TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH**	**ĐỀ SỐ 1 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (1,5 điểm) Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $u_n = \Sigma_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$. Chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ hội tụ.

Câu 2 (1,5 điểm) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Câu 3 (2,0 điểm) Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \text{ nếu} |x| \leqslant 1 \\ ax^2 + b \text{ nếu} |x| \leqslant 1 \end{cases}.$$

a. Tìm các số thực a, b để f liên tục trên $\mathbb{R}$. Dựng đồ thị của $f(x)$ với a, b vừa tìm được.

b. Khi f liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(x)$ có khả vi tại $x = 1$ không?

Câu 4 (2,0 điểm) Cho $f(x) = x\sin 3x$.

a. Tìm công thức tính đạo hàm cấp n của $f(x)$.

b. Viết khai triển Mac-Laurin của hàm $f(x)$ đến x^7.

Câu 5 (1,5 điểm) Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{arctan\frac{1}{x}}{x^3}dx$.

Câu 6 (1,5 điểm) Tính thể tích vật thể hữu hạn giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$, mặt phẳng $z = 0$ và mặt phẳng (α) chứa trục Oy đồng thời (α) tạo với mặt phẳng $z = 0$ một góc là 30^o.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH**	**ĐỀ SỐ 2 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (1,5 điểm) Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $u_n = \Sigma_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$. Chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ hội tụ.

Câu 2 (1,5 điểm) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin x}\right)$.

Câu 3 (2,0 điểm) Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \text{ nếu} |x| \leqslant 2 \\ ax^2 + b \text{ nếu} |x| \leqslant 2 \end{cases}.$$

a. Tìm các số thực a, b để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Dựng đồ thị của $f(x)$ với a, b vừa tìm được.

b. Khi f liên tục trên $\mathbb{R}$ thì f có khả vi tại $x = -2$ không?

Câu 4 (2,0 điểm) Cho $f(x) = x\sin 3x$.

a. Tìm công thức tính đạo hàm cấp n của $f(x)$.

b. Viết khai triển Mac-Laurin của hàm $f(x)$ đến x^6.

Câu 5 (1,5 điểm) Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x^4}dx$.

Câu 6 (1,5 điểm) Tính thể tích vật thể hữu hạn giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$, mặt phẳng $z = 0$ và mặt phẳng (β) chứa trục Ox đồng thời (α) tạo với mặt phẳng $z = 0$ một góc là 60^o.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH**	**ĐỀ SỐ 3 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $u_1 = \sqrt[3]{6}, u_{n+1} = \sqrt[3]{6 + u_n}$.

a. Chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ hội tụ.

b. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Câu 2 Viết khai triển Mac-Laurin của hàm $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ đến x^5, từ đó suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x \ln(1 - 2x^2)}$.

Câu 4

a. Xét sự hội tụ phân kỳ của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \sin x}{\sqrt{x^6+1}} dx$.

b. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

Câu 5 Tính thể tích phần không gian hữu hạn được giới hạn bởi các mặt $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 - 2z = 0$ và $z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH**	**ĐỀ SỐ 4 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $u_1 = \sqrt[3]{24}, u_{n+1} = \sqrt[3]{24 + u_n}$.

a. Chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ hội tụ.

b. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Câu 2 Viết khai triển của Mac-Laurin của hàm $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ đến x^5, từ đó suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2 \ln(1 - 3x)}$.

Câu 4

a. Xét sự hội tụ phân kỳ của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x^2 + x\sin x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$.

b. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{1} (\ln(1+x) - \ln x) dx$.

Câu 5 Tính thể tích phần không gian hữu hạn được giới hạn bởi các mặt $\dfrac{x^2}{9} + y^2 + z^2 - 2z = 0$ và $z = \dfrac{x^2}{9} + y^2$.

