Chương 2.
Thiết kế quỹ đạo chuyển động robot

TS. Phạm Duy Hưng

Khoa Điện tử - Viễn thông, Trường ĐH Công nghệ - ĐHQGHN

hungpd@vnu.edu.vn

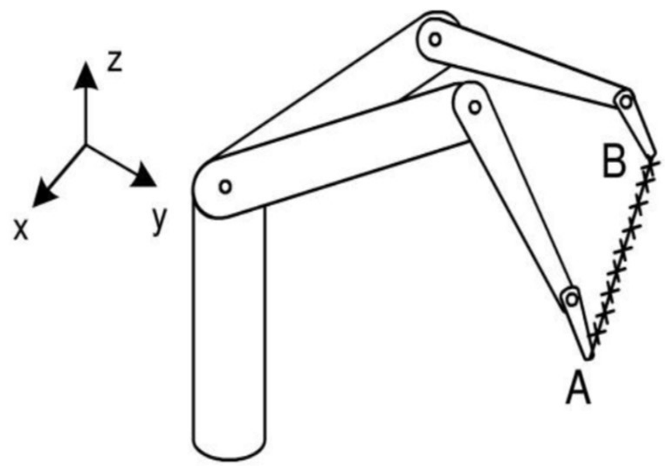
Nội dung chương 2

1. Các khái niệm
2. Quỹ đạo không gian khớp
3. Quỹ đạo không gian làm việc

1. Khái niệm cơ bản

- **Đường đi (path):** tập hợp các điểm (trong không gian khớp hoặc không gian làm việc) mà robot phải tuân theo khi thực hiện chuyển động. -> ***Mô tả thuần túy hình học, Không liên quan đến thời gian***
- **Ví dụ:** Robot di chuyển từ A đến B và tới C. Tập hợp các điểm dịch chuyển từ A -> B -> C gọi là đường đi.
- **Quỹ đạo (trajectory):** là một ***đường đi (path)*** có xác lập quy luật ***thời gian (time)*** xác định ở mỗi điểm. ***Ví dụ như vận tốc và/hoặc gia tốc.***

Đường đi là gì?



Di chuyển của robot theo đường thẳng

Quỹ đạo là gì?

1. Khái niệm cơ bản

- **Lập quỹ đạo (Trajactory planning):**

✓ Tạo ra các lối vào tham chiếu (reference input) cho hệ thống điều khiển chuyển động (motion control system)

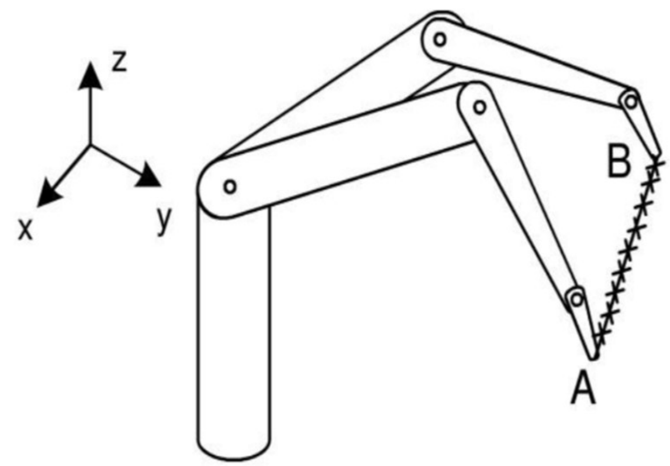
✓ Là tập các giá trị được nội suy từ **hàm nội suy**, điển hình là đa thức với các ràng buộc **thời gian, vận tốc, gia tốc**.

- **Thuật toán lập quỹ đạo:**

✓ Input: đường đi; các ràng buộc của đường đi và động lực học.

✓ Output: Quỹ đạo khâu cuối theo chuỗi thời gian gồm các giá trị vị trí, vận tốc, gia tốc

Tại sao phải lập quỹ đạo?

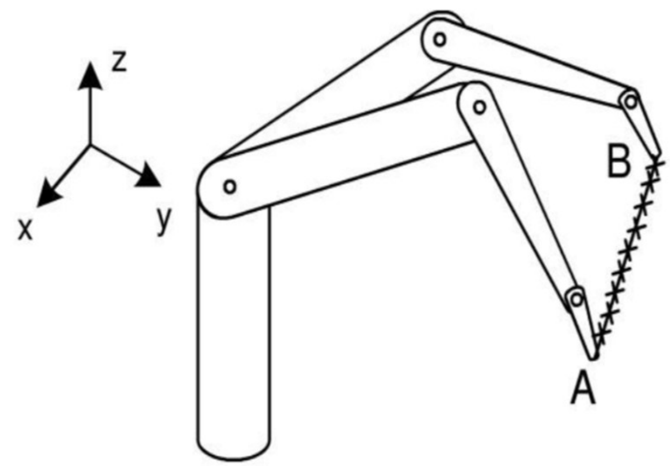


Di chuyển của robot theo đường thẳng

- **Các dạng chuyển động:**
  - ✓ Chuyển động điểm – điểm
  - ✓ Chuyển động theo chuỗi điểm

1. Khái niệm cơ bản

- **Hai loại quỹ đạo:**
  - ✓ Quỹ đạo không gian khớp:
    - ○ Tập giá trị các **biến khớp** theo thời gian.
    - ○ Sự chuyển động của các khớp thông qua các giá trị của biến khớp.
  - ✓ Quỹ đạo không gian làm việc (Descartes):
    - ○ Tập các **điểm tham chiếu trong không gian làm việc (Descartes)**.
    - ○ Chuyển đổi các điểm trong không gian làm việc sang không gian khớp thông qua thuật toán động học nghịch.



Di chuyển của robot theo đường thẳng

1. Khái niệm cơ bản

- **Ví dụ Robot di chuyển từ A->B**
  - ✓ Điểm A: $\theta_1 = 20^o, \theta_2 = 30^o$
  - ✓ Điểm B: $\theta_1 = 40^o, \theta_2 = 80^o$
  - ✓ Tốc độ 2 khớp tối đa: $10^o/s$

Cách 1: điều khiển hai khớp với vận tốc bằng nhau, bằng vận tốc lớn nhất -> điều gì xẩy ra?

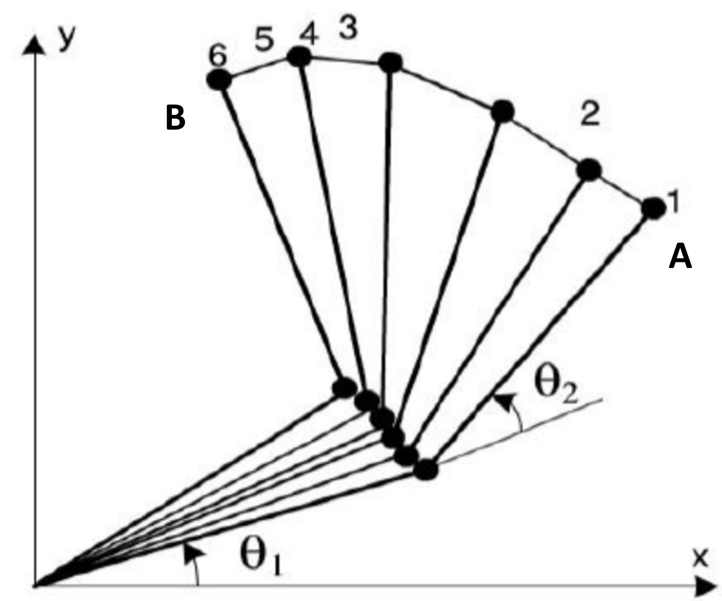
Khớp 1 cần 2s

Khớp 2 cần 5s (khớp 1 dừng, khớp 2 quay tiếp 3s)

Cách 2: điều khiển robot với vận tốc 2 khớp khác nhau sao cho thời gian để đi đến điểm cuối của hai khớp bằng nhau.

Khớp 1: $4^o/s$

Khớp 2: $10^o/s$



Không quan tâm đến dạng quỹ đạo

1. Khái niệm cơ bản

Ví dụ 2: yêu cầu Robot đi theo đường thẳng từ A->B

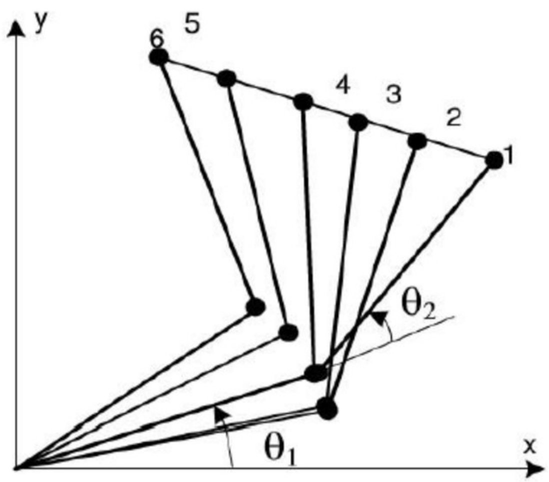
- ✓ Vẽ đường thẳng giữa hai điểm A và B.
- ✓ Chia AB thành n đoạn bằng nhau và phải tìm các cặp giá trị (θ_1, θ_2) tương ứng.

Problems?

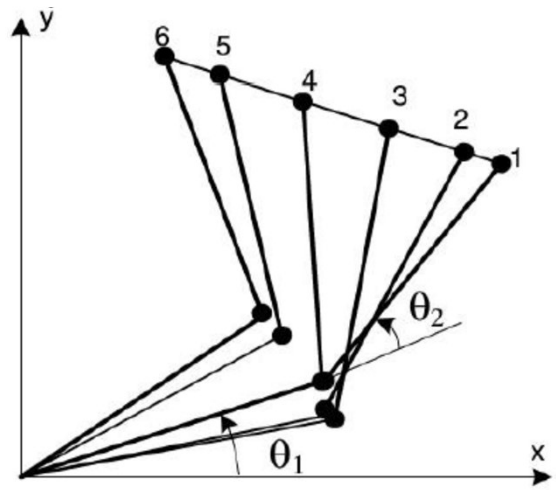
- ✓ Càng nhiều điểm thì đường đi càng chính xác tuy nhiên phải tính toán nhiều hơn.
- ✓ Nếu moment khớp không đủ lớn, tay máy sẽ không đạt tốc độ yêu cầu => thực hiện sai quỹ đạo.

