

Chương 4

ĐỘNG HỌC NGƯỢC ROBOT CÔNG NGHIỆP

Nội dung của bài toán động học thuận là cho biết chuyển động của các tọa độ khớp, ta cần phải xác định chuyển động của các tọa độ thao tác. Ngược lại trong bài toán động học ngược, cho biết chuyển động của các tọa độ thao tác, ta cần phải xác định chuyển động của các tọa độ khớp. Khi giải bài toán động học ngược, ta cần phải quan tâm đến nhiệm vụ thao tác và kết cấu của robot. Cụ thể là:

- Trong bài toán công nghệ cho biết chuyển động của điểm định vị và hướng quay của khâu thao tác hay chỉ cho biết chuyển động của điểm định vị của khâu thao tác.
- Trong bài toán công nghệ người ta chỉ quan tâm đến vị trí đầu và vị trí cuối của khâu thao tác hay còn quan tâm đến một số vị trí trung gian của khâu thao tác.
- Số bậc tự do của robot bằng hay lớn hơn số các tọa độ xác định vị trí (điểm định vị và hướng) của khâu thao tác.

§1 THIẾT LẬP BÀI TOÁN

1.1 Không gian thao tác và không gian cấu hình của robot

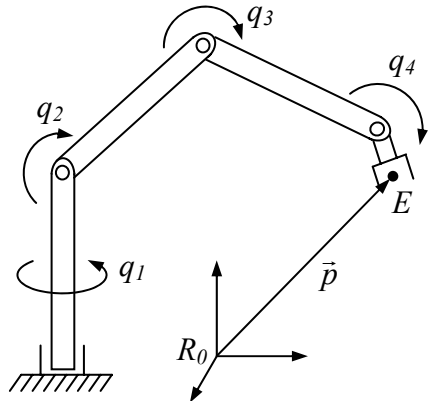
Xét mô hình robot như hình vẽ 4.1. Vị trí của khâu thao tác được xác định bởi sáu tham số $p_x, p_y, p_z, \varphi, \psi, \theta$. Trong đó $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ xác định vị trí của điểm thao tác E, còn $\boldsymbol{\alpha} = [\varphi \ \psi \ \theta]^T$ xác định hướng của khâu thao tác. Trong số sáu tọa độ trên, trong nhiều bài toán người ta chỉ quan tâm đến một số tọa độ trong số đó. Ký hiệu các tọa độ cần quan tâm của khâu thao tác là x_1, x_2, \dots, x_m ($m \leq 6$)

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \quad (1.1)$$

Các tọa độ x_1, x_2, \dots, x_m được gọi là các tọa độ thao tác. Tập các tọa độ thao tác tạo thành một không gian Euclide m chiều và được gọi là không gian thao tác của robot

$$\mathbb{R}_x = \{ \mathbf{x} \mid x_i = f_i(\mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathbb{R}_q \}. \quad (1.2)$$

Ta sử dụng các tọa độ suy rộng q_1, q_2, \dots, q_n để xác định vị trí các khâu của robot. Thông thường chúng là các tọa độ khớp. Như thế ta có



Hình 4.1: Tay máy 4 khâu

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T. \quad (1.3)$$

Các tọa độ q_1, q_2, \dots, q_n được gọi là các tọa độ khớp. Tập các tọa độ khớp q_1, q_2, \dots, q_n tạo thành một không gian Euclide n chiều và được gọi là không gian cấu hình của robot

$$\mathbb{R}_q = \{\mathbf{q} \mid q_{i\min} < q_i < q_{i\max}, i = 1, \dots, n\}. \quad (1.4)$$

1.2 Bài toán động học ngược

Khi giải bài toán động học thuận người ta xác định được quan hệ

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (1.5)$$

Từ phương trình (1.5) ta suy ra một cách hình thức

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (1.6)$$

Trong đó: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$, $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$.

Khi $m=n$, ta qui ước gọi là robot có cấu trúc không dư hoặc robot chuẩn. Khi $m < n$, ta qui ước gọi là robot có cấu trúc dư hoặc robot dư dẫn động. Khi $m > n$, bài toán này ít gặp trong kỹ thuật robot. Vì vậy ta không xét trường hợp này.

1.3 Các phương pháp giải bài toán ngược

Từ phương trình $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ (với $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$) giải ra $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ khi cho biết $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ là bài toán không đơn giản, nhất là khi $m < n$ (bài toán dư dẫn động).

Các phương pháp giải bài toán động học ngược được phân loại thành 2 nhóm: các phương pháp giải tích và các phương pháp số.

Nhóm các phương pháp giải tích (hay còn gọi là các phương pháp đại số và hình học) cho phép tìm ra kết quả \mathbf{q} là các biểu thức giải tích đối với \mathbf{x} . Các phương pháp này cho kết quả chính xác và nhanh chóng nhưng quá trình thành lập phương trình giải tích phức tạp và không có cách giải tổng quát đối với mọi loại robot. Nhóm các phương pháp số là các phương pháp tính gần đúng với sai số cho phép, được sử dụng với sự hỗ trợ của máy tính. Các phương pháp này cho ta cách giải tổng quát cho mọi loại robot, cho kết quả chính xác cần thiết nhưng đưa ra kết quả chậm hơn.

1.4 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Trong bài toán động học ngược robot ta hay gặp các phương trình lượng giác. Khi giải các phương trình lượng giác ta thường nhận được nhiều nghiệm. Vì vậy về mặt toán bài toán động học ngược có thể có nhiều nghiệm. Tuy nhiên do ý nghĩa vật lý ta thường chỉ có một nghiệm duy nhất. Vì vậy khi giải bài toán ngược động học robot ta cần phải quan tâm đến ý nghĩa vật lý của mô hình.

Chú ý rằng vùng làm việc của khâu thao tác là một phần của không gian thao tác. Do đó khi giải bài toán động học ngược robot ta phải quan tâm đến sự tồn tại của nghiệm. Cụ thể là nghiệm tìm được $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ có tương ứng với $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ nằm trong vùng làm việc hay không.

