QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN
XÍCH MARKOV

NGUYỄN NGỌC CỪ

***Tài liệu dùng cho học sinh các lớp cao học xây dựng và
các ngành kĩ thuật công trình trường Đại học xây dựng.***

Chương 1

Xích Markov

1.1 Ma trận xác suất chuyển của xích Markov

Xét một hệ thống các trạng thái vật lí, các trạng thái đó chuyển đổi ngẫu nhiên theo thời gian. Giả sử tập hợp các trạng thái là rời rạc và không làm mất tính tổng quát ta có thể kí hiệu tập đó là tập hợp các số tự nhiên ($N = \{0, 1, ..., n, ...\}$). Kí hiệu ξ_n là trạng thái của hệ thống tại thời điểm rời rạc $t = n$. (Biến cố ngẫu nhiên $\{\xi_n = i\}$ *là biến cố tại thời điểm* $t = n$*, hệ thống đang trong trạng thái* i).

Định nghĩa 1.1.1 *Dãy các đại lượng ngẫu nhiên* $\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ *(đồng thời cũng là dãy các trạng thái theo thời gian của hệ thống) được gọi là xích Markov, nếu với các số tự nhiên* $n, k_0, k_1, k_2, ..., k_n$ *tùy ý*

$$\begin{aligned} &P(\xi_{n+1} = k/\xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, ..., \xi_n = k_n) \\ &= P(\xi_{n+1} = k/\xi_n = k_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Xem $t = n$ là thời điểm hiện tại, $t = n + 1$ là tương lai và $t < n$ là quá khứ. Điều kiện (1.1) có thể giải thích như sau: *các trạng thái trước của hệ thống chỉ ảnh hưởng lên trạng thái sau của hệ thống thông qua trạng thái hiện tại - trạng thái tại thời điểm* n.
Ta có thể chứng minh, với các số tự nhiên $0 \leqslant n_1 < n_2 < ... < n_r \leqslant n$ và các trạng thái k_i tùy ý đẳng thức (1.1) mở rộng thành

$$P(\xi_{n+1} = k/\xi_{n_1} = k_1, \xi_{n_2} = k_2, ..., \xi_{n_r} = k_r) = P(\xi_{n+1} = k/\xi_{n_r} = k_r).$$

$P(\xi_{m+n} = k/\xi_n = j)$ là xác suất để hệ thống từ trạng thái j trong thời điểm $t = n$ chuyển vào trạng thái k tại thời điểm $t = m + n$. Xác suất đó được gọi là *xác suất chuyển sau* m *bước*, xác suất đó nói chung phụ thuộc vào m, n, j, k. *Nếu tất cả các xác suất chuyển sau* m *bước không phụ thuộc vào thời điểm* n*, kí hiệu*

$$P_{jk}^{(m)} = P(\xi_{m+n} = k/\xi_n = j),$$

khi đó xích Markov được gọi là thuần nhất. Trong mục này chúng ta chỉ xét các xích Markov thuần nhất. Kí hiệu Π_m là ma trận các xác suất chuyển sau m bước

$$\Pi_m = (P_{jk}^{(m)}) = \begin{pmatrix} P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} & P_{02}^{(m)} & \cdots \\ P_{10}^{(m)} & P_{11}^{(m)} & P_{12}^{(m)} & \cdots \\ P_{20}^{(m)} & P_{21}^{(m)} & P_{22}^{(m)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Dễ dàng nhận thấy matrận các xác suất chuyển gồm các phần tử là các số thực không âm, tổng các phần tử nằm ở mỗi hàng đều bằng 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_{m+n} = k/\xi_n = j) = 1.$$

Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$P_{jk}^{(1)} = P_{jk} \text{ và } \Pi = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Π là ma trận các xác suất chuyển sau 1 bước. Trong hầu hết các ví dụ sau này, khi nhắc đến một xích Markov, ta thường nói đến ma trận các xác suất chuyển Π của nó.

Các ví dụ

1. Cho dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố $\eta_1, \eta_2, ...$ Đại lượng ngẫu nhiên η_i nhận các giá trị $-1, 1$ với các xác suất $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ tương ứng. Khi đó

   $$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = \eta_1,\ \xi_2 = \eta_1 + \eta_2, ...,\ \xi_n = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n, ...$$

   lập thành xích Markov. Trạng thái $\xi_n, n \geqslant 0$ thực chất là vị trí của điểm ngẫu nhiên sau n bước xuất phát từ 0, mỗi bước nó dịch chuyển sang trái hoặc sang phải 1 đơn vị. Xích Markov này được gọi là lang thang ngẫu nhiên trong tập các số nguyên (tập các trạng thái) trên trục số.

   Ma trận các xác suất chuyển Π là ma trận vô hạn

   $$\Pi = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} \cdot\cdot & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \cdot\cdot \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} & \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Trong ví dụ trên nếu **-K** và **K** là các *tường chắn*, nói cách khác lang thang quay ngược trở lại với xác suất bằng 1 tại các trạng thái **-K** và **K**, khi đó $\xi_n, n \geqslant 0$ cũng tạo thành xích Markov.

   Ma trận các xác suất chuyển là ma trận vuông cấp $2\mathbf{K} + 1$

   $$\Pi = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{K} & \mathbf{-K+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{K-1} & \mathbf{K} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{-K} \\ \mathbf{-K+1} \\ \mathbf{-K+2} \\ \cdots \\ \mathbf{K-2} \\ \mathbf{K-1} \\ \mathbf{K} \end{array} \end{array}$$

3. Một người đam mê đánh bạc trên một máy đánh bạc. Ta kí hiệu các trạng thái *thua* hoặc *được* sau mỗi lần chơi của người đó tương ứng với các số **0** và **1**. Máy được thiết kế để người đánh bạc từ trạng thái **0** (thua) sau một lần chơi chuyển sang trạng thái **1** (được) với xác suất λ và ngược lại từ trạng thái **1** chuyển sang trạng thái **0** với xác suất μ. Ma trận các xác suất chuyển $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \end{array}$. *Ta cũng có thể coi đây là ma trận các xác suất chuyển trạng thái thời tiết mưa và nắng theo ngày* $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \textbf{Mưa} & \textbf{Nắng} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \end{array}$

4. Giả thiết rằng hàng năm sinh viên ở một trường đại học bị buộc thôi học với xác suất p, xác suất để một sinh viên học lại với khoá sau bằng q và r là xác suất để sinh viên đó học tiếp. Kí hiệu $\mathbf{s_1}$ là trạng thái sinh viên theo học năm thứ nhất, $\mathbf{s_2}$ là trạng thái sinh viên theo học năm thứ hai,..., $\mathbf{s_4}$ là trạng thái sinh viên theo học năm thứ tư (năm cuối cùng). Kí hiệu tiếp $\mathbf{s_5}$ là trạng thái sinh viên bị buộc thôi học và $\mathbf{s_6}$ là trạng thái sinh viên tốt nghiệp ra trường. Chúng lập thành xích Markov với ma trận chuyển:

$$\Pi = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{s_5} & \mathbf{s_6} & \mathbf{s_4} & \mathbf{s_3} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{s_5} \\ \mathbf{s_6} \\ \mathbf{s_4} \\ \mathbf{s_3} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_1} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{pmatrix} \end{array}$$

Định lí sau cho ta cách tính ma trận các xác suất chuyển sau m bước.

Định lí 1.1.1 *Với xích Markov bất kì*

$$\Pi_m = \Pi^m \quad (hay \quad \Pi_{m+n} = \Pi^m \Pi^n)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $\Pi_2 = \Pi^2$ hay $\Pi_2 = \Pi \cdot \Pi$. Theo định lí xác suất đầy đủ

$$P(\xi_2 = k, \xi_0 = j) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\xi_2 = k/\xi_1 = l, \xi_0 = j) P(\xi_1 = l, \xi_0 = j)$$

hay $P(\xi_2 = k/\xi_0 = j) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\xi_1 = l/\xi_0 = j)P(\xi_2 = k/\xi_1 = l) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{jl}P_{lk}$. Nói cách khác $P_{jk}^{(2)} = \sum_{l=0}^{\infty} P_{jl}P_{lk}$. Vậy $\Pi_2 = \Pi \cdot \Pi = \Pi^2$.

