PHƯƠNG PHÁP CARDANO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3 TỔNG QUÁT

Phương trình bậc 3 tổng quát luôn đưa được về dạng $x^3+ax^2+bx+c=0$. Bằng cách đổi biến $x=y+m$ với m thích hợp ($m=-\frac{a}{3}$) ta đưa phương trình trên về

$$y^3+py+q=0. \qquad (*)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của $(*)$ dưới dạng $y=u+v$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$. Như vậy với u,v thỏa mãn

$$\begin{cases} 3uv+p=0 \\ u^3+v^3=-q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3\cdot v^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ u^3+v^3=-q \end{cases} \qquad (**)$$

thì $y=u+v$ là một nghiệm $(*)$. Phương trình $(**)$ có thể giải dễ dàng để được các nghiệm u^3, v^3.

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Từ đó suy ra u,v và

$$y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (***)$$

là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^3-3x+2=0$. Áp dụng công thức trên với $p=-3, q=2$

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{-2}{2}+\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{-2}{2}-\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-1}=-2$$

là một nghiệm của phương trình đã cho. Từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm còn lại $x_2=x_3=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $y^3-13y+12=0$.

Áp dụng phương pháp trên ta giải hệ $\begin{cases} 3uv = 13 \\ u^3+v^3=-12. \end{cases}$ Chú ý rằng biểu thức

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{12}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{3}\right)^3<0$$

nên các nghiệm

$$\begin{cases} 3uv &= 13 \\ u^3+v^3 &= -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 &= -6-\frac{35\sqrt{3}}{9}i \\ v^3 &= -6+\frac{35\sqrt{3}}{9}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u &= \frac{9}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{6}i \\ v &= \frac{9}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{6}i \end{cases}$$

là các số phức. Vậy $y_1=u+v=3$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Suy ra các nghiệm còn lại $y_2=1$ và $y_3=-4$.

Gerolamo Cardano là nhà toán học Ý đầu thế kỉ XVI. Phương pháp giải phương trình bậc 3 nêu trên, mặc dù có tranh chấp bản quyền với Tartaglia, được lịch sử ghi nhận thuộc về ông. Cardano đã dành nhiều thời gian nghiên cứu trường hợp $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ *và cũng phần nào đã linh cảm thấy sự tồn tại của số ảo, số phức. Tuy nhiên ông không có kết quả gì đáng kể trong việc tìm hiểu các tính chất của số phức.*

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TỔNG QUÁT

Phương trình bậc 4 tổng quát có dạng $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{ax}{2})^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d$. Cộng 2 vế của phương trình trên với cùng một biểu thức $(x^2 + \frac{ax}{2})y + \frac{y^2}{4}$ để đưa vế trái thành bình phương của một biểu thức bậc 2 theo x:

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 &= \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \\ &= \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + (\frac{ay}{2} - c)x + \frac{y^2}{4} - d \quad (1)\end{aligned}$$

Bây giờ ta tìm y để vế phải của (1) cũng là bình phương một nhị thức (theo biến x). Muốn vậy

$$\Delta = \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0. \quad (2)$$

Đây là phương trình bậc 3 đối với y (ta đã biết cách giải ở trên). Với một giá trị y bất kì thỏa mãn (2), phương trình (1) có dạng

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \pm(mx + n)^2.$$

Việc giải tiếp nó đưa về giải các phương trình bậc 2:

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = mx + n \qquad \text{và} \qquad x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = -(mx + n)$$

hoặc

$$\begin{cases} x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2} = 0 \\ mx + n = 0. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0.$$

Cộng 2 vế của phương trình trên với $(x^2 - x)y + \frac{y^2}{4}$ và đưa phương trình về dạng

$$(x^2 - x + \frac{y}{2})^2 = (y + 8)x^2 - (y + 8)x + \frac{y^2}{4} - 12. \quad (3)$$

Bây giờ ta tìm y để vế phải của đẳng thức (3) cũng là bình phương một nhị thức (theo biến x) bằng việc cho biệt thức của nó bằng 0

$$\Delta = (y + 8)^2 - 4(y + 8)(\frac{y^2}{4} - 12) = (y + 8)(y + 8 - y^2 + 48) = -(y + 8)(y - 8)(y + 7) = 0.$$

Chọn $y = -7$ (hoặc cũng có thể chọn giá trị khác, $y = 8$ chẳng hạn) phương trình (3) có dạng

$$(x^2 - x - \frac{7}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2 \quad \text{hay} \quad (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_{3,4} = \pm 2$.