Solutions:

- ✓ Để tránh tăng tốc đột ngột, tốc độ thiết kế kiểu hình thang. => chia AB thành các đoạn không đều



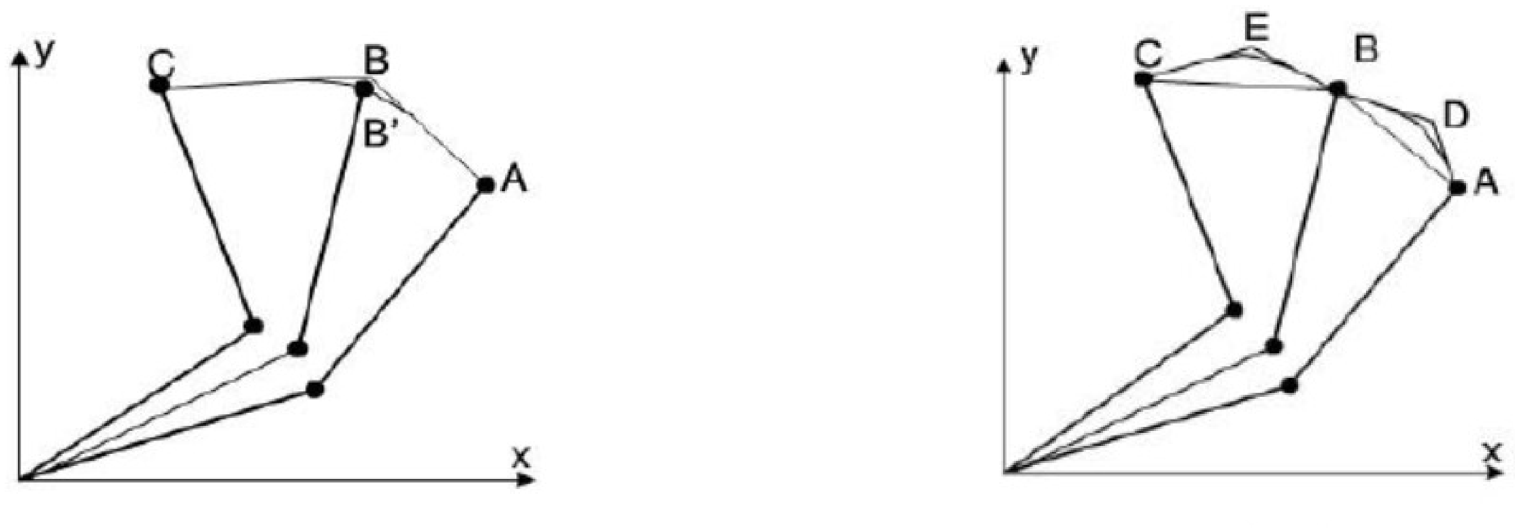
Chia AB thành n đoạn,
tìm θ_1, θ_2 ứng với mỗi điểm



Chia AB thành các đoạn không đều,
$x = \frac{1}{2}at^2$.

1. Khái niệm cơ bản

- Tạo quỹ đạo đi qua các điểm trung gian: A đến C, qua B.
  - ✓ Problems: dừng tại B?
  - ✓ Solutions: Làm cong chuyển động tại B

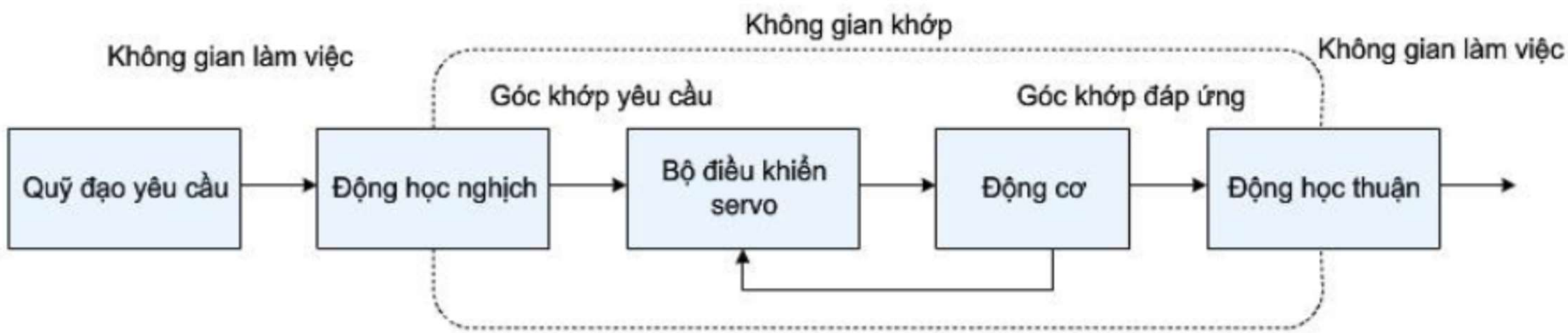


(a) (b)

Điểm trung gian ít: độ chính xác quỹ đạo thấp

1. Khái niệm cơ bản

- Sơ đồ khối điều khiển cánh tay robot



Lập quỹ đạo chuyển động

- Quỹ đạo không gian khớp (Joint Space trajectories)
- Quỹ đạo không gian làm việc (Operational Space Trajectories)

2. Quỹ đạo không gian khớp

- **Joint Space Trajectory**
- **Mục đích:** Tạo hàm ***q****(t)* nội suy quỹ đạo từ các vector biến khớp của các điểm cho trước, theo các ràng buộc yêu cầu.
- **Xem xét hai trường hợp**
  - ✓ Chuyển động điểm tới điểm (Point – to – Point motion)
  - ✓ Chuyển động thông qua một chuỗi điểm (Motion through a sequence of Points)

2.1 Chuyển động điểm tới điểm

- Tay máy di chuyển từ **điểm đầu tới điểm cuối** trong khoảng thời gian t_f với các **ràng buộc** cho trước; có thể yêu cầu **tối ưu** một số chỉ số hoạt động (như năng lượng, đường đi,…)
- Có **nhiều lời giải**, phụ thuộc vào yêu cầu tối ưu.

- **Ràng buộc đối với quỹ đạo**

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 \\ \dot{q}(t_0) &= v_0 \\ \ddot{q}(t_0) &= a_o \end{aligned}\right\} \text{Điểm đầu } t_0 \\ \left.\begin{aligned} q(t_f) &= q_f \\ \dot{q}(t_f) &= v_f \\ \ddot{q}(t_f) &= a_f \end{aligned}\right\} \text{Điểm cuối } t_f \end{cases}$$

2.1 Chuyển động điểm tới điểm

- **Quỹ đạo đa thức bậc 3 (cubic polynominal):**
  - Vị trí: $q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$
  - Vận tốc: $\dot{q}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2$
- **Điều kiện cần thỏa mãn: 4 (p, v)**

$$\begin{cases} q(t_0) = q_0 \\ \dot{q}(t_0) = v_o = 0 \\ q(t_f) = q_f \\ \dot{q}(t_f) = v_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t_0) = c_0 = q_0 \\ \dot{q}(t_0) = c_1 = 0 \\ q(t_f) = c_0 + c_1 t_f + c_2 t_f^2 + c_3 t_f^3 = q_f \\ \dot{q}(t_f) = c_1 + 2c_2 t_f + 3c_3 t_f^2 = 0 \end{cases}$$

4 phương trình, 4 ẩn số ➡

$$\begin{cases} c_0 = q_0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{3(q_f - q_0)}{t_f^2} \\ c_3 = \dfrac{-2(q_f - q_0)}{t_f^3} \end{cases}$$

- **Tổng quát, dạng ma trận**

$$Mc = b \rightarrow c = M^{-1} b$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}$$

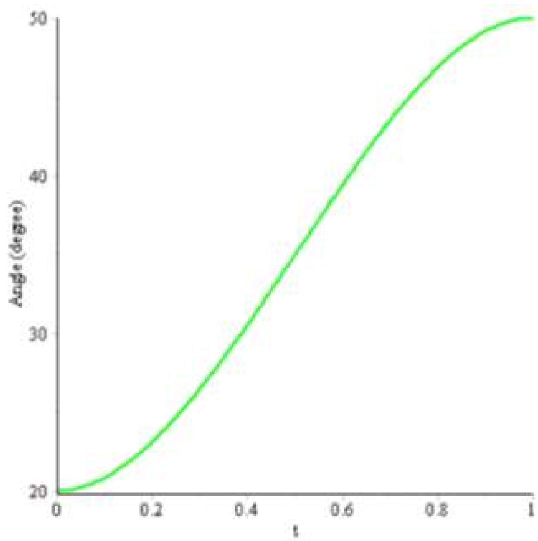
$$c = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T$$
$$b = [q_0 \quad v_0 \quad q_f \quad v_f]^T$$

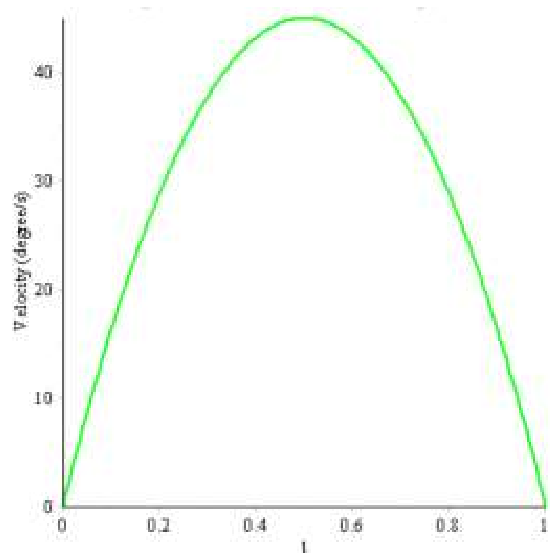
Ví dụ 1:

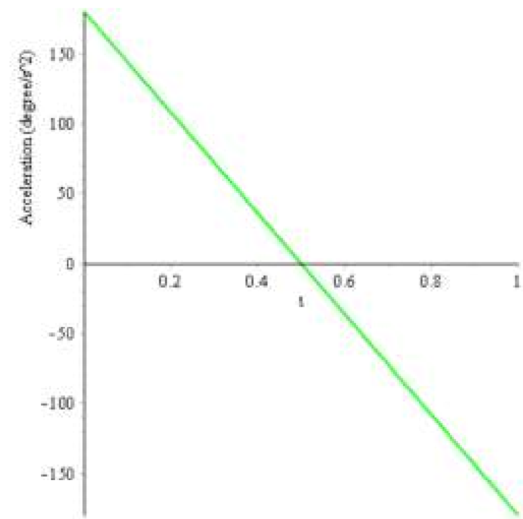
- Lập quỹ đạo cho một khớp quay θ của robot theo đa thức bậc 3 với các điều kiện:
  - ✓ $t_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = 20^0, v_0 = 0.$
  - ✓ $t_f = 1 \rightarrow \theta_f = 50^0, v_f = 0.$

  Vẽ quỹ đạo vị trí, vận tốc, gia tốc của khớp robot theo thời gian?