§2 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

2.1 Ý tưởng của phương pháp

Khi giải bài toán động học thuận bằng phương pháp ma trận Denavit-Hartenberg ta có ma trận biến đổi (the manipulator transformation matrix) xác định vị trí của khâu thao tác là

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_3 \dots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n(\mathbf{q}) & \mathbf{r}_E^{(0)}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Từ đó xác định được ma trận cosin chỉ hướng của khâu thao tác và véc tơ định vị điểm thao tác E là các hàm của các tọa độ suy rộng. Nếu ta sử dụng phương pháp ma trận Craig, ta có

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{C}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_3 \dots \mathbf{K}_{n-1} \mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n(\mathbf{q}) & \mathbf{r}_{On}^{(0)}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Từ đó xác định được ma trận cosin chỉ hướng của khâu thao tác. Véc tơ xác định vị trí điểm thao tác E có dạng

$$\mathbf{r}_E^{(0)} = \mathbf{r}_{On}^{(0)} + \mathbf{A}_n \mathbf{u}_E^{(0)}. \quad (2.3)$$

Mặt khác, từ nhiệm vụ công nghệ của robot ta có ma trận cấu hình của khâu thao tác (ma trận cosin chỉ hướng của khâu thao tác và véc tơ xác định vị trí điểm thao tác) dưới dạng hàm của các tọa độ thao tác

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & a_{13}(\mathbf{x}) & a_{14}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & a_{23}(\mathbf{x}) & a_{24}(\mathbf{x}) \\ a_{31}(\mathbf{x}) & a_{32}(\mathbf{x}) & a_{33}(\mathbf{x}) & a_{34}(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Từ đó ta có phương trình ma trận

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_n(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

Từ phương trình ma trận (2.5) sử dụng các phương pháp đại số và hình học ta có thể tìm được các hàm xác định các tọa độ khớp

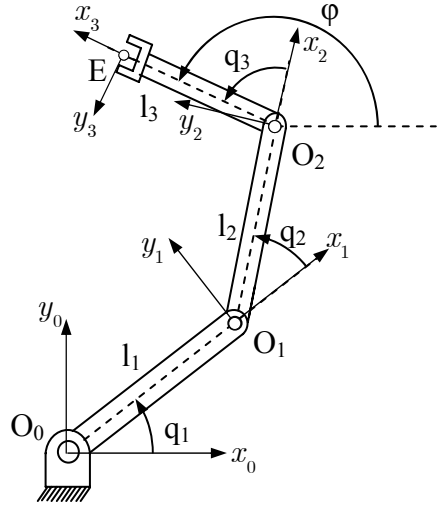
$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

Chú ý rằng từ phương trình ma trận (2.5) bằng cách cho các phần tử tương ứng của hai ma trận bằng nhau ta nhận được 12 phương trình đại số. Tuy nhiên do trong ma trận cosin chỉ hướng chỉ có 3 phần tử độc lập trong số đó chỉ có tối đa 6 phương trình độc lập. Đối với các robot có số bậc tự do nhỏ hơn sáu, ta có ít hơn sáu số phương trình độc lập.

2.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.1. Cho tay máy phẳng 3 khâu như hình 4.2. Cho vị trí khâu thao tác $x_E(t)$, $y_E(t)$, $\varphi(t)$. Hãy xác định các góc $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Lời giải. Từ bài toán động học thuận ta có



Hình 4.2: Tay máy 3 khâu

$$\mathbf{T}_3(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ma trận xác định vị trí khâu thao tác theo tọa độ khâu thao tác

$$\mathbf{T}_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & a_{13}(\mathbf{x}) & a_{14}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & a_{23}(\mathbf{x}) & a_{24}(\mathbf{x}) \\ a_{31}(\mathbf{x}) & a_{32}(\mathbf{x}) & a_{33}(\mathbf{x}) & a_{34}(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Trong đó a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) là các phần tử của ma trận cosin chỉ hướng của khâu thao tác, còn a_{14}, a_{24}, a_{34} là các tọa độ của điểm thao tác trong không gian thao tác.

Cân bằng các phần tử [4,1], [4,2] của hai ma trận (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} a_{14} &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ a_{24} &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

Bình phương hai vế của các biểu thức trên rồi cộng lại ta được

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (C_1 C_{12} + S_1 S_{12}) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C_2 \quad (4)$$

Từ (4) ta suy ra

$$\begin{cases} \cos q_2 = \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \\ \sin q_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2} \end{cases} \quad (5)$$

Vậy $q_2 = \text{atan2}(\sin q_2, \cos q_2)$ (6)

Khi đã biết q_2 , phương trình (3) có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} a_{14} = a_1 C_1 + a_2 (C_1 C_2 - S_1 S_2) \\ a_{24} = a_1 S_1 + a_2 (S_1 C_2 + S_2 C_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{14} = (l_1 + l_2 C_2) C_1 + l_2 S_2 S_1 \\ a_{24} = l_2 S_2 C_1 + (l_1 + l_2 C_2) S_1 \end{cases} \quad (7)$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (7) ta được

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 C_2 & -a_2 S_2 \\ a_2 S_2 & a_1 + a_2 C_2 \end{vmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 C_2 = x_{O3}^2 + y_{O3}^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{O3} & -a_2 S_2 \\ y_{O3} & a_1 + a_2 C_2 \end{vmatrix} = a_2 (x_{O3} C_2 + y_{O3} S_2)$$

$$\Rightarrow \cos q_1 = \frac{a_2 (x_{O3} C_2 + y_{O3} S_2)}{x_{O3}^2 + y_{O3}^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 C_2 & x_{O3} \\ a_2 S_2 & y_{O3} \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 C_2) y_{O3} - a_2 S_2 x_{O3}$$

$$\Rightarrow \sin q_1 = \frac{(a_1 + a_2 C_2) y_{O3} - a_2 S_2 x_{O3}}{x_{O3}^2 + y_{O3}^2}$$

Từ đó suy ra

$$q_1 = \text{atan2}(\sin q_1, \cos q_1) \quad (8)$$

Chú ý: Khái niệm hàm $\text{atan2}(x, y)$ được trình bày trong phần phụ lục.

Cho hai phần tử ở ô $[1, 1]$ của các ma trận (1) và (2) bằng nhau ta được

$$a_{11} = C_{123} \quad \text{hay} \quad \cos \varphi = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

Từ đó suy ra

$$q_3 = \varphi - q_1 - q_2 \quad (9)$$

Các biểu thức (6), (8) và (9) cho ta biểu thức giải tích xác định tọa độ các biến khớp theo tọa độ khâu thao tác tay máy.

Thí dụ 4.2. Cho mô hình robot không gian 3 bậc tự do như hình vẽ 4.3. Hãy xác định các tọa độ khớp khi biết vị trí điểm thao tác E và hướng của khâu thao tác.