TRƯỜNG ĐHXD	ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH	ĐỀ SỐ 5 K57
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 điểm) Cho dãy số $u_n = \int_0^1 x^n \sin \frac{\pi x}{2} dx, n = 1, 2, ...$

a) Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm, bị chặn dưới.

b) Chứng minh $u_n = \frac{4n}{\pi^2}[1 - (n-1)u_{n-2}], \forall n \geq 3$, từ đó chứng minh $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Câu 2 (2,0 điểm) Viết khai triển Taylor tại điểm $x = 2$ đến cấp 10 của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(3-x)}$. Từ đó hãy tính đạo hàm $f^{(10)}(2)$.

Câu 3 (2,0 điểm) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

Câu 4 (2,0 điểm) Tính diện tích của miền phẳng $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 10, y^2 \leq 9x\right\}$.

Câu 5 (2,0 điểm) Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x-3)\,dx}{(3x+1)(x^2+1)}$.

TRƯỜNG ĐHXD	ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH	ĐỀ SỐ 6 K57
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 điểm) Cho dãy số $u_n = \int_0^1 x^n \cos \frac{\pi x}{2} dx, n = 1, 2, ...$

a) Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm, bị chặn dưới.

b) Chứng minh $u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2} n(n-1)u_{n-2}, \forall n \geq 3$, từ đó chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Câu 2 (2,0 điểm) Viết khai triển Taylor tại điểm $x = 1$ đến cấp 10 của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$. Từ đó hãy tính đạo hàm $f^{(10)}(1)$.

Câu 3 (2,0 điểm) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1-\sin x}}{x^3}$.

Câu 4 (2,0 điểm) Tính diện tích của miền phẳng $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5, x^2 \leq 4y\right\}$.

Câu 5 (2,0 điểm) Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x-2)\,dx}{(2x+1)(x^2+1)}$.

TRƯỜNG ĐHXD | **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH** | **ĐỀ SỐ 7 K57**

BỘ MÔN TOÁN | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 điểm) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\sqrt{1-x^2+x^3}}{\ln(1+x^2)}$.

Câu 2 (2,0 điểm) Viết công thức khai triển Mac-Laurin của hàm số $y=\frac{1}{1-x+x^2}$ tới x^4. Từ đó hãy tính $y^{(4)}(0)$.

Câu 3 (2,0 điểm) Tìm nguyên hàm $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}-x+1}$.

Câu 4 (2,0 điểm)

a. Chứng minh tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ hội tụ.

b. Tính tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong $r=2\left(1+\cos\varphi\right)$ trong tọa độ cực.

b) Tìm thể tích vật thể tạo bởi hình $r=2\left(1+\cos\varphi\right)$ khi hình này quay quanh trục tọa độ cực (trục Ox).

TRƯỜNG ĐHXD | **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH** | **ĐỀ SỐ 8 K57**

BỘ MÔN TOÁN | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 điểm) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sqrt{1+2x^2+x^3}}{\ln(1+x^3)}$.

Câu 2 (2,0 điểm) Viết công thức khai triển Mac-Laurin của hàm số $y=\sin\left(x+x^2\right)$ tới x^5. Từ đó hãy tính $y^{(5)}(0)$.

Câu 3 (2,0 điểm) Tìm nguyên hàm $\int\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$.

Câu 4 (2,0 điểm)

a. Chứng minh tích phân suy rộng loại hai $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ hội tụ

b. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong $r=2\cos^2\varphi$ trong tọa độ cực.

b) Tìm thể tích vật thể tạo bởi hình $r=2\cos^2\varphi$ khi hình này quay quanh trục tọa độ cực (trục Ox).

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH**	**ĐỀ SỐ 9 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 **(2,0 điểm)** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \ln \cos x}{x - \sin x} \cos \dfrac{1}{x}$.

Câu 2 **(1,5 điểm)** Viết công thức Mac-laurin của $f(x) = \cos x \ln(1+x)$ đến x^5, từ đó suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 3 **(2,0 điểm)** Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{2n^2+1} + \sqrt{2n^2+2} + \cdots + \sqrt{2n^2+n^2}\right)$.