Tổng quát hơn ta sẽ chứng minh $\Pi_m = \Pi_r \cdot \Pi_{m-r}$. Sử dụng $\Pi_2 = \Pi^2$ ta được đ.p.c.m.
$P(\xi_{m+n} = k, \xi_n = j) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\xi_{m+n} = k/\xi_{n+r} = l, \xi_n = j)P(\xi_{n+r} = l, \xi_n = j)$, chia 2 vế cho $P(\xi_n = j)$ ta được

$P(\xi_{m+n} = k/\xi_n = j) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\xi_{m+n} = k/\xi_{n+r} = l)P(\xi_{n+r} = l/\xi_n = j)$. Suy ra

$$P_{jk}^{(m)} = \sum_{l=0}^{\infty} P(\xi_{n+r} = l/\xi_n = j)P(\xi_{m+n} = k/\xi_{n+r} = l) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{jl}^{(r)} P_{lk}^{(m-r)}.$$

Do vậy dưới dạng ma trận, đẳng thức trên chứng tỏ $\Pi_m = \Pi_r \cdot \Pi_{m-r}$. ■

Nhận xét rằng để xác định phân bố của ξ_n, ta cần biết xác suất phân bố các trạng thái ban đầu của hệ thống tại thời điểm $t = 0$

$$P_0(k) = P(\xi_0 = k) \quad \text{với mọi } k = 0, 1, 2, ...$$

Khi đó theo định lí xác suất đầy đủ

$$P_n(k) = P(\xi_n = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\xi_n = k/\xi_0 = i)P(\xi_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P_0(i) P_{ik}^{(n)} \tag{1.2}$$

Kí hiệu $\mathbf{P}_n = (P_n(0)\ P_n(1)\ P_n(2) \cdots)$ là ma trận phân bố xác suất của ξ_n tại thời điểm $t = n$. Đây là ma trận hàng, công thức viết trên có thể biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\boxed{\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_0 \cdot \Pi^n.} \tag{1.3}$$

Để minh họa về cách tính ma trận các xác suất chuyển sau m bước, ta xét một ví dụ sau

Ví dụ 1.1.1

Trong ví dụ thứ 3 đã trình bày ở trên về xích Markov gồm 2 trạng thái thời tiết *mưa* và *nắng*, ma trận các xác suất chuyển

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textbf{Mưa} & \textbf{Nắng} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{hoặc} \quad \Pi = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \end{array}$$

• Với $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ ma trận các xác suất chuyển: $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dễ dàng tính được ma trận các xác suất chuyển sau 2 bước $\Pi^2 = \Pi$, sau 3 bước $\Pi^3 = \Pi$,..., sau n bước $\Pi^n = \Pi$.

• Với $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = 1$ ma trận các xác suất chuyển: $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ suy ra ma trận các xác suất chuyển sau 2 bước $\Pi_2 = \Pi \cdot \Pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, sau 3 bước $\Pi_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Nhìn vào các ma trận này ta có thể nói:

Nếu hôm nay trời nắng, ngày mai chắc chắn trời sẽ mưa, không nắng.

Nếu hôm nay trời nắng, ngày kia trời sẽ nắng trở lại với xác suất $\frac{1}{2}$ (khả năng mưa hoặc nắng đều như nhau).

Nếu hôm nay trời nắng, 3 ngày sau trời sẽ nắng trở lại với xác suất $\frac{1}{4}$.

• Bây giờ ta sẽ tính Π^n trong trường hợp tổng quát $(0 \leq \lambda, \mu \leq 1)$. Hai trường hợp nêu trên chỉ là các trường hợp riêng.

Ma trận các xác suất chuyển có đa thức đặc trưng

$$p(x) = 1 - \lambda - \mu + (\lambda + \mu - 2)x + x^2 = (x-1)(x + \lambda + \mu - 1).$$

Dễ dàng tính được các trị riêng và véc tơ riêng tương ứng
a) $\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{u}_1 = (1,1)$
b) $\lambda_2 = 1 - \lambda - \mu, \ \mathbf{u}_2 = (-\lambda, \mu)$

Trong đại số tuyến tính ta đã biết ma trận, kí hiệu $T = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$, mà 2 cột là các véc tơ riêng $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nói trên làm chéo hóa ma trận Π. Kí hiệu $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda-\mu \end{pmatrix}$ là ma trận chéo gồm 2 trị riêng, khi đó $\Pi = T\Lambda T^{-1} \ \Rightarrow \ \Pi^n = T\Lambda^n T^{-1}$, trong đó $T^{-1} = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Từ đây suy ra

$$\Pi^n = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(1-\lambda-\mu)^n+\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda-\lambda(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \\ \frac{-\mu(1-\lambda-\mu)^n+\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda+\mu(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$$

Nếu $P_0(0)$ và $P_0(1)$ là phân bố xác suất ban đầu của 2 trạng thái thời tiết mưa và nắng. Áp dụng (1.3) ta tính được xác suất để sau n ngày thời tiết sẽ là mưa hay nắng.
Xác suất trời sẽ mưa sau n ngày

$$P_n(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \big(\lambda P_0(0) - \mu P_1(0)\big)\frac{(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu}$$

Xác suất trời sẽ nắng sau n ngày

$$P_n(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \big(\lambda P_0(0) - \mu P_1(0)\big)\frac{(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu}$$

Nhận xét rằng do $0 < \lambda < 1$ và $0 < \mu < 1$ nên $|1-\lambda-\mu| < 1$, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} P_n(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \lim_{n\to\infty} P_n(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

các giới hạn trên không phụ thuộc vào phân bố xác suất ban đầu $P_0(0), P_0(1)$.

Nhận xét trên đặt ra một vấn đề quan trọng trong lí thuyết xích Markov: sau một thời gian dài xác suất xuất hiện các trạng thái *không phụ thuộc vào phân bố xác suất ban đầu $P_0(0), P_0(1)$.*

Chẳng hạn với $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{2}$ trong ví dụ này ma trận các xác suất chuyển:

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \end{array} = T\Lambda T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}.$$

Từ đây suy ra $\Pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ khi $n \to \infty$. Như vậy có thể nói (sau một thời gian đủ dài), xác suất để một ngày nào đó trời mưa bằng $\frac{2}{3}$ và trời nắng bằng $\frac{1}{3}$. Khả năng trời mưa lớn gấp đôi trời nắng. *Các xác suất đó không phụ thuộc vào thời tiết những ngày đầu tiên.*

1.2 Xích Markov ergodic và định lí Markov

Định nghĩa 1.2.1 *Xích Markov $\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ được gọi là xích Markov ergodic, nếu với các trạng thái i, k tùy ý, giới hạn sau tồn tại không phụ thuộc vào trạng thái i*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k \tag{1.4}$$

đồng thời $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$. Véc tơ $\alpha = (P_1, P_2, ..., P_n, ...)$ được gọi là véc tơ phân bố giới hạn xác suất.

Trường hợp xích Markov gồm hữu hạn trạng thái, đẳng thức $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ được suy ra ngay từ (1.4). Ta thừa nhận định lí cơ bản sau

Định lí 1.2.1 (Định lí Markov) *Một xích Markov thuần nhất hữu hạn trạng thái là xích Markov ergodic khi và chỉ khi ma trận Π^m có ít nhất một cột gồm các phần tử đều dương, trong đó $m > 0$ là số tự nhiên nào đó*

$$\Pi^m = \begin{pmatrix} P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} & \cdots & P_{0N}^{(m)} \\ P_{10}^{(m)} & P_{11}^{(m)} & \cdots & P_{1N}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{N0}^{(m)} & P_{N1}^{(m)} & \cdots & P_{NN}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Các nhận xét liên quan đến định lí Markov

1. Đối với xích Markov ergodic, cho dù ban đầu hệ thống được phân bố thế nào (chẳng hạn hệ thống xuất phát từ trạng thái i), hệ thống sẽ chuyển vào trạng thái k với xác suất xấp xỉ P_k khi n đủ lớn (độc lập với trạng thái xuất phát i ban đầu, với bất kì trạng thái k nào). Thật vậy theo (1.3)

$$P_n(k) = \sum_{i=0}^{\infty} P_0(i) P_{ik}^{(n)} \to \sum_{i=0}^{\infty} P_0(i) P_k = P_k$$

2. Từ định lí 1.1.1, ta có

$$\Pi^{n+1} = \Pi^n \cdot \Pi \text{ hay } P_{ik}^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{N} P_{ik}^{(n)} P_{jk}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$, ta được

$$P_k = \sum_{j=0}^{N} P_j P_{jk}$$

Vậy P_k là nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính $X = X\Pi$, trong đó $X = (x_0, x_1, ..., x_N)$ là ẩn cần tìm. Ta sẽ chứng minh hệ trên có duy nhất một nghiệm thoả mãn điều kiện $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$. Thật vậy nhân cả 2 vế của phương trình $x_k = \sum_{j=0}^{N} x_j P_{jk}$ với P_{km}, rồi cộng lại theo k (ở trên đã chỉ ra hệ có ít nhất một nghiệm $x_k = P_k$)

$$x_m = \sum_{k=0}^{N} x_k P_{km} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} x_j P_{jk} P_{km} = \sum_{j=0}^{N} x_j P_{jk}^{(2)}$$

Tiếp tục phương pháp đó, ta được

$$x_k = \sum_{j=0}^{N} x_j P_{jk}^{(n)} \to \sum_{j=0}^{N} x_j P_k = P_k,\ (k = 0, 1, ..., N) \text{ khi } n \to \infty.$$

Nếu kí hiệu $A = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_{N-1} & P_N \\ P_0 & P_1 & \cdots & P_{N-1} & P_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_0 & P_1 & \cdots & P_{N-1} & P_N \end{pmatrix}$ khi đó hệ phương trình $X = X\Pi$ có thể viết dưới dạng ma trận $A\Pi = A = \Pi A$. (*Đẳng thức $T = \Pi T$ hiển nhiên đúng với mọi T*).

