TRƯỜNG ĐHXD | **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ** | **ĐỀ SỐ 1 K57**
BỘ MÔN TOÁN | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.
b) Tìm hạng của hệ các véc tơ cột của ma trận A.

Câu 2 (2.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x - 2y + z, x - y, -2x + 2y + z)$.

a) Tìm các không gian nhân, không gian ảnh của f và chỉ ra cơ sở của các không gian đó.
b) Chứng minh $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$. Đẳng thức $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ có đúng không? Tại sao?

Câu 3 (2.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận của f trong cơ sở $\mathbf{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Câu 4 (2.0 đ) Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng của $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ và $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Hãy tìm véc tơ trực giao với mọi véc tơ trong mặt phẳng $2x - y + z = 0$. Bằng phương pháp Gram-Schmidt hãy trực chuẩn hóa hệ véc tơ $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Câu 5 (2.0 đ) Chứng minh $3x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz = 0$ là phương trình mặt trụ. Hãy xác định đường chuẩn và véc tơ chỉ phương của đường sinh của mặt trụ đó.

TRƯỜNG ĐHXD | **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ** | **ĐỀ SỐ 2 K57**
BỘ MÔN TOÁN | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.
b) Tìm hạng của hệ các véc tơ hàng của ma trận A.

Câu 2 (2.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z)$.

a) Tìm các không gian nhân, không gian ảnh của f và chỉ ra cơ sở của các không gian đó.
b) Chứng minh $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$. Đẳng thức $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ có đúng không? Tại sao?

Câu 3 (2.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận của f trong cơ sở $\mathbf{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Câu 4 (2.0 đ) Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng của $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ và $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

Hãy tìm véc tơ trực giao với mọi véc tơ trong mặt phẳng $x + y - z = 0$. Bằng phương pháp Gram-Schmidt hãy trực chuẩn hóa hệ véc tơ $\{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Câu 5 (2.0 đ) Chứng minh $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 2xz - 4yz = 0$ là phương trình mặt trụ. Hãy xác định đường chuẩn và véc tơ chỉ phương của đường sinh của mặt trụ đó.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 3 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 6 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm hạng của ma trận A.

b) Chứng minh nghiệm của hệ phương trình $AX = \mathbf{0}$ là không gian véc tơ. Tìm chiều của không gian đó.

Câu 2 (3.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y + z, -2x + 2y)$.

a) Tìm không gian nhân của phép biến đổi tuyến tính f.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f có dạng chéo trong cơ sở đó. Hãy viết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở vừa tìm được.

c) Viết ma trận của phép biến đổi tuyến tính $h = f \circ f$ trong cơ sở chính tắc và tính đa thức đặc trưng của nó.

Câu 3 (3.0 đ) Xét dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^2$: $\omega(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$.

a) Chứng minh ω là dạng toàn phương xác định dương.

b) Xác định dạng song tuyến tính đối xứng liên kết với ω. Chứng minh đó là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

c) Tìm tập hợp các véc tơ trực giao với $\mathbf{e} = (1, 0)$ theo tích vô hướng nói trên.

Câu 4 (2.0 đ) Đưa dạng toàn phương $\omega(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6y^2 - 4yz + 3z^2$ về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange. Hãy chỉ ra phép biến đổi và chứng tỏ rằng $\omega(x, y, z)$ là dạng toàn phương xác định dương.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 4 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Tìm hạng của ma trận A.

b) Chứng minh nghiệm của hệ phương trình $AX = \mathbf{0}$ là không gian véc tơ. Tìm chiều của không gian đó.

Câu 2 (3.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (4x + 6y - 6z, x + 3y - z, 4x + 8y - 6z)$.

a) Tìm không gian nhân của phép biến đổi tuyến tính f.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f có dạng chéo trong cơ sở đó. Hãy viết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở vừa tìm được.

c) Viết ma trận của phép biến đổi tuyến tính $h = f \circ f$ trong cơ sở chính tắc và tính đa thức đặc trưng của nó.

Câu 3 (3.0 đ) Xét dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^2$: $\omega(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$.

a) Chứng minh ω là dạng toàn phương xác định dương.

b) Xác định dạng song tuyến tính đối xứng liên kết với ω. Chứng minh đó là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

c) Tìm tập hợp các véc tơ trực giao với $\mathbf{e} = (0, 1)$ theo tích vô hướng nói trên.

Câu 4 (2.0 đ) Đưa dạng toàn phương $\omega(x, y, z) = x^2 - 4xy + 2y^2 - 8yz - 9z^2$ về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange. Hãy chỉ ra phép biến đổi và chứng tỏ rằng $\omega(x, y, z)$ là dạng toàn phương không xác định dấu.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 5 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - mx_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + mx_2 + mx_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Câu 2 (2.0 đ) Trong không gian các ma trận vuông cấp 2, $M_{2x2}(\mathbb{R})$ cho 4 vecto:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm số chiều và cơ sở của không gian L sinh bởi 4 phần tử A_1, A_2, A_3, A_4?

b) Ma trận $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ có thuộc không gian L ở trên không? Nếu có hãy tìm tọa độ của A trong cơ sở tìm được ở trên.

Câu 3 (3.0 đ) Cho biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc được xác định như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3; x_1 - x_3; -x_1 + 3x_2 - 5x_3).$$

a) Xác định số chiều và tìm một cơ sở của Kerf và Imf?

b) Tìm số chiều và cơ sở của các không gian $Kerf \cap Imf, Kerf + Imf$?

c) Giả sử V là một không gian vecto con sao cho $V \oplus Kerf = \mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng ảnh $f(V) = imf$. Hãy chỉ ra một V như thế.

Câu 4 (3.0 đ) Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$, $H(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3$

a) Tìm cơ sở trực chuẩn và phép biến đổi trực giao để đưa H về dạng chính tắc? Phân loại dạng toàn phương H?

b) Tìm vecto $x = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn $\|x\| = 1$ sao cho $H(x_1, x_2, x_3)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Hỏi mặt cong có phương trình $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ là mặt gì?

