Một chứng minh tuyệt đẹp về định lí Euler

I. Khái niệm sơ bộ về đa diện

Trước hết nói về đa giác. Xét một đường gấp khúc đóng, không tự cắt nối các điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, A_1$. Nó chia mặt phẳng thành 2 miền: miền trong và miền ngoài. Miền bên trong được gọi là *đa giác*.

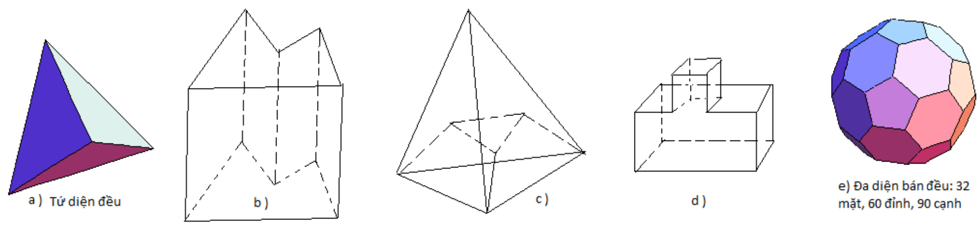
Phần không gian giới hạn bởi hữu hạn các đa giác mà không chứa một nửa đường thẳng nào cả được gọi là *khối đa diện*. Các đa giác đó được gọi là các *mặt* của đa diện. Các đỉnh và các cạnh của đa giác cũng là *các đỉnh* và *các cạnh* của đa diện. Đa diện là khối liên thông, mỗi cạnh có đúng 2 mặt chứa nó (được gọi là 2 mặt tiếp giáp nhau). Bề mặt của khối đa diện *liên thông* theo nghĩa sau đây:

a) Từ mặt bất kì có thể đến mặt bất kì khác bằng cách lần lượt đi qua các mặt tiếp giáp (tiếp giáp tức là chung cạnh nào đó).

b) Bất kì 2 đỉnh có thể nối với nhau bởi một đường gấp khúc gồm các cạnh.

c) Bất kì đường gấp khúc đóng gồm các cạnh khối đa diện luôn chia mặt đa diện thành 2 phần.

Khối đa diện là một khái niệm tổng quát nó có thể là một đa diện lồi hoặc không lồi.



II. Định lí Euler

Gọi m là số mặt, d là số đỉnh và c là số cạnh của một khối đa diện. Khi đó

$$\boxed{m + d = c + 2.}$$

Hình b) là khối đa diện với $m = 7, d = 10, c = 15$. Hình d) là khối đa diện với $m = 10, d = 16, c = 24$.

Hình c) là khối đa diện bị lõm vào trong với $m = 7, d = 7, c = 12$. Chú ý tam giác dưới cùng không phải là mặt của khối đa diện.

Định lí Euler có rất nhiều cách chứng minh. Là một định lí với kết luận đẹp, bất ngờ nên có không ít các bài báo trình bày, giải thích và nêu các nhận xét, hệ quả thú vị về các cách chứng minh định lí này. Trang web https://www.ics.uci.edu/ eppstein/junkyard/euler/all.html liệt kê ra 20 cách chứng minh khác nhau của định lí Euler. Đa phần đều sử dụng tính bất biến của đồ thị phẳng, sau khi nhúng khối đa diện thành một đồ thị phẳng. Bài báo kêu gọi mọi người gửi thêm các cách chứng minh khác của định lí Euler.

Chứng minh định lí Euler của Hajos Gyorgy:

Coi khối đa diện là một hành tinh, các mặt của khối đa diện là các hồ chứa, các cạnh là các con đê (đập) ngăn nước. Trong số m hồ chứa chỉ có duy nhất một hồ chứa đầy nước, $m - 1$ hồ còn lại khô cạn không chứa nước. Chúng ta sẽ xả nước toàn bộ hành tinh bằng cách phá (với số lượng *ít nhất có thể*) các con đập ngăn nước.

