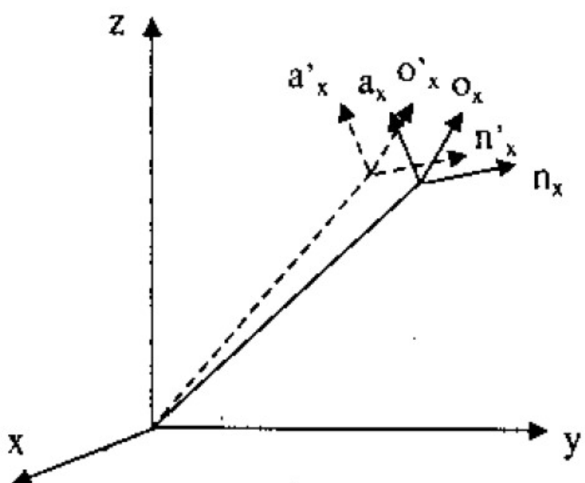
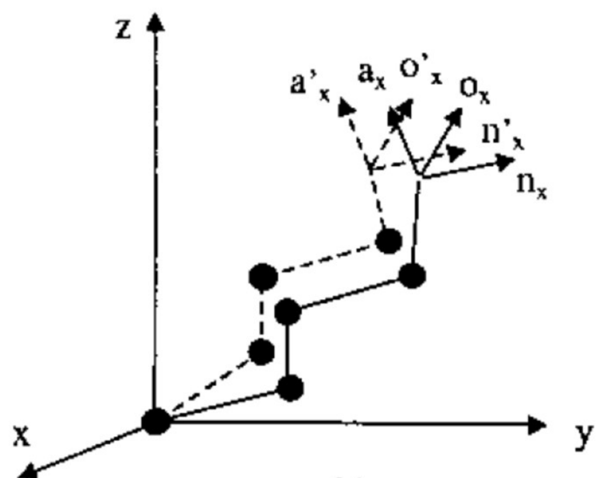
4. Động học vận tốc

- **Động học vận tốc (động học vị trí vi sai):** xác định quan hệ giữa vận tốc khớp và vận tốc dài/tuyến tính của end-effector.
- **Dịch chuyển vi sai: dịch chuyển nhỏ của các bộ phận robot**



a)

Dịch chuyển nhỏ của hệ tọa độ khâu cuối không xét đến chuyển động khớp



b)

Dịch chuyển nhỏ của hệ tọa độ khâu cuối liên hệ với dịch chuyển của khớp

4. Động học vận tốc

- **Phép tịch tiến vi sai:**

$$\mathrm{Trans}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Phép quay vi sai:**

$$\mathrm{Rot}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Rot}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Rot}(z, \delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Phép quay vi sai xung quanh véc tơ $\bar{k}$ gồm ba phép quay đơn theo thứ tự bất kỳ với các góc quay vi sai $\delta x, \delta y, \delta z$**

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Rot}(\bar{k}, d\theta) = \mathrm{Rot}(x, \delta x).\mathrm{Rot}(y, \delta y).\mathrm{Rot}(z, \delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Một số tài liệu dùng:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

4. Động học vận tốc

- **Phép biến đổi vi sai của một hệ tọa độ là sự kết hợp phép tịnh tiến và quay vi sai:**

$$\text{Trans}\,(dx, dy, dz).\ \text{Rot}\,(\bar{k}, d\theta)$$

- **Xét hệ tọa độ T và dT là dịch chuyển vi sai của T, có vị trí mới:**

$$T + dT = [\text{Trans}\,(dx, dy, dz).\ \text{Rot}\,(\bar{k}, d\theta)]T$$

$\Rightarrow$ $dT = [\text{Trans}\,(dx, dy, dz).\ \text{Rot}\,(\bar{k}, d\theta) - I]T$

$dT = \Delta.T$ Với $\Delta = [\text{Trans}\,(dx, dy, dz).\ \text{Rot}\,(\bar{k}, d\theta) - I]$

- **Toán tử vi sai Δ**

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 9

Xác định toán tử vi sai tương ứng với phép biến đổi vi sai sau: dx=0.5, dy=0.3, dz=0.1 đơn vị, và $\delta x = 0.02\ rad$, δy=0.04 rad, δz=0.06 rad.