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 6 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - mx_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + mx_3 + mx_4 = 0. \end{cases}$

Câu 2 (2.0 đ) Trong không gian các ma trận vuông cấp 2, $M_{2x2}(\mathbb{R})$ cho 4 vecto:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm số chiều và cơ sở của không gian L sinh bởi 4 phần tử A_1, A_2, A_3, A_4?

b) Ma trận $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ có thuộc không gian L ở trên không? Nếu có hãy tìm tọa độ của A trong cơ sở tìm được ở trên.

Câu 3 (3.0 đ) Cho biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc được xác định như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_2 + x_3; 3x_1 + x_3).$$

a) Xác định số chiều và tìm một cơ sở của Kerf và Imf?

b) Tìm số chiều và cơ sở của các không gian $Kerf \cap Imf, Kerf + Imf$?

c) Giả sử V là một không gian vecto con sao cho $V \oplus Kerf = \mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng ảnh $f(V) = imf$. Hãy chỉ ra một V như thế.

Câu 4 (3.0 đ) Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$, $H(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_1x_3$.

a) Tìm cơ sở trực chuẩn và phép biến đổi trực giao để đưa H về dạng chính tắc? Phân loại dạng toàn phương H?

b) Tìm vecto $x = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn $\|x\| = 1$ sao cho $H(x_1, x_2, x_3)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Hỏi mặt cong có phương trình $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ là mặt gì?

TRƯỜNG ĐHXD	ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ	ĐỀ SỐ 7 K57
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.5 đ) Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u_1 = (1;1;1;1), u_2 = (1;1;-1;-1), v_1 = (2;0;-2;-2), v_2 = (1;0;0;1)$. Kí hiệu $U = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}, V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

a) Chứng minh U, V lần lượt là các không gian con nhỏ nhất của $\mathbb{R}^4$ chứa u_1, u_2 và v_1, v_2. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của U và V.

b) Chứng minh $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

Câu 2 (4.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_2[x]$, biết ma trận của f trong cơ sở $S = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Xác định $f(a + bx + cx^2)$? Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc $S' = \{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2[x]$.

b) Tìm không gian nhân $\ker f$. ánh xạ f có song ánh không? Trường hợp f song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược f^{-1}.

c) Giả thiết $\mathcal{P}_2[x]$ là không gian Euclide và S là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_2[x]$. Cơ sở chính tắc S' của $\mathcal{P}_2[x]$ có phải là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_2[x]$ không? Trường hợp S' không phải là cơ sở trực chuẩn, hãy trực chuẩn hóa Gramme-Schmidt cơ sở S'.

Câu 3 (3.5 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận A.

b) Tìm các giá trị riêng và các vecto riêng của ma trận $B = A^6 + A + I_3$.

c) Đưa phương trình mặt bậc hai $(x\ y\ z)A(x\ y\ z)^T = 0$ về dạng chính tắc. Nhận dạng mặt cong đó.

TRƯỜNG ĐHXD	ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ	ĐỀ SỐ 8 K57
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.5 đ) Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u_1 = (1;1;2;0), u_2 = (2;0;-1;-1), v_1 = (1;-1;0;0), v_2 = (0;0;1;-1)$. Kí hiệu $U = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}, V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

a) Chứng minh U, V lần lượt là các không gian con nhỏ nhất của $\mathbb{R}^4$ chứa u_1, u_2 và v_1, v_2. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của U và V.

b) Chứng minh $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

Câu 2 (4.0 đ) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_2[x]$, biết ma trận của f trong cơ sở $S = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Xác định $f(a + bx + cx^2)$? Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2[x]$.

b) Tìm không gian nhân $\ker f$. ánh xạ f có song ánh không? Trường hợp f song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược f^{-1}.

c) Giả thiết $\mathcal{P}_2[x]$ là không gian Euclide và S là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_2[x]$. Cơ sở chính tắc S' của $\mathcal{P}_2[x]$ có phải là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_2[x]$ không? Trường hợp S' không phải là cơ sở trực chuẩn, hãy trực chuẩn hóa Gramme-Schmidt cơ sở S'.

Câu 3 (3.5 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm trị riêng, véc tơ riêng của ma trận A.

b) Tìm các giá trị riêng và các vecto riêng của ma trận $B = A^6 + A + I_3$.

c) Đưa phương trình mặt bậc hai $(x\ y\ z)A(x\ y\ z)^T = 1$ về dạng chính tắc. Nhận dạng mặt cong đó.

TRƯỜNG ĐHXD **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ** **ĐỀ SỐ 9 K57**

BỘ MÔN TOÁN *Thời gian làm bài 90 phút* *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.5 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a) Tìm a để ma trận A khả nghịch. Trong trường hợp này hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

b) Trong trường hợp A suy biến hãy tìm tập các vecto trong $\mathbb{R}^3$ vuông góc với mọi nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian đó.

Câu 2 (3.5 đ) Cho $\mathcal{P}_2[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $V = \{p \in P_2[x] | p(0) = 0, p(1) = 0$ và ánh xạ

$$f : \mathcal{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3,\ f(p) = (p(-1); p(0); p(-1)).$$

a) Chứng minh rằng V là một không gian vecto con của $\mathcal{P}_2[x]$. Tìm một cơ sở và số chiều.

b) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2[x]$ và của $\mathbb{R}^3$.

c) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $kerf$ và của $f(V)$.

Câu 3 (3.0 đ) Cho dạng toàn phương $H(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$ trên $\mathbb{R}^3$.

a) Hãy viết ma trận A của H trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Hãy đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phép đổi tọa độ trực chuẩn. Chỉ rõ phép biến đổi đó.

c) Tìm a sao cho dạng toàn phương $H'(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + az^2 - 2xy - 2xz + 2yz$ là không xác định dấu.

Câu 4 (1.0 đ) Đưa đường bậc 2 sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi Lagrange và nhận dạng:

$$x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x - 2y - 1 = 0.$$

TRƯỜNG ĐHXD **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ** **ĐỀ SỐ 10 K57**

BỘ MÔN TOÁN *Thời gian làm bài 90 phút* *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.5 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm a để ma trận A khả nghịch. Trong trường hợp này hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

b) Trong trường hợp A suy biến hãy tìm tập các vecto trong $\mathbb{R}^3$ vuông góc với mọi nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian đó.