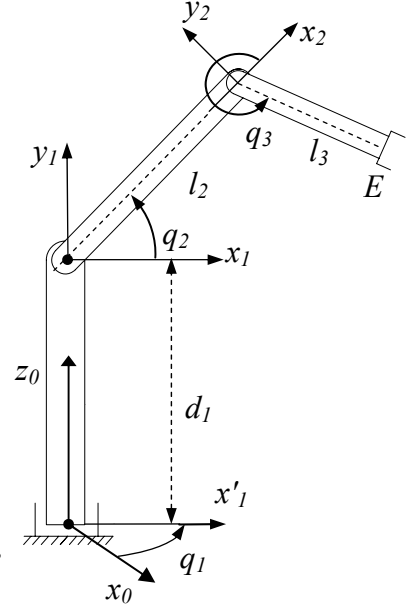
Lời giải. Khi cho biết vị trí điểm thao tác E và hướng của khâu thao tác, ta có ma trận cấu hình của khâu thao tác

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & a_{13}(\mathbf{x}) & a_{14}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & a_{23}(\mathbf{x}) & a_{24}(\mathbf{x}) \\ a_{31}(\mathbf{x}) & a_{32}(\mathbf{x}) & a_{33}(\mathbf{x}) & a_{34}(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Trong đó a_{14}, a_{24}, a_{34} là các tọa độ của điểm thao tác E:

$$a_{14} = x_E^{(0)}(t), a_{24} = y_E^{(0)}(t), a_{34} = z_E^{(0)}(t),$$

còn $a_{ij}(i, j=1,2,3)$ là các phần tử của ma trận cosin chỉ hướng của khâu thao tác.



Hình 4.3: Robot không gian 3 bậc tự do

Từ bài toán động học thuận ta có các ma trận

$$\mathbf{H}_1(q_1) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2(q_2) = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3(q_3) = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_3(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_3 = \mathbf{H}_1(q_1)\mathbf{H}_2(q_2)\mathbf{H}_3(q_3) = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & -S_1 & C_1(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & l_2 S_2 + l_3 S_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Bước 1. Cho các phần tử (1,4) và (2,4) của hai ma trận (1) và (3) bằng nhau ta được

$$C_1(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) = a_{14} \quad (4)$$

$$S_1(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) = a_{24} \quad (5)$$

Chia phương trình (5) cho phương trình (4) ta được

$$\tan q_1 = \frac{S_1}{C_1} = \frac{a_{24}}{a_{14}}$$

Từ đó suy ra

$$q_1 = \text{atan2}(a_{24}, a_{14}) \quad (6)$$

Bước 2. Từ phương trình ma trận (3) ta suy ra

$$\mathbf{H}_1(q_1)\mathbf{H}_2(q_2)=\mathbf{D}_3(\mathbf{x})(\mathbf{H}_3(q_3))^{-1} \quad (7)$$

Trong đó

$$\mathbf{H}_3^{-1}(q_3)=\begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 & -l_3 \\ -S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_3(\mathbf{x})(\mathbf{H}_3(q_3))^{-1}=\begin{bmatrix} C_3a_{11}-S_3a_{12} & S_3a_{11}+C_3a_{12} & a_{13} & -l_3a_{11}+a_{14} \\ C_3a_{21}-S_3a_{22} & S_3a_{21}+C_3a_{22} & a_{23} & -l_3a_{21}+a_{24} \\ C_3a_{31}-S_3a_{32} & S_3a_{31}+C_3a_{32} & a_{33} & -l_3a_{31}+a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Mặt khác ta có

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\mathbf{H}_3(\mathbf{q}_3)=\begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & l_2C_1C_2 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 & l_2S_1C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

So sánh các phần tử ở các ô (1,4), (2,4) và (3,4) của các ma trận (9) và (10) ta được

$$l_2C_1C_2=-l_3a_{11}+a_{14} \quad (11)$$

$$l_2S_1C_2=-l_3a_{21}+a_{24} \quad (12)$$

$$l_2S_2=-l_3a_{31}+a_{34} \quad (13)$$

Bình phương hai vế của (11) và (12) rồi cộng lại ta được

$$l_2^2C_2^2=\left(-l_3a_{11}+a_{14}\right)^2+\left(-l_3a_{21}+a_{24}\right)^2 \quad (14)$$

Từ đó suy ra

$$l_2C_2=\pm\sqrt{\left(-l_3a_{11}+a_{14}\right)^2+\left(-l_3a_{21}+a_{24}\right)^2} \quad (15)$$

Kết hợp (13) và (15) ta được

$$\frac{S_2}{C_2}=\frac{-l_3a_{31}+a_{34}}{\pm\sqrt{\left(-l_3a_{11}+a_{14}\right)^2+\left(-l_3a_{21}+a_{24}\right)^2}} \quad (16)$$

Từ (16) ta suy ra

$$q_2=A\tan 2\left(-l_3a_{31}+a_{34},\pm\sqrt{\left(-l_3a_{11}+a_{14}\right)^2+\left(-l_3a_{21}+a_{24}\right)^2}\right) \quad (17)$$

Bước 3. So sánh các phần tử (3,1) và (3,2) của hai ma trận (1) và (2) ta có

$$S_{32} = a_{31}, \quad C_{32} = a_{32} \quad (18)$$

Chia hai vế của (18) cho nhau ta được

$$\frac{S_{32}}{C_{32}} = \frac{a_{31}}{a_{32}} \quad (19)$$

Từ đó suy ra

$$q_2 + q_3 = \text{atan2}(a_{31}, a_{32}) \quad (20)$$

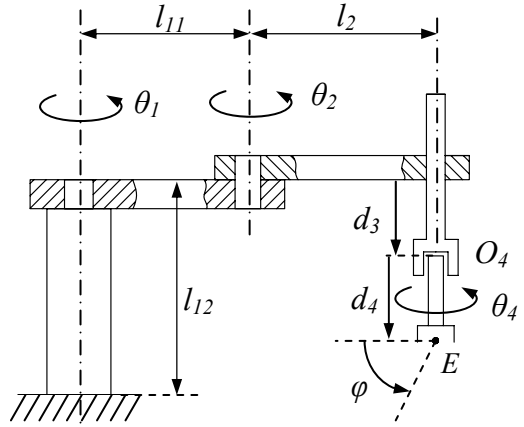
Từ các phương trình (17) và (20) ta có

$$q_3 = \text{atan2}(a_{31}, a_{32}) - q_2 \quad (21)$$

Các phương trình (6), (17) và (21) cho ta các nghiệm $q_1(t), q_3(t), q_3(t)$ của bài toán động học ngược robot 3 khâu không gian.

Thí dụ 4.3. Robot Scara 4 bậc tự do có khâu thao tác quay như hình 4.4. Cho biết vị trí khâu thao tác $x_E(t), y_E(t), z_E(t), \varphi(t)$. Xác định giá trị các biến khớp $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)$.

