Chương 5

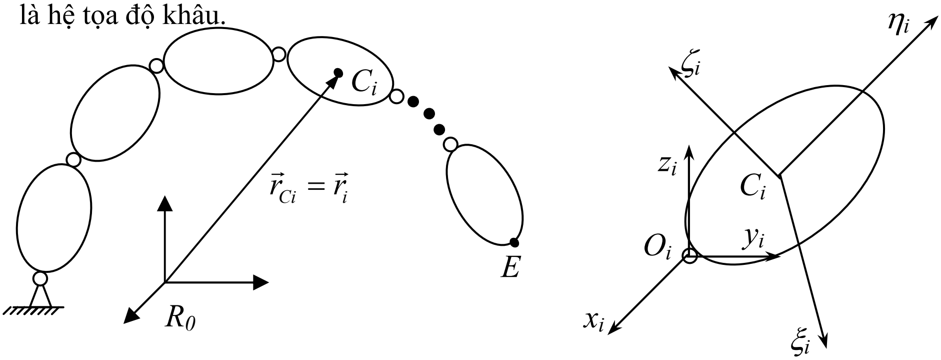
ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT CÔNG NGHIỆP

Hai phương pháp cơ học hay được sử dụng để nghiên cứu động lực học robot là Phương pháp Newton-Euler và Phương pháp Lagrange. Trong giáo trình này ta giới hạn chỉ trình bầy Phương pháp Lagrange. Bạn đọc nào quan tâm đến phương pháp Newton-Euler xin xem tài liệu Nguyễn Văn Khang (2007), Động lực học hệ nhiều vật.

§1 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI 2 CỦA ROBOT CÔNG NGHIỆP

1.1 Biểu thức động năng và thế năng của robot

Trong tính toán động học robot, để xác định vị trí các khâu ta chỉ cần sử dụng hệ tọa độ cố định và hệ tọa độ khớp. Trong bài toán động lực học robot ta cần thêm một hệ tọa độ nữa là hệ tọa độ khâu. Hệ tọa độ khâu là hệ quy chiếu gắn với vật rắn, thường có gốc trùng với khối tâm C_i của vật rắn, các trục hướng theo các trục quán tính chình của vật rắn. Trong hình 5.1 hệ $O_i x_i y_i z_i$ là hệ tọa độ khớp, $C_i \zeta_i \eta_i \xi_i$ là hệ tọa độ khâu.



Hình 5.1: Hệ tọa độ khâu

Giả sử robot là hệ hôlônôm có p vật rắn và r liên kết. Khi đó số bậc tự do của hệ là n = 6p – r. Các biến khớp của hệ: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$. Vị trí khâu thứ i được xác định bởi

- Tọa độ khối tâm của khâu: $\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{r}_{Ci}(\mathbf{q}, t)$

- Ma trận côsin chỉ hướng của khâu: $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}, t)$

Sau đây để đơn giản, ta xét các robot có cấu trúc hôlônôm giữ và dừng. Khi đó

$$\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{r}_{Ci}(\mathbf{q}), \qquad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}) \tag{1.1}$$

Theo định nghĩa các ma trận Jacobi tịnh tiến và ma trận Jacobi quay được xác định bởi công thức

$$\mathbf{J}_{Ti} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{J}_{Ri} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.2}$$

Trong đó $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véc tơ đại số ứng với góc quay $\vec{\varphi}_i$ của vật rắn thứ i, quay quanh trục quay tức thời. Vận tốc khối tâm và vận tốc góc của vật rắn được xác định bằng các công thức sau

$$\mathbf{v}_{Ci} = \frac{d\mathbf{r}_{Ci}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{Ti}\dot{\mathbf{q}} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{1.4}$$

a) Động năng robot

Theo chương hai, biểu thức động năng của vật rắn được xác định bằng biểu thức

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \tag{1.5}$$

Trong đó $\mathbf{I}_i$ là ma trận tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với hệ quy chiếu cố định

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \tag{1.6}$$

Trong (1.6) $\mathbf{I}_i^{(i)}$ là ma trận tenxơ quán tính đối với hệ quy chiếu gắn liền với khâu. Do đó $\mathbf{I}_i^{(i)}$ là ma trận hằng số dạng đường chéo, nếu ta chọn hệ tọa độ khâu là hệ qui chiếu quán tính chính.

Từ (1.5) biểu thức động năng của robot có dạng

$$T = \sum_{i=1}^{p} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \tag{1.7}$$

Thay (1.3) và (1.4) vào (1.7) ta được

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} m_i \left(\mathbf{J}_{Ti}\dot{\mathbf{q}}\right)^T \left(\mathbf{J}_{Ti}\dot{\mathbf{q}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \left(\mathbf{J}_{Ri}\dot{\mathbf{q}}\right)^T \mathbf{I}_i \left(\mathbf{J}_{Ri}\dot{\mathbf{q}}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri} \right\} \dot{\mathbf{q}} \tag{1.8}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri}\,, \tag{1.9}$$

thì biểu thức động năng robot (1.8) có dạng

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{1.10}$$

Ma trận $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận vuông cấp n và được gọi là ma trận khối lượng suy rộng của robot.

b) Thế năng trọng lực của robot

Thế năng trọng lực mỗi khâu của robot được xác định bởi biểu thức

$$\Pi_i = -m_i\mathbf{g}_o^T\mathbf{r}_{Ci} \tag{1.11}$$

Trong đó

$$\mathbf{g}_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}\ ;\ \mathbf{r}_{Ci} = \begin{bmatrix} x_{Ci} & y_{Ci} & z_{Ci} \end{bmatrix}^T \tag{1.12}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{g}_o^T\mathbf{r}_{Ci} = -g\, z_{Ci}$

Thế năng của trọng lực của robot có dạng

$$\Pi = -\sum_{i=1}^{p} m_i\mathbf{g}_o^T\mathbf{r}_{Ci} \tag{1.13}$$

1.2 Thiết lập dạng thức Lagrange loại 2

Xuất phát từ phương trình Lagrange loại 2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*, \qquad \text{i=1,2,…,n,} \tag{1.14}$$

ta suy ra phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + \mathbf{f}^*. \tag{1.15}$$

Trong đó

$$\mathbf{q} = \left[q_1, q_2, ..., q_n\right]^T, \qquad \mathbf{f}^* = \left[Q_1^*, Q_2^* ..., Q_n^*\right]^T. \tag{1.16}$$

Trong kỹ thuật robot, người ta thường ký hiệu mômen động cơ bằng $\tau_i = Q_i^*$.

Từ biểu thức động năng (1.11) ta có

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk}(\mathbf{q})\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} m_{\text{ij}}(\mathbf{q})\dot{q}_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{dm_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})}{dt}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{n}m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad (2)$$

Từ biểu thức thế năng trọng lực (1.13) ta có

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=-\sum_{j=1}^{n}m_j\mathbf{g}_0^T\frac{\partial \mathbf{r}_{Cj}}{\partial q_i}=g_i(\mathbf{q}) \quad (3)$$

Thế (1), (2), và (3) vào phương trình (1.15) ta được

$$\sum_{j=1}^{n}m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k+g_i(\mathbf{q})=\tau_i$$

$$\sum_{j=1}^{n}m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j+g_i(\mathbf{q})=\tau_i,\quad i=1\ldots n \quad (1.17)$$

Ta đưa vào ký hiệu

$$h_{ijk}(\mathbf{q})=\frac{\partial m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}=m_{ij,k}(\mathbf{q})-\frac{1}{2}m_{jk,i}(\mathbf{q})$$

Do $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận đối xứng (tính chất này sẽ được chứng minh trong mục sau) nên $m_{i,k}=m_{jk,i}=m_{ki,j}$. Từ đó suy ra

$$h_{ijk}(\mathbf{q})=\frac{1}{2}\left(m_{ij,k}+m_{ik,j}-m_{kj,i}\right)=\frac{1}{2}\left(m_{ik,j}+m_{ji,k}-m_{kj,i}\right) \quad (1.18)$$

Thay (1.18) vào phương trình (1.17) ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của robot

$$\sum_{j=1}^{n}m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j+g_i(\mathbf{q})=\tau_i \quad (1.19)$$

1.3 Biến đổi phương trình vi phân chuyển động của robot

Để nhận được các phương trình vi phân chuyển động của robot có dạng quen biết trong các sách về robot ở các nước, từ các phương trình (1.19) chúng ta thực hiện một số biến đổi như sau. Ta đưa vào ký hiệu

$$c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\sum_{k=1}^{n}h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k \quad (1.20)$$

Tư đó suy ra

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{q}_j \quad (1.21)$$

Thay (1.21) vào (1.19) ta được

$$\sum_{j=1}^{n} m_{\mathrm{ij}}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \tau_i\text{, i=1,…,n} \quad (1.22)$$

Hệ n phương trình vi phân chuyển động của tay máy (1.22) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (1.23)$$

Trong đó

$\mathbf{M} = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận khối lượng suy rộng,

$\mathbf{C} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận ly tâm – Coriolis.