Ví dụ 1: giải trên maple







$q := -60\,t^3 + 90\,t^2 + 20$

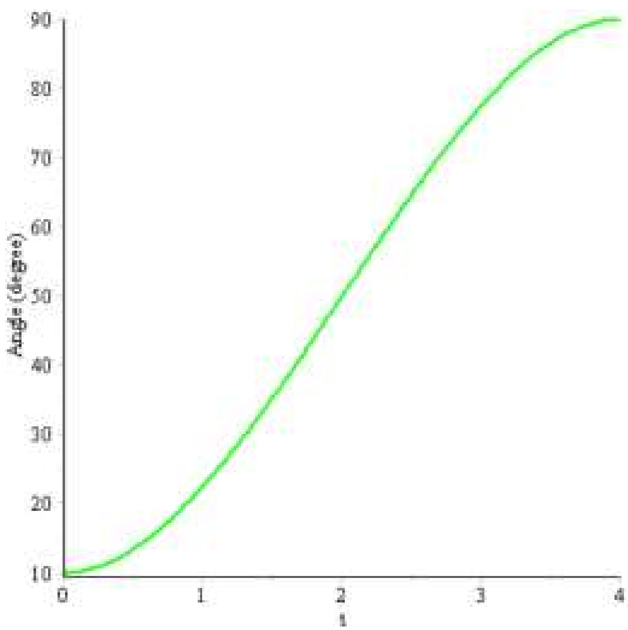
$dq := -180\,t^2 + 180\,t$

$ddq := -360\,t + 180$

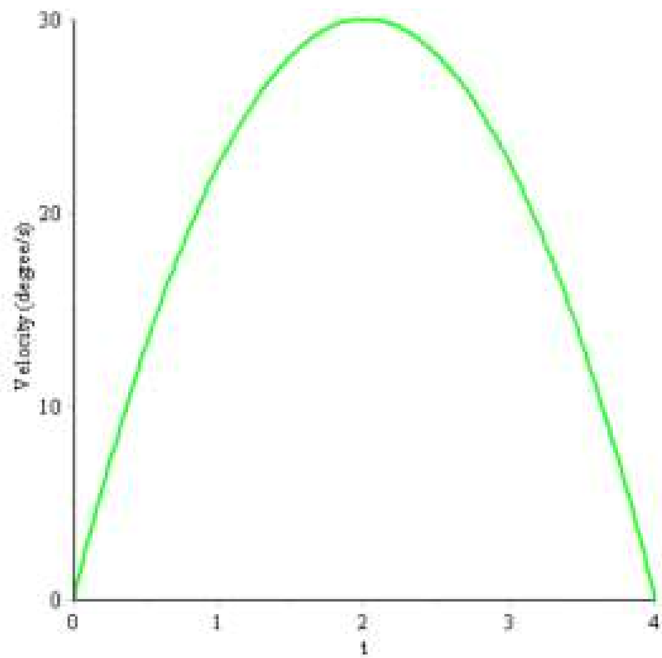
Ví dụ 2:

- Cho một khớp quay θ của robot quay từ vị trí ban đầu đứng yên có $\theta_0 = 10^0$ tới góc cần đến $\theta_f = 90^0$ trong vòng 4 giây. Tìm các hệ số của phương trình quỹ đạo bậc 3. Vẽ quỹ đạo vị trí, vận tốc và gia tốc của khớp theo thời gian?

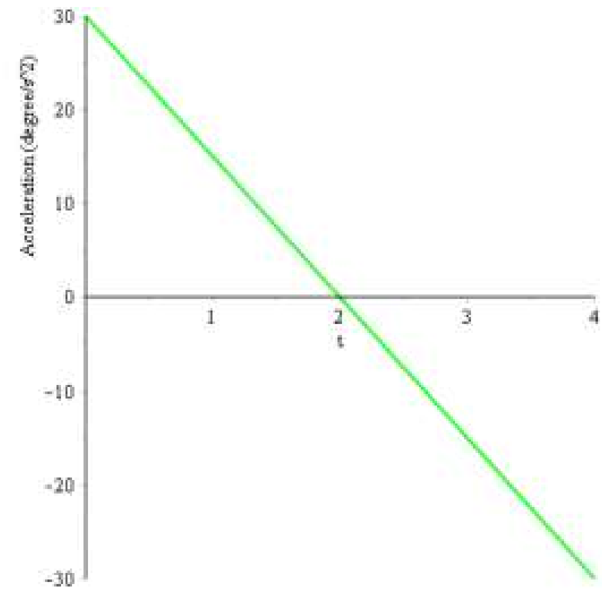
Ví dụ 2: giải trên maple



$$q := 10 + 15\,t^2 - \frac{5}{2}\,t^3$$



$$dq := 30\,t - \frac{15}{2}\,t^2$$



$$ddq := 30 - 15\,t$$

2.1 Chuyển động điểm tới điểm

- **Quỹ đạo đa thức bậc 5** (The fifth order polynomial)**:**
  - Vị trí: $q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$
  - Vận tốc: $\dot{q}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$
  - Gia tốc: $\ddot{q}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$
- Điều kiện cần thỏa mãn: **6 (p,v,a)**

$$\boxed{Mc = b \rightarrow c = M^{-1} b}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix}$$

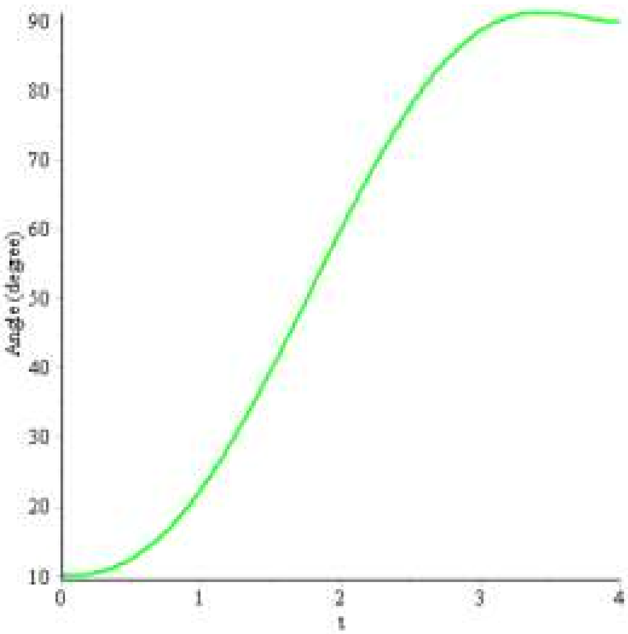
$$c = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5]^T$$

$$b = [q_0 \quad v_0 \quad a_o \quad q_f \quad v_f \quad a_f]^T$$

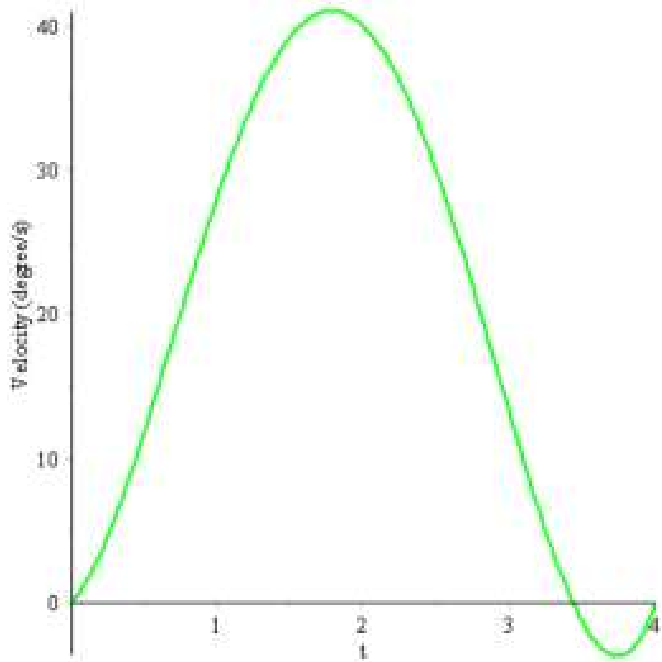
Ví dụ 3:

- Cho một khớp quay của robot quay từ vị trí ban đầu đứng yên với góc $\theta_0 = 10^o$ tới góc đích đến $\theta_f = 90^o$trong vòng 4 giây. Gia tốc ban đầu và cuối cùng khi kết thúc tương ứng là 10 và 30. Tìm các hệ số của phương trình quỹ đạo bậc 5. Vẽ quỹ đạo vị trí, vận tốc và gia tốc theo thời gian.

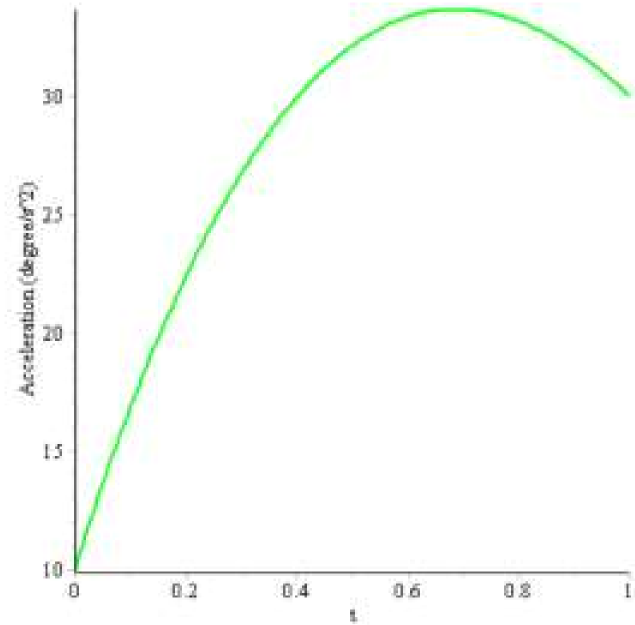
Ví dụ 3: giải trên maple



$$q := 10 + 5\,t^2 + \frac{25}{2}\,t^3 - \frac{45}{8}\,t^4 + \frac{5}{8}\,t^5$$



$$dq := 10\,t + \frac{75}{2}\,t^2 - \frac{45}{2}\,t^3 + \frac{25}{8}\,t^4$$



$$ddq := 10 + 75\,t - \frac{135}{2}\,t^2 + \frac{25}{2}\,t^3$$

Bài tập về nhà

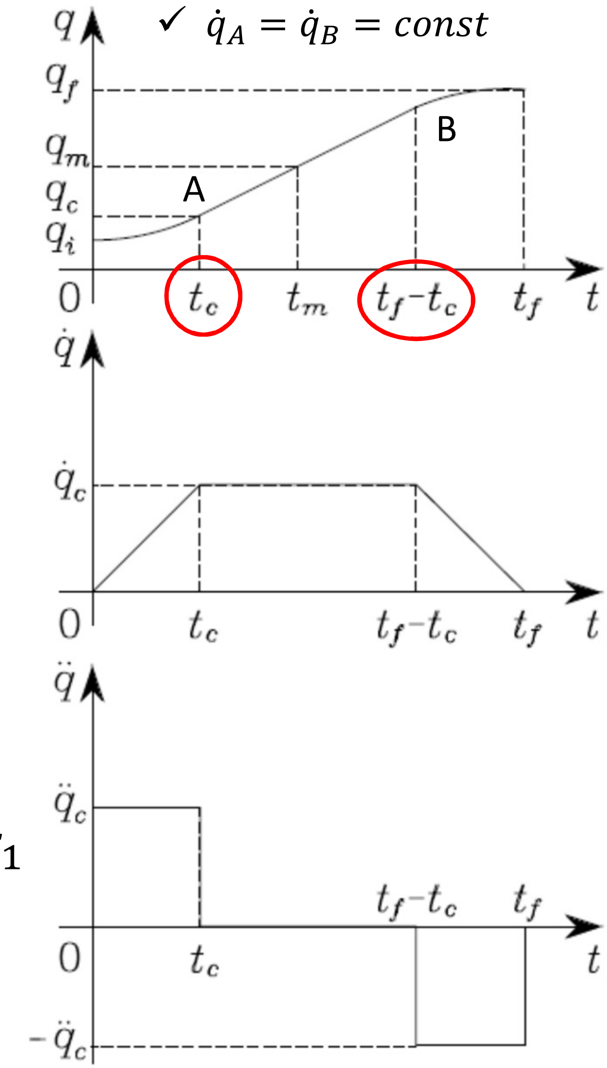
4.1 và 4.2 Page 189 (209), Cuốn Robotics: Modelling, planning and control.

