CÁC MÔ HÌNH HÌNH HỌC PHI EUCLIDE

Out of nothing I have created a strange new universe
(*Semmiból egy újj más világot teremtettem*)

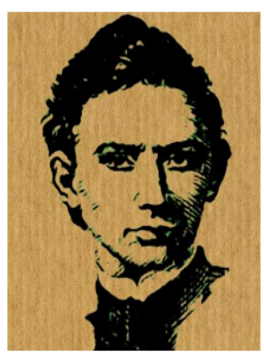
Bolyai János

This is certainly one of the most remarkable formulas in all of mathematics

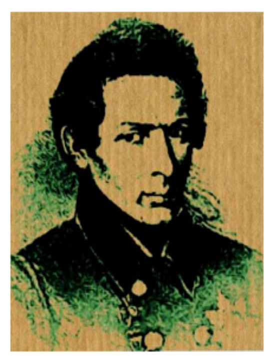
Marvin Jay Greenberg
University of California, Santa Cruz

**Chân dung các nhà toán học tiên phong
trong lĩnh vực hình học hyperbolic**

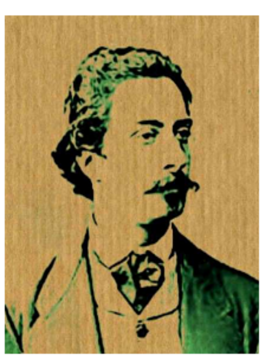
C.F. Gauss



J. Bolyai

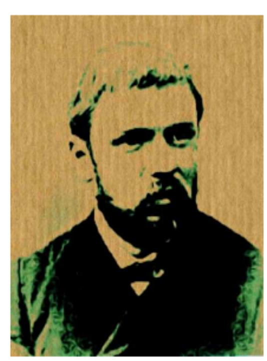


N.I. Lobachevsky



E. Beltrami

F.C. Klein



J.H. Poincaré

TỔNG QUAN VỀ HÌNH HỌC

1 Mở đầu

Khoảng 300 năm trước công nguyên, Euclide trong cuốn *Những cơ sở* (*Elements*) của hình học ông đã hệ thống các khái niệm hình học hiển nhiên thành 5 tiên đề mà hình học được xây dựng bằng các lập luận logic từ 5 tiên đề đó.

1. *Đường thẳng nối 2 điểm bất kì.* Giữa 2 điểm bất kì $P \neq Q$ tồn tại duy nhất đường thẳng d đi qua P và Q.

2. *Các đoạn thẳng thuộc đường thẳng.* Với 2 đoạn thẳng bất kì AO và BC, tồn tại điểm duy nhất D sao cho O nằm giữa A, D và $OD = BC$.

3. *Đường tròn có tâm và bán kính tùy ý.* Với bất kì điểm O và điểm $P \neq O$ tồn tại đường tròn tâm O bán kính OP.

4. *Về góc vuông.* Mọi góc vuông đều bằng nhau.

5. *Về đường thẳng song song.* Qua điểm P nằm ngoài đường thẳng d, tồn tại một và chỉ một đường thẳng song song với d.

Hình học xây dựng từ 5 tiên đề trên được gọi là hình học Euclide. Phủ định tiên đề 5 dẫn đến hình học phi Euclide. Có 2 dạng phủ định:

5.1 Qua điểm P nằm ngoài đường thẳng d, không tồn tại đường thẳng song song với d. Hình học với tiên đề phủ định này được gọi là hình học *elliptic*. Hình học cầu với đường thẳng là đường tròn lớn trên mặt cầu thuộc loại này.

5.2 Qua điểm P nằm ngoài đường thẳng d, tồn tại ít nhất hai đường thẳng song song với d. Hình học với tiên đề phủ định này được gọi là hình học *hyperbolic* hay còn gọi là hình học Bolyai - Lobachevsky.

Chúng ta sẽ giới thiệu các mô hình khác nhau cho hình học *hyperbolic* trong tài liệu này. Nó sẽ được giới thiệu một cách tổng quát, hiện đại hơn dựa trên các kiến thức sâu hơn về hình học và đại số, đặc biệt là hình học xạ ảnh (projectiv geometry).

Hình học hyperbolic là cơ sở để Riemann phát triển nhánh hình học vi phân nghiên cứu các đa tạp trơn Riemann. Hình học Riemann được chọn làm cơ sở cho lí thuyết tương đối hẹp và sau này là lí thuyết tương đối rộng của Albert Einstein. Trong tài liệu này tôi cũng giới thiệu mô hình hyperboloid cho hình học hyperbolic. Nó được trình bày trong không gian Minkowski (Minkowski spacetime). Các khái niệm trong không gian Minkowski được đặt tên theo các khái niệm vật lí trong lí thuyết tương đối.

Một số các kết quả cơ bản của hình học hyperbolic được chứng minh chi tiết trong phần phụ lục của tài liệu này. ***Những kết quả hay được nói đến của hình học hyperbolic***

- ***Tổng các góc trong một tam giác nhỏ hơn*** 180^0.

- ***Độ đo các góc của một tam giác xác định độ dài các cạnh của tam giác đó.***

- ***Không tồn tại hình chữ nhật (tứ giác có 4 góc vuông) trong hình học hyperbolic. Suy ra không tồn tại khái niệm hình vuông. Tuy nhiên trong hình học hyperbolic tồn tại ngũ giác, lục giác... mà tất cả các góc ở đỉnh đều vuông.***

- ***Diện tích một miền phẳng, do không có hình vuông đơn vị, nên được định nghĩa như trong lí thuyết độ đo. Đặc biệt diện tích tam giác bằng độ lệch (số khuyết) giữa*** π ***và tổng các góc của tam giác đó.***

- ***Định lí Pitago về tam giác vuông (***$c^2 = a^2 + b^2$***) không đúng trong hình học hyperbolic. Thay vào đó là hệ thức khác (cũng được gọi là hệ thức Pitago) giữa các cạnh của tam giác vuông***

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b.$$

- *Các đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm.*
- *Các đường phân giác trong của một tam giác cũng đồng quy tại một điểm.*
- *Ba đường trung trực của tam giác có thể không đồng quy. Chúng đôi một không cắt nhau. Khi đó không tồn tại một đường tròn ngoại tiếp tam giác.*
- *Ba đường cao của tam giác cũng có thể không đồng quy. Nói cách khác tam giác có thể không có trực tâm.*
- *Tuy nhiên các đường trung trực hoặc các đường cao nếu đôi một cắt nhau thì cả 3 đường trung trực (hoặc 3 đường cao) đồng quy tại một điểm.*
- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng* 0. *Diễn đạt chính xác hơn là* $\inf \rho(A,B) = 0$ *khi* A, B *thuộc hai đường thẳng song song.* $\rho(A,B)$ *kí hiệu khoảng cách giữa hai điểm* A, B *thuộc hai đường thẳng đó.*
- *Hình học hyperbolic về tam giác có các định lí hàm số sin, hàm số cos gần giống như các định lí hàm sin, hàm cos trong hình học Euclide. Tương tự cho chu vi và diện tích hình tròn.*

Tất cả các kết quả này và những vấn đề khác nữa được giới thiệu và chứng minh trong tài liệu này.

2 Tổng quan về hình học và các phép biến đổi hình học

Hình học nói chung gồm các đối tượng mà người ta gọi là điểm, đường thẳng, mặt phẳng. Nó được nghiên cứu thông qua các mối quan hệ liên thuộc và các phép biến đổi giữa chúng.

2.1 **Hình học Euclide** có các phép biến đổi không suy biến: tịnh tiến, đối xứng, phép quay và phép biến đổi đồng dạng. Bằng việc sử dụng đại số tuyến tính và gắn hệ trục tọa độ Đề các lên mặt phẳng, các phép biến đổi nói trên có thể được trình bày dưới dạng các hệ phương trình. Cụ thể hơn, xét phép biến đổi f trong $\mathbb{R}^2$ chuyển điểm $P(x,y)$ thành điểm $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$

1. Nếu f là phép tịnh tiến theo véc tơ $\mathbf{m}(a,b)$, khi đó có thể biểu diễn dưới dạng hệ phương trình $\begin{cases}\overline{x} = x + a\\ \overline{y} = y + b\end{cases}$ hoặc viết dưới dạng ma trận $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ hay $\overline{P} = IP + D,\ D = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$.
2. Đối với phép đối xứng qua trục Ox, $\begin{cases}\overline{x} = x\\ \overline{y} = -y\end{cases}$ hay $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ hoặc $\overline{P} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P$.
3. Đối với phép quay quanh tâm $O(0,0)$ một góc α, phép biến đổi có dạng $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
4. Nếu phép biến đổi là phép quay quanh tâm $A(a,b)$ một góc α, khi đó f sẽ được thực hiện bằng cách thực hiện liên tiếp các phép biến đổi: tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AO}$, quay quanh $O(0,0)$ một góc α, rồi tịnh tiến ngược lại theo $\overrightarrow{OA}$. Hệ phương trình diễn giải nó có dạng $\overline{P} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$
5. Phép đối xứng qua đường thẳng cùng các phép biến đổi trên lập thành một nhóm với phép toán nhân ánh xạ. Người ta còn nói đây là nhóm các phép biến đổi đẳng cự trong mặt phẳng. Dạng ma trận tổng quát của phép biến đổi đẳng cự:

$$\overline{P} = AP + D, \quad \text{trong đó } A \text{ là phép biến đổi trực giao } AA^t = I, \overline{P} = \begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

   Các phép biến đổi trong nhóm này bảo toàn đường thẳng và các đặc trưng cơ bản khác như bảo toàn khoảng cách, bảo toàn góc, song song...

Sử dụng các phép biến đổi trên, trong đại số tuyến tính người ta phân loại các đường bậc hai thành các đường conic: đường elip, hyperbol, parabol và các dạng suy biến thành đường thẳng.

5'. Chúng ta cũng rất quen thuộc với phép biến đổi đồng dạng phối cảnh trong hình học Euclide. Kết hợp (nhân) phép biến đổi này với các phép biến đổi nói trên ta được phép biến đổi đồng dạng. Phép biến đổi đồng dạng bảo toàn góc, bảo toàn song song nhưng không bảo toàn khoảng cách. Thay vì vậy nó bảo toàn tỉ số. Dạng ma trận tổng quát của phép biến đổi đồng dạng:

$$\overline{P} = AP + D, \quad \text{trong đó } A \text{ là phép biến đổi đồng dạng } AA^t = k \cdot I, \quad k \neq 0.$$

Chúng cũng lập thành nhóm. Nhóm các phép biến đổi đẳng cự là nhóm con của nó.

2.2 **Hình học Affine** nghiên cứu mối quan hệ giữa các đối tượng, khái niệm hình học thông qua phép biến đổi affine. Dạng tổng quát của phép biến đổi affine

$$\overline{P} = AP + D, \quad \text{trong đó } A \text{ là phép biến đổi không suy biến, } \det A \neq 0, \overline{P} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nó bảo toàn đường thẳng, bảo toàn tính song song, nhưng không bảo toàn khoảng cách, góc, tỉ số. Thay vì đó nó bảo toàn tỉ số chia (division ratio). Tỉ số chia của 3 điểm thẳng hàng A, B, C là $(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Nếu A, B, C là các điểm tùy ý không thẳng hàng và A', B', C' cũng như vậy thì tồn tại duy nhất phép biến đổi affine f để $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$.

Nếu tồn tại một đường thẳng t mà mọi điểm thuộc t đều là điểm cố định với phép biến đổi affine thì phép biến đổi đó được gọi là *phép biến đổi affine có trục* (tengely) và $t = \overline{t}$ là *trục của phép biến đổi.*

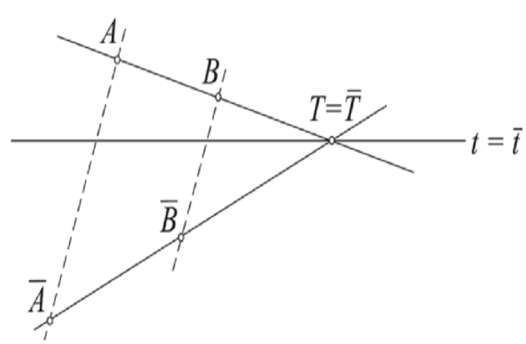
Nhận xét rằng do tính chất bảo toàn tỉ số chia nên trong phép biến đổi affine có trục, các đường thẳng nối điểm A với ảnh affine A' của nó luôn song song với một phương cố định. Phương đó còn được gọi là phương của phép biến đổi affine có trục.

Nếu đoạn thẳng MN có phương trùng với phương của phép biến đổi affine có trục và $M'N'$ là ảnh của MN. Khi đó tỉ số $\frac{MN}{M'N'} = k$ không đổi, nó được xem như tham số đặc trưng cho phép biến đổi affine có trục.

Ví dụ phép biến đổi

$$T : \mathbb{R}^2 \ \rightarrow \ \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, k \cdot y)$$

là phép biến đổi affine với trục Ox và tham số đặc trưng của phép biến đổi bằng k. Phép biến đổi affine này chuyển đường tròn thành elip.

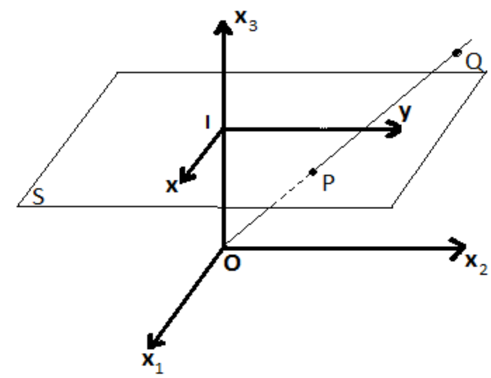


Trong phần phụ lục ta sẽ chứng minh mọi phép biến đổi affine có thể biểu diễn bằng tích của một phép biến đổi đồng dạng và phép biến đổi affine có trục.

2.3 **Hình học xạ ảnh** (projective geometry) nghiên cứu mối quan hệ giữa các đối tượng, khái niệm hình học thông qua phép biến đổi xạ ảnh (projective transformation). Mặt phẳng xạ ảnh là mặt phẳng Euclide cùng với các điểm vô cực và đường thẳng vô cực.

Để có thể nghiên cứu được các đối tượng vô cực đã nói ở trên ta đưa vào *hệ tọa độ thuần nhất* (homogeneous coordinates).

Hệ tọa độ thuần nhất. Cho mặt phẳng S với hệ tọa độ Đề các Ixy được gắn với hệ trục tọa độ Đề các $Ox_1x_2x_3$ trong không gian (như hình vẽ). Gọi P là điểm (thông thường hoặc điểm vô cực) của mặt phẳng S. Đường thẳng OP xác định duy nhất điểm P của mặt phẳng S. Gọi Q là điểm thông thường khác O của đường thẳng OP. Tọa độ $Q(x_1, x_2, x_3)$ trong hệ trục tọa độ Đề các $Ox_1x_2x_3$ được gọi là *tọa độ thuần nhất* của điểm P, kí hiệu $P[x_1, x_2, x_3]$.



Nhận xét:

- Tọa độ thuần nhất (x_1, x_2, x_3) của P không duy nhất. Các tọa độ (x_1, x_2, x_3) và (x'_1, x'_2, x'_3) cùng là tọa độ thuần nhất của P khi và chỉ khi $x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3$.
- Nếu $P(x, y)$ là điểm thông thường của mặt phẳng S và P có tọa độ thuần nhất $P[x_1, x_2, x_3]$. Khi đó $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$.
- Nếu P là điểm vô cực của S với $\mathbf{v}(a, b)$ là véc tơ chỉ phương. Khi đó tọa độ thuần nhất (x_1, x_2, x_3) của điểm P thỏa mãn $x_1 : x_2 : x_3 = a : b : 0$.
- Phép đổi biến $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$ đưa một phương trình của một đường cong phẳng bất kì $F(x, y) = 0$ về phương trình thuần nhất $F(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}) = 0$. Vì vậy hệ tọa độ mang tên gọi là *hệ tọa độ thuần nhất*.

Lưu ý rằng khi sử dụng hệ tọa độ thuần nhất, kí hiệu $[\mathbf{u}]$ chỉ lớp các véc tơ đồng phương với $\mathbf{u}$, nó vừa có thể là điểm trong S (giao của S với đường thẳng đi qua O mà $\mathbf{u}$ là véc tơ chỉ phương) vừa có thể là đường thẳng (giao của S với mặt phẳng đi qua O mà $\mathbf{u}$ là véc tơ pháp) trong mặt phẳng xạ ảnh. Nó có thể "đổi chỗ" cho nhau. Ta nhớ lại kết quả sau

Định lí a) Đường thẳng nối 2 điểm $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}]$ được xác định bởi véc tơ $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.
b) Giao điểm của 2 đường thẳng xác định bởi $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ được xác định bởi véc tơ $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
c) Nếu [(a,b,0)] xác định điểm trong mặt phẳng xạ ảnh thì đó là điểm vô cực và nếu [(0,0,1)] xác định đường thẳng thì đó là đường thẳng vô cực.

Trong các tài liệu hiện đại, người ta định nghĩa hình học xạ ảnh như sau: kí hiệu $\sim$ là quan hệ tương đương sự đồng phương của các véc tơ trong $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Khi đó tập thương $S = \mathbb{R}^3/\sim$ gồm các lớp tương đương (theo quan hệ đồng phương) được gọi là mặt phẳng xạ ảnh. Lớp tương đương chứa véc tơ khác không $\mathbf{x}$, kí hiệu $[\mathbf{x}]$ là phần tử của mặt phẳng xạ ảnh S. Lưu ý rằng kí hiệu $[\mathbf{u}] \in S$ được hiểu là một điểm trong S được xác định bởi véc tơ $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, nhưng đồng thời cũng có thể là đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh S với $\mathbf{u}$ là véc tơ pháp.

Các điểm $[(x_1, x_2, 0)] \in S$ là các điểm vô cực và $[(0, 0, 1)] \in S$ là đường thẳng vô cực.

Phép biến đổi xạ ảnh. Một song ánh trong mặt phẳng xạ ảnh được gọi là phép biến đổi xạ ảnh nếu nó bảo toàn đường thẳng. Nói cách khác ảnh của 3 điểm thẳng hàng cũng nằm trên một đường thẳng.