Thành phần $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ đại diện cho lực quán tính ly tâm và quán tính Côriolis tác dụng lên robot. Xét biểu thức

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{q}_j$$

- Khi j = k : $h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j = h_{ijk}\dot{q}_j^2$ tương đương với hiệu ứng ly tâm (Centrifugal effect)
- Khi j ≠ k: $h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j$ tương đương với hiệu ứng Côriolis (Coriolis effect)

Nếu kể thêm lực ma sát nhớt và ma sát Culông, phương trình (1.23) có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s\mathrm{sign}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (1.24)$$

trong đó $\mathbf{F}_v$ và $\mathbf{F}_s$ là các ma trận hệ số đường chéo.

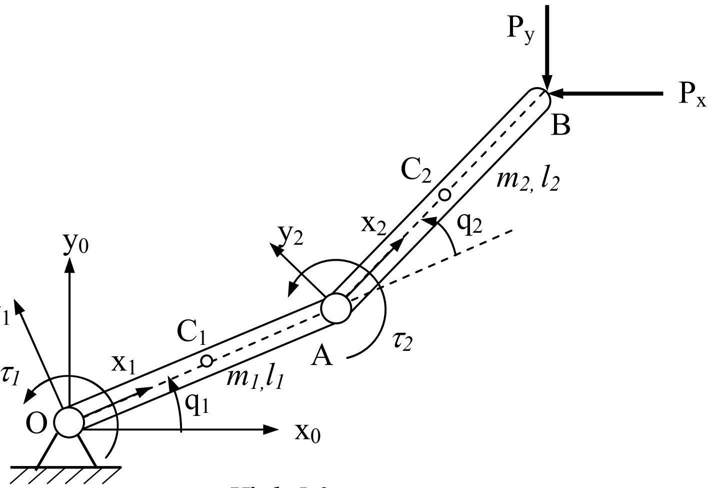
Thí dụ 5.1. Cho mô hình robot phẳng hai khâu như hình 5.2. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot.Từ hình vẽ 5.2, ta thiết lập bảng các tham số động học Craig và bảng các tham số động lực học của robot của robot như sau:

Khâu	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	l_1	0	q_2

Bảng 5.1: Tham số Craig robot 2 khâu

Khâu	Vị trí trọng tâm			Khối lượng	Ma trận mômen quán tính **I**					
	x_C	y_C	z_C		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	l_{C1}	0	0	m_1	0	I_{1y}	I_{1z}	0	0	0
2	l_{C2}	0	0	m_2	0	I_{2y}	I_{2z}	0	0	0

Bảng 5.2: Tham số động lực robot 2 khâu



Hình 5.2

Trong bài này ta chọn các tọa độ suy rộng tương đối như hình 5.2, $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$. Các khoảng cách $OC_1 = l_{C1}$, $AC_2 = l_{C2}$. Từ hình 5.2 ta dễ dàng xác định vị trí khối tâm và biểu thức vận tốc góc của các khâu

$$\mathbf{r}_{C1} = \begin{bmatrix} l_{C1}\cos q_1 \\ l_{C1}\sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{C2} = \begin{bmatrix} l_1\cos q_1 + l_{C2}\cos(q_1+q_2) \\ l_1\sin q_1 + l_{C2}\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Từ đó suy ra các ma trận Jacobi tịnh tiến và quay

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C1}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{C1}\sin q_1 & 0 \\ l_{C1}\cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$\mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C2}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_1\sin q_1 - l_{C2}\sin(q_1+q_2) & -l_{C2}\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos q_1 + l_{C2}\cos(q_1+q_2) & l_{C2}\cos(q_1+q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$\mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Ma trận ten xơ quán tính khối của vật rắn có dạng

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Theo định nghĩa ra ma trận khối lượng suy rộng của robot hai khâu có dạng

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{2} \left(m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri} \right) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Thế các biểu thức (3), (4), (5) và (6) vào biểu thức (7) ta được

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{C1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{C2}^2 + 2 l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{2z} + I_{1z} \\ m_{12} &= m_{21} = m_2 (l_{C2}^2 + l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{2z} \\ m_{22} &= m_2 l_{C2}^2 + I_{2z} \end{aligned} \tag{8}$$

Thế (8) vào biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

ta được

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \Big\{ & \left[m_1 l_{C1}^2 + m_2 \left(l_1^2 + l_{C2}^2 + 2 l_1 l_{C2} \cos \mathrm{q}_2 \right) + I_{z1} + I_{z2} \right] \dot{q}_1^2 + \left(m_2 l_{C2}^2 + I_{z2} \right) \dot{q}_2^2 \\ & + 2 \left[m_2 \left(l_{C2}^2 + l_1 l_{C2} \cos \mathrm{q}_2 \right) + I_{z2} \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

Biểu thức thế năng của cơ hệ có dạng

$$\Pi = m_1 g l_{C1} \sin q_1 + m_2 g \left[l_1 \sin q_1 + l_{C2} \sin \left(q_1 + q_2 \right) \right] \tag{10}$$

Công ảo của các lực suy rộng không có thế

$$\delta A = \tau_1 \delta q_1 + \tau_2 \delta q_2 - P_x \delta x_B - P_y \delta y_B \tag{11}$$

Từ hệ thức

$$x_B = l_1\cos q_1 + l_2\cos\left(q_1 + q_2\right)$$
$$y_B = l_1\sin q_1 + l_2\sin\left(q_1 + q_2\right)$$

ta suy ra

$$\delta x_B = \left[-l_1\sin q_1 - l_2\sin\left(q_1 + q_2\right)\right]\delta q_1 - l_2\sin\left(q_1 + q_2\right)\delta q_2$$
$$\delta y_B = \left[l_1\cos q_1 + l_2\cos\left(q_1 + q_2\right)\right]\delta q_1 + l_2\cos\left(q_1 + q_2\right)\delta q_2$$

Từ đó ta có

$$Q_1^{np} = \tau_1 + P_x\left[l_1\sin q_1 + l_2\sin\left(q_1 + q_2\right)\right] - P_y\left[l_1\cos q_1 + l_2\cos\left(q_1 + q_2\right)\right] \quad (12)$$

$$Q_2^{np} = \tau_2 + P_x l_2\sin\left(q_1 + q_2\right) - P_y l_2\cos\left(q_1 + q_2\right) \quad (13)$$

Thế các biểu thức (9), (10), (12), (13) vào phương trình Lagrange loại hai ta được các phương trình vi phân chuyển động của robot phẳng hai khâu

$$\begin{aligned}\tau_1 = &\left(m_1 l_{C1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{C2}^2 + 2l_1 l_{C2}\cos q_2) + I_{2z} + I_{1z}\right)\ddot{q}_1 + \left(m_2(l_{C2}^2 + l_1 l_{C2}\cos q_2) + I_{2z}\right)\ddot{q}_2 \\ &- 2m_2 l_1 l_{C2}\sin q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{C2}\sin q_2\dot{q}_2^2 + (m_1 l_{C1} + m_2 l_1)g\cos q_1 + m_2 l_{C2} g\cos(q_1 + q_2) \\ &- P_x\left[l_1\sin q_1 + l_2\sin\left(q_1 + q_2\right)\right] + P_y\left[l_1\cos q_1 + l_2\cos\left(q_1 + q_2\right)\right]\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = &\left(m_2(l_{C2}^2 + l_1 l_{C2}\cos q_2) + I_{2z}\right)\ddot{q}_1 + \left(m_2 l_{C2}^2 + I_{2z}\right)\ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{C2}\dot{q}_1^2\sin q_2 \\ &+ m_2 l_{C2} g\cos(q_1 + q_2) - P_x l_2\sin\left(q_1 + q_2\right) + P_y l_2\cos\left(q_1 + q_2\right)\end{aligned} \quad (15)$$

§2 DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE II

Việc áp dụng các phương trình Lagrange loại hai thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot không gian nói chung là bài toán khá phức tạp. Đặc biệt là việc tính toán ma trận quán tính và Coriolis **C**. Vì vậy người ta đã thiết lập nhiều phần mềm tính toán động lực học của hệ nhiều vật nói chung và của robot nói riêng. Trong mục này ta sẽ trình bày một thuật toán tự động hóa việc thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của robot. Với thuật toán này người sinh viên dễ dàng thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của robot, nếu họ biết sử dụng phần mềm MAPLE.