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -0.06 & 0.04 & 0.5 \\ 0.06 & 0 & -0.02 & 0.3 \\ -0.04 & 0.02 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bài tập 10

- Xác định dịch chuyển vi sai của hệ tọa độ B và hệ tọa độ B ở vị trí mới sau phép dịch chuyển vi sai gồm một phép quay quanh trục y một góc 0.1rad và phép tịnh tiến vi sai Trans(0.1,0,0.2). Biết hệ tọa độ B là:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Động học vận tốc

- **Ý nghĩa của dịch chuyển vi sai**

$$dT = \begin{bmatrix} dn_x & do_x & da_x & dp_x \\ dn_y & do_y & da_y & dp_y \\ dn_z & do_z & da_z & dp_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **dT=** $\begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ **Tmới=** $\begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 1 & 10,4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -0,1 & 2,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Động học vận tốc

- Ma trận Jacobi:
  - ✓ $\bar{\eta} = [\eta_1 \quad \dots \quad \eta_l]^T$ và $\bar{\xi} = [\xi_1 \quad \dots \quad \xi_k]^T$ trong đó $\eta_i = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, và η_i, ξ_i là hàm của thời gian, có đạo hàm cấp 1.
  - ✓ Ta có:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}\cdot\frac{d\xi_1}{dt} + \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2}\cdot\frac{d\xi_2}{dt} + \dots\dots + \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_k}\cdot\frac{d\xi_k}{dt}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\eta_l}{dt} = \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_1}\cdot\frac{d\xi_1}{dt} + \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_2}\cdot\frac{d\xi_2}{dt} + \dots\dots + \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_k}\cdot\frac{d\xi_k}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_k} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_k} \end{bmatrix} \frac{d\bar{\xi}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = J_\eta(\bar{\xi})\cdot\frac{d\bar{\xi}}{dt}$$

$$J_\eta(\bar{\xi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_k} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_2} & \dots & \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_k} \end{bmatrix}$$

Ma trận Jacobi của $\boldsymbol{\eta}$ đối với $\boldsymbol{\xi}$

- Xét trong khoảng thời gian hữu hạn => biểu diễn dạng phương trình sai phân

$$\delta\eta_1 = \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}.\delta\xi_1 + \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2}.\delta\xi_2 + \dots\dots + \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_k}.\delta\xi_k$$

$$\vdots$$

$$\delta\eta_l = \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_1}.\delta\xi_1 + \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_2}.\delta\xi_2 + \dots\dots + \frac{\partial\eta_l}{\partial\xi_k}.\delta\xi_k$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\delta\bar{\eta} = J_n(\bar{\xi}).\,\delta\bar{\xi}}$$

4. Động học vận tốc

- **Vị trí khâu thao tác:** $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p} = \left[x_E, y_E, z_E\right]^T,\ \boldsymbol{\alpha} = \left[\psi, \theta, \varphi\right]^T \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{q}) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \dot{\boldsymbol{p}} = \dfrac{d\boldsymbol{f}_1}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{d\boldsymbol{f}_2}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_\alpha(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \end{matrix}$$

$$J_T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_E}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_E}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial x_E}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial y_E}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y_E}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial y_E}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial z_E}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z_E}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial z_E}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Jacobi tịnh tiến

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \theta}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial \theta}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Jacobi quay

4. Động học vận tốc

- **Quan hệ giữa vi phân khâu thao tác và các biến khớp**

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_T \\ J_\alpha \end{bmatrix} \dot{q} = J_a(q)\dot{q}$$

Với $J_a = \dfrac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} J_T \\ J_\alpha \end{bmatrix}$ **Gọi là Jacobi giải tích**

- **Quan hệ giữa Jacobi giải tích với toán tử vi sai**

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a(q) \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{D} = \mathbf{J_a}\overline{D}_{\boldsymbol{\theta}} \Leftrightarrow \overline{D} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a(q)\overline{D}_{\boldsymbol{\theta}} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta} \Rightarrow dT \Rightarrow T' = T + dT$$