Câu 2 (3.5 đ) Cho $\mathcal{P}_2[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $V = \{p \in P_2[x] | p(0) = 0, p(-2) = 0$ và ánh xạ

$$f : \mathcal{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3,\ f(p) = (p(1); 2p(0); p(1)).$$

a) Chứng minh rằng V là một không gian vecto con của $\mathcal{P}_2[x]$. Tìm một cơ sở và số chiều.

b) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2[x]$ và của $\mathbb{R}^3$.

c) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $kerf$ và của $f(V)$.

Câu 3 (3.0 đ) Cho dạng toàn phương $H(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$ trên $\mathbb{R}^3$.

a) Hãy viết ma trận A của H trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Hãy đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phép đổi tọa độ trực chuẩn. Chỉ rõ phép biến đổi đó.

c) Tìm m sao cho dạng toàn phương $H'(x, y, z) = mx^2 + my^2 + mz^2 - 2xy - 2xz + 2yz$ là không xác định dấu.

Câu 4 (1.0 đ) Đưa đường bậc 2 sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi Lagrange và nhận dạng:

$$4x^2 - 3y^2 + 4xy - 4x + 2y - 4 = 0.$$

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 11 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình $AX = B$.

b) Cho ma trận dòng $Y = (y_1 \quad y_2)$ và ma trận dòng C trong $\mathbb{R}^4$. Hỏi phương trình $YB = C$ có nghiệm với mọi C không? Vì sao?

Câu 2 (3.0 đ) Cho f phép biến đổi tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^3$ nhận $u = (1; 0; 1), v = (-1; 1; 1)$ là 2 vecto riêng ứng với cùng một giá trị riêng $\lambda = 1$ và giá trị riêng còn lại là $\lambda = 2$.

a) Từ tính chất f là phép biến đổi đối xứng $< x, f(y) >=< f(x), y >$ hãy chứng minh rằng: 2 vecto riêng ứng với 2 giá trị riêng phân biệt là trực giao.

b) Tìm một vectơ riêng ứng với giá trị riêng còn lại của f.

c) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3 (2.0 đ) Cho tích vô hướng $< (x_1, y_1); (x_2, y_2) >= 3x_1x_2 + y_1y_2$ trên $\mathbb{R}^2$.

a) Hãy trực giao hóa Gramme-Schmidt cơ sở hệ $\{v_1 = (1; 1), v_2 = (2; -2)\}$.

b) Tìm tập các vecto hợp với vecto $u = (1; 1)$ một góc 60^0. Tìm một cơ sở và chiều của nó.

Câu 4 (3.0 đ) Cho ma trận của dạng toàn phương H trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Viết biểu thức tọa độ của H trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép đổi tọa độ trực chuẩn và nhận dạng.

c) Gọi tên mặt bậc 2 dạng $(x \quad y \quad z)A(x \quad y \quad z)^T + (4 \quad 1 \quad 1)(x \quad y \quad z)^T + 13 = 0$.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 12 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2.0 đ) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình $AX = B$.

b) Cho ma trận dòng $Y = (y_1 \quad y_2)$ và ma trận dòng C trong $\mathbb{R}^3$. Hỏi phương trình $YB = C$ có nghiệm với mọi C không? Vì sao?

Câu 2 (3.0 đ) Cho f phép biến đổi tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^3$ nhận $u = (2; 0; 1), v = (-2; 2; 1)$ là 2 vecto riêng ứng với cùng một giá trị riêng $\lambda = 2$ và giá trị riêng còn lại là $\lambda = 1$.

a) Từ tính chất f là phép biến đổi đối xứng $< x, f(y) >=< f(x), y >$ hãy chứng minh rằng: 2 vecto riêng ứng với 2 giá trị riêng phân biệt là trực giao.

b) Tìm một vectơ riêng ứng với giá trị riêng còn lại của f.

c) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3 (2.0 đ) Cho tích vô hướng $< (x_1, y_1); (x_2, y_2) >= x_1x_2 + 3y_1y_2$ trên $\mathbb{R}^2$.

a) Hãy trực chuẩn hóa Gramme-Schmidt cơ sở hệ $\{v_1 = (1; 1), v_2 = (-2; 2)\}$.

b) Tìm không gian các vecto hợp với vecto $u = (-1; 1)$ một góc 60^0. Tìm một cơ sở và chiều của nó.

Câu 4 (3.0 đ) Cho ma trận của dạng toàn phương H trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Viết biểu thức tọa độ của H trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép đổi tọa độ trực chuẩn và nhận dạng.

c) Gọi tên mặt bậc 2 dạng $(x \quad y \quad z)A(x \quad y \quad z)^T + (1 \quad -2 \quad -2)(x \quad y \quad z)^T + 10 = 0$.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 13 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (3.0 đ) Kí hiệu $\mathcal{M}_{2x2}$ là không gian vecto các ma trận vuông cấp 2 thực với 2 phép toán thông thường.

a) Hãy chỉ ra một cơ sở của $\mathcal{M}_{2x2}$.

b) Chứng minh rằng tập các ma trận đối xứng $V = \{A \in \mathcal{M}_{2x2} | A = A^T\}$ là không gian vecto con của $\mathcal{M}_{2x2}$. Tìm một cơ sở và số chiều của V.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X đối xứng mà thỏa mãn phương trình $AX = B$.

Câu 2 (3.0 đ) Cho f phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Hãy tìm một cơ sở, số chiều của imf và $kerf$.

b) Đặt $V = imf$. Tìm số chiều ảnh $f(V)$ của V.

c) Tìm tổng $W = imf + kerf$ và chứng minh rằng $f(W) = f(V)$.