3. Nếu ma trận chuyển các xác suất Π hai lần stochastic (tổng các phần tử nằm ở các cột đều bằng 1). Khi đó dễ dàng kiểm tra thấy

$$P_k = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, 2, ..., N$$

cũng thoả mãn hệ phương trình, theo chứng minh trên nghiệm đó là duy nhất. Vậy giới hạn xác suất phân bố đều trên tập các trạng thái $0, 1, 2, ..., N$.

Ví dụ 1.2.1

Quay trở lại ví dụ 1.1.1 với ma trận các xác suất chuyển

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix}$$

Ta cũng có thể tính Π^n bằng phương pháp khác sử dụng đa thức đặc trưng $p(x)$ (khi đó $p(x)$ là đa thức không của A: $p(A) = O$)

$$p(x) = 1 - \lambda - \mu + (\lambda + \mu - 2)x + x^2 = (x-1)(x + \lambda + \mu - 1)$$

Chia x^n cho $p(x)$ để tìm đa thức dư (đa thức dư cũng là đa thức không): $x^n = p(x)q(x) + ax + b$, vậy a, b là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ a(1-\lambda-\mu) + b & = (1-\lambda-\mu)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1-(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \\ b = \frac{\lambda+\mu-1+(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

Suy ra

$$\Pi^n = a\Pi + bI = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(1-\lambda-\mu)^n+\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda-\lambda(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \\ \frac{-\mu(1-\lambda-\mu)^n+\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda+\mu(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$$

Do $0 < \lambda, \mu < 1$ suy ra $|\lambda + \mu| < 2$ hay $|1 - \lambda - \mu| < 1$ nên

$$\Pi^n = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(1-\lambda-\mu)^n+\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda-\lambda(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \\ \frac{-\mu(1-\lambda-\mu)^n+\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda+\mu(1-\lambda-\mu)^n}{\lambda+\mu} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix} \quad \text{khi} \ \ n \to +\infty$$

Các xác suất giới hạn $P_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu},\ P_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.
Chú ý rằng nếu để chỉ tính các xác xuất giới hạn P_0, P_1, theo nhận xét 2 sau định lí Markov, ta có thể giải hệ phương trình $X = X\Pi$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ (1-\lambda)x_1 + \mu x_2 = x_1 \\ \lambda x_1 + (1-\mu)x_2 = x_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ x_2 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

Đặc biệt với $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$, ma trận các xác suất chuyển: $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ *có tổng các cột bằng 1, theo nhận xét 3 sau định lí Markov, các xác xuất giới hạn $P_0 = \frac{1}{2}$ và $P_1 = \frac{1}{2}$.*

Ví dụ 1.2.2

Thời tiết trên một hòn đảo khá đặc biệt, không khi nào có 2 ngày trời nắng liên tiếp. Nếu hôm nay trời nắng thời tiết ngày mai sẽ lạnh hơn: hoặc có tuyết rơi hoặc trời mưa với xác suất như nhau. Nếu hôm nay trời mưa (hoặc có tuyết rơi), thời tiết ngày hôm sau hoặc sẽ không thay đổi với xác suất $\frac{1}{2}$ hoặc thay đổi thành một trong 2 trạng thái còn lại với khả năng như nhau. Các trạng thái Mưa, Nắng, Tuyết lập thành xích Markov với ma trận chuyển

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \\ \textbf{Tuyết} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Mưa} & \textbf{Nắng} & \textbf{Tuyết} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ta có thể tính ma trận các xác suất chuyển sau n bước như trong ví dụ 1.1.1. Việc đưa ra công thức tổng quát tính ma trận Π^n dựa vào việc chéo hóa ma trận Π. Ngoài ra ta cũng có thể tính Π_n như phương pháp đã chỉ ra trong ví dụ 1.1.2. Bạn đọc hãy tự giải và tìm được ma trận các xác suất chuyển sau n bước

$$\Pi^n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 + \frac{(-1)^n+5}{4^n} & 2 - 2\frac{(-1)^n}{4^n} & 4 + \frac{(-1)^n-5}{4^n} \\ 4 - 4\frac{(-1)^n}{4^n} & 2 + 2\frac{(-1)^n}{4^{n-1}} & 4 - 4\frac{(-1)^n}{4^n} \\ 4 + \frac{(-1)^n-5}{4^n} & 2 - 2\frac{(-1)^n}{4^n} & 4 + \frac{(-1)^n+5}{4^n} \end{pmatrix}.$$

Đặc biệt ma trận các xác suất chuyển sau 2 ngày (ta có thể tính trực tiếp $\Pi_2 = \Pi \cdot \Pi$)

$$\Pi_2 = \Pi^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \\ \textbf{Tuyết} \end{array}$$

Từ ma trận Π_2 ta có thể thấy nếu hôm nay trời nắng, khả năng ngày kia trời cũng nắng ít xảy ra nhất. (Xác suất là $\frac{4}{16}$ so với xác suất xảy ra **Mưa** hoặc **Tuyết** đều bằng $\frac{6}{16}$).

Ngoài ra nếu biết phân bố xác suất ban đầu của các trạng thái **Mưa, Nắng, Tuyết**, chẳng hạn $\pi_0 = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0)$ khi đó sử dụng (1.3) ta có thể tính xác suất xảy ra các trạng thái **Mưa, Nắng, Tuyết** sau 2 ngày

$$\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0\end{pmatrix}\Pi^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3 & 6\\ 6 & 4 & 6\\ 6 & 3 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.425 & 0.2 & 0.375\end{pmatrix}$$

Xích Markov ergodic và các xác suất giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = P_j$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1\\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_1\\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = x_2\\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{1}{5}, x_3 = \frac{2}{5}$$

Như vậy sau một thời gian dài, vào một ngày nào đó thời tiết trên đảo sẽ **Mưa** với xác suất $P_1 = \frac{2}{5}$, sẽ có **Tuyết** rơi cũng với xác suất $P_3 = \frac{2}{5}$ và trời **Nắng** với xác suất $P_2 = \frac{1}{5}$.

Nhận xét rằng ta sẽ đạt được kết quả trên bằng cách trực tiếp tính giới hạn các phần tử của ma trận Π^n

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(4 + \frac{(-1)^n + 5}{4^n}\right) = \frac{2}{5}\ \left(= \lim_{n\to\infty} P_{21}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{31}^{(n)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{12}^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(2 - 2\frac{(-1)^n}{4^n}\right) = \frac{1}{5}\ \left(= \lim_{n\to\infty} P_{22}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{32}^{(n)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{13}^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(4 + \frac{(-1)^n - 5}{4^n}\right) = \frac{2}{5}\ \left(= \lim_{n\to\infty} P_{23}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{33}^{(n)}\right)$$

Ví dụ 1.2.3

Tại một địa phương nọ người ta có truyền thống mỗi bữa ăn họ chỉ ăn thịt hoặc chỉ ăn cá, hoặc ăn chay (rau) đồng thời 2 bữa ăn liên tiếp bao giờ cũng đổi món. Nếu bữa trước ăn thịt, bữa ăn tiếp theo sẽ ăn cá với xác suất p và ăn chay với xác suất $q = 1 - p$. Nếu bữa trước ăn cá, bữa ăn tiếp theo sẽ ăn chay với xác suất p và ăn thịt với xác suất q. Còn nếu bữa này ăn chay, bữa tiếp theo sẽ ăn thịt với xác suất p và ăn rau với xác suất q. (Để dễ nhớ ta chú ý các món ăn thịt, cá, rau được sắp xếp vòng tròn theo thứ tự thịt $\to$ cá $\to$ rau $\to$ thịt. Kí hiệu E_1, E_2, E_3 tương ứng với các trạng thái ăn thịt, ăn cá, và ăn rau. Từ một trạng thái bất kì, xác suất chuyển sang trạng thái tiếp theo là p và xác suất chuyển sang trạng thái trước nó bằng q). Chúng lập thành xích Markov với ma trận chuyển

$$\Pi = \begin{array}{c} E_1\\ E_2\\ E_3\end{array}\begin{pmatrix}0 & p & q\\ q & 0 & p\\ p & q & 0\end{pmatrix}$$

Dễ dàng nhận thấy các phần tử của ma trận Π^2 luôn luôn dương ($p_{ii}^{(2)} \geqslant p_{ik}^{(1)}p_{ki}^{(1)} > 0, \quad p_{12}^{(1)} \geqslant p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)} > 0$). Ma trận Π hai lần stochastic (các cột của ma trận chuyển có tổng bằng 1). Vậy các giới hạn xác suất

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} P_{i1}^{(n)} = \frac{1}{3}, P_2 = \lim_{n\to\infty} P_{i2}^{(n)} = \frac{1}{3}, P_3 = \lim_{n\to\infty} P_{i3}^{(n)} = \frac{1}{3}.$$

Điều đó cũng có nghĩa là bất kể vào đầu năm hay dịp lễ tết, các gia đình chỉ ăn thịt hoặc cá, vào dịp cuối năm khoảng một phần ba số hộ gia đình sẽ ăn thịt, một phần ba sẽ ăn cá và một phần ba sẽ ăn rau. Điều đó giúp cho việc tổ chức cung cấp thực phẩm cho địa phương sẽ phù hợp hơn.

