

## 4. Động học vận tốc

- Vận tốc góc của khớp cuối

$$\checkmark \omega_n^0 = z_1^0 \dot{\theta}_1 + z_2^0 \dot{\theta}_2 + \cdots + z_n^0 \dot{\theta}_n = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

$$\checkmark \omega_n^0 = \omega_1^0 + R_1^0 \omega_2^1 + \cdots + R_{n-1}^0 \omega_n^{n-1}$$

## Bài tập 16

- Một robot 3 khớp có bảng DH như sau. Nếu robot có  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = -60^\circ$ ,  $\theta_3 = 75^\circ$  và vận tốc các khớp  $\dot{\theta}_1$  là  $-3^\circ/s$ ,  $\dot{\theta}_2$  là  $5^\circ/s$ ,  $\dot{\theta}_3$  là  $10^\circ/s$ . Xác định vận tốc góc của cơ cấu cuối so với khung cơ bản.

Khớp	$d$	$a$	$\alpha$	$\theta$
1	0.5	0.8	$90^\circ$	$\theta_1$
2	0.2	1.2	$90^\circ$	$\theta_2$
3	0	0.15	0	$\theta_3$

## Bài tập 17:

- Jacobi  $J$  của một robot bốn khớp quay cho bởi công thức dưới đây.  
Nếu robot có các khớp  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$ ,  $\theta_3 = 45^\circ$ ,  $\theta_4 = 0^\circ$ ; vận tốc các khớp tương ứng là  $-5^\circ/s$ ,  $10^\circ/s$ ,  $0^\circ/s$  và  $-8^\circ/s$ . Tính vector vận tốc cơ cấu cuối  $v$  và vector vận tốc góc.

$$J = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & 0.5 s_1 c_3 & s_3 & -c_2 \\ 0 & 0.2 s_2 s_3 & 0 & s_2 \\ 1 & 0 & s_1 & -c_1 \\ 0 & s_1 & -c_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5. Động học vận tốc ngược

- Ta có:  $V = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J_b(q)\dot{q} \rightarrow \dot{q} = J_b^{-1}(q)V$
- Phương trình chuyển động:  $q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t$ .

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + J_b^{-1}(q(t_k))V(t_k)\Delta t$$

## 6. Mô hình động lực học

- Mỗi quan hệ giữa lực, mômen của các khớp với vị trí, tốc độ và gia tốc được biểu diễn trong phương trình chuyển động gọi là **phương trình động lực học**.
- Trong phương trình động lực học, lực và mômen là tín hiệu vào. Dựa vào phương trình động lực học, sẽ tính được lực, mômen cần thiết để khớp robot có thể chuyển động được với tốc độ và gia tốc mong muốn.

## 6. Mô hình động lực học

- **Hàm lagrange:** *Hiệu động năng K và thế năng P*

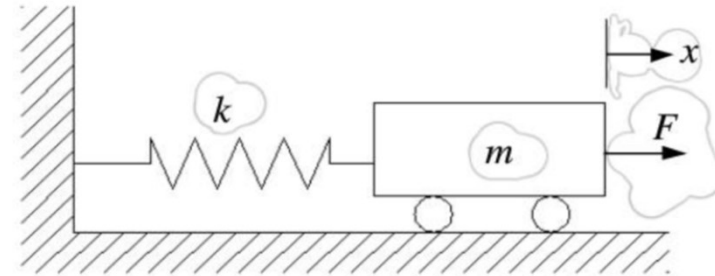
$$\mathbf{L} = \mathbf{K} - \mathbf{P}$$

- **Phương trình động lực học Lagrange-Euler:**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad \text{với } i=1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau$$

- ✓  $q$  là véctơ biến khớp gồm  $n$  thành phần  $q_i$  ( $\theta_i$  với khớp quay,  $d_i$  khớp tịnh tiến)
- ✓  $\tau$  là lực tổng quát ứng với độ dịch chuyển khớp, với các thành phần  $\tau_i$  ( $n_i$  (Nm) là mômen tương ứng với góc khớp) và  $f_i$  (N) là lực tương ứng với độ dịch chuyển của khớp).

