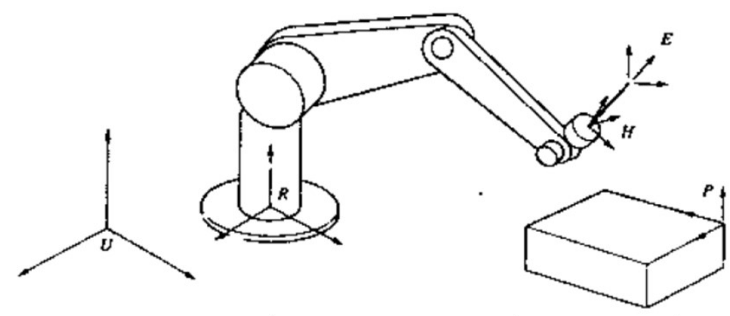
2. Mô hình động học thuận(Forward Kinematic)

- **Hệ tọa độ trong không gian làm việc của robot:** xét bài toán Robot làm việc trong phân xưởng có nhiệm vụ di chuyển đến chi tiết P và khoan một lỗ khoan.

  ✓ **Hệ tọa độ:**
  - Hệ tọa độ U: hệ gốc, thường là hệ tọa độ phân xưởng
  - Hệ tọa độ R: gắn trên bệ robot (cố định)
  - Hệ tọa độ H: gắn trên cổ tay robot
  - Hệ tọa độ E: khâu cuối (end-effector)
  - Hệ tọa độ P: xác định vị trí của chi tiết.

  ✓ Vị trí của lỗ khoan so với khung U được xác định theo 2 cách:
  - Đường qua chi tiết
  - Đường qua robot



$$\boxed{T_E^U = T_R^U * T_H^R * T_E^H = T_P^U * T_E^P} \Rightarrow \boxed{T_H^R = (T_R^U)^{-1} * T_P^U * T_E^P * (T_E^H)^{-1}}$$

Bài tập 5:

- Trên một robot sáu bậc tự do, đặt một camera ở link số 5 để quan sát một đối tượng và xác định hệ tọa độ đối tượng so với hệ tọa độ của camera. Tính toán chuyển động cần thiết của bàn tay robot (end-effector) để có thể gắp được đối tượng đó, biết các phép biến đổi sau:

$$T_{Cam}^{5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{H}^{5} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ĐT}^{Cam} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{E}^{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Mô hình động học ngược (Inverse Kinematic)

- **Mục đích:** tìm giá trị biến khớp ứng với vị trí và hướng (pose) của tay robot đã biết.
- **Nhiều lời giải**
- **Có 2 phương pháp:**
  - ✓**Phương pháp hình học (Geometric approach)**
  - ✓Phương pháp đại số (Algebraic approach)

$$\boxed{r = f(q)}$$

Động học thuận

$$\boxed{q = f^{-1}(r)}$$

Động học ngược

Ví dụ 2. Two-link Planar Arm (IK)

$$p_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$
$$p_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

$\Rightarrow$

$$p_x^2 + p_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2(s_1s_{12} + c_1c_{12}) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2$$

(1)

$$c_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$
$$s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vartheta_2 = \mathrm{Atan2}(s_2, c_2)}$

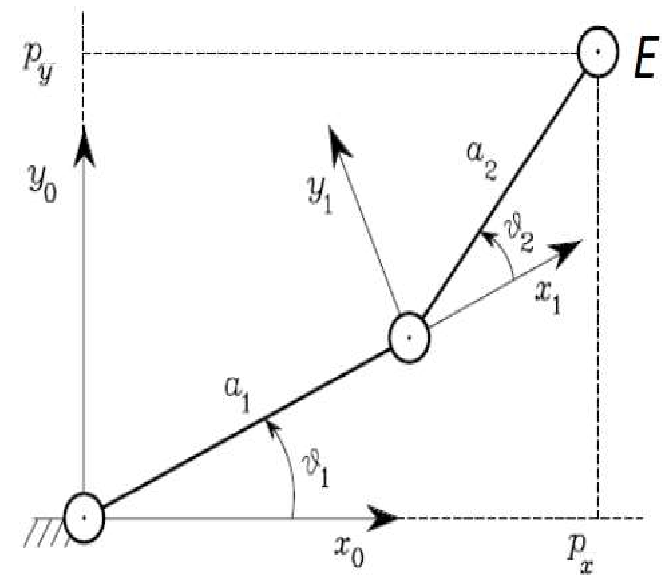
(2)