Như đã biết, động năng của robot có dạng

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.1)$$

Trong đó để thuận tiện cho việc chứng minh ta đưa vào véc tơ

$$\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\,,\ \mathbf{b} = \left[b_1 \quad \cdots \quad b_n\right]^T \quad (2.2)$$

Phương trình Lagrange II có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \boldsymbol{\tau} \tag{2.3}$$

Sử dụng định lý đạo hàm riêng theo biến véc tơ của tích hai ma trận (xem phụ lục), ta có

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\mathbf{b} \otimes \mathbf{I}_n\right) + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \tag{2.4}$$

Trong đó

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\mathbf{b} \otimes \mathbf{I}_n\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & \cdots & \mathbf{e}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ b_n \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{I}_n & \cdots & b_n \mathbf{e}_n^T \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T = \left(\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right)^T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \tag{2.5}$$

Mặt khác

$$\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right) = \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right) + \mathbf{M}(\mathbf{q})\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T \left(\mathbf{0} + \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{I}_n\right) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \tag{2.6}$$

Thay (2.5) và (2.6) vào (2.4) ta được

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{2.7}$$

Tính toán tương tự ta có

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{b} \otimes \mathbf{I}_n\right) + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{0} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right) + \mathbf{M}(\mathbf{q})\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right) + \mathbf{0}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right) \tag{2.8}$$

Thay (2.7) và (2.8) vào (2.3) ta được

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \tag{2.9}$$

Đặt $\mathbf{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{q} - \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T$, ta có

$$\mathbf{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T \dot{\mathbf{q}} \tag{2.10}$$

The định lý quan hệ giữa đạo hàm toàn phần va đạo hàm riêng (xem phụ lục) ta có

$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}\right)$. Thay vào (2.10) ta được

$$\mathbf{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T\right)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

Ma trận ly tâm và Coriolis bây giờ có dạng

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T \tag{2.11}$$

Khi đó phương trình vi phân chuyển động của robot (2.9) có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \boldsymbol{\tau} \tag{2.12}$$

Nhờ các phần mềm đa năng như MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB việc tính toán ma trận ly tâm và Coriolis theo công thức (2.11) tương đối đơn giản và dễ dàng. Dựa trên các thuật toán trình bầy ở trên và sử dụng phần mềm MAPLE, chương trình tính ROBOTDYN (Robot Dynamics) đã được xây dựng ở Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Chương trình ROBOTDYN có thể thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của robot công nghiệp và mô phỏng số chuyển động của robot. Ngoài ra chương trình này còn có nhiều chức năng khác như: Tính toán động học thuận, động học ngược của robot, điều khiển chuyển động robot v.v…Dưới đây trình bầy một số thí dụ về việc thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot công nghiệp nhờ chương trình ROBOTDYN.

§3 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA MỘT SỐ MÔ HÌNH ROBOT ĐƠN GIẢN

3.1 Robot không gian ba bậc tự do

Thí dụ 5.2. Xét robot không gian ba bậc tự do có mô hình như hình vẽ 5.3. Các tham số động học Craig và các tham số động lực học của robot không gian ba bậc tự do cho trên các bảng 5.3 và 5.4.

khâu	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	90	0	0	q_2
3	0	l_2	0	q_3

Bảng 5.3 Tham số động học Craig không gian ba bậc tự do

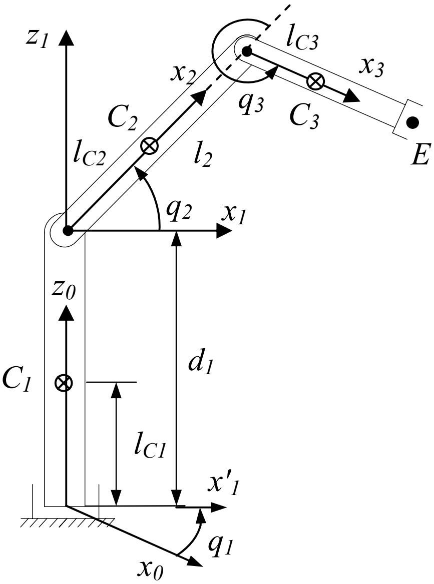
Khâu	Vị trí trọng tâm			Khối lượng	Ma trận mômen quán tính **I**					
	x_C	y_C	z_C		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	0	0	(d_1-l_{C1})	m_1	I_{1x}	I_{1y}	I_{1z}	0	0	0
2	l_{C2}	0	0	m_2	I_{2x}	I_{2y}	I_{2z}	0	0	0
3	l_{C3}	0	0	m_3	I_{3x}	I_{3y}	I_{3z}	0	0	0

Bảng 5.4: Bảng tham số động lực của robot không gian ba bậc tự do

Các ma trận Craig của các khâu so với hệ quy chiếu R_0 có dạng

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C}_2 = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & 0 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & 0 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & 0 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Hình 5.3: Rôbot không gian 3 bậc tự do

Tọa độ khối tâm của các khâu trong hệ quy chiếu gắn liền với khâu có dạng

$$\mathbf{u}_{C1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 - l_{C1} \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{u}_{C2}^{(2)} = \begin{bmatrix} l_{C2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{u}_{C3}^{(3)} = \begin{bmatrix} l_{C3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta suy ra tọa độ khối tâm các khâu so với hệ quy chiếu cố định R_0

$$^{tn}r_{C_i} = \mathbf{C}_i \mathbf{u}_{Ci}^{(i)} \Rightarrow \mathbf{r}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 - l_{C1} \end{bmatrix};\ \mathbf{r}_{C2} = \begin{bmatrix} l_{C2} C_1 C_2 \\ l_{C2} S_1 C_2 \\ d_1 + l_{C2} S_2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{r}_{C3} = \begin{bmatrix} l_2 C_1 C_2 + l_{C3} C_1 C_{23} \\ l_2 S_1 C_2 + l_{C3} S_1 C_{23} \\ d_1 + l_2 S_2 + l_{C3} S_{23} \end{bmatrix}$$

Các ma trận Jacobi tịnh tiến của các khâu có dạng

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C1}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\qquad \mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C2}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{C2} S_1 C_2 & -l_{C2} C_1 S_2 & 0 \\ l_{C2} C_1 C_2 & -l_{C2} S_1 S_2 & 0 \\ 0 & l_{C2} C_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{J}_{T3}=\frac{\partial \mathbf{r}_{C3}}{\partial \mathbf{q}}=\begin{bmatrix} -l_2S_1C_2-l_{C3}S_1C_{23} & -l_{C2}C_1S_2-l_{C3}C_1S_{23} & -l_{C3}C_1S_{23} \\ l_{C2}C_1C_2+l_{C3}C_1C_{23} & -l_{C2}S_1S_2-l_{C3}S_1S_{23} & -l_{C3}S_1S_{23} \\ 0 & l_{C2}C_2+l_{C3}C_{23} & l_{C3}C_{23} \end{bmatrix}$$

Từ các ma trận Craig ta có các ma trận côsin chỉ hướng của các khâu so với R_0

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix};\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 \\ S_{23} & C_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Vận tốc góc các khâu được tính theo các công thức sau

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1=\dot{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_1^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2=\dot{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_2^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -C_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 & -S_1\dot{q}_2 \\ C_1\dot{q}_2 & S_1\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix} S_1\dot{q}_2 \\ -C_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3=\dot{\mathbf{A}}_3\mathbf{A}_3^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -C_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right) \\ \dot{q}_1 & 0 & -S_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right) \\ C_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right) & S_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right) & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_3=\begin{bmatrix} S_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right) \\ -C_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right) \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Từ vận tốc góc các khâu, ta xác định được các ma trận Jacobi quay

$$\mathbf{J}_{R1}=\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\mathbf{J}_{R2}=\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}}=\begin{bmatrix} 0 & S_1 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\mathbf{J}_{R3}=\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}}=\begin{bmatrix} 0 & S_1 & S_1 \\ 0 & -C_1 & -C_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thay các ma trận Jacobi tịnh tiến và Jacobi quay vào biểu thức

$$\mathbf{M}=\sum_{i=1}^{3}\left(m_i\mathbf{J}_{Ti}^T\mathbf{J}_{Ti}+\mathbf{J}_{Ri}^T\mathbf{A}_i\mathbf{I}_i\mathbf{A}_i^T\mathbf{J}_{Ri}\right), \tag{1}$$

ta nhận được ma trận M khối lượng suy rộng của robot

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$m_{11} = I_{1z} + I_{2y}C_2^2 + I_{2x}S_2^2 + I_{3x}S_{23}^2 + I_{3y}C_{23}^2 + m_2 l_{C2}^2 C_2^2 +$$
$$+ m_3\left(2l_2 l_{C3} C_2 C_{23} + l_2^2 C_2^2 + l_{C3}^2 C_{23}^2\right)$$
$$m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{31} = 0$$
$$m_{22} = I_{2z} + I_{3z} + m_2 l_{C2}^2 + m_3\left(l_{C3}^2 + l_2^2 + 2l_2 l_{C3} C_3\right)$$
$$m_{23} = m_{32} = I_{3z} + m_3\left(l_{C3}^2 + l_2 l_{C3} C_3\right);\quad m_{33} = I_{3z} + m_3 l_{C3}^2$$