Kí hiệu $\mathbf{PG}(2)$ là nhóm các phép biến đổi xạ ảnh trong mặt phẳng và $\mathbf{G}(3)$ là nhóm các phép biến đổi tuyến tính không suy biến trong $\mathbb{R}^3$. Xét $\varphi \in \mathbf{G}(3)$, khi đó $\overline{\varphi} \in \mathbf{PG}(2)$ trong đó $\overline{\varphi}([\mathbf{u}]) = [\varphi(\mathbf{u})]$. Phép biến đổi xạ ảnh $\overline{\varphi}$ được định nghĩa như vậy là hợp lí vì nếu $[\mathbf{u}] = [\mathbf{v}]$ cùng xác định một điểm trong mặt phẳng xạ ảnh thì $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ suy ra $\varphi(\mathbf{u}) = k\varphi(\mathbf{v})$ hay $\overline{\varphi}([\mathbf{u}]) = \overline{\varphi}([\mathbf{v}])$. Như vậy phép biến đổi xạ ảnh trong mặt phẳng được coi như một phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$. Trong hệ tọa độ thuần nhất nó chuyển điểm $P(x_1, x_2, x_3)$ thành $\overline{P}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$

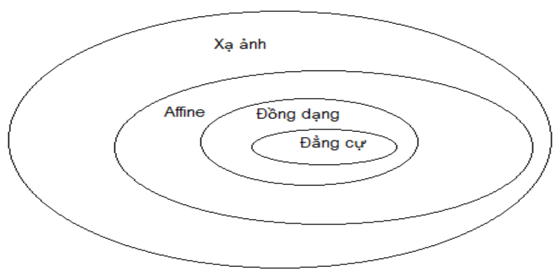
$$\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{trong đó} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{không suy biến.}$$

Lưu ý rằng trong hệ tọa độ thuần nhất, các ma trận $\alpha \cdot A$ biểu diễn cùng một phép biến đổi xạ ảnh.

Đặc biệt khi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{trong đó} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{không suy biến}$$

phép biến đổi xạ ảnh trở thành phép biến đổi affin (do đó cũng có thể là đồng dạng hoặc đẳng cự trong mặt phẳng Euclide). Thành phần $D = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ trong cột thứ ba của A có thể là thành phần cộng thêm của phép tịnh tiến. Ta thấy mô hình nhóm các phép biến đổi như hình vẽ dưới, nhóm các phép biến đổi xạ ảnh rộng nhất, nó chứa tất cả các phép biến đổi hình học ta đã biết.



Phép biến đổi xạ ảnh ngoại trừ việc chuyển đường thẳng thành đường thẳng, nó không bảo toàn khoảng cách, góc cũng như tỉ số chia của phép biến đổi affin. Ta dễ dàng cho ví dụ về phép biến đổi xạ ảnh không chuyển trung điểm một đoạn thẳng vào trung điểm đoạn ảnh bằng cách cho phần tử a_{33} trong ma trận của phép biến đổi xạ ảnh bằng 0.

Phép biến đổi xạ ảnh h bất kì luôn có một điểm bất động vì ma trận của h là ma trận cấp 3, lẻ, nên h có véc tơ riêng $\mathbf{u}$. Trong mặt phẳng xạ ảnh $[h(\mathbf{u})] = [\mathbf{u}]$, vậy $[\mathbf{u}]$ là điểm bất động. Cũng từ đại số tuyến tính ta biết h có không gian con bất biến 2 chiều, suy ra không gian con này xác định đường thẳng bất biến trong mặt phẳng xạ ảnh. Từ nhận xét này ta sẽ nghiên cứu một dạng đặc biệt của phép biến đổi xạ ảnh, đó là phép biến đổi xuyên tâm sẽ được định nghĩa sau đây.

Định lí cơ bản Nếu A, B, C, D là các điểm tùy ý không có 3 điểm nào thẳng hàng trong mặt phẳng xạ ảnh và A', B', C', D' cũng như vậy thì tồn tại duy nhất phép biến đổi xạ ảnh f để

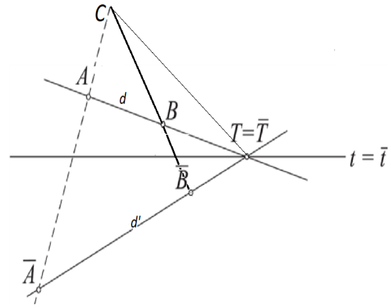
$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', \; f(D) = D'.$$

Chứng minh. Tồn tại các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ xác định các điểm A, B, C, D sao cho $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ cũng như $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ xác định các điểm A', B', C', D' sao cho $\mathbf{d}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}'$. Do $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ nên tồn tại duy nhất $\varphi \in \mathbf{G}(3)$ để $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}', \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}', \varphi(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$. Khi đó $f = \overline{\varphi} \in \mathbf{PG}(2)$ thỏa mãn định lí.

Phép biến đổi xuyên tâm là phép biến đổi xạ ảnh thỏa mãn 2 điều kiện:
a) Các đường thẳng nối điểm bất kì A với ảnh A' của nó luôn đi qua một điểm cố định. Điểm đó được gọi là *tâm* của phép biến đổi xuyên tâm.
b) Tồn tại một đường thẳng mà mọi điểm thuộc nó đều là điểm cố định. Đường thẳng đó được gọi là *trục* của phép biến đổi xuyên tâm.

Trong hình học xạ ảnh phép biến đổi xuyên tâm đóng vai trò tương tự như phép đối xứng qua đường thẳng trong hình học Euclide hoặc phép biến đổi affine có trục trong hình học affine.

Hình vẽ bên chỉ ra cách dựng điểm ảnh $\overline{B}$ của B qua phép biến đổi xuyên tâm trục t và tâm là điểm C biết ảnh $\overline{A}$ của A.
Cặp đường thẳng d và ảnh d' của nó qua phép biến đổi xuyên tâm cắt nhau tại điểm T thuộc trục t.



Lưu ý phép biến đổi xuyên tâm nói chung không phải là phép biến đổi Euclide vì một điểm thường có thể chuyển thành điểm vô cực. Nếu tâm là điểm vô cực hoặc trục là đường thẳng vô cực thì hạn chế của phép biến đổi lên mặt phẳng Euclide là phép biến đổi Euclide. Trường hợp tâm là điểm thường và trục là đường thẳng vô cực thì phép biến đổi là đồng dạng phối cảnh trên mặt phẳng Euclide. Ngược lại nếu tâm là điểm vô cực và trục là đường thẳng thường thì phép biến đổi trở thành phép biến đổi affine có trục. Nếu cả tâm và trục đều là vô cực thì phép biến đổi trở thành phép tịnh tiến.

Tương tự như trong hình học affine, người ta chứng minh được *mọi phép biến đổi xạ ảnh có thể biểu diễn bằng tích của một phép biến đổi đẳng cự và phép biến đổi xuyên tâm*. Từ đó ta dễ dàng chứng minh định lí sau sử dụng tỉ số kép của các điểm bằng tỉ số kép của các đường thẳng chứa nó.

Định lí Phép biến đổi xạ ảnh bảo toàn tỉ số kép (cross ratio). (*Tỉ số kép của 4 điểm* A, B, C, D thuộc đường thẳng affine là $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$. Nó cũng là *tỉ số kép của 4 đường thẳng* a, b, c, d đồng quy lần lượt chứa các điểm A, B, C, D.)

Đường bậc hai và khái niệm liên hợp.

Đường bậc hai trong mặt phẳng xạ ảnh có phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

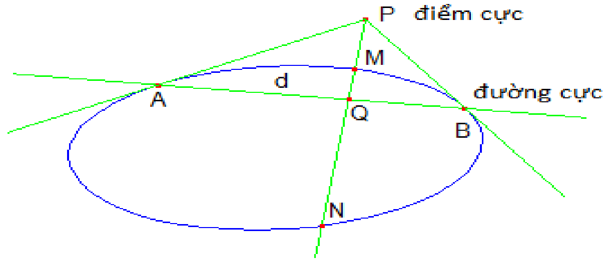
hay $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$, trong đó $A = (a_{ij})$ là ma trận đối xứng cấp 3. Bằng phép biến đổi xạ ảnh mọi đường bậc hai có thể đưa về dạng

- $x_1^2 + x_2^2 + \varepsilon x_3^2 = 0$, trong đó $\varepsilon = \pm 1$, nếu đường bậc hai không suy biến.
- $x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = 0$, trong đó $\varepsilon = 0, \pm 1$, nếu đường bậc hai suy biến.

Giả thiết q là đường bậc hai thực không suy biến trong mặt phẳng xạ ảnh. Tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh làm bất biến q tạo thành nhóm con được gọi là *nhóm hyperbolic*. Đường cong q cùng với nhóm các phép biến đổi đó tạo ra *hình học hyperbolic*.

Cho đường bậc hai không suy biến $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$. Ta nói điểm $M = [\mathbf{x}]$ trong mặt phẳng xạ ảnh *liên hợp* với $P = [\mathbf{y}]$ (đối với đường bậc hai này) nếu $\mathbf{x}^t A\mathbf{y} = 0$. Tập hợp các điểm liên hợp với P là đường thẳng $[A\mathbf{x}]$ được gọi là *đường cực* của P. Khi đó P được gọi là *cực* (hay *điểm cực*) của đường thẳng $[A\mathbf{x}]$. Khái niệm đường cực và điểm cực là khái niệm rất hay được sử dụng trong hình học xạ ảnh.

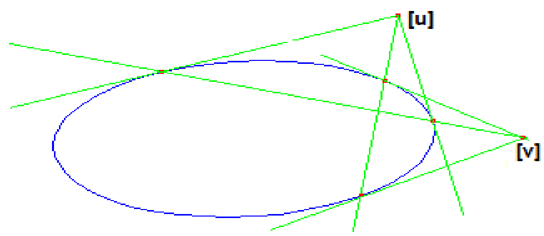
- Mọi điểm thuộc đường bậc hai luôn liên hợp với chính nó.
- Nếu M và N là 2 điểm khác nhau thuộc đường bậc hai, khi đó M và N không liên hợp với nhau.
- Nếu P thuộc đường bậc hai, khi đó đường cực của P là tiếp tuyến của đường bậc hai, P là tiếp điểm.



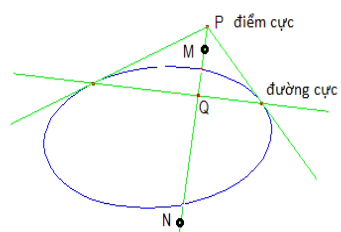
Gọi d là đường cực của P. Một đường thẳng đi qua P cắt đường bậc hai tại các điểm M, N và cắt d tại Q. Khi đó $(MNPQ) = -1$ hay ta thường nói P, Q chia điều hòa MN. Các véc tơ xác định M, N, P, Q có dạng

$$M = [\mathbf{a}], N = [\mathbf{b}], P = [\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}], D = [\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}]$$

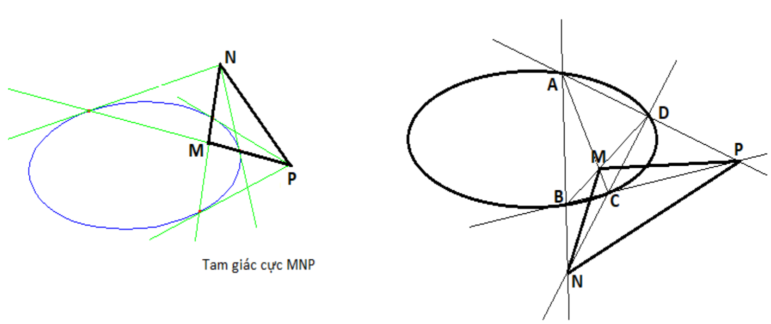
Việc dựng các đường cực hoặc điểm cực trở nên thuận tiện do tính chất nếu d cắt đường bậc hai tại các điểm A, B thì PA, PB là các tiếp tuyến với đường bậc hai đó. Lưu ý rằng đường cực của $[\mathbf{u}]$ chứa $[\mathbf{v}]$ khi và chỉ khi đường cực của $[\mathbf{v}]$ chứa $[\mathbf{u}]$.



Chú ý rằng nếu phép biến đổi xuyên tâm h nào đó với điểm cực P là tâm phép chiếu, đường cực của P là trục của phép chiếu và h chuyển một điểm A nào đó của đường bậc hai vào điểm A' cũng thuộc đường bậc hai thì theo định lí tứ giác toàn phần, h sẽ chuyển cả đường bậc hai vào chính nó và $h \circ h = id$ là phép biến đổi đồng nhất trong mặt phẳng. Nói cách khác $h(M) = N$ và $h(N) = M$, $\forall M \in \mathbb{R}^2$. Trong trường hợp như vậy phép biến đổi xuyên tâm h đóng vai trò như phép đối xứng trong hình học Euclide.



Tam giác perspective Một tam giác mà 2 đỉnh bất kì liên hợp với nhau được gọi là *tam giác perspective*. Khi đó đường cực của một đỉnh bất kì là cạnh đối diện. Hình vẽ dưới đây minh họa cách dựng một tam giác perspective thông qua tứ giác toàn phần $ABCD$. Lưu ý rằng cách dựng này hoàn toàn chỉ sử dụng thức kẻ.



Ví dụ ΔOAB là tam giác perspective đối với đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$, với các kí hiệu A là điểm vô cực thuộc trục hoành, B là điểm vô cực thuộc trục tung và O là gốc tọa độ.

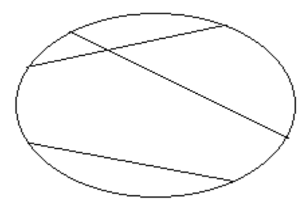
HÌNH HỌC BOLYAI - LOBASEPXKI

Một trong những vấn đề toán học khó khăn nhất, kéo dài lâu nhất, có ý nghĩa vô cùng lớn lao và cũng chứa đựng không ít bi kịch cho các nhà toán học là tiên đề thứ 5, tiên đề về đường thẳng song song của Euclide. Gần như đồng thời và độc lập nhau, vào khoảng năm 1830, nhà toán học trẻ người Hungary và giáo sư đại học Kazan người Nga đã công bố công trình của mình, hình học phi Euclide bằng việc phủ định tiên đề 5 và sử dụng 4 tiên đề trước đó (hình học tuyệt đối).

Trong tài liệu này tôi không trình bày nó dưới dạng mà những người sáng lập đã hệ thống lại như trong *Appendix* của Bolyai János. Tôi sẽ giới thiệu các mô hình (model) thông qua hình học Euclide, hình học xạ ảnh và như vậy cũng nhằm giới thiệu các vấn đề của hình học hiện đại với bạn đọc. Các mô hình này đều tương đương với nhau và mỗi mô hình sẽ có các công cụ hình học đặc thù riêng để giúp chúng ta nhanh chóng chứng minh các kết quả thú vị trong hình học hyperbolic.

1 Mô hình Cayley - Klein (The Cayley-Klein model of hyperbolic geometry)

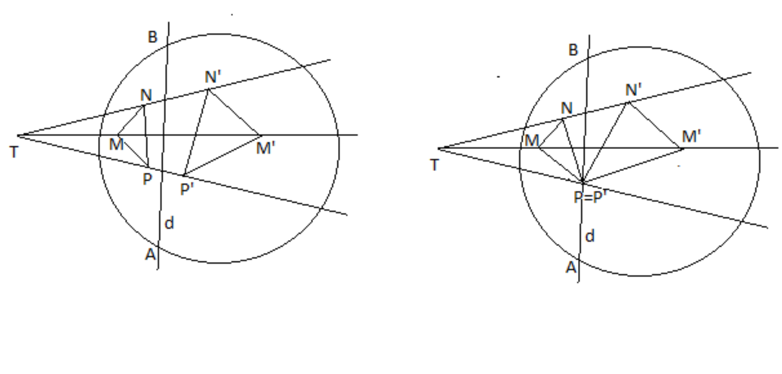
Xét đường bậc hai không suy biến $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \sum a_{i,j}x_ix_j = 0$ trong mặt phẳng S được gắn vào trong hệ tọa độ thuần nhất.
Gọi $X = \{\mathbf{x} : \ q(\mathbf{x}) < 0\}$ là tập cơ bản gồm các điểm trong của đường bậc hai. Giao của các đường thẳng trong S với đường q là các đường thẳng của X. Hiển nhiên các đường thẳng trong X là các khoảng mở. Như vậy ta có thể nói về các khái niệm khác như đoạn thẳng, nửa đường thẳng, nửa mặt phẳng, miền góc... trong tập cơ bản X. Do X trong mặt phẳng S đã được gắn với hệ tọa độ thuần nhất nên với việc lựa chon hệ trục tọa độ thích hợp, đường bậc hai đã cho có phương trình $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Mô hình hình học với tập cơ bản xét trong đường tròn này được gọi là mô hình Cayley - Klein.



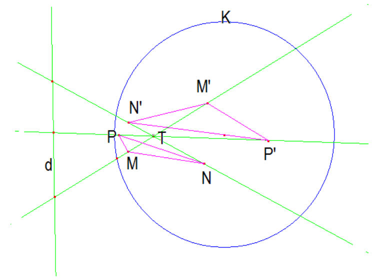
Trong mô hình này tiên đề 5 của Euclide không thỏa mãn. Qua một điểm có thể kẻ nhiều đường thẳng không cắt đường thẳng cho trước. Các tiên đề khác của Euclide lần lượt được thỏa mãn sau khi chúng ta đưa ra các khái niệm về khoảng cách, góc... Tuy nhiên trong khuôn khổ tài liệu này tôi sẽ không chứng minh chi tiết. Chúng ta dễ dàng hình dung trực tiếp điều đó như trong hình học Euclide.

Kí hiệu $X = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}$ là miền bên trong đường tròn $K : \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Toàn bộ các phép biến đổi xạ ảnh chiếu đường tròn K vào chính nó là một nhóm, kí hiệu $G(X)$ với phép toán là phép nhân ánh xạ. Khi đó các phép biến đổi này cũng chiếu các điểm trong của K (các điểm thuộc tập cơ bản X) vào trong X. Các phép biến đổi xạ ảnh này trong tập X đóng vai trò như các phép rời hình trong hình học Euclide. Đặc biệt quan trọng và được sử dụng nhiều là phép biến đổi xuyên tâm như sẽ giới thiệu trong các phần tiếp theo.

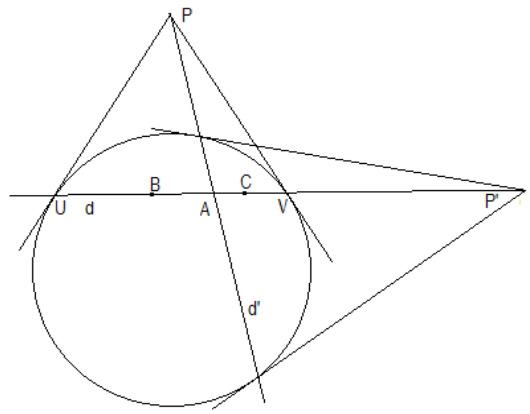
Phép đối xứng qua đường thẳng. Giả sử d là đường cực của điểm T trong mặt phẳng xạ ảnh cắt đường tròn K tại 2 điểm $A \neq B$. Khi đó phép biến đổi xuyên tâm $h \in G(X)$ với tâm là điểm T và trục là d trong mặt phẳng xạ ảnh S chiếu K vào chính nó. Các điểm thuộc đường thẳng AB trong mô hình này là các điểm cố định. h chiếu tam giác MNP thành $M'N'P'$. Ta nói ΔMNP và $\Delta M'N'P'$ đối xứng nhau qua đường thẳng AB. (Và do vậy ta có thể nói 2 tam giác này bằng nhau, tuy nhiên điều đó có thể gây nhầm lẫn với khái niệm bằng nhau trong hình học Euclide nên trong nhiều tài liệu người ta thường dùng thuật ngữ congruent). Ta nói h là *phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng qua trục.*



Nhận xét rằng nếu $T \in X$ nằm trong đường tròn K thì đường cực d của T không cắt đường tròn K. Khi đó phép biến đổi xuyên tâm h chỉ có duy nhất một điểm cố định T trong X. Lúc này ta nói h là *phép đối xứng qua tâm* T. Lưu ý rằng phép đối xứng qua đường thẳng hay phép đối xứng qua tâm, giống như trong hình học Euclide, có tính chất $h \circ h = id$. Đặc biệt khi đó T là trung điểm của các đoạn MM', NN', PP' (hình bên).