Lời giải. Theo các tính toán trong động học thuận, ta có ma trận Denavit-Hartenberg của khâu thao tác của robot Scara



Hình 4.4: Robot Scara

$$\mathbf{T}_4(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} C_{124} & S_{124} & 0 & l_{11}C_1 + l_2C_{12} \\ S_{124} & -C_{124} & 0 & l_{11}S_1 + l_2S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & l_{12} - q_3 - l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ma trận xác định vị trí của tay máy trong không gian thao tác là

$$\mathbf{T}_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & a_{13}(\mathbf{x}) & a_{14}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & a_{23}(\mathbf{x}) & a_{24}(\mathbf{x}) \\ a_{31}(\mathbf{x}) & a_{32}(\mathbf{x}) & a_{33}(\mathbf{x}) & a_{34}(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Trong đó a_{14}, a_{24}, a_{34} là các tọa độ của điểm thao tác E:

$$a_{14} = x_E^{(0)}(t), a_{24} = y_E^{(0)}(t), a_{34} = z_E^{(0)}(t),$$

còn $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ là các phần tử của ma trận cosin chỉ hướng của khâu thao tác. Nếu ta chọn các góc Roll-Picht-Yaw làm các góc định hướng của khâu thao tác thì

$$\mathbf{T}_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4(\mathbf{x}) & \mathbf{r}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta C_\gamma & -C_\beta S_\gamma & S_\beta & x \\ C_\alpha C_\gamma + S_\alpha S_\beta C_\gamma & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & -S_\alpha C_\beta & y \\ S_\alpha S_\gamma - C_\alpha S_\beta C_\gamma & S_\alpha S_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha C_\beta & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Trong thí dụ này các tọa độ thao tác có dạng

$$\mathbf{x} = [x_E \quad y_E \quad z_E \quad \varphi]^T.$$

Do đó

$$\mathbf{T}_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 & x_E \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 & y_E \\ 0 & 0 & 1 & z_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Bước 1. Cân bằng các phần tử (3,4) của hai ma trận (1) và (2) ta được

$$l_{12} + d_3 - l_4 = a_{34} \quad (3)$$

hay

$$d_3 = a_{34} + l_4 - l_{12} \quad (4)$$

Bước 2. Cân bằng các phần tử (1,4) và (2,4) của hai ma trận (1) và (2) ta được

$$l_{11}C_1 + l_2C_{12} = a_{14} \quad (5)$$

$$l_{11}S_1 + l_2S_{12} = a_{24} \quad (6)$$

Lấy tổng của bình phương (5) và (6) ta có

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 = l_{11}^2 + l_2^2 + 2l_{11}l_2(C_1C_{12} + S_1S_{12}) \quad (7)$$

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 = l_{11}^2 + l_2^2 + 2l_{11}l_2C_2 \quad (8)$$

Từ (8) ta suy ra

$$\cos q_2 = \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 - l_{11}^2 - l_2^2}{2l_{11}l_2} \quad (9)$$

$$\sin q_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2} \quad (10)$$

Vậy ta có

$$q_2 = \text{atan2}(\sin q_2, \cos q_2) \quad (11)$$

Bước 3. Thay q_2 đã tìm được vào (5) và (6) ta có

$$\begin{cases} a_{14} = l_{11}C_1 + l_2(C_1C_2 - S_1S_2) \\ a_{24} = l_{11}S_1 + l_2(S_1C_2 + S_2C_1) \end{cases} \quad (12)$$

Chú ý đến các công thức lượng giác ta được

$$\begin{cases} a_{14} = (l_{11} + l_2C_2)C_1 + l_2S_2S_1 \\ a_{24} = l_2S_2C_1 + (l_{11} + l_2C_2)S_1 \end{cases} \quad (13)$$

Các phương trình (13) là một hệ phương trình đại số tuyến tính đối với ẩn S_1 và C_1 . Giải ra ta được

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} l_{11} + l_2C_2 & -l_2S_2 \\ l_2S_2 & l_{11} + l_2C_2 \end{vmatrix} = l_{11}^2 + l_2^2 + 2l_{11}l_2C_2 = a_{14}^2 + a_{24}^2 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_{14} & -l_2S_2 \\ a_{24} & l_{11} + l_2C_2 \end{vmatrix} = l_2(a_{14}C_2 + a_{24}S_2) \\ \cos q_1 &= \frac{l_2(a_{14}C_2 + a_{24}S_2)}{a_{14}^2 + a_{24}^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} l_{11} + l_2C_2 & a_{14} \\ l_2S_2 & a_{24} \end{vmatrix} = (l_{11} + l_2C_2)a_{24} - l_2S_2a_{14} \\ \sin q_1 &= \frac{(l_{11} + l_2C_2)a_{24} - l_2S_2a_{14}}{a_{14}^2 + a_{24}^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Từ (14) và (15) ta suy ra

$$q_1 = \text{atan2}(\sin q_1, \cos q_1) \quad (16)$$

Bước 4. So sánh các phần tử ở ô (1,1) của hai ma trận (1) và (2) ta được

$$\cos(q_1 + q_2 + q_3) = a_{11} = \cos \varphi \quad (17)$$

Vậy

$$q_4 = \varphi - q_1 - q_2 \quad (18)$$

Các biểu thức (4), (11), (16), và (18) xác định hàm các tọa độ khớp theo các tọa độ thao tác.

§3 CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ

3.1 Các công thức xác định véc tơ vận tốc và véc tơ gia tốc suy rộng

Giả sử ta biết được quan hệ giữa các tọa độ thao tác và các tọa độ khớp

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Khi $m < n$ robot có số bậc tự do $f = n$, lớn hơn số tọa độ xác định vị trí của khâu thao tác. Khi đó robot được gọi là robot dư dẫn động. Đạo hàm 2 vế của biểu thức (3.1) theo thời gian, ta được

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Trong đó

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Ma trận $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ cỡ $m \times n$ được gọi là ma trận Jacobi. Giả sử hạng của ma trận $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ là m . Người ta thường chọn ma trận tựa nghịch đảo của ma trận chữ nhật $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ dưới dạng (xem phụ lục)

$$\mathbf{J}^+(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q})]^{-1} \quad (3.4)$$

Khi đó từ biểu thức (3.2) ta suy ra công thức tính véc tơ vận tốc suy rộng

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^+(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (3.5)$$

Tiếp tục đạo hàm hai vế của biểu thức (3.2) ta được

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.6)$$

Từ (3.6) ta suy ra

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.7)$$

Thế (3.5) vào (3.7) ta được

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^+(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}(t)$$

Từ đó ta suy ra biểu thức xác định véc tơ gia tốc suy rộng

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^+(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{J}^+(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^+(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (3.8)$$