2.1 Chuyển động điểm tới điểm

- **Qũy đạo 2-1-2: Vận tốc hình thang** (trapezoidal velocity profile)
  - ✓Quỹ đạo parabol ở điểm bắt đầu và cuối, giữa là một đường thẳng
  - ✓ **Vận tốc biến đổi theo hình thang**

✓ $q_m = \frac{q_f+q_i}{2}$ ở $t_m = \frac{t_f}{2}$

✓ $\dot{q}_A = \dot{q}_B = const$



=> Xác định phương trình Parabol và tham số t_c

✓ Vị trí: $q(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2$

Vận tốc: $\dot{q}(t) = c_1 + c_2 t$

Gia tốc: $\ddot{q}(t) = c_2$

✓ Điều kiện biên:

- ✓ $t = 0 \rightarrow q_i = c_o$
- ✓ $t = 0 \rightarrow v_o = 0 = c_1$

✓ Vận tốc tại t_c

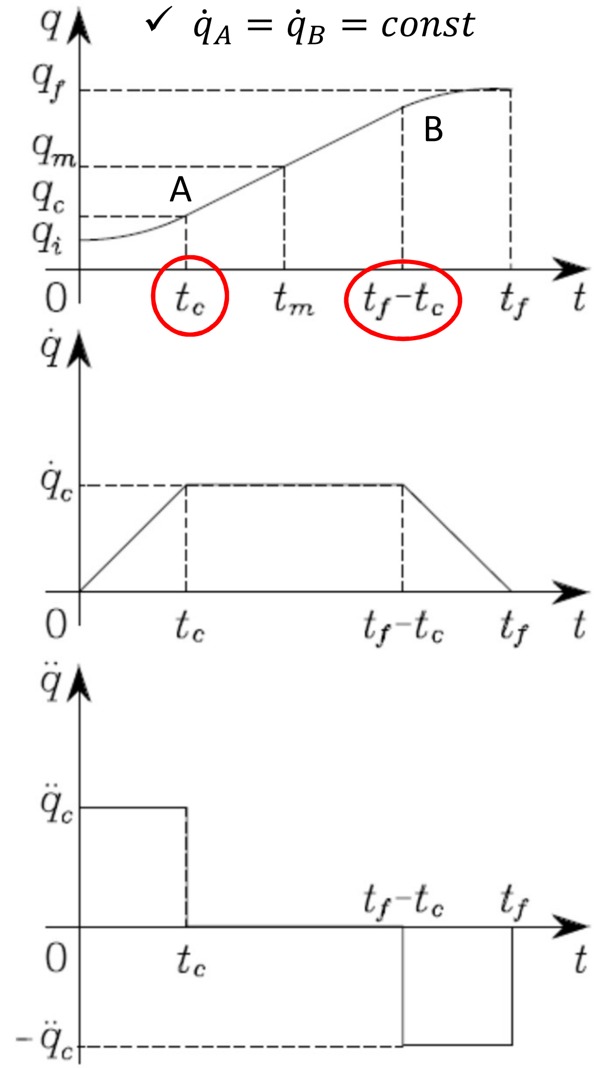
$$\dot{q}(t_c) = c_2 t_c = \ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_C}{t_m - t_c}$$

$$\Rightarrow q(t) = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q} t^2$$

2.1 Chuyển động điểm tới điểm

✓ $q_m = \frac{q_f + q_i}{2}$ ở $t_m = \frac{t_f}{2}$

✓ $\dot{q}_A = \dot{q}_B = const$



$$\left.\begin{aligned}
&\text{Vận tốc: } \ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c} \\
&\text{Vị trí: } q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2 \\
&\text{Chú ý: } \quad q_m = \frac{q_f + q_i}{2} \\
&\qquad\qquad t_m = \frac{t_f}{2}
\end{aligned}\right\}$$

➡ $\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$

2.1 Chuyển động điểm tới điểm

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$$

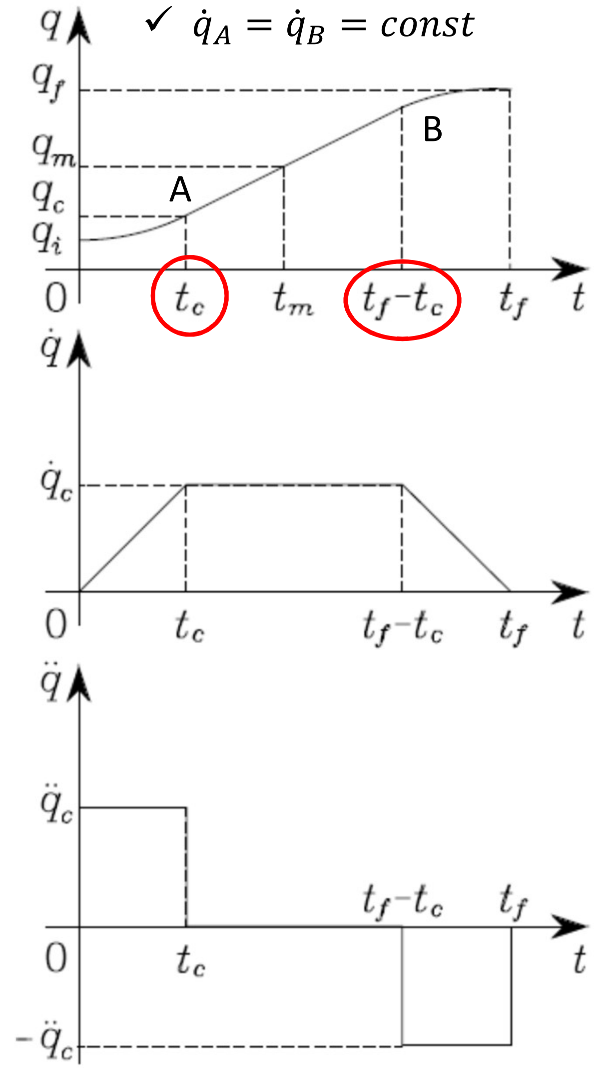
Giải phương trình với lưu ý $t_c \le t_m = \frac{t_f}{2}$

$$\Rightarrow \quad t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$$

=> Gia tốc phải thỏa mãn điều kiện

$$|\ddot{q}_c| \ge \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

- ✓ $q_m = \frac{q_f + q_i}{2}$ ở $t_m = \frac{t_f}{2}$
- ✓ $\dot{q}_A = \dot{q}_B = const$



2.1 Chuyển động điểm tới điểm

- Cho q_i, q_f và t_f và gia tốc $\ddot{q}_c$thỏa mãn:

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

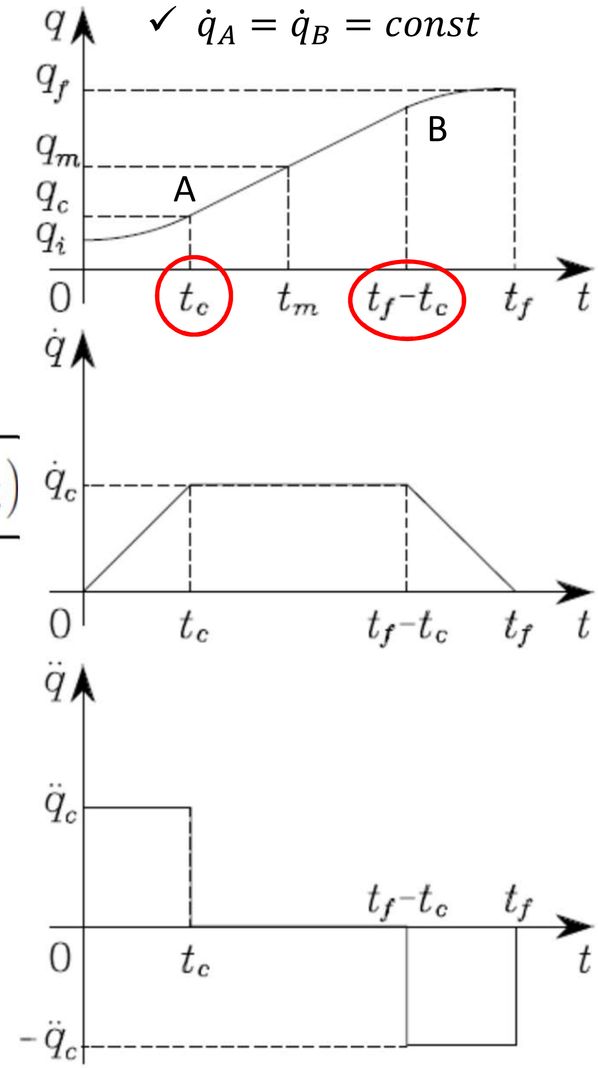
Thời gian t_c được tính bởi: $t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2\ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$

thì quỹ đạo 2-1-2 như sau:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

✓ $q_m = \frac{q_f + q_i}{2}$ ở $t_m = \frac{t_f}{2}$

✓ $\dot{q}_A = \dot{q}_B = const$



Bài tập 1

- Xây dựng quỹ đạo 2-1-2 của khớp 1 robot từ góc ban đầu 40^o đến góc cuối cùng 120^o trong 4 giây với tốc độ lớn nhất là $25^o/s$. Vẽ đường biểu diễn vị trí, vận tốc và gia tốc chuyển động của khớp.

Các em làm bài tập nộp trên course trước 13h40.
Dừng 14h05

Bài tập 2

Thiết kế quỹ đạo chuyển động dạng đa thức bậc 3 cho khớp 1 của robot 6 bậc tự do từ góc ban đầu 50^o đến góc cuối 80^o trong 3s. Xác định góc quay, tốc độ và gia tốc của khớp ở thời điểm 1, 2, 3 s. Biết rằng robot chuyển động từ trạng thái đứng yên và dừng ở vị trí cuối cùng.