Vuông góc. Hai đường thẳng d và d' được gọi là vuông góc với nhau nếu điểm cực của đường thẳng này thuộc đường thẳng kia. Cụ thể hơn gọi d là đường cực của P và P' là điểm cực của đường thẳng d' trong hình vẽ dưới đây. Hai đường cực cắt nhau tại A. Nếu $P \in d'$ và $P' \in d$, ta nói d và d' vuông góc với nhau tại A. Lưu ý rằng phép biến đổi xuyên tâm với tâm là điểm P' và trục là d' chuyển điểm B thành điểm C thì nó cũng chuyển C thành B. Khi đó đường thẳng d' là trung trực của đoạn thẳng BC. *Suy ra một đường thẳng bất kì đi qua điểm cực P đều vuông góc với đường cực d. Như vậy nếu ta dựng một tứ giác với 3 góc vuông thì góc thứ tư còn lại không vuông. Trong hình học hyperbolic không tồn tại hình chữ nhật như trong hình học Euclide.*



Khoảng cách giữa hai điểm. Vấn đề mấu chốt của mô hình Cayley - Klein là định nghĩa khoảng cách giữa hai điểm sao cho các phép biến đổi xạ ảnh trong $G(X)$ (chiếu đường tròn K vào chính nó) là các phép rời hình. Nói cách khác các phép biến đổi xạ ảnh này phải bảo toàn khoảng cách. Ta biết rằng phép biến đổi xạ ảnh bảo toàn tỉ số kép. Do vậy ta sẽ định nghĩa khoảng cách giữa hai điểm như sau.

Khoảng cách giữa 2 điểm bất kì B, C trên đường thẳng UV của mô hình ($UV \subset X$ là một dây cung của đường tròn K) được định nghĩa bằng

$$\rho(B,C) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } B = C \\ \frac{1}{2}|\ln(UVBC)|, & \text{nếu } B \neq C, \end{cases}$$

$(UVBC)$ là tỉ số kép được tính bởi công thức $(UVBC) = (UVB) : (UVC) = \frac{\overline{UB}}{\overline{BV}} : \frac{\overline{UC}}{\overline{CV}}$. Lưu ý rằng do B, C là các điểm nằm trong UV nên tỉ số kép $(UVBC)$ luôn dương và không phụ thuộc thứ tự cách viết U, V trong tỉ số kép: $(UVBC) = (VUBC) = (UVCB) = (VUCB)$.

Do khoảng cách giữa 2 điểm B, C chỉ phụ thuộc vào tỉ số kép $(UVBC)$ nên các phép biến đổi xạ ảnh trong $G(X)$ bảo toàn khoảng cách, chúng là các phép rời hình. Hai hình hình học được coi là bằng nhau nếu tồn tại một phép biến đổi xạ ảnh trong $G(X)$ chiếu hình này lên hình kia. Các phép đối xứng qua trục, qua tâm định nghĩa ở trên là các phép rời hình như vậy.

Nhận xét rằng khoảng cách giữa 2 điểm, thay vì $\rho(B,C) = \frac{1}{2}|\ln(UVBC)|$, ta có thể định nghĩa tổng quát hơn $\rho(B,C) = k|\ln(UVBC)|$, với $k > 0$ là hằng số bất kì. Tuy nhiên trong bài viết này ta sử dụng $k = \frac{1}{2}$ để gắn sự tương đương của mô hình Klein với các mô hình khác sẽ được giới thiệu ở phần sau.

Sau định nghĩa về khoảng cách giữa hai điểm ở trên, bây giờ ta phải chỉ ra tập hợp các điểm trên một đường thẳng bất kì của mô hình *đẳng cự* (tương ứng một - một và tương đương về khoảng cách) với tập số thực $\mathbb{R}$.

Giả sử đường thẳng g cắt đường tròn K tại các điểm U, V và kí hiệu $\overline{g} = X \cap g$ là đường thẳng trong mô hình. Ta sẽ chỉ ra ánh xạ

$$d: \ \overline{g} \to \mathbb{R}, \ P \in \overline{g} \mapsto \frac{1}{2}\ln(UVP) = \frac{1}{2}\ln\frac{UP}{PV}$$

là song ánh và khoảng cách giữa 2 điểm bất kì $B, C \in \overline{g}: \ \rho(B,C) = |d(B) - d(A)|$. Thật vậy dễ dàng nhận thấy khi P chạy trên khắp đường thẳng $\overline{g}$ thì hàm $\ln$ cũng nhận mọi số thực và với B nằm giữa U và C thì

$$d(C) - d(B) = \frac{1}{2}\ln\frac{UC}{CV} - \frac{1}{2}\ln\frac{UB}{BV} = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV}\Big) = \rho(B,C).$$

Từ đây suy ra nếu A, B, C là các điểm thuộc $\overline{g}$ và B nằm giữa A và C thì $\rho(A,C) = \rho(A,B) + \rho(B,C)$.

Tập X với hàm khoảng cách ρ định nghĩa ở trên là không gian metric, điều này đồng nghĩa với việc chứng minh bất đẳng thức tam giác: $\rho(A,C) < \rho(A,B) + \rho(B,C)$, nếu các điểm A, B, C không thẳng hàng. Ta sẽ chứng minh điều này trong phần sau.

Góc giữa hai nửa đường thẳng. Gọi $A \in X$ là điểm trong và AM, AN là 2 nửa đường thẳng xuất phát từ A (M, N thuộc đường tròn K). Độ đo góc $\widehat{MAN}$ được xác định như sau. Chọn một phép biến đổi xạ ảnh $f \in G(X)$ sao cho $f(A) = \mathbf{0}$. Kí hiệu $M' = f(M), N' = f(N)$. Khi đó độ đo góc $\widehat{MAN}$ được xác định bằng độ đo Euclide góc $\widehat{M'ON'}$. Ta phải chỉ ra độ đo góc $\widehat{MAN}$ không phụ thuộc vào việc chọn f. Thật vậy nếu $g \in G(X)$ và $g(A) = \mathbf{0}$ khi đó $t = g \circ f^{-1}$ là ánh xạ tuyến tính có tính chất $t(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Nó chuyển các điểm trên đường tròn đơn vị vào đường tròn đó nên nó bảo toàn độ dài. Như vậy trên $\mathbb{R}^2$ nó là phép biến đổi trực giao, suy ra $t = g \circ f^{-1}$ bảo toàn góc. Vậy góc $\widehat{M'ON'}$ không phụ thuộc vào g.
Góc với đỉnh ở tâm O của mô hình có độ đo bằng độ đo góc đó trong hình học Euclide.

Sử dụng định nghĩa này ta có thể chứng minh 2 đường cực d, d' chứa 2 điểm cực P', P nói trên vuông góc với nhau.

Định lí cosin của hình học hyperbolic. Cho tam giác ABC trong mô hình X với α là góc ở đỉnh A và a, b, c là các cạnh đối diện lần lượt với các đỉnh A, B, C. Khi đó

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cdot \cos\alpha.$$

Ta sẽ chứng minh định lí này sau khi giới thiệu các mô hình khác.

Hệ quả của định lí này là sự hợp lí của khái niệm khoảng cách đã định nghĩa ở trên, không gian X với hàm khoảng cách $\rho(\cdot,\cdot)$ đã định nghĩa là không gian metric.

Bất đẳng thức tam giác. Cho tam giác ABC. Khi đó $\rho(A,B) + \rho(A,C) > \rho(B,C)$.

Thật vậy do $\alpha < \pi, \cos\alpha > -1$, theo định lí cosin

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cdot \cos\alpha < \cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c = \cosh(b+c).$$

Suy ra $a < b + c$.

Hệ thức tam giác vuông. Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi đó

$$\cosh a = \cosh b \cosh c.$$

Từ hệ thức này ta thấy cạnh huyền luôn lớn hơn cạnh góc vuông vì $\cosh a = \cosh b \cosh c > \cosh b \Rightarrow a > b$. Tương tự $a > c$. Định lí Pitago không đúng trong hình học hyperbolic. Chẳng hạn xét tam giác vuông ABC có 2 cạnh góc vuông $b = 1, c = 2$ khi đó

$$\cosh a = \cosh 1 \cdot \cosh 2 \approx 5.8 \Rightarrow a \approx 2.45,$$

trong khi từ hệ thức Pitago $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a \approx 2.24$.

Tuy nhiên nếu các cạnh của tam giác vuông ABC tương đối nhỏ từ hệ thức $\cosh a = \cosh b \cosh c$ ta có

$$a^2 \approx b^2 + c^2.$$

Thật vậy từ khai triển Maclorin của hàm $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ suy ra $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ khi x đủ nhỏ. Khi đó công thức $\cosh a = \cosh b \cosh c$ có dạng xấp xỉ như sau khi ta giác ABC có các cạnh tương đối bé

$$1 + \frac{a^2}{2} \approx (1 + \frac{b^2}{2})(1 + \frac{c^2}{2}) \approx 1 + \frac{b^2 + c^2}{2} \quad \text{hay} \quad a^2 \approx b^2 + c^2.$$

Vì vậy người ta còn gọi hệ thức $\cosh a = \cosh b \cosh c$ là định lí Pitago trong hình học hyperbolic.

Lưu ý rằng nếu tam giác ABC tương đối lớn hơn một chút, chẳng hạn $b = 4, c = 8$ khi đó $\cosh a \approx 40702 \Rightarrow a \approx 11.31$, cạnh huyền tăng lên nhiều.

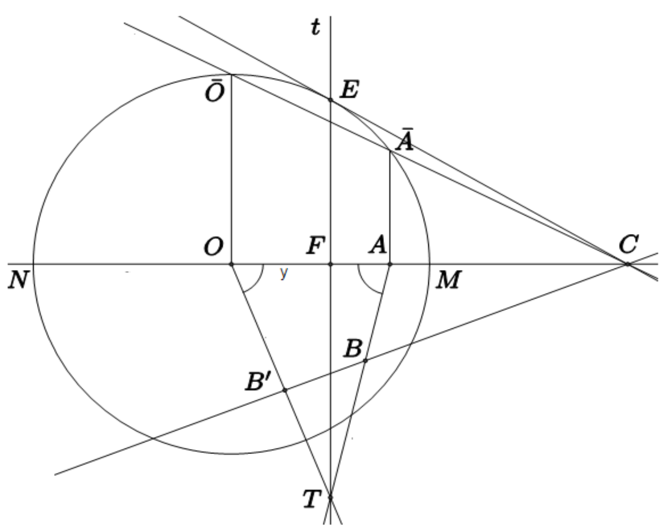
Tổng các góc trong tam giác nhỏ hơn 180^0. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề Góc nhọn $\widehat{OAB}$ trong mô hình có độ đo nhỏ hơn độ đo Euclide của chính nó (xem hình vẽ dưới).

Chứng minh. Hình vẽ dưới mô tả chi tiết cách dựng phép chiếu xuyên tâm chuyển A vào gốc tọa độ O bằng cách tìm giao của đường tròn với các đường thẳng vuông góc với OA. Đường thẳng nối 2 giao điểm $\overline{O}$ và $\overline{A}$ cắt OA tại tâm C của phép chiếu. Đường thẳng đi qua tiếp điểm E và vuông góc với OA là trục của phép chiếu

Bằng cách cách dựng tâm và trục của phép chiếu xuyên tâm như vừa trình bày ta thấy phép chiếu xuyên tâm chuyển A vào O, trục t của phép chiếu chính là trung trực đoạn OA (trung trực không phải theo nghĩa Euclide mà theo nghĩa mô hình).

Hình vẽ cũng chỉ ra cách dựng điểm đối xứng với B qua trục t (ảnh B' của B qua phép chiếu xuyên tâm). Góc $\widehat{OAB}$ đối xứng với $\widehat{AOB'}$ nên chúng có độ đo bằng nhau.



Ta sẽ chứng minh góc $\widehat{AOB'}$ bé hơn độ đo Euclide $\widehat{OAB}$ hay $FA < OF$ (độ dài Euclide). Đặt $OA = x, OF = y$, khi đó $\rho(O, A) = \frac{1}{2}\ln(MNOA) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. Tương tự $\rho(O, F) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$. Rút gọn phương trình $\rho(O, A) = 2\rho(O, F)$ ta được $x = \dfrac{2y}{1+y^2}$. Suy ra $x < 2y$, đ.p.c.m.

Bây giờ ta sẽ chứng minh

Định lí Tổng các góc trong một tam giác bất kì nhỏ hơn 180^0.

Chứng minh.

Giả sử ΔABC có góc C lớn nhất, khi đó 2 góc còn lại là các góc nhọn. (Vì trong trường hợp ngược lại, góc ngoài của $\widehat{C}$ lớn hơn cả $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$, suy ra nó lớn hơn 1v mà $\widehat{C}$ lớn nhất cũng lớn hơn 1v, vô lí). Ta có quyền giả thiết C trùng với tâm O vì trong trường hợp ngược lại ta sẽ sử dụng phép chiếu xuyên tâm để chuyển C vào O. Hai góc $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ theo bổ đề có độ đo nhỏ hơn độ đo Euclide của chính nó. Góc $\widehat{C}$ có đỉnh trùng với tâm O nên độ đo không thay đổi. Mặt khác ΔABC có tổng các góc bằng 180^0, suy ra tổng các góc của tam giác trong mô hình bé hơn 180^0.

Dựng trung trực một đoạn thẳng và phân giác của một góc

Hình vẽ thứ nhất dưới đây mô tả cách dựng trung trực đoạn thẳng AB. Nó đã được chỉ ra trong chứng minh bổ đề ở trên.

Bước thứ nhất dựng điểm cực P của đường thẳng AB.

Bước thứ hai dựng điểm C liên hợp với P. Điểm C cần dựng là giao của đường thẳng AB và A_1B_1.

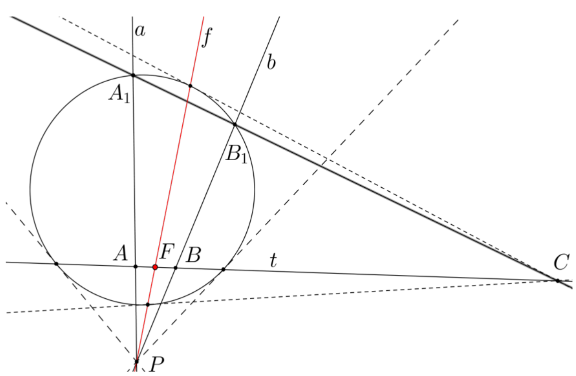
Khi đó đường cực của điểm C chính là trung trực đoạn thẳng AB.

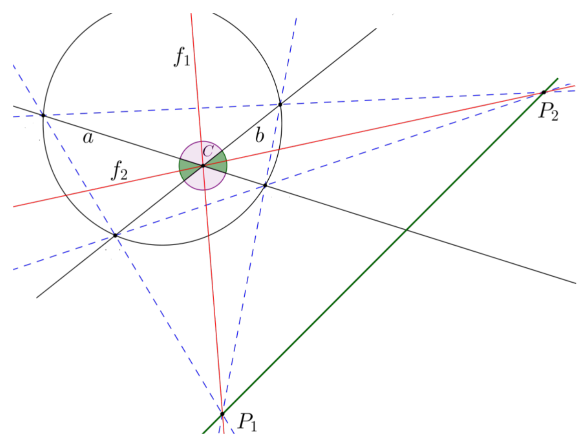
Lưu ý rằng từ cách vẽ đường trung trực suy ra có những tam giác mà trung trực của 2 cạnh không cắt nhau hay không tồn tại đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Hình vẽ thứ hai mô tả cách dựng 2 phân giác f_1, f_2 của các góc giữa 2 đường thẳng a và b. Gọi C là giao điểm của a và b.

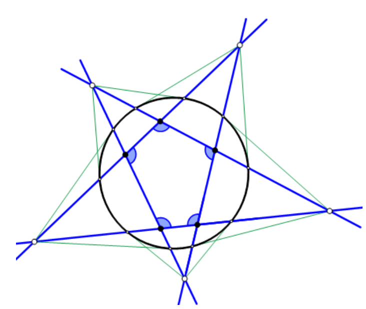
Dựng điểm P_1 và P_2 như hình vẽ. Khi đó C liên hợp với P_1 và C cũng liên hợp với P_2. Suy ra P_1P_2 là đường cực của C.

Vậy các phân giác f_1, f_2 chính là các đường cực của 2 điểm P_1, P_2.





Bài tập dựng một ngũ giác mà các góc ở đỉnh là các góc vuông



Dựa vào cách dựng các đường cực của các điểm nằm ngoài đường tròn, ta dễ dàng dựng một ngũ giác (hoặc lục giác...) mà các cạnh của nó là các đường cực của các điểm nằm ngoài tương ứng. Khi đó các cạnh liên tiếp của ngũ giác (lục giác...), đôi một vuông góc với nhau.
Ta cũng có thể dựng các đa giác đều n đỉnh $(n > 4)$ mà các góc ở đỉnh là các góc vuông.

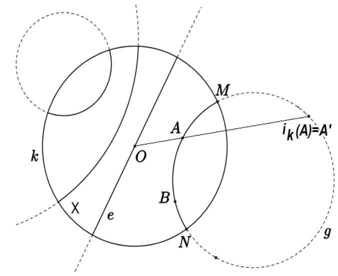
2 Mô hình Poincaré

Mô hình Poincaré về mặt phẳng hyperbolic là tập X cũng gồm các điểm trong hình tròn đơn vị k tâm $O(0,0)$. Kí hiệu $\mathscr{D}$ là tập các đường thẳng trong mô hình.

$\mathscr{D}$ gồm:

- Các cung nằm trong hình tròn đơn vị, vuông góc với đường tròn đó
- Các đường kính của đường tròn đơn vị.

Kí hiệu i_k là phép nghịch đảo đối với đường tròn k. Đường tròn g cắt vuông góc với đường tròn đơn vị khi và chỉ khi $i_k(g) = g$. (Phép nghịch đảo chuyển đường tròn g vào chính nó). Cũng đúng như vậy đối với các đường kính, $i_k(e) = e$ khi và chỉ khi đường thẳng e đi qua tâm O.