Câu 4 **(1,0 điểm)** Giả sử tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và $f(x)$ là hàm liên tục trên $[1,+\infty)$. Xét

sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau: $\displaystyle\int_1^{+\infty} (f(x) + \frac{1}{x})^2 dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) \arctan x dx$.

Câu 5 **(2,0 điểm)**

a. Hỏi tích phân sau hội tụ hay phân kì $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

b. Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx$.

Câu 6 **(1,5 điểm)** Tính thể tích của miền hữu hạn trong không gian được giới hạn bởi các mặt $2z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ và $x^2 + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH**	**ĐỀ SỐ 10 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 **(2,0 điểm)** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \ln \cos x}{(\tan x - x)} \sin \dfrac{1}{x}$.

Câu 2 **(1,5 điểm)** Viết công thức Mac-laurin của $f(x) = \sin x \ln(1+x)$ đến x^5, từ đó suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 3 **(2,0 điểm)** Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{3n^2+2} + \cdots + \sqrt{3n^2+n^2}\right)$.

Câu 4 **(1,0 điểm)** Giả sử tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và $f(x)$ là hàm liên tục trên $[1,+\infty)$.

Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau: $\displaystyle\int_1^{+\infty} (f(x) - \frac{1}{x})^2 dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) \ln(1+x) dx$.

Câu 5 **(2,0 điểm)**

a. Hỏi tích phân sau hội tụ hay phân kì $\displaystyle\int_0^1 \frac{3-2x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$.

b. Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+x}{\sqrt{2-x}} dx$.

Câu 6 **(1,5 điểm)** Tính thể tích của miền hữu hạn trong không gian được giới hạn bởi các mặt $2z^2 = \dfrac{x^2}{9} + y^2$ và $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = 1$.

TRƯỜNG ĐHXD	ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH	ĐỀ SỐ 11 K57
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 điểm) Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $u_1 \geqslant 1, u_{n+1} = \sqrt{u_1 + u_2 + ... + u_n}$.

a. Chứng minh rằng $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}, \forall n \geqslant 1$. Từ đó, hãy chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ phân kì.

b. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

Câu 2 (2,0 điểm) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 2\cos^2 x - \sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1+x^2+x^4} + \arctan x}$.

Câu 3 (2,0 điểm) Viết khai triển của Mac-Laurin của hàm $f(x) = \dfrac{\sin(2x^2)}{x}$ đến x^5, từ đó suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 4 (2,0 điểm) Cho $f(x) = \sqrt{1+x^3}$, đặt $F(x) = \dfrac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên $[0, +\infty)$.

Câu 5 (2,0 điểm)

a. Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

b. Xét sự hội tụ phân kỳ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$.

TRƯỜNG ĐHXD	ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH	ĐỀ SỐ 12 K57
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 điểm) Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $u_1 \geqslant 1, u_{n+1} = \sqrt[3]{u_1 + u_2 + ... + u_n}$.

a. Chứng minh rằng $u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 + u_n}, \forall n \geqslant 1$. Từ đó, hãy chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ phân kì.

b. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

Câu 2 (2,0 điểm) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} + \sin^2 x - \cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x+3x^3} - \arctan^2 x}$.

Câu 3 (2,0 điểm) Viết khai triển Mac-Laurin của hàm $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x^2)}{x}$ đến x^5, từ đó suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 4 (2,0 điểm) Cho $f(x) = \sqrt{1+x^5}$, đặt $F(x) = \dfrac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên $[0, +\infty)$.

Câu 5 (2,0 điểm)

a. Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

b. Xét sự hội tụ phân kỳ của tích phân $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 1 GIẢI TÍCH

Câu 1 (1,5 điểm): $u_n = \frac{1}{2}\left((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n})\right) < \frac{1}{2}$. Suy ra $\{u_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên. Do đó hội tụ.