Bài tập 1. Xét một lang thang ngẫu nhiên xuất phát từ $\xi_0 = 0$ trên tập các số nguyên $T = \{-5, -4, \cdots, 4, 5\}$. Sau mỗi bước nó dịch chuyển sang phải với xác suất p và dịch chuyển sang trái với xác suất $q = 1 - p$. (Giả thiết -5 và 5 là các tường *phản xạ*). Gọi ξ_n là vị trí của điểm lang thang sau n bước. Chứng tỏ rằng $\eta_n = \frac{\xi_{2n}}{2}$ cũng lập thành xích Markov trên tập các trạng thái $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Hãy viết ma trận các xác suất chuyển của η_n. Tìm các giới hạn xác suất $P_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ của nó khi $p = 0.5$.

Bài tập 2. Xét bài toán lang thang ngẫu nhiên trên tập các số nguyên $T = \{-1, 0, 1, 2\}$ với -1 và 2 là các tường chắn. Ma trận chuyển có dạng như sau

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chứng minh đây là xích Markov ergodic. Tìm phân bố giới hạn xác suất.

Chương 2

Xích Markov hữu hạn

2.1 Phân loại các trạng thái của xích Markov

Định nghĩa 2.1.1 *Đối với một xích Markov, trạng thái i có thể chuyển qua trạng thái k (kí hiệu $i \hookrightarrow k$ hoặc $k \hookleftarrow i$), nếu tồn tại số tự nhiên $m > 0$ sao cho $P_{ik}^{(m)} > 0$. Xét trên tập các trạng thái i có thể chuyển qua chính nó, $i \sim k$ nếu $i \hookrightarrow k$ và $k \hookrightarrow i$. Như vậy ta có quan hệ tương đương trên tập các trạng thái vừa nói.*

Một trạng thái được gọi là trạng thái thực nếu nó tương đương với tất cả các trạng thái mà nó có thể chuyển qua. Các trạng thái khác được gọi là các trạng thái không thực.

Nếu một lớp tương đương nào đó gồm một phần tử duy nhất k, khi đó k được gọi là trạng thái hút.

Từ định nghĩa trên ta thấy các trạng thái không thực sẽ dần dần không xuất hiện theo thời gian trong quá trình chuyển đổi các trạng thái của hệ thống. Quan hệ tương đương nói trên xác định các lớp tương đương. Chúng có các tính chất sau

1. *Nếu một lớp tương đương nào đó chứa một trạng thái thực, khi đó tất cả các phần tử của lớp tương đương đó đều là các trạng thái thực.*

2. *Nếu i và j là 2 trạng thái thực của hai lớp tương đương khác nhau, khi đó*
$$P_{ij}^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

3. *k là trạng thái hút khi và chỉ khi $P_{kk}^{(1)} = P_{kk} = 1$.*

4. *Với j là trạng thái không thực, khi đó với bất kì trạng thái i*
$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0. \tag{2.1}$$

Do j là trạng thái không thực, nên tồn tại k sao cho với n thích hợp $P_{jk}^{(n)} > 0$ và $P_{kj}^{(m)} = 0$ với mọi $m = 1, 2, \ldots$. Xét trường hợp dãy $P_{ij}^{(n)}$ không đồng nhất với 0, tồn tại n_0 để $P_{ij}^{(n_0)} > 0$. Suy ra $P_{ik}^{(n_0+n)} \geqslant P_{ij}^{(n_0)} P_{jk}^{(n)} > 0$ hay tồn tại $n_1 (= n_0 + n)$ để $P_{ik}^{(n_1)} > 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\max_{(i)} P_{ij}^{(n_1+m)} &= \max_{(i)} \sum_{l=0}^{\infty} P_{il}^{(n_1)} P_{lj}^{(m)} \leqslant [\max_{(l)} P_{lj}^{(m)}](1 - P_{ik}^{(n_1)}) \\ &= [\max_{(i)} P_{ij}^{(m)}](1 - P_{ik}^{(n_1)})\end{aligned}$$

Lặp lại lập luận trên

$$\begin{aligned}\max_{(i)} P_{ij}^{(n_1+n_1+m)} = \max_{(i)} \sum_{l=0}^{\infty} P_{il}^{(n_1)} P_{lj}^{(n_1+m)} &\leqslant [\max_{(l)} P_{lj}^{(n_1+m)}](1 - P_{ik}^{(n_1)}) \\ &\leqslant [\max_{(i)} P_{ij}^{(m)}](1 - P_{ik}^{(n_1)})^2\end{aligned}$$

Cứ tiếp tục ta suy ra điều phải chứng minh

$$\max_{(i)} P_{ij}^{(rn_1+m)} \leqslant (1 - P_{ik}^{(n_1)})^r \to 0 \quad \text{khi} \quad r \to \infty$$

Định nghĩa 2.1.2 *Đưa vào các kí hiệu*

$$f_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = j, \xi_\nu \neq j, 1 \leqslant \nu < n / \xi_0 = i) \text{ và } f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Trạng thái k được gọi là trạng thái quay trở lại nếu $f_{kk}^* = 1$.

Nhận xét rằng $f_{ij}^{(n)}$ là xác suất để hệ thống từ trạng thái i lần đầu tiên chuyển sang trạng thái j sau n bước. Kí hiệu T_k là thời gian trạng thái k quay trở lại. Khi đó $E(T_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{kk}^{(n)}$ là thời gian trung bình để k quay trở lại.

Để minh họa các khái niệm này ta xét xích Markov 2 trạng thái trong ví dụ 1.2.1. Ma trận các xác suất chuyển

$$\Pi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \end{array}$$

Xác suất để hệ thống từ trạng thái **1** lần đầu tiên chuyển về chính nó sau n bước là xác suất để hệ thống luôn ở trong trạng thái **0** từ bước thứ 2 cho đến bước thứ $n-1$ đồng thời bước cuối cùng thứ n hệ thống dịch chuyển từ **0** sang **1**. Xác suất đó bằng

$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} \mu(1-\lambda)^{n-2}\lambda & \text{nếu } n \geq 2 \\ 1-\mu & \text{nếu } n = 1. \end{cases}$$

Ta có thể chỉ ra trạng thái **1** là trạng thái quay trở lại

$$f_{11}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 1 - \mu + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(1-\lambda)^{n-2}\lambda = 1 - \mu + \mu\lambda \sum_{n=2}^{\infty} (1-\lambda)^{n-2} = 1.$$

Thời gian trung bình để trạng thái **1** quay trở lại là

$$E(T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 - \mu + \mu\lambda \sum_{n=2}^{\infty} n(1-\lambda)^{n-2} = 1 - \mu + \frac{\mu + \mu\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

Người ta đã chứng minh được kết quả sau

Định lí 2.1.1 *Trạng thái i là trạng thái quay trở lại, khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$ phân kì và*

$$P_{ii}^{(n)} \to \frac{1}{\mu} \quad \text{khi} \quad n \to \infty, \quad \text{trong đó} \quad \mu = E(T_i).$$

Ở trên ta vừa chỉ ra thời gian trung bình để trạng thái **1** quay trở lại $E(T_1) = \frac{\mu+\lambda}{\lambda}$. Nó phù hợp với việc áp dụng định lí 2.1.1 cho xác suất giới hạn đã tính trong ví dụ 1.2.1

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \frac{\mu+\lambda}{\lambda}$$

Định lí 2.1.1 giúp ta tính toán thời gian trung bình để trạng thái quay trở lại dễ dàng hơn, nếu biết các xác suất giới hạn. Chẳng hạn để tính thời gian trung bình cho trạng thái **Nắng** trong ví dụ 1.1.3 quay trở lại, kí hiệu $P_{22}^{(n)}$ là xác suất để sau n ngày thời tiết từ trạng thái **Nắng** quay trở lại **Nắng**. Trong ví dụ đó, do xich Markov ergodic ta đã chỉ ra

$$P_2 = \lim_{n\to\infty} P_{22}^{(n)} = \frac{1}{5}.$$

Suy ra nếu hôm nay trời nắng, *trung bình phải đợi 5 ngày nữa để có nắng trở lại.*

2.2 Xích Markov hút

Bây giờ ta chỉ xét các xích Markov hữu hạn trạng thái, có các trạng thái hút đồng thời từ một trạng thái bất kì không là trạng thái hút có thể đạt đến một trạng thái bất kì khác. (Các trạng thái không là trạng thái hút tạo thành một lớp tương đương). Ví dụ sau có một trạng thái hút.

