Dãy số sin n $(n \in \mathbb{N})$ trù mật trên $[-1, 1]$

Bổ đề: *Với số thực α bất kì và $\epsilon > 0$ tuỳ ý, luôn tồn tại 2 số nguyên m, n không đồng thời bằng 0 sao cho*

$$|m\alpha - n| < \epsilon.$$

Thật vậy chọn số tự nhiên k sao cho $\frac{1}{k} < \epsilon$. Chia đoạn $[0, 1]$ thành k phần bằng nhau và xét l số $(l > k)$ trong khoảng $[0, 1)$:

$$\alpha - [\alpha], 2\alpha - [2\alpha], 3\alpha - [3\alpha], ..., l\alpha - [l\alpha].$$

Hiển nhiên tồn tại 2 số nguyên $p, q (p \neq q)$ sao cho

$$|(p\alpha - [p\alpha]) - (q\alpha - [q\alpha])| = |(p - q)\alpha - ([p\alpha] - [q\alpha])| \leq \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Kí hiệu $m = p - q$ và $n = [p\alpha] - [q\alpha]$ ta được điều phải chứng minh.

Hệ quả 1: *Tập hợp $A = \{m\alpha - n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, với α vô tỉ, trù mật trên $\mathbb{R}$.*

Thật vậy xét một lận cận $U_\delta(u) = (u - \delta, u + \delta)$ (bán kính $\delta > 0$ tùy ý) của số thực $u \in \mathbb{R}$ bất kì, ta sẽ chỉ ra $\exists$ các số của tập A trong lân cận đó. Theo bổ đề $\exists m, n : 0 < t = |m\alpha - n| < \delta$. Khi đó lận cận U_δ (là một khoảng mở có độ dài 2δ) sẽ chứa một trong các số $kt = k|m\alpha - n| \in A,\ k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ suy ra đ.p.c.m.

Dễ dàng nhận thấy $A = \{m\alpha - n \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Hệ quả 2: *Tập hợp các số $B = \{m\alpha + n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ − với α là số vô tỉ − trù mật trên $\mathbb{R}$.*

Từ hệ quả 1 suy ra $\exists$ dãy số $x_k = m_k\alpha + n_k \to 0, x_k \neq 0, m_k, n_k \in \mathbb{Z}$. Ta sẽ chỉ ra dãy số $|n_k| \to +\infty$ (và do vậy $|m_k| \to +\infty$). Thật vậy giả sử ngược lại, khi đó $\exists$ dãy con n_{ki} bị chặn và do đó $\exists$ dãy con dừng $n_{ki} = b \in \mathbb{Z}\ \forall i > i_0$, mâu thuẫn với giả thiết $x_{k_i} = m_{ki}\alpha + b \to 0$.

Bây giờ ta lại có thể khẳng định tiếp, $\exists$ dãy số $x_k = m_k\alpha + n_k \to 0, x_k \neq 0$, với các tính chất $m_k, n_k \in \mathbb{Z}$ và dãy số $n_k \to +\infty$.

Bây giờ ta chứng minh hệ quả 2. Thật vậy với số thực v cho trước và số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, tồn tại $u = m_0\alpha + n_0 \in A$ để $|u - v| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Theo nhận xét trên, tồn tại dãy số $v_k = m_k\alpha + n_k \to 0$ với $\lim n_k = +\infty$, tức là $\exists p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q > |n_0|$ sao cho với $t = p\alpha + q, |t| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó $u + t \in B$ và $|v - (u + t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, đ.p.c.m.

Từ hệ quả 2 ta sẽ chỉ ra **dãy** $\sin \mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ **trù mật trong đoạn** $[-1, 1]$:

Xét một lân cận bán kính $\delta > 0$ nhỏ tùy ý của số thực $\sin x \in [-1, 1]$, do hệ quả trên $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ để $|x - (2m\pi + n)| < \delta$, suy ra

$$|\sin n - \sin x| = |\sin(2m\pi + n) - \sin x| \leq |x - (2m\pi + n)| < \delta, \quad \text{đ.p.c.m.}$$