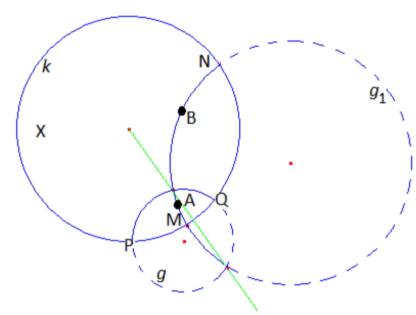


Ta thấy mô hình ngay lập tức thỏa mãn tiên đề: *qua 2 điểm tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua chúng.* Thật vậy qua 2 điểm khác nhau $A, B \in X$ chỉ có duy nhất một đường tròn g vuông góc với đường tròn k, đó là đường tròn đi qua $A, B, i_k(A)$. (*Nếu 3 điểm này thẳng hàng, g sẽ trở thành đường kính của đường tròn O*).

Phép biến đổi nghịch đảo

Phép biến đổi nghịch đảo đóng vai trò như phép rời hình - *congruency transformation* - (*phép quay, phép tịnh tiến, phép đối xứng*) trong hình học Euclide. Nói cách khác nó sẽ đóng vai trò như phép biến đổi xuyên tâm trong mô hình Klein.

Xét đường thẳng PQ trong mô hình. (PQ là cung nằm trong X của đường tròn g vuông góc với k - hình bên). Phép nghịch đảo i_g chiếu các điểm của X vào trong X. Hình bên minh họa $i_g(A) = B$ và $i_g(B) = A$. Nó cũng chuyển các điểm trên đường thẳng PQ vào chính nó. Hiển nhiên $i_g \circ i_g = id_X$ là phép biến đổi đồng nhất trên X.



Gọi MN là đường thẳng chứa 2 điểm A, B nói trên. Khi đó MN là cung nằm trong X của đường tròn g_1 vuông góc với k. Phép nghịch đảo i_g chiếu các điểm của MN vào các điểm thuộc MN. Mặt khác do tính chất $i_g \circ i_g = id_X$ ta có thể xem i_g như phép đối xứng trong hình học Euclide. Suy ra $AB \perp MN$.

Vậy hai đường thẳng AB và MN vuông góc với nhau khi và chỉ khi 2 đường tròn chứa nó (g và g_1) vuông góc với nhau. Đồng thời do $i_g(A) = B$ và $i_g(B) = A$ nên PQ là trung trực của đoạn AB.

Bây giờ ta sẽ định nghĩa khoảng cách giữa 2 điểm, tất nhiên phải đảm bảo để các phép biến đổi nghịch đảo sẽ là các phép rời hình, chúng là các phép biến đổi bảo toàn góc (*Xem chứng minh trong phụ lục 4*) và bảo toàn khoảng cách.

Khoảng cách giữa hai điểm. Khoảng cách giữa 2 điểm bất kì A, B trên đường thẳng MN (một cung của đường tròn g) được định nghĩa bằng

$$\rho(A,B) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } B = A \\ |\ln(MNAB)|, & \text{nếu } B \neq A. \end{cases} \qquad (MNAB) = \frac{MA}{AN} : \frac{MB}{BN}.$$

$(MNAB)$ cũng được gọi là tỉ số kép của 4 điểm trên đường tròn.

Lưu ý rằng do định lí hàm sin, tỉ số kép này bằng tỉ số kép của 4 nửa đường thẳng SM, SN, SA, SB với đỉnh S bất kì thuộc đường tròn.

Định nghĩa này đưa mô hình Poincare trở thành không gian metric. (Bất đẳng thức tam giác $\rho(A,B) < \rho(A,C) + \rho(C,B)$ sẽ được chỉ ra ở phần sau). Bây giờ ta chứng minh đường thẳng trong mô hình tương đương với tập các số thực $\mathbb{R}$ (đường thẳng thực trong mặt phẳng Euclide).

Đường tròn g (hay đường thẳng trong mô hình) cắt vuông góc k tại 2 điểm M, N. Kí hiệu $\overline{g} = X \cap g$ là đường thẳng trong mô hình và xét ánh xạ $d : \overline{g} \to \mathbb{R}, \ P \in \overline{g} \mapsto \ln \dfrac{MP}{PN}$.

Khi P chạy trong $\overline{g}$ thì tỉ số $\frac{MP}{PN}$ chạy khắp các số thực dương, suy ra d là song ánh giữa $\overline{g}$ và tập các số thực $\mathbb{R}$. Do đó nếu $A, B \in \overline{g}$

$$d(A) - d(B) = \ln \frac{MA}{AN} - \ln \frac{MB}{BN} = \ln\left(\frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB}\right).$$

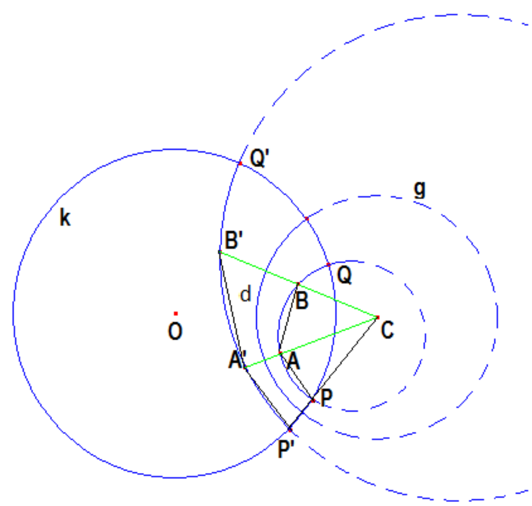
Như vậy khoảng cách giữa 2 điểm A, B trong mô hình $\rho(A, B) = |d(A) - d(B)|$ thỏa mãn yêu cầu cộng tính (hay tuyến tính) trên đường thẳng.

Phép biến đổi nghịch đảo bảo toàn khoảng cách trong mô hình

Cho đường tròn g tâm C vuông góc với đường tròn đơn vị k. Phép biến đổi nghịch đảo $i_g : X \Rightarrow X$ (đối với đường tròn g) chuyển các điểm A, B trên đường thẳng PQ của mô hình thành A', B' trên đường thẳng $P'Q'$. Ta sẽ chỉ ra $\rho(A, B) = \rho(A', B')$. Thật vậy $\Delta CAP \sim \Delta CP'A', \Delta CAQ \sim \Delta CQ'A' \Rightarrow \frac{AP}{CA} = \frac{A'P'}{CP'}, \frac{AQ}{CA} = \frac{A'Q'}{CQ'}$ suy ra

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AP}{CA} \cdot \frac{CA}{AQ} = \frac{A'P'}{CP'} \cdot \frac{CQ'}{A'Q'}$$

Tương tự $\dfrac{BQ}{BP} = \dfrac{CP'}{CQ'} \cdot \dfrac{B'Q'}{B'P'}$. Nhân hai đẳng thức với nhau ta được $(PQAB) = \dfrac{A'P'}{A'Q'} \cdot \dfrac{B'Q'}{B'P'} = (P'Q'A'B')$ hay $\rho(A, B) = \rho(A', B')$.



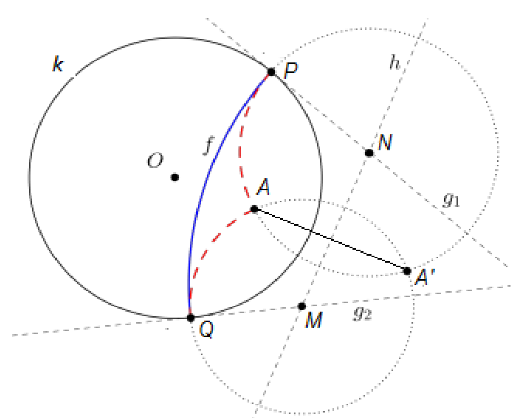
Nhắc lại rằng phép biến đổi nghịch đảo i_g là phép đối xứng qua đường thẳng d (một cung của đường tròn g). Nó bảo toàn khoảng cách và góc, nó là phép rời hình trong mô hìnhPoincare.

Góc giữa hai đường thẳng. Nếu 2 đường thẳng trong mô hình cắt nhau tại A (thực chất là 2 cung tròn). Góc giữa hai đường thẳng đó được định nghĩa là góc Euclide giữa 2 đường tròn chứa 2 cung đó. Nói cách khác đó là góc giữa 2 tiếp tuyến tại A với 2 đường tròn. Đặc biệt khi đỉnh A của góc trùng với tâm đường tròn, hai cạnh của góc sẽ là 2 đường kính và khi đó góc của mô hình cũng là góc Euclide. *Xem phụ lục 4, trong đó ta chứng minh phép nghịch đảo bảo toàn góc.*

Về tiên đề song song.

Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng f trong mô hình Poincare ta có thể vẽ được nhiều đường thẳng không cắt f. Bây giờ ta sẽ dựng 2 đường đi qua A và cùng tiếp xúc với f tại $P, Q \notin X$.

Trước tiên ta dựng ảnh A' của A qua phép biến đổi nghịch đảo $i_k(A) = A'$. Dựng tiếp các đường g_1, g_2 vuông góc với OP, OQ tương ứng. Khi đó giao điểm N, M của trung trực của AA' với g_1, g_2 sẽ là tâm các cung (đường thẳng AP, AQ trong mô hình) cần dựng.

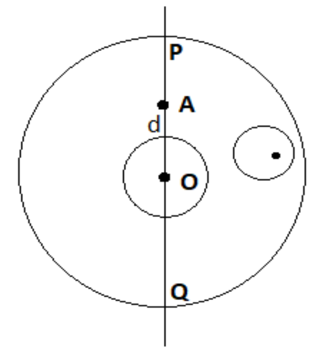


Mô hình Poincaré với việc qua một điểm bất kì kẻ được ít nhất 2 đường thẳng không cắt đường thẳng f cho trước ở trên, tạo thành hình học hyperbolic khá thuận tiện về mặt tính toán cho nhiều thiết lập sau này. Nó ưu việt ở chỗ phép nghịch đảo bảo toàn không chỉ khoảng cách mà còn bảo toàn góc. Bảo toàn góc ở đây còn được hiểu là sự trùng nhau giữa độ đo góc của mô hình và độ đo góc Euclide. Ta cũng có kết quả thú vị sau

Đường tròn trong mô hình Poincaré cũng là đường tròn Euclide.

Thật vậy xét điểm $A \in X$ và kí hiệu $d = d(O, A)$ là khoảng cách Euclide từ tâm O của đường tròn đến A và $\rho = \rho(O, A)$. Dễ dàng tính được từ định nghĩa

$$\rho = \ln(PQOA) = \ln \frac{1+d}{1-d} \Leftrightarrow d = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} = \tanh \frac{\rho}{2}.$$

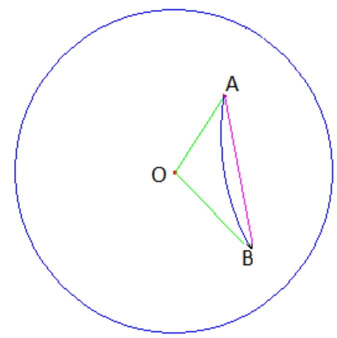


Đẳng thức này có nghĩa là đường tròn tâm O trong mô hình Poincaré cũng là đường tròn Euclide. Nhưng phép nghịch đảo có thể chuyển một điểm bất kì thành một điểm bất kì khác. Vì vậy đường tròn có tâm ở điểm bất kì trong mô hình Poincaré cũng là đường tròn Euclide.

(*Có thể minh họa vấn đề này bằng phần mềm Cabri, so sánh với đường tròn trong mô hình Klein.*)

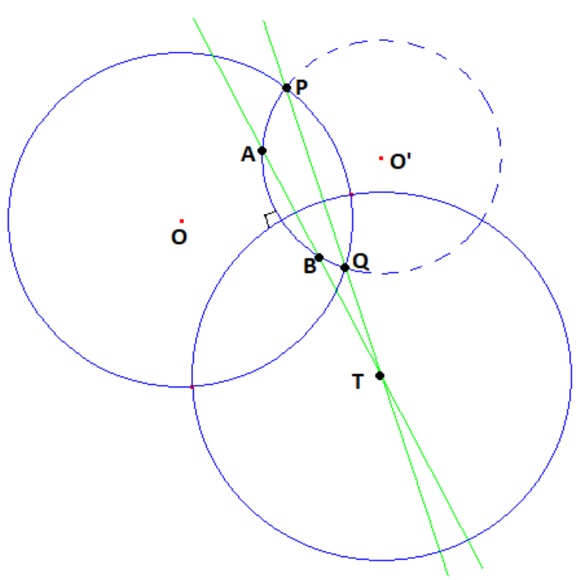
Định lí Tổng các góc trong một tam giác bất kì nhỏ hơn 180^0.

Chứng minh. Cũng như cách chứng minh tổng các góc trong một tam giác nhỏ hơn 180^0 trong mô hình Klein, ta có quyền giả thiết góc lớn của tam giác có đỉnh trùng với tâm O của đường tròn. Hai cạnh OA, OB là các đoạn thẳng của đường kính, cạnh còn lại là cung của đường tròn vuông góc với đường tròn k ban đầu. Từ đây suy ra các góc $\widehat{A}, \widehat{B}$ của mô hình bé hơn độ đo Euclide các góc $\widehat{OAB}, \widehat{OBA}$, suy ra tổng các góc trong tam giác OAB nhỏ hơn 180^0

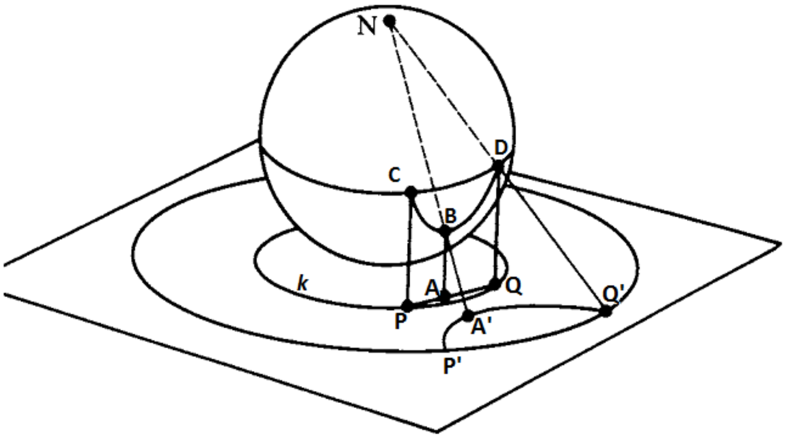


Dựng trung trực một đoạn thẳng

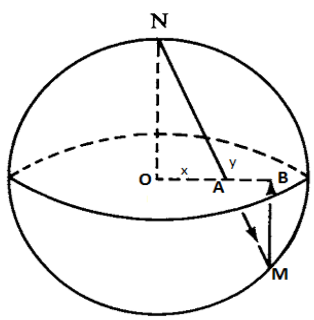
Hình vẽ thứ dưới đây mô tả cách dựng trung trực cung AB (đoạn thẳng trong mô hình Poincare). Dựng điểm T là giao của AB và PQ. Đường tròn tâm T vuông góc với đường tròn O thì cũng vuông góc với đường tròn O', vì T nằm trên trục đẳng phương của (O) và (O') và do vậy đường tròn đó là trung trực cần dựng.



Sự tương đương giữa mô hình Cayley-Klein và mô hình Poincaré . Sự tương ứng một - một giữa chúng được minh họa bằng hình vẽ sau



Đặt hình cầu trên mặt phẳng và kí hiệu k là hình chiếu vuông góc của hình cầu trên mặt phẳng đó. Đường thẳng PQ với $A \in PQ$ trong mô hình Cayley-Klein được đặt tương ứng với cung $P'A'Q'$ qua phép chiếu đỉnh N của cung CBD thuộc nửa dưới của mặt cầu xuống mặt phẳng đáy. (Cung CBD là giao của nửa mặt cầu với mặt phẳng chứa PQ và vuông với đáy). Dễ dàng nhận thấy cung $P'A'Q'$ là đường thẳng trong mô hình Poincaré. Dựa vào ý tưởng này, với phép tính đơn giản ta thiết lập song ánh giữa hai mô hình như sau.



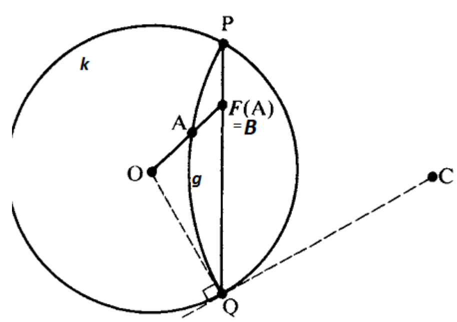
Kí hiệu $OA = x, OB = y$, xét 2 tam giác đồng dạng $OAN \sim BAM$, ta có $\dfrac{OA}{ON} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{OA + OB}{ON + BM} = \dfrac{OB}{ON + BM}$. Bán kính hình cầu $ON = 1$, suy ra $OA = x = \dfrac{OB}{1 + BM} = \dfrac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}$. Từ đẳng thức này với một chút biến đổi ta được $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Ta sẽ chọn hàm $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ làm song ánh ứng các điểm trong hình tròn đơn vị vào chính nó.

Chính xác hơn, hàm $F(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ chuyển điểm A (ứng với X) thuộc cung PQ trong mô hình Poincare, vào điểm $B = F(A)$ thuộc dây PQ của mô hình Klein sao cho khoảng cách $OB = \frac{2x}{1+x^2} \cdot OA$.

$$F(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}\right), \quad \text{trong đó} \;\; x_1^2 + x_2^2 < 1.$$

Đường tròn g tâm $C(c_1, c_2)$ vuông góc với (k) : $x^2 + y^2 = 1$ khi và chỉ khi phép nghịch đảo chuyển g vào chính nó hay g có phương trình: $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 - 1$ $(*)$. Khi đó đường cực của C là đường thẳng nối 2 giao điểm P, Q của g và k, có phương trình $c_1x_1 + c_2x_2 = 1$ $(**)$.



Bây giờ ta sẽ chứng minh ánh xạ này chuyển điểm A thuộc cung PQ (cung của đường tròn g trong mô hình Poincaré) vào điểm $F(A)$ thuộc đoạn thẳng PQ trong mô hình Klein. Thật vậy giả sử tọa độ của $A(x_1, x_2)$, ta phải chứng minh $F(A)$ thỏa mãn $(**)$

$$\frac{2(c_1x_1 + c_2x_2)}{1 + x_1^2 + x_2^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 - 1 \; (*),$$ điều này đúng do điểm $A(x_1, x_2) \in g$.

Sự tương đương của 2 mô hình được thể hiện trong định lí sau. Nó được chứng minh trong phụ lục 4.

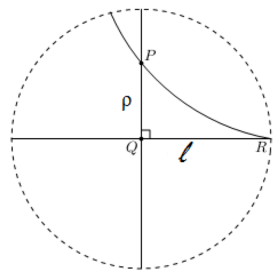
Định lí Ánh xạ F chuyển điểm A thuộc cung PQ (đường thẳng trong mô hình Poincaré) vào điểm $F(A)$ thuộc đoạn thẳng PQ trong mô hình Klein, bảo toàn khoảng cách và bảo toàn góc của hai mô hình.

