 3x$ trên cùng hệ trục tọa độ để suy ra kết quả.

Chú ý: Để tìm **tất cả** các khoảng cách ly nghiệm của PT $f(x) = 0$ ta cần chỉ rõ số nghiệm của PT, sau đó tìm lần lượt tất cả các khoảng cách ly nghiệm theo các phương pháp trên.

Ví dụ 2.2.2. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của các PT sau :

(1)	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$	**Đáp số :**	$(-3;-2); (-2;-1); (0;1)$
(2)	$2x + 1 - \sin x = 0.$	**Đáp số :**	$(-1;0)$
(3)	$x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0.$	**Đáp số :**	$(0;1), (2;3); (6;7)$

§3. Phương pháp chia đôi

Nội dung Phương pháp: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nghiệm đúng $\boldsymbol{\xi}$ của PT $f(x) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $(a\,;b)$ được lấy ***xấp xỉ bằng điểm giữa của khoảng cách ly.***

Không làm mất tính tổng quát, bằng cách **đổi dấu hàm $\boldsymbol{f(x)}$**, luôn giả sử $\boldsymbol{f(a) < 0 < f(b)}$.

3.1. Thuật toán tìm nghiệm gần đúng x_k bằng Phương pháp chia đôi:

- ***Bước 1:*** Đặt $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Tính $f(x_1)$.

Nếu $f(x_1) = 0$ thì $\xi = x_1$ là **nghiệm đúng** của PT (1).
Nếu $f(x_1) > 0$, tức là $f(x_1).f(b) > 0$, thì **khoảng cách ly mới là $\boldsymbol{(a;x_1)}$** tức thay x_1 cho b.
Nếu $f(x_1) < 0$, tức là $f(x_1)f(a) > 0$, thì **khoảng cách ly mới là $\boldsymbol{(x_1;b)}$**, tức thay x_1 cho a.

- ***Bước 2 (Lặp):*** Giả sử $(a_k;b_k)$ là một khoảng cách ly của PT(1) ở bước thứ k $(k \geq 1)$ (với $a_1 = a$, $b_1 = b$), thì khoảng cách ly mới $(a_{k+1};b_{k+1})$ được xác định như sau:

Đặt $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ $(*)$. Tính $f(x_k)$. Ta có : $(a_{k+1};b_{k+1}) = \begin{cases}(a_k;x_k) \text{ nếu } f(x_k).f(b_k) > 0\\(x_k;b_k) \text{ nếu } f(x_k).f(a_k) > 0\end{cases}$.

- Thuật toán dừng tại bước k_0 nếu x_{k0} đạt độ chính xác cho phép.

3.2. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_k của PP chia đôi:

Nếu lấy giá trị x_k là nghiệm gần đúng thay cho ξ thì sai số của nghiệm gần đúng x_k được đánh giá như sau : $|x_k - \xi| = \left|\frac{a_k+b_k}{2} - \xi\right| \le \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}$. Lấy : $\Delta_{xk} = \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}$.

(Nhận xét : PP chia đôi tính toán đơn giản nhưng tốc độ hội tụ chậm $\Delta_{xk} = \frac{b-a}{2^k}$)

Ví dụ 3.2.1: Dùng PP chia đôi, tìm một nghiệm gần đúng của PT: $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$ biết khoảng cách ly nghiệm là $(-3\,;-2)$.

Giải. Đặt $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3,\ f(-3) = -3 < 0 < f(-2) = 1.$

Công thức nghiệm gần đúng x_k của PP chia đôi là *:*

$$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}\ ,\ k \ge 1 \quad \text{trong đó :} \begin{cases} a_1 = -3;\ b_1 = 2 \\ (a_{k+1}; b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k; x_k) & \text{nếu} \quad f(x_k).f(b_k) > 0 \\ (x_k; b_k) & \text{nếu} \quad f(x_k).f(a_k) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Sai số của nghiệm x_k theo PP chia đôi là : $\Delta_{xk} = \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}$.

***SDMT FX-500MS :** Biến nhớ A lưu a_k, B lưu b_k, X lưu $x_k = \frac{A+B}{2}$, E lưu $\Delta_{xk} = \frac{B-A}{2}$ như sau:*

$$\textbf{\textit{B1 (Khởi tạo) :}} \begin{cases} FIX - 5 \\ -3 \to A \\ -2 \to B \end{cases} \qquad \textbf{\textit{B2 (Lặp) :}} \begin{cases} +)\ \frac{A+B}{2} \to X \quad (\text{Tính } x_k) \\ +)\ \frac{B-A}{2} \to E \quad (\text{Tính } \Delta_{xk}) \\ +)\ f(X) = X^3 + 3X^2 - 3 \to C \\ +)\ \left[\begin{array}{ll} X\to A & \text{nếu } C<0 \\ X\to B & \text{nếu } C>0 \end{array}\right. \ (\text{Tìm } (a_{k+1}; b_{k+1})\ ) \end{cases}$$

(Dừng $E \le \varepsilon$) . Ta có KQ sau :

k	$a_k\ (A)$	$b_k\ (B)$	$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}\ (X)$	$\Delta_{xk} = \frac{b_k-a_k}{2}\ (E)$	$f(x_k)\ (C)$
1	−3	−2	−2,5	0,5	$0{,}1 > 0$
2	−3	−2,5	−2,75	0,25	$-1{,}1 < 0$
3	−2,75	−2,5	−2,62500	0,125	$-0{,}4 < 0$
4	−2,62500	−2,5	−2,56250	0,06	$-0{,}1 < 0$
5	−2,56250	−2,5	−2,53125	0,03	$3{,}3.10^{-3} > 0$
6	−2,56250	−2,53125	−2,54688	0,016	$-0{,}06 < 0$
7	−2,54688	−2,53125	−2,53906	$7{,}8.10^{-3}$	$-0{,}03 < 0$
8	−2,53906	−2,53125	−2,53516	$3{,}9.10^{-3}$	$-0{,}01 < 0$
9	−2,53516	−2,53125	−2,53320	$1{,}95.10^{-3}$	$-4{,}5.10^{-3} < 0$
10	−2,53320	−2,53125	−2,53223	$9{,}8.10^{-4} < \varepsilon$	

Đáp số : Nghiệm gần đúng của PT với độ chính xác 10^{-3} là $x_{10} \approx -2{,}532$.

Cách khác : Để đạt độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$ thì $\Delta_{x_k} = \frac{b-a}{2^k} \le \varepsilon \Leftrightarrow k \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \log_2 1000 = 9{,}9$. Vậy cần tính đến $k = 10$ tức x_{10} để đạt độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$.

(Trong bảng kết quả, ***không cần tính sai số** Δ_{xk}*. Dừng khi $k = 10$).

Ví dụ 3.2.2. Biết PT : $x^2.\log_{0.5}(x+1) = 1$ có một khoảng cách ly nghiệm là $(-0{,}8; -0{,}5)$. Sử dụng PP chia đôi tìm nghiệm gần đúng trong khoảng trên với độ chính xác 10^{-2} thì cần tính đến mấy bước lặp? Tìm nghiệm đó?

Giải : ĐS: -0,73. PT đã cho $\Leftrightarrow$ $1 - x^2.\log_{0.5}(x+1) = 0.$

Đặt : $f(x) = 1 - x^2.\log_{0.5}(x+1)$; $f(-0{,}8) \approx -0{,}486 < 0 < f(-0{,}5) \approx 0{,}75$

- Công thức nghiệm x_k của PP chia đôi là :

$$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}\ ,\ k \geq 1 \quad \text{trong đó} \quad \begin{cases} a_1 = -0{,}8\ ;\ b_1 = -0{,}5 \\ (a_{k+1}; b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k; x_k) & \text{nếu } f(x_k).f(b_k) > 0 \\ (x_k; b_k) & \text{nếu } f(x_k).f(a_k) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

- Sai số của nghiệm x_k theo PP chia đôi là : $\Delta_{xk} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$.
- Để đạt độ chính xác $\varepsilon = 10^{-2}$ thì $k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \log_2 30 \approx 4{,}9$.

Vậy cần tính đến nghiệm gần đúng x_5 $(\boldsymbol{k = 5})$.

SDMT FX-500MS : *Biến nhớ A lưu a_k, B lưu b_k, X lưu $x_k = \frac{A+B}{2}$, E lưu $\Delta_{xk} = \frac{B-A}{2}$ như sau:*

B1 (Khởi tạo): $\begin{cases} FIX - 3 \\ -0{,}8 \to A \\ -0{,}5 \to B \end{cases}$ ***B2 (Lặp):*** $\begin{cases} +)\ \frac{A+B}{2} \to X \\ +)\ f(X) = X^3 + 3X^2 - 3 \to C \\ +)\ \left[\begin{array}{ll} X \to A & \text{nếu } C < 0 \\ X \to B & \text{nếu } C > 0 \end{array}\right. \end{cases}$

(Dừng sau 5 bước lặp)

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$	$f(x_k)$
1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	$-0{,}65$	$0{,}3601 > 0$
2	$-0{,}8$	$-0{,}65$	$-0{,}725$	$0{,}0210 > 0$
3	$-0{,}8$	$-0{,}725$	$-0{,}763$	$-0{,}206 < 0$
4	$-0{,}7625$	$-0{,}725$	$-0{,}744$	$-0{,}0866 < 0$
5	$-0{,}74375$	$-0{,}725$	$-0{,}734$	$-0{,}031 < 0$

Vậy nghiệm gần đúng đạt độ chính xác 10^{-2} là $x_5 = -0{,}73$.

§4. Phương pháp lặp

Điều kiện hội tụ: Giả sử $(a; b)$ là khoảng cách ly nghiệm của PT: $f(x) = 0$ (1).

Nếu PT(1) $\Leftrightarrow$ $x = \varphi(x)$ mà *φ(x)* thỏa mãn 3 điều kiện:

(1) $\varphi(x)$ và $\varphi'(x)$ cùng liên tục trong khoảng $(a; b)$.
(2) $\varphi(x) \in (a; b)$ với mọi $x \in (a\,; b)$.
(3) $|\varphi'(x)| \le q < 1$ với mọi $x \in (a; b)$.

thì

+) Dãy số $\{x_k = \varphi(x_{k-1}), k \ge 1\}$ sẽ hội tụ, với $x_0 \in (a; b)$ tùy ý

+) Và : $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ với ξ là nghiệm đúng của PT(1).

4.1. Thuật toán tìm nghiệm gần đúng bằng Phương pháp lặp:

Bước 1: Giả sử $(a; b)$ là một khoảng cách ly nghiệm của PT(1). Biến đổi PT(1) về dạng $x = \varphi(x)$ sao cho $\varphi(x)$ thỏa mãn 3 điều kiện của dấu hiệu hội tụ.

Bước 2 (Lặp): Công thức nghiệm gần đúng x_k là : $\begin{cases} x_0 \in (a; b) \text{ tùy ý} \\ x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k \ge 1 \end{cases}$.

4.2. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_k của PP lặp:

Cách 1: Có $\xi = \varphi(\xi)$ nên

$$|x_k - \xi| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\xi)| = |\varphi'(c)|.|x_{k-1} - \xi| \text{ với } c \in (x_{k-1}\,; \xi).$$

Suy ra $|x_k - \xi| \le q.|x_{k-1} - \xi|$ $(*)$.

Lại có $|x_{k-1} - \xi| = |x_{k-1} - x_k + x_k - \xi| \le |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \xi|$.

Thay vào (*) ta có: $|x_k - \xi| \le \frac{q}{1-q}.|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ $(**)$ *(với k đủ lớn).*

Cách 2: Đánh giá tương tự như (*) có $|x_k - x_{k-1}| \le q.|x_{k-1} - x_{k-2}|$.

Suy ra $|x_k - x_{k-1}| \le q^{k-1}.|x_1 - x_0|$.

Thay vào (**) ta có $|x_k - \xi| \le \frac{q^k}{1-q}.|x_1 - x_0| < \varepsilon$ $(***)$ *(với k đủ lớn).*

(Nhận xét: PP lặp hội tụ càng nhanh khi q càng bé)

Chú ý : Trong thực tế, ta dừng phép lặp khi $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ sai số cho phép.

Ví dụ 4.2.1. Dùng PP lặp tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$ của các PT sau :

(1) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$, biết khoảng cách ly nghiệm là $(-2{,}75\,; -2{,}5)$. Lấy $x_0 = -2{,}7$.

Giải. Biến đổi PT về dạng : $x = \frac{3}{x^2} - 3$ với $\varphi(x) = \frac{3}{x^2} - 3$, $0{,}288 < \varphi'(x) = \frac{-6}{x^3} < 0{,}3840$.

Kiểm tra thấy $\begin{cases} \varphi(x)\,;\ \varphi'(x) \ \text{ liên tục trên } \ (-2{,}75\,;-2{,}5) \\ -2{,}75 < \varphi(x) < -2{,}5 \quad \text{với} \quad \forall x \in (-2{,}75;-2{,}5) \\ |\varphi'(x)| \le 0{,}4 = q < 1 \quad \text{với} \quad \forall x \in (-2{,}75;-2{,}5) \end{cases}$

Vậy $\varphi(x)$ thỏa mãn 3 ĐK hội tụ của PP lặp. Công thức nghiệm tính x_k theo PP lặp là:

$$\begin{cases} x_0 = -2{,}7 \\ x_k = \frac{3}{x_{k-1}^2} - 3\,, \ \forall k \ge 1 \end{cases}.$$

Để đạt độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$ *thì* $\frac{q^k}{1-q}.|x_1 - x_0| \le \varepsilon \iff 0{,}4^k \le \varepsilon.\frac{0{,}6}{\left|\left(\frac{3}{2{,}7^2}-3\right)-2{,}7\right|} = 0{,}0054$

$\iff k \ge \log_{0{,}4} 0{,}0054 \approx 5{,}7.$ Vậy cần tính đến nghiệm x_6 $(k = 6)$.

SD máy tính FX – 500MS:

B1 (Khởi tạo): $FIX - 5$; $-2{,}7 \to X$ (Lưu $x0$)

B2 (Lặp) : $\varphi(X) = \frac{3}{X^2} - 3 \to X$ (Tính x_k) (Dừng khi $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ hay $k = 6$).

Ta có KQ sau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_k = \varphi(x_{k-1})$	$-2{,}7$	$-2{,}58848$	$-2{,}55225$	$-2{,}53945$	$-2{,}53480$	$-2{,}53309$	$-2{,}53246$	$-2{,}53223$

Đáp số : Nghiệm gần đúng của PT đã cho với độ chính xác 10^{-3} là $x_6 = -2{,}532$.

(2) $x - \cos x = 0$ biết khoảng cách ly nghiệm là $(-1; 1)$, với $x_0 = 0$.

Giải. Biến đổi PT thành : $x = \cos x$, với $\varphi(x) = \cos x$.

- Kiểm tra điều kiện hội tụ (thỏa mãn). Có : $|\varphi'(x)| = |\sin x| \le \sin 1 \approx 0{,}84 = q < 1$

=> $\Delta_{xk} = \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0| \le \varepsilon$, $x_0 = 0$, $x_1 = \cos 0 = 1$ => $q^k \ge 10^{-3}.0{,}16$

=> $k \ge \log_{0{,}84} 1{,}6.10^{-4} \approx 50{,}1$.

Công thức nghiệm : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_k = \cos x_{k-1}\,, \ \forall k \ge 1 \end{cases}$. Dừng khi $k = 51$.

(Thực tế dừng khi $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon = 10^{-3}$, tức *k = 22*).

SDMT FX-500MS. *Chọn đơn vị đo góc **Radian, FIX-5**. Bảng kết quả :*

k	$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k \ge 1$	k	$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k \ge 1$	k	$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k \ge 1$
0	0	8	0,72210	16	0,73837
1	1,0000	9	0,75042	17	0,73957
2	0,54030	10	0,73140	18	0,73876
3	0,85755	11	0,74424	19	0,73930
4	0,65429	12	0,73560	20	0,73894
5	0,79348	13	0,74143	21	0,73918
6	0,70137	14	0,73751	22	0,73902
7	0,76396	15	0,74015		

ĐS : Nghiệm gần đúng đạt độ chính xác 10^{-3} là : $x_{22} = 0,739$.

(3) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ biết khoảng cách ly nghiệm là $(0,5\,;1)$, lấy $x_0 = 0,75$.

Giải. Biến đổi $x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ với $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.

- Kiểm tra điều kiện hội tụ (thỏa mãn). ***FIX-5***. Bảng kết quả *:*

k	0	1	2	3	4	5	6
$x_k = \varphi(x_{k-1}), k \geq 1$	0,75	0,75593	0,75465	0,75493	0,75487	0,75488	0,75488

Ví dụ 4.2.2. Cho PT: $x - \frac{1}{4}\sin \pi x - \frac{3}{2} = 0$. Chọn $\varphi(x) = \frac{1}{4}\sin \pi x + \frac{3}{2}$, $x_0 = 1$. Chứng tỏ rằng $\varphi(x)$ thỏa mãn điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn trong khoảng cách ly $(1;\frac{3}{2})$. Để đạt độ chính xác 10^{-5} cần tính ít nhất bao nhiêu bước lặp. Tìm nghiệm gần đúng đó.

Giải. +) $\varphi(x) = \frac{1}{4}\sin(\pi x) + \frac{3}{2}$; $\varphi'(x) = \frac{\pi}{4}\cos(\pi x)$. Ta có $\varphi(x)$ *thỏa mãn điều kiện hội tụ*:

#) $\varphi(x), \varphi'(x)$ liên tục trên $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

#) Với $x \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$ thì $1,25 < \varphi(x) < 1,5$

#) Với $x \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$ thì $-0,8 < \varphi'(x) < 0$ hay $|\varphi'(x)| \leq 0,8 = q$

+) Công thức nghiệm x_k của PP lặp đơn : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) = \frac{1}{4}\sin(\pi x_{k-1}) + \frac{3}{2}\,, \ k \geq 1 \end{cases}$

Sai số của nghiệm x_k là : $|x_k - \xi| \leq \frac{q^k}{1-q}.|x_1 - x_0|$

+) Để đạt độ chính xác 10^{-5} thì :

$$\frac{0,8^k}{0,2}.\left|\frac{3}{2} - 1\right| \leq 10^{-5} \quad => \quad k > \log_{0,8} 4.10^{-6} = 55,7$$

Vậy cần tính ít nhất $k = 56$ bước lặp.

+) Bảng kết quả tính toán: **FIX-6**

k	x_k	k	x_k
0	1	10	1,298348
1	1,5	11	1,298511
2	1,25	12	1,298435
3	1,323223	13	1,298471
4	1,287572	14	1,298454
5	1,303636	15	1,298462
6	1,296081	16	1,298458
7	1,299570	17	1,298460
8	1,297944	17	1,298459
9	1,298699	19	1,298459

Vậy nghiệm của PT đạt độ chính xác 10^{-5} là 1,29846

§5. Phương pháp dây cung

Phương pháp : Thay cung cong AB có PT $y = f(x)$ trong khoảng $(a; b)$ bằng dây cung AB và nghiệm đúng ξ của PT $f(x) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $(a; b)$ được lấy *xấp xỉ bằng hoành độ* x_1 của giao điểm của đường thẳng AB với trục hoành Ox.

Nhắc lại :

(1) PT đường thẳng AB là : $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$ (1), chọn đi qua $A\left(a\,; f(a)\right)$

hoặc là : $\frac{x-b}{b-a} = \frac{y-f(b)}{f(b)-f(a)}$ (2) , chọn đi qua $B\left(b\,; f(b)\right)$.

(2) Không làm mất tính tổng quát, **bằng cách đổi dấu hàm $f(x)$**, ta luôn giả sử $f(a) < 0 < f(b)$, hay trong khoảng cách ly nghiệm $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$.

5.1. Thuật toán tìm nghiệm gần đúng bằng Phương pháp dây cung.

- **TH1:** $f'(x).f''(x) > 0$. Tức là $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$.

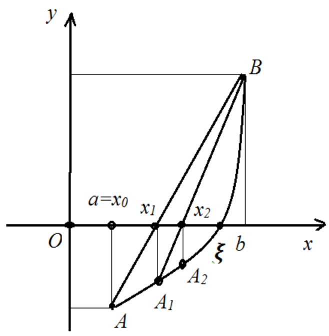
Bước 1 : Gọi x_1 là hoành độ giao điểm của dây cung AB với Ox.

Từ PT(1), cho $y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$.

Trong TH này, **nghiệm đúng $\xi \in (x_1; b)$.**

Chọn khoảng cách ly nghiệm mới là $(x_1; b)$.

Bước 2 (Lặp): Thay x_1 cho a, ta có $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}$.



Công thức nghiệm gần đúng, với $f'(x).f''(x) > 0$ là: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-b)}{f(x_{k-1})-f(b)}, k \geq 1 \end{cases}$

Lưu ý: Nếu dùng PT(2) thì $x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$, nghiệm x_k là: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_k = b - \frac{f(b)(b-x_{k-1})}{f(b)-f(x_{k-1})}, k \geq 1 \end{cases}$.

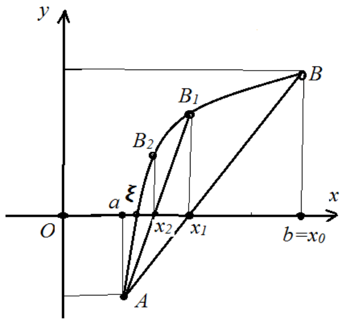
- **TH2:** $f'(x).f''(x) < 0$. Tức là $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$.

Bước 1: Từ PT dạng (2) của đường thẳng AB, hoành độ giao điểm của dây cung AB với trục hoành là : $x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$.

Trong TH này, **nghiệm đúng $\xi \in (a; x_1)$.**

Chọn khoảng cách ly nghiệm mới là $(a; x_1)$.

Bước 2 (Lặp): Thay x_1 cho b, ta có : $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}$.



Công thức nghiệm gần đúng với $f'(x).f''(x) < 0$ là: $\begin{cases} x_0 = b \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-a)}{f(x_{k-1})-f(a)}, k \geq 1 \end{cases}$.

Lưu ý: Nếu dùng PT(1) thì $x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$, nghiệm x_k là: $\begin{cases} x_0 = b \\ x_k = a - \frac{f(a)(x_{k-1}-a)}{f(x_{k-1})-f(a)}, k \geq 1 \end{cases}$.