$$p_x = (a_1 + a_2c_2)c_1 - a_2s_2s_1$$
$$p_y = (a_1 + a_2c_2)s_1 + a_2s_2c_1$$

$\Rightarrow$

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2c_2)p_y - a_2s_2p_x}{p_x^2 + p_y^2}$$
$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2c_2)p_x + a_2s_2p_y}{p_x^2 + p_y^2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vartheta_1 = \mathrm{Atan2}(s_1, c_1)}$

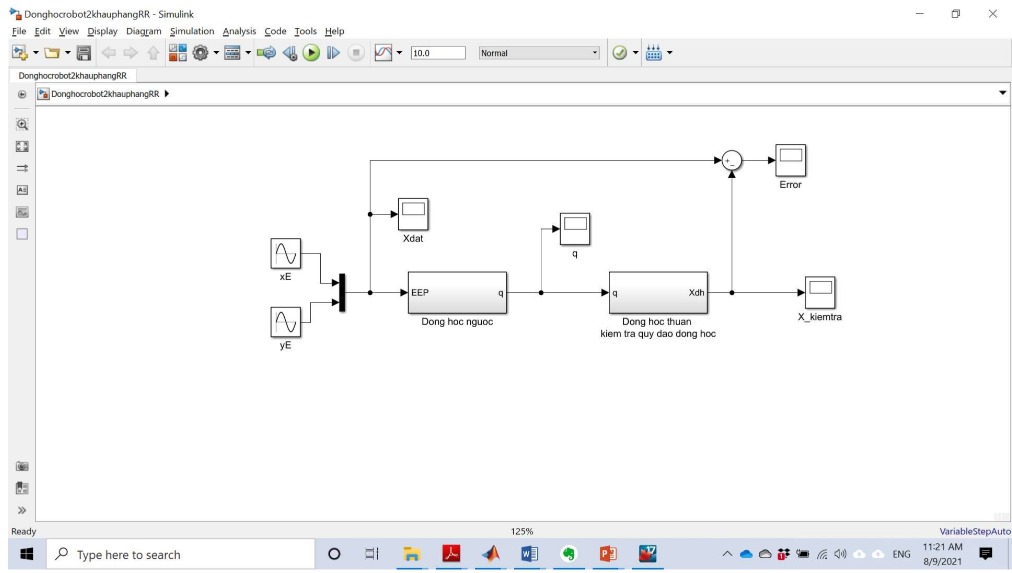


Ví dụ 2. Two-link Planar Arm (IK)

- Mô phỏng bài toán động học thuận và ngược với Matlab Simulink

Giới thiệu về matlab - simulink

- Khởi động Matlab
- Từ thẻ Home, chọn thẻ Simulink/Blank để tạo file mới
- Xây dựng mô hình trong Simulink



✓ Khối x_E, y_E: chọn thẻ tools/Library Browser, chọn sourses/sin waves để tao tín hiệu dạng SIN.

✓ Khối hiển thị SCOPE như Xdat, q, X_kiemtra, Error: chọn thẻ tools/Library Browser; chọn Sink/scope.

✓ Khối "động học ngược", "động học thuận": chọn tools/Library Browser, chọn port & subsystem/subsystem.

✓ Tạo hàm matlab cho các khối "động học thuận", "động học ngược" sử dụng tools/Library Browser/User-defines functions/Matlab Functions

✓ Khối "so sánh": chọn tools/Library Browser/commonly used blocks.