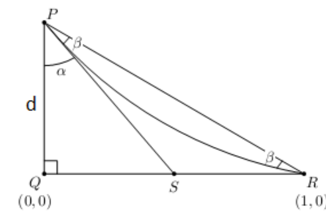
The Bolyai-Lobachevsky Formula. *Angle of parallelism is certainly one of the most remarkable formulas in all of mathematics.* Góc về tính song song là góc α giữa đường vuông góc với l kẻ từ P và đường thẳng đi qua P, có chung điểm vô cực với l. Bằng cách sử dụng phép chiếu xuyên tâm (hoặc phép nghịch đảo - tức là phép rời hình) ta có có thể đưa về góc giữa PQ và đường cong PR như trong hình vẽ dưới đây với mô hình Poincare. Kí hiệu ρ là khoảng cách Poincare từ P tới Q. Người ta còn gọi góc về tính song song α là góc tới và kí hiệu $\Pi(\rho)$.

Định lí (về công thức Bolyai-Lobachevsky). $e^{-\rho} = \tan\frac{\alpha}{2}$ hay $e^{-\rho} = \tan\frac{\Pi(\rho)}{2}$.

Chứng minh. Ta đã chứng minh $\rho = \ln\frac{1+d}{1-d}$ hay $e^{\rho} = \frac{1+d}{1-d}$, trong đó d là khoảng cách Euclide từ P tới Q. Gọi β là góc $\widehat{PRQ}$, khi đó $d = \tan\beta$ và $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, suy ra đ.p.c.m.

$$e^{\rho} = \frac{1+d}{1-d} = \frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta} = \frac{1+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}{1-\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})} =$$
$$= \frac{1+\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$





Nhận xét rằng khi khoảng cách $\rho = \rho(PQ) \to 0$ thì góc tới $\Pi(\rho) \to \frac{\pi}{2}$. Các đường thẳng song song trong hình học hyperbolic khi đó gần giống như các đường thẳng song song trong hình học Euclide. Các tam giác tương đối bé trong hình học hyperbolic cũng vậy, khá giống với các tam giác trong hình học Euclide. Vì vậy người ta còn nói hình học hyperbolic là hình học của các khoảng cách lớn và hình học Euclide là của các khoảng cách nhỏ.

Hệ quả Với kí hiệu $\alpha = \Pi(x)$, sử dụng các công thức lượng giác về góc nhân đôi và công thức Bolyai-Lobachevsky $e^{-x} = \tan\frac{\Pi(x)}{2}$, $e^{x} = \frac{1}{\tan\frac{\Pi(x)}{2}}$, ta có

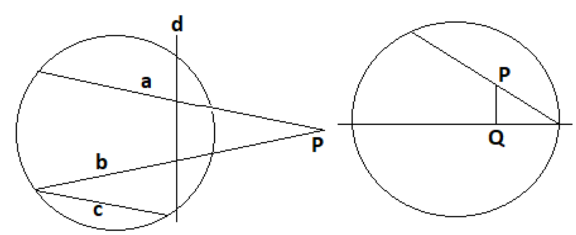
a) $\Pi(x) = 2\arctan e^{-x}$

b) $\sin\Pi(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$

c) $\cos\Pi(x) = \tanh x$

d) $\tan\Pi(x) = \dfrac{1}{\sinh x}$

Song song và siêu song song Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung và cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn cơ bản k. Nếu chúng cắt nhau tại điểm P ngoài đường tròn, ta nói chúng siêu song song (ultraparallel). Hình vẽ bên mô tả a và b siêu song song trong khi b và c song song với nhau.
Với cặp đường thẳng siêu song song, tồn tại duy nhất đường thẳng vuông với cả hai. Đó là đường cực của P (hình vẽ bên).



Với cặp đường thẳng song song, khoảng cách giữa 2 điểm P, Q thuộc chúng có thể tiến dần tới 0 (sử dụng khoảng cách trong mô hình Cayley Klein chẳng hạn). Khi đó góc tới theo công thức Bolyai-Lobachevsky dẫn tới góc vuông. Ta cũng có thể minh họa điều này bằng mô hình Poincare.

Các hệ thức lượng trong tam giác vuông

Trước hết ta nhắc lại khoảng cách từ tâm O đến A trong mô hình Poincare $\rho = \rho(O, A) = \ln(PQOA) = \ln\frac{1+d}{1-d}$ hay $e^{\rho} = \frac{1+d}{1-d}$ trong đó $d = OA$ là khoảng cách Euclide từ O đến A. Ta cũng kí hiệu $F(d) = \dfrac{2d}{1+d^2}$ là song ánh tương ứng độ điểm A thuộc cung PQ trong mô hình Poincare với điểm ảnh của A thuộc đoạn thẳng PQ trong mô hình Klein. Dễ dàng tính được các hệ thức sau

$$\sinh\rho = \frac{2d}{1-d^2}, \quad \cosh\rho = \frac{1+d^2}{1-d^2}, \quad \tanh\rho = \frac{2d}{1+d^2} = F(d)$$

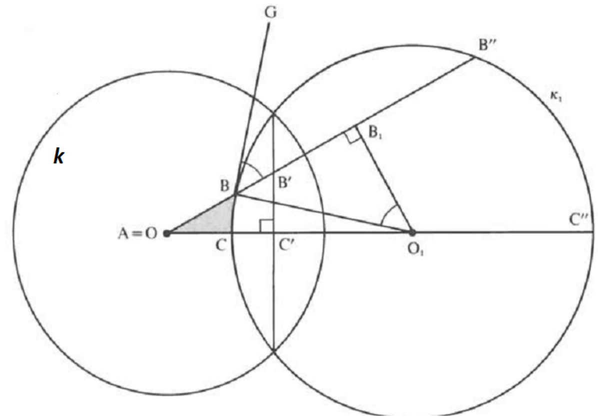
Định lí Cho tam giác ABC vuông ở C (trong mặt phẳng hyperbolic). Gọi a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C. Khi đó

- $\sin A = \dfrac{\sinh a}{\sinh c}, \quad \cos A = \dfrac{\tanh b}{\tanh c}$
- $\cosh a = \dfrac{\cos A}{\sin B}.$

Nhận xét rằng khi các cạnh tam giác ABC tương đối bé

$$\sin A \approx \frac{a}{c} \qquad \cos A \approx \frac{b}{c}.$$

Chứng minh. Ta giả thiết đỉnh A của ΔABC trùng với tâm O của đường tròn K, 2 điểm B', C' trùng với ảnh của B, C qua song ánh $F(d) = \dfrac{2d}{1+d^2}$ tương ứng hai mô hình Poincare và Klein. Điều đó luôn đạt được bằng phép biến đổi nghịch đảo thích hợp. Xét tam giác vuông $B'C'O$



$$\cos A = \frac{OC'}{OB'} = \frac{F(OC)}{F(OB)} = \frac{\tanh b}{\tanh c}$$

Dựa vào hình bên ta thấy góc $\widehat{B} = \widehat{BO_1B_1}$ nên

$$\sin B = \frac{BB_1}{BO_1} = \frac{BB"}{CC"}.$$

Mặt khác $BB" = OB" - OB = \dfrac{1}{OB} - OB = \dfrac{1 - OB^2}{OB} = \dfrac{2}{\sinh c}$ và tương tự $CC" = \dfrac{2}{\sinh b}$, suy ra $\sin B = \dfrac{BB"}{CC"} = \dfrac{\sinh b}{\sinh c}$. Đổi vai trò của a và b cho nhau ta được điều phải chứng minh $\sin A = \dfrac{\sinh a}{\sinh c}$.

Công thức thứ hai trong định lí là hiển nhiên

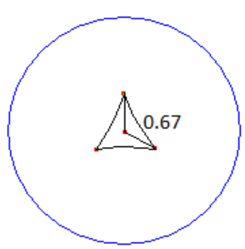
$$\frac{\cos A}{\sin B} = \frac{\tanh b}{\tanh c} \cdot \frac{\sinh c}{\sinh b} = \frac{\cosh c}{\cosh b} = \cosh a.$$

Lưu ý rằng công thức $\cosh a = \dfrac{\cos A}{\sin B}$ kéo theo một sự thật khác biệt so với các kết quả trong hình học Euclide: độ dài các cạnh của tam giác được xác định theo các góc trong tam giác.

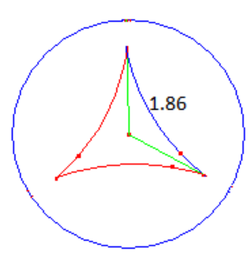
- *ΔABC vuông cân tại C, góc $\widehat{A} = \widehat{B} = 30^0$. Khi đó $\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B} = \sqrt{3}, \sinh a = \sqrt{2}$, suy ra cạnh góc vuông $a = b \approx 1.14622$ và cạnh huyền $c \approx 1.76275$.*
- *ΔABC vuông cân, cạnh góc vuông $a = b = 1 \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \approx 33^0$. Nếu $a = b = 0.5 \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \approx 42^0$.*
- *ΔABC vuông tại C, góc $\widehat{A} = 30^0$. Nếu cạnh huyền bé $c = 0.5 \Rightarrow \widehat{B} \approx 57^0$ hoặc $c = 0.3 \Rightarrow \widehat{B} \approx 59^0$, nếu $c = 1 \Rightarrow \widehat{B} = 48^0$ và nếu $c = 3 \Rightarrow \widehat{B} = 9^0$.*

Các ví dụ về việc tính độ dài các cạnh đa giác đều theo các góc ở đỉnh

- (***Tam giác đều***) Hình vẽ dưới minh họa các tam giác đều cạnh a trong mô hình Poincare. Hình vẽ thứ nhất là tam giác đều góc $\alpha = 50^0$, cạnh $a \approx 0.67$. Hình thứ hai minh họa tam giác đều góc $\alpha = 20^0$, cạnh $a \approx 1.86$. Góc α của tam giác đều càng nhỏ thì độ dài cạnh a càng lớn.



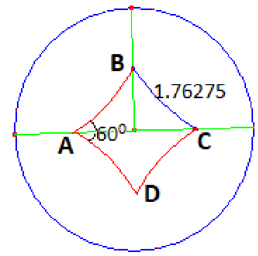
Tam giác đều góc 50^0



Tam giác đều góc 20^0

• (***Tứ giác đều với các góc ở đỉnh bằng*** 60^0)
Hình vẽ bên minh họa tứ giác đều $ABCD$. Các góc ở đỉnh bằng nhau và bằng

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 60^0.$$



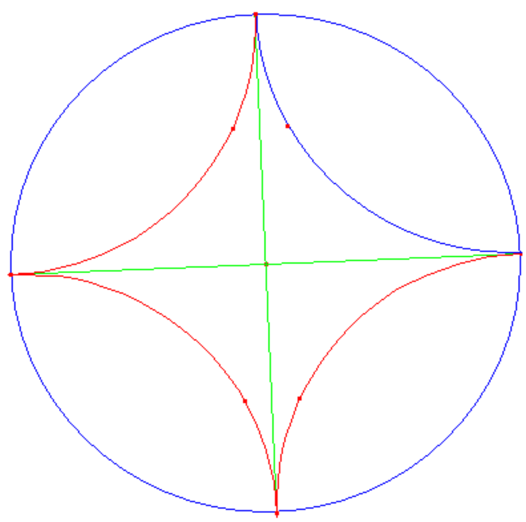
Khi đó các cạnh của tứ giác đều được tính dựa theo các hệ thức lượng trong tam giác vuông. Chẳng hạn xét tam giác vuông cân OBC, với O là đỉnh góc vuông. Cạnh góc vuông $OB = b = OC = c$ được tính dựa theo công thức

$$\cosh b = \frac{\cos \widehat{OBC}}{\sin \widehat{OCB}} = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$$

Cạnh huyền $BC = a$ thỏa mãn định lí Pitago $\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c = 3$. Vậy các cạnh tứ giác đều có độ dài

$$AB = BC = CD = DA = \cosh^{-1} 3 \approx 1.76275$$

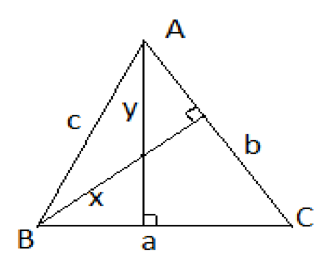
• (***Tứ giác đều có các đỉnh là các điểm cực***) Tứ giác đều có các đỉnh nằm trên đường tròn cơ sở, nói cách khác các đỉnh là các điểm cực. Khi đó tứ giác kéo dài ra vô hạn, góc của tứ giác đều tiến dần đến 0, độ dài cạnh tứ giác đều sẽ dần ra vô cùng và ta minh họa tứ giác đều có các đỉnh là các điểm cực (trong mô hình Poincare) như hình vẽ dưới đây



Định lí hàm sin của hình học hyperbolic. Cho tam giác ABC, kí hiệu a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C. Khi đó

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}.$$

Chứng minh. Kẻ các đường cao x, y từ A, B xuống các cạnh đối diện và sử dụng định lí trên cho các tam giác vuông trong hình bên



$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{1}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh x}{\sinh c} = \frac{\sin C}{\sinh c}.$$

Tương tự

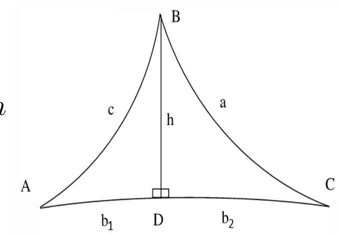
$$\frac{\sin C}{\sinh c} = \frac{1}{\sinh c} \cdot \frac{\sinh y}{\sinh b} = \frac{\sin B}{\sinh b}, \text{ đ.p.c.m.}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lí cosin của hình học hyperbolic đã phát biểu trước đây

Định lí cosin. Cho tam giác ABC với a, b, c là các cạnh đối diện lần lượt với các đỉnh A, B, C. Khi đó

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cdot \cos A.$$

Chứng minh. Sử dụng các kí hiệu hình bên, xét các tam giác vuông $\Delta BDC, \Delta BDA$



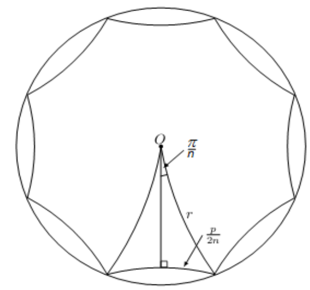
$$\cosh a = \cosh b_2 \cosh h = \cosh(b - b_1)\cosh h = (\cosh b \cosh b_1 - \sinh b \sinh b_1)\cosh h$$

$$= \cosh b(\cosh b_1 \cosh h) - \sinh b \sinh b_1 \cosh h = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh b_1 \cdot \frac{\cosh c}{\cosh b_1}$$

$$= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cdot \frac{\cosh c \sinh b_1}{\cosh b_1 \sinh c}, \text{ mà } \frac{\cosh c \sinh b_1}{\cosh b_1 \sinh c} = \frac{\tanh b_1}{\tanh c} = \cos A, \text{ suy ra đ.p.c.m.}$$

Chu vi đường tròn trong hình học hyperbolic.

Định lí Gọi C là chu vi đường tròn bán kính r. Khi đó $C = 2\pi \sinh r$.



Chứng minh. Chu vi đường tròn tất nhiên sẽ được định nghĩa là giới hạn của chu vi đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn khi $n \to \infty$. (Xem hình bên). Kí hiệu p_n là chu vi đa giác. Theo hệ thức trong tam giác vuông $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\sinh \frac{p_n}{2n}}{\sinh r}$ hay $\sinh \frac{p_n}{2n} = \sin \frac{\pi}{n} \sinh r \Rightarrow 2n \sinh \frac{p_n}{2n} = 2n \sin \frac{\pi}{n} \sinh r$. Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được

$$C = 2\pi \sinh r.$$

Bolyai sử dụng kí hiệu Or để biểu diễn chu vi đường tròn bán kính r và ông viết định lí hàm sin trong Appendix dưới dạng

$$\mathrm{O}a : \mathrm{O}b : \mathrm{O}c = \sin A : \sin B : \sin C$$

Diện tích hình tròn trong hình học hyperbolic. Khái niệm diện tích không thể xây dựng như trong hình học Euclide, đơn giản vì không tồn tại hình vuông đơn vị. Người ta định nghĩa diện tích như trong lí thuyết độ đo. (*Hai hình bằng nhau có độ do bằng nhau, hợp 2 hình không có điểm chung có độ đo bằng tổng của chúng...*). Điều rất thú vị trong hình học hyperbolic là hàm *số khuyết* của tổng các góc của tam giác, kí hiệu $\delta(\Delta ABC) = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}$ thỏa mãn đủ các yêu cầu cho khái niệm *diện tích tam giác*.

Nếu tam giác ABC vuông tại C, diện tích tam giác $K = \frac{\pi}{2} - \widehat{A} - \widehat{B}$. Sử dụng các hệ thức đã biết về các hàm hyperbolic: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \mathrm{ch} 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x, \mathrm{sh} 2x = 2\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x$, suy ra

$$\tanh^2 \frac{a}{2} \tanh^2 \frac{b}{2} = \frac{\cosh a - 1}{\cosh a + 1} \cdot \frac{\cosh b - 1}{\cosh b + 1} = \frac{\frac{\cos A}{\sin B} - 1}{\frac{\cos A}{\sin B} + 1} \cdot \frac{\frac{\cos B}{\sin A} - 1}{\frac{\cos B}{\sin A} + 1} = \frac{1 - \sin(A + B)}{1 + \sin(A + B)} = \frac{1 - \cos K}{1 + \cos K} = \tanh^2 \frac{K}{2}$$

$$\text{hay } \boxed{\tanh \frac{a}{2} \tanh \frac{b}{2} = \tanh \frac{K}{2}}$$

Định lí Diện tích hình tròn bán kính r, kí hiệu $\odot r$ (kí hiệu của Bolyai) bằng $4\pi \sinh^2 \dfrac{r}{2}$.