Chú ý: Công thức nghiệm gần đúng x_k trong hai trường hợp có thể viết lại là :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-d)}{f(x_{k-1})-f(d)} \quad (k \geq 1) \qquad \text{hoặc} \qquad x_k = d - \frac{f(d)(x_{k-1}-d)}{f(x_{k-1})-f(d)}$$

với $x_0 = a,\ d = b$ nếu $f'(x).f''(x) > 0$; $x_0 = b,\ d = a$ nếu $f'(x).f''(x) < 0$.

5.2. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_k của PP dây cung.

Cách 1: Giả sử nghiệm đúng ξ và nghiệm gần đúng $\boldsymbol{x_k}$ của PT(1) cùng thuộc khoảng $(a;b)$ và $0 < m_1 \le |f'(x)|$ với $\forall x \in (a;b)$. Khi đó, ta có sai số: $|\boldsymbol{x_k} - \xi| \le \frac{|f(x_k)|}{m_1}$.

Cách 2: Giả sử trên khoảng cách ly nghiệm $(a;b)$, đạo hàm $f'(x)$ liên tục, không đổi dấu và thỏa mãn $0 < \boldsymbol{m_1} \le |f'(x)| \le \boldsymbol{M_1} < +\infty$.

Khi đó ta có sai số: $|x_k - \xi| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ khi k đủ lớn.

(Nhận xét : tốc độ hội tụ của PP dây cung chậm – là hội tụ tuyến tính)

Chú ý : Trong thực tế, ta dừng phép lặp khi $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ sai số cho phép.

Ví dụ 5.2.1. Dùng PP dây cung, tìm nghiệm gần đúng của các PT sau với độ chính xác 10^{-2}:

(1) $x^3 + 3x + 5 = 0$ biết khoảng cách ly nghiệm là $(-1{,}5\,;-1)$.

Giải. Đặt: $f(x) = x^3 + 3x + 5$, $f(-1{,}5) = -2{,}875 < 0 < f(-1) = 1$.

Có: $f'(x) = 3x^2 + 3 \ge 6 = m_1$, $f''(x) = 6x$. Có $f'(x).f''(x) < 0$ trên $(-1{,}5\,;-1)$.

Áp dụng TH2, $x_0 = b = -1$ và $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(a)}.(x_{k-1} - a)$. Sai số $\Delta_{xk} = \frac{|f(x_k)|}{6}$

SD FX-500MS : *Biến nhớ A lưu a, B lưu b, C lưu $f(a)$, X lưu $\boldsymbol{x_k}$, D lưu $f(\boldsymbol{x_k})$, E lưu Δ_{xk} .*

Bước 1 (Khởi tạo) :
$$\begin{cases} -1{,}5 \to A \\ f(a) = A^3 + 3A + 5 \to C \\ -1 \to X \end{cases}$$

Bước 2 (Lặp) :
$$\begin{cases} f(X) = X^3 + 3X + 5 \to D \\ \frac{|D|}{6} \to E \\ X - \frac{D}{D - C}.(X - A) \to X \end{cases}$$
(Dừng khi E< ε)

Ta có KQ sau :

k	$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1}).(x_{k-1} - a)}{f(x_{k-1}) - f(a)}$ $(k \ge 1)$	$\Delta_{xk} = \frac{|f(x_k)|}{m_1}$
0	-1	0,17
1	$-1{,}1290$	0,029
2	$-1{,}1502$	$0{,}47.10^{-2}$
3	$-1{,}1535$	$0{,}23.10^{-2} < \varepsilon$

Đáp số : $x_3 = -1{,}15$

Chú ý: Trong TH không cần tính sai số, có thể sử dụng tính **Ví dụ 5.2.1 ý (1)** với một lệnh lặp như sau :

Bước 1 (Khởi tạo) :
$$\begin{cases} a \to A \\ f(A) \to C \\ b \to X \end{cases}$$

Bước 2 (Lặp) : $X - \frac{f(X)}{f(X) - C}(X - A) \to X$

(2) $x^4 - 3x + 1 = 0$, biết hai khoảng cách ly nghiệm $(0; 0{,}5)$ và $(1; 1{,}5)$.

TH1 : Khoảng cách ly nghiệm là $(0; 0{,}5)$.

Đặt $f(x) = -x^4 + 3x - 1,\ f(0) = -1 < 0 < f(0{,}5) = 0{,}4375.$

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 3 > 0\ ,\ f''(x) = -12x^2 < 0$

=> $|f'(x)| \ge f'(0{,}5) = 2{,}5 = m_1$ với $\forall x \in (0; 0{,}5)$.

Có $f'(x).f''(x) < 0$ trên $(0\,; 0{,}5)$. ÁD TH2, $\begin{cases} x_0 = b = 0{,}5 \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-a)}{f(x_{k-1})-f(a)}. \\ \text{Sai số : } \Delta_k = \frac{|f(x_k)|}{2{,}5} \end{cases}$

k	$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-a)}{f(x_{k-1})-f(a)}$ $(k \ge 1)$	$\Delta_{xk} = \frac{\lvert f(x_k)\rvert}{m_1} = \frac{\lvert f(x_k)\rvert}{2{,}5}$
0	0,5	0,18
1	0,348	0,011
2	0,338	$0{,}12.10^{-2}$

TH2 : Khoảng cách ly nghiệm là $(1\,; 1{,}5)$.

Đặt $f(x) = x^4 - 3x + 1,\ f(1) = -1 < 0 < f(1{,}5) = 1{,}5625.$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 3 > 0,\ f''(x) = 12x^2 > 0$

=> $|f'(x)| \ge f'(1) = 1 = m_1$ với $\forall x \in (1\,; 1{,}5)$.

Có $f'(x).f''(x) > 0$ trên $(1\,; 1{,}5)$. Áp dụng TH1, $\begin{cases} x_0 = a = 1 \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-b)}{f(x_{k-1})-f(b)}. \\ \text{Sai số : } \Delta_k = \frac{|f(x_k)|}{1} \end{cases}$

SD máy tính FX-500MS : *Biến A lưu a, B lưu b, C lưu f(b), D lưu f(x_k), X lưu x_k*

Bước 1 (Khởi tạo): $\begin{cases} 1{,}5 \to B; \\ f(B) \to C \\ 1 \to X \end{cases}$ ***Bước 2 (Lặp :*** $\begin{cases} f(X) \to D \ (\text{Sai số } \Delta_k = |D|) \\ X - \frac{D}{D-C}.(X - B) \to X \end{cases}$

k	$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-1}-b)}{f(x_{k-1})-f(b)}$ $(k \ge 1)$	$\Delta_{xk} = \frac{\lvert f(x_k)\rvert}{m_1} = \lvert f(x_k)\rvert$
0	1	1
1	1,195	0,55
2	1,274	0,19
3	1,298	0,054
4	1,305	0,015
5	1,307	$0{,}4.10^{-2} < \varepsilon = 10^{-2}$

Đáp số : PT có hai nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-2} là $x = 0{,}338$ và $x = 1{,}307$

§6. Phương pháp tiếp tuyến (PP Newton)

Phương pháp: Thay cung cong $y = f(x)$ trong khoảng $(a; b)$ bằng tiếp tuyến của đường cong ấy tại điểm *A* hoặc tại điểm *B*, và nghiệm đúng ξ của PT $f(x) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $(a; b)$ được lấy *xấp xỉ bằng hoành độ* x_1 của giao điểm của tiếp tuyến ấy với trục hoành *Ox*.

Lưu ý:

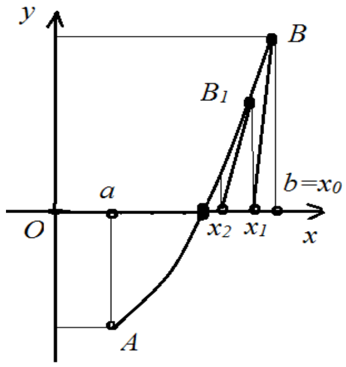
(1) PT tiếp tuyến tại $A\big(a; f(a)\big)$ là : $y - f(a) = f'(a).(x - a)$.

PT tiếp tuyến tại $B\big(b; f(b)\big)$ là : $y - f(b) = f'(b).(x - b)$.

(2) Không làm mất tính tổng quát, bằng cách đổi dấu hàm $f(x)$, ta luôn giả sử trong khoảng cách ly nghiệm $(a; b)$ thì $f(a) < 0 < f(b)$.

6.1. Thuật toán tìm nghiệm gần đúng x_k bằng Phương pháp tiếp tuyến.

- **TH1:** $f'(x).f''(x) > 0$. Tức là $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$.



Bước 1: Gọi x_1 là giao điểm của tiếp tuyến ***tại B*** với *Ox*, ta có :

Từ PT tiếp tuyến tại B, cho $y = 0 \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$.

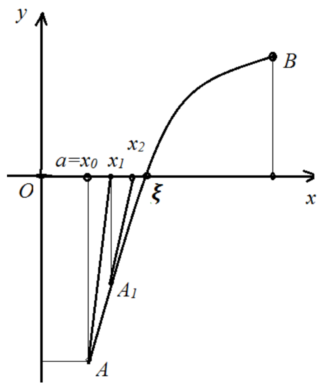
Trong TH này, **N⁰ đúng** $\boldsymbol{\xi \in (a; x_1)}$.

Chọn khoảng cách ly nghiệm mới là $(a\,; x_1)$.

Bước 2 (Lặp): Thay *b* bởi mút x_1, ta có $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Công thức nghiệm gần đúng với $f'(x).f''(x) > 0$ là : $\begin{cases} x_0 = b \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},\ k \geq 1 \end{cases}$.

- **TH2:** $f'(x).f''(x) < 0$. Tức là $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$.



Bước 1: Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến **tại *A*** với trục hoành là

Từ PT tiếp tuyến tại A, cho $y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Trong TH này, **N⁰ đúng** $\boldsymbol{\xi \in (x_1; b)}$. Chọn khoảng cách ly nghiệm mới là $(x_1; b)$.

Bước 2 (Lặp): Thay a bởi mút x_1, ta có : $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Công thức nghiệm gần đúng với $f'(x).f''(x) < 0$ là : $\begin{cases} x_0 = a \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},\ k \geq 1 \end{cases}$.

Chú ý: Công thức nghiệm gần đúng x_k của PP tiếp tuyến trong hai TH có thể viết lại là :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}\ ,\ k \geq 1$$

với $x_0 = b$ nếu $f'(x).f''(x) > 0$; $x_0 = a$ nếu $f'(x).f''(x) < 0$

6.2. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_k của PP tiếp tuyến.

Như PP dây cung, nếu $|f'(x)| \geq m_1 > 0, \forall x \in (a;b)$ thì ta có sai số: $|x_k - \xi| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}$ $(*)$.

Cách khác: Giả sử trên khoảng cách ly nghiệm $(a;b)$, $f'(x)$ và $f''(x)$ thỏa mãn:

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0 \text{ và } |f''(x)| \leq M_2$$

Khi đó, ta có đánh giá sai số thứ hai: $|x_k - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1}.|x_k - x_{k-1}|^2 < \varepsilon$ khi k đủ lớn.

(Nhận xét : Tốc độ hội tụ của PP tiếp tuyến nhanh hơn PP dây cung. PP dây cung còn được gọi là PP lặp có cấp hội tụ một, và PP tiếp tuyến gọi là PP lặp có cấp hội tụ hai)

Chú ý :

(1) Trong thực tế, ta dừng phép lặp khi $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ sai số cho phép.

(2) Trong tính toán, để ***đánh giá sai số*** của nghiệm gần đúng, nhận được bằng PP dây cung hoặc tiếp tuyến, người ta thường tìm cách thu hẹp đến mức tối đa khoảng cách ly $(a;\ b)$ chứa nghiệm, sau đó áp dụng cách đánh giá sai số thứ nhất (*).

Ví dụ 6.2.1. Tìm nghiệm gần đúng của PT sau trên khoảng cách ly nghiệm $(0{,}25; 0{,}5)$, bằng PP tiếp tuyến $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$ với độ chính xác 10^{-5}. **Đáp số :** 0,39754.

Giải. Khoảng cách ly nghiệm là $(0{,}25; 0{,}5)$.

Đặt $f(x) = 2\lg x - \frac{x}{2} + 1$, $f(0{,}25) \approx -0{,}329 < 0 < f(0{,}5) \approx 0{,}1479$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x.\ln 10} - \frac{1}{2} > 0$, $f''(x) = -\frac{2}{x^2 \ln 10} < 0$, $|f'(x)| \geq f'(0{,}5) \approx 1{,}237 = m_1$.

Áp dụng TH2, $x_0 = a = 0{,}25$ và $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = x_{k-1} - \frac{\left(2\lg x_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{2} + 1\right)}{\left(\frac{2}{x_{k-1}.\ln 10} - \frac{1}{2}\right)}$.

SD máy tính FX500-MS *: Biến nhớ X lưu x_k, D lưu $f(x_k)$, E lưu sai số* $\frac{|f(x_k)|}{m_1}$.

Bước 1 (Khởi tạo): $\begin{cases} FIX - 6 \\ a \to X \text{ tức là } 0{,}25 \to X \end{cases}$

Bước 2 (Lặp) : $\begin{cases} f(X) \to D \\ \frac{|D|}{m_1} \to E \\ X - \frac{D}{f'(X)} \to X \end{cases}$ tức là : $\begin{cases} 2\lg X - \frac{X}{2} + 1 \to D \\ \frac{D}{1{,}237} \to E \\ X - \frac{D}{\frac{2}{X.\ln 10} - \frac{1}{2}} \to X \end{cases}$.

Dừng khi $E < \varepsilon$.

k	x_k	Δ_{xk}
0	0,25000	0,7
1	0,360653	0,054
2	0,395315	$0{,}3.10^{-2}$
3	0,397537	$0{,}11.10^{-4}$
	0,397545	$0{,}15.10^{-10}$

Chú ý : Trong TH không cần tính sai số, có thể sử dụng cách tính **Ví dụ 6.2.1** với một lệnh lặp như sau :

Bước 1 (Khởi tạo): $a \to X$. ***Bước 2 (Lặp) :*** $X - \frac{f(X)}{f'(X)} \to X$

Bài tập tự luyện chương 2.

Bài 2.1. Tìm giao điểm của hai đường cong $y = e^x - 2$ và $y = \ln(x+2)$ với bốn chữ số đáng tin.

Bài 2.2 Tìm nghiệm trong khoảng $(1; 2)$ của phương trình $x^6 = x^4 + x^3 + 1$.

Bài 2.3. Biết phương trình $x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$ có hai nghiệm trong khoảng lân cận của *2*. Tìm hai nghiệm này với độ chính xác 10^{-4}.

Bài 2.4.

a. Sử dụng *phương pháp tiếp tuyến* tìm nghiệm gần đúng x_5 của PT: $x^2 - \cos(\pi x) - \frac{3}{2} = 0$ trong khoảng cách ly $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$. Đánh giá sai số của nghiệm x_5.

b. Cho PT $x - \cos(\pi x) - \frac{3}{2} = 0$. Chứng tỏ rằng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là một khoảng cách ly nghiệm của phương trình. Sử dụng *phương pháp chia đôi* để tìm nghiệm gần đúng đạt độ chính xác 10^{-2} thì cần ít nhất bao nhiêu bước lặp. Tìm nghiệm đó.

Bài 2.5.

a. Sử dụng phương pháp dây cung tìm nghiệm gần đúng x_5 của PT: $x^2 - \sin(\pi x) - 2 = 0$ trong khoảng cách ly $(1{,}1; \frac{3}{2})$. Đánh giá sai số của nghiệm x_5.

b. Cho PT: $x - \frac{1}{4}\sin(\pi x) - \frac{3}{2} = 0$. Chọn $\varphi(x) = \frac{1}{4}\sin(\pi x) + \frac{3}{2}$, $x_0 = 1$. Chứng tỏ rằng $\varphi(x)$ thỏa mãn điều kiện hội tụ của *phương pháp lặp* trong khoảng cách ly $(1; \frac{3}{2})$. Để đạt độ chính xác 10^{-5} cần tính ít nhất bao nhiêu bước lặp. Tìm nghiệm đó.

Bài 2.6. Cho phương trình: $5\cos x = x + 2$ (I).

a. Chứng tỏ rằng: $(0; 1)$ là một khoảng cách ly nghiệm của PT (I).

b. Sử dụng *phương pháp chia đôi*, tìm nghiệm gần đúng của PT (I) trên (0;1) sau 5 bước lặp. Đánh giá sai số của nghiệm tìm được.

Bài 2.7. Cho PT: $4x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$ (I). Đặt $\varphi(x) = \frac{1}{4(x+1)^2}$. Dùng *phương pháp lặp* để tìm nghiệm PT trên $(0; 1)$.

a. Chứng tỏ rằng $\varphi(x)$ có thỏa mãn các điều kiện hội tụ trong khoảng $(0; 1)$?

b. Tìm nghiệm gần đúng của PT (I) trong khoảng $(0; 1)$ với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$.

Bài 2.8. Cho PT: $x^2 - \sin(\pi x) - 2 = 0$ (1). Biết khoảng $(\frac{7}{6}; \frac{3}{2})$ là một khoảng cách ly nghiệm của PT(1). Đặt $f(x) = x^2 - \sin(\pi x) - 2$.

a. Chứng tỏ rằng, trong khoảng cách ly $(\frac{7}{6}; \frac{3}{2})$ thì các đạo hàm $f'(x)$, $f''(x)$ không đổi dấu.

b. Sử dụng *phương pháp dây cung*, tìm nghiệm gần đúng x_5 của phương trình (1).

Bài 2.9. Cho PT: $\ln x + x = 2$ (1). Biết khoảng $(1; 2)$ là một khoảng cách ly nghiệm của PT(1). Đặt $f(x) = \ln x + x - 2$.

a. Chứng minh rằng, các đạo hàm $f'(x)$, $f''(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(1; 2)$.

b. Sử dụng *phương pháp tiếp tuyến*, tìm nghiệm gần đúng x_5 của (1) trong khoảng $(1; 2)$ và đánh giá sai số của nghiệm đó.

Chương 3. Giải gần đúng Hệ phương trình đại số tuyến tính.

§1. Đặt vấn đề

- Cho hệ PT đại số tuyến tính *n* PT, *n* ẩn: (3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

trong đó $a_{ij},\ b_i$ là những số đã biết và x_i là các ẩn số phải tìm.

- Kí hiệu: ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ gọi là ***ma trận hệ số*** của hệ phương trình.
- Ma trận cột $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ và $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ gọi là ***vectơ vế phải*** và ***vectơ ẩn số*** của hệ.

Hệ PT (3) có thể viết gọn dưới dạng PT ma trận là $A.X = b$.

Điều kiện có nghiệm: Nếu ma trận hệ số A có $detA \neq 0$ thì hệ (3) có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}.b$

Công thức Crammer: *Nếu $detA \neq 0$ thì hệ (3) có nghiệm duy nhất cho bởi công thức $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, trong đó Δ = detA và Δ_i là định thức cấp n thu được từ Δ bằng cách thay cột thứ i của Δ bằng cột vế phải b của hệ (3).*

Các phương pháp giải: Có hai phương pháp (PP) giải hệ (3): ***PP trực tiếp và PP lặp.***

PP trực tiếp là PP ***xác định nghiệm đúng*** X^* của hệ (3) ***sau một số hữu hạn những phép tính*** sơ cấp (với giả thiết không có sai số). Chẳng hạn, PP Crammer là một PP trực tiếp.

PP lặp là PP ***xác định nghiệm đúng*** X^* của hệ (3) ***thông qua giới hạn của một dãy vô hạn*** $\boldsymbol{X^{(k)}}$ ***những nghiệm gần đúng***. Trong thực hành, ta buộc phải dừng lại tại một k_0 cụ thể nào đó và lấy $X^{(k0)}$ là nghiệm gần đúng của hệ (3) với một sai số có thể ước lượng được.

PP trực tiếp thường được dùng khi ***ma trận hệ số A đầy***, nghĩa là số những phần tử khác *0* nhiều và cấp của ma trận không quá lớn.

PP lặp thường được dùng khi ***ma trận hệ số A thưa***, nghĩa là số phần tử khác *0* ít, thường phân bố ở lân cận đường chéo chính và cấp của ma trận lớn.

§2. Phương pháp trực tiếp: PP khử Gauss (ĐỌC THÊM)

- ***Quá trình thuận:***

Bước 1: Khử x_1 . Ở cột thứ nhất (là cột hệ số của x_1), chọn *số lớn nhất về trị tuyệt đối* trong các phần tử này làm **trụ thứ nhất**, giả sử đó là $a_{11}^{(0)}$, đổi chỗ các phương trình để trụ lớn nhất nằm ở hàng đầu tiên.

Giả sử hệ ban đầu có dạng : $\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(0)}x_n = b_2^{(0)} \\ \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots. \\ a_{n1}^{(0)}x_1 + a_{n2}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(0)}x_n = b_n^{(0)} \end{cases}$

Chia PT đầu cho $a_{11}^{(0)}$, để nhận được :

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \quad \text{với} \quad a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \ , \ j = \overline{2,n}.$$

Dùng PT này để khử x_1 trong các PT còn lại, ta được hệ :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots \quad \ldots. \quad \ldots. \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \text{ trong đó } \begin{cases} a_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(0)} - a_{21}^{(0)} \times a_{1j}^{(1)} & , \quad j = \overline{2,n} \\ a_{3j}^{(1)} = a_{3j}^{(0)} - a_{31}^{(0)} \times a_{1j}^{(1)} & , \quad j = \overline{2,n} \\ \qquad \ldots \\ a_{nj}^{(1)} = a_{nj}^{(0)} - a_{n1}^{(0)} \times a_{1j}^{(1)} & , \quad j = \overline{2,n} \\ b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \times b_1^{(1)} & , \quad i = \overline{2,n} \end{cases}.$$

Bước 2 (Lặp) : Khử $x_2; x_3; \ldots; x_n$. Tương tự như **Bước 1**.