Do khối đa diện có $m - 1$ mặt khô cạn, do vậy ta phải phá $m - 1$ cạnh để hành tinh tràn đầy nước. Mỗi đỉnh của khối đa diện ta đặt một lính canh, ngoại trừ một đỉnh bất kì nào đó đặt làm vị trí người chỉ huy. Ta lưu ý đến nhận xét sau:

1. *Trong quá trình phá các cạnh, mọi người lính vẫn luôn có thể đi đến vị trí người chỉ huy dọc theo các cạnh còn lại nào đó.* (Nhận xét này hiển nhiên).

2. *Sau khi phá hết $m - 1$ cạnh, mỗi người lính canh chỉ còn duy nhất một đường đi tới vị trí người chỉ huy.* (Nếu có 2 cách đi thì 2 đường đi đó tạo thành một vòng kín mà các hồ chứa trong vòng đó hoặc khô cạn, hoặc nếu có nước thì các hồ ngoài vòng sẽ khô).

Bây giờ người chỉ huy phát hiệu lệnh (thổi còi) để mọi người lính canh đồng thời cùng tiến về vị trí chỉ huy theo con đường duy nhất của riêng mình. Và rồi ngay giây tiếp theo, người chỉ huy lại phát hiệu lệnh để mọi người lính canh dừng lại trên cạnh đầu tiên. Khi đó từ nhận xét ở trên suy ra, **trên mỗi cạnh còn lại của khối đa diện có đúng 1 người lính canh đứng**.

Như vậy số cạnh còn lại sau khi phá đập bằng số lính canh đứng ở các đỉnh: $d - 1$.

Số cạnh đã phá là $m - 1$. Suy ra $c = (d - 1) + (m - 1)$ hay $m + d = c + 2$, đ.p.c.m.

III. Khối đa diện đều Một khối đa diện được gọi là *đa diện đều* nếu nó là khối đa diện lồi, tất cả các mặt là các đa giác đều bằng nhau, các góc ở đỉnh bằng nhau và các góc giữa 2 mặt tiếp giáp cũng bằng nhau.

Sử dụng định lí Euler ta sẽ chứng minh chỉ tồn tại 5 khối đa diện đều: tứ diện đều, khối lập phương, bát diện đều, khối 12 mặt đều và khối 20 mặt đều.

Thật vậy, gọi p là số cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh của khối đa diện đều và q là số cạnh của mỗi mặt. Khi đó

$$\begin{cases} d \cdot p = 2c \;\Rightarrow\; d = \frac{2c}{p} \\ m \cdot q = 2c \;\Rightarrow\; m = \frac{2c}{q} \end{cases}$$

Sử dụng định lí Euler $d + m = c + 2$ suy ra $\dfrac{2c}{p} + \dfrac{2c}{q} = c + 2$ hay $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{c} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$.

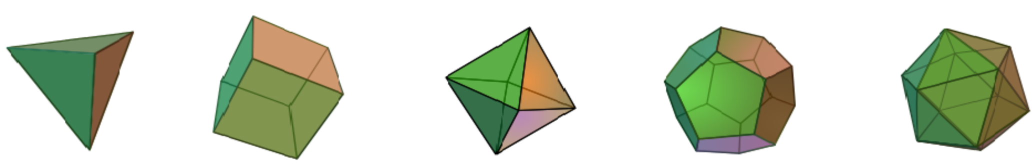
Bất đẳng thức sau cùng có thể viết thành $(p-2)(q-2) < 4$. Lưu ý rằng $p \geq 3, q \geq 3$ và sử dụng hệ thức Euler $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}$ ta thấy chỉ 5 khả năng sau có thể xảy ra

	p	q	**c** (cạnh)	**d** (đỉnh)	**m** (mặt)	
1.	3	3	6	4	**4**	Tứ diện đều
2.	3	4	12	8	**6**	Hình lập phương
3.	3	5	30	20	**12**	Khối 12 mặt đều
4.	4	3	12	6	**8**	Khối bát diện
5.	5	3	30	12	**20**	Khối 20 mặt đều

Ta cần phải chỉ ra tồn tại 5 khối đa diện đều với các thông số nêu trên. Hiển nhiên khối thứ nhất là tứ diện đều, khối thứ hai là hình lập phương chúng ta đã quen thuộc.