Bài tập 3

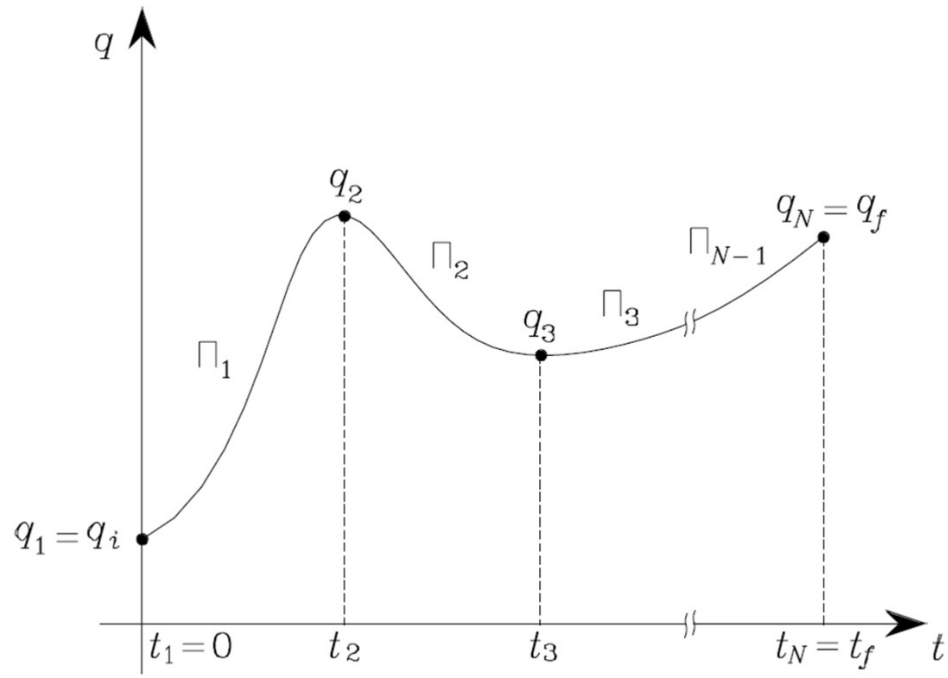
- Khớp thứ 2 của robot 6 khớp quay từ góc ban đầu 20^o đến góc cuối cùng 80^o trong thời gian 5s, sau đó quay tiếp đến góc 25^o trong 5s. Xây dựng quỹ đạo chuyển động đa thức bậc 3 cho khớp 2 và vẽ đường biểu diễn vị trí, vận tốc và gia tốc. Biết rằng robot chuyển động từ trạng thái đứng yên và dừng ở vị trí cuối cùng; vận tốc chuyển tiếp là $10^o/s$

Bài tập 4

- Đa thức bậc 5 được sử dụng để lập quỹ đạo chuyển động của khớp robot trong không gian khớp. Xác định các hệ số của đa thức để khớp quay từ góc ban đầu 0^o đến góc cuối cùng 75^o trong 3s. Biết rằng vận tốc ban đầu và cuối cùng bằng không và gia tốc ban đầu và cuối cùng là $10m/s^2$

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- Path có số điểm >2.
- Mật độ cao ở những đoạn có chướng ngại vật cần tránh hoặc có độ cong lớn
- 4 loại:
  - ✓ Đa thức nội suy với vận tốc được áp đặt ở các điểm.
  - ✓ Đa thức nội suy với vận tốc được tính toán ở các điểm
  - ✓ Đa thức nội suy với gia tốc liên tục ở các điểm.
  - ✓ Đa thức tuyến tính nội suy với hỗn hợp parabol



Path có N điểm

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Đa thức nội suy với vận tốc được áp đặt ở các điểm** (Interpolating polynomials with imposed velocities at path points)
  - ✓Người sử dụng đưa ra vận tốc mong muốn ở mỗi điểm
  - ✓Hệ phương trình cho phép tính toán hệ số của N-1 đa thức bậc ba nội suy N điểm, với các điều kiện tổng quát $\prod_k(t)$ cho cặp điểm q_k và q_{k+1}, k=1…N-1:

$$\Pi_k(t_k) = q_k$$
$$\Pi_k(t_{k+1}) = q_{k+1}$$
$$\dot{\Pi}_k(t_k) = \dot{q}_k$$
$$\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{q}_{k+1}$$

✓ Vận tốc ban đầu và kết thúc bằng 0 ($\dot{q}_0 = \dot{q}_N = 0$)

✓ Vận tốc liên tục tại các điểm: $\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})$

✓ N-1 hệ của các cặp 4 phương trình sử dụng để tìm các hệ số chưa biết của đa thức: giải độc lập.

Ví dụ 4: giải trên maple

Cho các tọa độ góc và vận tốc khớp của robot tại các thời điểm $t_1 = 0; t_2 = 2; t_3 = 3; t_4 = 5$, lần lượt là:

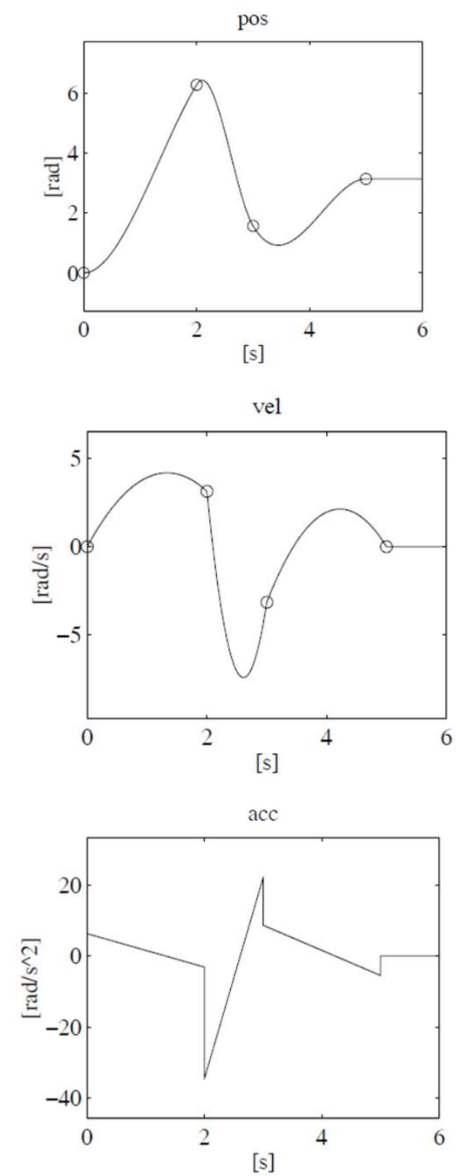
- $q_1 = 0; q_2 = 2\pi; q_3 = \pi/2\,; q_4 = \pi;$
- $\dot{q}_1 = 0; \dot{q}_2 = \pi; \dot{q}_3 = -\pi; \dot{q}_4 = 0.$

Lập quỹ đạo chuyển động đi qua các điểm trên. Vẽ đồ thị vị trí, vận tốc và gia tốc?

$$q12 := t^2\pi - \frac{1}{4}t^3\pi$$

$$q23 := -46\pi + 59t\pi - \frac{47}{2}t^2\pi + 3t^3\pi$$

$$q34 := 26\pi - \frac{155}{8}t\pi + \frac{19}{4}t^2\pi - \frac{3}{8}t^3\pi$$



2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Đa thức nội suy với vận tốc được tính toán ở các điểm** (Interpolating polynomials with computed velocities at path points)
  - ✓ Vận tốc khớp ở mỗi điểm phải tính toán theo một tiêu chí nhất định.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{q}_k &= \begin{cases} 0 & \operatorname{sgn}(v_k) \neq \operatorname{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \operatorname{sgn}(v_k) = \operatorname{sgn}(v_{k+1}) \end{cases} \\ \dot{q}_N &= 0, \end{aligned}$$

Với $v_k = \frac{(q_k - q_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})}$ cung cấp độ dốc của đoạn trong khoảng thời gian $[t_{k-1}, t_k]$

➡ **Hàm nội suy tính giống như trường hợp trước**

Ví dụ 5: giải trên maple

Cho các tọa độ góc và vận tốc khớp của robot tại các thời điểm $t_1 = 0; t_2 = 2; t_3 = 3; t_4 = 5,$ lần lượt là:

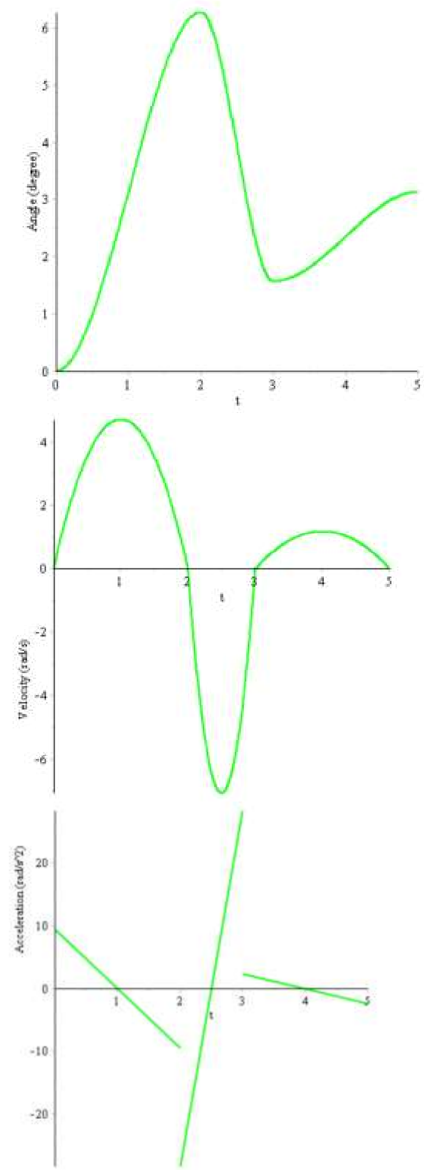
- $q_1 = 0; q_2 = 2\pi; q_3 = \pi/2\,; q_4 = \pi;$
- $\dot{q}_1 = 0; \cancel{\dot{q}_2 = \pi; \dot{q}_3 = -\pi;}\ \dot{q}_4 = 0.$

$$\dot{q}_k = \begin{cases} 0 & \operatorname{sgn}(v_k) \neq \operatorname{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \operatorname{sgn}(v_k) = \operatorname{sgn}(v_{k+1}) \end{cases}$$

$$q12 := \frac{3}{2} t^2 \pi - \frac{1}{2} t^3 \pi$$

$$q23 := -40\,\pi + 54\, t\,\pi - \frac{45}{2} t^2 \pi + 3\, t^3 \pi$$

$$q34 := \frac{29}{4}\pi - \frac{45}{8} t\,\pi + \frac{3}{2} t^2 \pi - \frac{1}{8} t^3 \pi$$



Bài tập về nhà: bài 4.3 Page 209 sách Robotics

- Given the values for the joint variable: $q(0) = 0$, $q(2) = 2$, and $q(4) = 3$, compute the two fifth-order interpolating polynomials with continuous velocities and accelerations.

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Đa thức nội suy với gia tốc liên tục ở các điểm** (Interpolating polynomials with continuous accelerations at path points) => **spline**
  - ✓ Cả hai giải pháp trên đều không đảm bảo tính liên tục của gia tốc.
  - ✓ Để gia tốc liên tục tại t_k, 4 ràng buộc sau cần được thỏa mãn:

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k$$
$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$
$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$
$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k).$$

  - ✓ Path có N điểm thì sẽ có 4(N-2) phương trình cho các điểm trung gian và 6 phương trình cho điểm bắt đầu và kết thúc

➡ **Tổng có 4N-2 phương trình, 4(N-1) ẩn số**

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Đa thức nội suy với gia tốc liên tục ở các điểm** (Interpolating polynomials with continuous accelerations at path points)
  - N+2 điểm -> N+1 đa thức bậc 3
  - N+2 thời điểm t_k, với t_2 và t_{N+1} ứng với các điểm ảo

✓ 4(N-2) phương trình cho N-2 điểm trung gian k=3…N

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k$$
$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$
$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$
$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

✓ 6 phương trình cho các điểm đầu và cuối

$$\Pi_1(t_1) = q_i$$
$$\dot{\Pi}_1(t_1) = \dot{q}_i$$
$$\ddot{\Pi}_1(t_1) = \ddot{q}_i$$
$$\Pi_{N+1}(t_{N+2}) = q_f$$
$$\dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \dot{q}_f$$
$$\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \ddot{q}_f$$

✓ 6 phương trình cho k=2 và N+1 cho các điểm ảo:

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$
$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$
$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