Ví dụ 1: con lắc lò xo nằm ngang



- **Phương pháp 1: Sử dụng phương trình Lagrange-Euler**

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ P &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} L &= K - P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \text{ và } \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \end{aligned} \quad \rightarrow F = m\ddot{x} + kx$$

- **Phương pháp 2: Sử dụng cơ học Newton**

$$\sum F = ma \rightarrow F - kx = m\ddot{x} \rightarrow F = m\ddot{x} + kx$$

## 6.1 Động năng và thế năng của hệ tay máy

- **Hệ tay máy có n khâu:**

- Tọa độ khối tâm của khâu i là:  $\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{r}_{Ci}(\mathbf{q}, t)$

*( $\varphi_i$  là véc tơ đại số ứng với góc quay của vật rắn thứ i, quay quanh trục quay tức thời)*

- Ma trận cosin chỉ hướng của khâu i:  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}, t)$

- Ma trận Jacobi tịnh tiến và quay khâu i:  $\mathbf{J}_{Ti} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}}$  và  $\mathbf{J}_{Ri} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}}$



Vận tốc dài và vận tốc góc của khối tâm của vật rắn

$$\mathbf{v}_{Ci} = \frac{d\mathbf{r}_{Ci}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{Ti} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{Ri} \dot{\mathbf{q}}$$



## 6.1 Động năng và thế năng của hệ tay máy

- **Động năng khâu i của tay máy**

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \qquad \mathbf{I}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T$$

Với  $\mathbf{I}_i$  là ma trận quán tính khối của vật rắn với hệ quy chiếu cố định,  $\mathbf{I}_i^{(i)}$  là ma trận quán tính với hệ quy chiếu gắn với khâu i  $\Rightarrow \mathbf{I}_i^{(i)}$  là ma trận đường chéo, nếu hệ tọa độ khâu là hệ quy chiếu quán tính chính.

- **Tổng Động năng của tay máy**

$$K = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$$

## 6.1 Động năng và thế năng của hệ tay máy

- Động năng của tay máy

$$K = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$$

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (J_{Ti} \dot{\mathbf{q}})^T (J_{Ti} \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (J_{Ri} \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{I}_i (J_{Ri} \dot{\mathbf{q}})$$

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i J_{Ti}^T J_{Ti} + \sum_{i=1}^n J_{Ri}^T \mathbf{I}_i J_{Ri}} \right\} \dot{\mathbf{q}} \quad \rightarrow K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Ma trận khối lượng  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n m_i J_{Ti}^T J_{Ti} + \sum_{i=1}^n J_{Ri}^T \mathbf{I}_i J_{Ri}$

## 6.1 Động năng và thế năng của hệ tay máy

- Thế năng trọng lực khâu  $i$  của tay máy

$$P_i = -m_i \mathbf{g}_o^T \mathbf{r}_{Ci} \quad \text{Với } \mathbf{g}_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix} \text{ là véc tơ gia tốc trọng trường}$$

$$\mathbf{r}_{Ci} = \begin{bmatrix} x_{Ci} & y_{Ci} & z_{Ci} \end{bmatrix}^T \text{ là véc tơ khối tâm}$$

- Tổng Thế năng trọng lực của tay máy


$$P = -\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_o^T \mathbf{r}_{Ci}$$

## 6.1 Động năng và thế năng của hệ tay máy

- Hàm Lagrange:  $L=K-P$
- Phương trình động lực học Lagrange-Euler

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau$$

P không phụ thuộc  $\dot{q}$


$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \left( \frac{\partial K}{\partial q} \right)^T - \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \right) = \tau$$

PT động lực học:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \left( \frac{\partial K}{\partial q} \right)^T - \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \right) = \tau$

- TP1:**  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad \rightarrow \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_{ij}(q) \dot{q}_j$   
 $\rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dm_{ij}(q)}{dt} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n m_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j$
- TP2:**  $\frac{\partial K}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k$
- TP3:**  $P = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{r}_{Ci} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{r}_{Cj}}{\partial q_i} = g_i(q)$

**Tổng hợp**  $\sum_{j=1}^n m_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i(q) = \tau_i$

PT động lực học:  $\sum_{j=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i(q) = \tau_i$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(q) = \tau_i; \quad i=1 \dots n$$

Ký hiệu:  $h_{ijk}(q) = \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_i}$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(q) = \tau_i; \quad i=1 \dots n$$

Ký hiệu:  $c_{ij}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n h_{ijk}(q) \dot{q}_k \quad \rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}(q, \dot{q}) \dot{q}_j$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n c_{ij}(q, \dot{q}) \dot{q}_j + g_i(q) = \tau_i; \quad i=1 \dots n$$

PT động lực học:  $\sum_{j=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n c_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}_j + g_i(q) = \tau_i; \quad i=1 \dots n$

- Phương trình tổng quát

➔  $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau(t)$

$M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận khối lượng suy rộng

$C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận ly tâm – Coriolis

$C(q, \dot{q})\dot{q}$  đại diện cho lực quán tính ly tâm và quán tính Coriolis.