Bài tập 11:

- Tính vị trí mới của tay máy 5 bậc tự do sau các phép dịch chuyển vi sai của các khớp:

$$\overline{D}_{\theta} = \begin{bmatrix} d\theta 1 \\ d\theta 2 \\ dd3 \\ d\theta 4 \\ d\theta 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,05 \\ 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Biết rằng ma trận biểu diễn khâu cuối trong hệ tọa độ gốc và ma trận Jacobi như sau:

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giả sử robot chỉ quay theo các trục x,y.

4. Động học vận tốc

- **Quan hệ giữa vi phân khâu thao tác và các biến khớp**

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_T \\ J_\alpha \end{bmatrix} \dot{q} = J_a(q)\dot{q}$$

Với $J_a = \dfrac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} J_T \\ J_\alpha \end{bmatrix}$ **Gọi là Jacobi giải tích**

- **Vận tốc của khâu thao tác**

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_R(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

Với $J_R = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_1} & \dfrac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_2} \dots & \dfrac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_n} \\ \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_1} & \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_2} \dots & \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_n} \\ \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_1} & \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_2} \dots & \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_T(q) \\ J_R(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_b(q)\dot{q}$

Với $J_b(q) = \begin{bmatrix} J_T(q) \\ J_R(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(q) \\ \boldsymbol{J}_O(q) \end{bmatrix}$

Gọi là Jacobi hình học

4. Động học vận tốc

- **Quan hệ giữa Jacobi hình học và giải tích:** $J_R(q)$ và $J_\alpha(q) \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ và $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & -sin\varphi & cos\varphi cos\theta \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi cos\theta \\ 1 & 0 & sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_\alpha \dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

Với $T_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -sin\varphi & cos\varphi cos\theta \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi cos\theta \\ 1 & 0 & sin\theta \end{bmatrix}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = T_A(\alpha)\dot{r}$ Với $T_A(\alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\alpha \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $v = T_A(\alpha)\dot{r} = T_A(\alpha) J_a(q)\dot{q}$

$\Rightarrow$ $J_b(q) = T_A(\alpha) J_a(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_\alpha \end{bmatrix} J_a(q)$

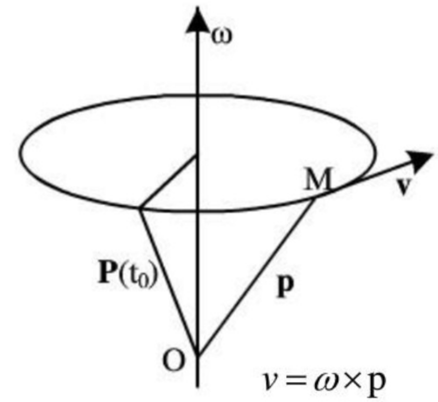
Gọi là Jacobi hình học

$\Rightarrow$ $J_a(q) = T_A^{-1}(\alpha) J_b(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\alpha^{-1} \end{bmatrix} J_b(q)$

Gọi là Jacobi giải tích

4. Động học vận tốc

- **Tính Jacobi hình học?** $J_b(q) = \begin{bmatrix} J_T(q) \\ J_R(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(q) \\ \boldsymbol{J}_O(q) \end{bmatrix}$



Chuyển động quay tròn của một điểm

- **Thành phần vận tốc dài (Linear velocity)**
  - ✓ **Tạo ra do khớp quay:**
    - ○ **Vận tốc khâu cuối n tạo bởi khâu i:** $v_{i,n} = \omega_i \times \mathrm{p}_{i-1,n}$ Với $\begin{cases} \omega_i = \dot{\theta}_i z_{i-1} \\ \mathrm{p}_{i-1,n} = \mathrm{p}_n - \mathrm{p}_{i-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow v_{i,n} = (\dot{\theta}_i z_{i-1}) \times \mathrm{p}_{i-1,n}$$