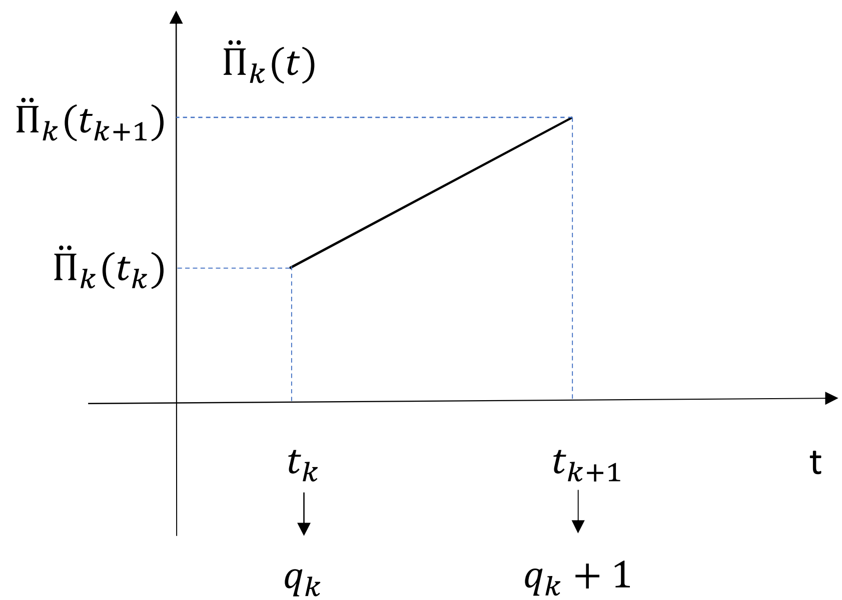
4(N-1) phương trình và 4(N-1 ẩn số)

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Đa thức nội suy với gia tốc liên tục ở các điểm** (Interpolating polynomials with continuous accelerations at path points)
  - ✓ $\Pi_k(t)$ là đa thức bậc 3 -> đạo hàm bậc 2 là một hàm tuyến tính

$$\ddot{\Pi}_k(t) = \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{\Delta t_k}(t_{k+1} - t) + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{\Delta t_k}(t - t_k)$$

Với k=1,…N+1 và $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$



2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Đa thức nội suy với gia tốc liên tục ở các điểm** (Interpolating polynomials with continuous accelerations at path points)
  - ✓ Tích phân $\ddot{\Pi}_k(t)$ hai lần theo thời gian, thu được đa thức tổng quát:

$$\Pi_k(t) = \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{6\Delta t_k}(t_{k+1}-t)^3 + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{6\Delta t_k}(t-t_k)^3 + \left(\frac{\Pi_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{6}\right)(t-t_k) + \left(\frac{\Pi_k(t_k)}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\Pi}_k(t_k)}{6}\right)(t_{k+1}-t)$$

Với k=1,…N+1; và $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$

Phụ thuộc vào tham số $\Pi_k(t_k)$, $\Pi_k(t_{k+1})$, $\ddot{\Pi}_k(t_k)$, $\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})$.

2N tham số đã biết $\Pi_k(t_k)$, $\Pi_k(t_{k+1})$

q_2, q_{N+1} được tính qua $\ddot{\Pi}_1(t_1)$, $\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2})$

$\ddot{q}_i$ và $\ddot{q}_f$ cho trước

$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$ cho k=3..N

$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$ cho k=2 và k=N+1

Tổng số biến chưa biết

4(N+1)-2N-2-2-N=N

- $\dot{\Pi}_k(t) = -\frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{2\Delta t_k}(t_{k+1} - t)^2 + \frac{\ddot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})}{2\Delta t_k}(t - t_k)^2 + \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t_k} + \frac{\Delta t_k}{6}\left(\ddot{\Pi}_k(t_k) - \ddot{\Pi}_k(t_{k+1})\right)$ với k=1,…N+1 (1)
- Ta có $\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$, suy ra:

$$\boxed{\frac{\Delta t_k}{6}\ddot{\Pi}_k\left(t_k\right) + \frac{\Delta t_k + \Delta t_{k+1}}{3}\ddot{\Pi}_{k+1}\left(t_{k+1}\right) + \frac{\Delta t_{k+1}}{6}\ddot{\Pi}_{k+2}\left(t_{k+2}\right) = \frac{q_k}{\Delta t_k} - \left(\frac{1}{\Delta t_{k+1}} + \frac{1}{\Delta t_k}\right)q_{k+1} + \frac{q_{k+2}}{\Delta t_{k+1}}}$$ Với k=1…N (2)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{\Delta t_k}{6} & \frac{\Delta t_k + \Delta t_{k+1}}{3} & \frac{\Delta t_{k+1}}{6} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Pi}_2(t_2) \\ \dots \\ \ddot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1}) \\ \ddot{\Pi}_{k+2}(t_{k+2}) \\ \dots \\ \ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1}) \end{bmatrix} = \frac{q_k}{\Delta t_k} - \left(\frac{1}{\Delta t_{k+1}} + \frac{1}{\Delta t_k}\right)q_{k+1} + \frac{q_{k+2}}{\Delta t_{k+1}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}[\ddot{\Pi}_2(t_2) \quad \dots \quad \ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1})]^T = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \dots & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix}$$

Tridiagonal matrix (Ma trận 3 đường chéo)

- Với k=1, $t = t_1$: ta có $\ddot{\Pi}_1(t_1) = \ddot{q}_i$, thay thế vào (1) và chú ý $\Pi_1(t_1) = q_i$ và $\dot{\Pi}_1(t_1) = \dot{q}_i$:

$$q_2 = q_i + \dot{q}_i \Delta t_1 + \ddot{q}_i \frac{\Delta t_1^2}{6}$$

- Tương tự k=N+1 và $t = t_{N+2}$, và áp dụng $\Pi_{N+1}(t_{N+2}) = q_f$; $\dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \dot{q}_f$ và $\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \ddot{q}_f$

$$q_{N+1} = q_f - \dot{q}_f \Delta t_{N+1} + \ddot{q}_f \frac{\Delta t_{N+1}^2}{3} + \ddot{\Pi}_{N+1}\left(t_{N+1}\right) \frac{\Delta t_{N+1}^2}{6}$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix}
$$

Tridiagonal matrix
(Ma trận 3 đường chéo)

Với
$$
\begin{cases} a_{11} = \frac{\Delta t_1}{2} + \frac{\Delta t_2}{3} + \frac{\Delta t_1^2}{6\Delta t_2} \\ a_{kk} = \frac{\Delta t_k + \Delta t_{k+1}}{3} \qquad k = 2, \ldots, N-1 \\ a_{NN} = \frac{\Delta t_N}{3} + \frac{\Delta t_{N+1}}{2} + \frac{\Delta t_{N+1}^2}{6\Delta t_N} \\ a_{21} = \frac{\Delta t_2}{6} - \frac{\Delta t_1^2}{6\Delta t_2} \\ a_{k,k-1} = \frac{\Delta t_k}{6} \qquad k = 3, \ldots, N \\ a_{k,k+1} \frac{\Delta t_{k+1}}{6} \qquad k = 1, \ldots, N-2 \\ a_{N-1,N} = \frac{\Delta t_N}{6} - \frac{\Delta t_{N+1}^2}{6\Delta t_N} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} b_1 = \frac{q_3 - q_i}{\Delta t_2} - \left(\frac{1}{\Delta t_2} + \frac{1}{\Delta t_1}\right) \left(\dot{q}_i \Delta t_1 + \ddot{q}_i \frac{\Delta t_1^2}{3}\right) - \ddot{q}_i \frac{\Delta t_1}{6} \\ b_2 = \frac{1}{\Delta t_2} \left(q_i + \dot{q}_i \Delta t_1 + \ddot{q}_i \frac{\Delta t_1^2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\Delta t_3} + \frac{1}{\Delta t_2}\right) q_3 + \frac{q_4}{\Delta t_3} \\ b_k = \frac{q_k}{\Delta t_k} - \left(\frac{1}{\Delta t_{K+1}} + \frac{1}{\Delta t_K}\right) q_{k+1} + \frac{q_{k+2}}{\Delta t_{k+1}} \qquad k = 3, \ldots, N-2 \\ b_{N-1} = \frac{q_{N-1}}{\Delta t_{N-1}} - \left(\frac{1}{\Delta t_N} + \frac{1}{\Delta t_{N-1}}\right) q_N + \frac{1}{\Delta t_N} \left(q_f - \dot{q}_f \Delta t_{N+1} + \ddot{q}_f \frac{\Delta t_{N+1}^2}{3}\right) \\ b_N = \frac{q_N - q_f}{\Delta t_N} - \left(\frac{1}{\Delta t_{N+1}} + \frac{1}{\Delta t_N}\right) \left(-\dot{q}_f \Delta t_{N+1} + \ddot{q}_f \frac{\Delta t_{N+1}^2}{3}\right) - \ddot{q}_f \frac{\Delta t_{N+1}}{6} \end{cases}
$$

Chú ý: N=3 => $b_2 = \frac{1}{\Delta t_2}\left(q_i + \dot{q}_i \Delta t_1 + \ddot{q}_i \frac{\Delta t_1^2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\Delta t_3} + \frac{1}{\Delta t_2}\right) q_3 + \frac{1}{\Delta t_3}\left(q_f - \dot{q}_f \Delta t_4 + \ddot{q}_f \frac{\Delta t_4^2}{3}\right)$

C1: Hàm gia tốc: $\ddot{\Pi}_k(t) = \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{\Delta t_k}(t_{k+1} - t) + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{\Delta t_k}(t - t_k)$ ➡ $\Pi_k(t)$ và $\dot{\Pi}_k(t)$

C2: Hàm quỹ đạo $\Pi_k(t) = f(\Pi_k(t_k), \Pi_k(t_{k+1}), \ddot{\Pi}_k(t_k), \ddot{\Pi}_k(t_{k+1}))$ ➡ $\dot{\Pi}_k(t)$ và $\ddot{\Pi}_k(t)$

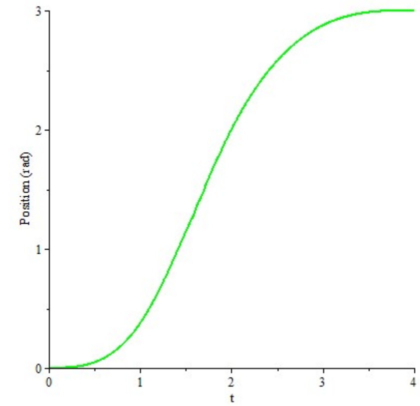
Bài tập 5: (E4.5 P189 (209) sách Robotics)

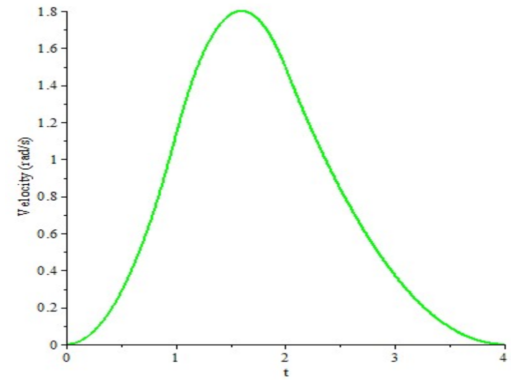
Given the values for the joint variable: $q(0) = 0$, $q(2) = 2$, and $q(4) = 3$, compute the cubic interpolating spline with null initial and final velocities and accelerations.