Ví dụ 2.2.1

Xét bài toán lang thang ngẫu nhiên trên tập các số nguyên $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ với 1 là tường phản xạ (tường chắn), còn trạng thái 5 là trạng thái hút. Ma trận chuyển có dạng như sau

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Xích Markov hút có các tính chất sau

1. *Nếu i là trạng thái hút, khi đó $P_{ii} = 1$ và $P_{ii}^{(n)} = 1$ với mọi n.*

2. *Nếu i không là trạng thái hút, khi đó i không quay trở lại.*

   Thật vậy tồn tại trạng thái hút ν và số tự nhiên n để $P_{i\nu}^{(n)} > 0$ và $P_{\nu i}^{(m)} = 0$ với mọi m. Gọi A là biến cố hệ sẽ quay lại i một lúc nào đó, B_k là biến cố hệ sẽ chuyển từ i tới trạng thái k sau n bước. (k biến thiên trên toàn bộ tập các trạng thái gồm N trạng thái của xích Markov. Khi đó $B_k, k = 1, ..., N$ lập thành hệ đầy đủ).

$$\begin{aligned} f_{ii}^* = P(A) &= \sum_{k=1}^{N} P(A/B_k)P(B_k) \\ &= P(A/B_\nu)P(B_\nu) + \sum_{k \neq \nu} P(A/B_k)P(B_k) \\ &= \sum_{k \neq \nu} P(A/B_k)P(B_k). \end{aligned}$$

   Suy ra

$$f_{ii}^* = \sum_{k \neq \nu} P(A/B_k)P(B_k) \leqslant \sum_{k \neq \nu} P(B_k) < 1 \quad \text{do} \quad P(B_\nu) = P_{i\nu}^{(n)} > 0.$$

3. *Nếu i, j không là các trạng thái hút (không quay trở lại), khi đó chúng là trạng thái không thực và do vậy theo (2.1), $\lim\limits_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$.*

Để minh họa các tính chất trên, xét một ví dụ khác với hai trạng thái hút.

Ví dụ 2.2.2

Lang thang ngẫu nhiên trên tập các số nguyên $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ với 1 và 5 là trạng thái hút. Ma trận chuyển có dạng như sau

$$\Pi = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trường hợp $p = q = \frac{1}{2}$, ma trận chuyển có dạng

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theo tính chất (2.1), $\lim\limits_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$ với $j = 2, 3, 4$ (2 cột đầu và cuối của ma trận giới hạn dưới đây sẽ được tính trong mục này. Trước mắt ta có thể kiểm tra bằng các phần mềm tính toán như Excel, Mathematica...)

$$\Pi^n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{khi} \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Để dẫn vào khái niệm *ma trận cơ sở* của xích Markov hút, người ta chia matrận Π thành các dạng khối $\begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}$, trong đó I là ma trận đơn vị, O là ma trận không. Chẳng hạn ở ví dụ trên sau khi đổi hàng, cột

$$\Pi = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \\ \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ -- & -- & & -- & -- & -- \\ q & 0 & | & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & | & q & 0 & p \\ 0 & p & | & 0 & q & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận Q đóng vai trò quan trọng trong xích Markov hút. Nó có tính chất sau

$$\Pi^n = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} I & O \\ R^* & Q^n \end{pmatrix} \Rightarrow Q^n = (P_{ij}^{(n)}).$$

Theo tính chất 3, do i, j là các trạng thái không hút, $\lim P_{ij}^{(n)} = 0$, ma trận Q^n tiến tới O khi $n \to \infty$. Ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.2.1 *Với $Q^n \to O$, ma trận $I - Q$ khả nghịch và*

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i.$$

Định nghĩa 2.2.1 *Ma trận $N = (I - Q)^{-1}$ được gọi là ma trận cơ sở của xích Markov.*

2.2.1 Thời gian trung bình để hệ thống đạt tới các trạng thái hút

Định nghĩa 2.2.2 *Gọi T là tập các trạng thái không quay lại, với $j \in T$, kí hiệu*

$$u_j^k = \begin{cases} 1 & \textit{nếu sau } k \textit{ bước hệ thống ở trạng thái } j, \\ 0 & \textit{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Hiển nhiên khi đó

$$\nu_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^k$$

là số bước để hệ thống bước vào trạng thái j.

Ta có định lí

Định lí 2.2.1 *Với mọi $i, j \in T$ ma trận*

$$\{E_i(\nu_j)\} = N.$$

$E_i(\nu_j)$ là kì vọng của ν_j với điều kiện hệ thống đang ở trạng thái i.

Chứng minh. Sử dụng định lí kì vọng có điều kiện (với quy ước $P_{ii}^{(0)} = 1$)

$$\begin{aligned} E_i(\nu_j) &= E(\nu_j/\xi_0 = i) = \sum_k P_{ik} E(\nu_j/\xi_0 = i, \xi_1 = k) \\ &= \sum_k P_{ik} E(\nu_j/\xi_1 = k) = \delta_{ij} + \sum_{k \in T} P_{ik} E_k(\nu_j) \end{aligned}$$

Suy ra ma trận $\{E_i(\nu_j)\} = I + Q \cdot \{E_i(\nu_j)\} \Rightarrow \{E_i(\nu_j)\} = (I - Q)^{-1} = N.$ ■

Nhận xét rằng định lí khẳng định các phần tử của ma trận cơ sở N chính là thời gian trung bình để hệ thống chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j.

Chú ý rằng từ định nghĩa của ν_j ta thấy

$$\mathbf{t} = \sum_{j \in T} \nu_j, \quad \text{với } T \text{ là tập các trạng thái không quay lại,}$$

là thời gian để hệ đi tới các trạng thái không quay lại (kể cả vị trí đầu). Như vậy $\mathbf{t}$ *cũng là số bước ngay trước khi hệ thống bước vào trạng thái hút. Do đó số bước trung bình để hệ thống chuyển từ trạng thài i vào trạng thái hút*

$$E_i(\mathbf{t}) = \sum_{j \in T} E_i(\nu_j).$$

Người ta thường biểu diễn thời gian trung bình để hệ thống chuyển vào trạng thái hút dưới dạng ma trận $\boldsymbol{\tau}$. Kí hiệu $\mathbf{e}$ là ma trận cột gồm toàn các số 1, khi đó

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \{E(\mathbf{t})\} = N.\mathbf{e}}$$

là tổng các hàng của ma trận N.

Quay lại ví dụ 2.2.2 ở trên, lang thang ngẫu nhiên trên tập các số nguyên $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ với 1 và 5 là trạng thái hút, trường hợp $p = q = \frac{1}{2}$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Chúng ta thấy nếu hệ thống xuất phát từ trạng thái **3**, trung bình sau 2 bước hệ thống quay trở lại **3**, trong khi từ trạng thái **4**, số bước trung bình để hệ thống trở về **2** là $\frac{1}{2}$. Điều đó có thể lí giải bởi trạng thái **4** "quá gần" trạng thái hút **5**.

Từ véc tơ $\boldsymbol{\tau}$, ta cũng đọc được thời gian trung bình để hệ thống xuất phát từ trạng thái **3** "lang thang" giữa các trạng thái **2**, **3**, **4** là 4 bước. Đó cũng là số bước trung bình để hệ thống bị hút từ trạng thái **3**.

Ví dụ 2.2.2, trường hợp $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$, $N = \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$

Như vậy *trung bình* sau $\frac{7}{5}$ bước hệ thống từ trạng thái **2** lại quay lại đúng trạng thái **2** đó (Chú ý rằng do quy ước $P_{ii}^{(0)} = 1$, số bước trung bình từ một trạng thái về chính nó bao giờ cũng kể tới vị trí ban đầu). Cũng từ ma trận N, ta đọc được hệ thống từ trạng thái **2** chuyển sang trạng thái **3** trung bình mất $\frac{6}{5}$ bước. Hệ thống từ trạng thái **4** chuyển sang trạng thái **2** trung bình mất $\frac{1}{5}$ bước. Điều đó cũng phù hợp với thực tế: với xác suất cao hơn, từ trạng thái **4** hệ thống dễ chuyển sang trạng thái hút (trạng thái **5**) hơn.