3.2 Các công thức xác định véc tơ tọa độ suy rộng

Các công thức (3.5) và (3.8) cho phép ta xác định được véc tơ vận tốc suy rộng và véc tơ gia tốc suy rộng, nếu như biết được $\mathbf{q}(t)$ tại thời điểm khảo sát và các quy luật $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$. Bây giờ ta trình bày thuật toán xác định $\mathbf{q}(t)$. Giả sử robot làm việc trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = T$. Chia khoảng thời gian làm việc của robot $[0, T]$ thành N khoảng bằng nhau

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

Như thế ta có

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad \text{với } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Áp dụng khai triển Taylor hàm véc tơ $\mathbf{q}(t)$ ở lân cận giá trị $t = t_k$ ta được

$$\mathbf{q}(t_k + \Delta t) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}(t_k)(\Delta t)^2 + \dots \quad (3.9)$$

Thế biểu thức (3.5) vào (3.9) và bỏ qua các vô cùng bé bậc lớn hơn hoặc bằng 2 ta được

$$\mathbf{q}(t_k) \approx \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^+(\mathbf{q}(t_k))\dot{\mathbf{x}}(t_k)\Delta t, \quad \text{với } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

Từ các công thức ở trên ta có sơ đồ tính như sau:

- *Bước 1:* Cho biết \mathbf{q}_0 , ta tính $\mathbf{J}(\mathbf{q}_0)$, $\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_0)$, $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_0)$. Tính $\dot{\mathbf{q}}(t=0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ theo công thức (3.5) và tính $\ddot{\mathbf{q}}(t=0) = \ddot{\mathbf{q}}_0$ theo công thức (3.8).
- *Bước 2:* Cho k chạy từ 0 đến $N-1$. Tính $\mathbf{q}(t_{k+1})$ theo công thức (3.10), sau đó tính $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$ và $\ddot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$ theo các công thức (3.5) và (3.8).

Chú ý:

- ① Việc tính $\mathbf{q}(t_{k+1})$ theo công thức (3.10) cho ta kết quả khá thô của $\mathbf{q}(t)$ tại $t = t_{k+1}$. Vì vậy để nâng cao độ chính xác của $\mathbf{q}(t_{k+1})$. Đó là nội dung của thuật toán *hiệu chỉnh gia lượng véc tơ tọa độ suy rộng* mà ta sẽ trình bày dưới đây.
- ② Khi $m = n$ ta thay ma trận tựa nghịch đảo $\mathbf{J}^+(\mathbf{q})$ trong các công thức (3.5), (3.8) và (3.10) bằng ma trận nghịch đảo thông thường $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$.

3.3 Thuật toán hiệu chỉnh gia lượng véc tơ tọa độ suy rộng

Để thuận tiện, dưới đây ta sử dụng các ký hiệu sau

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= \mathbf{q}(t_k), \quad \dot{\mathbf{q}}_k = \dot{\mathbf{q}}(t_k), \quad \ddot{\mathbf{q}}_k = \ddot{\mathbf{q}}(t_k), \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}(t_k), \quad \dot{\mathbf{x}}_k = \dot{\mathbf{x}}(t_k), \quad \ddot{\mathbf{x}}_k = \ddot{\mathbf{x}}(t_k). \end{aligned}$$

a) *Hiệu chỉnh gia lượng véc tơ tọa độ suy rộng tại thời điểm t_0*

Ký hiệu $t_0 = 0$ là thời điểm đầu. Ta có thể xác định véc tơ gần đúng ban đầu $\tilde{\mathbf{q}}_0$ của véc tơ \mathbf{q}_0 bằng phương pháp vẽ (hoặc bằng thực nghiệm). Sau đó áp dụng khai triển Taylor tìm gần đúng tốt hơn của \mathbf{q}_0 như sau. Giả sử lấy

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0 \quad (3.11)$$

Theo phương trình (3.1), ta có

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}_0)\Delta\mathbf{q}_0 + \dots$$

Từ đó suy ra công thức gần đúng

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{q}}_0)\Delta\mathbf{q}_0 \approx \mathbf{x}_0 - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0) \quad (3.12)$$

Giải phương trình đại số tuyến tính (3.12) với ẩn $\Delta\mathbf{q}_0$, ta được

$$\Delta\mathbf{q}_0 = \mathbf{J}^+(\tilde{\mathbf{q}}_0)[\mathbf{x}_0 - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0)].$$

Sau đó ta lấy

$$\tilde{\mathbf{q}}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0 \quad (3.13)$$

Nếu $\|\Delta\mathbf{q}_0\| \geq \varepsilon$ (với ε là tham số dương bé cho trước) thì ta lại thế (3.13) vào phương trình (3.12) và sau đó lại giải phương trình này. Quá trình lặp được dừng lại khi $\|\Delta\mathbf{q}_0\| < \varepsilon$. Kết quả ta được

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0. \quad (3.14)$$

Biết được nghiệm \mathbf{q}_0 , thế vào các biểu thức (3.5) và (3.8) ta tìm được $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ và $\ddot{\mathbf{q}}(0) = \ddot{\mathbf{q}}_0$.

b. *Hiệu chỉnh gia lượng véc tơ tọa độ suy rộng tại thời điểm t_{k+1}*

Giả sử ta đã biết $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(t_k)$. Trước tiên ta xác định giá trị gần đúng $\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}$ theo công thức (3.10)

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \mathbf{J}^+(\mathbf{q}_k)\dot{\mathbf{x}}_k\Delta t \quad (3.15)$$

Sau đó ta xác định véc tơ chính xác hơn của \mathbf{q}_{k+1} theo công thức

$$\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta\mathbf{q}_{k+1} \quad (3.16)$$

Ta cần xác định $\Delta\mathbf{q}_{k+1}$. Theo công thức Taylor từ phương trình (1.1) ta có

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{k+1}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta\mathbf{q}_{k+1}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1})\Delta\mathbf{q}_{k+1} + \dots \quad (3.17)$$

Từ phương trình (3.17) ta suy ra công thức gần đúng

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1})\Delta\mathbf{q}_{k+1} \approx \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}) \quad (3.18)$$

Chú ý rằng $\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1})$ là ma trận cỡ $m \times n$, $\Delta \mathbf{q}_{k+1}$ là véc tơ có n phần tử. Do đó trong (3.18) số ẩn lớn hơn số phương trình ($m < n$). Nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của phương trình (3.18) có dạng

$$\Delta \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{J}^+(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1})[\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1})] \quad (3.19)$$

Sau đó ta lấy

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta \mathbf{q}_{k+1} \quad (3.20)$$

Nếu $\|\Delta \mathbf{q}_{k+1}\| \geq \varepsilon$ thì thay (3.20) vào (3.19) và tiếp tục giải hệ phương trình này. Khi $\|\Delta \mathbf{q}_{k+1}\| < \varepsilon$ thì ta dừng lại và lấy

$$\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}. \quad (3.21)$$

Biết được \mathbf{q}_{k+1} , ta tính $\dot{\mathbf{q}}_{k+1}$ theo công thức (3.5) và $\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}$ theo công thức (3.8).