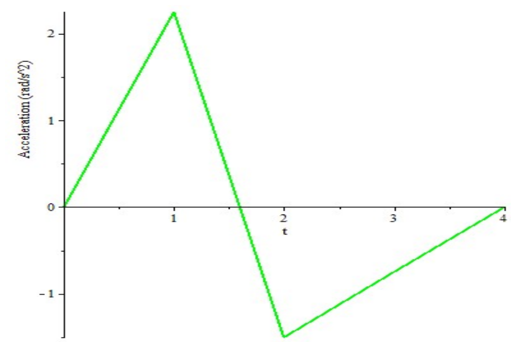
Giải

- $\boldsymbol{A}[\ddot{\Pi}_2(t_2) \quad \dots \quad \ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1})]^T = \boldsymbol{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad ddP := \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$





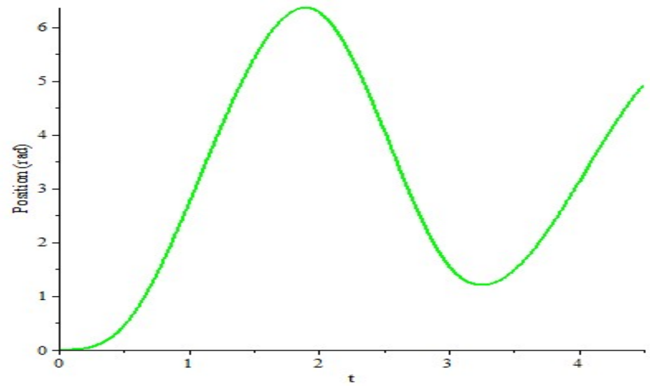


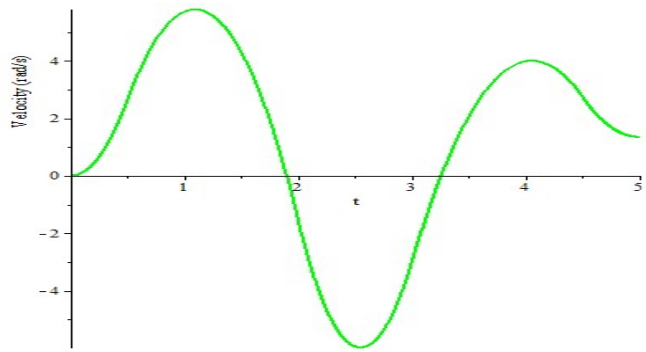
Bài tập 6

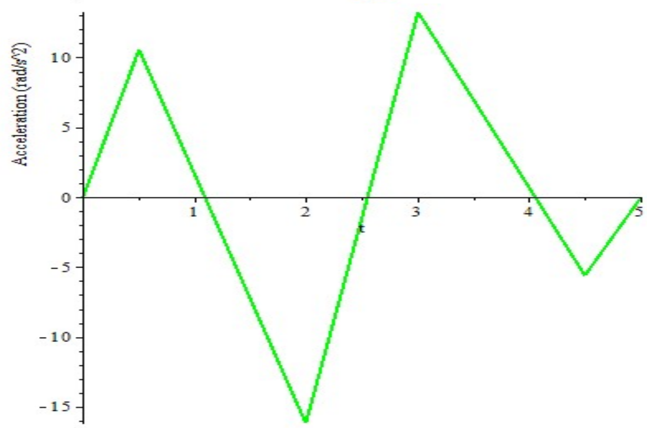
Lập quỹ đạo khớp nội suy spline qua các điểm:

- ✓ $q_1 = 0$ tại $t_1 = 0$
- ✓ $q_3 = 2\pi$ tại $t_3 = 2$
- ✓ $q_4 = \pi/2$ tại $t_4 = 3$
- ✓ $q_6 = \pi$ tại $t_6 = 5$

Biết rằng $\dot{q}_i = \dot{q}_1 = 0; \dot{q}_f = \dot{q}_6 = 0;\ \ddot{q}_i = \ddot{q}_1 = 0; \ddot{q}_f = \ddot{q}_6 = 0$


Position (rad)
t
0
1
2
3
4
5
6


Velocity (rad/s)
t
-4
-2
0
2
4
1
2
3
4
5


Acceleration (rad/s^2)
t
-15
-10
-5
0
5
10
1
2
3
4
5

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Nội suy đa thức tuyến tính kết hợp parabol** (Interpolating linear polynomials with parabolic blends)

✓ Quỹ đạo 2-1-2 cho nhiều điểm:
  - Nội suy parabol tại N điểm $q_1 \dots q_N$ tại các thời điểm $t_1 \dots t_N$
  - Nội suy hàm tuyến tính cho các đoạn quỹ đạo từ t_k đến t_{k+1}

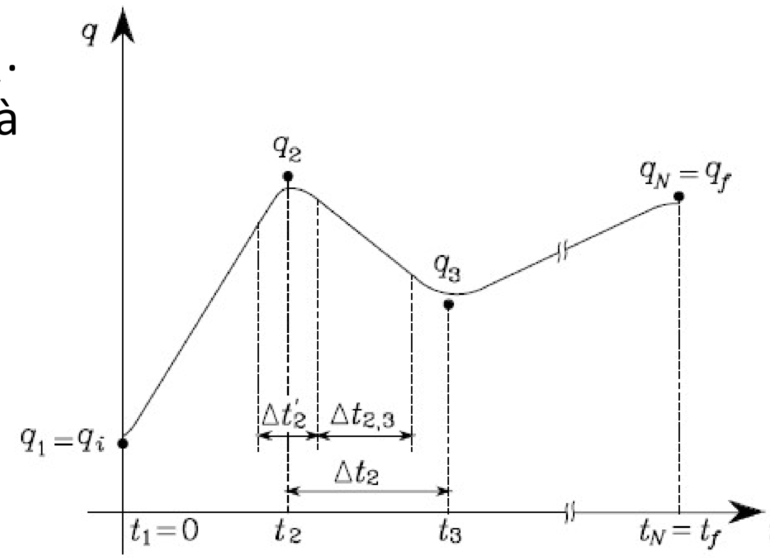
➡ Quỹ đạo là chuỗi đa thức tuyến tính, kết hợp bậc 2.
(KHÔNG ĐẢM BẢO GIA TỐC LIÊN TỤC)

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Nội suy đa thức tuyến tính kết hợp parabol** (Interpolating linear polynomials with parabolic blends)

✓ $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ là khoảng thời gian giữa q_k và q_{k+1}.
✓ $\Delta t_{k,k+1}$ là khoảng thời gian mà quỹ đạo nội suy q_k và q_{k+1} là một hàm tuyến tính theo thời gian.
✓ $\dot{q}_{k,k+1}$ là vận tốc không đổi và $\ddot{q}_k$ là gia tốc trong khoảng parabol có thời gian $\Delta t'_k$.

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}} \text{ và } \ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k}$$



q_k, Δt_k, $\Delta t'_k$ là các giá trị cho trước

2.2 Chuyển động theo chuỗi điểm

- **Nội suy đa thức tuyến tính kết hợp parabol** (Interpolating linear polynomials with parabolic blends)

$$q(t) = \begin{cases} a_{k1}(t - t_k) + a_{k0} & t_k + \frac{\Delta t'_k}{2} \le t < t_{k+1} - \frac{\Delta t'_k}{2} \\ b_{k2}(t - t_k)^2 + b_{k1}(t - t_k) + b_{k0} & t_k - \frac{\Delta t'_k}{2} \le t < t_k + \frac{\Delta t'_k}{2} \end{cases}$$

Với

$a_{k0} = q_k$ và $a_{k1} = \dot{q}_{k,k+1}$, k=1,…N-1

$b_{k1} = \frac{\dot{q}_{k,k+1} + \dot{q}_{k-1,k}}{2}$ và $b_{k2} = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{2\Delta t'_k}$; k=1,…N

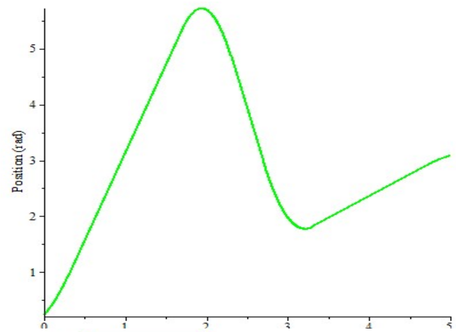
$b_{k0} = q_k + \left(\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}\right)\frac{\Delta t'_k}{8}$; K=1…N

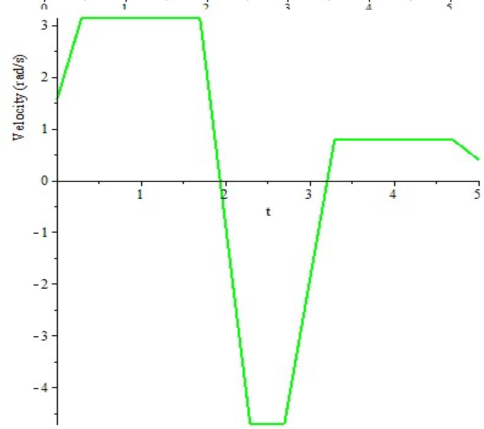
$$\dot{q}_{k-1,k} = \begin{cases} \dot{q}_i & k = 1 \\ \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t'_k} & k = 2, \dots N \\ \dot{q}_f & k = N + 1 \end{cases}$$

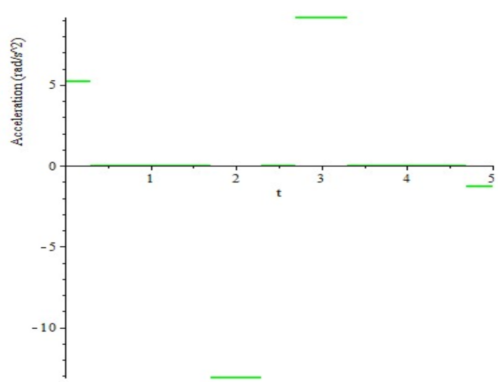
Bài tập 7

- Lập quỹ đạo đa thức tuyến tính kết hợp parabol với tập hợp điểm như sau:
  - ✓ $q_1 = 0$ tại $t_1 = 0$
  - ✓ $q_2 = 2\pi$ tại $t_2 = 2$
  - ✓ $q_3 = \pi/2$ tại $t_3 = 3$
  - ✓ $q_4 = \pi$ tại $t_4 = 5$

  Biết rằng $\dot{q}_1 = 0$; $\dot{q}_4 = 0$; $\Delta t_k' = 0.2$ với k=1…4.


Position (rad)
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5


Velocity (rad/s)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
1
2
3
4
5
t

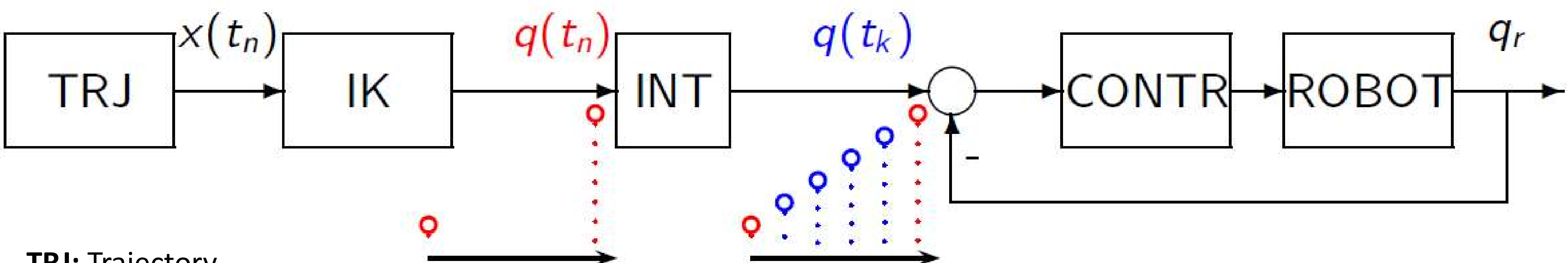

Acceleration (rad/s^2)
5
0
-5
-10
1
2
3
4
5
t

Bài tập 8 (E4.6, P189 (209) sách Robotics)

- Given the values for the joint variable: $q(0) = 0$, $q(2) = 2$, and $q(4) = 3$, find the interpolating polynomial with linear segments and parabolic blends with null initial and final velocities.