Câu 2 (1,5 điểm): $I = \frac{1}{6}$.

Câu 3 (2 điểm):

a. f liên tục khi và chỉ khi $a+b=1$.

b. $a=-\frac{1}{2}$ thì f khả vi tại $x=1$. Còn $a \neq \frac{1}{2}$ thì f không khả vi vì đạo hàm hai phía khác nhau.

Câu 4 (2 điểm):

a. Theo công thức Leibnitz $f^n(x) = \Sigma_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} \sin^{(n-k)} 3x = x^2 3^n \sin(3x+\frac{n\pi}{2}) + 2xn3^{n-1}\sin(3x+\frac{(n-1)\pi}{2}) + 2.\frac{n(n-1)}{2}.\sin(3x+\frac{(n-2)\pi}{2})$.

b. $f(x) = x^2\left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + 0(x^5)\right) = 3x^3 - \frac{9}{2}x^5 + \frac{3^5}{120}x^7 + 0(x^7)$.

Câu 5 (1,5 điểm): Đặt $t=\frac{1}{x}$ và tích phân từng phần: $I = \int_0^1 t \arctan t dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Câu 6 (1,5 điểm): Vật thể đối xứng qua $z=0$. Mặt phẳng $(\alpha): x-\sqrt{3}z=0$ hoặc $(\alpha): x+\sqrt{3}z=0$. Cắt vật thể bởi mp vuông góc với trục Oy, thiết diện $S(y) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(9-y^2)$. Suy ra thể tích là: $V = 2\displaystyle\int_{-3}^{3} S(y)dy = 12\sqrt{3}$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 2 GIẢI TÍCH

Câu 1 (1,5 điểm): $u_n = \left((1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+...+(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1})\right) < 1$. Suy ra $\{u_n\}$ là dãy tăng bị chặn trên. Do đó hội tụ.

Câu 2 (1,5 điểm): $I = -\frac{1}{6}$.

Câu 3 (2 điểm):

a. f liên tục khi và chỉ khi $4a+b=\frac{1}{2}$.

b. $a=-\frac{1}{16}$ thì f khả vi tại $x=\pm 2$. Còn $a \neq \frac{1}{16}$ thì f không khả vi vì đạo hàm hai phía khác nhau.

Câu 4 (2 điểm):

a. Theo công thức Leibnitz $f^n(x) = \Sigma_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} \cos^{(n-k)} 3x = x^2 3^n \cos(3x+\frac{n\pi}{2}) + 2xn3^{n-1}\cos(3x+\frac{(n-1)\pi}{2}) + 2.\frac{n(n-1)}{2}.\cos(3x+\frac{(n-2)\pi}{2})$.

b. $f(x) = x^2\left(1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} + 0(x^4)\right) = x^2 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{81}{24}x^6 + 0(x^6)$.

Câu 5 (1,5 điểm): Tích phân từng phần $I = \frac{\ln 4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{\pi}{9\sqrt{3}}$.

Câu 6 1,5 điểm): Vật thể đối xứng qua $z=0$. Mặt phẳng $(\beta): \sqrt{3}y - z = 0$ hoặc $(\beta): \sqrt{3}y+z=0$. Cắt vật thể bởi mp vuông góc với trục Ox, thiết diện $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)$. Suy ra thể tích là: $V = 2\displaystyle\int_{-2}^{2} S(x)dx = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 3 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm):

a. Bằng quy nạp chứng minh dãy tăng và bị chặn trên. Do đó hội tụ.

b. Giới hạn $L = 2$.

Câu 2 (2 điểm): Ta có $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$ nên $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)$ và $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + \dfrac{7x^5}{256} + o(x^5)$. Do đó $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{5x^3}{16} + \dfrac{41x^4}{384} + \dfrac{125x^5}{768} + o(x^5)$. Vậy $f^{(5)}(0) = 5!\dfrac{125}{768} = \dfrac{625}{32}$.