3.1Three-link Planar Arm (IK)

$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$
$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

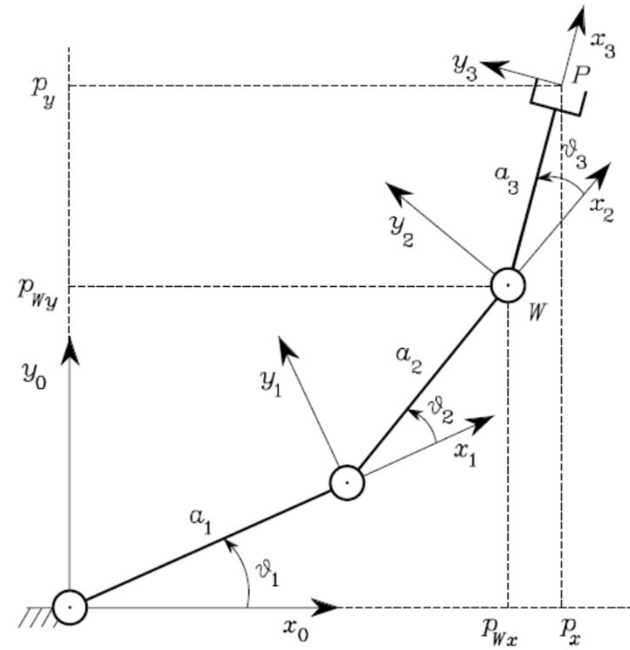
$$\Rightarrow \quad p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 (s_1 s_{12} + c_1 c_{12}) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

(1)
$$\left.\begin{aligned} c_2 &= \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \\ s_2 &= \pm\sqrt{1 - c_2^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vartheta_2 = \mathrm{Atan2}(s_2, c_2)}$$

(2)
$$pw_x = (a_1 + a_2 c_2) c_1 - a_2 s_2 s_1$$
$$pw_y = (a_1 + a_2 c_2) s_1 + a_2 s_2 c_1$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wy} - a_2 s_2 p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \\ c_1 &= \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wx} + a_2 s_2 p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vartheta_1 = \mathrm{Atan2}(s_1, c_1)}$$

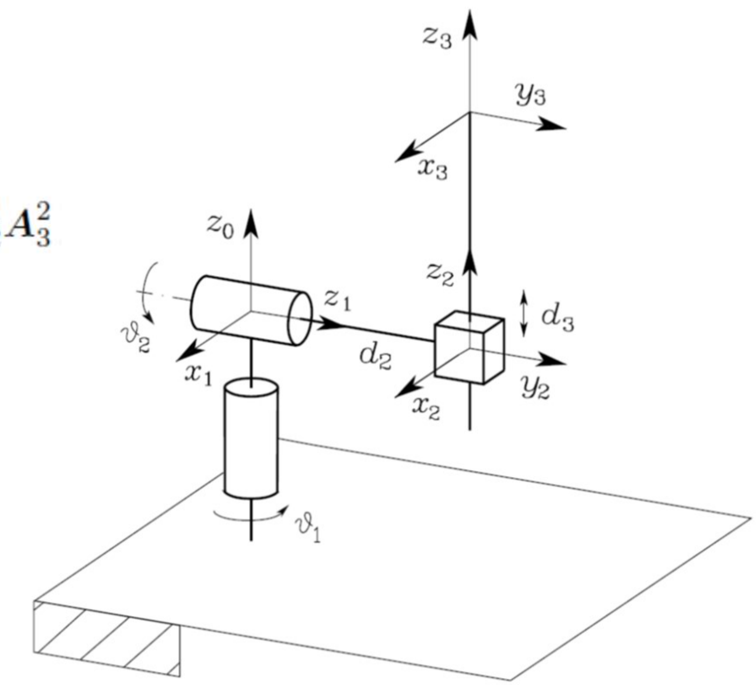
(3) $\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2}$



End-effector có vị trí P(p_x, p_y)
và hướng $\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