Chứng minh. Kí hiệu K_n là diện tích đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn (hình vẽ trên), a_n là khoảng cách từ O tới cạnh đa giác, p_n là chu vi đa giác. Theo kết quả vừa tính, $\tanh \dfrac{K_n}{4n} = \tanh \dfrac{p_n}{4n} \tanh \dfrac{a_n}{2}$. Nhân cả hai vế với $4n$ và chuyển qua giới hạn, sử dụng $\tanh x = x + o(x^2)$ khi $x \to 0$, ta được

$$\odot r = \mathrm{O}r \tanh \frac{r}{2} = \mathrm{O}r \cdot \frac{\sinh r}{\cosh r + 1} = \mathrm{O}r \cdot \frac{(\cosh r - 1)\sinh r}{\cosh^2 r - 1} = 2\pi \sinh r \cdot \frac{2\sinh^2 \frac{r}{2} \sinh r}{\sinh^2 r} = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}.$$

(*Diện tích hình tròn cũng có thể tính bằng công thức* $\int_0^r Oxdx = \int_0^r 2\pi \sinh x dx = 2\pi(\cosh r - 1) = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}$. *Một điều kinh ngạc là chu vi và diện tích hình tròn, theo các công thức nói trên, tăng tỉ lệ với hàm mũ* e^r *của bán kính* r *của hình tròn. Nói cách khác càng xa tâm* O *mật độ các điểm của mặt phẳng hyperbolic càng cao.*)

3 Mô hình hyperboloid

Không gian Minkowski (Minkowski space or Minkowski spacetime) Cùng với sự phát triển của vật lí lí thuyết, không gian Minkowski đặt nền móng toán học cho lí thuyết tương đối hẹp của Eintein. Không gian Minkowski là không gian tuyến tính thực W có chiều $d+1$ và trên W xác định dạng toàn phương không suy biến q có chỉ số quán tính dương bằng d và chỉ số quán tính âm bằng 1

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 - x_{d+1}^2.$$

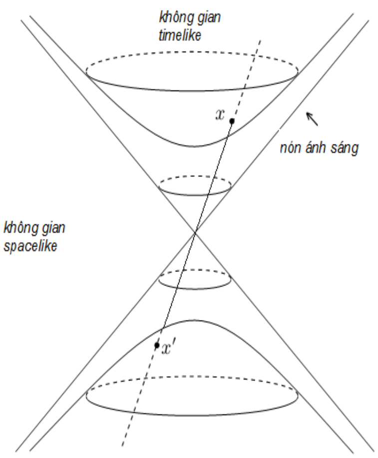
Các véc tơ trong $\mathbf{x} \in W$ được gọi là *dạng không gian, dạng thời gian và dạng ánh sáng* (*spacelike, timlike, lightlike*) nếu $q(\mathbf{x}) > 0, q(\mathbf{x}) < 0, q(\mathbf{x}) = 0$. Tập hợp các véc tơ dạng ánh sáng $\{\mathbf{x} \in W : \ q(\mathbf{x}) = 0\}$ tạo thành một nón trong không gian $d+1$ chiều được gọi là *nón ánh sáng* trong không gian Minkowski.

Nếu $V \lhd W$ là không gian con của W, có chiều $\dim V = k+1$ khi đó hạn chế của q lên V, kí hiệu $q|_V$ là dạng toàn phương có ít nhất k giá trị riêng dương, giá trị riêng thứ $k+1$ có thể dương, âm hoặc 0. Khi đó không gian V cũng được gọi tương ứng theo tên *dạng không gian, dạng thời gian hoặc dạng ánh sáng*.

Nếu V là không gian con *spacelike*, $q|_V$ là dạng toàn phương xác định dương, không gian V trở thành không gian Euclide với tích vô hướng ứng với $q|_V$.

Nếu V là không gian con *timelike*, $q|_V$ là dạng toàn phương không xác định dấu, không gian V cắt nón ánh sáng và $(V, q|_V)$ trở thành không gian Minkowwski.

Nếu V là không gian con *lightlike*, $q|_V$ là dạng toàn phương suy biến, không gian V chứa một đường sinh duy nhất của nón ánh sáng.



Dạng song tuyến tính đối xứng ứng với q, mặc dù không phải là tích vô hướng trên W, để thuận tiện cho việc trình bày được kí hiệu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Kí hiệu tiếp $V^\perp = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} \perp V\}$ (theo dạng song tuyến tính vừa nói, hay $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in V$). Dễ dàng chỉ ra $V^\perp \lhd W$ và là không gian con *dạng không gian* nếu V là không gian con *dạng thời gian*. Ngược lại nếu V là *dạng không gian* thì $V^\perp$ là không gian con *dạng thời gian*. Đặc biệt khi véc tơ $\mathbf{u} \in W, q(\mathbf{u}) < 0$ thì $\mathbf{u}^\perp$ là không gian con *spacelike*, còn nếu $q(\mathbf{u}) > 0$ thì $\mathbf{u}^\perp$ *timelike*.

Không gian V là không gian con *dạng ánh sáng* khi và chỉ khi $V^\perp$ cũng là không gian con *dạng ánh sáng* (lightlike). Tất cả các khẳng định này có thể giải thích đơn giản dựa vào luật quán tính của dạng toàn phương.

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ngược. Gọi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ là hai véc tơ *dạng thời gian* trong không gian Minkowski W. Khi đó

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \sqrt{q(\mathbf{u}) q(\mathbf{v})}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ phụ thuộc tuyến tính.

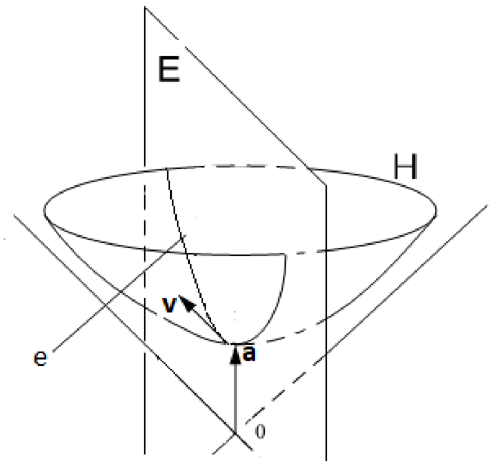
Chứng minh. Nếu $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \lambda^2 q(\mathbf{v})^2 = q(\mathbf{u}) q(\mathbf{v})$. Giả sử $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ độc lập tuyến tính, khi đó không gian con V sinh bởi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dạng *timelike*, có chiều bằng 2. Suy ra dạng toàn phương $q|_V$, hạn chế trên V không xác định dấu. Ma trận của nó trong cơ sở $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $B = \begin{pmatrix} q(\mathbf{u}) & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & q(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ có phần tử đầu tiên $q(\mathbf{u}) < 0$. Vậy $\det B < 0$ hay $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \sqrt{q(\mathbf{u}) q(\mathbf{v})}$, đ.p.c.m.

Mô hình hyperboloid cho hình học phẳng hyprebolic

Mô hình hyperboloid là tập H gồm các điểm của một nhánh hyperboloid $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0$ trong $\mathbb{R}^3$. Ta nghiên cứu H trong không gian Minkowski với dạng toàn phương

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Khi đó $\mathbf{a} \in H \Leftrightarrow q(\mathbf{a}) = -1$ và $a_3 > 0$. Các đường thẳng trong mặt phẳng hyperbolic H là giao của mặt phẳng Euclide E đi qua gốc tọa độ với nhánh trên của hyperboloid, ta sẽ kí hiệu e.



Giả sử $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3) \in H$, khi đó $\mathbf{a}$ là véc tơ dạng timelike và $\mathbf{a}^\perp = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \perp \mathbf{a}\}$ là mặt phẳng đi qua O và là không gian con 2 chiều *dạng không gian*. Như đã nói ở trên hạn chế của q lên không gian con này, $q|_{\mathbf{a}^\perp}$ là dạng toàn phương xác định dương. Mọi véc tơ $\mathbf{v}$ trong nó có độ dài dương và $||\mathbf{v}|| = \sqrt{q(\mathbf{v})}$. Dễ dàng chỉ ra mặt phẳng $\mathbf{a}^\perp$ song song với tiếp diện tại $\mathbf{a}$ của hyperboloid.

Thật vậy, tiếp diện tại $\mathbf{a}$ của hyperboloid có véc tơ pháp $\mathbf{n}(2a_1, 2a_2, -2a_3)$. Nói cách khác phương trình của mặt phẳng tiếp diện $2a_1(x_1 - a_1) + 2a_2(x_2 - a_2) - 2a_3(x_3 - a_3) = 0$ hay

$$a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = -1 \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = -1.$$

Mặt phẳng $\mathbf{a}^\perp$ gồm các véc tơ $\mathbf{x}$ sao cho $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0$, do đó chúng là các mặt phẳng song song.

Véc tơ tiếp tuyến với đường thẳng e tại $\mathbf{a}$ thuộc không gian $\mathbf{a}^\perp$. Gọi $\mathbf{v}$ là véc tơ đơn vị ($||\mathbf{v}|| = 1$) chỉ hướng của tiếp tuyến. Như vậy đường thẳng e (giao của mặt phẳng E với hyperboloid) được xác định duy nhất bởi 2 véc tơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{v}$.

Biểu diễn tham số của đường thẳng

Định lí Giả sử $\mathbf{a} \in H, \mathbf{v} \in \mathbf{a}^\perp, ||\mathbf{v}|| = 1$. Khi đó đường thẳng e đi qua $\mathbf{a}$ với hướng $\mathbf{v}$ trong mô hình có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = \cosh t \cdot \mathbf{a} + \sinh t \cdot \mathbf{v}.$$

Chứng minh. Hiển nhiên $\mathbf{r}(t)$ là tổ hợp tuyến tính của 2 véc tơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{v}$ nên nó biểu diễn một đường cong trong E. Nó cũng thuộc H vì

$$q(\mathbf{r}(t)) = \langle \cosh t \cdot \mathbf{a} + \sinh t \cdot \mathbf{v}, \cosh t \cdot \mathbf{a} + \sinh t \cdot \mathbf{v} \rangle = \cosh^2 t \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \sinh^2 t \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1.$$

Khi t thay đổi do $\sinh t$ nhận mọi giá trị trong $\mathbb{R}$ nên $\mathbf{r}(t)$ chạy khắp đường thẳng e của mô hình.

Khoảng cách giữa hai điểm.

Khoảng cách giữa 2 điểm bất kì $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ trên đường thẳng e được định nghĩa

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cosh^{-1}\big(-\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\big).$$

Ta sẽ chỉ ra sự hợp lí khi sử dụng hàm ngược $\cosh^{-1}$. Véc tơ $\mathbf{u}$ thuộc *dạng thời gian* và $\mathbf{u}^\perp$ thuộc *dạng không gian* nên các véc tơ thuộc *dạng thời gian* phải nằm cùng một phía với mặt phẳng $\mathbf{u}^\perp$. Mà $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -1 < 0$

suy ra $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle < 0$. (Ta cũng có thể giải thích bằng hình học rằng $\mathbf{u}^{\perp}$ song song với mặt phẳng tiếp tuyến và H nằm về một phía của mặt phẳng này).

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ngược $-\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \geq \sqrt{q(\mathbf{u})q(\mathbf{v})} = 1$. Với định nghĩa khoảng cách này, ta có kết quả

Định lí Khoảng cách giữa 2 điểm bất kì $\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)$ trên đường thẳng e bằng

$$\rho(\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)) = |t_1 - t_2|.$$

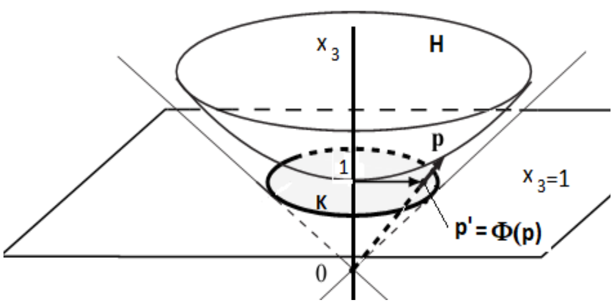
Chứng minh. $\langle \mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)\rangle = \langle \cosh t_1 \cdot \mathbf{a} + \sinh t_1 \cdot \mathbf{v}, \cosh t_2 \cdot \mathbf{a} + \sinh t_2 \cdot \mathbf{v}\rangle = \cosh t_1 \cosh t_2 \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle + \sinh t_1 \sinh t_2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = -\cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2 = -\cosh(t_1 - t_2)$, suy ra đ.p.c.m.

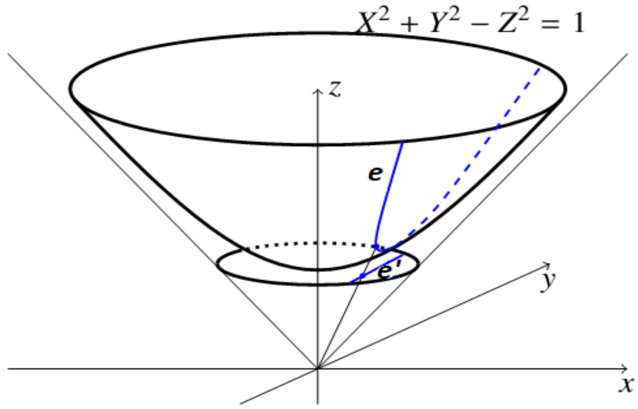
Người ta nói biểu diễn tham số nói trên là biểu diễn tham số tự nhiên.

Góc giữa 2 đường thẳng là góc hình học giữa 2 tiếp tuyến tại giao điểm của chúng. Nói cách khác góc giữa 2 đường thẳng trong mô hình là góc $0 \leq \varphi \leq \pi$ giữa 2 véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ trong biểu diễn tham số của 2 đường thẳng sao cho $\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\sqrt{q(\mathbf{u})q(\mathbf{v})}}$.

Sự tương đương giữa mô hình Cayley-Klein và mô hình hyperboloid.

Gắn hyperboloid với hệ tọa độ thuần nhất. Gọi K là hình tròn giao của mặt phẳng $x_3 = 1$ với hình nón $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Khi đó song ánh Φ đặt $\mathbf{p} \in H$ tương ứng với $\mathbf{p}' \in K$ (giao của đường thẳng qua 0 có $\mathbf{p}$ là véc tơ chỉ phương - với mặt phẳng $x_3 = 1$) chỉ ra sự tương đương giữa hai mô hình hyperboloid và Cayley-Klein. Song ánh này bản chất là phép chiếu tâm 0, véc tơ $\mathbf{p} \in H$ xác định véc tơ $\mathbf{p}' = [\mathbf{p}]$ trong hệ tọa độ thuần nhất. Nó chuyển đường thẳng $e \subset H$ thành dây cung e' của đường tròn K.





Định lí Song ánh $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ bảo toàn khoảng cách. Cụ thể với bất kì $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$

$$\rho_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_p([x], [y])$$

trong đó ρ_h là khoảng cách trong mô hình hyperboloid và ρ_p là khoảng cách trong mô hình Cayley-Klein.

Chứng minh. Mặt phẳng E (không gian con sinh bởi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$) cắt nón ánh sáng theo 2 tia, chọn 2 véc tơ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ chỉ hướng của 2 tia đó làm cơ sở của E sao cho $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Đặt $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$

$$-1 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \rangle = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \text{ và } -1 = \langle \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}\rangle = 2\lambda\mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \Rightarrow < \mathbf{u}, \mathbf{v}> = -\frac{1}{2}, \lambda\mu = 1.$$

Kí hiệu $t = \rho_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, khi đó

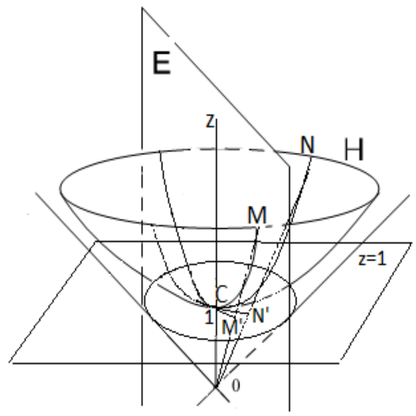
$$\cosh t = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = -\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}\rangle = -(\lambda + \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}$$

Vậy $\lambda = e^t$ hoặc $\lambda = e^{-t}$. mặt khác

$$\rho_p([x], [y]) = \frac{1}{2}\left|\ln\left(\frac{1}{1} : \frac{\mu}{\lambda}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\ln(\lambda)^2\right| = \left|\ln\lambda\right| = t. \text{ đ.p.c.m.}$$

Định lí Song ánh $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ bảo toàn góc giữa hai mô hình hyperboloid và Cayley-Klein.

Chứng minh. Giả sử C là tâm đường tròn K trong mô hình Klein và xét trường hợp đặc biệt khi 2 đường thẳng trong mô hình hyperboloid cắt nhau tại $C(0,0,1)$. Góc giữa 2 đường thẳng CM, CN (xem hình vẽ dưới) là góc giữa 2 tiếp tuyến CM', CN' với chúng tại C. Ta đã biết góc giữa CM' và CN' là góc có đỉnh tại tâm C nên cũng là góc trong mô hình Cayley-Klein.



Trường hợp tổng quát, ta chọn phép biến đổi Lorentz thích hợp để đưa 2 đường thẳng chuyển về cắt nhau tại C. Chúng đều bảo toàn góc nên sử dụng kết quả trên ta được đ.p.c.m.

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lí cosin (đã chứng minh trước) bằng việc sử dụng phương trình tham số của đường thẳng

Định lí cosin. Cho tam giác ABC với a, b, c là các cạnh đối diện lần lượt với các đỉnh A, B, C. Khi đó

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cdot \cos A.$$

Chứng minh. Phương trình đường thẳng AB : $\mathbf{r}_1(t) = \cosh t \cdot \mathbf{a} + \sinh t \cdot \mathbf{u}$ và AC : $\mathbf{r}_2(t) = \cosh t \cdot \mathbf{a} + \sinh t \cdot \mathbf{v}$. Với các kí hiệu như trước đây $\mathbf{r}_1(c) = \mathbf{b}, \mathbf{r}_2(b) = \mathbf{c}$. Xét tích vô hướng

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \cosh c \cdot \mathbf{a} + \sinh c \cdot \mathbf{u}, \cosh b \cdot \mathbf{a} + \sinh b \cdot \mathbf{v} \rangle = \cosh b \cosh c \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \sinh b \sinh c \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Thay $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\cosh a$ và $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos A$ ta được $-\cosh a = -\cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c \cdot \cos A$, đ.p.c.m.

PHỤ LỤC

1 Bổ sung hình học về phép biến đổi affine

Phép biến đổi affine $\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ trong đó A là phép biến đổi không suy biến.

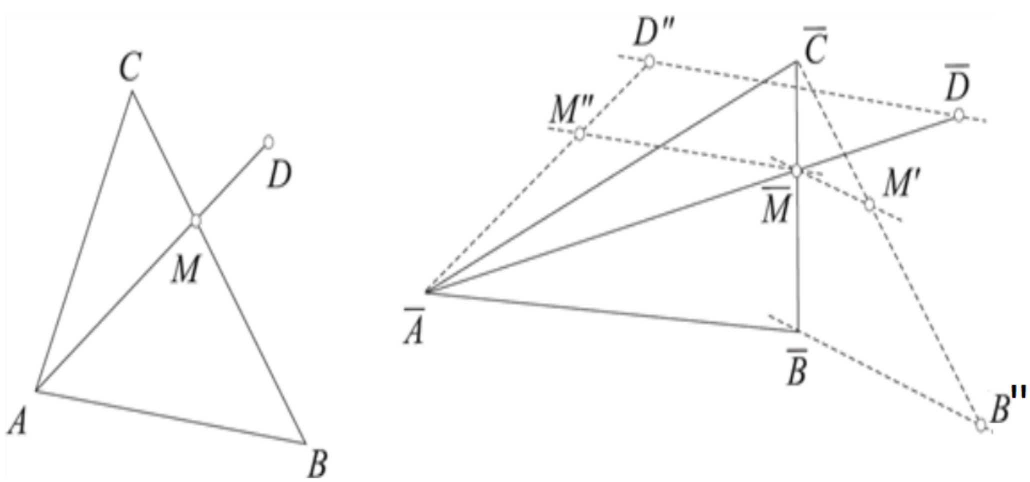
Sử dụng các công cụ của đại số tuyến tính ta có thể chứng minh phép biến đổi affine bảo toàn đường thẳng, bảo toàn tính song song, nhưng không bảo toàn khoảng cách, góc, tỉ số. Thay vì đó nó bảo toàn tỉ số chia (division ratio). Tỉ số chia của 3 điểm thẳng hàng A, B, C là $(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Chẳng hạn hình vuông qua phép biến đổi afine nó không thành hình vuông hay hình chữ nhật mà nó trở thành hình bình hành (do nó không bảo toàn góc). Tâm hình vuông được chuyển vào giao của 2 đường chéo hình bình hành do tính chất phép biến đổi affine bảo toàn tỉ số chia.

