

## Bài toán vượt qua sa mạc

Người ta muốn vượt qua sa mạc bằng ô tô, nhưng mỗi lần đổ đầy xăng, xe chỉ đi được quãng đường ngắn hơn nhiều lần so với chiều rộng của sa mạc. Nhiên liệu chỉ có thể lấy ở rìa sa mạc, giữa sa mạc không có xăng, tuy nhiên ta có thể lập các trạm lưu trữ xăng tạm thời giữa sa mạc. Có cách nào để vượt qua sa mạc bằng chiếc ô tô này?

### Lời giải

Đây là bài toán nổi tiếng. Nó có lời giải tối ưu như sau.

Giả sử mỗi lần nạp nhiên liệu, xe ô tô tối đa có thể nạp 1 đơn vị xăng ( $1x$ ) và với số nhiên liệu đó xe đi được 1 đơn vị khoảng cách ( $1s$ ). (Chẳng hạn 1 đơn vị xăng  $-1x-$  là 10 lít và 1 đơn vị khoảng cách  $-1s-$  là 200km). Bằng việc giới thiệu chương trình vượt sa mạc như dưới đây ta sẽ chỉ ra cách mà ô tô sử dụng  $n$  đơn vị xăng và đi sâu vào sa mạc một quãng đường

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \quad (*).$$

Thật vậy, ban đầu xe nạp 1 đơn vị xăng, đi sâu vào sa mạc  $\frac{1}{3}s$  rồi dừng lại lập trạm lưu trữ xăng. Xe nạp  $\frac{1}{3}x$  vào trạm đó và quay lại vị trí xuất phát ban đầu. Bây giờ xe nạp 1 đơn vị xăng thứ hai, rồi đi tiếp đến trạm lưu trữ và có thể lấy hết số lưu trữ ở đây rồi đi tiếp vào sa mạc 1 đơn vị khoảng cách.

Như thế với 2 đơn vị xăng, xe có thể đi sâu vào sa mạc một khoảng cách là  $(1 + \frac{1}{3})s$ .

Ta sẽ áp dụng đúng phương pháp vừa rồi cho đơn vị xăng thứ ba. Xe đi vào sa mạc  $\frac{1}{5}s$  rồi dừng lại lập trạm lưu trữ xăng, nạp  $\frac{2}{5}$  đơn vị xăng vào trạm đó và quay lại vị trí xuất phát ban đầu. Tiếp tục nạp 1 đơn vị xăng thứ hai, rồi đi đến trạm lưu trữ, để lại đó  $\frac{2}{5}$  đơn vị xăng rồi quay lại. Như thế trạm lưu trữ này có  $\frac{6}{5}$  đơn vị xăng. Khi xe quay lại rìa và nạp đơn vị xăng thứ 3, rồi đi đến trạm lưu trữ thì tại thời điểm này số xăng (tại trạm lưu trữ cộng với số còn lại trên xe) vừa đúng bằng 2 đơn vị ( $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2s$ ). Với 2 đơn vị xăng, ở trên ta đã chỉ ra xe đi tiếp được  $(1 + \frac{1}{3})s$ .

Như vậy với 3 đơn vị xăng, xe có thể đi sâu vào sa mạc  $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})s$ .

Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh khẳng định (\*) đã nêu ở trên.

Xe xuất phát vào sa mạc  $\frac{1}{2n+1}s$  rồi dừng lại lập trạm lưu trữ xăng, nạp  $\frac{2n-1}{2n+1}$  đơn vị xăng vào trạm đó và quay lại vị trí xuất phát ban đầu. Lập lại thêm  $n-1$  lần như thế nữa, đến lần nạp xăng thứ  $n+1$ , trạm lưu trữ có  $\frac{n(2n-1)}{2n+1}$  đơn vị xăng cùng với số xăng hiện còn trên xe  $\frac{2n}{2n+1}$  tại thời điểm xe vừa tới trạm. Với tổng số xăng tại đây  $\frac{n(2n-1)}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} = n$ , sử dụng giả thiết quy nạp từ đây xe có thể đi sâu tiếp vào sa mạc quãng đường (\*). Nói cách khác với  $n+1$  đơn vị xăng xe có thể vào sâu một quãng đường

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}, \quad \text{đ.p.c.m.}$$

Mặt khác do chuỗi  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots$  phân kì, tổng riêng  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} > K$  với  $K$  tùy ý và với  $n = n_0$  thích hợp. Chẳng hạn nếu  $K$  là chiều rộng của sa mạc thì với chương trình thiết kế nêu trên, ta dùng  $n_0$  đơn vị xăng là đủ để vượt qua sa mạc bằng chiếc ô tô đó.

Người ta cũng đã chỉ ra rằng với cùng một lượng xăng, không có phương pháp nào để xe đi sâu vào sa mạc một quãng đường dài hơn so với quãng đường mà phương pháp trên đã giới thiệu.

## Bài toán con ruồi (a legyes feladat)

Hai đoàn tàu hỏa cách nhau 200km chạy ngược chiều nhau với tốc độ 50km/h. Một con ruồi bay nhanh hơn với tốc độ 75km/h từ đầu tàu này về phía đầu tàu kia rồi quay ngược lại. Nó cứ bay qua bay lại mãi cho đến khi nó bị 2 đoàn tàu kẹp chết. Hỏi tổng quãng đường mà con ruồi đã bay?

### A legyes feladat *(Nguyên bản tiếng Hung)*

Két vonat 200 mérföld távolságról indulva megy egymás felé, 50 mérföldes óránkénti sebességgel. Elindul egy légy az egyiknek az elejéről, és oda-vissza repül köztük 75 mérföldes óránkénti sebességgel. Ezt egészen addig folytatja, amíg halálra nem zúzza a két összeütköző vonat. Összesen mekkora távolságot repült be a légy?