Câu 3 (2 điểm): Dùng tương đương và khai triển Mac-Laurin hoặc quy tắc Lopital: $I = \frac{1}{6}$.

Câu 4 (2 điểm):

a. Tích phân hội tụ.

b. Tích phân từng phần: $I = 2\ln 2$.

Câu 5 (2 điểm): Miền cần tính bao gồm nửa elipxoid $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 - 2z = 0$ và $z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ với z nằm giữa 0 và 1. Do đó, thể tích miền cần tính là $\dfrac{4}{3}\pi + \displaystyle\int_0^1 \pi 2z dz = \dfrac{4}{3}\pi + \pi = \dfrac{7}{3}\pi$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 4 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm):

a. Bằng quy nạp chứng minh dãy tăng và bị chặn trên. Do đó hội tụ.

b. Giới hạn $L = 3$.

Câu 2 (2 điểm): Ta có $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$ nên $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)$ và $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$. Do đó $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{23x^5}{40}$. Vậy $f^{(5)}(0) = 5!\dfrac{23}{40} = 69$.

Câu 3 (2 điểm): Dùng tương đương và khai triển Mac-Laurin hoặc quy tắc Lopital: $I = \frac{-1}{18}$.

Câu 4 (2 điểm): a. Tích phân kì

b. Đặt $t = \frac{1}{x}$, đưa về tích phân đề trên: $I = 2\ln 2$.

Câu 5 (2 điểm): Miền cần tính bao gồm nửa elipxoid $\dfrac{x^2}{9} + y^2 + z^2 - 2z = 0$ và $z = \dfrac{x^2}{9} + y^2$ với z nằm giữa 0 và 1. Do đó, thể tích miền cần tính là $2\pi + \displaystyle\int_0^1 \pi 3z dz = 2\pi + \dfrac{3}{2}\pi = \dfrac{7}{2}\pi$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 5 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm)
a) Vì $x^n \sin\frac{\pi x}{2} \geq x^{n+1}\sin\frac{\pi x}{2} \geq 0, \forall x \in [0,1]$ nên $u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \forall n \geq 1$.
b) Lấy tích phân từng phần

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-2}{\pi}\int_0^1 x^n\, d\cos\frac{\pi x}{2} = \frac{-2}{\pi}(x^n \cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}\cos\frac{\pi x}{2}dx) \\ &= \frac{4n}{\pi^2}\int_0^1 x^{n-1} d\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{4n}{\pi^2}(x^{n-1}\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 (n-1)x^{n-2}\sin\frac{\pi x}{2}dx) \\ &= \frac{4n}{\pi^2}(1-(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sin\frac{\pi x}{2}dx) = \frac{4n}{\pi^2}[1-(n-1)u_{n-2}]. \end{aligned}$$

Viết $u_{n-2} = \left(1 - \frac{\pi^2 u_n}{4n}\right)\frac{1}{n-1}$ sau đó cho $n \longrightarrow \infty$ ta được $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Câu 2 (2 điểm) Ta có

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(3-x)} = \frac{1}{4(3-x)} + \frac{1}{4(1+x)} = \frac{1}{4(1-(x-2))} + \frac{1}{12(1+\frac{x-2}{3})}.$$

Do đó

$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(x-2)^k + \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\frac{x-2}{3})^k + o((x-2)^n).$$

Vậy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{4} + \frac{(-1)^k}{12.3^k})(x-2)^k + o((x-2)^n).$$

Câu 3 (2 điểm) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 4 (2 điểm) Diện tích cần tính

$$S = 2\int_0^3 (\sqrt{10-y^2} - \frac{y^2}{9})dy = -2 + 2\int_0^3 \sqrt{10-y^2}dy.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S+2 &= 2\int_0^3 \sqrt{10-y^2}dy = 2(y\sqrt{10-y^2}\Big|_0^3 - \int_0^3 y\, d\sqrt{10-y^2}) \\ &= 6 + 2\int_0^3 \frac{y^2}{\sqrt{10-y^2}}dy = 6 + 20\int_0^3 \frac{dy}{\sqrt{10-y^2}} - (S+2). \end{aligned}$$