3.2: Spherical Arm (IK)



$$\boldsymbol{T}_3^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0\boldsymbol{A}_2^1\boldsymbol{A}_3^2 \quad ➡ \; (A_1^0)^{-1}T_3^0 = (A_1^0)^{-1}A_1^0A_2^1A_3^2 \; ➡ \; (\boldsymbol{A}_1^0)^{-1}\boldsymbol{T}_3^0 = \boldsymbol{A}_2^1\boldsymbol{A}_3^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_x c1 + p_y s1 \\ -p_z \\ -p_x s1 + p_y c1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 s2 \\ -d_3 c2 \\ d_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_x c1 + p_y s1 = d_3 s2 & (1) \\ -p_z = -d_3 c2 & (2) \\ -p_x s1 + p_y c1 = d_2 & (3) \end{cases}$$

Đặt $t = \tan\frac{\vartheta_1}{2}$ ➡ $c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad s_1 = \frac{2t}{1+t^2}$

$$(3) \Rightarrow (d_2 + p_y)t^2 + 2p_x t + d_2 - p_y = 0 \; ➡ \; t = \frac{-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2 + p_y}$$

$$➡ \; \boxed{\vartheta_1 = 2Atan2(-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2 + p_y)}$$

Từ (1) và (2)=> $\boxed{d_3 = \sqrt{(p_x c_1 + p_y s_1)^2 + p_z^2}}$

$$\boxed{\vartheta_2 = Atan2(p_x c_1 + p_y s_1, p_z)}$$

$$\boldsymbol{T}_3^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0\boldsymbol{A}_2^1\boldsymbol{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

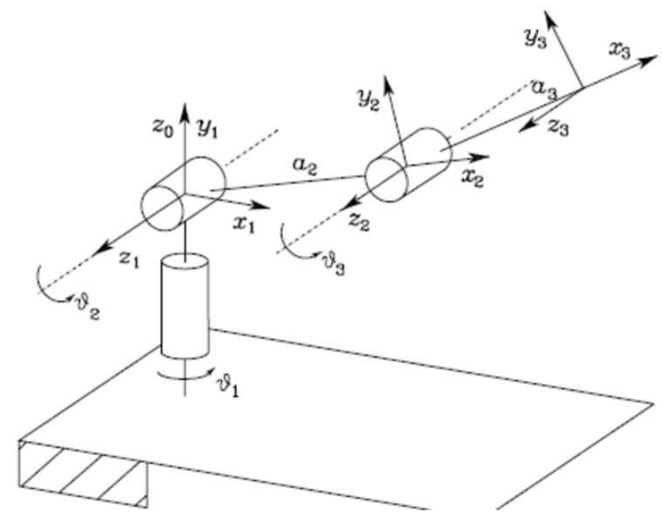
Bài tập 6: Spherical Arm (IK)

- Mô phỏng bài toán động học thuận và ngược với Matlab Simulink

3.3: Anthropomorphic Arm (IK)

$$\boldsymbol{T}_3^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0\boldsymbol{A}_2^1\boldsymbol{A}_3^2 \quad \Rightarrow (A_1^0)^{-1}T_3^0 = (A_1^0)^{-1}A_1^0A_2^1A_3^2 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_1^0)^{-1}\boldsymbol{T}_3^0 = \boldsymbol{A}_2^1\boldsymbol{A}_3^2$$

$$\begin{bmatrix} c_1p_x + s_1p_y \\ p_z \\ s_1p_x - c_1p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2c_2 + a_3c_{23} \\ a_2s_2 + a_3s_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1p_x + s_1p_y = a_2c_2 + a_3c_{23} & (1) \\ p_z = a_2s_2 + a_3s_{23} & (2) \\ s_1p_x - c_1p_y = 0 & (3) \end{cases}$$



- Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\begin{cases} p_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & (4) \\ p_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & (5) \\ p_z = a_2s_2 + a_3s_{23} & (6) \end{cases} \Rightarrow p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3$$

$$c_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \Rightarrow \boxed{\vartheta_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3)} \quad \text{Với} \quad s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2}$$