- ○ **Vận tốc khâu n tạo bởi khâu i, tính từ hệ tọa độ gốc:** $v_{i,n}^0 = R_{i-1}^0 \left[\omega_i \times \mathrm{p}_{i-1,n} \right] = R_{i-1}^0 \left[(\theta_i z_{i-1}) \times \mathrm{p}_{i-1,n} \right]$

- ○ **Vận tốc dài tạo bởi n khâu:** $v_n^0 = \sum_{i=1}^{n} R_{i-1}^0 \left[\omega_i \times \mathrm{p}_{i-1,n} \right] = \sum_{i=1}^{n} R_{i-1}^0 \left[z_{i-1} \times \mathrm{p}_{i-1,n} \right] \dot{\theta}_i$ (z_{i-1} theo hệ tọa độ khâu i R_{i-1}^0 để theo hệ tọa độ gốc)

$$\Rightarrow v_n^0 = \underbrace{\left[z_0 \times \mathrm{p}_n^0 + z_1^0 \times (\mathrm{p}_n^0 - \mathrm{p}_1^0) + \cdots \quad z_{n-1}^0 \times (\mathrm{p}_n^0 - \mathrm{p}_{n-1}^0) \right]}_{\boldsymbol{J}_P(q)} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \cdots \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

4. Động học vận tốc

- **Tính Jacobi hình học?** $J_b(q) = \begin{bmatrix} J_T(q) \\ J_R(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix}$
- **Thành phần vận tốc dài (Linear velocity)**
  - ✓ **Tạo ra do khớp tịnh tiến:**
  - ○ Khớp i, tịnh tiến khoảng d_i: $v_i^{i-1} = \dot{d}_i z_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_i \end{bmatrix}$ ➡

    So với hệ tọa độ gốc

    $$v_i^0 = R_{i-1}^0 \dot{d}_i z_{i-1} = z_{i-1}^0 \dot{d}_i$$

  - ○ **Tổng quát:**

➡

$J_{Pi} = z_{i-1}$	Khớp tịnh tiến
$J_{Pi} = z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1})$	Khớp xoay

z_{i-1} được hiểu là so với hệ tọa độ gốc (z_{i-1}^0)

4. Động học vận tốc

- **Tính Jacobi hình học?** $J_b(q) = \begin{bmatrix} J_T(q) \\ J_R(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix}$
- **Thành phần vận tốc góc (angular velocity)**
  - **Khớp tịnh tiến:** $\dot{q}_i J_{O_i} = 0$ **=>**J_{O_i}=0
  - **Khớp quay:** $\dot{q}_i J_{O_i}$=$\dot{\theta}_i z_{i-1}$ **=>**J_{O_i}=z_{i-1}

$$J_b(q) = \begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \textbf{Cho khớp tịnh tiến} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \textbf{Cho khớp xoay} \end{cases}$$

4. Động học vận tốc

- **Ma trận Jacobian**

$$J_b = \begin{bmatrix} j_{P1} & & j_{Pn} \\ & \dots & \\ j_{O1} & & j_{On} \end{bmatrix} \quad \text{Với} \quad \begin{bmatrix} j_{Pi} \\ j_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{Cho khớp tịnh tiến} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{Cho khớp xoay} \end{cases}$$

Số cột của J: số khớp tham gia chuyển dọng
Số hàng của J: là kích thước của không gian

- **Xác định J_b**

✓ J_bđược tính theo hệ tọa độ gốc (base frame).

✓ z_{i-1}là cột thứ ba của ma trận xoay R_{i-1}^0, tức là $z_{i-1} = R_1^0 \dots R_{i-1}^{i-2} z_0$, với $z_0 = [0\ 0\ 1]^T$

✓ p_e là ba phần tử đầu tiên của cột thứ 4 của ma trân chuyển vị T_e^0 (base frame -> end-effector). Nếu biểu diễn đồng nhất $\tilde{p}_e$ dạng (4x1) ta có $\tilde{p}_e = A_1^0 \dots A_n^{n-1} \tilde{p}_0$, với $\tilde{p}_0 = [0\ 0\ 0\ 1]^T$