Cuối cùng ta thu được hệ tam giác sau : $\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$

- ***Quá trình ngược:*** Giải ngược từ dưới lên : $x_n = b_n^{(n)}$; $x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1n}^{(n-1)}.b_n^{(n)}$ ...
- ***Kiểm tra quá trình tính:***

Đặt $c_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots a_{in} + b_i$ là ***tổng các hệ số của ẩn và số hạng tự do*** ở vế phải trong PT thứ (i) của hệ. Đặt $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ thì ta có HPT (3'): $A.X = c$. Dễ thấy, nếu hệ (3) có nghiệm $X = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$ thì $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{t_1} \\ \vdots \\ \bar{t_n} \end{bmatrix}$ với $\bar{t_i} = t_i + 1, \forall i = \overline{1,n}$, cũng là nghiệm của hệ (3').

Chú ý:

(1) Toàn bộ quá trình tính toán trên được tóm tắt trong sơ đồ Gauss.

(2) Nếu trong khi tính toán có làm tròn số thì từ **Bước 1** trở đi c_i và tổng các phần tử bên trái của sơ đồ Gauss được phép lệch nhau sai số đã làm tròn. Nếu có sự chênh lệch lớn cần tính toán lại.

Ví dụ 2.1: Dùng phương pháp khử Gauss giải hệ PT sau:

$$\begin{cases} 2{,}0.x_1 + 1{,}0.x_2 - 0{,}1.x_3 + 1{,}0.x_4 = 2{,}7 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5.x_2 + 4{,}0.x_3 - 8{,}5.x_4 = 21{,}9 \\ 0{,}3x_1 - 1{,}0.x_2 + 1{,}0.x_3 + 5{,}2.x_4 = -3{,}9 \\ 1{,}0.x_1 + 0{,}2.x_2 + 2{,}5.x_3 - 1{,}0.x_4 = 9{,}9 \end{cases}$$

Giải.

TT	*x₁*	*x₂*	*x₃*	*x₄*	b_i	c_i	*Ghi chú*
Khởi tạo	2,0	1,0	−0,1	1,0	2,7	6,6	H_1^0
	0,4	0,5	4,0	−8,5	21,9	18,3	H_2^0
	0,3	−1,0	1,0	5,2	−3,9	1,6	H_3^0
	1,0	0,2	2,5	−1,0	9,9	12,6	H_4^0
1	1	0,5	−0,05	0,5	1,35	3,3	$H_1^0:2$
		0,3	4,02	−8,7	21,36	16,98	$H_2^0-0,4.H_1^1$
		−1,15	1,015	5,05	−4,305	0,61	$H_3^0-0,3.H_1^1$
		−0,3	2,55	−1,5	8,55	9,3	$H_4^0-H_1^1$
2		1	13,4	−29	71,2	56,6	$H_2^1:0,3$
			16,425	−28,3	77,575	65,7	$H_3^1+1,15.\ H_1^2$
			6,57	−10,2	29,91	26,28	$H_4^1+0,3.\ H_1^2$
3			1	−1,7230	4,7230	4	$H_2^2:16,425$
				1,1201	−1,1201	0	$H_3^2-6,57.H_1^3$
4				1	$-1 = x_4$	$0 = \overline{x_4}$	$H_2^3:1,1201$
			1		$3 = x_3$	$4 = \overline{x_3}$	Từ H_1^3
		1			$2 = x_2$	$3 = \overline{x_2}$	Từ H_1^2
	1				$1 = x_1$	$2 = \overline{x_1}$	Từ H_1^1

Đáp số : Hệ có nghiệm $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (1;\ 2;\ 3;\ -1)$.

Ví dụ 2.2: Giải gần đúng hệ sau bằng PP Gauss, các phép tính lấy 4 chữ số lẻ sau dấu phẩy.

$$\begin{cases} 2,6x_1 - 1,7x_2 - 2,0x_3 = 6,9 \\ 3,2x_1 + 2,1x_2 + 5,6x_3 = -11,5 \\ 7,0x_1 - 8,9x_2 - 4,5x_3 = 11,6 \end{cases}$$

Giải. FIX-4.

TT	*x₁*	*x₂*	*x₃*	b_i	c_i	*Ghi chú*
	2,6	− 1,7	− 2,0	6,9	5,8	$H_1^{(0)}$
Khởi tạo	3,2	2,1	5,6	−11,5	− 0,6	$H_2^{(0)}$
	7,0	− 8,9	− 4,5	11,6	5,2	$H_3^{(0)}$
1	1	− 1,2714	− 0,6429	1,6571	0,7429	$H_3^{(0)}:7$
		1,6056	−0,3285	2,5915	3,8685	$H_1^{(0)}-2,6.H_1^{(1)}$
		6,1685	7,6573	− 16,8027	− 2,9773	$H_2^{(0)}-3,2.H_1^{(1)}$
2		1	− 0,2046	1,6140	2,4094	$H_2^{(1)}:1,6057$
			8,9194	−26,7587	−17,8397	$H_3^{(1)}-6,1686.\ H_1^{(2)}$
3			1	−3,0000	−2,0001	$H_2^{(2)}:8,9194$
		1		1,0002	2,0002	Từ $H_1^{(2)}$
	1			1,0001	2,0001	Từ $H_1^{(1)}$

Đáp số: Hệ có nghiệm $(x_1; x_2; x_3) = (1; 1;\ -3)$.

Ví dụ 2.3.3: Giải gần đúng hệ sau bằng PP Gauss, các phép tính lấy 4 chữ số lẻ sau dấu phẩy.

$$\begin{cases} 2{,}75x_1 + 1{,}78x_2 + 1{,}11x_3 = 13{,}62 \\ 3{,}28x_1 + 0{,}71x_2 + 1{,}15x_3 = 17{,}98 \\ 1{,}15x_1 + 2{,}70x_2 + 3{,}58x_3 = 39{,}72 \end{cases}$$

Giải. **FIX-4**

TT	x_1	x_2	x_3	b_i	c_i	*Ghi chú*
Khởi tạo	2,75	1,78	1,11	13,62	19,26	$H_1^{(0)}$
	3,28	0,71	1,15	17,98	23,12	$H_2^{(0)}$
	1,15	2,70	3,58	39,72	47,15	$H_3^{(0)}$
1	1	0,2165	0,3506	5,4817	7,0488	$H_2^{(0)}:3{,}28$
		1,1846	0,1459	−1,4547	−0,1242	$H_1^{(0)}-H_1^{1}.2{,}75$
		2,4510	3,1768	33,4160	39,0439	$H_3^{(0)}-H_1^{1}.1{,}15$
2		1	1,2961	13,6336	15,9298	$H_3^{(1)}:2{,}4510$
			− 1,3895	−17,6058	−18,9946	$H_2^{(1)}-1{,}1846.H_1^{(2)}$
3			1	12,6706	13,6701	$H_2^{(2)}:(-1{,}3895)$
		1		−2,7888	−1,7880	*Từ* $H_1^{(2)}$
	1			1,6432	2,6432	*Từ* $H_1^{(1)}$

Đáp số : Hệ có nghiệm $(x_1; x_2; x_3) = (1{,}6432;\ -2{,}7888; 12{,}6706)$.

§3. Các phương pháp lặp

3.1 Phương pháp lặp đơn

Định nghĩa : Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij})$, kí hiệu $\|A\|$, **là một số thực** thỏa mãn các điều kiện sau:

- **(1)** $\|A\| \geq 0$ (Dấu = xảy ra khi $A = \theta$)
- **(2)** $\|k.A\| = |k|.\|A\|$ với $\forall k \in \mathbb{R}$.
- **(3)** $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- **(4)** $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

Người ta thường dùng 3 chuẩn ma trận sau:

- **(1)** $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ *(chuẩn cột).*
- **(2)** $\|A\|_2 = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ *(chuẩn Ơclit).*
- **(3)** $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ *(chuẩn hàng).*

- **Nội dung phương pháp:**

- Đưa PT $A.X = b$ về dạng tương đương $X = \beta + \alpha.X$ trong đó α là một ma trận có $\|\alpha\| < 1$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Sau đó chọn một vectơ nghiệm xấp xỉ ban đầu, kí hiệu $X^{(0)}$.
- Tính nghiệm gần đúng $X^{(k)}$ theo công thức: $X^{(k)} = \beta + \alpha.X^{(k-1)}$ $(*)$, $k \geq 1$.

Dễ dàng kiểm tra thấy, dãy nghiệm gần đúng $X^{(k)}$ hội tụ về X^* là nghiệm đúng của HPT (3).

- **Sự hội tụ của phương pháp :**

Dãy $X^{(k)}$ xác định bởi công thức (*) trong PP lặp đơn, hội tụ khi : $\|\alpha\| < 1$

hay ma trận hệ số A có : $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ $(**)$, $i = \overline{1,n}$.

Lưu ý: $\|\alpha\|$ có thể là chuẩn cột, chuẩn Ơclit, hoặc chuẩn hàng.

- **Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng $X^{(k)}$ của PP lặp đơn**

$\|X^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}.\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$ **Hoặc** $\|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}.\|X^{(1)} - X^{(0)}\|$.

Ví dụ 3.1.1 : Cho HPT $\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$

(1) Dùng PP lặp đơn tìm nghiệm gần đúng $X^{(4)}$ của hệ PT trên.
(2) Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng $X^{(4)}$ theo chuẩn hàng.
(3) Để đạt độ chính xác 10^{-5} cần tính ít nhất bao nhiêu bước lặp.

Giải.

(1) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \qquad - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 \\ x_2 = 3 - 0{,}03x_1 \qquad + 0{,}05x_3 \\ x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Có $\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix}$

=> $\|\alpha\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max\{0{,}04; 0{,}08; 0{,}07\} = 0{,}08 < 1$ *(TM ĐK hội tụ).*

Công thức nghiệm gần đúng là: $\begin{cases} X^{(0)} = \beta \\ X^{(k)} = \beta + \alpha.X^{(k-1)}, k \geq 1 \end{cases}$

Hay với ≥ 1 : $\begin{cases} x_1^{(k)} = 2 - 0{,}06x_2^{(k-1)} + 0{,}02x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 3 - 0{,}03x_1^{(k-1)} + 0{,}05x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 5 - 0{,}01x_1^{(k-1)} + 0{,}02x_2^{(k-1)} \end{cases}$ với $\begin{cases} x_1^{(0)} = 2 \\ x_2^{(0)} = 3 \\ x_3^{(0)} = 5 \end{cases}.$

SD FX500-MS:

Bước 1: $\begin{cases} 2 \to X \\ 3 \to Y \\ 5 \to M \end{cases}.$ ***Bước 2 (Lặp):*** $\begin{cases} 2 - 0{,}06Y + 0{,}02M \to A \\ 3 - 0{,}03X + 0{,}05M \to B \\ 5 - 0{,}01X + 0{,}02Y \to M \\ A \to X \\ B \to Y \end{cases}$

Bảng kết quả: *FIX-6*

k	$x_1^{(k)}$ (X)	$x_2^{(k)}$ (Y)	$x_3^{(k)}$ (M)
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,909228	3,194948	5,044794
4	1,909199	3,194963	5,044807
5	1,909198	3,194965	5,044807

Vậy nghiệm gần đúng $X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1{,}909199 \\ 3{,}194963 \\ 5{,}044807 \end{bmatrix}$

(2) Sai số của $X^{(4)}$ là $\left\|X^{(4)} - X^*\right\| \leq \frac{\|\alpha\|^4}{1-\|\alpha\|}.\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$

Có $\|\alpha\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^3 |\alpha_{ij}| = \max\{0{,}08; 0{,}08; 0{,}03\} = 0{,}08$

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1{,}92 - 2 \\ 3{,}19 - 3 \\ 5{,}04 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}08 \\ 0{,}19 \\ 0{,}04 \end{bmatrix} \;;\; \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\| = \max\{0{,}08; 0{,}19; 0{,}04\} = 0{,}19$$

=> $\left\|X^{(4)} - X^*\right\| \leq \frac{0{,}08^4}{0{,}92}.0{,}19 = 8.10^{-6}$.

(3) Có $\left\|X^{(k)} - X^*\right\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}.\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\| = \frac{0{,}08^k}{0{,}92}.0{,}19 < 10^{-5}$

$\Leftrightarrow \; 0{,}08^k < 4{,}8.10^{-5} \quad \Leftrightarrow \; k > 3{,}94$

Đáp số : Cần tính ít nhất đến nghiệm $X^{(4)}$ để đạt độ chính xác 10^{-5}.

Ví dụ 3.1.2: Tìm nghiệm gần đúng $X^{(4)}$ của HPT sau bằng PP lặp đơn, các phép tính lấy 4 chữ số lẻ sau dấu phẩy:

$$\begin{cases} 37{,}1x_1 + 4{,}6x_2 + 2{,}7x_3 = 15{,}87 \\ 4{,}6x_1 + 3{,}17x_2 + 11{,}3x_3 = 5{,}19 \\ 5{,}9x_1 - 23{,}70x_2 + 7x_3 = 2{,}54 \end{cases}$$

Giải. Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 37{,}1x_1 + 4{,}6x_2 + 2{,}7x_3 = 15{,}87 \\ 5{,}9x_1 - 23{,}70x_2 + 7x_3 = 2{,}54 \\ 4{,}6x_1 + 3{,}17x_2 + 11{,}3x_3 = 5{,}19 \end{cases}$ ***(Tự giải)***

- **Đưa HPT ĐSTT về dạng thỏa ĐK hội tụ của PP lặp đơn.**

Bước 1: Từ HPT đã cho lấy ra những PT mà hệ số của nó thỏa mãn (*). Sau đó sắp xếp các PT ấy sao cho hệ số có trị tuyệt đối lớn nhất của mỗi PT là phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận hệ số của HPT mới.

Bước 2: Từ mỗi PT chưa dùng và hệ ban đầu ta lập các tổ hợp, độc lập tuyến tính với nhau để tạo nên các PT thỏa mãn nguyên tắc chọn lựa trên và xếp chúng vào những vị trí thích hợp của những hàng còn lại trong HPT mới.

Ví dụ 3.1.3: Tìm N^0 gần đúng $X^{(6)}$ của hệ PT sau bằng PP lặp đơn. Đánh giá sai số của nghiệm đó theo chuẩn hàng (các phép tính lấy 4 chữ số lẻ sau dấu phẩy):

$$\begin{cases} 2{,}75x_1 + 1{,}78x_2 + 1{,}11x_3 = 13{,}62 & (a) \\ 3{,}28x_1 + 0{,}71x_2 + 1{,}15x_3 = 17{,}98 & (b) \\ 1{,}15x_1 + 2{,}70x_2 + 3{,}58x_3 = 39{,}72 & (c) \end{cases}$$

Giải. Tìm nghiệm $X^{(6)}$:

$$(II)\ \begin{cases} 6{,}03x_1 + 2{,}49x_2 + 2{,}26x_3 = 31{,}6 & (a+b) \\ 3{,}8859x_2 + 0{,}4783x_3 = -4{,}7714 & (3{,}28 \times a - 2{,}75 \times b) \\ -0{,}45x_1 + 3{,}62x_2 + 6{,}05x_3 = 65{,}82 & (2 \times c - a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0{,}4129x_2 + 0{,}3748x_3 = 5{,}2405 \\ x_2 + 0{,}1231x_3 = -1{,}2279 \\ -0{,}0744x_1 + 0{,}5983x_2 + x_3 = 10{,}8793 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5{,}2405 - 0{,}4129x_2 - 0{,}3748x_3 \\ x_2 = -1{,}2279 - 0{,}1231x_3 \\ x_3 = 10{,}8793 + 0{,}0744x_1 - 0{,}5983x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \beta + \alpha . X \quad \text{với} \quad \beta = \begin{bmatrix} 5{,}2405 \\ -1{,}2279 \\ 10{,}8793 \end{bmatrix}; \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}4129 & -0{,}3748 \\ 0 & 0 & -0{,}1231 \\ 0{,}0744 & -0{,}5983 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có công thức lặp đơn: $X^{(k)} = \beta + \alpha . X^{(k-1)}, k \geq 1$

hay
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{31{,}6}{6{,}03} - \frac{2{,}49}{6{,}03}x_2^{(k-1)} - \frac{2{,}26}{6{,}03}x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -\frac{4{,}7714}{3{,}8859} - \frac{0{,}4783}{3{,}8859}x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = \frac{65{,}82}{6{,}05} + \frac{0{,}45}{6{,}05}x_1^{(k-1)} - \frac{3{,}62}{6{,}05}x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	5,2405	−1,2279	10,8793
1	1,6700	−2,5670	12,0038
2	1,8015	−2,7054	12,5395
3	1,6579	−2,7713	12,6321
4	1,6504	−2,7827	12,6609
5	1,6443	−2,7863	12,6671
6	1,6435	−2,7870	12,6688
7	1,6432	−2,7872	12,6692
8	1,6431	−2,7873	12,6693

Đáp số : Nghiệm gần đúng $X^{(6)}$ của hệ là :

$$X^{(6)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6435 \\ -2{,}7870 \\ 12{,}6688 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{N}^0 \text{ đúng } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6431 \\ -2{,}7873 \\ 12{,}6693 \end{bmatrix} \right)$$

Đánh giá sai số: $\|\alpha\|_\infty = 0{,}7877$ => $\left\|X^{(6)} - X^*\right\| \le \frac{\|\alpha\|^6}{1-\|\alpha\|}.\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\| = \frac{0{,}7877^6}{1-0{,}7877}.3{,}5705 = 4{,}01$. (Sai số quá lớn so với thực tế ????)

Hoặc : $\left\|X^{(6)} - X^*\right\| \le \frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}.\left\|X^{(6)} - X^{(5)}\right\| = \frac{0{,}7877}{1-0{,}7877}.0{,}0001 = 0{,}0037$. (Chính xác hơn)

- ***Cách khác:*** $\begin{cases} 3{,}28x_1 + 0{,}71x_2 + 1{,}15x_3 = 17{,}98 & (b) \\ 3{,}8859x_2 + 0{,}4783x_3 = -4{,}7714 & (3{,}28a - 2{,}75b) \\ -0{,}45x_1 + 3{,}62x_2 + 6{,}05x_3 = 65{,}82 & (2\times c - a) \end{cases}$

3.2. Phương pháp lặp Dâyden (Seidel) (ĐỌC THÊM)

Nội dung của PP: Tương tự như PP lặp đơn, đưa Hệ về dạng $X = \beta + \alpha.X$ với $\|\alpha\| < 1$.

Công thức nghiệm gần đúng là : $\begin{cases} x^{(0)} = \beta \\ X^{(k)} = \beta + \underline{\alpha}.X^{(k-1)} + \overline{\alpha}.X^{(k)}, \quad k \ge 1 \end{cases}$

với quy ước: $\underline{\alpha}$ và $\overline{\alpha}$ là các ma trận tam giác thỏa mãn $\underline{\alpha} + \overline{\alpha} = \alpha$ ($\underline{\alpha}$ là ma trận *có các phần tử ở dưới đường chéo chính bằng 0,* $\overline{\alpha}$ là ma trận *có các phần tử ở nửa trên bằng 0*).

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \backslash & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \backslash & \blacksquare \\ 0 & 0 & \backslash \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{\alpha} = \begin{bmatrix} \backslash & 0 & 0 \\ \blacksquare & \backslash & 0 \\ \blacksquare & \blacksquare & \backslash \end{bmatrix}$$

Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng:

- **Đánh giá theo chuẩn hàng,** $\|\blacksquare\|_\infty$: $\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le \frac{\mu}{1-\mu}.\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_\infty$

  Hay $\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_\infty \le \frac{\mu^k}{1-\mu}.\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$

trong đó : $\mu = \max\left\{\frac{q_i}{1-p_i}, i = \overline{1,n}\right\}$;

$p_1 = 0$; $p_i = \sum_{j<i}|\alpha_{ij}|$ với $i = \overline{1,n}$: Cộng theo từng hàng của ma trận $\overline{\alpha}$.

$q_i = \sum_{j\ge i}|\alpha_{ij}|$ với $i = \overline{1,n}$: Cộng theo từng hàng của ma trận $\underline{\alpha}$.

- **Đánh giá theo chuẩn cột,** $\|\blacksquare\|_1$: $\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_1 \le \frac{\rho}{(1-s).(1-\rho)}.\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|_1$

  Hay $\left\|X^{(k)} - X^*\right\|_1 \le \frac{\rho^k}{(1-s).(1-\rho)}.\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_1$

trong đó : $s = \max\left\{\sum_{i=j+1}^{n}|\alpha_{ij}|, j = \overline{1,n}\right\}$;

$\rho = \max\left\{\frac{t_j}{1-s_j}, j = \overline{1,n}\right\}$;

$t_j = \sum_{i\le j}|\alpha_{ij}|$, $s_j = \sum_{i>j}|\alpha_{ij}|$, $j = \overline{1,n-1}$; $s_n = 0$, $t_n = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_{in}|$.

Ví dụ 3.2.1: Dùng PP lặp Dâyden tìm nghiệm gần đúng $X^{(4)}$ của hệ PT sau: (Làm tròn kết quả với 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy).
$$\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng theo chuẩn hàng $\|\blacksquare\|_\infty$

Giải. Công thức nghiệm gần đúng $X^{(k)}$ theo PP lặp Dâyden là :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 2 \qquad - 0{,}06x_2^{(k-1)} + 0{,}02x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 3 - 0{,}03x_1^{(k)} \qquad + 0{,}05x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 5 - 0{,}01x_1^{(k)} + 0{,}02x_2^{(k)} \end{cases} \quad \text{với} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix}$$

SD FX500-MS**:* ***Bước 1: $\begin{cases} 2 \to X \\ 3 \to Y \\ 5 \to M \end{cases}$. ***Bước 2 (Lặp) :*** $\begin{cases} 2 - 0{,}06Y + 0{,}02M \to X \\ 3 - 0{,}03X + 0{,}05M \to Y \\ 5 - 0{,}01X + 0{,}02Y \to M \end{cases}$

Bảng kết quả: ***FIX-4***

k	$\boldsymbol{x_1^{(k)}}$	$\boldsymbol{x_2^{(k)}}$	$\boldsymbol{x_3^{(k)}}$	
0	2	3	5	Vậy nghiệm gần đúng $X^{(4)}$ là :
1	1,92	3,1924	5,0446	
2	1,9093	3,1950	5,0448	$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1{,}9092 \\ 3{,}1950 \\ 5{,}0448 \end{bmatrix}$
3	1,9092	3,1950	5,0448	
4	1,9092	3,1950	5,0448	

- Đánh giá sai số $X^{(4)}$. Công thức : $\left\|X^{(4)} - X^*\right\|_\infty \le \frac{\mu^4}{1-\mu}.\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$

Có : $p_1 = 0, q_1 = 0{,}08$; $p_2 = 0{,}03, q_2 = 0{,}05$; $p_3 = 0{,}03, q_3 = 0$.