Vậy

$$S = 1 + 10\int_0^3 \frac{dy}{\sqrt{10-y^2}} = 1 + 10\arcsin\frac{y}{\sqrt{10}}\Big|_0^3 = 1 + 10\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

SV có thể tính S bằng cách đổi biến

$$S = -2 + 2\int_0^3 \sqrt{10-y^2}dy = -2 + 2\int_0^{\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}} 10\cos^2 t\, dt = 1 + 10\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Câu 5 (2 điểm)

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x-3)\,dx}{(3x+1)(x^2+1)} = \int_1^{+\infty} (\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1})dx = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{9}.$$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 6 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm)
a) Vì $x^n \cos\frac{\pi x}{2} \geq x^{n+1}\cos\frac{\pi x}{2} \geq 0, \forall x \in [0,1]$ nên $u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \forall n \geq 1$. b)

$$u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x^n\, d\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}(x^n \sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1}\sin\frac{\pi x}{2}dx)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1 + \frac{2n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1} d\cos\frac{\pi x}{2}) = \frac{2}{\pi} + \frac{4n}{\pi^2}(x^{n-1}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 (n-1)x^{n-2}\cos\frac{\pi x}{2}dx)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4n(n-1)}{\pi^2}\int_0^1 x^{n-2}\cos\frac{\pi x}{2}dx = \frac{\pi}{2} - \frac{4n(n-1)}{\pi^2}u_{n-2}.$$

Viết $u_{n-2} = (\frac{2}{\pi} - u_n)\frac{\pi^2}{4n(n-1)}$ sau đó cho $n \longrightarrow \infty$ ta được $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Câu 2 (2 điểm) Ta có

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{1}{3(2-x)} = \frac{1}{6(1+\frac{x-1}{2})} - \frac{1}{3(1-(x-1))}.$$

Do đó

$$f(x) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\frac{x-1}{2})^k - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(x-1)^k + o((x-1)^n).$$

Vậy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(\frac{(-1)^k}{6.2^k} - \frac{1}{3})(x-1)^k + o((x-1)^n).$$

Câu 3 (2 điểm) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1-\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x + \sin x}{x^3(\sqrt{1-\tan x} + \sqrt{1-\sin x})} = -\frac{1}{4}.$

Câu 4 (2 điểm) Diện tích cần tính

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{4})dx = -\frac{4}{3} + 2\int_0^2 \sqrt{5-x^2}dx.$$

Suy ra

$$S + \frac{4}{3} = 2\int_0^2 \sqrt{5-x^2}dx = 2(x\sqrt{5-x^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 x\, d\sqrt{5-x^2})$$

$$= 4 + 2\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}dx = 4 + 10\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} - (S + \frac{4}{3}).$$

Vậy

$$S = \frac{2}{3} + 5\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{2}{3} + 5\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 5\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

SV có thể tính S bằng cách đổi biến

$$S = -\frac{4}{3} + 2\int_0^2 \sqrt{5 - x^2}dx = -\frac{4}{3} + 2\int_0^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} 5\cos^2 t\, dt = \frac{2}{3} + 5\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

<u>Câu 5</u> (2 điểm)

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x-2)\, dx}{(2x+1)(x^2+1)} = \int_1^{+\infty} (\frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+1})dx = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{8}.$$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 7 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm)
Giới hạn bằng $\frac{3}{2}$.
Câu 2 (2 điểm) Khai triển $y = \frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + o(x^4)$. Từ đó suy ra $y^{(4)}(0) = -4! = -24$.
Câu 3 (2 điểm)$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}-x+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right| + \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)} + C$.
Câu 4 (2 điểm) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
Câu 5 (2 điểm)

a) Khảo sát và vẽ.