Sử dụng các phần mềm MATLAB hoặc MAPLE ta dễ dàng giải bài toán động học ngược robot dựa theo thuật toán trên.

3.4 Đánh giá sai số

Từ các yêu cầu công nghệ ta có $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Mặt khác từ bài toán động học thuận ta có $\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{q}_k)$. Do đó để đánh giá sai số của phương pháp ta đưa vào các công thức xác định sai số của dịch chuyển, vận tốc và gia tốc như sau

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t_k) &= \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) \\ \dot{\mathbf{e}}(t_k) &= \dot{\mathbf{x}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}_k = \dot{\mathbf{x}}(t_k) - \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)\dot{\mathbf{q}}_k \\ \ddot{\mathbf{e}}(t_k) &= \ddot{\mathbf{x}}(t_k) - \ddot{\mathbf{x}}_k = \ddot{\mathbf{x}}(t_k) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_k)\dot{\mathbf{q}}_k - \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)\ddot{\mathbf{q}}_k \end{aligned} \quad (3.22)$$

Độ lớn các chuẩn của các véc tơ $\mathbf{e}(t_k), \dot{\mathbf{e}}(t_k), \ddot{\mathbf{e}}(t_k)$ cho biết độ chính xác của phương pháp số mà chúng ta sử dụng.

Dựa trên thuật toán trên, sử dụng các phần mềm MATLAB và MAPLE ta dễ dàng xây dựng chương trình giải bài toán động học ngược robot một cách tổng quát.

3.5 Các bài toán áp dụng

Thí dụ 4.4. Xác định quy luật chuyển động của các khớp động thuộc robot 6 khâu động có sơ đồ kết cấu như hình vẽ 4.5. Cho biết độ dài a_i của các khâu

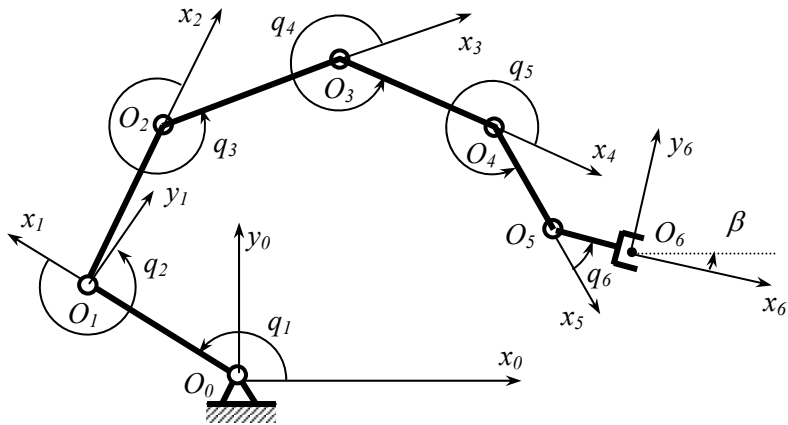
$$a_1 = a_2 = 0.30 \text{ m}; a_3 = a_4 = a_5 = 0.40 \text{ m}; a_6 = 0.25 \text{ m}$$

và biết phương trình chuyển động của điểm thao tác là

$$x_E = 0.8 + 0.2 \cos(2t),$$

$$y_E = -0.8 + 0.2 \sin(2t).$$

Hướng của khâu thao tác so phương nằm ngang luôn cố định $\beta = 90^\circ$,



Hình 4.5 : Robot 6 khâu động

Từ sơ đồ kết cấu của robot ta có:

$$x_E = a_6 C_{123456} + a_5 C_{12345} + a_4 C_{1234} + a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + a_1 C_1$$

$$y_E = a_6 S_{123456} + a_5 S_{12345} + a_4 S_{1234} + a_3 S_{123} + a_2 S_{12} + a_1 S_1$$

Từ đó dễ dàng tính toán các phần tử của ma trận Jacobi (3.3)

$$J_{11} = -a_6 S_{123456} - a_5 S_{12345} - a_4 S_{1234} - a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - a_1 S_1$$

$$J_{12} = -a_6 S_{123456} - a_5 S_{12345} - a_4 S_{1234} - a_3 S_{123} - a_2 S_{12}$$

$$J_{13} = -a_6 S_{123456} - a_5 S_{12345} - a_4 S_{1234} - a_3 S_{123}$$

$$J_{14} = -a_6 S_{123456} - a_5 S_{12345} - a_4 S_{1234}$$

$$J_{15} = -a_6 S_{123456} - a_5 S_{12345} ; J_{16} = -a_6 S_{123456}$$

$$J_{21} = a_6 C_{123456} + a_5 C_{12345} + a_4 C_{1234} + a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + a_1 C_1$$

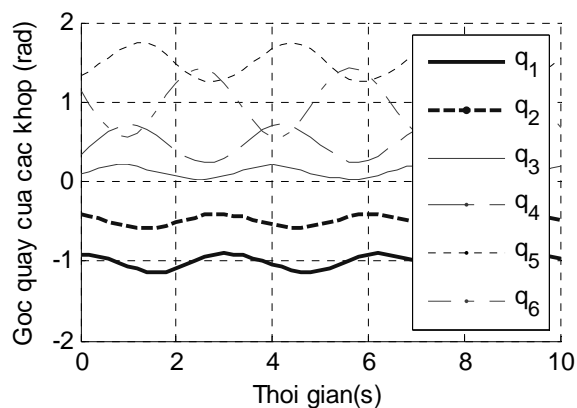
$$J_{22} = a_6 C_{123456} + a_5 C_{12345} + a_4 C_{1234} + a_3 C_{123} + a_2 C_1$$

$$J_{23} = a_6 C_{123456} + a_5 C_{12345} + a_4 C_{1234} + a_3 C_{123}$$

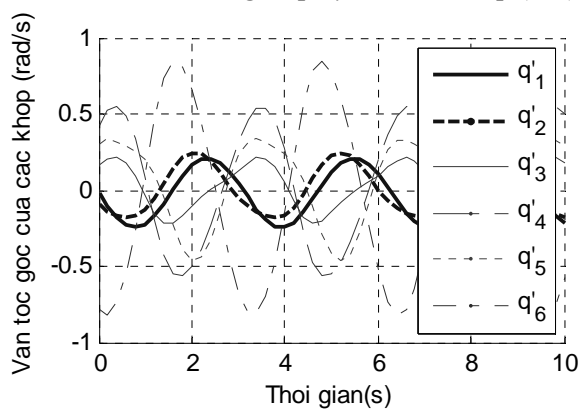
$$J_{24} = a_6 C_{123456} + a_5 C_{12345} + a_4 C_{1234}$$