Suy ra : $\mu = \max\left\{\frac{0{,}08}{1}; \frac{0{,}05}{1-0{,}03}; \frac{0}{1-0{,}03}\right\} = 0{,}08.$

$$\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty = \left\|\begin{matrix} 1{,}92 - 2 \\ 3{,}1924 - 3 \\ 5{,}0446 - 5 \end{matrix}\right\|_\infty = \max\{0{,}08; 0{,}1924; 0{,}0446\} = 0{,}1924 .$$

Vậy $\left\|X^{(4)} - X^*\right\|_\infty \le \frac{0{,}08^4}{1-0{,}08}.0{,}1924 = 8{,}6.10^{-6}$.

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm $X^{(4)}$: $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 \end{cases}$

SD FX500-MS: FIX-5. Bước 1: $\begin{cases} 1{,}2 \to X \\ 1{,}3 \to Y \\ 1{,}4 \to M \end{cases}$. ***Bước 2 (Lặp):*** $\begin{cases} 1{,}2 - 0{,}1Y - 0{,}1M \to X \\ 1{,}3 - 0{,}2X - 0{,}1M \to Y \\ 1{,}4 - 0{,}2X - 0{,}2Y \to M \end{cases}$

k	$\boldsymbol{x_1^{(k)}}$	$\boldsymbol{x_2^{(k)}}$	$\boldsymbol{x_3^{(k)}}$
0	1,2	1,3	1,4
1	0,93	0,974	1,0192
2	1,00068	0,99794	1,00028
3	1,00018	0,99994	0,99998
4	1,00001	1,00000	1,00000

Vậy nghiệm $X^{(4)}$ của hệ là $\left(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}\right) = (1{,}00001; 1{,}00000; 1{,}00000).$

Bài tập tự luyện chương 3

Bài 3.1. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} -3x + 2y + 8z = 44 \\ 4x - y + z = -7 \\ -x + 5y + z = 21 \end{cases}$.

a) Hãy đưa hệ phương trình đã cho về dạng có *ma trận hệ số* đường chéo trội.

b) Sử dụng *phương pháp lặp Dây-đen*, tìm véc tơ nghiệm gần đúng $x^{(5)}$ của hệ phương trình trên.

c) Tính sai số của nghiệm $x^{(5)}$ theo chuẩn hàng $\|.\|_\infty$.

Bài 3.2. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + 8y - 3z = 2 \\ -x + y + 4z = -11 \\ 5x + y - z = 11 \end{cases}$.

a) Hãy đưa hệ phương trình đã cho về dạng có *ma trận hệ số* đường chéo trội.

b) Sử dụng *phương pháp lặp đơn* tìm véc tơ nghiệm gần đúng $x^{(3)}$ của hệ phương trình trên

c) Tính sai số của nghiệm $x^{(3)}$ theo chuẩn cột $\|.\|_1$.

Bài 3.3. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27 \\ 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -19 \end{cases}$

a) Sử dụng *phương pháp lặp đơn*, tìm véc tơ nghiệm gần đúng $x^{(3)}$ của hệ trên.

b) Đánh giá sai số của nghiệm tìm được ở câu a) theo chuẩn hàng.

c) Để đạt độ chính xác 10^{-5} cần tính ít nhất bao nhiêu bước lặp.

Bài 3.4. Cho hai hệ PT : $(I) \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27 \\ 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -19 \end{cases}$. $(II) \begin{cases} -3x + 2y + 8z = 2 \\ 4x - y + z = -11 \\ -x + 5y + z = 11 \end{cases}$.

a) Hãy đưa hệ phương trình đã cho về dạng có ma trận hệ số đường chéo trội.

b) Sử dụng *phương pháp lặp Dâyden*, tìm véc tơ nghiệm gần đúng $x^{(3)}$ của hệ phương trình trên.

c) Tính sai số của nghiệm $x^{(3)}$ theo chuẩn cột $\|.\|_1$.

d) Để đạt độ chính xác 10^{-7} cần ít nhất bao nhiêu bước lặp.

Bài 3.5. Tìm nghiệm gần đúng $x^{(3)}$ của hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn (Ghi kết quả làm tròn với 4 chữ số sau dấu phẩy). Đánh giá sai số của $x^{(3)}$ theo $\|.\|_\infty$.

a) $\begin{cases} 2x + 8y - 3z = 2 \\ -x + y + 4z = -11 \\ 5x + y - z = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}3x_1 + 1{,}2x_2 + 4{,}5x_3 = 15{,}3 \\ 6{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 1{,}4x_3 = 14{,}8 \\ 0{,}2x_1 - 2{,}1x_2 + 0{,}5x_3 = -0{,}2 \end{cases}$

Bài 3.6. Tìm nghiệm gần đúng của các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss (Kết quả làm tròn với 4 chữ số lẻ sau dấu phẩy).

a) $\begin{cases} 2x + 8y - 3z = 2 \\ -x + y + 4z = -11 \\ 5x + y - z = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5{,}5x_1 + 2{,}2x_2 - 2{,}1x_3 + 0{,}5x_4 = 5{,}9 \\ 2{,}4x_1 - 1{,}3x_2 + 1{,}2x_3 + 4{,}5x_4 = -1{,}9 \\ 3{,}6x_1 - 6{,}7x_2 - 2{,}8x_3 + 1{,}4x_4 = -10{,}7 \\ 1{,}5x_1 + 4{,}2x_2 - 5{,}3x_3 - 2{,}5x_4 = -3{,}7 \end{cases}$

Chương 4. Đa thức nội suy và phương pháp bình phương bé nhất

§1. Đa thức nội suy

Đặt vấn đề: Trong thực hành, ta thường gặp hai đại lượng *x* và *y*, trong đó có thể coi *y* là hàm của *x* tức $y = f(x)$, được xác định bởi bảng tương ứng sau:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Cần tìm thuật toán đơn giản tính giá trị $\bar{y} = f(\bar{x})$ tương ứng với điểm $\bar{x}$ nào đó không nằm trong bảng trên ($\bar{x} \neq x_k$, $\forall k = \overline{0, n}$).

Bài toán: Xét hàm $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và đã biết giá trị của hàm $f(x)$ tại *n+1* nút $x_k \in [a; b]$, tức là đã biết giá trị: $y_k = f(x_k), k = \overline{0; n}$. Tính gần đúng $f(\bar{x})$, $\bar{x} \neq x_k , k = \overline{0, n}$.

Phương pháp nội suy đa thức :

Bước 1 : Tìm *đa thức nội suy* của hàm $f(x)$ tại các *nút nội suy* $x_0; x_1; \dots; x_n$. Tức là :

Tìm đa thức bậc $\leq n$, có dạng $P_n(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ với $a_i \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $P_n(x_k) = f(x_k) \quad (= y_k) \ ; \quad \forall k = \overline{0, n}$.

Bước 2 : Dùng đa thức nội suy $P_n(x)$ thay cho $f(x)$ để tính gần đúng, tức lấy : $f(\bar{x}) \approx P_n(\bar{x})$

Chú ý:

(1) Ta chọn *đa thức nội suy* để tính gần đúng vì lí do đơn giản: các phép toán cộng, trừ, nhân, đạo hàm, tích phân trên đa thức đều dễ dàng thực hiện.

(2) Nếu $\bar{x} \in (x_0; x_n)$ thì phép tính gần đúng trên gọi là *phép tính nội suy*; nếu $\bar{x} \notin (x_0; x_n)$ thì phép tính gần đúng trên gọi là phép *tính ngoại suy*.

(3) Người ta cũng dùng đa thức nội suy $P_n(x)$ thay cho hàm $f(x)$ trong trường hợp biểu thức giải tích cụ thể của hàm số $f(x)$ đã biết nhưng tương đối phức tạp.

(4) Bằng cách giải hệ *n+1* PT tuyến tính với *n+1* ẩn:

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n = y_1 \\ \dots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_n + a_n = y_n \end{cases},$$

ta có hệ luôn có nghiệm duy nhất $(a_0; a_1; \dots; a_{n-1}; a_n)$. Do vậy, Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số $f(x)$ tại *n +1* nút nội suy cho trước luôn tồn tại và đa thức đó là duy nhất.

(5) Nếu $f(x)$ là *một hàm đa thức bậc m* $(m \leq n)$ thì đa thức nội suy $P_n(x)$ của $f(x)$ tại *n+1* nút bất kì sẽ có bậc bằng m, và : $P_n(x) = f(x),\ \forall x$.
Nếu $f(x)$ không phải đa thức thì $P_n(x)$ luôn là một đa thức bậc *n*.

(6) *Ý nghĩa hình học:*

Tìm đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm $f(x)$, chính là tìm hàm đa thức $y = P_n(x)$ sao cho đồ thị của nó đi qua *n+1* điểm $M_k(x_k; f(x_k))$ đã biết của đường cong $y = f(x)$.

- **Tính giá trị của đa thức bằng Sơ đồ Hoocne.**

Bài toán: Cho đa thức $P_n(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$. Tính $P_n(c)$.

Cách tính: Ta viết $P_n(c) = a_0.c^n + a_1.c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.c + a_n$

$= (\ldots(\{(a_0.c + a_1)c + a_2\}c + a_3)c + \cdots + a_{n-1})c + a_n$.

Kết quả tính toán như trên được biểu diễn bằng Sơ đồ Hoocne như sau:

	a_0	a_1	a_2	…	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0.c + a_1$	$b_2 = b_1.c + a_2$	…	$b_n = b_{n-1}.c + a_{n-1}(= P_n(c))$

Ví dụ : Dùng sơ đồ Hoocne tính giá trị của đa thức $f(x) = 7x^5 - 9x^4 - 2x^2 - 3$ tại $x = 3$.

	7	-9	0	-2	0	-3
3	7	12	36	106	318	$951 = f(3)$

§2. Đa thức nội suy Lagrange.

2.1. Công thức tìm đa thức nội suy Lagrange

Xét hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và đã biết giá trị của hàm $f(x)$ tại *n+1* nút $x_k \in [a; b]$, tức là đã biết giá trị : $y_k = f(x_k)$ $(k = \overline{0; n})$.

Theo cách của Lagrange, đa thức nội suy của hàm $f(x)$ tại *n+1* nút $x_0; x_1; \ldots; x_n$ đã cho, kí hiệu là $L_n(x)$, được xác định như sau:

Bước 1: Xác định *n+1* đa thức Lagrange cơ bản $l_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$, $k = \overline{0, n}$. Cụ thể:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \quad ;$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \quad ; \quad \ldots; \quad l_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} .$$

Bước 2: Khi đó : $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x).y_k = l_0(x).y_0 + l_1(x).y_1 + \cdots + l_n(x).y_n$.

Chú ý :

(1) Nội suy bậc nhất (hay nội suy tuyến tính):

Đa thức Lagrange bậc nhất của hàm $f(x)$ với hai nút nội suy $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ là:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.y_1 .$$

Hay PT đường thẳng đi qua hai điểm $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ là $y = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}.y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.y_1$.

(2) Nội suy bậc hai: Đa thức Lagrange bậc hai của hàm $f(x)$ với ba nút nội suy $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ không thẳng hàng là :

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}.y_0 + \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}.y_1 + \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}.y_2$$

Hay PT đường cong Parabol đi qua ba điểm $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ là:

$$y = L_2(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}.y_0 + \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}.y_1 + \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}.y_2 .$$

Ví dụ 2.1.1. Tìm phương trình Parabol đi qua 3 điểm $M_1(-1;7)$; $M_2(1;1)$; $M_3(2;4)$ bằng đa thức nội suy Lagrange.

Giải. Ta có $y = L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}.7 + \frac{(x-2)(x+1)}{(1-2)(1+1)}.1 + \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}.4$

Vậy: $y = \frac{7}{6}.(x^2-3x+2) - \frac{1}{2}(x^2-x-2) + \frac{4}{3}.(x^2-1) = 2x^2-3x+2.$

Ví dụ 2.1.2. Sử dụng đa thức nội suy Lagrange hãy phân tích phân thức sau thành tổng của các phân thức tối giản : $A = \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)(x+1)}$

Giải. Xét hàm số $f(x) = 2x^2-3x+2$ với các nút nội suy $x=1$; $x=2$; $x=-1$.

Ta có bảng giá trị

x	-1	1	2
$f(x)$	7	1	4

Đa thức nội suy Lagrange của hàm $f(x)$ tại các nút trên là :

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}.7 + \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}.1 + \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}.4$$
$$= \frac{7}{6}(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)(x+1) + \frac{4}{3}(x+1)(x-1) = f(x)$$

Vậy $A = \frac{7}{6(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{3(x-2)}$.

Ví dụ 2.1.3. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$:

x	321,0 (x_0)	322,8 (x_1)	324,2 (x_2)	325,0 (x_3)
y	2,50651 (y_0)	2,50893 (y_1)	2,51081 (y_2)	2,51188 (y_3)

Tính gần đúng $f(323{,}5)$ bằng đa thức nội suy Lagrange.

Giải. ***Fix-6***. Có bốn nút nội suy $(n = 3)$ => Đa thức nội suy Lagrange của hàm $f(x)$ là:

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2).(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0).(x-x_2).(x-x_3)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2).(x_1-x_3)}y_1 +$$
$$+ \frac{(x-x_0).(x-x_1).(x-x_3)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1).(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2)}{(x_3-x_0).(x_3-x_1).(x_3-x_2)}y_3$$

Sử dụng máy tính FX-500MS. Gán : $\begin{cases} x_0 \to A;\ x_1 \to B;\ x_2 \to C;\ x_3 \to D \\ y_0 \to E;\ y_1 \to F;\ y_2 \to X;\ y_3 \to Y \\ \bar{x} \to M \qquad (\bar{x} = 323{,}5) \end{cases}$

Có: $f(323{,}5) \approx L_3(\bar{x}) = \frac{(M-B)(M-C)(M-D)}{(A-B)(A-C)(A-D)}.E + \frac{(M-A)(M-C)(M-D)}{(B-A)(B-C)(B-D)}.F +$

$$+ \frac{(M-A)(M-B)(M-D)}{(C-A)(C-B)(C-D)}.X + \frac{(M-A)(M-B)(M-C)}{(D-A)(D-B)(D-C)}.Y$$

$= -0{,}079960 + 1{,}187940 + 1{,}838972 - 0{,}437081 = 2{,}509871.$

2.2. Đánh giá sai số

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n+1$ trên $[a;b]$ chứa tất cả các nút nội suy x_k thì sai số nội suy $|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})|$ được đánh giá như sau:

$$|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.|(\bar{x}-x_0).(\bar{x}-x_1)\dots(\bar{x}-x_n)|$$

với $M_{n+1} = \max_{x\in[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Ví dụ 2.2.1. Tính gần đúng $\sin\frac{\pi}{5}$ bằng đa thức nội suy Lagrange của hàm $f(x) = \sin x$ tại các nút nội suy $x_0 = 0;\ x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{\pi}{2}$. Đánh giá sai số của giá trị gần đúng tìm được.

Giải. Ta có bảng giá trị :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1

Đa thức nội suy Lagrange của hàm $f(x) = \sin x$ với 3 nút nội suy đã cho là :

$$L_2(x) = \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(0-\frac{\pi}{6}\right).\left(0-\frac{\pi}{2}\right)}.0 + \frac{(x-0).\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}-0\right).\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}.\frac{1}{2} + \frac{(x-0).\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right).\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}.1\ .$$

Vậy : $$\sin\frac{\pi}{5} = f\left(\frac{\pi}{5}\right) \cong L_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0 + \frac{\left(\frac{1}{5}-0\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}.\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{5}-0\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}.1 = \frac{29}{50} = 0{,}58.$$

** Đánh giá sai số:*

Sai số xấp xỉ là: $$|R_2(\bar{x})| = \left|\sin\frac{\pi}{5} - 0{,}58\right| \le \frac{M_3}{3\,!}.\left|\left(\frac{\pi}{5}-0\right).\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right).\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ => $M_3 = \max_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} |f'''(x)| = \max_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} |\cos x| = 1$

Vậy : $\left|\sin\frac{\pi}{5} - 0{,}58\right| \le \frac{1}{3!}.\left|\left(\frac{\pi}{5}-0\right).\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right).\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)\right| \cong 0{,}01$.

Ví dụ 2.2.2. Tìm đa thức nội suy Lagrange của hàm $y = 3^x$ trên đoạn $[-1;1]$ tại các nút nội suy $x_0 = -1;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1$. Từ đó tính gần đúng $\sqrt{3}$.

Đáp số: $L_2(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \frac{2x^2}{3}$; Suy ra $\sqrt{3} = y\left(\frac{1}{2}\right) \cong L_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \cong 1{,}83.$

§3. Đa thức nội suy Newton

A. Trường hợp các nút nội suy không cách đều.

1. Khái niệm: Tỷ hiệu.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được cho dưới dạng bảng:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_k	x_{k+1}	…
y	y_0	y_1	y_2	…	y_k	y_{k+1}	…

trong đó $y_k = f(x_k)$; $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \ne 0$ và khác nhau , với $\forall k \ge 0$.

- *Tỷ hiệu cấp một* của hàm $f(x)$ tại *2* nút x_k, x_{k+1} kí hiệu là $f[x_k; x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$.
- *Tỷ hiệu cấp hai* của hàm $f(x)$ tại *3* nút *a, b, c* kí hiệu là : $f[a;\ b;\ c] = \frac{f[b;c]-f[a;b]}{c-a}$.
- …
- Cứ như vậy, *tỷ hiệu cấp n* của hàm $f(x)$ tại *n+1* nút $x_0; x_1; \dots; x_n$ kí hiệu là :

$$f[x_0; x_1; \dots; x_n] = \frac{f[x_1; \dots; x_n]-f[x_0; \dots; x_{n-1}]}{x_n-x_0}.$$

Chú ý:

(1) Các tỷ hiệu của hàm số $f(x)$ có tính chất đối xứng đối với các nút nội suy. Tức là ta có: $f[a;b] = f[b;a]$; $f[a;b;c] = f[a;c;b] = f[b;c;a] = \cdots$.

(2) Tỷ hiệu cấp *n* của một hàm đa thức bậc *n* tại *n+1* nút nội suy tùy ý là hằng số (luôn bằng nhau). Tỷ hiệu cấp k $(k > n)$ của một đa thức bậc *n* có giá trị bằng *0*.

Ví dụ A.1.1. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Tính tỷ hiệu cấp 3 của hàm $f(x)$ tại các nút $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Các tỷ hiệu cấp 2 của hàm $f(x)$ tại các nút trên được tính với kết quả như bảng sau :

k	x_k	y_k	$f[x_k; x_{k+1}]$	$f[x_k; x_{k+1}; x_{k+2}]$
0	-1	0	2 (A)	1 (D)
1	0	2	5 (B)	1 (E)
2	2	12	8 (C)	
3	3	20		

$A = f[x_0; x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{2-0}{0-(-1)} = 2$

$B = f[x_1; x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{12-2}{2-0} = 5$

$C = f[x_2; x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{20-12}{1} = 8$

$D = f[x_0; x_1; x_2] = \frac{f[x_1;x_2]-f[x_0;x_1]}{x_2-x_0} = \frac{B-A}{2+1} = 1$

$E = f[x_1; x_2; x_3] = \frac{f[x_2;x_3]-f[x_1;x_2]}{x_3-x_1} = \frac{C-B}{3-0} = 1$

Vậy : $f[-1; 0; 2; 3] = \frac{f[0;2;3]-f[-1;0;2]}{3-(-1)} = \frac{E-D}{4} = 0$

Lưu ý : $f(x)$ là đa thức bậc hai => các tỷ hiệu cấp 2 của $f(x)$ đều bằng nhau, các tỷ hiệu cấp 3 của $f(x)$ đều bằng 0.

2. Đa thức nội suy Newton trong TH các nút nội suy không cách đều

Đa thức nội suy Lagrange dễ tính toán nhưng có nhược điểm là khi thêm một nút nội suy thì quá trình tính cũ phải bỏ đi tất cả và tính lại từ đầu. Dựa vào tỷ hiệu, Newton đã đưa ra công thức tìm đa thức nội suy của hàm $f(x)$ thuận lợi hơn như sau.

Từ công thức tính tỷ hiệu : $f[x; x_0] = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x; x_0].(x - x_0)$ (1).

Lại có: $f[x; x_0; x_1] = \frac{f[x;x_0]-f[x_0;x_1]}{x-x_1} \Rightarrow f[x; x_0] = f[x_0; x_1] + f[x; x_0; x_1].(x - x_1)$

Thay vào (1) ta được : $f(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1].(x - x_0) + f[x; x_0; x_1].(x - x_0)(x - x_1)$

Cứ như vậy ta thu được:

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1].(x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2].(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+f[x_0;\ \dots; x_n].(\,x - x_0) \dots (\,x - x_{n-1}) + f[x; x_0;\ \dots; x_n].(\,x - x_0)(\,x - x_1) \dots (\,x - x_n)\,.$$

Đặt $P_n(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1].(x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2].(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$
$+ f[x_0; x_1; \ldots; x_n].(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$ (*).

Và $R_n(x) = f[x; x_0; x_1; \ldots; x_n].(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

thì ta có : $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

- Dễ dàng kiểm tra thấy $f(x_k) = P_n(x_k)$ với $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Vậy $P_n(x)$ xác định bởi (*) là đa thức nội suy của hàm $f(x)$ ứng với *n+1* nút nội suy trên.

Chú ý:

(1) Đa thức nội suy $P_n(x)$ tìm được theo (*) gọi là *đa thức nội suy Newton tiến của hàm $f(x)$ xuất phát từ nút x_0.*

Sai số nội suy khi tính giá trị gần đúng của hàm $f(x)$ tại điểm $x = \bar{x}$ là :

$$|f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})| = |R_n(\bar{x})| = |f[\bar{x}; x_0; \ldots; x_n].(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n)| .$$

(2) Xây dựng tương tự, ta có công thức xác định *đa thức nội suy Newton lùi của hàm $f(x)$ xuất phát từ nút x_n* là : (ĐỌC THÊM)

$P_n(x) = f(x_n) + f[x_n; x_{n-1}].(x - x_n) + f[x_n; x_{n-1}; x_{n-2}].(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots$
$+ f[x_n; x_{n-1}; \ldots; x_0].(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$ (**)

Sai số nội suy vẫn là: $|R_n(\bar{x})| = \left|f[\bar{x}; x_n; \ldots; x_0].(\bar{x} - x_n)(\bar{x} - x_{n-1})\ldots(\bar{x} - x_0)\right|$.