Câu 3 (2.0 đ) Cho $\mathcal{P}_2[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Chứng minh rằng $< p, q >= aa_1 + bb_1 + 2cc_1$ với $p(x) = a + bx + cx^2, q(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{P}_2[x]$.

b) Tìm tập các vecto trực giao với vecto $p(x) = 1 + 2x$. Chứng tỏ đó là không gian vecto con. Tìm cơ sở và số chiều của nó.

Câu 4 (2.0 đ) Cho dạng toàn phương $H(x, y) = 3x^2 + 6y^2 + 4xy$ trên $\mathbb{R}^2$.

a) Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép đổi tọa độ trực chuẩn. Nhận dạng và chỉ rõ phép biến đổi đó.

c) Chứng tỏ đường bậc hai $x^2 + 2y^2 - 4xy + 2\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y + 7 = 0$ là một elip. Tìm các bán trục của nó.

TRƯỜNG ĐHXD	**ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ**	**ĐỀ SỐ 14 K57**
BỘ MÔN TOÁN	*Thời gian làm bài 90 phút*	*Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (3.0 đ) Kí hiệu $\mathcal{M}_{2x2}$ là không gian vecto các ma trận vuông cấp 2 thực với 2 phép toán thông thường.

a) Hãy chỉ ra một cơ sở của $\mathcal{M}_{2x2}$.

b) Chứng minh rằng tập các ma trận phản đối xứng $V = \{A \in \mathcal{M}_{2x2} | A^T = -A\}$ là không gian vecto con của $\mathcal{M}_{2x2}$. Tìm một cơ sở và số chiều của V.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X phản đối xứng mà thỏa mãn phương trình $AX = B$.

Câu 2 (3.0 đ) Cho f phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Hãy tìm một cơ sở, số chiều của imf và $kerf$.

b) Đặt $V = imf$. Tìm số chiều ảnh $f(V)$ của V.

c) Tìm tổng $W = imf + kerf$ và chứng minh rằng $f(W) = f(V)$.

Câu 3 (2.0 đ) Cho $\mathcal{P}_2[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Chứng minh rằng $< p, q >= 2aa_1 + bb_1 + cc_1$ với $p(x) = a + bx + cx^2, q(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{P}_2[x]$.

b) Tìm tập các vecto trực giao với vecto $p(x) = 1 + x^2$. Chứng tỏ đó là không gian vecto con. Tìm cơ sở và số chiều của nó.

Câu 4 (2.0 đ) Cho dạng toàn phương $H(x, y) = -5x^2 - 2y^2 + 4xy$ trên $\mathbb{R}^2$.

a) Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép đổi tọa độ trực chuẩn, nhận dạng và chỉ rõ phép biến đổi đó.

c) Chứng tỏ đường bậc hai $-5x^2 - 2y^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 24 = 0$ là một elip. Tìm các bán trục của nó.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 1 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)

a) (1,5 đ) Ma trận nghịch đảo của ma trận A : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) (0,5 đ) Do A khả nghịch nên hạng của hệ véc tơ cột của ma trận A bằng 3.

Câu 2 (2,0 đ)

a) (1,5 đ) Không gian ảnh $\{(x, y, z) : \; x - 4y - z = 0\}$ và không gian nhân $C(1, 1, 0), \; C \in \mathbb{R}$.

b) (0,5 đ) Đẳng thức $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ đúng.

Câu 3 (2,0 đ) Đa thức đặc trưng của f : $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$.

(1,0 đ) Với GTR $\lambda = 1$ véc tơ riêng có tọa độ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ trong cơ sở đã cho $\mathbf{B} = \{(1, 1), \; (1, 2)\}$. Suy ra VTR $\mathbf{a} = (1, 1) - 2(1, 2) = (-1, -3)$ hay $C(1, 3)$.

(1,0 đ) Với GTR $\lambda = 6$ véc tơ riêng có tọa độ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra VTR $\mathbf{b} = (1, 1) + 3(1, 2) = (4, 7)$.

Có thể tính Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $A' = T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$, *suy ra các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.*

Câu 4 (2,0 đ)

(1,0 đ) Lấy 2 véc tơ bất kì $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ thuộc mặt phẳng $2x - y + z = 0$. Véc tơ trực giao với $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ là véc rơ cần tìm. Nó thỏa mãn hệ phương trình $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0, \; \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Suy ra $\mathbf{x} = C(1, 0, 1)$.

(1,0 đ) Bằng phương pháp Gram-Schmidt từ hệ $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ ta được hệ trực chuẩn

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 2, 0), \; \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, 2), \; \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1)\}.$$

Câu 5 (2,0 đ) Ma trận dạng toàn phương $\omega = 3x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz$ là $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = (6 - \lambda)(\lambda - 3)\lambda$ có nghiệm $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$.

Chọn véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = 6, \; \mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$, véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 3, \; \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$. Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3 = 0, \; \mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$. Ba véc tơ này lập thành hệ cơ sở trực chuẩn.

(1,0 đ) Phép đổi biến trực giao $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ đưa ω về dạng chính tắc $\omega = 6x'^2 + 3y'^2$ và do vậy mặt đã cho là mặt trụ: $2x'^2 + y'^2 = 0$. Đường chuẩn là elip và đường sinh có phương là véc tơ $\mathbf{f}_3 = (2, -1, 2)$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 2 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)

a) (1,5 đ) Ma trận nghịch đảo của ma trận A : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) (0,5 đ) Do A khả nghịch nên hạng của hệ véc tơ hàng của ma trận A bằng 3.

Câu 2 (2,0 đ)

a) (1,5 đ) Không gian nhân $\{(x, y, z) : \; x + 2y - z = 0\}$ và không gian ảnh $C(1, 2, -1), \; C \in \mathbb{R}$.

b) (0,5 đ) Đẳng thức $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ đúng.

Câu 3 (2,0 đ) Đa thức đặc trưng của f : $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

(1,0 đ) Với GTR $\lambda = 2$ véc tơ riêng có tọa độ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ trong cơ sở đã cho $\mathbf{B} = \{(1, 1), \; (1, 2)\}$. Suy ra VTR $\mathbf{a} = (1, 1) + 2(1, 2) = (3, 5)$ hay $C(3, 5)$.