✓ p_{i-1} là ba phần tử đầu tiên của cột thứ 4 của ma trận chuyển vị T_{i-1}^0, tức là:
$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0 \dots A_{i-1}^{i-2} \tilde{p}_0$

Ví dụ: tính ma trận Jacobian (C1)

$$p_x = l_2 c_{12} + l_1 c_1$$

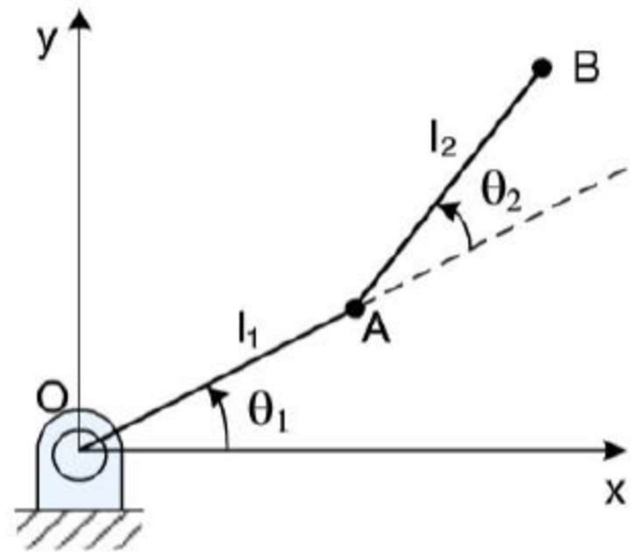
$$p_y = l_2 s_{12} + l_1 s_1$$

➡ $$v = \begin{bmatrix} dp_x / dt \\ dp_y / dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_2 s_{12} + l_1 s_1)(d\theta_1 / dt) - l_2 s_{12}(d\theta_2 / dt) \\ (l_2 c_{12} + l_1 c_1)(d\theta_1 / dt) + l_2 c_{12}(d\theta_2 / dt) \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_2 s_{12} + l_1 s_1) & -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận Jacobian

$$J_b = \begin{bmatrix} -(l_2 s_{12} + l_1 s_1) & -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$



Ví dụ: tính ma trận Jacobian (C2)

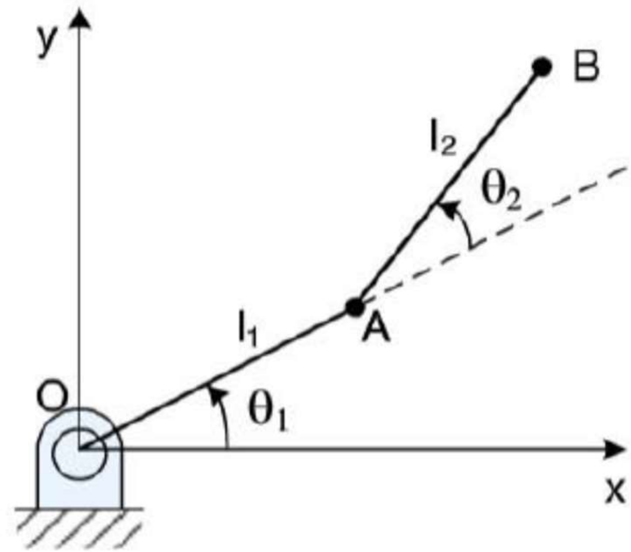
$$\boldsymbol{J}_b(q) = \begin{bmatrix} z_o \times (p_2 - p_0) & z_1 \times (p_2 - p_1) \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

Tính $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$?

- ✓ $\tilde{p}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \rightarrow p_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$
- ✓ $\tilde{p}_1 = A_1^0 * \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ✓ $\tilde{p}_2 = A_1^0 * A_2^1 * \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow p_2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 1 \end{bmatrix}$

Tính $\boldsymbol{z_0}, \boldsymbol{z_1}$?