(3) Đa thức nội suy của một hàm số $f(x)$ tại n+1 nút nội suy đã cho là ***duy nhất***, do vậy, đa thức nội suy Newton $P_n(x) = L_n(x)$, chúng chỉ *khác nhau cách biểu diễn.*

Do vậy, nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp *n+1* trên $[a; b]$ chứa tất cả các nút nội suy x_k thì sai số nội suy tại điểm $\bar{x}$ có thể đánh giá (theo cách của Lagrange) là:

$|R_n(\bar{x})| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.|(\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n)|$, với $M_{n+1} = \max_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Đa thức nội suy Newton tiến, tiện lợi khi tính gần đúng giá trị của $f(x)$ tại điểm $\bar{x}$ gần x_0.

Đa thức nội suy Newton lùi, tiện lợi khi tính gần đúng giá trị của $f(x)$ tại điểm $\bar{x}$ gần x_n .

(4) Nếu thêm một nút nội suy x_{n+1} thì sau khi tìm được đa thức nội suy Newton $P_n(x)$ ứng với *n+1* nút nội suy $x_0; x_1; \ldots; x_n$ để tìm đa thức nội suy $P_{n+1}(x)$ của hàm *f* ứng với *n+2* nút nội suy $x_0; x_1; \ldots; x_{n+1}$ ta *chỉ cần bổ sung thêm nút nội suy mới vào cuối bảng*, rồi tính thêm tỷ hiệu cấp *n+1* của hàm $f(x)$ và cộng số hạng bậc *n+1* vào cuối đa thức nội suy $P_n(x)$.

Tức là : $P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0; x_1; \ldots; x_{n+1}].(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Ví dụ A.2.1. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	-1	0	3	6	7
y	3	-6	39	822	1611

(1) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến từ nút $x_0 = -1$.
(2) Tính gần đúng $f(-0{,}25)$ bằng đa thức nội suy tìm được ở trên.

Giải.

(1) Có 5 nút nội suy, ta có:

$$P_4(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1].(x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2].(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+f[x_0; x_1; x_2; x_3].(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+f[x_0; x_1; x_2; x_3; x_4].(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Tính các tỷ hiệu của hàm $f(x)$ như sau:

k	x_k	y_k	*Tỷ hiệu cấp 1*	*Tỷ hiệu cấp 2*	*Tỷ hiệu cấp 3*	*Tỷ hiệu cấp 4*
0	$-1\ (x_0)$	$3\ (y_0)$	-9	6	5	1
1	$0\ (x_1)$	$-6\ (y_1)$	15	41	13	
2	$3\ (x_2)$	$39\ (y_2)$	261	132		
3	$6\ (x_3)$	$822\ (y_3)$	789			
4	$7\ (x_4)$	$1611\ (y_4)$				

Vậy $P_4(x) = f(-1) + f[-1; 0](x + 1) + f[-1; 0; 3](x + 1)(x - 0) +$
$+f[-1; 0; 3; 6].(x + 1)(x - 0)(x - 3) + f[-1; 0; 3; 6; 7].(x + 1)(x - 0)(x - 3)(x - 6)$.
Hay $P_4(x) = 3 - 9(x + 1) + 6.(x + 1)x + 5(x + 1)x(x - 3) + 1.(x + 1)x(x - 3)(x - 6)$
$= x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6$.

(2) Có $f(-0{,}25) \cong P_4(-0{,}25) = -\frac{1443}{256} \cong -5{,}6367$.

Chú ý : Đa thức nội suy của hàm $f(x)$ xuất phát từ nút $x_1 = 0$ là:

$$P_4(x) = f(x_1) + (x - x_1).f[x_1; x_2] + (x - x_1)(x - x_2).f[x_1; x_2; x_3] +$$
$$+(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).f[x_1; x_2; x_3; x_4] +$$
$$+(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).f[x_1; x_2; x_3; x_4; x_0].$$

Thay số : $P_4(x) = -6 + x.15 + x(x - 3).4 + x(x - 3)(x - 6).13 + x(x - 3).(x - 6).(x - 7).1 = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6$.

Ví dụ A.2.2 : Cho hàm $y = \sin x$ với bảng giá trị:

x	1	1,1	1,2	1,3
$y = \sin x$	0,84147	0,89121	0,93204	0,96356

(1) Tính gần đúng sin 0,9 bằng đa thức nội suy Newton tiến $P_n(x)$ của hàm $\sin x$ xuất phát từ $x_0 = 1$. Đánh giá sai số của các giá trị tìm được.

(2) Tính gần đúng sin 1,35 bằng đa thức nội suy Newton lùi $S_n(x)$ của hàm $\sin x$ từ nút nội suy $x_3 = 1{,}3$. Đánh giá sai số của các giá trị tìm được

(3) Từ đa thức nội suy $Q_n(y)$ của hàm $x = \arcsin y$ ứng với bảng trên, tính gần đúng arcsin 0,9.

Giải.

(1) Có 4 nút nội suy (n=3), nên ta có đa thức nội suy Newton tiến của hàm $\sin x$ xuất phát từ x_0 là:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0).f[x_0; x_1] + (x - x_0)(x - x_1).f[x_0; x_1; x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).f[x_0; x_1; x_2; x_3]$$

Bảng các tỷ hiệu của hàm f(x) như sau:

k	x_k	y_k	*Tỷ hiệu cấp 1*	*Tỷ hiệu cấp 2*	*Tỷ hiệu cấp 3*	*Tỷ hiệu cấp 4*
0	$1\ (x_0)$	$0{,}84147(A)$	$0{,}4974(E)$	$-0{,}4455(Y)$	$-1/15(X')$	$-0{,}0433$
1	$1{,}1\ (x_1)$	$0{,}89121(B)$	$0{,}4083(F)$	$-0{,}4655(M)$	$-0{,}0710$	
2	$1{,}2\ (x_2)$	$0{,}93204(C)$	$0{,}3152(X)$	$-0{,}4513$		
3	$1{,}3\ (x_3)$	$0{,}96356(D)$	$0{,}4506$			
4	$0{,}9\ (\bar{x})$	$0{,}783327$				

Suy ra : $P_3(x) = 0{,}84147 + (x-1).0{,}4974 + (x-1)(x-1{,}1).(-0{,}4455) + (x-1)(x-1{,}1).(x-1{,}2).(-0{,}06667)$.

Vậy $\sin 0{,}9 = f(0{,}9) \cong P_3(0{,}9) = A + (0{,}9-1)E + (0{,}9-1).(0{,}9-1{,}1)Y + (0{,}9-1).(0{,}9-1{,}1)(0{,}9-1{,}2)X' = 0{,}78322$.

Sai số mắc phải là : $|R_3(\bar{x})| = |(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)(\bar{x}-x_3).f[\bar{x};\ x_0; x_1; x_2; x_3]|$

$$\cong\ 0{,}1.0{,}2.0{,}3.0{,}4.0{,}0433\ =\ 0{,}0001$$

(2) Có 4 nút nội suy, Đa thức nội suy N lùi là: $S_3(x) = f(x_3) + (x-x_3).f[x_3; x_2] + (x - x_3)(x - x_2).f[x_3; x_2; x_1] + (x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).f[x_3; x_2; x_1; x_0]$.

k	x_k	y_k	*Tỷ hiệu cấp 1*	*Tỷ hiệu cấp 2*	*Tỷ hiệu cấp 3*	*Tỷ hiệu cấp 4*
0	$1\ (x_0)$	$0{,}84147(A)$				
1	$1{,}1\ (x_1)$	$0{,}89121(B)$	$0{,}4974(E)$			
2	$1{,}2\ (x_2)$	$0{,}93204(C)$	$0{,}4083(F)$	$-0{,}4455(Y)$		
3	$1{,}3\ (x_3)$	$0{,}96356(D)$	$0{,}3152(X)$	$-0{,}4655(M)$	$-1/15(E')$	
4	$0{,}9\ (\bar{x})$	$0{,}975723$	$0{,}24326$	$-0{,}4858$	$-0{,}0812$	$-0{,}0415$

Suy ra: $S_3(x) = 0{,}96356 + (x-1{,}3).0{,}3152 + (x-1{,}3)(x-1{,}2).(-0{,}4655) + $

$$+ (x-1{,}3)(x-1.2).(x-1{,}1).(-0{,}06667).$$

Vậy $\sin 1{,}35 = f(1{,}35) \cong S_3(1{,}35) =$
$= D + (1{,}35-1{,}3)X + (1{,}35-1{,}3)(1{,}35-1{,}2)M + (1{,}35-1{,}3)(1{,}35-1{,}2)(1{,}35-1{,}1)E'\ =\ 0{,}97570$.

Sai số mắc phải là : $|R_3(\bar{x})| = |(\bar{x}-x_3)(\bar{x}-x_2)(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_0).f[\bar{x};\ x_3; x_2; x_1; x_0]|$

$$= 0{,}05.0{,}15.0{,}25.0{,}35.0{,}0415 = 2{,}7.10^{-5}.$$

(3) Bảng giá trị của hàm $x = g(y) = \arcsin y$ là :

y	0,84147	0,89121	0,93204	0,96356
$x = \arcsin y$	1	1,1	1,2	1,3

Có 4 nút nội suy, nên ta có đa thức nội suy Newton tiến của hàm $x = g(y) = \arcsin y$ xuất phát từ nút y_0 là:

$$Q_3(y) = g(y_0) + (y-y_0).g[y_0; y_1] + (y-y_0)(y-y_1).g[y_0; y_1; y_2] + (y-y_0)(y-y_1)(y-y_2).g[y_0; y_1; y_2; y_3]$$

Ta tính các tỷ hiệu của hàm g(y) như sau:

k	y_k	x_k	*Tỷ hiệu cấp 1*	*Tỷ hiệu cấp 2*	*Tỷ hiệu cấp 3*
0	$0{,}84147(A)$	1	$\frac{5000}{2487}\ (E)$	$4{,}844045(Y)$	$42{,}220504(Y')$
1	$0{,}89121(B)$	1,1	$\frac{10000}{4083}\ (F)$	$9{,}998746(M)$	
2	$0{,}93204(C)$	1,2	$\frac{625}{197}\ (Y)$		
3	$0{,}96356(D)$	1,3			

Vậy $\arcsin 0{,}9 = Q_3(0{,}9) = 1 + (0{,}9 - A).E + (0{,}9 - A).(0{,}9 - B).Y + (0{,}9 - A).(0{,}9 - B).(0{,}9 - C).Y = 1{,}11947$.

B. Trường hợp các nút nội suy cách đều.

1. Khái niệm: Hiệu hữu hạn

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được cho dưới dạng bảng:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_k	x_{k+1}	…
y	y_0	y_1	y_2	…	y_k	y_{k+1}	…

trong đó $y_k = f(x_k)$; $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = h \neq 0,\ \forall k \geq 0$ hay $x_k = x_0 + k.h,\ k = \overline{0,n}$.

Ta gọi:

- *Hiệu hữu hạn tiến cấp 1* của hàm $f(x)$ tại điểm x_k là : $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.
- *Hiệu hữu hạn tiến cấp 2* của hàm $f(x)$ tại điểm x_k là : $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$.
- … … …
- Tổng quát, *hiệu hữu hạn tiến cấp n* của hàm $f(x)$ tại x_k là : $\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$

Tương tự thay kí hiệu *Δ* bằng kí hiệu ∇ ta có khái niệm *hiệu hữu hạn lùi cấp n* của hàm $f(x)$ tại điểm x_k như sau (ĐỌC THÊM):

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1};\quad \nabla^2 y_k = \nabla y_k - \nabla y_{k-1};\quad \dots;\quad \nabla^n y_k = \nabla^{n-1} y_k - \nabla^{n-1} y_{k-1}.$$

Chú ý:

(1) Ta có mối liên hệ giữa các tỷ hiệu và các hiệu hữu hạn :

$$f[x_0; x_1] = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\nabla y_1}{h}\ ;\qquad f[x_0; x_1; x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2} = \frac{\nabla^2 y_2}{2!\,h^2}\ ;$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ ;\qquad f[x_0; x_1; \dots; x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n} = \frac{\nabla^n y_n}{n!\,h^n}.$$

(2) Các hiệu hữu hạn tiến (lùi) cấp *n* của hàm $f(x)$ là khác nhau tại mỗi nút nội suy x_k.

Nếu $f(x)$ là hàm đa thức bậc *n* thì các hiệu hữu hạn tiến (hoặc lùi) cấp *n* tại nút x_k bất kì luôn bằng nhau, các hiệu hữu hạn tiến hoặc lùi cấp *n+1* (cấp lớn hơn bậc của hàm *f*) tại nút x_i bất kì có giá trị bằng *0*.

Ví dụ B.1.1 : Cho hàm đa thức $f(x) = 2x^3 + 3$ ta có bảng tính các hiệu hữu hạn tiến tại các nút -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 như sau :

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	-2	-13	$14\ (A)$	$-12\ (E)$	$12\ (Y)$	0
1	-1	1	$2\ (B)$	$0\ (F)$	$12\ (M)$	
2	0	3	$2\ (C)$	$12\ (X)$		
3	1	5	$14\ (D)$			
4	2	19				

2. Công thức tìm đa thức nội suy Newton trong TH các nút nội suy cách đều

- Thay các tỷ hiệu bằng các hiệu hữu hạn tiến, ta có đa thức nội suy Newton tiến của hàm $f(x)$ xuất phát từ nút x_0 là:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}.(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) .$$

Từ đó, nếu đổi biến $x = x_0 + t.h$ hay $t = \frac{x - x_0}{h}$ thì ta có đa thức nội suy Newton tiến của hàm $f(x)$ có dạng:

$$P_n(x_0 + t.h) = y_0 + \Delta y_0.t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}.t(t+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}.t(t-1)\dots(t-n+1)$$

Sai số là : $|R_n(x)| = |R_n(x_0 + t.h)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.|h^{n+1}.t(t-1)\dots(t-n)|$,

với $M_{n+1} = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

Nếu h đủ bé và $\Delta^{n+1}y$ hầu như không thay đổi thì $|R_n(x)| = \left|\frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}.t(t-1)\dots(t-n)\right|$.

- Tương tự, ta có đa thức nội suy Newton lùi của hàm $f(x)$ xuất phát từ nút x_n là:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}.(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2}.(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots$$
$$+ \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}.(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1) .$$

Từ đó, nếu đổi biến $x = x_n + t.h$ hay $t = \frac{x - x_n}{h}$ thì đa thức nội suy Newton lùi của hàm $f(x)$ là:

$$P_n(x) = P_n(x_n + t.h) = y_n + \nabla y_n.t + \frac{\nabla^2 y_n}{2!}.t.(t+1) + \cdots + \frac{\nabla^n y_n}{n!}.t(t+1)\dots(t+n-1)$$

Sai số là $|R_n(x)| = |R_n(x_n + t.h)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.|h^{n+1}.t(t+1)\dots(t+n)|$,

với $M_{n+1} = \max_{x\in[a;b]}|f^{(n+1)}(x)|$.

Nếu h đủ bé và $\nabla^{n+1}y$ hầu như không thay đổi thì $|R_n(x)| = \left|\frac{\nabla^{n+1} y_n}{(n+1)!}.t(t+1)\dots(t+n)\right|$.

Ví dụ B.2.1: Cho bảng giá trị của hàm số $y = \sin x$ như sau:

x	15^0	20^0	25^0	30^0
$y = \sin x$	0,258819	0,342020	0,422618	0,500000

(1) Tính gần đúng $\sin 16^0$ bằng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 15^0$.
(2) Dùng đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút $x_0 = 30^0$, tính gần đúng $\sin 31^0$.
Đánh giá sai số của các giá trị gần đúng nhận được.

Giải. Có 4 nút nội suy cách đều nhau với $h = 5^0 = \frac{\pi}{36}$.

(1) Đặt $t = \frac{x-x_0}{h}$. Ta có: $P_3(t) = y_0 + \Delta y_0.t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}.t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}.t(t-1)(t-2)$.

Tính các hiệu hữu hạn tiến như sau: FIX-6 (Chú ý chọn đơn vị đo góc là Radian).

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	$\frac{\pi}{12}$	*0,258819 (A)*	*0,083201 (E)*	*-0,002603 (Y)*	*-0,000613(X')*
1	$\frac{\pi}{9}$	*0,342020 (B)*	*0,080598 (F)*	*-0,003216 (M)*	
2	$\frac{5\pi}{36}$	*0,422618 (C)*	*0,077382 (X)*		
3	$\frac{\pi}{6}$	*0,500000 (D)*			

Với $x = 16^0$ thì $= \frac{x - x_0}{h} = 0{,}2$. Suy ra: $\sin 16^0 = f(16^0) \cong P_3(t)_{t=0,2} =$

$= 0{,}258819 + 0{,}083201.0{,}2 + \left(\frac{-0{,}002603}{2!}\right).0{,}2(0{,}2-1) + \left(\frac{-0{,}000613}{3!}\right).0{,}2(0{,}2-1)(0{,}2-2) = A + E.0{,}2 + \frac{Y}{2}.0{,}2.(0{,}2-1) + \frac{X}{6}.0{,}2.(0{,}2-1).(0{,}2-2) = 0{,}275638.$

- Đánh giá sai số: $f(x) = \sin x$ => $f^{(4)}(x) = \sin x$.

Chọn $[a;b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ => $M_4 = \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}|\sin x| = 1.$

Từ đó có sai số : $|R_3(16^0)| \le M_4.\frac{|h^4.t(t-1)(t-2)(t-3)|}{4!} = \left(\frac{\pi}{36}\right)^4.1.\frac{|0{,}2.(-0{,}8).(-1{,}8).(-2{,}8)|}{4!} \approx 2.10^{-6}$. Vậy $\sin 16^0 = 0{,}275638 \pm 0{,}000002$.

(2) Đổi biến số : $t = \frac{x - x_n}{h}$.

Ta có : $Q_3(t) = y_3 + \nabla y_3.t + \frac{\nabla^2 y_3}{2!}.t(t+1) + \frac{\nabla^3 y_3}{3!}.t(t+1)(t+2)$.

Tính các hiệu hữu hạn lùi (tính ngược từ dưới) như sau:

k	x_k	y_k	∇y_k	$\nabla^2 y_k$	$\nabla^3 y_k$
0	$\frac{\pi}{12}$	$0{,}258819(A)$			
1	$\frac{\pi}{9}$	$0{,}342020(B)$	$0{,}083201(E)$		
2	$\frac{5\pi}{36}$	$0{,}422618(C)$	$0{,}080598(F)$	$-0{,}002603(Y)$	
3	$\frac{\pi}{6}$	$0{,}500000(D)$	$0{,}077382(X)$	$-0{,}003216(M)$	$-0{,}000613(E')$

Với $x = 31^0$ thì $t = \frac{x - x_n}{h} = 0{,}2$. Suy ra $\sin 31^0 = f(31^0) \approx Q_3(t)_{t=0,2} =$

$= 0{,}5 + 0{,}077382.0{,}2 + \left(-\frac{0{,}003216}{2!}\right).0{,}2.(0{,}2+1) + \left(-\frac{0{,}000613}{3!}\right).0{,}2.(0{,}2+1)(0{,}2+1)$

$$= D + X.0.2 + \frac{M}{2!}.0{,}2.(0{,}2+1). + \frac{E'}{3!}.0{,}2.(0{,}2+1)(0{,}2+1) = 0{,}515037$$

(***Lưu ý*:** Nếu dùng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 = 15 thì $\sin 31^0 \approx$ 0,5150365)

- Đánh giá sai số: $f(x) = \sin x \;\; => \;\; f^{(4)}(x) = \sin x$.

Chọn $[a;b] = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \;\; => \;\; M_4 = max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}|sin\, x| = 1$. Từ đó có sai số,

$$|R_3(160)| \le \frac{M_4}{4!}.|h^4.t(t+1)(t+2)(t+3)| = \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4.1}{4!}.|0{,}2.1{,}2.2{,}2.3{,}2| \approx 0{,}000004.$$

Vậy $\sin 31^0 = 0{,}515037 \pm 0{,}000004$.

Ví dụ B.2.1. Cho hàm $y = \sin x$ với bảng giá trị:

x	1	1,1	1,2	1,3
$y = \sin x$	0,84147	0,89121	0,93204	0,96356

(1) Sử dụng đa thức nội suy Newton tiến $P_n(x)$ từ nút nội suy $x_0 = 1$ tính gần đúng sin 0,9.

(2) Tính gần đúng sin 1,35 bằng đa thức nội suy Newton lùi $S_n(x)$ từ nút x_n = 1,3.

Giải.

(1) Có 4 nút nội suy cách đều nhau. Với $x_0 = 1, h = 0{,}1$. Đặt $t = \frac{x - x_0}{h}$. Đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 1$ có dạng:

$$=> \; P_3(t) = y_0 + \Delta y_0.t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}.t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}.t(t-1)(t-2).$$

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	1	0,84147 (A)	0,04974 (E)	−0,00891 (Y)	−0,0004(X')
1	1,1	0,89121 (B)	0,04083 (F)	−0,00931 (M)	
2	1,2	0,93204 (C)	0,03152 (X)		
3	1,3	0,96356 (D)			

Với $x = 0{,}9 \;\; => \;\; t = \frac{x-x_0}{h} = -1$.

Vậy $\sin 0{,}9 \approx P_3(t)_{t=-1} = A - E + \frac{Y}{2}.(-1)(-2) + \frac{X'}{6}.(-1)(-2)(-3) = 0{,}78322$.