(1,0 đ) Với GTR $\lambda = 3$ véc tơ riêng có tọa độ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra VTR $\mathbf{b} = 2(1, 1) + 3(1, 2) = (5, 8)$.

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $A' = T \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & -15 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$.

Câu 4 (2,0 đ)
(1,0 đ) Lấy 2 véc tơ bất kì $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ thuộc mặt phẳng $x + y - z = 0$. Véc tơ trực giao với $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ là véc rơ cần tìm. Nó thỏa mãn hệ phương trình $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0,\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Suy ra $\mathbf{x} = C(1, 0, -1)$.
(1,0 đ) Bằng phương pháp Gram-Schmidt từ hệ $\{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ ta được hệ trực chuẩn

$$\{(1, -1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)\}.$$

Câu 5 (2,0 đ) Ma trận dạng toàn phương $\omega = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$ là $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 6)\lambda$ có nghiệm $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$.
Chọn véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = 2,\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 6,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3 = 0,\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$. Ba véc tơ này lập thành hệ cơ sở trực chuẩn.
(1,0 đ) Phép đổi biến trực giao với các cột là 3 véc tơ trên đưa ω về dạng chính tắc $\omega = 2x'^2 + 6y'^2$ và do vậy mặt đã cho là mặt trụ: $x'^2 + 3y'^2 = 0$. Đường chuẩn là elip và đường sinh có phương là véc tơ $\mathbf{f}_3 = (-1, 2, 1)$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 3 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Bằng các phép biến đổi sơ cấp có thể chỉ ra $r(A) = 2$.

b) (1,0 đ) Chiều của không gian nghiệm bằng $\dim\ker A = 4 - r(A) = 2$.

Câu 2 (3,0 đ)

a) (0,5 đ) Không gian nhân của f : $\ker f = \{C(1,1,0)\}$.

b) (1,5 đ) Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Suy ra đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \lambda(4 - \lambda^2)$.

Các VTR là các cột của ma trận chuyển cơ sở cần tìm $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) (1,0 đ) Ma trận của $f \circ f$ trong cơ sở chính tắc $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng $\lambda(4-\lambda)^2$.

Câu 3 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Chứng minh ω là dạng toàn phương xác định dương.

b) (1,0 đ) Tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$.

c) (1,0 đ) Các véc tơ trực giao với $\mathbf{e} = (1,0) \perp C(1,2)$ trong đó $C \in \mathbb{R}$.

Câu 4 (2,0 đ) Dạng toàn phương $\omega(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6y^2 - 4yz + 3z^2$.

(1,5 đ) Với phép biến đổi $x = u - 2v - 2t, y = v + t, z = t$ ta có $\omega = u^2 + 2v^2 + t^2$.

(0,5 đ) Chứng minh ω xác định dương.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 4 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Bằng các phép biến đổi sơ cấp có thể chỉ ra $r(A) = 2$.

b) (1,0 đ) Chiều của không gian nghiệm bằng $\dim\ker A = 4 - r(A) = 2$.

Câu 2 (3,0 đ)

a) (0,5 đ) Không gian nhân của f : $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

b) (1,5 đ) Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. Suy ra đa thức đặc trưng $P(\lambda) = (\lambda - 1)(4 - \lambda^2)$.

Các VTR là các cột của ma trận chuyển cơ sở cần tìm $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) (1,0 đ) Ma trận của $f \circ f$ trong cơ sở chính tắc $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng $(\lambda - 1)(4-\lambda)^2$.

Câu 3 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Chứng minh ω là dạng toàn phương xác định dương.

b) (1,0 đ) Tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$.

c) (1,0 đ) Các véc tơ trực giao với $\mathbf{e} = (0,1) \perp C(3,-1)$ trong đó $C \in \mathbb{R}$.

Câu 4 (2,0 đ) Dạng toàn phương $\omega(x,y,z) = x^2 - 4xy + 2y^2 - 8yz - 9z^2$.

(1,5 đ) Với phép biến đổi $x = u + 2v - 4t, y = v - 2t, z = t$ ta có $\omega = u^2 - 2v^2 - t^2$.

(0,5 đ) Chứng minh ω không xác định dấu.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 5 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ) Biến đổi $A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -m-2 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-7m+8 & 0 \end{pmatrix}$ (1,0 đ).

(1,0 đ) Với $m = 1$ thì $\begin{cases} x_1 = -t-k \\ x_2 = x_3 = t \\ x_4 = k \end{cases}$. Với $m = -8$ thì $\begin{cases} x_1 = -4t-k \\ x_2 = -2k \\ x_3 = t, x_4 = k \end{cases}$. Với $m \neq 1; -8$ thì $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = x_3 = 0 \\ x_4 = -t \end{cases}$.

Câu 2 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Cơ sở của L là $A = \{A_1, A_2\}$, chiều là 2.

b) (1,0 đ) $A_5 \in L$ và tọa độ $[A_5]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Câu 3 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) $\dim kerf = 1$ cơ sở là $\{v_1 = (1;2;1)\}$; $\dim imf = 2$ cơ sở là $\{v_2 = (1;2;3); v_3 = (-1;1;0)\}$

b) (1,0 đ) Hạng $r(v_1; v_2; v_3) = 2$ nên $imf + kerf = imf$ và $Kerf \cap Imf = Kerf$.

c) (1,0 đ) Ta phân tích $x = u + v \in \mathbb{R}^3 = V \oplus Kerf$. Suy ra $imf \ni f(x) = f(v) \in f(V)$. Có thể lấy $V = \{e_1, e_2\}$.

Câu 4 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = -(2+\lambda)(\lambda-7)^2$ có nghiệm $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 7$. Chọn véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$; $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,4,1)$. Ba véc tơ này lập thành hệ cơ sở trực chuẩn. Dạng chính tắc là $H(X,Y,Z) = -2X^2 + 7Y^2 + 7Z^2$, không xác định dấu.

b) (1,0 đ) $H(x,y,z) = H(X,Y,Z) = -2X^2 + 7Y^2 + 7Z^2 = -9X^2 + 7(X^2+Y^2+Z^2) = -9X^2 + 7$. Suy ra $-2 \leqslant H(x,y,z) = H(X,Y,Z) \leqslant 7$. Suy ra $H_{min} = -2$ tại $X = 1, Y = Z = 0$.