b) Thể tích tròn xoay. $V = \pi\int\limits_0^\pi \left|y^2(\varphi)x'(\varphi)\right| d\varphi = 8\pi\int\limits_0^\pi (1+\cos\varphi)^2.\sin^2\varphi.(1+2\cos\varphi).\sin\varphi d\varphi = \frac{64}{3}\pi$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 8 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm)
Giới hạn bằng -1.
Câu 2 (2 điểm) Khai triển $y = \sin\left(x+x^2\right) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{59}{120}x^5 + o(x^5)$. Từ đó suy ra $y^{(5)}(0) = -59$.
Câu 3 (2 điểm) Đặt $x-1 = 2\sin^2 t$ khi đó $\int\sqrt{(x-1)(3-x)}dx = \frac{1}{4}(2x-4)\sqrt{-x^2+4x-3} + \frac{1}{2}\arcsin(x-2) + C$.
Câu 4 (2 điểm) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}$.
Câu 5 (2 điểm)

a) Khảo sát và vẽ.

b) Thể tích tròn xoay. $V = \pi\int\limits_0^\pi \left|y^2(\varphi)x'(\varphi)\right| d\varphi = 24\pi\int\limits_0^\pi \cos^4\varphi\sin^2\varphi.\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{32}{21}\pi$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 8 GIẢI TÍCH

<u>**Câu 1**</u> (2 điểm): Ta có $x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$ khi $x \to 0$. Do đó, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \ln\cos x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} 6\dfrac{\ln\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{\cos x} = 0$. Mặt khác, $|\cos\frac{1}{x}| \le 1$. Nên $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\ln\cos x}{x-\sin x}\cos\dfrac{1}{x} = 0$.

<u>**Câu 2**</u> (1,5 điểm): Ta có $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$ và $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$. Nên $\cos x \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)$. Vậy $f^{(5)}(0) = 5!\dfrac{3}{40} = 9$.

<u>**Câu 3**</u> (2 điểm): áp dụng tổng tích phân của hàm $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ trên đoạn $[0,1]$, sử dụng phép chia đều và các điểm chọn $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{2n^2+1} + \sqrt{2n^2+2} + \cdots + \sqrt{2n^2+n^2}\right) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2} = \left(\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+2} + \ln|x + \sqrt{x^2+2}|\right)\Big|_0^1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \ln\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

<u>**Câu 4**</u>(1 điểm): Ta có $(f(x) + \dfrac{1}{x})^2 = f^2(x) + 2\dfrac{1}{x}f(x) + \dfrac{1}{x^2}$. Do $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Suy ra $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ hội tụ. Hơn nữa $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x}f(x)dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn Abel, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ cũng hội tụ. Vậy $\displaystyle\int_1^{+\infty}(f(x)+\dfrac{1}{x})^2dx$ hội tụ.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\arctan x dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn Abel vì $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\arctan x$ đơn điệu và bị chặn.

<u>**Câu 5**</u> (2 điểm):

a. Tích phân phân kì vì $t = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$ mà tích phân $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ phân kì.

b. Đặt $t = \sqrt{2-x}$, ta có $I = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

<u>**Câu 6**</u> (1,5 điểm): Phần không gian hữu hạn nằm giữa $z=-1$ và $z=1$. Diện tích mặt cắt khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Oz là $2\pi(1-z^2)$. Vậy thể tich phần không gian cần tính là $\displaystyle\int_0^1 2\pi(1-z^2)dz = \dfrac{8\pi}{3}$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 10 GIẢI TÍCH

<u>**Câu 1**</u> (2 điểm): Ta có $\tan x - x \sim \dfrac{x^3}{3}$ khi $x \to 0$. Tương tự đề 1, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln\cos x}{\tan x - x} = 0$. Mặt khác, $|\sin\frac{1}{x}| \le 1$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln\cos x}{x - \sin x}\cos\dfrac{1}{x} = 0$.