- ✓ $z_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$
- ✓ $R_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow z_1 = R_1^0 * z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

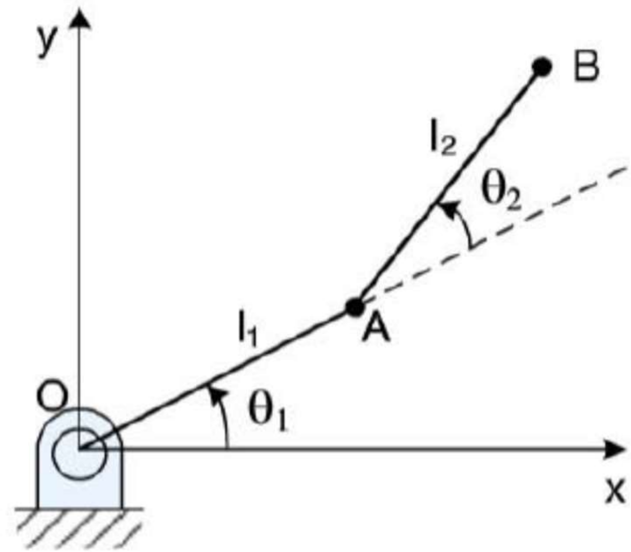


$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & l_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & l_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Với *i=1,2*

Ví dụ: tính ma trận Jacobian(C2)

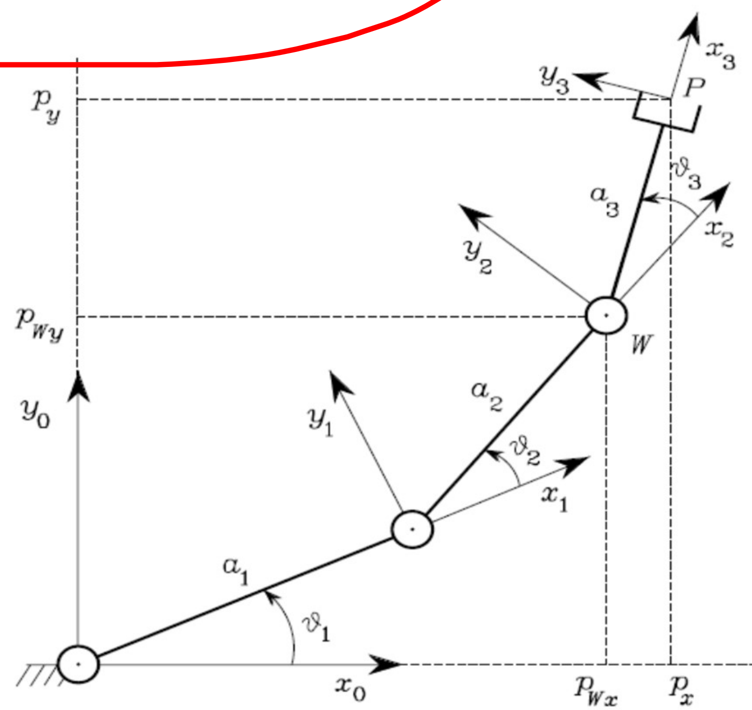
$$\boldsymbol{J}_b(q) = \begin{bmatrix} z_o \times (p_2 - p_0) & z_1 \times (p_2 - p_1) \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{J}_b(q) = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