Bài tập Chứng minh rằng trong trường hợp tổng quát ma trận cơ sở của ví dụ 2.2.2

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{p+q^2}{p^2+q^2} & \frac{p}{p^2+q^2} & \frac{p^2}{p^2+q^2} \\ \frac{q}{p^2+q^2} & \frac{1}{p^2+q^2} & \frac{p}{p^2+q^2} \\ \frac{q^2}{p^2+q^2} & \frac{q}{p^2+q^2} & \frac{q+p^2}{p^2+q^2} \end{pmatrix}$$

2.2.2 Xác suất để hệ thống đạt tới các trạng thái hút

Định lí 2.2.2 *Gọi T là tập các trạng thái không quay lại và $\widetilde{T}$ là tập các trạng thái hút. Kí hiệu $b_{ij}, i \in T, j \in \widetilde{T}$ là xác suất để hệ thống đi từ trạng thái i (không quay lại) tới trạng thái j (trạng thái hút) ở một thời điểm nào đó. Khi đó*

$$B = \{b_{ij}\} = NR, \quad i \in T, j \in \widetilde{T}$$

Chứng minh. Ta biết rằng $b_{kj} = 0$ nếu $k \in \widetilde{T}$, suy ra

$$b_{ij} = P_{ij} + \sum_{k \in T} P_{ik} b_{kj} \quad \text{hay} \quad B = R + QB \Leftrightarrow B = (I - Q)^{-1} R = NR.$$

Quay lại ví dụ 2.2.2, trường hợp $p = q = \frac{1}{2}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow B = NR = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Đây là kết quả đã nhắc đến ở cuối ví dụ 2.2.2, các xác suất giới hạn (2.2).
Trường hợp $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow B = NR = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng nếu ta mở rộng ma trận $B^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, *các phần tử* b^*_{ij} *của ma trận là xác suất để hệ thống đi từ trạng thái i tới trạng thái j. Khi đó hiển nhiên* $\lim_{n\to\infty} \Pi^n = B^*$

$$\Pi B^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R + QB & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = B^*$$

Với ví dụ 2.2.2, trường hợp $p = q = \frac{1}{2}$

$$B^* = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ví dụ 2.2.3

Xét một ví dụ khác. Giả thiết rằng hàng năm sinh viên ở một trường đại học bị buộc thôi học với xác suất p, xác suất để một sinh viên học lại với khoá sau bằng q và r là xác suất để sinh viên đó học tiếp. Kí hiệu $\mathbf{s_1}$ là trạng thái sinh viên theo học năm thứ nhất, $\mathbf{s_2}$ là trạng thái sinh viên theo học năm thứ hai,..., $\mathbf{s_4}$ là trạng thái sinh viên theo học năm thứ tư (năm cuối cùng). Kí hiệu tiếp $\mathbf{s_5}$ là trạng thái sinh viên bị buộc thôi học và $\mathbf{s_6}$ là trạng thái sinh viên tốt nghiệp ra trường. Chúng lập thành xích Markov với ma trận chuyển:

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ \mathbf{s_5} \\ \mathbf{s_6} \\ \mathbf{s_4} \\ \mathbf{s_3} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{s_5} & \mathbf{s_6} & \mathbf{s_4} & \mathbf{s_3} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{pmatrix} \end{array}$$

Suy ra ma trận cơ sở

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{(p+r)^2} & \frac{1}{p+r} & 0 & 0 \\ \frac{r^2}{(p+r)^3} & \frac{r}{(p+r)^2} & \frac{1}{p+r} & 0 \\ \frac{r^3}{(p+r)^4} & \frac{r^2}{(p+r)^3} & \frac{r}{(p+r)^2} & \frac{1}{p+r} \end{pmatrix}$$

Với $p = 0,2, \quad q = 0,1, \quad r = 0,7$

$$N = \begin{array}{c} \mathbf{s_4} \\ \mathbf{s_3} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1,111 & 0 & 0 & 0 \\ 0,864 & 1,111 & 0 & 0 \\ 0,672 & 0,864 & 1,111 & 0 \\ 0,523 & 0,672 & 0,864 & 1,111 \end{pmatrix}$$

Các số 0 trong ma trận N khẳng định hệ thống không bao giờ đạt tới, chẳng hạn sinh viên năm thứ ba sẽ không quay về năm thứ nhất hoặc thứ hai.

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = NR = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,111 & 0 & 0 & 0 \\ 0,864 & 1,111 & 0 & 0 \\ 0,672 & 0,864 & 1,111 & 0 \\ 0,523 & 0,672 & 0,864 & 1,111 \end{pmatrix}$$

Ma trận B cho ta xác suất để một học sinh bị buộc thôi học hoặc tốt nghiệp ra trường

$$B = \begin{array}{c} \\ \mathbf{s_4} \\ \mathbf{s_3} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{s_5} & \mathbf{s_6} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.22 & 0.78 \\ 0.395 & 0.605 \\ 0.53 & 0.47 \\ 0.634 & 0.366 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nhìn vào kết quả trên ta thấy xác suất để một học sinh năm thứ nhất bị buộc thôi học khá cao: 0.634, cũng như xác suất để một học sinh năm cuối tốt nghiệp ra trường bằng 0.78

2.3 Xích Markov đều

Định nghĩa 2.3.1 *Một xích Markov hữu hạn trạng thái với Π là ma trận các xác suất chuyển được gọi là xích Markov đều nếu nếu tồn tại số tự nhiên N sao cho mọi phần tử của ma trận Π^N đều khác 0.*

Nhận xét rằng với một xích Markov đều, tất cả các trạng thái của nó đều là các trạng thái quay trở lại. Từ định lí cơ bản 1.2.1 suy ra

Định lí 2.3.1 *Đối với mỗi xích Markov đều, $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi^n = A$ (A là ma trận xác suất có các hàng giống nhau). Nếu kí hiệu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ là một hàng của A, khi đó*

$$\alpha\Pi = \alpha, \quad \Pi A = A\Pi = A.$$

Các kết quả liên quan đến xích Markov đều được chứng minh tương tự như xích Markov hút. Trong mục này chúng ta chỉ đưa ra cách tính thời gian trung bình $m_{ij} = E_i(f_j)$ để hệ thống chuyển từ trạng thái i về trạng thái j bằng cách sử dụng các kết quả từ xích Markov hút.

Ví dụ 2.3.1

1. Các trạng thái Mưa, Nắng, Tuyết lập thành xích Markov với ma trận các xác suất chuyển

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \\ \textbf{Tuyết} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Mưa} & \textbf{Nắng} & \textbf{Tuyết} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ta dễ dàng chứng minh đây là xích Markov đều. Do ma trận chuyển các xác suất Π hai lần stochastic (tổng các phần tử nằm ở các cột đều bằng 1). Khi đó giới hạn xác suất phân bố đều trên tập các trạng thái.

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} P_{i1}^{(n)} = \frac{1}{3}, P_2 = \lim_{n\to\infty} P_{i2}^{(n)} = \frac{1}{3}, P_3 = \lim_{n\to\infty} P_{i3}^{(n)} = \frac{1}{3}$$

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Điều này một lần nữa khẳng định xích Markov đều.

Theo định lí 2.1.1, thời gian trung bình để hệ thống chuyển từ trạng thái bất kì (mưa, nắng hoặc tuyết) quay lại chính trạng thái đó là 3 ngày.

2. Xét xích Markov đều gồm các trạng thái Mưa, Nắng, Tuyết với ma trận các xác suất chuyển khác ví dụ trước

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \\ \textbf{Tuyết} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Mưa} & \textbf{Nắng} & \textbf{Tuyết} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Bạn đọc có thể tự tính được phân bố các xác suất giới hạn trên tập các trạng thái Mưa, Nắng, Tuyết lần lượt là: $(\frac{1}{21}, \frac{4}{21}, \frac{16}{21})$. Từ các xác suất giới hạn này, như trong ví dụ trước, sử dụng định lí 2.1.1, ta tìm được thời gian trung bình để hệ thống chuyển từ trạng thái bất kì về chính nó.

Bây giờ ta có thể tính thời gian trung bình để hệ thống chuyển từ trạng thái này đến trạng thái khác bằng cách lập một *xich Markov hút* tương ứng với xich Markov ban đầu.

• Xem **Mưa** là trạng thái hút có ma trận các xác suất chuyển dưới đây, tương ứng với xich Markov đã cho

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \\ \textbf{Tuyết} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Mưa} & \textbf{Nắng} & \textbf{Tuyết} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Khi đó ma trận $Q = \begin{array}{c} \textbf{Nắng} \\ \textbf{Tuyết} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ và ma trận cơ sở của Π

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 5 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \{E(\mathbf{t})\} = N \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Như vậy từ trạng thái **Nắng**, trung bình phải đợi 25 ngày để có ngày **Mưa** gần nhất và từ trạng thái **Tuyết**, trung bình phải đợi 30 ngày để có ngày **Mưa**.

• Để tính thời gian trung bình từ các trạng thái **Mưa**, **Tuyết** về trạng thái **Nắng**, ta xem **Nắng** là trạng thái hút của xích Markov hút tương ứng. Tương tự như trên khi đó

$$Q = \begin{array}{c} \textbf{Mưa} \\ \textbf{Tuyết} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \{E(\mathbf{t})\} = N \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Như thế trung bình phải đợi 5 ngày để thời tiết chuyển từ **Tuyết** sang **Nắng**, tuy nhiên chỉ cần hơn 1 ngày là thời tiết có thể chuyển từ **Mưa** sang **Nắng**.