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- **Mục đích:** Quỹ đạo tư thế/trạng thái (pose) của khâu cuối (end-effector) theo hệ quy chiếu Đề-Các (không gian hoạt động) -> Xác định **hàm nội suy** dựa trên các điều kiện ban đầu.
- Yêu cầu hàm động học ngược để chuyển sang không gian khớp



TRJ: Trajectory
IK: Inverse Kinematic
INT: Interpolation

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- Phương pháp 1: Sử dụng các kỹ thuật nội suy không gian khớp cho không gian làm việc (thay biến khớp bằng biến vị trí hoặc/và hướng trong không gian Đề-Các).
- Phương pháp 2: Xác định dạng đường đi hình học (Geometric path) và luật thời gian:
  - ✓Phương trình tham số path: $p = p(s)$ -> Motion Primitives: Rectilinear, Circular paths
  - ✓Luật thời gian: *s=s(t) với* $s \in [s_a, s_b]$

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- **Đoạn thẳng**
  - ✓ Đường đi giữa p_i và p_f là một đoạn thẳng:

$$p(s) = p_i + \frac{s}{\|p_f - p_i\|}(p_f - p_i) \text{ với } s \in \left[0, \|p_f - p_i\|\right]$$

  - ✓ Đạo hàm p theo s

$$\frac{dp}{ds} = \frac{p_f - p_i}{\|p_f - p_i\|} \text{ và } \frac{d^2p}{ds^2} = 0$$

  - ✓ Theo thời gian t: $\dot{p}(t) = \frac{dp}{ds}\dot{s}(t)$ và $\ddot{p}(t) = \frac{dp}{ds}\ddot{s}(t) + \frac{d^2p}{ds^2}\dot{s}^2(t)$

$$\dot{p} = \frac{\dot{s}}{\|p_f - p_i\|}(p_f - p_i) \text{ và } \ddot{p} = \frac{\ddot{s}}{\|p_f - p_i\|}(p_f - p_i)$$

  - ✓ Luật chuyển động có thể sử dụng các kỹ thuật lập quỹ đạo trong không gian khớp, chẳng hạn như quỹ đạo tuyến tính kết hợp parabol.

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

✓ Trường hợp chuỗi điểm $(p_0, \dots, p_N)$: $\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{p}_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{s_j}{\|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1}\|}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1})$

s_j là độ dài cung của đoạn quỹ đạo thứ j, nối điểm p_{j-1} và p_j:

$$s_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le t_{j-1} \\ s'_j(t) & t_{j-1} < t < t_j \\ \|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1}\| & t_j \le t \le t_f, \end{cases}$$

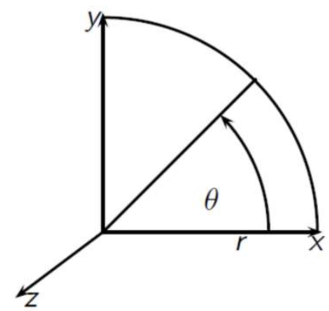
Vận tốc và gia tốc p_e:

$$\dot{\boldsymbol{p}}_e = \sum_{j=1}^{N} \frac{\dot{s}_j}{\|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1}\|}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1}) = \sum_{j=1}^{N} \dot{s}_j \boldsymbol{t}_j$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_e = \sum_{j=1}^{N} \frac{\ddot{s}_j}{\|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1}\|}(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1}) = \sum_{j=1}^{N} \ddot{s}_j \boldsymbol{t}_j$$

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- **Cung tròn**
  - ✓ Đường đi giữa p_i và p_f là một cung tròn:

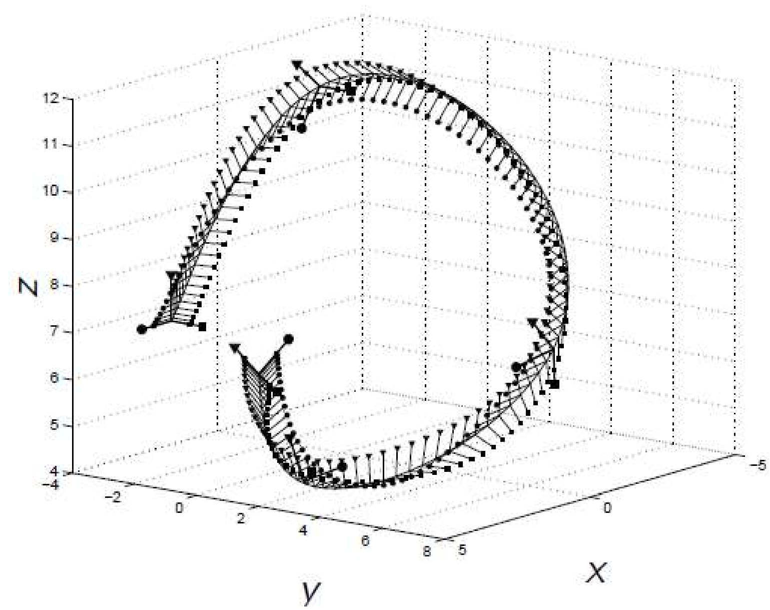


$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rcos(s) \\ rsin(s) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ với } s \in [s_a, s_b]$$

  - ✓ Luật chuyển động có thể sử dụng kỹ thuật lập quỹ đạo trong không gian khớp, chẳng hạn vận tốc hình thang
  - ✓ Tổng quát: $p(s) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}p'(s)$
    - $p(s)$ trong hệ *O-xyz*
    - $p'(s)$ trong hệ $O' - x'y'z'$
    - ***c**:* tâm đường tròn trong hệ *O-xyz*
    - ***R**:* ma trận quay giữa $\mathrm{O'} - \mathrm{x'y'z'}$ và O-xyz

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- Quỹ đạo hướng
  - ✓Trong nhiều trường hợp, quỹ đạo trong không gian làm việc yêu cầu hướng của end-effector ở mỗi điểm trên đường cong -> Tham số quỹ đạo là hàm 6 chiều biểu diễn cả vị trí và hướng.
  $$p = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]$$
  - ✓Bài toán quỹ đạo đa chiều có thể tách thành các thành phần quỹ đạo 3D – được xem như các bài toán vô hướng: $p_k = [x_k, y_k, z_k]^T$ (vị trí) và $p_k = [\alpha_k, \beta_k, \gamma_k]^T$ (hướng). Các kỹ thuật nêu trên có thể áp dụng. Trong trường hợp này, mỗi hàm p(.) phụ thuộc trực tiếp vào thời gian và việc đồng bộ giữa các thành phần được thực hiện bởi áp đặt các điều kiện nội suy tại cùng một thời điểm.



3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- Quỹ đạo hướng:
  - ✓ Xem xét hướng của end-effector, gắn mới ma trận xoay R biến đổi theo thời gian. Không dễ dàng nội suy giữa các ma trận xoay R_i và R_f
  - ✓ Biểu diễn hướng bởi góc Euler $\phi_e = (\varphi, \vartheta, \psi)$ theo thời gian, từ ϕ_i đến ϕ_f.

Vị trí: $$\phi_e = \phi_i + \frac{s}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i)$$

Vận tốc: $$\dot{\phi}_e = \frac{\dot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i)$$

Gia tốc: $$\ddot{\phi}_e = \frac{\ddot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i)$$

Luật thời gian *s(t)* có thể tuân theo một trong các kỹ thuật nội suy như đa thức bậc ba hoặc đoạn tuyến tính kết hợp parabol.

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- Quỹ đạo hướng
  - ✓ Lấy R_i và R_f là ma trận xoay trục khởi tạo $O_i - x_i y_i z_i$ và trục kết thúc $O_f - x_f y_f z_f$ so với hệ trục cơ sở. Ma trận xoay giữa 2 hệ trục có thể được tính toán bởi $R_f = R_i R_f^i$:

$$\Rightarrow \boldsymbol{R}_f^i = \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{R}_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

  - ✓ Nếu ma trận $R^i(t)$ dùng để mô tả chuyển đổi từ R_i thành R_f, thì nó phải là $R^i(0) = I$ và $R^i(t_f) = R_f^i$. Tuy nhiên ma trận R_f^i có thể được biểu diễn như ma trận xoay quanh một trục cố định trong không gian; véc tơ đơn vị r^i của trục và góc quay ϑ_f có thể được tính bởi:

$$\vartheta_f = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \qquad \text{và} \qquad \boldsymbol{r} = \frac{1}{2\sin\vartheta_f}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

3. Lập quỹ đạo không gian hoạt động

- Quỹ đạo hướng:
  - ✓Ma trận $R^i(t)$ có thể được hiểu là ma trận $R^i(\vartheta(t), r^i)$

$$\boldsymbol{R}^{i}(\vartheta,\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta & r_xr_y(1-c_\vartheta)-r_zs_\vartheta & r_xr_z(1-c_\vartheta)+r_ys_\vartheta \\ r_xr_y(1-c_\vartheta)+r_zs_\vartheta & r_y^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta & r_yr_z(1-c_\vartheta)-r_xs_\vartheta \\ r_xr_z(1-c_\vartheta)-r_ys_\vartheta & r_yr_z(1-c_\vartheta)+r_xs_\vartheta & r_z^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta \end{bmatrix}$$

  - ✓ Áp dụng luật thời gian cho ϑ, như biểu diễn đối với một khớp đơn với $\vartheta(0) = 0$ và $\vartheta(t_f) = \vartheta_f$, và tính toán các thành phần r^i. Vận tốc và gia tốc tương ứng:

$$\boldsymbol{\omega}^i = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{r}^i$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^i = \ddot{\vartheta}\,\boldsymbol{r}^i$$

Bài tập 9: E4.7 P189 (209) Robotics

Find the timing law $\boldsymbol{p}(t)$ for a Cartesian space rectilinear path with trapezoidal velocity profile from $\boldsymbol{p}(0) = [\ 0\ 0.5\ 0]^T$ to $\boldsymbol{p}(2) = [\ 1\ {-0.5}\ 0]^T$

Bài tập 10: E4.8 P189 (209) Robotics

- Find the timing law $\boldsymbol{p}(t)$ for a Cartesian space circular path with trapezoidal velocity profile from $\boldsymbol{p}(0) = [\ 0\ 0.5\ 1]^T$ to $\boldsymbol{p}(2) =[\ 0\ -0.5\ 1]^T$; the circle is located in the plane $x = 0$ with centre at $\boldsymbol{c}=[0\ 0\ 1]^T$ and radius $\rho = 0.5$, and is executed clockwise for an observer aligned with x.