Để xác định ma trận ly tâm và Côriolis, ta sử dụng công thức 2.11

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T \tag{2}$$

Sử dụng phần mềm Maple, ta có thể dễ dàng tính được ma trận **C** qua câu lệnh sau

C:= multiply (dMq, KroneckerProduct(In,qp))
*– 1/2*Transpose(multiply(dMq, KroneckerProduct(qp ,In)))*

Trong đó:

- Ma trận dMq là đạo hàm riêng của ma trận **M** theo biến véc tơ **q,**
- Ma trận In là ma trận đơn vị cấp n,
- Véc tơ qp là đạo hàm theo t của **q** ($qp = \dot{\mathbf{q}}$),
- KroneckerProduct là thủ tục tính tích Kronecker có trong Maple.

Sử dụng phần mềm Maple ta dễ dàng nhận được ma trận

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$c_{11} = -2m_2 l_{C2}^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 - 2m_3\left(l_{C3}^2 S_{23} C_{23} + l_2^2 S_2 C_2 + l_2 l_{C3}(2S_2 C_{23} - S_3)\right)\dot{q}_2$$
$$-2m_3\left(l_{C3}^2 S_{23} C_{23} + l_2 l_{C3} C_2 S_{23}\right)\dot{q}_3 + 2\left(I_{2x} - I_{2y}\right)S_2 C_2 \dot{q}_2 -$$
$$+2\left(I_{3x} - I_{3y}\right)S_{23} C_{23}\left(\dot{q}_2 + \dot{q}_3\right)$$
$$c_{12} = c_{13} = 0$$
$$c_{21} = \left(m_2 l_{C2}^2 S_2 C_2 + m_3\left(l_{C3}^2 S_{23} C_{23} + l_2^2 S_2 C_2 + l_2 l_{C3}(2C_2 S_{23} - S_3)\right)\right)\dot{q}_1$$
$$-\left(2\left(I_{2x} - I_{2y}\right)S_2 C_2 + \left(I_{3x} - I_{3y}\right)S_{23} C_{23}\right)\dot{q}_1$$

$$c_{22} = -2m_3 l_{C3} l_2 S_3 \dot{q}_3 ; \quad c_{23} = -m_3 l_2 l_{C3} S_3 \dot{q}_3$$

$$c_{31} = \left(m_3 l_{C3} S_{23} \left(l_2 C_2 + l_{C3} C_{23} \right) - \left(I_{3x} - I_{3y} \right) S_{23} C_{23} \right) \dot{q}_1$$

$$c_{32} = \frac{1}{2} m_3 l_2 l_{C3} S_3 \left(2\dot{q}_2 - \dot{q}_3 \right); \qquad c_{33} = \frac{1}{2} m_3 l_2 l_{C3} S_3 \dot{q}_2$$

Thế năng của robot có dạng

$$\Pi = m_1 g(d_1 - l_{C1}) + m_2 g l_{C2} S_2 + m_3 g(l_2 S_2 + l_{C3} S_{23}) \tag{3}$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{g} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l_{C2} C_2 + m_3 g l_2 C_2 + m_3 g l_{C3} C_{23} \\ m_3 g l_{C3} C_{23} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại hai

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{5}$$

ta nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động của robot ba khâu không gian

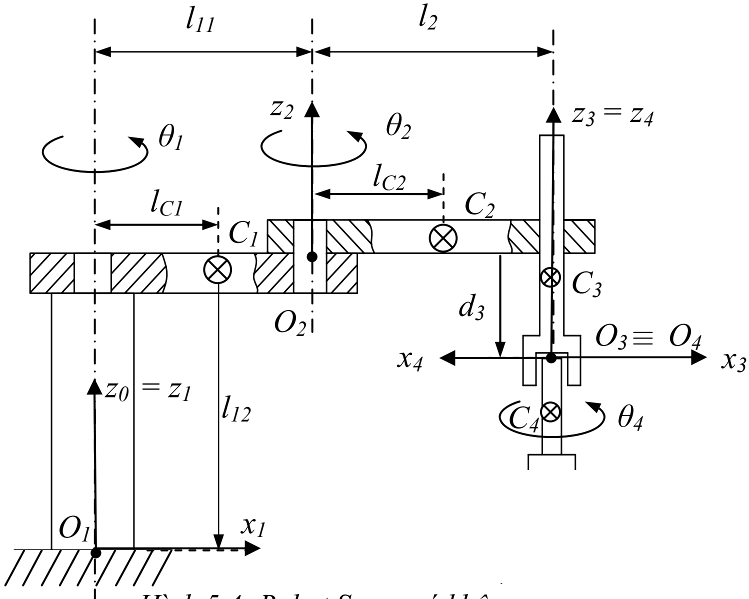
$$m_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}\dot{q}_1 = \tau_1 \qquad (m_{11} \text{ và } c_{11} \text{ được xác định ở trên})$$

$$\begin{aligned}
&\left[I_{2z} + I_{3z} + m_2 l_{C2}^2 + m_3 \left(l_{C3}^2 + l_2^2 + 2 l_2 l_{C3} C_3 \right) \right] \ddot{q}_2 + \left(I_{3z} + m_3 l_{C3}^2 + m_3 l_2 l_{C3} C_3 \right) \ddot{q}_3 \\
&-2 m_3 l_{C3} l_2 S_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \Big\{ \left[m_2 l_{C2}^2 S_2 C_2 + m_3 \left(l_2^2 S_2 C_2 + l_{C3}^2 S_{23} C_{23} + l_2 l_{C3} (2 C_2 S_{23} - S_3) \right) \right] \dot{q}_1 \\
&- \left[2 \left(I_{2x} - I_{2y} \right) S_2 C_2 + \left(I_{3x} - I_{3y} \right) S_{23} C_{23} \right] \dot{q}_1 \Big\} \dot{q}_1 - m_3 l_2 l_{C3} S_3 \dot{q}_3^2 + m_2 g l_{C2} C_2 \\
&+ m_3 g (l_2 C_2 + l_{C3} C_{23}) = \tau_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(I_{3z} + m_3 l_{C3}^2 + m_3 l_2 l_{C3} C_3 \right) \ddot{q}_2 + \left(I_{3z} + m_3 l_{C3}^2 \right) \ddot{q}_3 \\
&\quad + \left[m_3 l_{C3} S_{23} \left(l_2 C_2 + l_{C3} C_{23} \right) - \left(I_{3x} - I_{3y} \right) S_{23} C_{23} \right] \dot{q}_1^2 + \\
&\quad + m_3 l_2 l_{C3} S_3 \dot{q}_2^2 + m_3 g l_{C3} C_{23} = \tau_3
\end{aligned}$$

3.2 Robot Scara có khâu thao tác quay

Thí dụ 5.3. Cho mô hình cơ học robot Scara có khâu thao tác quay như hình 5.4. Các tham số động học Craig cho trên bảng 5.5, các tham số động lực của robot cho trên bảng 5.6.