(2) Tương tự ví dụ trước, $P_3(t) = y_3 + \nabla y_3.t + \frac{\nabla^2 y_3}{2!}.t(t+1) + \frac{\nabla^3 y_3}{3!}.t(t+1)(t+2)$

KQ tính toán các Hiệu hữu hạn lùi như sau (Tính ngược từ dưới lên):

k	x_k	y_k	∇y_k	$\nabla^2 y_k$	$\nabla^3 y_k$
0	*1*	*0,84147 (A)*			
1	*1,1*	*0,89121 (B)*	*0,04974 (E)*		
2	*1,2*	*0,93204 (C)*	*0,04083 (F)*	*-0,00891 (Y)*	
3	*1,3*	*0,96356 (D)*	*0,03152 (X)*	*-0,00931 (M)*	*-0,0004(E')*

Có $x_n = 1{,}3;\ h = 0{,}1.\ \ Với\ x = 1{,}35\ \ => \ t = \frac{x - x_n}{h} = 0{,}5.$

Vậy $\sin 1{,}35 \approx P_3(t)_{t=0,5} = D + X.0{,}5 + \frac{M}{2}.0{,}5.1{,}5 + \frac{E'}{6}.0{,}5.1{,}5.2{,}5 = 0{,}97595.$

§4. Phương pháp bình phương bé nhất

Đặt vấn đề: Cần tìm ra một quan hệ hàm số (hay còn gọi là *một công thức thực nghiệm*) dạng $y = f(x)$ giữa hai đại lượng *x, y* cho bởi bảng các giá trị tương ứng sau:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Nhận xét : Nếu lấy $f(x)$ thay cho đại lượng *y*, thì tại điểm $x = x_k$ thì sai số của đại lượng *y* là $|y_k - f(x_k)|$.

Nội dung PP bình phương bé nhất: Người ta xác định công thức thực nghiệm $y = f(x)$ sao cho *tổng bình phương các sai số* tại các nút x_i là bé nhất.

Nói cách khác: Từ bảng giá trị tương ứng giữa hai đại lượng *x, y* tìm hàm số $y = f(x)$ sao cho giá trị của tổng bình phương các sai số : $S = \sum_{k=1}^{n}(y_k - f(x_k))^2$ là nhỏ nhất.

Để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp dạng của hàm xấp xỉ $f(x)$ đã biết, đó là các dạng sau:

(1) $y = a + bx$ **(3)** $y = a.e^{bx}$

(2) $y = a + bx + cx^2$ **(4)** $y = a.x^b$

4.1. Công thức thực nghiệm có dạng $y = a + bx$.

Cách giải: Các hệ số *a, b* được xác định bởi hệ : $\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \end{cases}$

4.2. Dạng $y = a + bx + cx^2$

Cách giải: Các hệ số *a, b, c* được xác định bởi hệ :

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + c\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 + c\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 y_i \end{cases}$$

4.3. Dạng $y = a.e^{bx}\ (a > 0)$ (ĐỌC THÊM)

Cách giải: Lấy loga hai vế: $\ln y = \ln a + bx$. Đặt $Y = \ln y, A = \ln a$. Bài toán đưa về tìm công thức thực nghiệm giữa hai đại lượng x, Y có dạng 4.1: $Y = A + bx$. Từ đó xác định được A, b.

4.4. Dạng $y = a.x^b\ (a > 0)$ (ĐỌC THÊM)

Cách giải: Lấy loga hai vế: $\ln y = \ln a + b.\ln x$. Đặt $Y = \ln y,\ X = \ln x,\ A = \ln a$. Bài toán đưa về tìm công thức thực nghiệm giữa hai đại lượng *X, Y* có dạng 4.1: $Y = A + bX$.

Chú ý:

(1) Sử dụng chương trình hồi quy (REG) trên máy tính **FX-500MS** xác định các hệ số *a*, *b*, *c* như sau :

+) LIN – hồi quy tuyến tính (dạng 1) ;
+) QUAD – hồi quy bậc 2 (dạng 2) ;
+) EXP – hồi quy mũ (dạng 3) ;
+) PWR – hồi quy lũy thừa (dạng 4) ;
+) INV – hồi quy nghịch đảo $\left(y = a + \frac{b}{x}\right)$;
+) LOG – hồi quy loga $(y = a + b.\ln x)$.

(2) Nhập số liệu theo thứ tự sau : ẤN $\boxed{x_i}$ $\boxed{,}$ $\boxed{y_i}$ $\boxed{M+}$.

(3) Gọi kết quả tính tổng: ẤN $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{S-Sum}}$; gọi các hệ số *a*, *b*, *c* thì ẤN $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{S-Var}}$.

Ví dụ 4.1. Cho bảng giá trị:

x	2	4	6	8	10	12
y	7,32	8,24	9,20	10,19	11,01	12,05

Tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = a + bx$? Từ đó dự báo khi $x = 5$ thì y bằng bao nhiêu?

Giải. Ta có a, b là nghiệm hệ : $\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \end{cases}$.

SD Máy tính FX500MS, vào chương trình hồi quy REG (Chọn LIN), nhập giá trị của bảng số liệu, suy ra KQ :

$$\begin{cases} n = 6; \sum_{i=1}^{n} x_i = 42; \sum_{i=1}^{n} y_i = 58{,}01 \\ \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 364; \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = 439{,}02 \end{cases}$$

Hệ trở thành : $\begin{cases} 6a + 42b = 58{,}01 \\ 42a + 364b = 439{,}02 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{478}{75} = 6{,}3733 \\ b = \frac{659}{1400} = 0{,}4707 \end{cases}$. ĐS: $y = \frac{478}{75} + \frac{659}{1400}.x$

- Khi $x = 5$ thì $y = \frac{478}{75} + \frac{659}{1400}.5 = 8{,}73.$

Kiểm tra sai số với bảng giá trị ban đầu :

x	2	4	6	8	10	12
y	7,31	8,26	9,20	10,14	11,08	12,02

Ví dụ 4.2 : Cho bảng giá trị:

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = a + bx + cx^2$?

Giải. Ta có a, b, c là nghiệm hệ $\begin{cases} na + (\sum_{i=1}^{n} x_i).b + (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2).c = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i).a + (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2).b + (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3).c = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2).a + (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3).b + (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4).c = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 y_i \end{cases}$

Vào chương trình REG (chọn QUAD), nhập giá trị mẫu và gọi kết quả, Ta có :

$$\begin{cases} n = 5;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 11,61; \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 32,77; \sum_{i=1}^{n} y_i = 11,35 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 11,61; \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 32,77; \sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 = 102,76; \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = 29,77 \\ \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 32,77; \sum_{i=1}^{n} {x_i}^3 = 102,76; \sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 = 341,75; \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 y_i = 94,60 \end{cases}.$$

Hệ trở thành $\begin{cases} 5a + 11,61b + 32,77c = 11,35 \\ 11,61a + 32,77b + 102,76c = 29,77 \\ 32,77a + 102,76b + 341,75c = 94,60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5,0221 \\ b = -4,0143 \\ c = 1,0023 \end{cases}$

Đáp số : $y = 5,0221 - 4,0143x + 1,0023x^2$.

Ví dụ 4.3: Cho bảng giá trị:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1,06	1,33	1,52	1,68	1,81	1,91	2,01	2,11

Tìm công thức thực nghiệm có dạng $y = ax^b$.

Giải. Ta có $y = ax^b \Leftrightarrow \ln y = \ln a + b.\ln x$. Đặt $Y = \ln a$; $A = \ln a$; $X = \ln x$.
Suy ra : $Y = A + bX$. Ta có bảng giá trị:

$X = \ln x$	$\ln 10$	$\ln 20$	$\ln 30$	$\ln 40$	$\ln 50$	$\ln 60$	$\ln 70$	$\ln 80$
$Y = \ln y$	$\ln 1,06$	$\ln 1,33$	$\ln 1,52$	$\ln 1,68$	$\ln 1,81$	$\ln 1,91$	$\ln 2,01$	$\ln 2,11$

Vào REG, chọn LIN, ta có kết quả: $\begin{cases} n = 8; \sum_{i=1}^{n} x_i = 29,0253; \sum_{i=1}^{n} y_i = 3,9662 \\ \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 108,7717;\ \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = 15,5350 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -0,703655 \quad => \quad a = e^A = 0,49477 \\ b = 0,330589 \end{cases}$$

Đáp số : $y = 0,4948.x^{0,3306}$.

Cách khác : Dùng hồi quy Pwr và gọi kết quả thì cũng được đáp số như trên.

So sánh sự sai khác với Bảng giá trị của hàm tìm được : $y = 0,4948.x^{0,3306}$ là :

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$y = 0,4948x^{0,3306}$	1,0593	1,33214	1,5232	1,6752	1,8035	1,9155	2,0157	2,1066

Bài tập tự luyện chương 4.

Bài 4.1. Dùng đa thức nội suy Lagrange, biểu diễn phân thức hữu tỉ sau thành tổng của các phân thức tối giản :

$A = \frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; $B = \frac{x^2+x-3}{x^3-2x^2-x+2}$; $C = \frac{x^2+6x+1}{(x-1)(x+1)(x-4)(x-6)}$

(**Đáp số** : $A = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{15}{x-2} + \frac{31}{2(x-3)}$; $B =$ ..... ; $C =$ .....)

Bài 4.2. Tìm công thức tính tổng

a) $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ b) $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Đáp số : a)

$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$; $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2$;
$\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3$;
$\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = [2(n+1)+3] - [2n+3] = 2 = \text{const.}$
Lập bảng:

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$
1	1			
		4		
2	5		5	2
		9		
3	14			

Sử dụng công thức nội suy Newton tiến $t = \frac{n-1}{1} = n-1$

$$S_n = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{2}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n+1)$$

b)

$\Delta S_n = (n+1)^3$; $\Delta^2 S_n = 3n^2 + 9n + 7$; $\Delta^3 S_n = 6n + 12$; $\Delta^4 S_n = 6 = \text{const}$

Vậy S_n là đa thức bậc 4.

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$	$\Delta^4 S_n$
1	1				
		8			
2	9		19		
		27		18	6
3	36		37		
		64			
4	100				

Đặt $t = \frac{n-1}{1} = n-1$, theo công thức nội suy Newton lùi ta có:

$$S_n = 1 + 8(n-1) + 19\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 18\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} +$$
$$+6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$$

Bài 4.3 Từ bảng số liệu sau tìm số học sinh bị điểm kém hơn 4,5 (thang điểm 10).

Điểm	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8
Số học sinh	31	42	51	35	31

HD : Tính gần đúng $f(4{,}5)$ từ hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng

x	4	5	6	7	8
$f(x)$	31	73	124	159	190

Bài 4.4. Áp dụng *phương pháp nội suy*, tìm số liệu còn thiếu trong bảng sau:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	?	81

Bài 4.5. Số dân của một thành phố trong các đợt điều tra dân số 10 năm một lần được thống kê trong bảng sau :

Năm : x	1891	1901	1911	1921	1931
Số dân : y (nghìn dân)	46	66	81	93	101

Hãy xác định số dân của thành phố năm 1895 và năm 1925.

Bài 4.6. Biết $\cos x$ tại các mốc $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$. Hãy ước lượng $\cos\frac{\pi}{12}$ và sai số của nó.

Bài 4.7. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	0	2	2,5	3	4
y	0	10	? ? ?	42	118

a) Tìm *đa thức nội suy Lagrange* của hàm $f(x)$ tại 4 nút đã biết cho bởi bảng trên.
b) Hãy ước lượng giá trị gần đúng *y* còn thiếu trên bảng đó.

Bài 4.8. Cho hàm số $f(x) = \sin x$.

a) Tìm *đa thức nội suy Lagrange* của hàm *f(x)* tại các nút $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}$.
b) Tính gần đúng $\sin\frac{\pi}{10}$ và đánh giá sai số của giá trị gần đúng tìm được.

Bài 4.9. Cho biết giá trị của hàm số $f(x) = e^{\cos(2x+3)}$ tại một số điểm như sau:

x	1	1,5	2
$f(x)$	1,3280	2,6121	2,1253

Sử dụng *đa thức nội suy Newton tiến* của hàm $f(x)$, hãy tính gần đúng đạo hàm $f'(x)$ tại điểm *x = 1,75* dựa vào bảng giá trị trên.

Bài 4.10. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	0	1	2	3
y	5	-11	-15	5

a) Tìm *đa thức nội suy Lagrange* của hàm $f(x)$ tại các nút nội suy cho trong bảng trên.
b) Tính gần đúng giá trị của hàm $f(x)$ tại điểm $x = 0{,}5$.

Bài 4.11. Theo dõi ảnh hưởng tiêu cực của lượng chất độc X trong nước uống (đơn vị: *mg/dm*^{3}) đến tuổi thọ Y của một loại động vật (đơn vị: *tháng*) ta có bảng sau:

X (mg/dm^3*)*	1	2	3	4	5
Y (tháng)	36	31	26	20	13

a) Bằng *phương pháp bình phương bé nhất*, tìm công thức thực nghiệm của *Y* có dạng $Y = a + b.X + c.X^2$.
b) Từ câu a), nếu lượng chất độc $X = 6$ *mg/dm*^{3} thì tuổi thọ *Y* của động vật này là bao nhiêu?

Bài 4.12. Thống kê năng suất *y* của một loại cây trồng (đơn vị: *tạ/ha*) và lượng tiền đầu tư *x* cho cải tạo đất (*triệu đồng/ha*) tại tỉnh A trong 4 năm liên tiếp ta được bảng số liệu sau:

x (triệu đồng/ha)	2	3	3,5	4
y (tạ/ha)	20	22	23	25

a) Coi $y = f(x)$. Tìm *đa thức nội suy Newton lùi* xuất phát từ nút $x_3 = 4$ của hàm $f(x)$.
b) Hãy cho biết nếu đầu tư 4,5 triệu đồng/ha cho việc cải tạo đất thì năng suất của cây trồng này đạt bao nhiêu *tạ/ha*?

Bài 4.13. Biết hai đại lượng *x*, *y* có quan hệ hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau:

x	0	1	2	3	4
y	0	2	14	???	92

a) Tìm *đa thức nội suy Newton tiến* của hàm $f(x)$ tại 4 nút nội suy đã biết ở bảng trên.
b) Từ đa thức nội suy vừa tìm được của hàm $f(x)$ hãy tìm số liệu còn thiếu ở bảng trên.

Chương 5. Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định

§1. Tính gần đúng đạo hàm

1.1 Đặt vấn đề

Bài toán : Cần tính gần đúng đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ cho dưới dạng bảng trên $[a;b]$ tại một điểm $\bar{x}$ nào đó.

PP: Thay hàm $f(x)$ trên $[a;b]$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và lấy: $f'(\bar{x}) \approx [P_n(x)]'_{x=\bar{x}}$.

Sai số của đạo hàm là : $|r_n(\bar{x})| = |f'(\bar{x}) - P_n'(\bar{x})| = |R_n'(\bar{x})|$, với $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

1.2 Công thức tính gần đúng của đạo hàm cấp một trong hai TH đặc biệt.

TH1: Biết hai nút nội suy x_0; x_1.

Đổi biến số $x = x_0 + t.h$ $(h = x_1 - x_0)$ hay $t = \frac{x-x_0}{h}$ => $t_x' = \frac{1}{h}$.

Ta có : $P_1(t) = y_0 + t.\Delta y_0$.

Lấy đạo hàm theo biến x => $f_x'(x) \approx P_1'(t)_x = (y_0 + t.\Delta y_0)_t'.t_x'$.

Suy ra $f_x' \cong \frac{\Delta y_0}{h}$. Vậy: $f'(x_0) = f'(x_1) \cong \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

TH2: Biết ba nút nội suy $x_0; x_1; x_2$ cách đều nhau

$$(x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h \quad \text{hay} \quad h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1).$$

Đổi biến số như TH1, $t = \frac{x-x_0}{h}$. Ta có : $P_2(t) = y_0 + t.\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}.\Delta^2 y_0$

Suy ra : $$f_x'(x) \approx P_2'(t)_x = \left(y_0 + t.\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}.\Delta^2 y_0\right)_t'.t_x' = \frac{\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0}{h} = g(t).$$

Vậy: $$f'(x_0) = g(0) = \frac{2\Delta y_0 - \Delta^2 y_0}{2h} = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h};$$

$$f'(x_1) \cong g(1) = \frac{2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0}{2h} = \frac{y_2 - y_0}{2h};$$

$$f'(x_2) \cong g(2) = \frac{2\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0}{2h} = \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}.$$

Chú ý: Tổng quát ta có công thức tính gần đúng đạo hàm của hàm $f(x)$ tại điểm $\bar{x}$ trong trường hợp các mốc nội suy cách đều là :

$$f_x'(\bar{x}) \cong \left.\frac{\partial(P_n(x))}{\partial x}\right]_{x=\bar{x}} = \left.\frac{\partial(P_n(t))}{\partial t}.\frac{1}{h}\right]_{t=\frac{\bar{x}-x_0}{h}} \quad \text{với} \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{h}\ ;\ x = x_0 + t.h\ .$$

Ví dụ 1.2.1: Tính gần đúng $y'(1)$ của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng giá trị:

x	0,98	1,00	1,02
y	0,7739332	0,7651977	0,7563321

Giải. Bài toán có dạng tính gần đúng đạo hàm trong TH biết 3 nút nội suy cách đều, h = 0,02.

Áp dụng công thức : $f'(1) = f'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} = \frac{0,7563321 - 0,7739332}{2.0,02} = -0,4400275.$

Ví dụ 1.2.2: Tính gần đúng giá trị đạo hàm $y'(2,2);\ y'(2,4);\ y'(2,5)$ của hàm cho bởi bảng :

x	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,772	2,635	2,000	1,094

Giải. Đa thức nội suy Newton tiến của hàm $f(x)$ với 4 nút nội suy đã cho là:

$$P_3(t) = y_0 + t.\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}.\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{6}.\Delta^3 y_0.$$

Suy ra $\quad f'_x(x) \cong [P_3(t)]'_x = [P_3(t)]'_t.t'_x = \left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}.\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0\right).\frac{1}{h}$

Tính các hiệu hữu hạn:

$$\Delta y_0 = 0,863;\ \Delta^2 y_0 = -1,498;\ \Delta^3 y_0 = -0,271 - (-1,498) = 1,227.$$

Có $\quad x_0 = 2,2;\ h = 0,1\ ;\ t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-2,2}{0,1}.$

Vậy : $\quad y'(2,2) \cong P_3'(t)|_{t=0} = \frac{\Delta y_0 - \frac{1}{2}.\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0}{h} = \frac{0,863 - \frac{1}{2}(-1,498) + \frac{1}{3}1,227}{0,1} = 20,21\ .$

$$y'(2,4) \cong P_3'(t)|_{t=2} = \frac{\Delta y_0 + \frac{3}{2}.\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0}{h} = \frac{0,863 + \frac{3}{2}(-1,498) + \frac{1}{3}1,227}{0,1} = -9,75\ .$$

$$y'(2,5) \cong P_3'(t)|_{t=3} = \frac{\Delta y_0 + \frac{5}{2}.\Delta^2 y_0 + \frac{11}{6}\Delta^3 y_0}{h} = \frac{0,863 + \frac{5}{2}(-1,498) + \frac{11}{6}1,227}{0,1} = -6,325\ .$$

§2. Tính gần đúng tích phân xác định

2.1. Đặt vấn đề

Cần tính tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ cho bằng bảng, hoặc trong trường hợp nguyên hàm của hàm $f(x)$ không thể biểu diễn bằng hàm số sơ cấp.

Phương pháp: Thay hàm $f(x)$ trên $[a; b]$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và xem $\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx.$ (***Lưu ý:*** đoạn $[a; b]$ càng nhỏ thì xấp xỉ càng chính xác).

2.2. Công thức hình thang và sai số

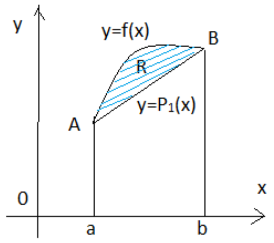
- **TH1:** Trên $[a; b]$ xét hai nút nội suy là $x_0 = a,\ x_1 = b.$

Đổi biến $= a + t.h$ với $h = b - a$. Có $dx = h.dt$ và $P_1(x) = y_0 + t\Delta y_o$.

Đổi cận => $\quad I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_1(x)dx = \int_0^1 (y_0 + t\Delta y_o)hdt$

$$= h\left(ty_0 + \frac{t^2}{2}\Delta y_o\right)\Big|_0^1 = h\left(y_0 + \frac{\Delta y_o}{2}\right) = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \quad (= I^*) \quad (*)$$

Sai số mắc phải là $\quad |I - I^*| \le \frac{M_2.h^3}{12}$, với $h = b - a$ và $M_2 = \max_{x\in[a;b]}|f''(x)|.$



Ý nghĩa hình học: Diện tích của hình thang cong $a\widehat{AB}b$ được tính xấp xỉ bằng diện tích của hình thang thẳng aABb. (Sai số là phần gạch chéo)

- **TH2:** TH tổng quát, chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn bằng nhau $[x_0;x_1];\dots;[x_{n-1};x_n]$ với *n+1* nút nội suy cách đều :

$$x_0 = a;\ x_1 = a + h;\ x_2 = a + 2h;\ \dots;\ x_n = a + n.h = b,\ \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

Áp dụng (*) trên từng đoạn $[x_i;x_{i+1}]$ ta có:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\approx \frac{h}{2}.[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + \cdots y_{n-1})] \qquad (= I^*)$$

Sai số mắc phải là $|I - I^*| \le \frac{n.M_2.h^3}{12}$, với $h = \frac{b-a}{n}$ và $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]}|f''(x)|$.

Ví dụ 2.2.3: Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 x.e^{-x}dx$ theo công thức hình thang với đoạn [0;1] được chia thành 4 đoạn bằng nhau. Đánh giá sai số. (Ghi kết quả với 4 chữ số sau thập phân).

Giải. Có $f(x) = x.e^{-x}$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$, $n = 4$ và $h = \frac{1}{4}$, bảng giá trị là:

Sử dụng máy tính FX 500-MS : Fix-4; $0 \to X$; Lặp: $X + \frac{1}{4} \to X$; $X.e^{-X} \to A\ (B,C,D)$

x	*0*	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$y = x.e^{-x}$	0	0,1947 (A)	0,3033 (B)	0,3543 (C)	0,3679 (D)

Áp dụng công thức hình thang có:

$$I = \int_0^1 x.e^{-x}dx \approx h.\left(\frac{y_0+y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{0+D}{2} + A + B + C\right) = 0{,}2509.$$

Sai số là: $|I - I^*| \le \frac{nM_2.h^3}{12}$, với $M_2 = \max_{[0;1]}|f''(x)| = \max_{[0;1]}|(x-2).e^{-x}| = 2.$

Vậy $|I - I^*| \le \frac{4.2.0{,}25^3}{12} \cong 0{,}01.$

2.3. Công thức Simson (Công thức Parabol) và sai số.

- **TH1:** Chia đoạn $[a;b]$ thành *2* đoạn bằng nhau với 3 nút cách đều là :

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h = b \quad \text{với} \quad h = \frac{b-a}{2}.$$

Đổi biến : $x = a + t.h$ với $h = \frac{b-a}{2}$.