$g(q)$  là trọng lực

- Phương trình dạng đầy đủ

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + g(q) + \tau_d = \tau$$

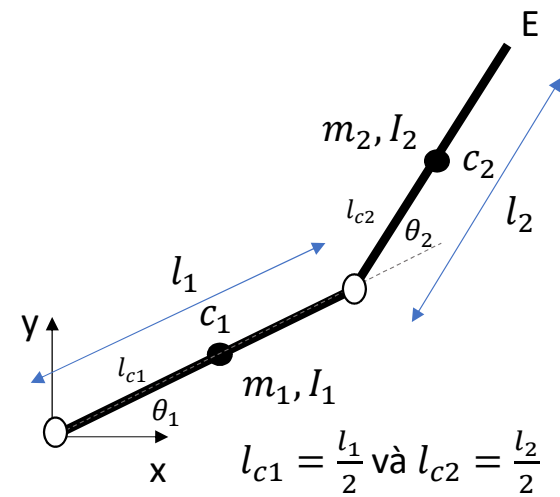
$$F(\dot{q}) = F_v \dot{q} + F_d$$

$F_v$  là ma trận hệ số ma sát nhớt  
 $F_d$  là ma sát động.  
 $\tau_d$ : nhiễu

## Ví dụ 3: động lực học Two-Link Planar Arm

- Góc khớp  $q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T = [q_1 \quad q_2]^T$
- Chiều dài khâu:  $l_1, l_2$
- Trọng tâm khâu:  $l_{c1} = \frac{l_1}{2}$  và  $l_{c2} = \frac{l_2}{2}$
- Khối lượng khâu:  $m_1, m_2$
- Quán tính khâu:  $I_1, I_2$

Xác định phương trình động lực học?





## Ví dụ 3: động lực học Two-Link Planar Arm

- Vị trí khối tâm:  $r_{c_1} = \begin{bmatrix} l_{c_1} c_1 \\ l_{c_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$   $r_{c_2} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c_2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$

- Vận tốc góc các khâu:  $\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$   $\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$

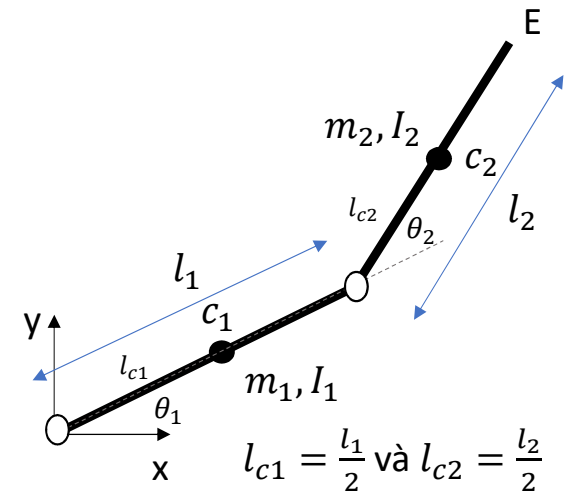
- Ma trận Jacobi tịnh tiến và quay

$$J_{T1} = \frac{\partial r_{c1}}{\partial q} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin q_1 & 0 \\ l_{c1} \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{R1} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{T2} = \frac{\partial r_{c2}}{\partial q} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) & -l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) & l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{R2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



## Ví dụ 3: động lực học Two-Link Planar Arm

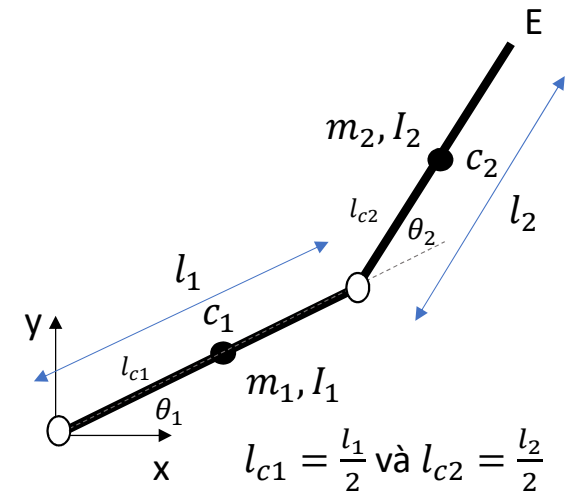
- Ma trận quán tính :  $I_1 = \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}$   $I_2 = \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}$
- Tính ma trận khối lượng suy rộng