Chú ý nếu phép biến đổi đồng dạng chuyển hình thoi thành hình thoi (phép biến đổi đồng dạng bảo toàn tỉ số) thì phép biến đổi affine không chuyển hình vuông thành hình thoi. Cũng sử dụng các công cụ của đại số tuyến tính ta có thể chứng minh

Định lí cơ bản của phép biến đổi affine

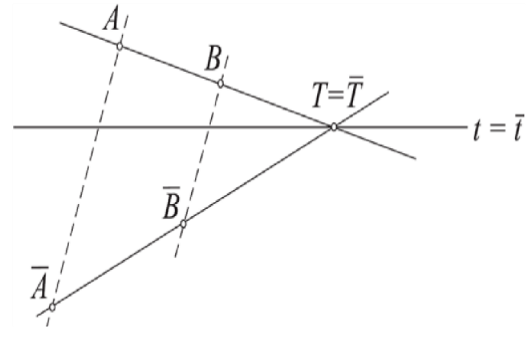
Nếu A, B, C là các điểm tùy ý không thẳng hàng và $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ cũng như vậy thì tồn tại duy nhất phép biến đổi affine f để $f(A) = \overline{A}, f(B) = \overline{B}, f(C) = \overline{C}$.

Tuy nhiên ta sẽ chứng minh định lí này bằng hình học bằng việc dựng ảnh $\overline{D}$ của điểm thứ tư D khi biết các điểm A, B, C cũng như $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.



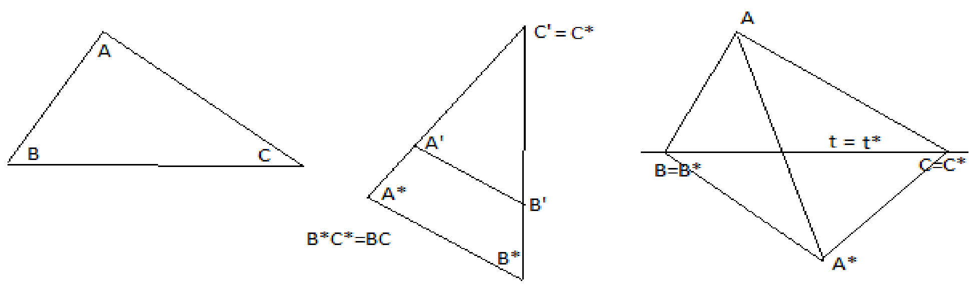
Phép biến đổi affine có trục và cách dựng ảnh

Hình vẽ bên chỉ ra cách dựng điểm ảnh $\overline{B}$ của B qua phép biến đổi affine có trục $t = \overline{t}$.



Nếu tồn tại một đường thẳng d mà mọi điểm thuộc d đều là điểm cố định với phép biến đổi affine thì phép biến đổi đó được gọi là *phép biến đổi affine có trục* (tengely) và d là *trục của phép biến đổi*.

Nhận xét rằng do tính chất bảo toàn tỉ số chia nên các đường thẳng nối điểm A với ảnh affine A' của nó luôn song song với một phương cố định.

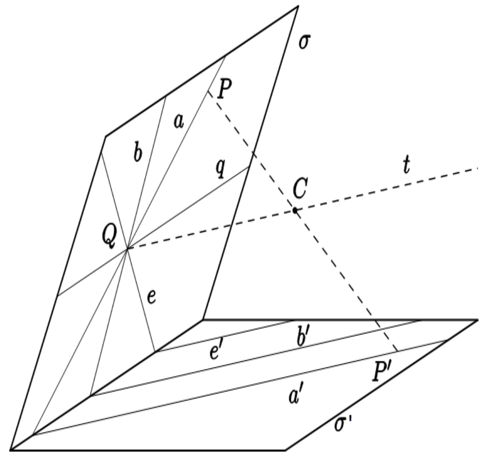


Bằng hình vẽ có thể chỉ ra *mọi phép biến đổi affine có thể biểu diễn bằng tích của một phép biến đổi đồng dạng và phép biến đổi affine có trục*. Thật vậy, giả sử phép biến đổi affine chuyển ABC thành $A'B'C'$. Sử dụng phép biến đổi đồng dạng chuyển $A'B'C'$ thành $A^*B^*C^*$ sao cho $B^*C^* = BC$. Tiếp theo dùng phép biến đổi đẳng cự để chuyển B^* thành B và chuyển C^* thành C. Khi đó phép biến đổi affine xác định bởi A, B, C và các điểm ảnh A^*, B^*, C^* tương ứng là phép biến đổi affine có trục. Do đường thẳng AB có 2 điểm cố định nên nó phải là trục.

Do phép biến đổi affine chuyển điểm vô cực thành vô cực, điểm thường thành điểm thường nên nó chuyển đường tròn thành thành đường tròn hoặc elip nói chung, parabol thành parabol và hyperbol thành hyperbol. Khác với phép biến đổi affine, phép biến đổi xạ ảnh chuyển các đường conic vào lẫn nhau như một ví dụ về phép chiếu xuyên tâm chuyển parabol thành đường tròn.

2 Bổ sung về phép biến đổi xạ ảnh

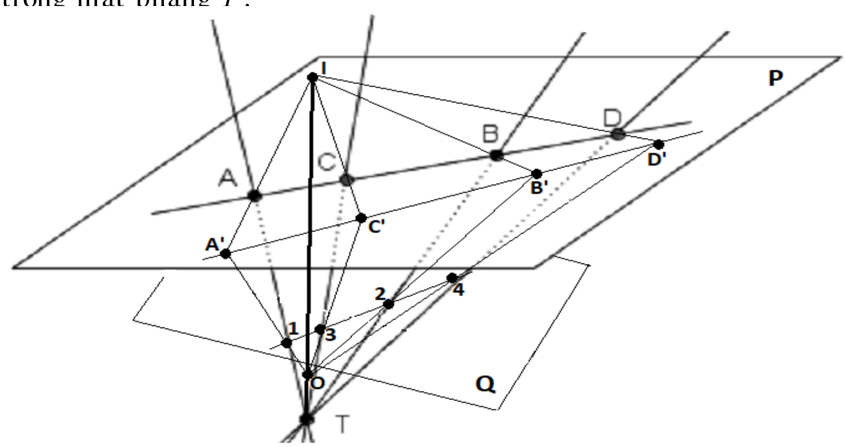
• Từ "xạ ảnh" thực chất là phép chiếu, dịch từ tiếng nước ngoài "projective". Hình vẽ dưới đây mô tả phép chiếu tâm C chiếu các điểm trong mặt phẳng σ vào mặt phẳng σ'. Tâm phép chiếu, điểm C nằm ở vị trí sao cho $QC \parallel \sigma'$.



Khác với phép chiếu song song, nó chuyển các đường thẳng a, b, e (đồng quy tại Q) thành các đường thẳng song song a', b', e'. Nó chuyển điểm Q và các điểm thuộc q ra xa vô tận.

Phép chiếu tâm C làm nảy sinh sáng kiến: bổ sung thêm các điểm vô cực (đường thẳng vô cực) vào mặt phẳng Euclide. Từ ý tưởng này dẫn đến việc gắn hệ tọa độ thuần nhất vào mặt phẳng S để có thể biểu diễn tọa độ của mọi điểm (vô cực và điểm thường) và thực hiện các phép toán đại số với chúng.

Người ta xem phép biến đổi xạ ảnh là tích của các phép chiếu. Phép chiếu tâm T chuyển các điểm $A, B, C, D \in P$ (trong mặt phẳng P) thành $1, 2, 3, 4 \in Q$ (trong mặt phẳng Q) và phép chiếu tâm O chuyển các điểm $1, 2, 3, 4 \in Q$ thành $A', B', C', D' \in P$. Tích của chúng trở thành phép chiếu tâm I (giao của đường thẳng TO với P) trong mặt phẳng P.



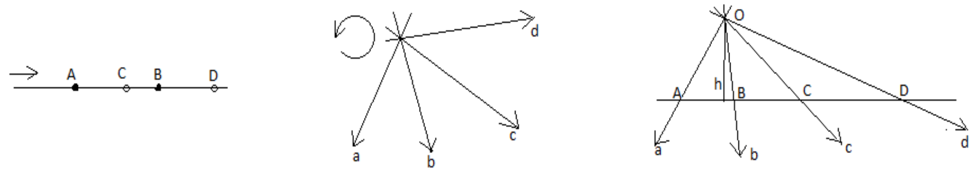
• Tỉ số chia (division ratio) và tỉ số kép (cross ratio).

Định nghĩa Cho 4 điểm A, B, C, D trên đường thẳng định hướng. *Tỉ số chia* của 3 điểm $(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ và *Tỉ số kép* của chúng:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \; (*).$$

Tỉ số kép của chùm 4 đường thẳng định hướng a, b, c, d : $(abcd) = \frac{\sin(ca)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(da)}{\sin(db)}$, biết góc giữa các đường thẳng được định hướng trước.

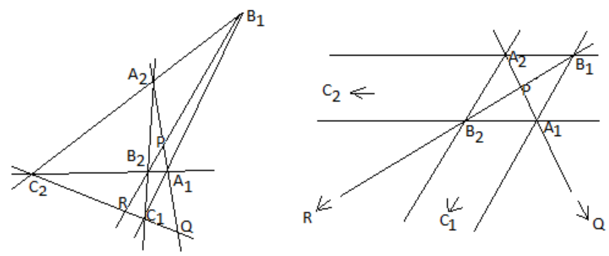
Nếu $(ABCD) = -1$ ta nói 4 điểm A, B, C, D lập thành *hàng điểm điều hòa*, hay C, D chia đoạn AB theo các tỉ số đối nhau. Khi đó C, D, A, B cũng lập thành hàng điểm điều hòa.



Bằng việc sử dụng diện tích các tam giác có chung đường cao h (hình vẽ trên), ta dễ dàng chứng minh tỉ số kép $(ABCD) = (abcd)$.

Định lí (Tứ giác toàn phần) Giao điểm của các đường chéo chia điều hòa 2 đỉnh đối diện của tứ giác toàn phần. (*Tứ giác toàn phần có 6 đỉnh, 3 đường chéo*).

Chứng minh thứ nhất. Với đỉnh B_1 ta có $(PQA_1A_2) = (RQC_1C_2)$. Với đỉnh B_2 ta có $(PQA_1A_2) = (RQC_2C_1)$. Suy ra $(RQC_1C_2) = (RQC_2C_1) = -1$.
Chứng minh thứ hai. Từ điểm ngoài mặt phẳng tứ giác toàn phần chiếu tứ giác này xuống mặt phẳng khác sao cho C_1C_2 thành đường thẳng vô cực (xem hình vẽ bên). Khi đó $A_1B_1A_2B_2$ trở thành hình bình hành.



Trong hình giải tích ta đã biết các véc tơ buộc $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ và $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ (gốc O) có ngọn là các điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha + \beta = 1$. Khi đó tỉ số chia

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Định lí Giả sử $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}], [\lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}], [\lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b}]$ xác định các điểm A, B, C, D trên đường thẳng affine thì

$$(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}. \quad (**)$$

Chứng minh Ta có quyền giả thiết tọa độ của $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 1), \mathbf{b} = (b_1, b_2, 1)$, suy ra

$$\lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b} = (\lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1, \lambda_1 a_2 + \mu_1 b_2, \lambda_1 + \mu_1).$$

Theo kết quả vừa nói ở trên

$$(ABC) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} : \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$$

Tương tự

$$(ABD) = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} : \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

Vậy $(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)} = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$, đ.p.c.m.

Người ta dùng đẳng thức $(**)$ để định nghĩa tỉ số kép cho các điểm thẳng hàng A, B, C, D trong mặt phẳng xạ ảnh. Nói cách khác một trong số chúng có thể là các điểm vô cực.

Định lí Phép biến đổi xạ ảnh bảo toàn tỉ số kép (cross ratio). (*Tỉ số kép* của 4 điểm A, B, C, D thuộc đường thẳng affine là $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$.)

Chứng minh. Định lí được chứng minh do nhận xét tỉ số kép của 4 điểm A, B, C, D bằng tỉ số kép của các đường thẳng a, b, c, d đã nói ở trên. Tuy nhiên ta có thể chứng minh bằng cách khác.

Chứng minh định lí dựa vào ý tưởng sau: $\overline{\mathbb{R}}$ là không gian xạ ảnh 1 chiều với việc bổ sung thêm phần tử vô cực ∞. Gọi d là đường thẳng trong không gian xạ ảnh cho trước với các điểm $A, B, C, D \in d$. Ta biết rằng tồn tại duy nhất phép biến đổi xạ ảnh $f_{ABC} : d \to \overline{\mathbb{R}},\ f_{ABC}(A) = \infty,\ f_{ABC}(B) = 0,\ f_{ABC}(C) = 1$. Khi đó $f_{ABC}(D) = (ABCD)$ $(*)$. Sử dụng kí hiệu này xét phép biến đổi xạ ảnh

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C',\ f(D) = D'.$$

Khi đó tích các ánh xạ $f_{ABC} = f_{A'B'C'} \circ f$ vì cùng nhận các giá trị như nhau trên cơ sở A, B, C. Suy ra

$$f_{ABC}(D) = f_{A'B'C'}(D') \text{ hay } (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $(*)$. Các véc tơ $\mathbf{a} = (1, 0), \mathbf{b} = (0, 1), \mathbf{c} = (1, 1) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ xác định các điểm $\infty, 0, 1 \in \overline{\mathbb{R}}$. Nếu $f_{ABC}(D) = x \in \mathbb{R}$ thì véc tơ $\mathbf{d} = (x, 1) = x\mathbf{a} + \mathbf{b}$ xác định điểm x. Bây giờ giả sử $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ xác định các điểm A, B, C, D và $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{p} + \mu_1\mathbf{q}, \mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q}$. Ta đã biết tồn tại một đẳng cấu φ (tuyến tính) trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d} = x\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nên $\lambda_1 : \mu_1 = 1 : 1$ và $\lambda_2 : \mu_2 = x : 1$. Suy ra

$$x = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{(ABC)}{(ABD)} = (ABCD).$$

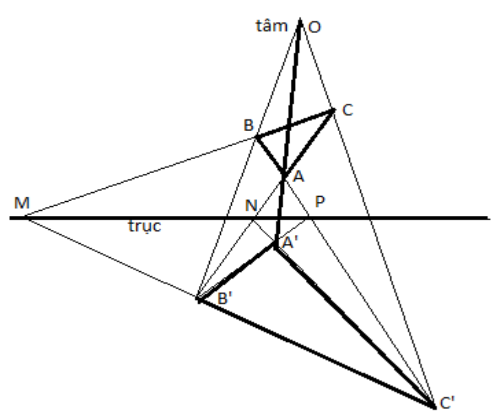
Nhận xét rằng trong mô hình Cayley - Klein trên mặt phẳng, hàm khoảng cách giữa 2 điểm bất kì B, C trên đường thẳng UV được định nghĩa theo tỉ số kép $\rho(B, C) = \frac{1}{2}|\ln(UVBC)|$, nếu $B \neq C$. Nó có thể được tổng quát lên cho không gian nhiều chiều cũng như cho đường thẳng (một chiều). Trong trường hợp một chiều, đường tròn đơn vị trở thành khoảng mở $(-1, 1)$ và khoảng cách giữa 2 điểm (bây giờ là 2 số) khác nhau $a, b \in (-1, 1)$

$$\rho(a, b) = \frac{1}{2}|\ln(-1\ 1\ a\ b)| = \frac{1}{2}\Big|\ln\Big(\frac{a+1}{a-1} : \frac{b+1}{b-1}\Big)\Big| = \frac{1}{2}\Big|\ln\frac{1+a}{1-a} - \ln\frac{1+b}{1-b}\Big|.$$

Như vậy ta có thể coi hàm số $\varphi :\ (-1, 1)\ \to\ \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}$ thiết lập sự tương ứng giữa khoảng cách 2 điểm trên đường thẳng của mô hình Cayley - Klein với khoảng cách giữa 2 điểm trên trục số thực $\mathbb{R}$.

Định lí Desargues

Xét 2 tam giác ABC và $A'B'C'$, giả thiết các đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau ở O. Khi đó các giao điểm M, N, P của các cặp cạnh tương ứng của 2 tam giác (hình vẽ bên) thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi $A = [\mathbf{a}], A' = [\mathbf{a}'], B = [\mathbf{b}], B' = [\mathbf{b}'], O = [\mathbf{u}]$, ta có $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}' = \beta\mathbf{b} + \beta'\mathbf{b}' = \gamma\mathbf{c} + \gamma'\mathbf{c}'$. Trừ các đẳng thức cho nhau ta được

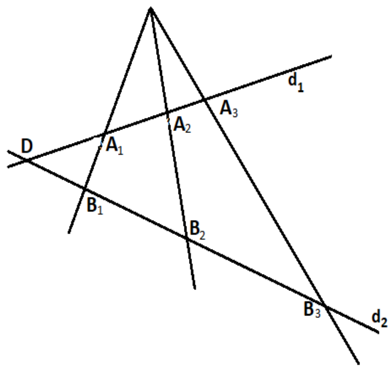
$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b} = -\alpha'\mathbf{a}' + \beta'\mathbf{b}', \\ \mathbf{v}_2 = \beta\mathbf{b} - \gamma\mathbf{c} = -\beta'\mathbf{b}' + \gamma'\mathbf{c}', \\ \mathbf{v}_3 = \gamma\mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} = -\gamma'\mathbf{c}' + \alpha'\mathbf{a}'. \end{cases}$$

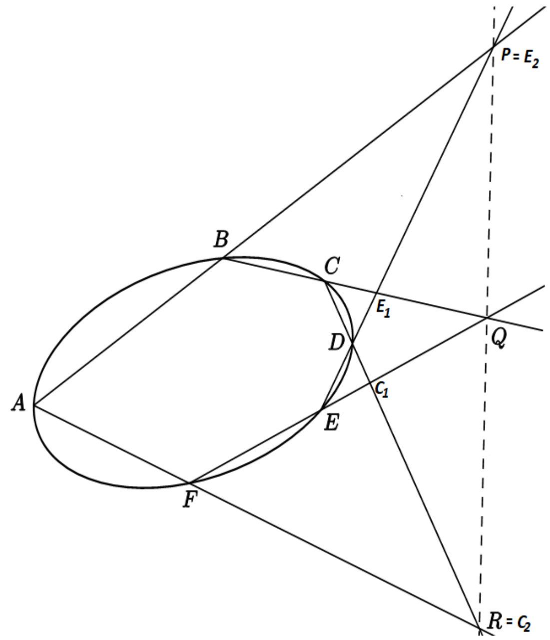
Khi đó véc tơ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, chúng xác định lần lượt các giao điểm P, M, N thẳng hàng.

