Bài 1:

Model, với từng điểm dữ liệu $x^{(i)}$.

Ta có: $p(x^{(i)}=1) = \hat{y}_i$ là xs model dự đoán cho vay

$p(x^{(i)}=0) = 1-\hat{y}_i$ là xs model dự đoán không cho vay.

Hàm sigmoid: $\sigma(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Công thức logistic regression: $\hat{y}_i = \sigma(w_0 + w_1 x_1^{(i)} + w_2 x_2^{(i)})$

$$= \frac{1}{1+e^{-(w_0+w_1x_1^{(i)}+w_2x_2^{(i)})}}$$

Hàm loss là hàm entropy chéo:

với mỗi điểm $(x_i, y_i)$: $L = -[y_i \cdot \log(\hat{y}_i) + (1-y_i)\log(1-\hat{y}_i)]$

Trên toàn bộ dữ liệu: $L = -\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [y_i \log \hat{y}_i + (1-y_i)\log(1-\hat{y}_i)]$

(*) Tính đạo hàm hàm loss theo từng trọng số $w$.

$$\frac{dL}{dw} = \frac{dL}{d\hat{y}_i} \cdot \frac{d\hat{y}_i}{dw}.$$

$$\frac{dL}{d\hat{y}_i} = -\left(\frac{y_i}{\hat{y}_i} - \frac{1-y_i}{1-\hat{y}_i}\right) = \frac{\hat{y}_i - y_i}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)}$$

Ta có: $\dfrac{d(\sigma(x))}{dx} = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \dfrac{(-1).(-1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$= \sigma(x) \cdot [1-\sigma(x)].$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}_i}{dw_0} = \frac{d(\sigma(w_0+w_1x_1^i+w_2x_2^i))}{dw_0} = \hat{y}_i(1-\hat{y}_i)$$

$$\frac{d\hat{y}_i}{dw_1} = x_1^{(i)}\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)$$

$$\frac{d\hat{y}_i}{dw_2} = x_2^{(i)} \cdot \hat{y}_i(1-\hat{y}_i)$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dw_0} = \frac{dL}{d\hat{y}_i} \cdot \frac{d\hat{y}_i}{dw_0} = \frac{\hat{y}_i - y_i}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)} \cdot (\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)) = \hat{y}_i - y_i$$

$$\frac{dL}{dw_1} = x_1^{(i)} \cdot (\hat{y}_i - y_i)$$

$$\frac{dL}{dw_2} = x_2^{(i)} (\hat{y}_i - y_i).$$

Trên toàn bộ dữ liệu.

$$\frac{dL}{dw_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i) = \hat{y} - y$$

$$\frac{dL}{dw_1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_1^{(i)} (\hat{y}_i - y_i)$$

$$\frac{dL}{dw_2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_2^{(i)} (\hat{y}_i - y_i)$$

Bài 2.

Ta có: $\frac{dL}{dw} = \frac{dL}{d\hat{y}_i} \cdot \frac{d\hat{y}_i}{dw} = \frac{\hat{y}_i - y_i}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)} \cdot \frac{d\hat{y}_i}{dw}$.

Ta tìm hàm $\hat{y}_i = f(w^T x_i)$ để mẫu số xuất hiện.

Đặt $w^T x = s$. Ta có: $\hat{y}_i = f(s)$.

Có: $\frac{d\hat{y}_i}{dw} = \frac{d\hat{y}_i}{ds} \cdot \frac{ds}{dw} = \frac{d\hat{y}_i}{ds} \cdot x.$

Ta sẽ tìm $\hat{y}_i = f(s)$ sao cho

$$\frac{d\hat{y}_i}{ds} = \hat{y}_i(1-\hat{y}_i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\hat{y}_i}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)} = ds$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{1-y_i}\right) d\hat{y}_i = ds$$

Vi phân 2 vế:

$\Rightarrow \log \hat{y}_i - \log(1-\hat{y}_i) = s + C$ (C là hằng số)

$\Leftrightarrow \log \dfrac{\hat{y}_i}{1-\hat{y}_i} = s+C.$

$\Leftrightarrow \dfrac{\hat{y}_i}{1-\hat{y}_i} = e^{s+C}$

$\Leftrightarrow \hat{y}_i = \dfrac{e^{s+C}}{1+e^{s+C}} = \dfrac{1}{1+e^{-(s+C)}} = \sigma(s+C)$

Chọn $C=0$, ta có: $\hat{y}_i = \sigma(s) = \sigma(w^T x)$ là hàm sigmoid.

Bài 6:

* Hàm entropy chéo: Xét trên 1 điểm dữ liệu, ta có:

$L = -(y \log \hat{y} + (1-y)\log(1-\hat{y}))$

$\dfrac{dL}{dw_i} = x_i(\hat{y}-y) = x_i\hat{y} - x_i y.$

$\dfrac{d^2L}{d(w_i)^2} = \dfrac{d}{dw_i}\left(\dfrac{dL}{dw_i}\right) = x_i^2 \hat{y}(1-\hat{y}).$

Ta có $\hat{y} \in (0,1) \Rightarrow \hat{y}(1-\hat{y}) > 0 \; \forall \hat{y} \in (0,1)$

$\Rightarrow x_i^2 \hat{y}(1-\hat{y}) \geq 0 \; \forall x_i, \hat{y} \in (0,1)$

. Đạo hàm bậc hai của hàm không âm nên hàm entropy chéo là hàm lồi.

* Hàm MSE.

Xét trên 1 điểm dữ liệu, ta có:

$L = \dfrac{1}{2}(\hat{y}-y)^2$

$\dfrac{dL}{dw_i} = \dfrac{dL}{d\hat{y}} \cdot \dfrac{d\hat{y}}{dw_i} = (\hat{y}-y) \cdot x_i \cdot \hat{y}(1-\hat{y})$

$= -x_i(\hat{y}^3 - (1+y)\hat{y}^2 + y\hat{y})$

Date:.............................No............

$$\frac{d^2 L}{dw_i^2} = \frac{d}{dw_i}\left(\frac{dL}{dw_i}\right) = -x_i^2\,\hat{y}(1-\hat{y})(3\hat{y}^2 - 2(1+y)\hat{y} + y)$$

Ta có: $x_i^2\,\hat{y}(1-\hat{y}) \geq 0$ như phần trước.

Ta xét xét dấu của $-(3\hat{y}^2 - 2(1+y)\hat{y} + y)$.

+TH1: $y = 0$, ta có: $-(3\hat{y}^2 - 2\hat{y}) = \hat{y}(2 - 3\hat{y}) < 0$ khi $\hat{y} > \frac{2}{3}$.

+TH2: $y = 1$, ta có: $-(3\hat{y}^2 - 4\hat{y} + 1) < 0$ khi $\hat{y} < \frac{1}{3}$.

=> Đạo hàm bậc hai không luôn dương, có thể nhận giá trị âm. Nên hàm MSE không phải hàm lồi.