Hình 5.4: Robot Scara có khâu thao tác quay

Khâu	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	q_i
1	0	0	0	θ_1	$q_1 = \theta_1$
2	0	l_{11}	l_{12}	θ_2	$q_2 = \theta_2$
3	0	l_2	d_3	0	$q_3 = d_3$
4	0	0	0	θ_4	$q_4 = \theta_4$

Bảng 5.5: Các tham số động học Craig robot Scara

Khâu	Vị trí trọng tâm			Khối lượng	Ma trận mômen quán tính **I**					
	x_C	y_C	z_C		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	l_{C1}	0	l_{12}	m_1	I_{1x}	I_{1y}	I_{1z}	0	0	0
2	l_{C2}	0	0	m_2	I_{2x}	I_{2y}	I_{2z}	0	0	0
3	0	0	l_{C3}	m_3	I_{3x}	I_{3y}	I_{3z}	0	0	0
4	0	0	$-l_{C4}$	m_4	I_{4x}	I_{4y}	I_{4z}	0	0	0

Bảng 5.6: Các tham số động lực robot Scara

Các ma trận Craig của các khâu của robot Scara đối với hệ quy chiếu R_0 có dạng

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0\\ S_1 & C_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}_2=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2=\begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_{11}C_1\\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_{11}S_1\\ 0 & 0 & 1 & l_{12}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_3=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3=\begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_{11}C_1+l_2C_{12}\\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_{11}S_1+l_2S_{12}\\ 0 & 0 & 1 & l_{12}+q_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_4=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3\mathbf{K}_4=\begin{bmatrix} C_{124} & -S_{124} & 0 & l_{11}C_1+l_2C_{12}\\ S_{124} & C_{124} & 0 & l_{11}S_1+l_2S_{12}\\ 0 & 0 & 1 & l_{12}+q_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Để xác định ma trận quán tính **M**, trước hết ta xác định vị trí trọng tâm các khâu.

$$^{tn}\mathbf{u}_{C1}^{(1)}=\begin{bmatrix} l_{C1}\\ 0\\ l_{12}\\ 1\end{bmatrix},\quad ^{tn}\mathbf{u}_{C2}^{(2)}=\begin{bmatrix} l_{C2}\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad ^{tn}\mathbf{u}_{C3}^{(3)}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ l_{C3}\\ 1\end{bmatrix},\quad ^{tn}\mathbf{u}_{C4}^{(4)}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -l_{C4}\\ 1\end{bmatrix}$$

Suy ra tọa độ trọng tâm trong hệ quy chiếu R_0

$$^{tn}\mathbf{r}_1=\mathbf{T}_1\,^{tn}\mathbf{u}_{C1}^{(1)}\Rightarrow\mathbf{r}_1=\begin{bmatrix} l_{C1}C_1\\ l_{C1}S_1\\ l_{12}\end{bmatrix};\qquad ^{tn}\mathbf{r}_2=\mathbf{T}_2\,^{tn}\mathbf{u}_{C2}^{(2)}\Rightarrow\mathbf{r}_2=\begin{bmatrix} l_{11}C_1+l_{C2}C_{12}\\ l_{11}S_1+l_{C2}S_{12}\\ l_{12}\end{bmatrix}$$

$$^{tn}\mathbf{r}_3=\mathbf{T}_3\,^{tn}\mathbf{u}_{C3}^{(3)}\Rightarrow\mathbf{r}_3=\begin{bmatrix} l_{11}C_1+l_2C_{12}\\ l_{11}S_1+l_2S_{12}\\ l_{12}+l_{C3}+q_3\end{bmatrix};\quad ^{tn}\mathbf{r}_4=\mathbf{T}_4\,^{tn}\mathbf{u}_{C4}^{(4)}\Rightarrow\mathbf{r}_4=\begin{bmatrix} l_{11}C_1+l_2C_{12}\\ l_{11}S_1+l_2S_{12}\\ l_{12}-l_{C4}+q_3\end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra các ma trận Jacobi tịnh tiến

$$\mathbf{J}_{T1}=\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} -l_{C1}S_1 & 0 & 0 & 0\\ l_{C1}C_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{T2}=\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}}=\begin{bmatrix} -l_{11}S_1-l_{C2}S_{12} & -l_{C2}S_{12} & 0 & 0\\ l_{C1}C_1+l_{C2}C_{12} & l_{C2}C_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{T3}=\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{q}}=\begin{bmatrix} -l_{11}S_1-l_{C2}S_{12} & -l_{C2}S_{12} & 0 & 0\\ l_{C1}C_1+l_{C2}C_{12} & l_{C2}C_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{T4}=\frac{\partial \mathbf{r}_4}{\partial \mathbf{q}}=\begin{bmatrix} -l_{11}S_1-l_{C2}S_{12} & -l_{C2}S_{12} & 0 & 0\\ l_{C1}C_1+l_{C2}C_{12} & l_{C2}C_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ các ma trận Craig ta có các ma trận côsin chỉ hướng của các khâu

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0\\ S_1 & C_1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\qquad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0\\ S_{12} & C_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0\\ S_{12} & C_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\qquad \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix} C_{124} & -S_{124} & 0\\ S_{124} & C_{124} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ các ma trận trên ta tính được các vận tốc góc của các khâu

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1=\dot{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_1^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0\\ \dot{q}_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2=\dot{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_2^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1-\dot{q}_2 & 0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3=\dot{\mathbf{A}}_3\mathbf{A}_3^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1-\dot{q}_2 & 0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_3=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_4=\dot{\mathbf{A}}_4\mathbf{A}_4^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1-\dot{q}_2-\dot{q}_4 & 0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_4=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

Từ đó dễ dàng suy ra các ma trận Jacobi quay

$$\mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{R3} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Để tính ma trận quán tính suy rộng **M** của robot ta sử dụng công thức

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{4} \left(m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{J}_{Ri} \right). \tag{1}$$

Thế các biểu thức ma trận Jacobi tịnh tiến và quay của các khâu vào (1) ta được

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}.$$

Trong đó:

$$m_{11} = I_{1z} + I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_1 l_{C1}^2 + m_2 \left(l_{C2}^2 + l_{11}^2 + 2 l_{11} l_{C2} C_2 \right)$$
$$+ \left(m_3 + m_4 \right) \left(l_2^2 + l_{11}^2 + 2 l_{11} l_2 C_2 \right)$$

$$m_{12} = I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2 \left(l_{C2}^2 + l_{11} l_{C2} C_2 \right) + \left(m_3 + m_4 \right) \left(l_2^2 + l_{11} l_2 C_2 \right)$$

$$m_{13} = m_{31} = m_{23} = m_{32} = m_{34} = m_{43} = 0$$

$$m_{22} = I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2 l_{C2}^2 + \left(m_3 + m_4 \right) l_2^2$$

$$m_{21} = I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2 \left(l_{C2}^2 + l_{11} l_{C2} C_2 \right) + \left(m_3 + m_4 \right) \left(l_2^2 + l_{11} l_2 C_2 \right)$$

$$m_{33} = m_3 + m_4; \quad m_{41} = m_{14} = m_{42} = m_{24} = m_{44} = I_{4z}.$$

Ma trận ly tâm và Côriolis được xác định bởi công thức 2.11

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \left(\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n \right) \right)^T \tag{2}$$

Với sự trợ giúp của MAPLE ta có

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$c_{11} = -2\left(m_2 l_{C2} + m_3 l_2 + m_4 l_2\right) l_{11} S_2 \dot{q}_2 \, ;$$

$$c_{12} = -\left(m_2 l_{C2} + m_3 l_2 + m_4 l_2\right) l_{11} S_2 \dot{q}_2$$

$$c_{13} = c_{31} = c_{14} = c_{41} = c_{23} = c_{32} = c_{24} = c_{42} = c_{33} = c_{34} = c_{43} = c_{44} = 0$$

$$c_{22} = \tfrac{1}{2}(m_2 l_{C2} + m_3 l_2 + m_4 l_2) l_{11} S_2 \dot{q}_1$$

$$c_{21} = \tfrac{1}{2}\left(m_2 l_{C2}\left(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right) + \left(m_3 + m_4\right)\left(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right) l_2\right) l_{11} S_2$$

Thế năng của các khâu

$$\Pi = m_1 g l_{12} + m_2 g l_{12} + m_3 g(l_{12} + l_{C3} + q_3) + m_4 g(l_{12} - l_{C4} + q_3) \qquad (3)$$

Từ (3) ta suy ra

$$\mathbf{g} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(m_3 + m_4\right) g & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (4)$$