Ta có $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

c) (1,0 đ) Mặt nón.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 6 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ) Biến đổi $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -m-2 \\ 0 & 0 & 0 & -m^2-7m+8 \end{pmatrix}$ (1,0 đ).

(1,0 đ) Với $m = 1$ thì $\begin{cases} x_1 = -t-k \\ x_2 = k \\ x_3 = x_4 = t \end{cases}$. Với $m = -8$ thì $\begin{cases} x_1 = -4t-k \\ x_2 = k \\ x_3 = -2k, x_4 = t \end{cases}$. Với $m \neq 1; -8$ thì $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = x_4 = 0 \end{cases}$.

Câu 2 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Cơ sở của L là $A = \{A_1, A_2\}$, chiều là 2

b) (1,0 đ) b) $A_5 \in L$ và tọa độ $[A_5]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Câu 3 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) $\dim kerf = 1$ cơ sở là $\{v_1 = (1;1;-3)\}$; $\dim imf = 2$ cơ sở là $\{v_2 = (1;2;1); v_3 = (-1;1;0)\}$.

b) (1,0 đ) Hạng $r(v_1; v_2; v_3) = 3$ nên $imf + kerf = \mathbb{R}^3$ và $Kerf \cap Imf = \{0\}$.

c) (1,0 đ) Ta phân tích $x = u + v \in \mathbb{R}^3 = V \oplus Kerf$. Suy ra $imf \ni f(x) = f(v) \in f(V)$. Có thể lấy $V = \{e_1, e_2\}$.

Câu 4 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = -(2+\lambda)(\lambda-4)^2$ có nghiệm $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4$. Chọn véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$, véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$; $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ba véc tơ này lập thành hệ cơ sở trực chuẩn. Dạng chính tắc là $H(X,Y,Z) = -2X^2 + 4Y^2 + 4Z^2$, không xác định dấu.

b) (1,0 đ) $H(x,y,z) = H(X,Y,Z) = -2X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 = -6X^2 + 4(X^2+Y^2+Z^2) = -6X^2 + 4$. Suy ra $-2 \leqslant H(x,y,z) = H(X,Y,Z) \leqslant 4$. Suy ra $H_{min} = -2$ tại $X = 1, Y = Z = 0$.

Ta có $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

c) (1,0 đ) Mặt nón.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 7 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,5 đ)

a) **(1,5 đ)** Chứng minh. Cơ sở của U là $\{u_1, u_2\}, \dim U = 2$ và cơ sở của V là $\{v_1, v_2\}, \dim V = 2$.

b) **(1,0 đ)** $\begin{cases} U + V = \mathcal{L}(u_1, u_2, v_1, v_2) = \mathbb{R}^4 \\ \dim U + \dim V = 4 \end{cases}$. Do đó, $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

Câu 2 (4,0 đ)

a) **(1,5 đ)** $f(a + bx + cx^2) = (a + b) + 2(b + c)x + 3cx^2$. Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2[x]$ là: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) **(1,5 đ)** $\ker f = \{\theta\}$. Do đó, f song ánh. $f^{-1} : \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_2[x], f^{-1}(a+bx+cx^2) = a - \dfrac{b}{2} - \dfrac{c}{3} + (\dfrac{b}{2} - \dfrac{c}{3})x + \dfrac{c}{3}x^2$.

c) **(1,0 đ)** Cơ sở chính tắc của $\mathcal{P}_2[x]$ không phải là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_2[x]$ vì $< 1, x >= -1$.
Ta có $\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(1), \mathcal{L}(1, x) = \mathcal{L}(1, x + 1), \mathcal{L}(1, x, x^2) = \mathcal{L}(1, x + 1, (x + 1)^2)$. Do đó, trực chuẩn hóa S' ta thu được S. (có thể trực chuẩn hóa theo các bước G- S).

Câu 3 (3,5 đ)

a) **(1,5 đ)** $P(\lambda) = (\lambda - 4)(2 - \lambda^2)$, các trị riêng $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 4$. Các véc tơ riêng tương ứng $\mathbf{u}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-\sqrt{2}, 1, 1), \mathbf{u}_3 = (0, -1, 1)$.

b) **(1,0 đ)** Các trị riêng của B là $9 + \sqrt{2}; 9 - \sqrt{2}; 4101$. Các vecto riêng như của A.

c) **(1,0 đ)** $P(\lambda) = (\lambda - 4)(2 - \lambda^2)$, các trị riêng $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 4$.
Các véc tơ riêng tương ứng $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, 1, 1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$. Ba véc tơ này lập thành hệ cơ sở trực chuẩn.

Phép đổi biến trực giao $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc $\omega = \sqrt{2}x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + 4z'^2$. Mặt cong $\sqrt{2}x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + 4z'^2 = 0$ là mặt nón.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 8 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,5 đ)

a) **(1,5 đ)** Chứng minh. Cơ sở của U là $\{u_1, u_2\}, \dim U = 2$ và cơ sở của V là $\{v_1, v_2\}, \dim V = 2$.

b) **(1,0 đ)** Như đề 1.

Câu 2 (4,0 đ)

a) **(1,5 đ)** $f(a + bx + cx^2) = (a - b) + 2(b - c)x + 3cx^2$. Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2[x]$ là: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) **(1,5 đ)** $\ker f = \{\theta\}$. Do đó, f song ánh. $f^{-1} : \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_2[x], f^{-1}(a+bx+cx^2) = a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} + (\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3})x + \dfrac{c}{3}x^2$.

c) **(1,0 đ)** Cơ sở chính tắc của $\mathcal{P}_2[x]$ không phải là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_2[x]$ vì $< 1,\ x >= 1$.
Ta có $\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(1), \mathcal{L}(1, x) = \mathcal{L}(1, x - 1), \mathcal{L}(1, x, x^2) = \mathcal{L}(1, x - 1, (x - 1)^2)$. Do đó, trực chuẩn hóa S' ta thu được S. (có thể trực chuẩn hóa theo các bước G- S).