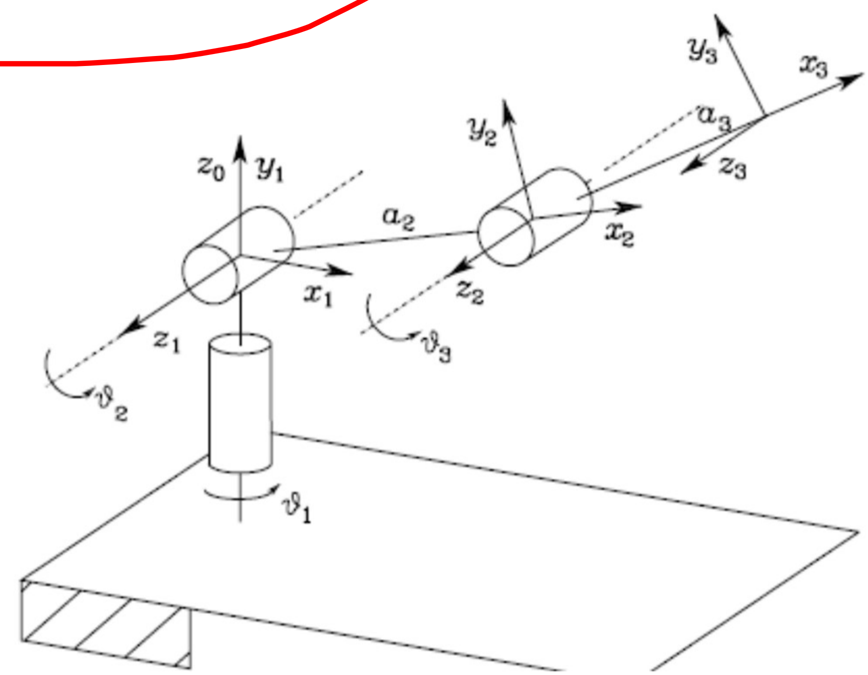
Bài tâp 12: Three-link Planar Arm

Xác định ma trận Jacobian?



$$A_i^{i-1}(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, 3.$$

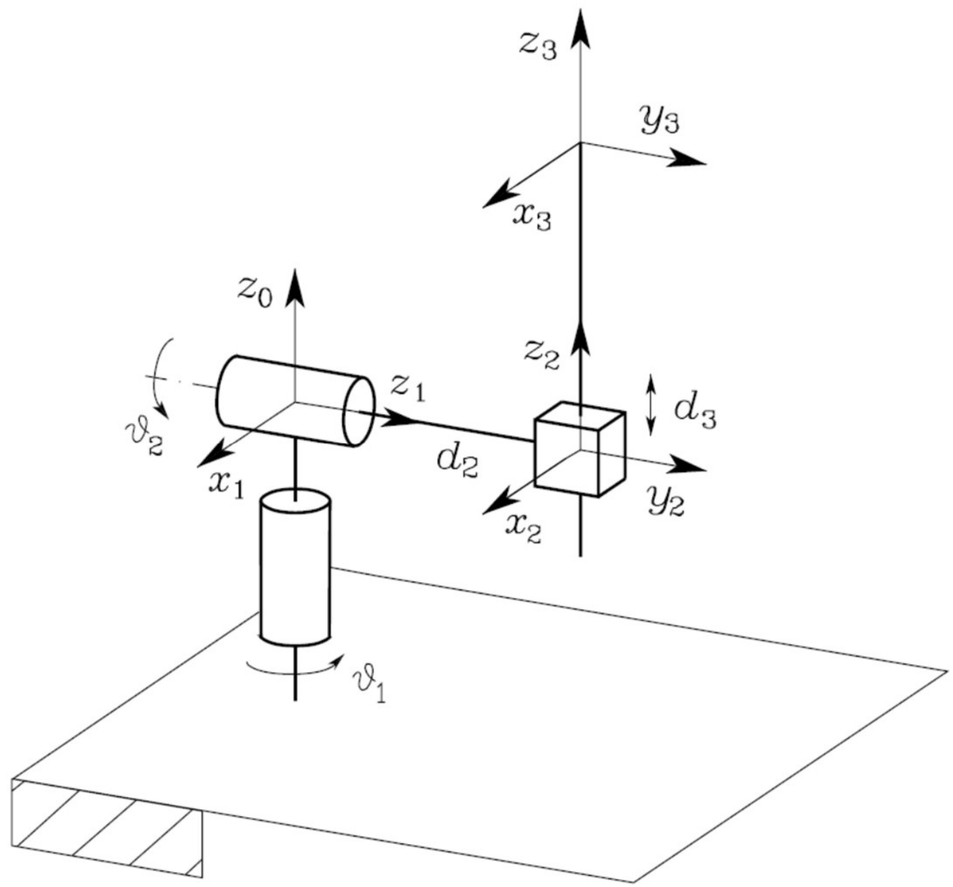
Bài tập 13: **Anthropomorphic Arm**



Xác định ma trận Jacobian?

Bài tập 14. Spherical Arm

Xác định ma trận Jacobian?



Bài tập 15. UR10

Xác định ma trận Jacobian?