PHƯƠNG PHÁP CARDANO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3 TỔNG QUÁT

Phương trình bậc 3 tổng quát luôn đưa được về dạng $x^3+ax^2+bx+c=0$. Bằng cách đổi biến $x=y+m$ với m thích hợp ($m=-\frac{a}{3}$) ta đưa phương trình trên về

$$y^3+py+q=0. \qquad (*)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của $(*)$ dưới dạng $y=u+v$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$. Như vậy với u,v thỏa mãn

$$\begin{cases}3uv+p=0\\u^3+v^3=-q\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3\cdot v^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3\\u^3+v^3=-q\end{cases} \qquad (**)$$

thì $y=u+v$ là một nghiệm $(*)$. Phương trình $(**)$ có thể giải dễ dàng để được các nghiệm u^3,v^3.

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Từ đó suy ra u,v và $y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Việc giải phương trình bậc 3 áp dụng phương pháp trên luôn dẫn đến nghiệm, tuy nhiên để rút gọn các biểu thức nghiệm có thể phải đi tiếp một bước dài nữa. Chẳng hạn với phương trình $y^3-13y+12=0$ *ta phải giải hệ*

$$\begin{cases}3uv &=13\\u^3+v^3&=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3&=-6-\frac{35\sqrt{3}}{9}i\\v^3&=-6+\frac{35\sqrt{3}}{9}i\end{cases} \Rightarrow \quad u+v \text{ là số thực.}$$

Số thực đó bằng 3, tuy nhiên việc chứng minh khá dài dòng. Trong khi phương trình $y^3-13y+12=0$ *có nghiệm* $y=3$ *có thể chỉ ra một cách đơn giản!*

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TỔNG QUÁT

Phương trình bậc 4 tổng quát có dạng $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow (x^2+\frac{ax}{2})^2=(\frac{a^2}{4}-b)x^2-cx-d$. Cộng 2 vế của phương trình trên với cùng một biểu thức $(x^2+\frac{ax}{2})y+\frac{y^2}{4}$ để đưa vế trái thành bình phương của một biểu thức bậc 2 theo x:

$$\begin{aligned}\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2&=\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d\\&=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+(\frac{ay}{2}-c)x+\frac{y^2}{4}-d \quad (1)\end{aligned}$$

Bây giờ ta tìm y để vế phải của (1) cũng là bình phương một nhị thức (theo biến x). Muốn vậy

$$\Delta=\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0. \quad (2)$$

Đây là phương trình bậc 3 đối với y (ta đã biết cách giải ở trên). Với một giá trị y bất kì thỏa mãn (2), phương trình (1) có dạng

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=(mx+n)^2.$$

Việc giải tiếp nó đưa về giải các phương trình bậc 2: $x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}=mx+n$ và $x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}=-(mx+n)$.