<u>**Câu 2**</u> (1,5 điểm): Ta có $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$ và $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$. Nên $\sin x\ln(1+x) = x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$. Vậy $f^{(5)}(0) = -5!\dfrac{1}{6} = -20$.

<u>**Câu 3**</u> (2 điểm): áp dụng tổng tích phân của hàm $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ trên đoạn $[0,1]$, sử dụng phép chia đều và các điểm chọn $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{3n^2+2} + \cdots + \sqrt{3n^2+n^2}\right) = \displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+3} = 1 + \dfrac{3}{4}\ln 3$.

<u>**Câu 4**</u> (1 điểm): Tương tự đề 1, cả hai tích phân đều hội tụ.

<u>**Câu 5**</u> (2 điểm): a. Tích phân phân kì vì $t = \sqrt{1-x^3} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2}$ mà tích phân $\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ phân kì.

b. Đặt $t = \sqrt{1-x}$, ta có $I = \frac{5}{3}$. <u>**Câu 6**</u> (1,5 điểm): Phần không gian hữu hạn nằm giữa $z=-1$ và $z=1$. Diện tích mặt cắt khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Oz là $3\pi(1-z^2)$. Vậy thể tich phần không gian cần tính là $\displaystyle\int_0^1 3\pi(1-z^2)dz = 4\pi$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 11 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm):

a. Để chứng minh rằng $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}, \forall n \geqslant 1$ ta chỉ cần bình phương. Giả sử $\lim n \to \infty u_n = a$. Suy ra $a = 0$. Trái với giả thiết $a \leqslant 1$.

b. Ta có đãy trên đơn điệu tăng và không bị chặn nên $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n = \infty$. Do đó, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n) = \frac{1}{2}$.

Câu 2 (2 điểm): Ta có $x \to +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 2\cos^2 x - \sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + x^2 + x^4} + \arctan x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}} = 2.$

Câu 3 (2 điểm): Ta có $\dfrac{\sin 2x^2}{x} = 2x - \dfrac{4}{3}x^5 + 0(x^5)$. Vậy $f^{(5)}(0) = 5!\dfrac{-4}{3}$.

Câu 4 (2 điểm): áp dụng đạo hàm theo cận trên suy ra $F'(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Do đó $F(x)$ là hàm đồng biến. Vậy $F(x) \geq F(0) = 0$ hay giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là 0.

Câu 5 (2 điểm):

a. $I = \frac{\pi^2}{8}$.

b. Tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$ vì $\arctan x$ là hàm bị chặn.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 12 GIẢI TÍCH

Câu 1 (2 điểm):

a. Để chứng minh rằng $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + u_n}, \forall n \geqslant 1$ ta chỉ cần lập phương. Giả sử $\lim n \to \infty u_n = a$. Suy ra $a = 0$. Trái với giả thiết $a \leqslant 1$.

b. Ta có đãy trên đơn điệu tăng và không bị chặn trên nên $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n = \infty$. Do đó, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{u_n^3 + u_n} - u_n) = 0$.

Câu 2 (2 điểm): Ta có $x \to +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} + \sin^2 x - \cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x + 3x^3} - \arctan^2 x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2}}{\sqrt[3]{x + 3x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}.$

Câu 3 (2 điểm): Ta có $\dfrac{\ln 1 + 2x^2}{x} = 2x - 2x^3 + \dfrac{8}{3}x^5 + o(x^5)$. Vậy $f^{(5)}(0) = 5!\dfrac{8}{3}$.

Câu 4 (2 điểm): áp dụng đạo hàm theo cận trên suy ra $F'(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Do đó $F(x)$ là hàm đồng biến. Vậy $F(x) \geq F(0) = 0$ hay giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là 0.

Câu 5 (2 điểm):

a. $I = \frac{3\pi^2}{32}$.

b. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$ vì $\arctan x$ là hàm bị chặn.