$$M = \sum_{i=1}^2 \left( m_i J_{Ti}^T J_{Ti} + J_{Ri}^T I_i J_{Ri} \right) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = m_1 l_{C1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{C2}^2 + 2l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{2z} + I_{1z}$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 (l_{C2}^2 + l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{2z}$$

$$m_{22} = m_2 l_{C2}^2 + I_{2z}$$



## Ví dụ 3: động lực học Two-Link Planar Arm

- Tính động năng:  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$

$$K = \frac{1}{2} \left\{ \left[ m_1 l_{C1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{C2}^2 + 2l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{z1} + I_{z2} \right] \dot{q}_1^2 + (m_2 l_{C2}^2 + I_{z2}) \dot{q}_2^2 + 2 \left[ m_2 (l_{C2}^2 + l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{z2} \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right\}$$

- Tính thế năng:  $P = -\sum_{i=1}^n m_i g_o^T r_{Ci} \rightarrow P = m_1 g l_{C1} \sin q_1 + m_2 g [l_1 \sin q_1 + l_{C2} \sin(q_1 + q_2)]$

- Giải phương trình Lagrange-Euler

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \tau$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (m_1 l_{C1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{C2}^2 + 2l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{z2} + I_{1z}) \ddot{q}_1 \\ & + (m_2 (l_{C2}^2 + l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{2z}) \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{C2} \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{C2} \sin q_2 \dot{q}_2^2 + (m_1 l_{C1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{C2} g \cos(q_1 + q_2) \\ & - P_x [l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)] + P_y [l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)] \end{aligned}$$

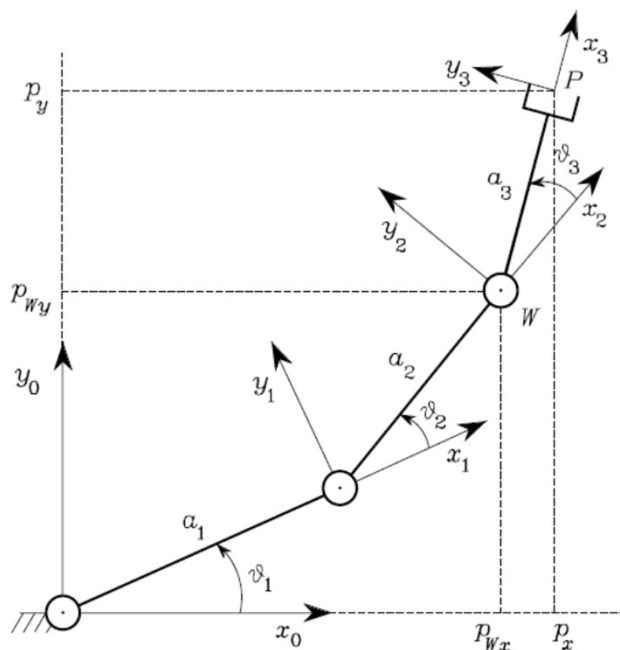
$$\begin{aligned} \tau_2 = & (m_2 (l_{C2}^2 + l_1 l_{C2} \cos q_2) + I_{2z}) \ddot{q}_1 + (m_2 l_{C2}^2 + I_{2z}) \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{C2} \dot{q}_1^2 \sin q_2 \\ & + m_2 l_{C2} g \cos(q_1 + q_2) - P_x l_2 \sin(q_1 + q_2) + P_y l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

## Ví dụ 3: động lực học Two-Link Planar Arm

- Tính toán phương trình động lực học bằng Maple
- Mô phỏng động lực học tay máy bằng matlab simulink