Thay các ma trận trên vào phương trình Lagrange loại hai ta nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động của robot Scara có khâu thao tác quay

$$\Big[I_{1z} + I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_1 l_{C1}^2 + m_2\left(l_{C2}^2 + l_{11}^2 + 2 l_{11} l_{C2} C_2\right) +$$
$$\left(m_3 + m_4\right)\left(l_2^2 + l_{11}^2 + 2 l_{11} l_2 C_2\right)\Big]\ddot{q}_1 + \Big[I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2\left(l_{C2}^2 + l_{11} l_{C2} C_2\right)$$
$$+\left(m_3 + m_4\right)\left(l_2^2 + l_{11} l_2 C_2\right)\Big]\ddot{q}_2 + I_{4z}\ddot{q}_4 - 2\left(m_2 l_{C2} + m_3 l_2 + m_4 l_2\right) l_{11} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$
$$-\left(m_2 l_{C2} + m_3 l_2 + m_4 l_2\right) l_{11} S_2 \dot{q}_2^2 = \tau_1$$

$$\Big[I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2\left(l_{C2}^2 + l_{11} l_{C2} C_2\right) + \left(m_3 + m_4\right)\left(l_2^2 + l_{11} l_2 C_2\right)\Big]\ddot{q}_1 +$$
$$+\left(I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2 l_{C2}^2 + \left(m_3 + m_4\right) l_2^2\right)\ddot{q}_2 + I_{4z}\ddot{q}_4$$
$$+\left(m_2 l_{C2} + \left(m_3 + m_4\right) l_2\right) l_{11} S_2 \dot{q}_1^2 = \tau_2$$

$$\left(m_3 + m_4\right)\ddot{q}_3 + \left(m_3 + m_4\right) g = \tau_3, \quad I_{4z}\ddot{q}_1 + I_{4z}\ddot{q}_2 = \tau_4$$

3.3 Robot Scara có khâu thao tác tịnh tiến

Thí dụ 5.4. Robot Scara có khâu thao tác tịnh tiến có cấu trúc như hình 4.6. Bảng các tham số động học Craig như sau

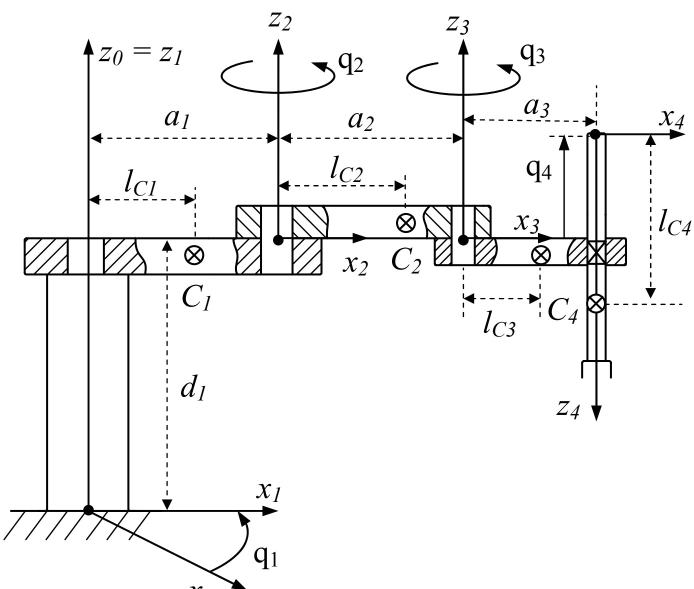
Khâu	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	a_1	d_1	q_2
3	0	a_2	0	q_3
4	180	a_3	q_4	0

Bảng 5.7: Tham số Craig robot Scara

Các tham số động lực của robot cho như bảng 4.7

Khâu	Vị trí trọng tâm			Khối lượng	Ma trận mômen quán tính **I**					
	x_C	y_C	z_C		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	l_{C1}	0	d_1	m_1	I_{1x}	I_{1y}	I_{1z}	0	0	0
2	l_{C2}	0	0	m_2	I_{2x}	I_{2y}	I_{2z}	0	0	0
3	l_{C3}	0	0	m_3	I_{3x}	I_{3y}	I_{3z}	0	0	0
4	0	0	l_{C4}	m_4	I_{4x}	I_{4y}	I_{4z}	0	0	0

Bảng 5.8: Các tham số động lực robot Scara



Hình 5.5: Robot Scara có khâu thao tác tịnh tiến

Các ma trận Craig tương đối của các khâu có dạng như sau:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra ma trận Craig của khâu 4 so với hệ quy chiếu cố định R_0:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} + a_3C_{123} \\ S_{123} & -C_{123} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} + a_3S_{123} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra các ma trận côsin chỉ hướng của các khâu

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 \\ S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 \\ S_{123} & -C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các vận tốc góc của các khâu được xác định theo các công thức sau

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \dot{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3 = \dot{\mathbf{A}}_3\mathbf{A}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3 & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_4 = \dot{\mathbf{A}}_4\mathbf{A}_4^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3 & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Để xác định véc tơ tọa độ trọng tâm các khâu, ta sử dụng phép nhân ma trận thuần nhất

$$^{h}\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{C}_i\, {}^{i}\mathbf{r}_{Ci}^{(i)} \qquad (2)$$

Từ bảng thông số động học ta có

$$^{1}\mathbf{r}_{C1}^{(1)} = \begin{bmatrix} l_{C1} \\ 0 \\ d_1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad ^{2}\mathbf{r}_{C2}^{(2)} = \begin{bmatrix} l_{C2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad ^{3}\mathbf{r}_{C3}^{(3)} = \begin{bmatrix} l_{C3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad ^{4}\mathbf{r}_{C4}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{C4} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta xác định được véc tơ tọa độ khối tâm các khâu

$$\mathbf{r}_{C1}^{(0)} = \begin{bmatrix} l_{C1}C_1 \\ l_{C1}S_1 \\ d_1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{r}_{C2}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1C_1 + l_{C2}C_{12} \\ a_1S_1 + l_{C2}S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix}; \qquad (4)$$

$$\mathbf{r}_{C3}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1C_1 + a_2C_{12} + l_{C3}C_{123} \\ a_1S_1 + a_2S_{12} + l_{C3}S_{123} \\ d_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{C4}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1C_1 + a_2C_{12} + l_{C3}C_{123} \\ a_1S_1 + a_2S_{12} + l_{C3}S_{123} \\ d_1 - l_{C4} - q_4 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Từ các biểu thức (4) và (5) ta tính được các ma trận Jacobi tịnh tiến

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{C1}S_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{C1}C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - l_{C2}S_{12} & -l_{C2}S_{12} & 0 & 0 \\ a_1C_1 + l_{C2}C_{12} & l_{C2}C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{T3} = \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} - l_{C3}S_{123} & -a_2S_{12} - l_{C3}S_{123} & -l_{C3}S_{123} & 0 \\ a_1C_1 + a_2C_{12} + l_{C3}C_{123} & a_2C_{12} + l_{C3}C_{123} & l_{C3}C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{T4} = \frac{\partial \mathbf{r}_4}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{11}S_1 - l_{C2}S_{12} & -l_{C2}S_{12} & 0 & 0 \\ l_{C1}C_1 + l_{C2}C_{12} & l_{C2}C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận Jacobi quay được xác định như sau

$$\mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{R3} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Thế các biểu thức trên vào ma trận quán tính suy rộng **M**

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{4} \left(m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{J}_{Ri} \right) \tag{6}$$

ta được

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}.$$

Trong đó:

$$
\begin{aligned}
m_{11} &= I_{1z} + I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_1 l_{C1}^2 + m_2\left(a_1^2 + l_{C2}^2 + 2a_1 l_{C2} C_2\right)\\
&\quad + m_3\left(a_1^2 + a_2^2 + l_{C3}^2 + 2a_1 a_2 C_2 + 2a_2 l_{C3} C_3 + 2a_1 l_{C3} C_{23}\right)\\
&\quad + m_4\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3 + 2a_1 a_2 C_2 + 2a_1 a_3 C_{23}\right)\\
m_{12} &= I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2\left(l_{C2}^2 + a_1 l_{C2} C_2\right)\\
&\quad + m_3\left(a_2^2 + l_{C3}^2 + a_1 a_2 C_2 + a_1 l_{C3} C_{23} + 2a_2 l_{C3} C_3\right)\\
&\quad + m_4\left(a_2^2 + a_3^2 + a_1 a_2 C_2 + 2a_2 a_3 C_3 + a_1 a_3 C_{23}\right)\\
m_{13} &= I_{3z} + I_{4z} + m_3\left(l_{C3}^2 + a_2 l_{C2} C_3 + a_1 l_{C3} C_{23}\right) + m_4\left(a_3^2 + a_2 a_3 C_3 + a_1 a_3 C_{23}\right)\\
m_{14} &= m_{41} = m_{24} = m_{42} = m_{34} = m_{43} = 0\\
m_{21} &= I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2\left(l_{C2}^2 + a_1 l_{C2} C_2\right)\\
&\quad + m_3\left(a_2^2 + l_{C3}^2 + 2a_2 l_{C3} C_3 + a_1 a_2 C_2 + a_1 l_{C3} C_{23}\right)\\
&\quad + m_4\left(a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3 + a_1 a_2 C_2 + a_1 a_3 C_{23}\right)\\
m_{22} &= I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2 l_{C2}^2 + m_3\left(a_2^2 + l_{C3}^2 + 2a_2 l_{C3} C_3\right)\\
&\quad + m_4\left(a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3\right)\\
m_{23} &= I_{3z} + I_{4z} + m_3\left(l_{C3}^2 + a_2 l_{C2} C_3\right) + m_4\left(a_3^2 + a_2 a_3 C_3\right)\\
m_{31} &= I_{3z} + I_{4z} + m_3\left(l_{C3}^2 + a_1 a_2 C_2 + a_1 l_{C3} C_{23}\right) + m_4\left(a_3^2 + a_1 a_2 C_2 + a_1 a_3 C_{23}\right)\\
m_{32} &= I_{3z} + I_{4z} + m_3\left(l_{C3}^2 + a_1 l_{C3} C_{23}\right) + m_4\left(a_3^2 + a_1 a_3 C_{23}\right)\\
m_{33} &= I_{3z} + I_{4z} + m_3 l_{C3}^2 + m_4 a_3^2\\
m_{44} &= m_4
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Ma trận ly tâm và Côriolis xác định qua công thức

$$
\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{I}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^T. \tag{8}
$$