- Từ (4), (5) ta có: $p_x^2 + p_y^2 = (a_2c_2 + a_3c_{23})^2 \Rightarrow a_2c_2 + a_3c_{23} = \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ (7)

3.3: Anthropomorphic Arm (IK)

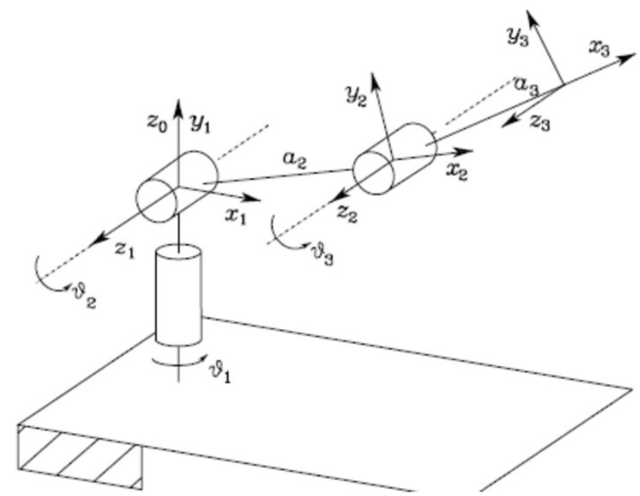
- Ta có hệ pt (6) và (7):

$$\begin{cases} a_2 s_2 + a_3 s_{23} = p_z & (6) \\ a_2 c_2 + a_3 c_{23} = \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2} & (7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}(a_2 + a_3 c_3) + p_z a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c_3} \\ s_2 = \dfrac{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}(a_3 s_3) + p_z(a_2 + a_3 c_3)}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta_2 = \mathrm{Atan2}(s_2, c_2)}$$

- Từ (4), (5) và (7) ta có:

$$\begin{cases} p_x = \pm c_1\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ p_y = \pm s_1\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vartheta_1 = Atan2(s_1, c_1)}$$



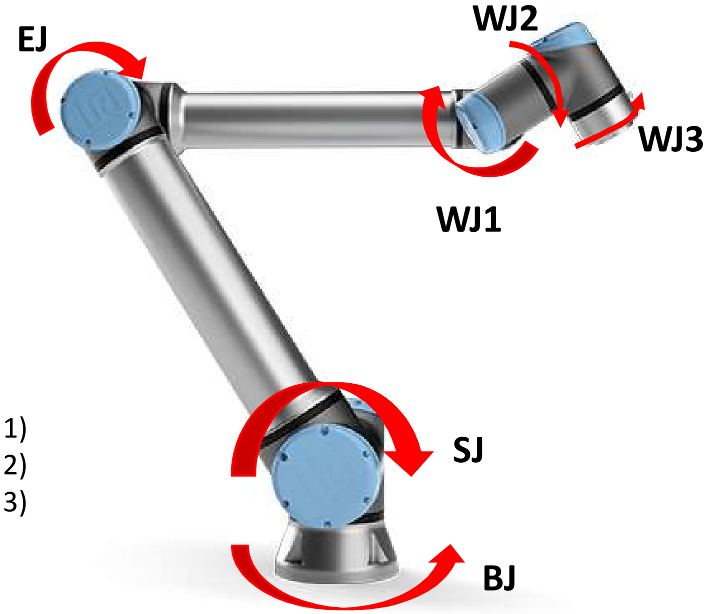
Bài tập 7: Anthropomorphic Arm (IK)

- Mô phỏng bài toán động học thuận và ngược với Matlab Simulink

Bài tập 8. Động học ngược UR10

- Mô phỏng với Matlab Simulink

  - BJ: Base Joint (khớp đế)
  - SJ: Shoulder Joint (khớp vai)
  - EJ: Elbow Joint (khớp khửu tay)
  - WJ1: Wrist Joint 1 (khớp cổ tay 1)
  - WJ2: Wrist Joint 2 (khớp cổ tay 2)
  - WJ3: Wrist Joint 3 (khớp cổ tay 3)



Universal Robot UR10