• Tương tự nếu xem **Tuyết** là trạng thái hút, ta có các kết quả

$$Q = \begin{array}{c} \textbf{Mưa} \\ \textbf{Nắng} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} \frac{25}{16} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \{E(\mathbf{t})\} = N \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{45}{16} \\ \frac{25}{16} \end{pmatrix}$$

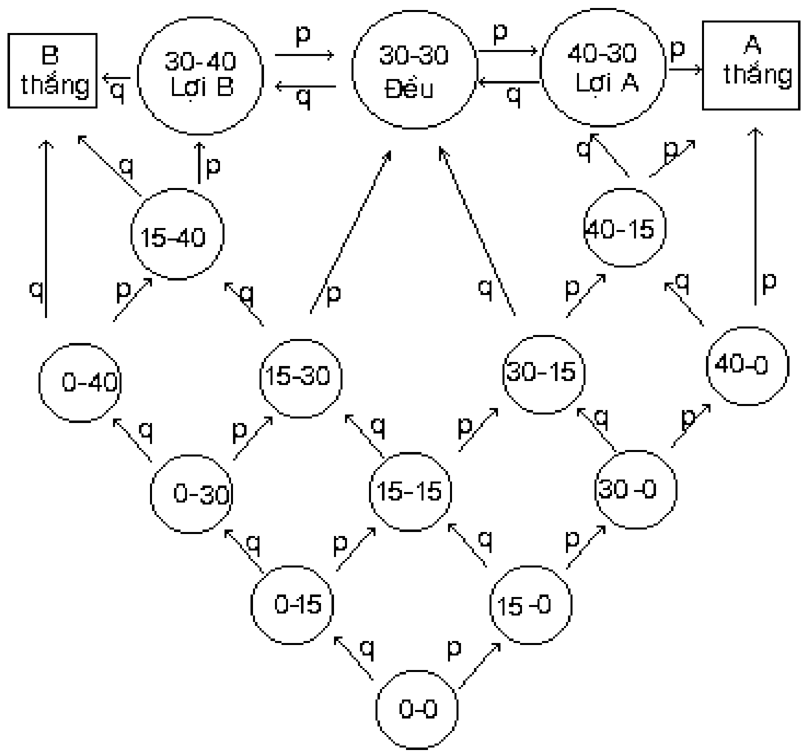
Nhận xét rằng với xích Markov đều, xác suất b_{ij} để hệ thống từ trạng thái i sang trạng thái j luôn bằng 1. Ta cũng có thể kiểm tra điều đó ở đây bằng định lí 2.2.2.

Thật vậy trường hợp **Mưa** là trạng thái hút, ma trận $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$. Ta đã biết khi đó $N = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$. Vậy

$$B = N \cdot R = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Ứng dụng vào môn tennix

Xét một ứng dụng trong môn tennix. Trước hết ta xét một ván tennix giữa hai đấu thủ A và B, xác suất để A thắng B ở mỗi lần giao bóng bằng p (do đó xác suất B thắng A ở mỗi lần giao bóng bằng $q = 1 - p$). Hình vẽ sau minh hoạ các trạng thái của một ván tennix giữa hai đấu thủ đó.



Các trạng thái 30-40, 30-30, 40-30 có thể đồng nhất với các trạng thái "lợi B", "đều" hoặc "lợi A". Có thể chia toàn bộ các trạng thái có thể của một ván tennix thành 2 quá trình: quá trình "chuẩn bị" và quá trình lang thang ngẫu nhiên.

Quá trình lang thang ngẫu nhiên bao gồm 5 trạng thái biểu diễn trên sơ đồ ở dòng trên cùng: "B thắng", "lợi B", "đều","lợi A", "A thắng". Chúng lập thành một xích Markov hút với 2 trạng thái hút "B thắng" và "A thắng". Quá trình chuẩn bị tạo ra phân bố ban đầu $\pi = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ cho 5 trạng thái kể trên.

Đây thực chất là bài toán đã xét trong ví dụ 2.2.2: bài toán lang thang ngẫu nhiên trên tập các số nguyên $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ với 1 là "B thắng" và 5 là "A thắng" - 2 trạng thái hút. Ma trận chuyển có dạng như sau

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \\ \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ -- & -- & & -- & -- & -- \\ q & 0 & | & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & | & q & 0 & p \\ 0 & p & | & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $Q = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$

$$N = \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1-pq}{1-2pq} & \frac{p}{1-2pq} & \frac{p^2}{1-2pq} \\ \frac{q}{1-2pq} & \frac{1}{1-2pq} & \frac{p}{1-2pq} \\ \frac{q^2}{1-2pq} & \frac{q}{1-2pq} & \frac{1-pq}{1-2pq} \end{pmatrix}, B = NR = \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} q(1-pq) & p^3 \\ q^2 & p^2 \\ q^3 & p(1-pq) \end{pmatrix}$$

$$\tau = \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} 1+2p^2 \\ 2 \\ 1+2q^2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{pq}{1-pq} & p & \frac{p^2}{1-pq} \\ \frac{q}{1-pq} & 2pq & \frac{p}{1-pq} \\ \frac{q^2}{1-pq} & q & \frac{pq}{1-pq} \end{pmatrix}$$

Để tính xác suất cho "A thắng" - ta cần nhân cột tương ứng của B với phân bố ban đầu π

$$P_A = c_1 \cdot 0 + c_2 b_2 + c_3 b_3 + c_4 b_4 + c_5 \cdot 1 = (c_2 p^3 + c_3 p^2 + c_4 p(1-pq)) \frac{1}{1-2pq} + c_5.$$

Thật vậy, b_i là xác suất để hệ thống từ i vào 5, hay $b_i = P(A \text{ thắng}/\xi_0 = i)$. Do đó

$$P(\text{A thắng}) = \sum_i P(\text{A thắng}/\xi_0 = i) P(\xi_0 = i) = \sum_i b_i c_i.$$

Dựa vào sơ đồ ta có thể tính được

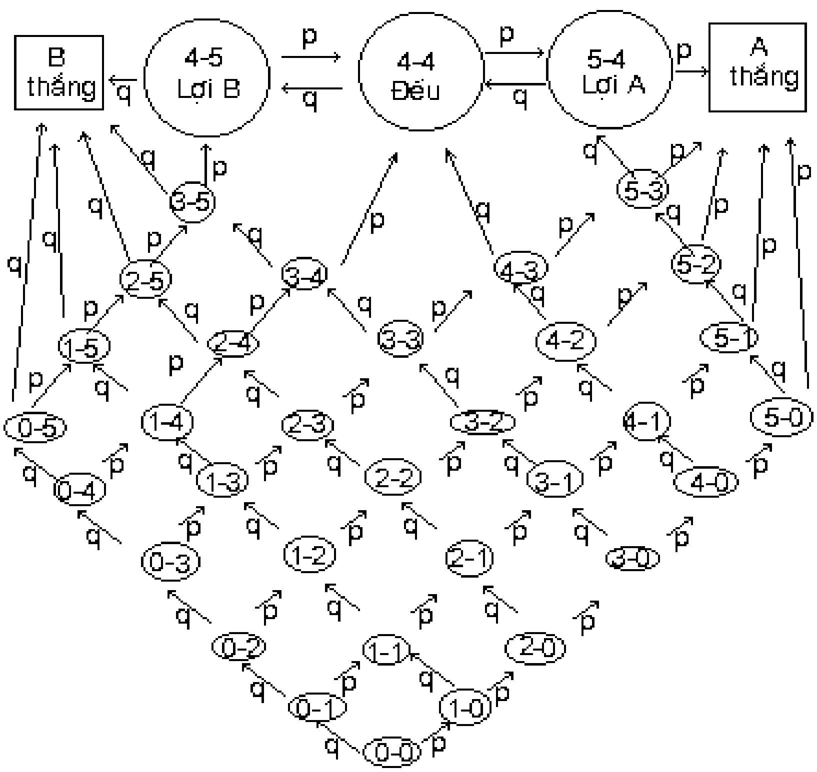
$$\begin{aligned} & c_1 = q^4(1+4p), c_2 = C_4^1 p^2 q^3 = 4p^2 q^3 \\ & c_3 = C_4^2 p^2 q^2 = 6p^2 q^2, c_4 = 4p^3 q^2, \\ & c_5 = p^4(1+4q). \end{aligned}$$

Vậy xác suất để A thắng ở mỗi ván

$$P_A = \frac{1}{1-2pq}[4p^2q^3 \cdot p^3 + 6p^2q^2 \cdot p^2 + 4p^3q^2 \cdot p(1-pq)] + p^4(1+4q) =$$

$$= \frac{10p^4q^2}{1-2pq} + p^4(1+4q) = p^4\frac{10q^2}{p^2+q^2} + p^4(1+4q) = p^4\frac{(1+2q)(1+4q^2)}{p^2+q^2}.$$