Áp dụng phần mềm MAPLE ta dễ dàng tính được các phần tử của ma trận này

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Trong đó

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -2\left[m_2 l_{C2} S2 + m_3\left(a_2 S_2 + l_{C3}\mathrm{S}_{23}\right) + m_4\left(a_2 S_2 + a_3\mathrm{S}_{23}\right)\right]a_1\dot{q}_2 \\
&\quad -2\left[m_3 l_{C3}\left(a_2\mathrm{S}_3 + a_1\mathrm{S}_{23}\right) + m_4 a_3\left(a_2 S_3 + a_1 S_{23}\right)\right]\dot{q}_3 \\
c_{12} &= -\left[m_2 l_{C2} S2 + m_3\left(a_2 S_2 + l_{C3}\mathrm{S}_{23}\right) + m_4\left(a_2 S_2 + a_3\mathrm{S}_{23}\right)\right]a_1\dot{q}_2 \\
&\quad -\left[m_3 l_{C3}\left(2a_2\mathrm{S}_3 + a_1\mathrm{S}_{23}\right) + m_4 a_3\left(2a_2 S_3 + a_1 S_{23}\right)\right]\dot{q}_3 \\
c_{13} &= -\left(m_3 l_{C3}\mathrm{S}_{23} + m_4\mathrm{a}_3\mathrm{S}_{23}\right)a_1\dot{q}_2 - \left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)\left(a_2\mathrm{S}_3 + a_1\mathrm{S}_{23}\right)\dot{q}_3 \\
c_{14} &= c_{41} = c_{24} = c_{42} = c_{34} = c_{43} = c_{44} = 0 \\
c_{21} &= \left[m_2 l_{C2} S_2 + m_3\left(a_2 S_2 + l_{C3} S_{23}\right) + m_4\left(a_2 S_2 + a_3 S_{23}\right)\right]a_1\dot{q}_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[m_2 l_{C2} S_2 + m_3\left(a_2 S_2 + l_{C3} S_{23}\right) + m_4\left(a_2 S_2 + a_3 S_{23}\right)\right]a_1\dot{q}_2 + \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[m_3 l_{C3}\left(4a_2 S_3 + a_1 S_{23}\right) + m_4 a_3\left(4a_2 S_3 + a_1 S_{23}\right)\right]\dot{q}_3 \\
c_{22} &= \frac{1}{2}\left[m_2 l_{C2}\mathrm{S}_2 + m_3\left(a_2\mathrm{S}_2 + l_{C3}\mathrm{S}_{23}\right) + m_4\left(a_2\mathrm{S}_2 + a_3\mathrm{S}_{23}\right)\right]a_1\dot{q}_1 \\
&\quad -2m_3 a_2 S_3\left(l_{C3} + a_3\right)\dot{q}_3 \\
c_{23} &= \frac{1}{2}\left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)a_1 S_{23}\dot{q}_1 - \left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)a_2 S_3\dot{q}_3 \\
c_{31} &= \left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)\left(a_1 S_{23} + a_2 S_3\right)\left(\dot{q}_1 - \frac{1}{2}\dot{q}_3\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)\left(2a_2 S_3 - a_1 S_{23}\right)\dot{q}_2 \\
c_{32} &= \frac{1}{2}\left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)\left(a_1 S_{23} + 2a_2 S_3\right)\dot{q}_1 + \left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)a_2 S_3\left(\dot{q}_2 - \frac{1}{2}\dot{q}_3\right) \\
c_{33} &= \frac{1}{2}\left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)\left(a_1 S_{23} + 2a_2 S_3\right)\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\left(m_3 l_{C3} + m_4 a_3\right)a_2 S_3\dot{q}_2
\end{aligned} \tag{9}$$

Thế năng các các khâu của robot có dạng

$$\Pi = m_1 g d_1 + m_2 g d_1 + m_3 g d_1 + m_4 g\left(d_1 - l_{C4} + q_4\right). \tag{10}$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{g} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m_4 g \end{bmatrix}^T \tag{11}$$

Thay các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại hai

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{12}$$

ta nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + c_{13}\dot{q}_3 + g_1 = \tau_1$$

$$m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + c_{23}\dot{q}_3 + g_2 = \tau_2$$

$$m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + c_{31}\dot{q}_1 + c_{32}\dot{q}_2 + c_{33}\dot{q}_3 + g_3 = \tau_3$$

$$m_4\ddot{q}_4 + m_4 g = \tau_4$$

Các giá trị m_{ij}, c_{ij}, g_i được xác định trong (7), (9) và (11).

§4 MỘT SỐ TÍNH CHẤT QUAN TRỌNG CỦA MÔ HÌNH ĐỘNG LỰC

Dưới đây trình bày một vài tính chất quan trọng của mô hình động lực. Các tính chất này được sử dụng trong bài toán nhận dạng tham số và bài toán điều khiển robot.

4.1 Tính chất đối xứng ma trận khối lượng và tính chất đối xứng lệch ma trận $\mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$

Như đã biết phương trình vi phân chuyyển động của robot có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{4.1}$$

Trong đó:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{p}\left(m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri}\right) \tag{4.2}$$

$$c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k \tag{4.3}$$

Các tính chất cấu trúc:

1) Ma trận khối lượng suy rộng $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận đối xứng và xác định dương.
2) Ma trận $\mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C} \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng lệch.

Do động năng của robot là đại lượng vô hướng không âm $T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ nên $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận xác định dương. Mặt khác do $\mathbf{I}_i$ là ma trận đối xứng, nên có thể chứng minh được $\mathbf{J}_{Ti}^T\mathbf{J}_{Ti}$ và $\mathbf{J}_{Ri}^T\mathbf{I}_i\mathbf{J}_{Ri}$ là các ma trận đối xứng (tính chất này có thể suy ra dễ dàng bằng phép nhân ma trận), nên $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận đối xứng.

Từ biểu thức định nghĩa

$$\mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C} \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}\ , \tag{1}$$

ta có

$$n_{ij} = \dot{m}_{ij}(\mathbf{q}) - 2c_{ij}(\mathbf{q},\mathbf{q}) \tag{2}$$

$$n_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ji}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k \tag{3}$$

Do tính đối xứn của ma trận khối lượng suy rộng, thay thế vai trò của i và j ta được

$$n_{ji} = \dot{m}_{ji}(\mathbf{q}) - 2c_{ji}(\mathbf{q},\mathbf{q})$$

$$n_{ji} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial m_{ji}}{\partial q_k}\dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $n_{ij} = -n_{ji}$. Vậy **N** là ma trận đối xứng lệch.

4.2 Tính chất phụ thuộc tuyến tính vào các tham số động lực

Các phương trình vi phân chuyển động của robot được xác định bởi một số tham số xác định nào đó, như khối lượng các khâu m_j, mô men quán tính I_j, vị trí khối tâm $C_j(\xi, \zeta, \eta)$, v.v...Do tính phức tạp của các phương trình vi phân chuyển động của robot cho nên việc nhận dạng các tham số này rất khó khăn. Khá may mắn là các phương trình vi phân chuyển động của robot có thể biểu diễn dưới dạng phụ thuộc tuyến tính vào các tham số này theo nghĩa như sau :Tồn tại một hàm ma trận cỡ $n\times l$, $\mathbf{Y}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})$, và một véc tơ l chiều $\boldsymbol{\eta}$ để phương trình Lagrange loại 2 của robot có thể biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\eta} \tag{4.4}$$

Ma trận $\mathbf{Y}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})$ được gọi là ma trận hồi quy, còn véc tơ $\boldsymbol{\eta}$ được gọi là véc tơ tham số.