$$J_{25} = a_6 C_{123456} + a_5 C_{12345} ; J_{26} = a_6 C_{123456}$$

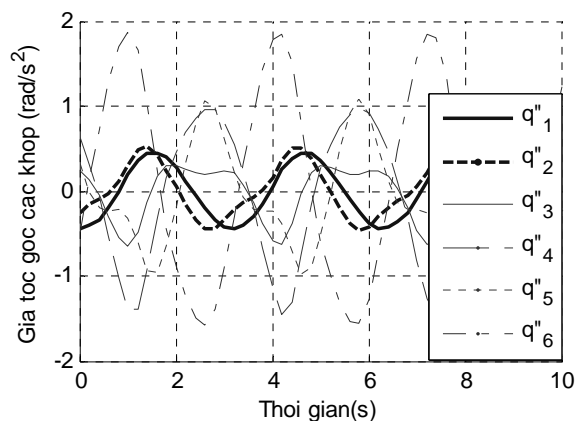
Ta chọn bước chia thời gian $\Delta t = 0.001(s)$, chọn sai số $\varepsilon = 10^{-6}$ (rad). Sử dụng chương trình giải bài toán động học ngược của Bộ môn Cơ học ứng dụng ĐHBKHN, ta thu được đồ thị vị trí, vận tốc góc và gia tốc góc của các khâu và sai số tính toán theo thuật toán đề xuất. Một vài kết quả tính toán được trình bày trên các hình từ 4.6 đến 4.11.



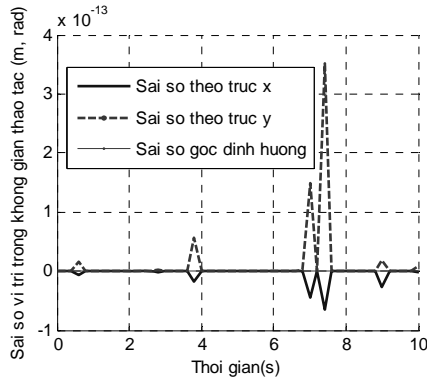
Hình 4.6: Đồ thị góc quay của các khớp (rad)



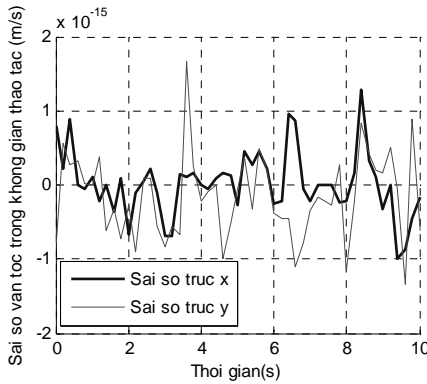
Hình 4.7: Đồ thị vận tốc góc các khớp (rad/s)



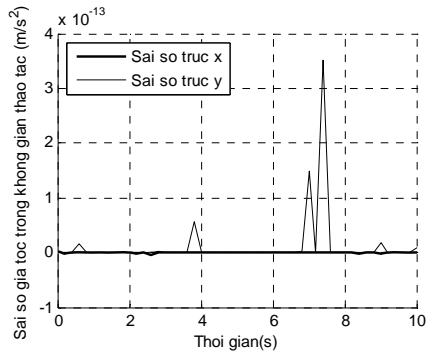
Hình 4.8: Đồ thị gia tốc góc các khớp động (rad/s^2)



Hình 4.9: Đồ thị sai số vị trí trong không gian thao tác



Hình 4.10: Đồ thị sai số vận tốc trong không gian thao tác



Hình 4.11: Đồ thị sai số gia tốc trong không gian thao tác

Các hình từ 4.6 đến 4.8 là đồ thị sự thay đổi của vị trí, vận tốc và gia tốc của các khớp. Trên các hình từ 4.9 đến 4.11 cho ta biết sai số của các góc quay, vận tốc góc và gia tốc góc của các khớp khi tính theo thuật toán hiệu chỉnh véc tơ tọa độ suy rộng. Các sai số này rất bé: sai số đối với các góc quay nhỏ hơn 4.10^{-13} rad, đối với các vận tốc góc nhỏ hơn 2.10^{-15} rad/s, đối với gia tốc góc nhỏ hơn 4.10^{-13} rad/s².

§4 MA TRẬN JACOBI GIẢI TÍCH VÀ MA TRẬN JACOBI HÌNH HỌC

4.1. Ma trận Jacobi giải tích

Giả sử cấu hình của robot được xác định bởi các tọa độ khớp $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$. Như đã biết phương trình động học của robot có dạng

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (4.1)$$

Trong đó \mathbf{x} là véc tơ vị trí của khâu thao tác

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}, \mathbf{p} = [x_E, y_E, z_E]^T, \boldsymbol{\alpha} = [\psi, \theta, \varphi]^T.$$

Các véc tơ \mathbf{p} và $\boldsymbol{\alpha}$ xác định vị trí và hướng của khâu thao tác là các hàm phụ thuộc vào biến khớp \mathbf{q} .

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}); \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}) \quad (4.2)$$

Đạo hàm theo t các phương trình trong (4.2) ta được

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{f}_1}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}; \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{d\mathbf{f}_2}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\alpha(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.3)$$

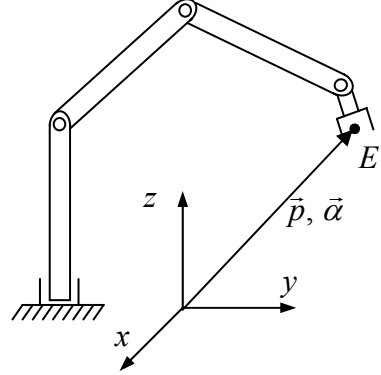
Trong đó ma trận \mathbf{J}_T được gọi là ma trận Jacobi tịnh tiến, còn ma trận \mathbf{J}_α được gọi là ma trận Jacobi các góc quay.

$$\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_E}{\partial q_1} & \frac{\partial x_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_E}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_E}{\partial q_1} & \frac{\partial y_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_E}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_E}{\partial q_1} & \frac{\partial z_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_E}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Từ (4.3) và (4.4) ta suy ra

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_\alpha \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_a(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.5)$$

Định nghĩa: Ma trận $\mathbf{J}_a = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_\alpha \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận Jacobi giải tích.