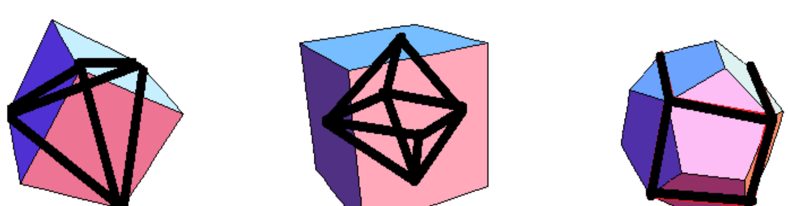
Tâm của các mặt hình lập phương chính là 6 đỉnh của khối bát diện đều (khối thứ tư trong bảng liệt kê ở trên).

Khối 20 mặt đều tạo thành bằng cách ghép các hình chóp ngũ giác đều lại với nhau. Tâm của các mặt khối 20 mặt đều tạo thành khối 12 mặt đều.



Tứ ciện đều (Tetrahedron) | Khối lập phương (Cube) | Bát diện đều (Octahedron) | Thập nhị diện đều (Dodecahedron) | Nhị thập diện đều (Icosahedron)

Từ hình lập phương các đường chéo của 6 mặt tạo thành tứ diện đều, các tâm của 6 mặt tạo thành đỉnh của bát diện đều. Ngược lại một số các đường chéo thích hợp của các mặt khối đa diện 12 mặt đều, tạo thành các cạnh hình lập phương.



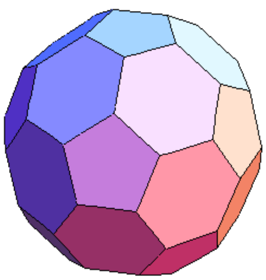
IV. Khối đa diện bán đều Có nhiều cách khác nhau để mở rộng khái niệm về khối đa diện đều. Một trong số đó là khái niệm *khối đa diện bán đều* Ac-si-mét: đó là đa diện lồi có các mặt là các đa giác đều và các góc ở đỉnh bằng nhau.

Khối đa diện hình trái bóng $K(5,6,6)$ được nhắc tới nhiều nhất, mỗi đỉnh là giao của 3 mặt. Khối này gồm 32 mặt (trong đó có 12 mặt là các ngũ giác đều, 20 mặt là các lục giác đều), 60 đỉnh và 90 cạnh. Khối gần đều này nhận được từ khối 20 mặt đều bằng cách cắt bỏ các khối chóp đều ứng với mỗi đỉnh của nó đến các điểm chia $\frac{1}{3}$ các cạnh tương ứng.

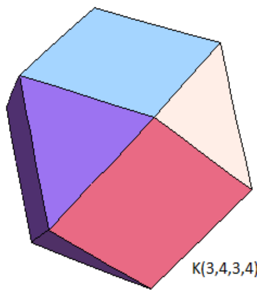
Một khối đa diện bán đều khác $K(3,4,3,4)$ nhận được từ khối bát diện đều bằng cách cắt bỏ các khối chóp đều ứng với mỗi đỉnh của nó đến trung điểm các cạnh tương ứng.

Tương tự khối đa diện bán đều $K(4,6,6)$ nhận được từ khối bát diện đều bằng cách cắt bỏ các khối chóp đều ứng với mỗi đỉnh của nó đến các điểm chia $\frac{1}{3}$ các cạnh tương ứng.

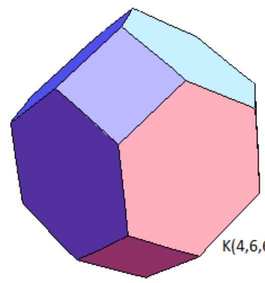
Chú ý rằng từ khối tứ diện đều, nếu ta cắt bỏ các khối chóp đều ứng với mỗi đỉnh của nó đến trung điểm các cạnh tương ứng, thì ta được khối bát diện đều.



K(5,6,6)



K(3,4,3,4)



K(4,6,6)

V. Vật thể không thực Các hình khối không gian hoặc các vật thể được phác họa trên giấy bị ảo giác đánh lừa bởi cái nhìn ban đầu. Chúng tồn tại dưới dạng các bản vẽ song trong thực tế không tồn tại các vật thể đó. Nổi tiếng nhất là tam giác Penrose, tam giác không thể...