Câu 3 (3,5 đ)

a) **(1,5 đ)** $P(\lambda) = (\lambda - 2)(2 - \lambda^2)$, các trị riêng $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 2$. Các véc tơ riêng tương ứng $\mathbf{u}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (-\sqrt{2}, 1, 1),\ \mathbf{u}_3 = (0, -1, 1)$.

b) **(1,0 đ)** Các trị riêng của B là $9 + \sqrt{2}; 9 - \sqrt{2}; 67$. Các vecto riêng như của A.

c) **(1,0 đ)** $P(\lambda) = (\lambda - 2)(2 - \lambda^2)$, các trị riêng $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 2$.
Các véc tơ riêng tương ứng $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, 1, 1),\ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$. Ba véc tơ này lập thành hệ cơ sở trực chuẩn.

Phép đổi biến trực giao $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc $\omega = \sqrt{2}x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + 2z'^2$. Mặt cong $\sqrt{2}x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + 2z'^2 = 1$ là Hypeboloit một tầng.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 9 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,5 đ)

a) (1,0 đ) Ma trận A khả nghịch khi $a \neq -3$. Ma trận nghịch đảo của A : $A^{-1} = \frac{1}{3a+9}\begin{pmatrix} 2a+2 & -a-4 & 3 \\ a-1 & a+2 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) (1,5 đ) Nghiệm $AX = 0$ là không gian vecto con sinh bởi $\{v = (1;1;1)\}$. Gọi V là không gian vecto trực giao với không gian trên thì $V : x+y+z = 0$ với $dimV = 2$.

Câu 2 (3,5 đ)

a) (1,0 đ) Chứng minh V là không gian vecto con. $dimV = 1$ và cơ sở $\{v(x) = x - x^2\}$.

b) (1,5 đ) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) (1,5 đ) $dimkerf = 1$ với cơ sở $\{p(x) = x + x^2\}$. $dimf(V) = 1$ với cơ sở $\{f(v)(x) = (-2, 0, -2)\}$

Câu 3 (3,0 đ)

a) (0,5 đ) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) (1,5 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda = (\lambda-1)^2(4-\lambda)$. Với GTR $\lambda = 1$ véc tơ riêng $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;2;-1)$.

Với GTR $\lambda = 4$ véc tơ riêng $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;1)$. Phép đổi tọa độ trực chuẩn $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{1}{\sqrt{3}}Z \\ y = \qquad \frac{2}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{\sqrt{6}}{Y} + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \end{cases}$.

c) (1,0 đ) Dựa vào b) đặt $\lambda = -a + \mu + 2$, ta suy ra hai giá trị riêng của ma trận của H'. Từ đó suy ra H' không xác định dấu khi $(a-1)(a+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 1$.

Câu 4 (1,0 đ)

Đường bậc 2 là elip $X^2 + y^2 = 1$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 10 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,5 đ)

a) (1,5 đ) Ma trận A khả nghịch khi $a \neq -3$. Ma trận nghịch đảo của A : $A^{-1} = \frac{1}{3a+9}\begin{pmatrix} a-1 & 3 & a+2 \\ 2a+2 & 3 & -a-2 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) (1,5 đ) Nghiệm $AX = 0$ là không gian vecto con sinh bởi $\{v = (1;1;1)\}$. Gọi V là không gian vecto trực giao với không gian trên thì $V : x+y+z = 0$ với $dimV = 2$.

Câu 2 (3,5 đ)

a) (1,0 đ) Chứng minh V là không gian vecto con, $dimV = 1$ và cơ sở $\{v(x) = 2x + x^2\}$.

b) (1.5 đ) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) (1,0 đ)$dimkerf = 1$ với cơ sở $\{p(x) = x - x^2\}$. $dimf(V) = 1$ với cơ sở $\{f(v)(x) = (3, 0, 6)\}$

Câu 3 (3,0 đ)

a) (0,5 đ) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) (1,5 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda = (\lambda-2)^2(5-\lambda)$. Với GTR $\lambda = 2$ véc tơ riêng $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;2;-1)$.

Với GTR $\lambda = 5$ véc tơ riêng $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;1)$. Phép đổi tọa độ trực chuẩn $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{1}{\sqrt{3}}Z \\ y = \qquad \frac{2}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{\sqrt{6}}{Y} + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \end{cases}$.

c) (1,0 đ) Suy ra H' không xác định dấu khi $(m-1)(m+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Câu 4 (1,0 đ)

Đường bậc 2 là hypebol $X^2 - Y^2 = 1$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 11 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Ma trận $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) (1,0 đ)Phương trình tương đương $B^TY^T = C^T$. Ma trận mở rộng $(B^T|C^T)$ có thể có hạng là 2 hoặc 3 nên có thể không thể có nghiệm với mọi C.

Câu 2 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Chứng minh.

b) (1,0 đ) Vecto riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $w = t(-1; -2; 1), t \neq 0$.

c) (1,0 đ) Ma trận trong cơ sở chính tắc $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Câu 3 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Hệ trực chuẩn $\{u_1 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); u_2 = (\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{-3}{2\sqrt{3}})$.

b) (1,0 đ) Là không gian vecto sinh bởi $\{(0; 1); (1; -1)\}$ và có chiều là 2.