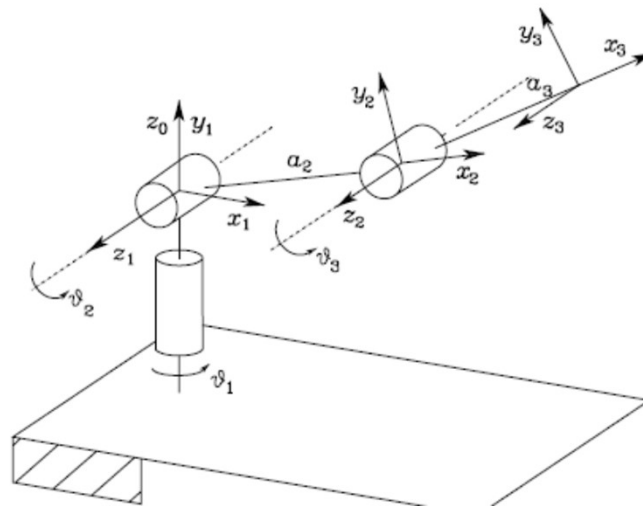
# Bài tập 18: Three-link Planar Arm

- Giải phương trình động lực học bằng Maple
- Mô phỏng động lực học tay máy bằng matlab simulink



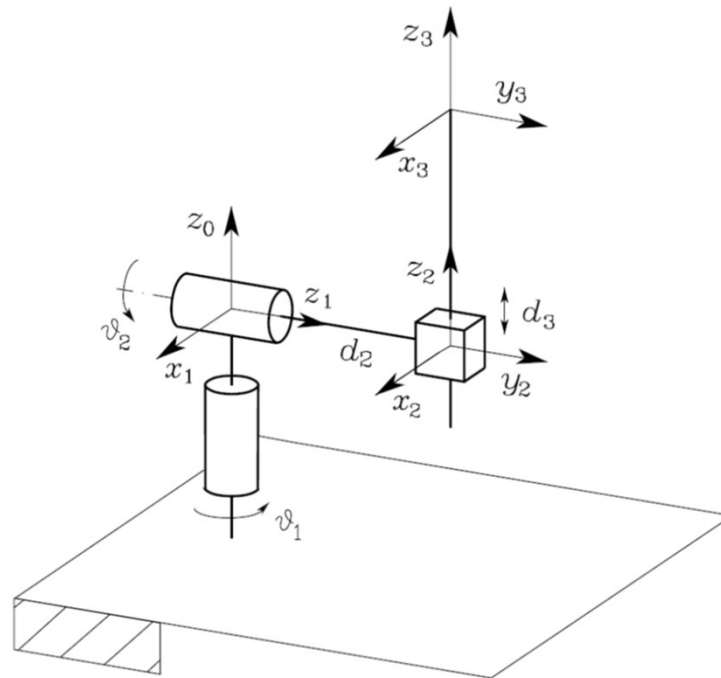
# Bài tập 19: **Anthropomorphic Arm**

- Giải phương trình động lực học bằng Maple
- Mô phỏng động lực học tay máy bằng matlab simulink



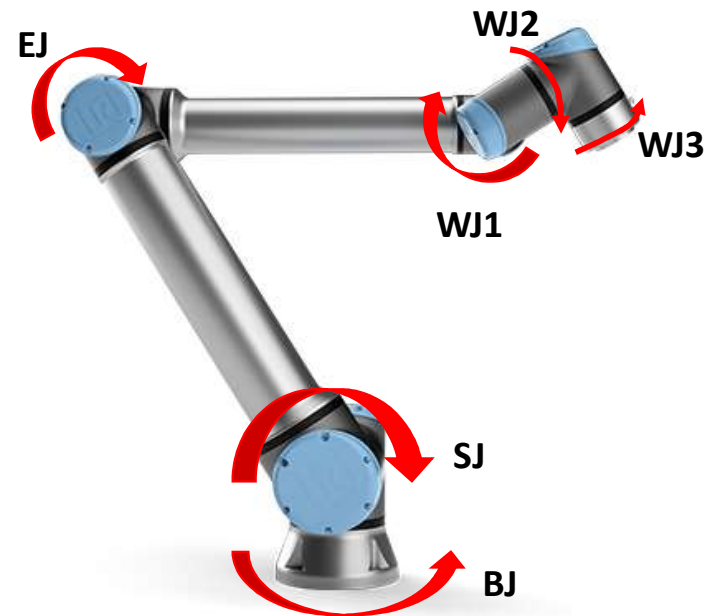
# Bài tập 20: Spherical Arm

- Giải phương trình động lực học bằng Maple
- Mô phỏng động lực học tay máy bằng matlab simulink



# Bài tập 21: UR10

- Giải phương trình động lực học bằng Maple
- Mô phỏng động lực học tay máy bằng matlab simulink



Universal Robot UR10