Trong luật chơi môn tennix, hai đấu thủ phải đấu tối đa 5 séc, người thắng là đấu thủ đầu tiên giành trước 3 séc thắng. Tuy nhiên mỗi séc đấu gồm ít nhất 6 ván, người thắng trong mỗi séc là người đầu tiên thắng được 6 ván trong séc đó, tuy nhiên số ván thắng phải hơn đối phương ít nhất 2 ván. Như vậy các trận đấu trong mỗi séc có thể minh hoạ như sơ đồ sau. Mỗi séc đấu lại dẫn đến quá trình lang thang ngẫu nhiên bao gồm 5 trạng thái biểu diễn trên sơ đồ ở dòng trên cùng: "B thắng", "lợi B(4-5)", "đều(4-4)","lợi A(5-4)", "A thắng" (như đã nghiên cứu ở mỗi ván đấu, bài toán chỉ khác ở quá trình chuẩn bị). Bây giờ ta kí hiệu p là xác suất để đấu thủ A thắng ở mỗi ván. (**Ở** trên ta kí hiệu p là xác suất để đấu thı



Dựa vào sơ đồ trên, tương tự như vấn đề ta đã giải quyết ở mỗi ván đấu, ta có thể tính được phân bố đầu của các trạng thái

$$c_1 = q(C_5^0q^5 + C_6^1pq^5 + C_7^2p^2q^5 + C_8^3p^3q^5), c_2 = p \cdot C_8^3p^3q^5$$
$$c_3 = C_8^4p^4q^4, c_4 = q \cdot C_8^3p^5q^3$$
$$c_5 = p(C_5^0p^5 + C_6^1qp^5 + C_7^2q^2p^5 + C_8^3q^3p^5).$$

Xác suất để A thắng ở mỗi séc

$$P_{secA} = p^6\frac{1+4q+11q^2+26q^3+56q^4+112q^5}{p^2+q^2}$$

Bây giờ ta có thể tính xác suất để A thắng trong cả trận đấu tennix. Sử dụng công thức $p^3(1+3q+6q^2)$ như đã biết trong bài toán về trận đấu bóng bàn ($p = P_{secA}$).

Ta xét các trường hợp cụ thể

• Với $p = \frac{1}{2} \Rightarrow P_A = \frac{1}{2}$, xác suất để A thắng trong cả trận đấu cũng bằng $\frac{1}{2}$.

• Với $p = 0.51$, khi đó $P_A = 0.524985$ và $P_{secA} = 0.573397$. Suy ra xác suất để A thắng trong cả trận đấu, áp dụng công thức $p^3(1+3q+6q^2)$ như đã trình bày ở trên, trong đó $p = P_{secA}$, ta được

$$P = P_{secA}^3\big(1 + 3(1 - P_{secA}) + 6(1 - P_{secA})^2\big) = 0.625.$$

• Với $p = 0.6$, khi đó $P_A = 0.735729$ và $P_{secA} = 0.966109$. Suy ra xác suất để A thắng trong cả trận đấu, $P = 0.9996$.

2.5 Một vài lệnh trợ giúp các bài toán xác suất

A. Các lệnh trong EXCEL

1. $BINOMDIST(k, n, p, 0)$ cho giá trị xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố nhị thức

$$BINOMDIST(k, n, p, 0) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n$$

và

$$BINOMDIST(k, n, p, 1) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

2. $POISSON(k, \lambda, 0)$ cho giá trị xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố Poisson

$$POISSON(k, \lambda, 0) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

và

$$POISSON(k, \lambda, 1) = P(X \le k) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

3. $NORMSDIST(x)$ cho giá trị hàm phân bố chuẩn tại x của đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $u \in N(0, 1)$.

$$NORMSDIST(x) = P(u < x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

4. $NORMSINV(p)$ cho giá trị u_p sao cho $\Phi(u_p) = p$. Nói cách khác lệnh $NORMSINV(p)$ là hàm ngược của hàm phân bố chuẩn $\Phi(x)$.

   Người ta sử dụng lệnh này để tìm phân vị u_α trong thống kê khi giải bài toán tìm khoảng tin cậy cho giá trị trung bình m với độ tin cậy $1 - \alpha$ trường hợp phương sai σ^2 đã biết. Từ tính chất hàm phân bố chuẩn $\Phi(x)$, ta có

$$P(|u| < u_\alpha) = 1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \Leftrightarrow u_\alpha = NORMSINV(1 - \frac{\alpha}{2}).$$

5. $NORMDIST(x, m, \sigma, 1)$ cho giá trị hàm phân bố chuẩn tại x của đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn $X \in N(m, \sigma^2)$ có kì vọng bằng m và phương sai σ^2.

$$NORMDIST(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Lưu ý rằng lệnh $NORMDIST(x, m, \sigma, 0)$ cho giá trị hàm mật độ phân bố chuẩn tại x.

6. $GAMMADIST(x, p, \frac{1}{\alpha}, 0)$ cho giá trị hàm mật độ của phân bố Gamma với hai tham số dương α và p.

$$GAMMADIST(x, p, \frac{1}{\alpha}, 0) = G(x, \alpha, p) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \cdot e^{-\alpha x} x^{p-1}.$$

7. $GAMMADIST(x, p, \frac{1}{\alpha}, 1)$ cho giá trị hàm phân bố Gamma

$$GAMMADIST(x, p, \frac{1}{\alpha}, 1) = P(X < x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_{0}^{x} e^{-\alpha x} x^{p-1} dx.$$

8. $CHIDIST(x, n)$ cho giá trị phía đuôi hàm phân bố χ^2 với n bậc tự do

$$CHIDIST(x, n) = P(X > x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} dx.$$

Lưu ý rằng trong mục 1.3 ta đã biết phân bố χ^2 với n bậc tự do là trường hợp đặc biệt của phân bố Gamma với $\alpha = \frac{1}{2}, p = \frac{n}{2}$.

9. $CHIINV(\alpha, n)$ cho giá trị là phân vị χ^2_α mức α xác định từ hệ thức

$$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$$

được sử dụng trong nhiều bài toán thống kê. Lệnh này thực chất chính là hàm ngược của hàm lệnh $CHIDIST(x, n)$.

10. $FDIST(x, m, n)$ cho giá trị phía đuôi hàm phân bố F với m, n bậc tự do

$$FDIST(x, m, n) = P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1 + \frac{mx}{n})^{\frac{m+n}{2}}}$$

11. $FINV(\alpha, m, n)$ cho giá trị là phân vị F_α mức α xác định từ hệ thức $P(X > F_\alpha) = \alpha$. Lệnh này thực chất chính là hàm ngược của hàm lệnh $FDIST(x, m, n)$.

12. $TDIST(x, n)$ cho giá trị phía đuôi "kép" của hàm phân bố Student với n bậc tự do

$$TDIST(x, n) = P(|X| > x) = 1 - 2 \int_{0}^{x} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt.$$

13. $TINV(\alpha, n)$ cho giá trị là phân vị t_α mức α xác định từ hệ thức $P(|X| > t_\alpha) = \alpha$.
Lưu ý rằng trong mục 1.3 ta đã nhắc tới mật độ của phân bố Student tiến dần đến mật độ của phân bố chuẩn $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *khi n dần ra vô cùng. Suy ra với n đủ lớn*

$$TINV(\alpha, n) \approx NORMSINV(1 - \frac{\alpha}{2}).$$

B. Các lệnh trong MATHEMATICA

1. **NormalDistribution**$[m, \sigma]$ xác định phân bố chuẩn với kì vọng m và độ lệch chuẩn σ.
2. **CDF**$[F, x]$ xác định giá trị hàm phân bố F tại x.
3. **PDF**$[f, x]$ xác định giá trị hàm mật độ f tại x.
4. **StudentTDistribution**$[k]$ xác định phân bố Student với k bậc tự do.
5. **ChiSquareDistribution**$[k]$ xác định phân bố χ^2 với k bậc tự do.
6. **BinomialDistribution**$[n, p]$ xác định phân bố nhị thức với các tham số n và p.
7. **PoissonDistribution**$[\lambda]$ xác định phân bố Poisson với tham số λ.

Phần mềm MATHEMATICA đưa ra rất nhiều phân bố xác suất khác như
Phân bố nhị thức âm: **NegativeBinomialDistribution**
Phân bố đều rời rạc: **DiscreteUniformDistribution**
Phân bố hình học: **GeometricDistribution**
Phân bố F: $FRatioDistribution$.

Chú ý rằng các lệnh trong MATHEMATICA *phân biệt chữ thường, chữ in hoa. Các chú cái đầu luôn phải viết hoa và các tham số được viết trong ngoặc vuông.*

MỤC LỤC