Có $dx = h.dt$ và $P_2(x) = y_0 + t.\Delta y_o + t(t-1).\frac{\Delta^2 y_o}{2}$

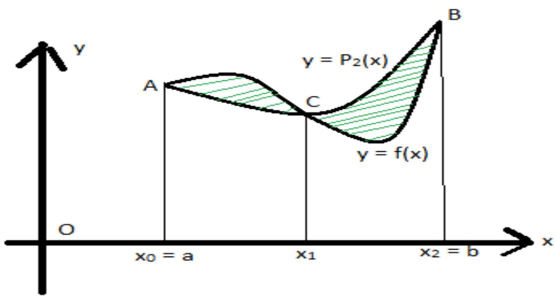
Đổi cận => $I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_2(x)dx = \int_0^2 \left(y_0 + t.\Delta y_o + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_o\right).hdt =$

$$= h\left(t.y_0 + \frac{t^2}{2}.\Delta y_o + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right).\frac{\Delta^2 y_o}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$= h\left(2y_0 + 2\Delta y_o + \frac{1}{3}\Delta^2 y_o\right) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (**)$$

Sai số mắc phải là $|I - I^*| \le \frac{M_4 h^5}{90}$, với $h = \frac{b-a}{2}$ và $M_4 = \max_{x\in[a;b]}|f^{(4)}(x)|$.

Ý nghĩa hình học: Diện tích của hình thang cong $a\widehat{AB}b$ được tính xấp xỉ bằng diện tích của hình thang cong a$\widehat{ACB}$b, ở đây cung cong *y = f(x)* được thay bằng cung parabol *y = P₂(x)* đi qua ba điểm *A*, *C*, *B* (Sai số là hiệu các phần gạch chéo).



- **TH2:** Chia đoạn $[a;b]$ thành *n* đoạn (*n* chẵn) với *n+1* nút nội suy cách đều nhau :

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h, \dots,\ x_n = a + n.h = b \quad \text{với} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Đổi biến số $x = a + t.h$ và áp dụng (**) trên $\frac{n}{2}$ đoạn $[x_i; x_{i+1}]$, $i \ge 0$. Ta có:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx =$$

$$\approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] .$$

Sai số mắc phải là: $|I - I^*| \le \frac{n.M_4.h^5}{180}$, với $h = \frac{b-a}{n}$ và $M_4 = \max_{x\in[a;b]}|f^{(4)}(x)|$.

Ví dụ 2.3.1. Tính gần đúng tích phân sau theo công thức Simson bằng cách chia [0,5;1,5] thành 8 đoạn bằng nhau : $I = \int_{0,5}^{1.5} \frac{\sin x}{x} dx$.

Giải. Có $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0{,}5;\ n = 8;\ h = \frac{1{,}5-0{,}5}{8} = 0{,}125.$

Bảng giá trị (Chọn đơn vị đo góc Radian; $0{,}5 \to X$; *Lặp:* $X + 0{,}125 \to X, \frac{\sin X}{X} \to A$ ...):

x	0,5	0,625	0,75	0,875	1	1,125	1,25	1,375	1,5
$y = \frac{\sin x}{x}$	0,9589 (A)	0,9362 (B)	0,9089 (C)	0,8772 (D)	0,8415 (E)	0,8020 (F)	0,7592 (X)	0,7134 (Y)	0,6650 (M)

Theo công thức Simson : $I = \int_{0,5}^{1.5} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] = \frac{0{,}125}{3}.[(A + M) + 4.(B + D + F + Y) + 2(C + E + X)] = 0{,}8316.$

Ví dụ 2.3.2: Cho $f(x) = \int_1^x t.\ln t\,.dt$. Tính gần đúng giá trị $f(2)$ với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$

Giải. Áp dụng công thức hình thang

$$f(2) = \int_1^2 x\ln x\,.dx \cong h.\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) \ (= I^*),$$

với $g(x) = x.\ln x$ hay $y_i = g(x_i)$.

Với sai số là : $|f(2) - I^*| \le \frac{n.M_2h^3}{12} = \frac{M_2.(b-a)^3}{12n^2}$,

$M_2 = \max_{[1;2]}|g''(x)| = \max_{[1;2]}\left\{\left|\frac{1}{x}\right|\right\} = 1.$

Để đạt độ chính xác 10^{-3} thì $\frac{1.(2-1)^3}{12n^2} \le 10^{-3}$ => $n \ge \sqrt{\frac{1000}{12}} = 9{,}13.$

Vậy cần chia đoạn $[1;2]$ thành ít nhất 10 đoạn $(n = 10)$ với $x_0 = 1;\ x_{10} = 2;\ h = 0{,}1.$

Ta có bảng giá trị: $(X = 1;$ Lặp : $X + 0{,}1 \to X\ ,\ X.\ln X \to A\ \ ...)$

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$y = x.\ln x$	0	0,1048 (A)	0,2188 (B)	0,3411 (C)	0,4711 (D)	0,6082 (E)	0,7520 (F)	0,9021 (X)	1,0580 (Y)	1,2195 (M)	1,3863 (Ans)

Vậy $f(2) \approx h.\left(\frac{y_0+y_{10}}{2} + y_1 + \cdots y_9\right) = 0{,}1.\left(\frac{0+Ans}{2} + A + B + \cdots + M\right) = 0{,}6369.$

So sánh với giá trị đúng: $f(2) = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 0{,}6363.$

Chú ý: Nếu dùng công thức Simson thì $|I - I^*| \le \frac{n.M_4.h^5}{180} \le \frac{M_4.(b-a)^5}{180n^4} \le 10^{-3}$

=> $n \ge 1{,}5$. Vậy cần chia $[1;2]$ thành 2 đoạn (n = 2) với $x_0 = 1;\ x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 2.$

Ta có $f(2) \approx \frac{h}{3}.(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{0{,}5}{3}.(0 + 4.0{,}6082 + 1{,}3863) = 0{,}6365.$

Ví dụ 2.3.3. Dùng công thức hình thang tổng quát hoặc công thức Simson tính gần đúng tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, với n = 10. So sánh với kết quả tính bằng công thức Newton-Leibnitz.

Giải.

Có $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x_0 = 0$; $x_n = 1$; $h = \frac{x_n - x_0}{n} = 0{,}1.$ Ta có bảng giá trị:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1	0,9901 (A)	0,9615 (B)	0,9174 (C)	0,8621 (D)	0,8 (E)	0,7353 (F)	0,6711 (X)	0,6098 (Y)	0,5521 (M)	0,5 (Ans)

- Áp dụng công thức hình thang:

$$I_T \approx h.\left(\frac{y_0+y_{10}}{2} + y_1 + \cdots + y_9\right) = 0{,}1.\left(\frac{1+0{,}5}{2} + A + \cdots + M\right) = 0{,}7850.$$

- Áp dụng công thức Simson:

$$I_S \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_8)] =$$
$$= \frac{0,1}{3}[1,5 + 4(A + C + E + X + M) + 2(B + D + F + Y)] = 0,7854\ .$$

- Áp dụng công thức Newton-Leibnitz:

$$I = (\arctan x)|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 \approx 0,7854.$$

Ví dụ 2.3.4: Dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ hướng dọc theo trục x, một chất điểm chuyển động dọc theo trục x từ $x = 0$ đến $x = 4$. Hãy tính bằng công thức hình thang tổng quát hoặc công thức Simson công A của lực $\vec{F}$. Biết bảng giá trị của modul lực $\vec{F}$:

x	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*
F	*1,5*	*0,75* *(A)*	*0,5* *(B)*	*0,75* *(C)*	*1,5* *(D)*	*2,75* *(E)*	*4,5* *(F)*	*6,75* *(X)*	*10*

Giải. Công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức : $A = \int_0^4 F(x).dx$,

- Áp dụng công thức hình thang $n = 8$; $h = 0,5$:

$$I_T \approx h.\left(\frac{y_0+y_8}{2} + y_1 + \cdots + y_7\right) = 0,5.\left(\frac{1,5+10}{2} + A + \cdots + X\right) = 11,625.$$

- Áp dụng công thức Simson $n = 8;$ $h = 0,5$:

$$I_S \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]$$
$$= \frac{0,5}{3}[(1,5 + 10) + 4(A + C + E + X) + 2(B + D + F)] = 11,4167\ .$$

Bài tập tự luyện chương 5.

Bài 5.1. Tính các tích phân sau theo công thức hình thang bằng cách chia đoạn lấy tích phân thành 5 đoạn bằng nhau:

(1) $\int_0^1 x^x dx$ **(2)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$ **(3)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx$

Bài 5.2. Tìm $f'(x)$ tại $x = 0{,}1$ từ bảng sau:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	1,0000	0,9975	0,9900	0,9776	0,9604

Bài 5.3. Tính gần đúng $I = \int_{2,1}^{3,1} \frac{x^3}{x-1} dx$ theo công thức hình thang và Simson tổng quát thì cần chia $[2{,}1\,;3{,}1]$ ít nhất thành bao nhiêu đoạn bằng nhau để đạt được độ chính xác 10^{-4}.
(**Đ**S: $n_T = 55,\ n_S = 6$). Hướng dẫn: Xem **Ví dụ trang 60.**

Bài 5.4. Vận tốc của một ôtô (chạy trên đường thẳng) tại những thời điểm khác nhau được cho trong bảng sau :

Thời gian x (phút)	0	2	4	6	8	10	12
Vận tốc v(x) (km/h)	0	22	30	27	18	7	0

Dùng công thức Simson tổng quát, tính gần đúng quãng đường ôtô đi được trong khoảng thời gian trên.

ĐS : $S = \int_0^{12} v(x)dx \cong 3\frac{5}{9} km.$

Bài 5.5. Biết bảng giá trị của hàm $y = \sin x$ như sau :

x	1	1,1	1,2	1,3
$y = \sin x$	0,84147	0,89121	0,93204	0,96356

Tính gần đúng đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm $x = 1$.

Bài 5.6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi bảng sau:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	1	1,04	1,17	1,43	1,90	2,72	4,22	7,10	12,94	25,53	54,60

Áp dụng *công thức Simpson tổng quát*, tính gần đúng tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.

Bài 5.7. Vận tốc *V* (tính bằng *km/h*) của một ca nô chạy trên đường thẳng tại những thời điểm *x* khác nhau (tính bằng giờ) được cho trong bảng sau:

$x\ \ (h)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$V(x)\ \ (km/h)$	0	0,122	2,493	3,123	2,022	1,023	2,543	2,124	1,206

Biết quãng đường S ca nô đi được trong khoảng thời gian $[0;b]$ được tính theo công thức:

$$S = \int_0^b V(x)dx.$$

Dùng *công thức Simson tổng quát*, tính gần đúng quãng đường S ca nô đi được trong khoảng thời gian từ *0h* đến *1,6h*.

Bài 5.8. Biết quãng đường *S* (tính bằng mét) tại những thời điểm *x* khác nhau (tính bằng giây) của chất điểm *A* cho bởi bảng giá trị sau:

x	0	0,2	0,4	0,6
$S(x)$	0	0,122	0,493	1,123

a) Tìm *đa thức nội suy Newton tiến* của hàm *S(x)* tại 4 điểm trên.
b) Biết *v(x) = S'(x).* Tính gần đúng vận tốc *v* của chất điểm *A* tại thời điểm *x = 0,4* giây.

Bài 5.9. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx$.

a) Áp dụng *công thức hình thang* tính gần đúng tích phân *I* bằng cách chia *[0;1]* thành *8* đoạn bằng nhau.
b) Tính sai số của kết quả nhận được

Bài 5.10. Cho tích phân $I = \int_0^1 xe^x dx$.

a) Áp dụng công thức hình thang tổng quát để tính gần đúng tích phân *I*, để kết quả đạt độ chính xác 10^{-3} thì cần chia đoạn [1;2] thành bao nhiêu đoạn con bằng nhau?
b) Tính gần đúng tích phân đó .

Bài 5.11. Biết quãng đường *S* (tính bằng mét) tại những thời điểm *x* khác nhau (tính bằng giây) của chất điểm *A* cho bởi bảng giá trị sau:

x (giây)	0	2	4	6
$S(x)$ (mét)	0	14	92	282

a) Tìm *đa thức nội suy Newton tiến* của hàm S(x) tại 4 nút trên.
b) Biết $v(x) = S'(x)$. Tính gần đúng vận tốc *v* của chất điểm *A* tại thời điểm *x = 5* giây.

Bài 5.12. Cho hàm số *y = f(x)* xác định bởi bảng sau:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	1	1,04	1,17	1,43	1,90	2,72	4,22	7,10	12,94	25,53	54,60

Áp dụng *công thức Simpson tổng quát*, tính gần đúng tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.

Bài 5.13. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

a) Áp dụng công thức hình thang tổng quát để tính gần đúng tích phân *I*, để kết quả đạt độ chính xác 10^{-3} thì cần chia đoạn [1;2] thành bao nhiêu đoạn con bằng nhau?
b) Tính gần đúng tích phân đó .

Chương 6. Giải gần đúng phương trình vi phân thường.

§1. Đặt vấn đề.

1.1 Bài toán 1 (Bài toán Côsi đối với PTVP cấp 1)

Tìm nghiệm $y = y(x)$ của PTVP :

$$(I) \quad y' = f(x, y), \text{ với } x \in [x_0; X] \quad \text{thoả mãn :} \qquad y(x_0) = \alpha \quad (*)$$

trong đó x_0, X, α là những số thực đã cho; $f(x, y)$ là một hàm số đã biết của hai biến *x, y*.

(Điều kiện (*) được gọi là điều kiện ban đầu của bài toán Côsi).

1.2 Bài toán 2 (Bài toán Côsi đối với hệ PTVP cấp 1).

Tìm véctơ nghiệm $\begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \\ \quad \dots \\ y_n = y_n(x) \end{cases}$ của hệ : $(II) \begin{cases} y_1{}' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2{}' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \dots \dots \\ y_n{}' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$ với $x \in [x_0; X]$

thoả mãn điều kiện ban đầu: $\begin{cases} y_1(x_0) = \alpha_1 \\ y_2(x_0) = \alpha_2 \\ \quad \dots \\ y_n(x_0) = \alpha_n \end{cases}$

trong đó x_0, X và $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ đã cho ; các hàm $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$ là những hàm số đã biết đối với các biến $x, y_1, \dots, y_n$.

1.3 Bài toán 3 (Bài toán Côsi đối với PTVP cấp n):

Tìm nghiệm $y = y(x)$ của PTVP cấp *n:*

$$(III): \quad y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \text{ với } x \in [x_0; X], \text{ thoả mãn: } \begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \quad \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

trong đó x_0, X và $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$; $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ là một hàm số đã biết với *n+1* biến $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

PP giải Bài toán 1 và Bài toán 3: Có thể tìm nghiệm $y = y(x)$ của PT(I) hoặc PT(III) cho dưới dạng bảng số. Tức tìm giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng $y = y(x)$ tại các điểm chia $x_0, x_1, \dots, x_n = X$ của đoạn $[x_0; X]$ với khoảng cách *h* đã biết : $\left(x_k - x_{k-1} = h \left(= \frac{X - x_0}{n}\right)\right)$.

§2. Các phương pháp giải Bài toán 1.

Bài toán: Giải gần đúng PT: $y' = f(x, y)$ trên $[x_0; X]$, thỏa $y(x_0) = \alpha$, với khoảng cách *h* đã biết.

2.1. Phương pháp Ơle :

Công thức Ơle : Các giá trị : $y_k = y(x_k)$ của nghiệm đúng $y = y(x)$ được xác định xấp xỉ như sau:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \quad (= \alpha)\ ; \quad n = \frac{X - x_0}{h} \\ x_k = x_{k-1} + h \qquad , \quad k = \overline{1,n} \\ y_k = y_{k-1} + h.f(x_{k-1}; y_{k-1}) \end{cases}$$

- Người ta đã chứng minh được: sai số của PP Ơle tại điểm x_k là :

$$|y_k - y(x_k)| \le M.h \qquad \text{(Với } M \text{ là hằng số dương không phụ thuộc } h\text{).}$$

Công thức Ơle cải tiến :

Các giá trị $y_k^{(m)}$ được tính để hiệu chỉnh dần giá trị y_k theo công thức sau**:**

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \quad ; \quad x_k = x_{k-1} + h \ ; \quad n = \dfrac{X - x_0}{h} \\ \text{(Khởi tạo)} \ \ y_k^{(0)} = y_{k-1} + h.f(x_{k-1}, y_{k-1})\,, \qquad\qquad (k = \overline{1,n}) \\ \text{(Lặp)}\ m \ge 1 \ \ thì \ \ y_k^{(m)} = y_k + \dfrac{h}{2}.\left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f\left(x_k, y_k^{(m-1)}\right)\right] \quad (*) \end{cases}$$

Lặp (*) dừng khi $y_k^{(m)}$ và $y_k^{(m-1)}$ trùng nhau đến mức đòi hỏi, hay $y_k^{(m)}$ đạt độ chính xác cho phép. Diễn giải (*) hiệu chỉnh y_1:

$$y_1^{(0)} = y_0 + h.f(x_0, y_0) \ \ ; \ \ y_1^{(1)} = y_0 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right] \quad ;$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right] \ \ ;$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_2, y_1^{(2)}\right)\right] \quad \ldots.$$

sau khi tính xong y_1 thì hiệu chỉnh y_2 … ; cứ như vậy hiệu chỉnh y_n như sau:

$$y_n^{(1)} = y_{n-1} + \tfrac{h}{2}.\left[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f\left(x_n, y_n^{(0)}\right)\right] \quad ;$$

$$y_n^{(2)} = y_{n-1} + \tfrac{h}{2}.\left[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f\left(x_n, y_n^{(1)}\right)\right] \quad \ldots$$

- Sai số của PP Ơle cải tiến tại điểm x_k là : $|y_k - y(x_k)| \le M.h^2$

(Với M là hằng số dương không phụ thuộc h).

Chú ý: Thực tế quá trình lặp (*) dừng lại khi hai giá trị gần đúng liên tiếp $y_k^{(m)}$ và $y_k^{(m-1)}$ trùng nhau đến mức đòi hỏi.

Khi đó lấy $y_k = \overline{y_k}$ với $\overline{y_k}$ là phần chung của $y_k^{(m)}$ và $y_k^{(m-1)}$.

2.2. Phương pháp Runge-Kutta (ĐỌC THÊM).

Công thức Runge-Kutta có độ chính xác cấp 2 :

$$(\boldsymbol{I})\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ x_{i+1} = x_i + h \ ;\ h = \frac{X - x_0}{n} \\ y_{i+1} = y_i + k_2^{(i)} \\ k_1^{(i)} = h.f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h.f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \end{cases} \quad \text{Hoặc } (\boldsymbol{II})\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ x_{i+1} = x_i + h\ ;\ h = \frac{X - x_0}{n} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}.\left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} = h.f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h.f\left(x_{i+1}, y_i + k_1^{(i)}\right) \end{cases} \ (i = \overline{0, n-1})$$

Công thức Runge-Kutta có độ chính xác cấp 3 :

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ x_{i+1} = x_i + h \quad ;\ h = \dfrac{X - x_0}{n} \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}.\left(k_1^{(i)} + 4k_2^{(i)} + k_3^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} = h.f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h.f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = h.f\left(x_{i+1}, y_i - k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)}\right) \end{cases} \quad (i = \overline{0, n-1})$$

Công thức Runge-Kutta có độ chính xác cấp 4 :

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ x_{i+1} = x_i + h\ ;\ h = \dfrac{X - x_0}{n} \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}.\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} = h.f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h.f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = h.f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} = h.f\left(x_{i+1}, y_i + k_3^{(i)}\right) \end{cases} \quad (i = \overline{0, n-1})$$

Chú ý : Sai số của PP Runge-Kutta tại điểm x_i là $|y_i - y(x_i)| \leq M.h^4$ (Với M là hằng số dương không phụ thuộc h). Đánh giá này chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết, vì việc xác định M quá phức tạp.

Trong thực hành, người ta thường xác định gần đúng sai số bằng cách "tính hai lần": lần đầu xác định y_n với bước nhảy h nhận được giá trị gần đúng $y_n(h)$, sau đó xác định y_n cũng theo công thức đó nhưng với bước nhảy $\frac{h}{2}$ nhận được giá trị gần đúng $y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$.

Khi đó sai số được xác định bởi : $\left|y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - y(X)\right| \approx \frac{1}{15}\left|y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - y_n(h)\right|$.

Ví dụ 2.1.1: Cho bài toán Côsi $y' = y^2 - x^2$ với $y(1) = 1$.
Hãy tìm nghiệm gần đúng bằng PP Ơle trên [1;2] chọn bước h = 0,1.

Giải. Các giá trị $y_k = y(x_k)$ của nghiệm đúng $y = y(x)$ được xác định xấp xỉ như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1\ ;\ y_0 = y(1) = 1 \\ h = 0{,}1\ ;\ X = 2;\ f(x,y) = y^2 - x^2 \\ x_k = x_{k-1} + h \quad \text{với} \quad k = \overline{1,n} \\ y_k = y_{k-1} + h.f(x_{k-1}; y_{k-1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1\ ;\ y_0 = y(1) = 1\ ;\ n = \dfrac{X - x_0}{h} = 10 \\ x_k = x_{k-1} + 0{,}1 \quad \text{với} \quad k = \overline{1,10} \\ y_k = y_{k-1} + 0{,}1.(y_{k-1}^2 - x_{k-1}^2) \end{cases}$$

B1 : Khởi tạo $\begin{cases} 1 \to X & (\text{Lưu } x_0) \\ 1 \to Y & (\text{Lưu } y_0) \end{cases}$ ***B2 (Lặp) :*** $\begin{cases} Y + 0{,}1.(Y^2 - X^2) \to Y & (\text{Tính } y_k) \\ X + 0{,}1 \to X & (\text{Tính } x_k) \end{cases}$

Dừng sau 10 bước lặp. Sử dụng máy tính **FX 500-MS** ta có bảng giá trị xấp xỉ của nghiệm đúng $y = y(x)$ của PT đã cho như sau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_k	1	1	0,9790	0,9308	0,8485	0,7245	0,5520	0,3264	0,0481	−0,2757	−0,6291

Ví dụ 2.1.2 : Dùng PP Ơle cải tiến, tính đến độ chính xác với 4 chữ số lẻ thập phân giống nhau giá trị của $y(0{,}1)$ của nghiệm bài toán Côsi : $y' = x + y$ thỏa $y(0) = 1$. Chọn bước $h = 0{,}05$. So sánh với kết quả đúng.