Câu 4 (3,0 đ)

a) (0,5 đ)Biểu thức tọa độ $H(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz - 8yz$.

b) (1,5 đ)Đa thức đặc trưng $P(\lambda = -(\lambda+3)^2(\lambda-6)^2$. Với GTR $\lambda = -3$ véc tơ riêng $v_1 = (-1; 2; 2)$. Với GTR $\lambda = 6$ véc tơ riêng $v_2 = (0; 1; -1), v_3 = (4; 1; 1)$. Trong cơ sở $\{v_1; v_2; v_3\}$, dạng chính tắc $H(X, Y, Z) = -3X^2+6Y^2+6Z^2$. Không xác định dấu.

c) (1,0 đ) Với phép đổi tọa độ $\begin{cases} x = -X + 4Z \\ y = 2X + Y + Z \\ z = 2X - Y + Z \end{cases}$ mặt bậc 2 có dạng $-3X^2 + 6Y^2 + 6Z^2 + 18Z + 13 = 0 \Leftrightarrow$ $-3X^2 + 6Y^2 + 6(Z + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$ (Hypeboloic 1 tầng).

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 12 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Ma trận $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) (1,0 đ) Phương trình tương đương $B^TY^T = C^T$. Ma trận mở rộng $(B^T|C^T)$ có thể có hạng là 2 hoặc 3 nên có thể không thể có nghiệm với mọi C.

Câu 2 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Chứng minh.

b) (1,0 đ) Vecto riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là $w = t(-1; 2; 2), t \neq 0$.

c) (1,0 đ) Ma trận trong cơ sở chính tắc $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Câu 3 (2,0 đ)

a) (1,0 đ) Hệ trực chuẩn $\{u_1 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); u_2 = (\frac{-3}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2\sqrt{3}})$.

b) (1,0 đ) Là không gian vecto sinh bởi $\{(0; 1); (1; 1)\}$ và có chiều là 2.

Câu 4 (3,0 đ)

a) (1,0 đ) Biểu thức tọa độ $H(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 8yz$.

b) (1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda = -(\lambda+2)^2(\lambda-7)^2$. Với GTR $\lambda = -2$ véc tơ riêng $v_1 = (-1; 2; 2)$. Với GTR $\lambda = 7$ véc tơ riêng $v_2 = (0; 1; -1), v_3 = (4; 1; 1)$. Trong cơ sở $\{v_1; v_2; v_3\}$, dạng chính tắc $H(X, Y, Z) = -2X^2+7Y^2+7Z^2$. Không xác định dấu.

c) (1,0 đ) Với phép đổi tọa độ $\begin{cases} x = -X + 4Z \\ y = 2X + Y + Z \\ z = 2X - Y + Z \end{cases}$ mặt bậc 2 có dạng $-2X^2 + 7Y^2 + 7Z^2 - 9X + 10 = 0 \Leftrightarrow$ $-2(X + \frac{9}{4})^2 + 7Y^2 + 7Z = -\frac{1}{8}$ (Hypeboloic 2 tầng).

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 13 ĐẠI SỐ

Câu 1 (3,0 đ)
a) (0,5 đ)Chỉ ra được cơ sở.
b) (1,5 đ) Chứng minh V là không gian vecto con.

Cơ sở của V là $\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

c) (1,0 đ) $X = \begin{pmatrix} 4x-7 & -2x+3 \\ -2x+3 & x \end{pmatrix}$.

Câu 2 (3,0 đ)
a) (1,0 đ) $dimker = 1$, cơ sở là $\{v = (2; -1; 0)\}$, $dimimf = 2$, cơ sở là $\{u = (1; 2; 1), w = (2; 1; -1)\}$.
b) (1,0 đ) ảnh $f(V) = (f(u) = (7; 11; 4); f(w) = (2; 7; 6))$, $chiudimf(V) = 2$.
c) (1,0 đ) r(v,u,w)=3 nên $imf + kerf = \mathbb{R}^3$.

Câu 3 (2,0 đ)
a) (1,0 đ) Chứng minh.
b) (1,0 đ) Tập các vecto có dạng $V = \{a(-2+x) + bx^2 | a, b \in \mathbb{R}\}$ dimV=2 và cơ sở là

$$V = \{p(x) = -2 + x; q(x) = x^2\}.$$

Câu 4 (2,0 đ)
a) (1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$. Với GTR $\lambda = 2$ véc tơ riêng $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2; -1)$. Với GTR $\lambda = 7$ véc tơ riêng $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1; 2)$. Phép đổi tọa độ trực chuẩn $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y = \frac{-1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$. Dạng toàn phương là $H(X, Y) = 2X^2 + 7Y^2$, xác định dương.
b. (1,0 đ) Elip $\frac{x'^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{14}} = 1$. Bán trục $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 14 ĐẠI SỐ

Câu 1 (2,0 đ)
a) (0,5 đ) Chỉ ra được cơ sở.
b) (1,5 đ) Chứng minh V là không gian vecto con. Cơ sở của V là $\{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$.
c) (1,0 đ) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Câu 2 (3,0 đ)
a) (1,0 đ)$dimker = 1$, cơ sở là $\{v = (1; 0; -1)\}$, $dimimf = 2$, cơ sở là $\{u = (1; 2; 1), w = (1; -1; -2)\}$.
b) (1,0 đ) ảnh $f(V) = (f(u) = (4; 2; -2); f(w) = (-2; -1; 1))$, $chiudimf(V) = 1$.
c) (1,0 đ) r(v,u,w)=2 nên $imf + kerf = imf$. Chứng minh.

Câu 3 (2,0 đ)
a) (1,0 đ) Chứng minh.
b) (1,5 đ) Tập các vecto có dạng $V = \{a(-2+x^2) + bx | a, b \in \mathbb{R}\}$ dimV=2 và cơ sở là

$$V = \{p(x) = -2 + x^2; q(x) = x\}.$$

Câu 4 (2,0 đ)
a) (1,0 đ) Đa thức đặc trưng $P(\lambda = (\lambda + 1)(\lambda + 6)$. Với GTR $\lambda = -6$ véc tơ riêng $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2; -1)$. Với GTR $\lambda = -1$ véc tơ riêng $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1; 2)$. Phép đổi tọa độ trực chuẩn $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y = \frac{-1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$. Dạng toàn phương là $H(X, Y) = -X^2 - 6Y^2$. Xác định âm.
b. (1,0 đ) Elip $\frac{x'^2}{\frac{1}{6}} + \frac{y'^2}{1} = 1$. Bán trục $a = \frac{1}{\sqrt{6}}, b = 1$.