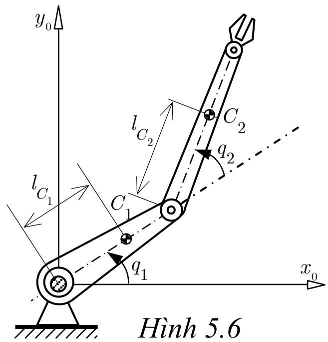
Thứ nguyên của không gian tham số, tức số lượng các tham số cần thiết để có thể viết phương trình vi phân chuyển động dưới dạng (4.4) là không duy nhất. Trong trường hợp tổng quát, mỗi vật rắn được mô tả bởi 10 tham số:

- 3 tham số vị trí khối tâm $C_j(\xi, \zeta, \eta)$
- 1 tham số khối lượng m_j

- 6 tham số mô men quán tính ($\mathbf{I}_j \in \mathbb{R}^{3\times3}$ là ma trận đối xứng nên có 6 tham số độc lập)

Như thế một robot n khâu sẽ có 10n tham số động lực. Tuy nhiên, robot là hệ cơ học chịu liên kết, nên chuyển động của các khâu bị ràng buộc bởi các liên kết khớp. Do đó số tham số động lực nhỏ hơn 10n. Việc tìm tập tối thiểu để tham số hóa các phương trình động lực của robot là một bài toán khá phức tạp. Vì vậy ở đây ta chỉ nêu ra một thí dụ minh họa..

Thí dụ 5.5. Cho robot hai khâu như hình 5.6. Xác định ma trận hồi quy và véc tơ tham số để phương trình vi phân chuyển động có thể biểu diễn dưới dạng phụ thuộc tuyến tính vào các tham số động lực.



Hình 5.6

Từ ví dụ robot 2 khâu phẳng trong mục 2, các ma trận quán tính **M** và ma trận ly tâm và Côriolis **C** có dạng

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 l_{C1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{C2}^2 + 2l_1 l_{C2}\cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2(l_{C2}^2 + l_1 l_{C2}\cos q_2) + I_2 \\ m_2(l_{C2}^2 + l_1 l_{C2}\cos q_2) + I_2 & m_2 l_{C2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{C2}\dot{q}_2 \sin q_2 & -m_2 l_1 l_{C2}\dot{q}_2 \sin q_2 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_{C2} \sin q_2 \left(\dot{q}_2 - 2\dot{q}_1\right) & \frac{1}{2} m_2 l_1 l_{C2}\dot{q}_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Thế năng của hệ

$$\Pi = m_1 g l_{C1} \sin q_1 + m_2[l_1 \sin q_1 + l_{C2}\sin(q_1 + q_2)]$$

Suy ra

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_{C1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{C2} g \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{C2} g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Thay (1), (2) và (3) vào phương trình (4.1) ta được

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + g_1 = \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + g_2 = \tau_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Nếu đưa vào các ký hiệu

$$\eta_1 = m_1 l_{C1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{C2}^2) + I_1 + I_2; \qquad \eta_2 = m_2 l_1 l_{C2}$$

$$\eta_3 = m_2 l_{C2}^2 + I_2; \qquad \eta_4 = m_1 l_{C1} + m_2 l_1; \qquad \eta_5 = m_2 l_{C2} \quad (5)$$

ta có các hệ thức sau

$$\begin{aligned} m_{11} &= \eta_1 + 2\eta_2 \cos q_2 \\ m_{12} &= m_{21} = \eta_3 + \eta_2 \cos q_2 \\ m_{22} &= \eta_3 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \eta_4 g \cos q_1 + \eta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ g_2 &= \eta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{7}$$

Ma trận **C** có dạng

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\eta_2 \sin q_2 \dot{q}_2 & -\eta_2 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \eta_2 \sin q_2 (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) & \eta_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Thay các biểu thức (6), (7) và (8) vào phương trình (4) ta được phương trình vi phân chuyển động

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1\eta_1 + \big((2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos q_2 + (2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_2^2)\sin q_2\big)\eta_2 + \\ &\quad + \ddot{q}_2\eta_3 + g\cos q_1\eta_4 + g\cos(q_1 + q_2)\eta_5 = \tau_1 \\ &\big(\ddot{q}_1 \cos q_2 + \sin q_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_1\big)\eta_2 + \big(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\big)\eta_3 \\ &\qquad + g\cos(q_1 + q_2)\eta_5 = \tau_2 \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên là hệ phương trình đại số tuyến tính đối với $\eta_1, \cdots, \eta_5$ và có thể biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau}(t)\,.$$

Trong đó

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos q_2 - (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2)\sin q_2 & \ddot{q}_2 & g\cos q_1 & g\cos(q_1 + q_2) \\ 0 & \ddot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 & (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) & 0 & g\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

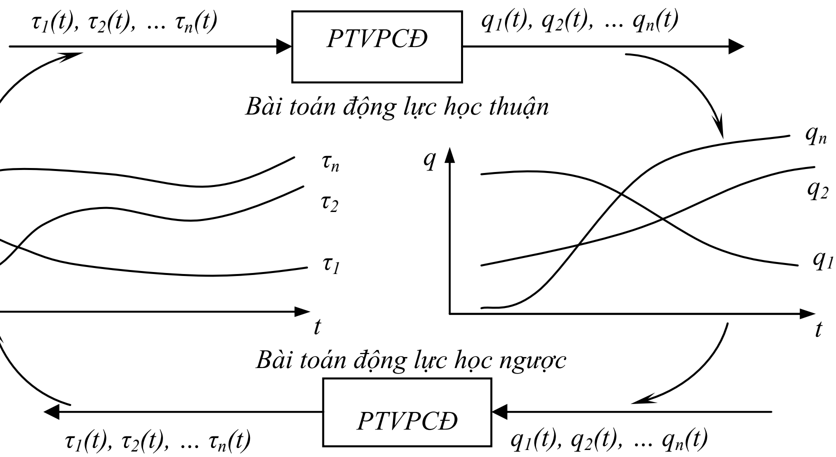
$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \end{bmatrix}^T.$$

§5 BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC THUẬN VÀ ĐỘNG LỰC HỌC NGƯỢC

Bài toán động lực học là bài toán giải hệ phương trình vi phân chuyển động

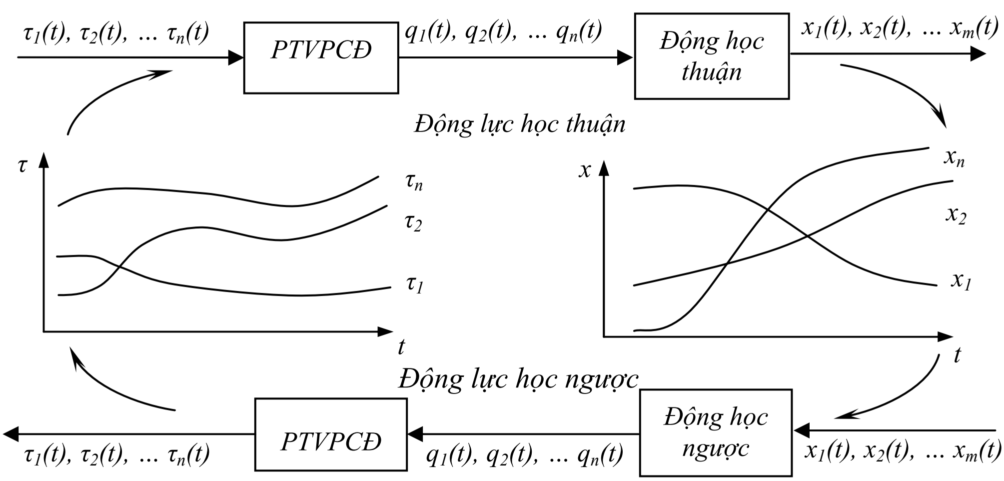
$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t)$$

Việc phân chia bài toán động lực học thuận và ngược trong không gian khớp được trình bầy trên hình 5.7.



Hình 5.7: Động lực học thuận và ngược trong không gian khớp

Trong không gian thao tác, việc phân chia bài toán động lực học thuận và ngược được trình minh họa trên hình 5.8.



Hình 5.8: Động lực học thuận và ngược trong không gian thao tác

Phương trình vi phân chuyển động của robot là phương trình vi phân phi tuyến phức tạp.Việc giải phương trình này có thể sử dụng phương pháp số. Thí dụ về tính toán động lực học ngược robot có thể xem trong tài liệu tham khảo, N. V. Khang, N.Q. Hoàng (2010).