Hình 4.12: Véc tơ vị trí khâu thao tác

4.2. Ma trận Jacobi hình học

Trạng thái vận tốc của khâu thao tác được xác định bởi vận tốc điểm định vị và vận tốc góc của khâu thao tác

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}_R(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.6)$$

Trong đó

$$\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_E}{\partial q_1} & \frac{\partial x_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_E}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_E}{\partial q_1} & \frac{\partial y_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_E}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_E}{\partial q_1} & \frac{\partial z_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_E}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có công thức

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_R(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_b(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.7)$$

Định nghĩa: Ma trận $\mathbf{J}_b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_R(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$

được gọi là ma trận Jacobi hình học.

4.3. Quan hệ giữa ma trận Jacobi hình học và Jacobi giải tích

Ma trận Jacobi hình học và Jacobi giải tích khác nhau ở các thành phần ma trận khối

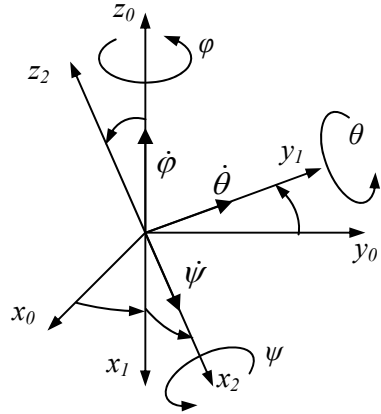
$\mathbf{J}_R(\mathbf{q})$ và $\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{q})$. Trong biểu thức (4.4) $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ là véc tơ vận tốc suy rộng của các góc định hướng của khâu thao tác, không phải là vận

tốc góc của khâu thao tác. Giữa $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ và $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ có quan hệ với nhau bởi các phương trình vi phân động học. Nếu ta sử dụng các góc Roll – Pitch – Yaw (RPY) (hình 4.13), thì ta có công thức xác định vận tốc góc của vật rắn

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi$$

Từ hình vẽ 4.13 ta xác định được các véc tơ vận tốc của các góc RPY

$$\boldsymbol{\omega}_\varphi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_\theta^{(0)} = {}^0\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{\omega}_\theta^{(1)} = \mathbf{A}_z(\varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$



Hình 4.13: Các góc RPY

$$\boldsymbol{\omega}_{\psi}^{(0)} = {}^0\mathbf{A}_2^2 \boldsymbol{\omega}_{\theta}^{(2)} = \mathbf{A}_z(\varphi)\mathbf{A}_y(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta \end{bmatrix}$$

Từ đó ta suy ra vận tốc góc khâu thao tác

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\varphi} + \boldsymbol{\omega}_{\theta} + \boldsymbol{\omega}_{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 1 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\alpha} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.8)$$

Trong đó ta sử dụng ký hiệu

$$\mathbf{T}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 1 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Từ đó ta suy ra quan hệ giữa \mathbf{v} và $\dot{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Trong đó \mathbf{I} là ma trận đơn vị. Thay $\dot{\mathbf{x}}$ từ (4.5) vào (4.10) ta được

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{J}_a(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.11)$$

Từ (4.7) và (4.11) ta suy ra các hệ thức

$$\mathbf{J}_b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{J}_a(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\alpha} \end{bmatrix} \mathbf{J}_a(\mathbf{q}) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{J}_a(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_A^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{J}_b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\alpha}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{J}_b(\mathbf{q}) \quad (4.13)$$

Biểu thức (4.12) và (4.13) xác định quan hệ giữa hai ma trận Jacobi hình học và ma trận Jacobio giải tích.

4.4. Các kỳ dị động học

Ma trận Jacobi giải tích $\mathbf{J}_a(\mathbf{q})$ là ma trận cỡ $m \times n$ ($m \leq n$). Ma trận $\mathbf{J}_a(\mathbf{q})$ được gọi là có hạng đầy đủ nếu $\text{rank}(\mathbf{J}_a(\mathbf{q})) = m$. Phương trình xác định vận tốc suy rộng của khâu thao tác

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_a(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.14)$$

là một hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất giữa vận tốc suy rộng $\dot{\mathbf{q}}$ và vận tốc của khâu thao tác $\dot{\mathbf{x}}$.

Ký hiệu ma trận vuông $\bar{\mathbf{J}}_a(\mathbf{q})$ là ma trận con có hạng lớn nhất của ma trận $\mathbf{J}_a(\mathbf{q})$.

Định nghĩa: Mỗi vị trí \mathbf{q}^* của robot mà tại vị trí đó hạng của ma trận $\mathbf{J}_a(\mathbf{q})$ nhỏ hơn m được gọi là một kỳ dị động học của robot.

Để tìm các kỳ dị động học ta quan tâm tới các vấn đề sau:

1. Tại các kỳ dị $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, robot không có khả năng thực hiện các chuyển động bất kỳ của bàn kẹp khi qua các kỳ dị vì mọi định thức con cấp m của ma trận Jacobi giải tích \mathbf{J}_a bằng 0 tại $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$.
2. Tại các vị trí kỳ dị có thể tồn tại một tập vô số nghiệm của bài toán động học ngược.
3. Ở lân cận các kỳ dị, một vận tốc nhỏ trong không gian thao tác có thể gây ra vận tốc lớn trong không gian khớp.

Các kỳ dị động học của robot phân thành hai loại:

- Kỳ dị trên biên vùng làm việc
- Kỳ dị trong vùng làm việc

Thí dụ 4.5. Tìm cấu hình kỳ dị của robot phẳng hai khâu hai khâu (xem hình 3.14).

Từ phần động học thuận, ta có

$$\begin{cases} x_E = a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y_E = a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{cases} \quad (1)$$

Từ đó suy ra ma trận Jacobi của robot phẳng hai khâu

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Để xác định các cấu hình kỳ dị của robot ta tính định thức của ma trận Jacobi (2) và cho triệt tiêu

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}_a| &= a_2 C_{12} (-a_1 S_1 - a_2 S_{12}) + a_2 S_{12} (a_1 C_1 + a_2 C_{12}) \\ &= a_1 a_2 (C_1 S_{12} - S_1 C_{12}) = a_1 a_2 \sin q_2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ đó suy ra phương trình

$$\sin q_2 = 0. \quad (4)$$

Giải phương trình (4) ta được hai nghiệm

$$q_2^* = 0 \text{ và } q_2^* = \pi.$$

Vậy robot phẳng hai khâu có hai vị trí kỳ dị ứng với $q_2^* = 0$ và $q_2^* = \pi$.