Giải. Có: $x_0 = 0;\ h = 0{,}05\ ;\ f(x,y) = x + y$. Công thức Ơle cải tiến là :

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \quad ; \quad x_k = x_{k-1} + h \ ; \quad h = \frac{X - x_0}{n} \\ (\text{Khởi tạo}) \ \ y_k^{(0)} = y_{k-1} + h.f(x_{k-1}, y_{k-1})\,, \qquad (k = \overline{1,n}) \\ (\text{Lặp})\ m \geq 1 \ \ thì \ \ y_k^{(m)} = y_k + \frac{h}{2}.\left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f\left(x_k, y_k^{(m-1)}\right)\right] \quad (*) \end{cases}$$

- Công thức lặp hiệu chỉnh tính $y_1 = y(0{,}05)$ như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 0;\ y_0 = y(0) = 1\ ;\ \ h = 0{,}05 \\ (\text{Khởi tạo})\ \ y_1^{(0)} = y_0 + h.(x_0 + y_0)\ ;\ \ x_1 = x_0 + h \\ (\text{Lặp})\ \ m \geq 1\ thì \ \ y_1^{(m)} = y_0 + \frac{h}{2}.\left[(x_0 + y_0) + \left(x_1 + y_1^{(m-1)}\right)\right] \quad (*) \end{cases}$$

Cụ thể : $x_1 = x_0 + h\ ;\quad y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}.\left[(x_0 + y_0) + \left(x_1 + y_1^{(0)}\right)\right]$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}.\left[(x_0 + y_0) + \left(x_1 + y_1^{(1)}\right)\right]$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2}.\left[(x_0 + y_0) + \left(x_1 + y_1^{(2)}\right)\right] \ \ldots$$

Sử dụng máy tính **FX 500-MS :** (FIX-4)

Bước1: (Khởi tạo) $\begin{cases} 0 \to X & (\text{Lưu } x_0) \\ 1 \to A & (\text{Lưu } y_0) \\ 0{,}05 \to C & (\text{Lưu } h) \\ A + C(X + A) \to Y & \left(\text{Tính } \ y_1^{(0)}\right) \end{cases}$

Bước 2 : (Lặp) $A + \frac{C}{2}.[(X + A) + (X + C + Y)] \to Y \ \left(\text{Tính } y_1^{(m)}\right)$

Các giá trị hiệu chỉnh của y_1 như sau (y_1 chính xác với 4 chữ số thập phân khi $m = 3$) :

m	0	1	2	3
$y_1^{(m)}$	1,0500	1,0525	1,0526	1,0526

- Công thức lặp hiệu chỉnh tính $y_2 = y(0,1)$như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 0,05;\ y_1 = 1,0526\,; h = 0,05\,; x_k = x_{k-1} + h; f(x,y) = x + y. \\ \text{(Khởi tạo)}\ \ y_2^{(0)} = y_1 + h.f(x_1, y_1) \\ \text{(Lặp)}\ \ m \ge 1\ thì\ \ y_2^{(m)} = y_1 + \dfrac{h}{2}.\left[f(x_1,y_1) + f\left(x_1 + h, y_2^{(m-1)}\right)\right]\ \ (*), \end{cases}$$

Tính toán tương tự như hiệu chỉnh y_1. Có :

Bước 1 : (Khởi tạo)
$$\begin{cases} 0,05 \to X \quad (\text{Lưu } x_1) \\ 1,0526 \to A \quad (\text{Lưu } y_1) \\ 0,05 \to C \quad (\text{Lưu } h) \\ A + C(X + A) \to Y\ \left(\text{Tính } y_2^{(0)}\right) \end{cases}$$

Bước 2 : (Lặp) $\quad A + \frac{C}{2}.\left[(X + A) + (X + C + Y)\right] \to Y\ \left(\text{Tính } y_2^{(m)}\right)$

Các giá trị hiệu chỉnh của $y_2 = y(0,1)$ như sau (Dừng khi $m = 2$) :

m	0	1	2
$y_2^{(m)}$	1,1077	1,1104	1,1104

Ví dụ 2.2 : Dùng công thức Runge-Kutta cấp 2 (dạng 2), chọn h = 0,1 tìm trên [1;2] nghiệm gần đúng của phương trình $y' = y^2 - x^2$ với $y(1) = 1$. (ĐỌC THÊM)

Giải. Có $\quad x_0 = 1;\ \ h = 0,1\,;\ \ f(x,y) = y^2 - x^2$

Công thức nghiệm :
$$\begin{cases} y_0 = y(x_0)\ \ ;\ h = \frac{X - x_0}{n} \\ x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}.\left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)}\right),\ \ (i = \overline{0, n-1}) \end{cases}$$

Hay $\qquad (i = \overline{0, n-1})$
$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ k_1^{(i)} = h.f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left[k_1^{(i)} + h.f\left(x_{i+1}, y_i + k_1^{(i)}\right)\right] \end{cases}$$

Bước 1 :
$$\begin{cases} 1 \to X\ \ (\text{Lưu } x_0) \\ 1 \to Y\ \ (\text{Lưu } y_0) \\ 0,1 \to C\ \ (\text{Lưu } h) \end{cases}$$

Bước 2 :
$$\begin{cases} C.(Y^2 - X^2) \to E\ \ \left(\text{Lưu } k_1^{(i)}\right) \\ X + C \to X \quad (\text{Lưu } x_i) \\ Y + \frac{1}{2}\left[E + C((Y + E)^2 - X^2)\right] \to Y \quad (\text{Lưu } y_i) \end{cases}$$

Bảng kết quả tính toán

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_k	1	1	0,9780	0,9274	0,8407	0,7098	0,5273	0,2884	0,0064	−0,3485	−0,7198

2.3. Phương pháp chuỗi Taylor :

Bước 1 : Ta tìm dạng khai triển chuỗi Taylor tại $x = x_0$ của nghiệm gần đúng $y = y(x)$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}.(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}.(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}.(x - x_0)^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}.(x - x_0)^k + \cdots \qquad (*)$$

Bước 2 : Tính các đạo hàm $y'(x_0)$; $y''(x_0)$; .... ; $y^{(k)}(x_0)$; .... như sau :

+) Có $\quad y'(x_0) = f\big(x_0; y(x_0)\big) = f(x_0; \alpha)$.

+) Có $\quad y'' = (y')' = f(x;y)' = f'_x(x;y) + f'_y\big(x; y(x)\big).y'(x)$.

Thay $x = x_0$ có : $\quad y''(x_0) = f'_x(x_0;\alpha) + f'_y(x_0;\alpha).f(x_0;\alpha)$.

+) Tương tự : $\quad y''' = (y'')'; y^{(4)} = (y''')'$; .... Từ đó xác định được chuỗi Taylor (*).

Bước 3 : Khi $x \to x_0$ tức $|\bar{x} - x_0|$ đủ bé thì ta có thể xấp xỉ $\quad y(\bar{x}) \approx S_n(\bar{x})$,
với $S_n(x)$ là đa thức Taylor bậc *n* xác định bởi chuỗi (*).

Ví dụ 2.3.1. Biết $y = y(x)$ là nghiệm của PT: $y' = \frac{y}{x+y}$, $y(1) = 2$.

a) Tìm nghiệm gần đúng của PT trên theo phương pháp Taylor với $n = 3, x_0 = 1$.
b) Tính gần đúng $y(1{,}1)$.

Giải.

a) Có $y'(1) = \frac{y(1)}{1+y(1)} = \frac{2}{3}$.

+) Có $y'' = \left(\frac{y}{x+y}\right)' = \frac{(x+y).y' - y(x+y)'}{(x+y)^2} = \frac{xy'-y}{(x+y)^2} \quad => \quad y''(1) = \frac{1.\frac{2}{3} - 2}{(1+2)^2} = -\frac{4}{27}$.

+) Có $y''' = \left(\frac{xy'-y}{(x+y)^2}\right)' = \frac{(xy'-y)'.(x+y)^2 - (xy'-y).2(x+y).(x+y)'}{(x+y)^4} = \frac{x.y''(x+y) - 2(xy'-y).(1+y')}{(x+y)^3}$

$=> \quad y'''(1) = \frac{\left(-\frac{4}{27}\right).3 - 2\left(1.\frac{2}{3} - 2\right).\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{27} = \frac{4}{27}$.

+) Khi $x \to 1$ thì $y(x) \approx y(1) + \frac{y'(1)}{1!}.(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}.(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}.(x-1)^3$

b) Vậy : $\quad y(1{,}1) \approx 2 + \frac{2}{3}.0{,}1 + \left(-\frac{4}{27}\right).\frac{0{,}1^2}{2!} + \frac{4}{27}.\frac{0{,}1^2}{3!} = 2{,}066$.

§3. Phương pháp giải Bài toán 2 (Trường hợp n = 2, hệ gồm 2 PTVP cấp 1).

Bài toán 2: Tìm véctơ nghiệm $y = y(x)$, $z = z(x)$ của hệ :

(II) $\begin{cases} y' = f_1(x,y,z) \\ z' = f_2(x,y,z) \end{cases}$ với $x \in [x_0; X]$ thoả mãn: $y(x_0) = \alpha_1$; $z(x_0) = \alpha_2$

trong đó $x_0, X, \alpha_1, \alpha_2$ là đã biết; các hàm $f_1(x,y,z)$ *và* $f_2(x,y,z)$ là những hàm số đã biết.

3.1. Công thức Ơle

Các giá trị $y_k = y(x_k)$ và $z_k = z(x_k)$ được xác định với bước h như sau:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0);\ z_0 = z(x_0)\ ;\ h = \frac{X - x_0}{n} \\ x_{k+1} = x_k + \mathrm{h} \\ y_{k+1} = y_k + h.f_1(x_k, y_k, z_k) \\ z_{k+1} = z_k + h.f_2(x_k, y_k, z_k) \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1}) .$$

3.2. Công thức Ơle cải tiến

Các giá trị $y_k^{(m)}, z_k^{(m)}$ được tính để hiệu chỉnh dần y_k, z_k như sau:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0)\,;\ z_0 = z(x_0)\,;\ h = \frac{X-x_0}{n}\,; \\ x_{k+1} = x_k + h \\ \text{(Khởi tạo)}\ \ y_{k+1}^{(0)} = y_k + h.f_1(x_k, y_k, z_k)\,;\ z_{k+1}^{(0)} = z_k + h.f_2(x_k, y_k, z_k) \\ \text{(Lặp)}\ m \geq 1,\ y_{k+1}^{(m)} = y_k + \frac{h}{2}.\left[f_1(x_k, y_k, z_k) + f_1\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(m-1)}, z_{k+1}^{(m-1)}\right)\right] \\ z_{k+1}^{(m)} = z_k + \frac{h}{2}.\left[f_2(x_k, y_k, z_k) + f_2\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(m-1)}, z_{k+1}^{(m-1)}\right)\right] \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1})$$

Ví dụ 3.2.2: Cho hệ PT vi phân cấp 1 :

$$\begin{cases} y' = (z-y)x \\ z' = (z+y)x \end{cases}$$ với $y(0,3) = 1,0004;\ z(0,3) = 1,0604$. Chọn bước h = 0,1.

(1) Hãy tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp Ơle trên [0,3;1].

(2) Hãy tìm nghiệm bằng PP Ơle cải tiến tại $x = 0,4$ (tính đến độ chính xác bốn chữ số lẻ thập phân trùng nhau).

Giải. Có $f_1(x, y, z) = (z-y)x\ ;\ f_2(x, y, z) = (z+y)x$

(1) Ta có $$\begin{cases} y_0 = y(x_0);\ z_0 = z(x_0)\,;\ n = \frac{X-x_0}{h} \\ x_{k+1} = x_k + \mathrm{h} \\ y_{k+1} = y_k + h.f_1(x_k, y_k, z_k) \\ z_{k+1} = z_k + h.f_2(x_k, y_k, z_k) \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1})$$

Cụ thể : $$\begin{cases} x_0 = 0,3\,;\ y_0 = 1,0004\,;\ z_0 = 1,0604\,;\ h = 0,1\,;\ n = \frac{1-0,3}{0,1} = 7 \\ x_1 = x_0 + \mathrm{h}\ ;\ y_1 = y_0 + h.(z_0 - y_0).x_0\,;\ z_1 = z_0 + h.(z_0 + y_0).x_0 \\ x_2 = x_1 + \mathrm{h}\ ;\ y_2 = y_1 + h.(z_1 - y_1).x_1\,;\ z_2 = z_1 + h.(z_1 + y_1).x_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_7 = x_6 + \mathrm{h}\ ;\ y_7 = y_6 + h.(z_6 - y_6).x_6\,;\ z_7 = z_6 + h.(z_6 + y_6).x_6 \end{cases}$$

Bước1 : (Khởi tạo) $$\begin{cases} 0,3 \to X\ \text{(Lưu } x_0) \\ 1,0004 \to Y\ \text{(Lưu } y_0) \\ 1,0604 \to M\ \text{(Lưu } z_0) \end{cases}$$

Bước 2 : (Lặp) $$\begin{cases} Y + 0,1.(M-Y)X \to A & \text{(Tính } y_{k+1}) \\ M + 0,1.(M+Y)X \to M & \text{(Tính } z_{k+1}) \\ A \to Y & \text{(Lưu } y_{i+1}) \\ X + 0,1 \to X & \text{(Tính } x_{i+1}) \end{cases}$$ (Dừng sau $n = 7$ bước lặp)

Bảng kết quả tính toán :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,0004	1,0022	1,0070	1,0170	1,0351	1,0647	1,1101	1,1765
z_k	1,0604	1,1222	1,2072	1,3179	1,4580	1,6325	1,8483	2,1146

(2) Tự giải.

§4. Phương pháp giải Bài toán 3 (Trường hợp *n = 2*, PTVP cấp 2).

Bài toán: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình : $y'' = f(x, y, y')$ với $x \in [x_0; X]$

thoả mãn: $y(x_0) = \alpha_0$; $y'(x_0) = \alpha_1$

trong đó $x_0, X, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$; $f(x, y, y')$ là một hàm số đã biết với 3 biến x, y, y'.

Cách giải: Đặt $z = y'$ đưa PT (3) về hệ dạng (2) gồm hai PTVP cấp 1 là :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \text{ với } x \in [x_0; X] \quad \text{thỏa mãn} \quad \begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ z(x_0) = \alpha_1 \end{cases}$$

Ví dụ: Cho PTVP cấp 2: $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$; với $y(1) = 1{,}77$; $y'(1) = -0{,}44$. Hãy tìm nghiệm gần đúng $y = y(x)$ bằng phương pháp Ơle trên [1;1,5] chọn bước h = 0,1.

Giải. PT đã cho $\Leftrightarrow$ $y'' = -\frac{y'}{x} - y$.

Đặt $z = y'$ ta có hệ $\begin{cases} y' = z \\ z' = -\frac{z}{x} - y \end{cases}$ trên $[1; 1{,}5]$ thỏa $(1) = 1{,}77$; $z(1) = -0{,}44$.

Có $x_0 = 1$; $y_0 = 1{,}77$; $z_0 = -0{,}44$; $h = 0{,}1$; $f_1(x, y, z) = z$; $f_1(x, y, z) = -\frac{z}{x} - y$.

Bước1 : (Khởi tạo) $\begin{cases} 1 \to X & (\text{Lưu } x_0) \\ 1{,}77 \to Y & (\text{Lưu } y_0) \\ -0{,}44 \to M & \text{Lưu } z_0) \end{cases}$

Bước 2 : (Lặp) $\begin{cases} Y + 0{,}1.M \to A & (\text{Tính } y_{k+1}) \\ M + 0{,}1.\left(-\frac{M}{X} - Y\right) \to M & (\text{Tính } z_{k+1}) \\ A \to Y & (\text{Lưu } y_{k+1}) \\ X + 0{,}1 \to X & (\text{Tính } x_{k+1}) \end{cases}$.

Dừng sau $n = \frac{X - x_0}{h} = \frac{1{,}5 - 1}{0{,}1} = 5$ bước lặp. Bảng kết quả tính toán :

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	1,77	1,7260	1,6687	1,5993	1,5191	1,4290
z_k	−0,44	−0,5730	−0,6935	−0,8026	−0,9008	−0,9884

Bài tập tự luyện chương 6

Bài 6.1. Cho phương trình vi phân cấp hai:

$$y'' - y' + 3e^x.y = 0 \quad (2) \quad \text{với} \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0{,}34.$$

Hãy tìm nghiệm gần đúng $y = y(x)$ của PT(2) bằng *phương pháp Ơle* trên đoạn $[0; 0{,}5]$, chọn $h = 0{,}1$.

Bài 6.2. Cho phương trình vi phân cấp một:

$$y' - x^3 + \frac{y}{x} = 0 \quad \text{với} \quad y(1) = 0.$$

Hãy tìm nghiệm gần đúng $y = y(x)$ của phương trình trên bằng *phương pháp Ơle* trên đoạn $[1; 2]$, chọn $h = 0{,}2$.

Đáp số:

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	0	0,2	0,5123	0,9879	0,16836	2,6629

Bài 6.3. Cho phương trình vi phân cấp một:

$$y' - x + 2y^2 = 0 \quad \text{với} \quad y(0) = 0{,}46.$$

Hãy tìm nghiệm gần đúng $y = y(x)$ của phương trình trên bằng *phương pháp Ơle* trên đoạn [0;1], chọn $h = 0{,}25$.

Bài 6.4. Hãy tìm nghiệm gần đúng $y = y(x)$ bằng phương pháp Ơle trên đoạn $[0; 1]$ của phương trình sau:

$$y' - \cos x + 2y = 0 \text{ biết } y(0) = 0{,}62\text{ ; chọn bước } h = 0{,}25.$$

Đáp số:

x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	0,62	0,5600	0,5222	0,4805	0,4232

Bài 6.5. Hãy tìm nghiệm gần đúng $y = y(x)$ bằng phương pháp Ơle trên đoạn $[1; 2]$ của phương trình sau:

$$y' + \sin x - 2y = 0 \text{ điều kiện ban đầu } y(1) = 2\text{, chọn } h = 0{,}2.$$

Bài 6.6. Cho hệ hai phương trình vi phân cấp một:

$$(II)\ \begin{cases} y' = \cos x - 3y + 2z \\ z' = -2\sin x + y - z \end{cases} \text{; với điều kiện ban đầu } \quad y(0) = 0;\ z(0) = 1.$$

Hãy tìm nghiệm gần đúng của HPT (II) bằng phương pháp Ơle trên đoạn $[0; 1]$, chọn bước $h = 0{,}25$.

Bài 6.7. Cho hệ hai phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} y' = x + 2y - z \\ z' = -2x + y + z \end{cases} \quad \text{với} \quad y(1) = 0{,}62;\ z(1) = 0{,}78.$$

Hãy tìm giá trị gần đúng của hàm y, z tại điểm x = 1,25 với độ chính xác 3 chữ số thập phân giống nhau, bằng *phương pháp Ơle cải tiến* trên đoạn [1;2], chọn h = *0,25*.

Bài 6.8. Cho phương trình vi phân cấp một : $y' = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} + 1$ với $y'(1) = 2$.

Áp dụng *phương pháp Ơle cải tiến* trên đoạn [1;2] với $h = 0{,}125$. Tính giá trị của hàm y tại điểm $x = 1{,}125$ đạt đến độ chính xác với 3 chữ số lẻ thập phân giống nhau.

Bài 6.9. Cho hệ hai phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} y' = x + 2y - z \\ z' = -2x + y + z \end{cases} \quad \text{với} \quad y(1) = 0{,}62;\ z(1) = 0{,}78.$$

Hãy tìm giá trị gần đúng của hàm y, z tại điểm x = 1,25 với độ chính xác 3 chữ số thập phân giống nhau, bằng *phương pháp Ơle cải tiến* trên đoạn [1;2], chọn h = *0,25*.

Bài 6.10. Cho phương trình vi phân cấp một:

$$y' + \sin x - 2y = 0 \quad \text{với} \quad y(1) = 2.$$

Áp dụng *phương pháp Ơle cải tiến* trên đoạn $[1;\ 2]$, chọn h = *0,2*. Hãy tính giá trị của hàm y tại $x = 1{,}2$ đạt đến độ chính xác với 4 chữ số lẻ thập phân giống nhau.

Bài 6.11. Cho phương trình vi phân cấp một:

$$y' - \cos x + 2y = 0 \quad \text{với} \quad y(0) = 0{,}62.$$

Áp dụng *phương pháp Ơle cải tiến* trên đoạn $[0;1]$, chọn h = *0,25*. Hãy tính giá trị của hàm y tại $x = 0{,}25$ đạt đến độ chính xác với 4 chữ số lẻ thập phân giống nhau.

Bài 6.12. Cho hệ hai phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} y' = \cos x - 3y + 2z \\ z' = -2\sin x + y - z \end{cases} \quad \text{với} \quad y(0) = 0;\ z(0) = 1.$$

Trên đoạn $[0;1]$, chọn $h = 0{,}25$. Áp dụng *phương pháp Ơle cải tiến*, tính đến độ chính xác 3 chữ số thập phân giống nhau giá trị của hàm y và z tại điểm $x = 0{,}25$.

Bài 6.13. Tìm nghiệm gần đúng của PT trong **Bài 6.3** theo *phương pháp chuỗi Tay-lor* với $n = 3, x_0 = 0$.

Bài 6.14. Tìm nghiệm gần đúng của PT trong **Bài 6.2** theo *phương pháp chuỗi Tay-lor* với $n = 3, x_0 = 1$.