Nhận xét rằng tồn tại phép biến đổi xạ ảnh chuyển O vào chính nó, chuyển các điểm A, B, C lần lượt thành A', B', C'. Khi đó phép biến đổi xạ ảnh là phép biến đổi xuyên tâm với đường thẳng MNP là trục, O là tâm của phép biến đổi.

Định lí Pascal Giao điểm các cặp cạnh đối diện của một hình lục giác nội tiếp đường conic luôn thẳng hàng.

Bổ đề Cho 2 đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại D. Các điểm $A_1, A_2, A_3 \in d_1$ và $B_1, B_2, B_3 \in d_2$ thỏa mãn $(DA_1A_2A_3) = (DB_1B_2B_3)$. Khi đó các đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.





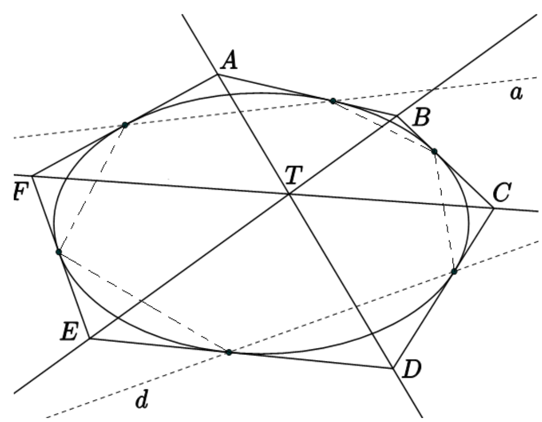
Chứng minh định lí. Xét tỉ số kép $(DACE)$ của 4 điểm thuộc đường conic, bằng tỉ số kép của 4 đường thẳng đỉnh B nối với các điểm đó. Cắt 4 đường thẳng này với đường thẳng d ta được $(DACE) = (DE_2E_1E)$.

Tương tự tỉ số kép này cũng bằng tỉ số kép của 4 đường thẳng đỉnh F nối với các điểm đó $(DACE) = (DC_2CC_1)$.

Vậy $(DE_2E_1E) = (DC_2CC_1)$. Sử dụng bổ đề ta được các đường thẳng E_1C, E_2C_2, EC_1 đồng quy tại Q, đ.p.c.m.

Định lí Brianchon Các đường thẳng nối các đỉnh đối diện của một hình lục giác ngoại tiếp đường conic luôn đồng quy tại một điểm.

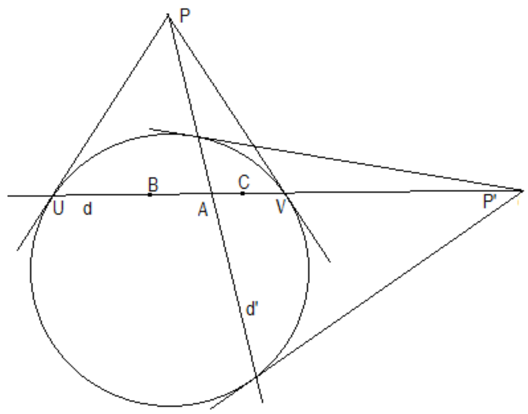
Chứng minh. Các tiếp điểm tạo thành một lục giác nội tiếp conic. Hai đường thẳng a và d của 2 cạnh đối diện lục giác nội tiếp cắt nhau, chẳng hạn tại P. Khi đó do a là đường cực của A và d là đường cực của D nên P liên hợp với A và D. Nói cách khác AD là đường cực của P. Tương tự BE và CF là các đường cực của Q, R (các giao điểm còn lại theo định lí Pascal). Định lí Pascal khẳng định P, Q, R thẳng hàng, suy ra AD, BE, CF đồng quy tại một điểm T. *Nhận xét rằng T là điểm cực của đường thẳng PQR.*



3 Bổ sung về mô hình Cayley - Klein

Kí hiệu dạng toàn phương $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, khi đó $q(\mathbf{x}) = 0$ là đường tròn K và $X = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) :\ q(\mathbf{x}) < 0\}$ là tập cơ bản của mô hình Cayley - Klein, miền bên trong đường tròn K. Toàn bộ các phép biến đổi xạ ảnh chiếu đường tròn K vào chính nó là một nhóm, kí hiệu $G(X)$. Khi đó các phép biến đổi này cũng chiếu các điểm của X vào chính nó. Thật vậy, gọi $h \in G(X)$ khi đó $q(h(\mathbf{x})) = 0\ \forall x \in K$. Mặt khác $h(\mathbf{0}) = (0, 0, 1) \Rightarrow q(h(\mathbf{0})) < 0$ hay h chiếu $\mathbf{0}$ vào trong X. Do tính liên tục của ánh xạ tuyến tính $q(h(\mathbf{x})) < 0\ \forall x \in X$. *Với các điểm* $\mathbf{x}$ *nằm ngoài* K, $q(h(\mathbf{x})) > 0$.

Trung điểm một đoạn thẳng. Hình vẽ dưới đây minh họa hai phép biến đổi xuyên tâm với tâm là các điểm P, P' và trục là d, d' tương ứng cắt nhau tại A. Phép biến đổi xuyên tâm với tâm P' chuyển điểm B thành điểm C và chuyển C thành B. Đường thẳng d' là trung trực của đoạn thẳng BC, điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC đồng thời các điểm A, P' chia điều hoà đoạn BC hay $(BCAP') = -1$. (*Điều ngược lại cũng đúng. Nếu A là điểm trong đoạn BC, A và P' liên hợp với nhau đồng thời A, P' chia điều hoà đoạn BC thì A là trung điểm của BC.*)

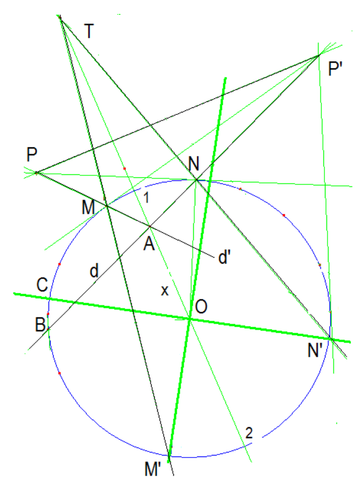


Góc giữa hai nửa đường thẳng. Ta nhắc lại cách xác định góc trong mô hình Klein. Để xác định góc $\widehat{MAN}$, ta chọn một phép biến đổi xạ ảnh $f \in G(X)$ sao cho $f(A) = \mathbf{0}$. Khi đó độ đo góc $\widehat{MAN}$ được xác định bằng độ đo Euclide góc $\widehat{M'ON'}$, trong đó M' và N' là ảnh của M và N qua phép biến đổi $f:\ M' = f(M), N' = f(N)$.

Dựa vào định nghĩa đó người ta dùng phép biến đổi xuyên tâm thích hợp để đưa đỉnh A về tâm O và do vậy có thể dễ dàng dựng các góc đặc biệt như $30^0, 45^0$ hoặc 60^0 trong mô hình.

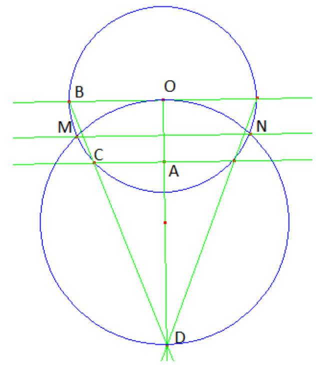
Chứng minh 2 đường cực d, d' chứa 2 điểm cực P', P vuông góc với nhau.

Gọi tọa độ các điểm cực $P(a_1, a_2)$ *và* $P'(a_1', a_2')$. *Phương trình các đường cực* $(d):\ a_1x_1 + a_2x_2 = 1,\ (d'):\ a_1'x_1 + a_2'x_2 = 1 (*)$. *Kí hiệu* $h \in G(X)$ *là phép chiếu xuyên tâm chuyển* A *vào gốc tọa độ với* T *là tâm phép chiếu, chuyển các điểm trên đường tròn* K *vào* K, *cụ thể* $h(N) = N', h(A) = \mathbf{0} \Rightarrow h(B) = C$. *Do* $(NBAP') = -1$ *suy ra* $TP' \parallel ON'$. *Tương tự* $TP \parallel OM'$. *Theo định nghĩa trên, góc* $\widehat{MAN}$ *của mô hình bằng góc* $\widehat{M'OC}$. *Để chứng minh góc này vuông ta sẽ chứng minh* $TP \perp TP'$. *Thật vậy gọi tọa độ của* $A(x_1, x_2)$ *thỏa mãn* $(*)$ *và độ dài* $OA = x$, *khi đó* $T(kx_1, kx_2)$ *có độ dài* $OT = kx$. *Dựa vào tính chất bảo toàn tỉ số kép của* h, *do* $h(T) = T, h(A) = O, h(1) = 2, h(2) = 1$ *nên* $(TA12) = (TO21) \Rightarrow \frac{kx-1}{1-x} \cdot \frac{x+1}{1+kx} = \frac{kx+1}{1} \cdot \frac{1}{kx-1}$ *hay* $k^2x^2 - 2k + 1 = 0$ (1). *Xét tích vô hướng* $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{P'T} = (kx_1 - a_1)(kx_1 - a_1') + (kx_2 - a_2)(kx_2 - a_2')$. *Sử dụng* $(*)$ *ta được* $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{P'T} = k^2x^2 - 2k + 1$. *Theo* (1) *tích vô hướng này bằng* 0. *Vậy* $\overrightarrow{PT} \perp \overrightarrow{P'T}$, *đ.p.c.m.*



Cách dựng phép chiếu xuyên tâm chuyển một điểm về tâm đường tròn k

Gọi A là điểm bất kì. Dựng các đường vuông góc với OA, chúng cắt đường tròn k tại B, C (hình bên). Đường thẳng BC cắt OA tại D. Đường tròn đường kính OD cắt k tại M, N. Khi đó đường thẳng MN là trục của phép biến đổi xuyên tâm, tâm D chiếu điểm A vào O cần dựng.
Ta có thể giải quyết bài toán này bằng giải tích. Chẳng hạn điểm A có tọa độ $(0, \frac{4}{5})$. Theo cách dựng trên dễ dàng tìm được trục của phép biến đổi xuyên tâm là đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ và tâm phép biến đổi $D(0, 2)$.



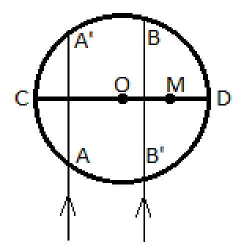
Nhận xét rằng trong phần ví dụ ta đã tính ma trận của phép biến đổi xuyên tâm f này. Ma trận bằng

$$[f] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

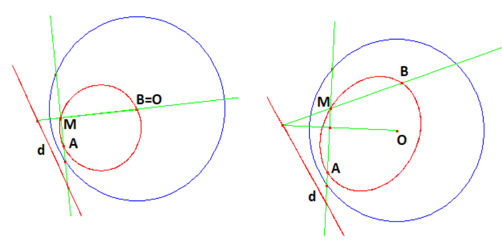
Phép đối xứng qua đường kính CD cũng là phép biến đổi xuyên tâm

Trường hợp đặc biệt khi phép biến đổi xuyên tâm h có trục là đường kính của đường tròn k và tâm là điểm vô cực (vuông với đường kính đó). Lúc này h trở thành phép đối xứng Euclide qua đường kính.

Phép biến đổi h chiếu các điểm $M \in CD$ vào chính nó. Các đường thẳng vuông với đường kính CD theo cả hai (theo mô hình và theo hình học Euclide). Suy ra các góc ở tâm O có độ đo mô hình trùng với độ đo Euclide. Ma trận của phép biến đổi xuyên tâm, thực chất là phép đối xứng qua trục hoành của hình học Euclide $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc vuông Ta có quyền giả thiết điểm B trùng với tâm O của đường tròn k (bằng phép biến đổi xuyên tâm thích hợp). Khi đó tập hợp các điểm M nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AO (trong hình học Euclide). Vậy trong trường hợp tổng quát nó là elip với trục AB. (*Đường d trong hình vẽ bên là đường cực của A*).



Tam giác hyperbolic với các đường trung trực, đường cao, trung tuyến

Trong phần cuối của mô hình Cayley-Klein khi nói về cách dựng các đường trung trực của một đoạn thẳng và phân giác của một góc, ta đã nhắc đến

1 Một tam giác có thể không nội tiếp trong một đường tròn nào cả nếu hai đường trung trực của hai cạnh cắt nhau tại một điểm nằm ngoài đường tròn cơ sở.

Tuy nhiên ta sẽ chỉ ra 3 đường trung trực của các cạnh luôn đồng quy tại một điểm. Điểm đó sẽ là tâm đường tròn ngoại tiếp nếu nó nằm trong đường tròn cơ sở.

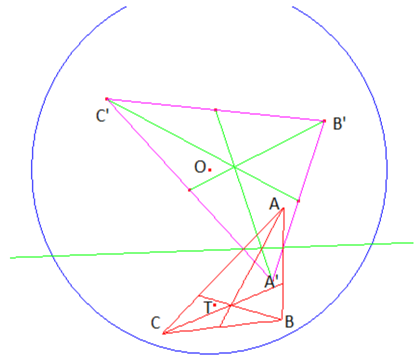
2 Một tam giác hyperbolic luôn luôn ngoại tiếp một đường tròn nào. Thật vậy hai đường phân giác của 2 góc bất kì luôn cắt nhau. Giao điểm đó cách đều các cạnh của tam giác và do vậy nó là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

3 Trong một tam giác ba đường cao đồng quy Sử dụng nhận xét nếu một cạnh của góc vuông là đường kính đường tròn k thì góc đó vuông cả theo độ đo Euclide. Đưa một đỉnh tam giác về tâm đường tròn bằng phép biến đổi xuyên tâm f. Khi đó 3 đường cao của tam giác cũng là các đường cao trong hình học Euclide. *Vậy nếu 2 đường cao cắt nhau tại 1 điểm trong đường tròn thì đường cao thứ 3 cũng đi qua điểm đó. Ngược lại 3 đường cao đôi một không có điểm chung.*

Trường hợp *các đường cao đôi một không có điểm chung*, ta sẽ chỉ ra chúng đồng quy tại một điểm nằm ngoài đường tròn. Nói cách khác chúng tạo thành chùm đường thẳng. Thật vậy 3 đường cao trong hình học Euclide đồng quy tại một điểm ngoài đường tròn k. Khi đó f^{-1} chuyển các đường cao này thành 3 đường cao của tam giác ban đầu và chúng vẫn đồng quy vì f^{-1} cũng là phép biến đổi xuyên tâm.

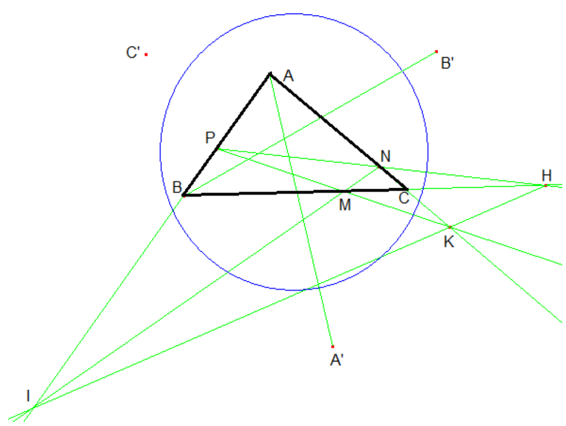
Từ kết quả này ta có cách diễn đạt khác: Cho tam giác hyperbolic ABC. Gọi A', B', C' là các điểm cực tương ứng với các cạnh BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' (các đường cao của tam giác hyperbolic ABC) đồng quy. Tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ được gọi là perspective lẫn nhau.

4 Trong một tam giác ba trung tuyến đồng quy tại điểm nằm trong tam giác đó. Sử dụng phép biến đổi xuyên tâm để đưa tâm T đường tròn ngoại tiếp ΔABC về tâm O đường tròn k. Phép biến đổi chuyển ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Khi đó các trung điểm của các cạnh cũng được chuyển thành các trung điểm. Mặt khác dễ dàng nhận thấy trung điểm các cạnh tam giác $A'B'C'$ cũng là các trung điểm trong hình học Euclide. Vậy các đường trung tuyến của $\Delta A'B'C'$ đồng quy. Suy ra các đường trung tuyến của ΔABC cũng cắt nhau tại một điểm.



Trường hợp ΔABC không có tâm đường tròn ngoại tiếp. Tức là các trung trực của các cạnh không cắt nhau tại điểm nằm trong đường tròn, ta sẽ sử dụng định lí Desargues để chứng minh.

Gọi M, N, P là các trung điểm các cạnh của ΔABC. Gọi H, I, K là các giao điểm các cạnh ΔMNP với các cạnh tương ứng (hình vẽ bên) của ΔABC. Khi đó B, C, M, H là hàng điểm điều hòa. Tương tự A, C, N, K và A, B, P, I cũng là các hàng điểm điều hòa.



Vậy phép biến đổi xạ ảnh tâm H chiếu A, B, P, I lần lượt thành A, C, N, K hay H, I, K thẳng hàng.

Áp dụng định lí Desargues cho 2 tam giác ABC và MNP, do H, I, K thẳng hàng nên các trung tuyến AM, BN, CP đồng quy.

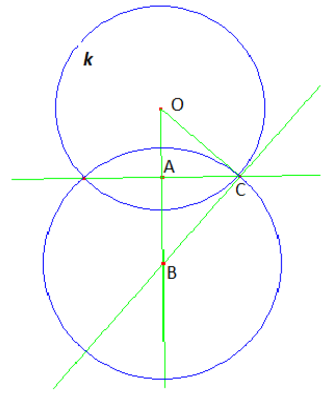
5 Ba đường trung trực của các cạnh tam giác luôn đồng quy tại một điểm. Sử dụng chứng minh và hình vẽ trên: các điểm H, I, K thẳng hàng. Mặt khác do H liên hợp với M, I liên hợp với P và K liên hợp với N (M, N, P là các trung điểm) nên đường cực của H là trung trực của BC, đường cực của I là trung trực của AB và đường cực của K là trung trực của CA. Các điểm H, I, K thẳng hàng kéo theo ba đường trung trực đồng quy.

Sử dụng hình vẽ trên ta có thể chứng minh **tam giác hyperbolic có đường thẳng Euler khi và chỉ khi tam giác đó cân.** *Ta chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Giả sử ΔABC không cân. Khi đó 2 đường thẳng chứa đường cao BB' và trung trực NB' không trùng nhau suy ra B, B', N không thẳng hàng. Tương tự với 3 điểm A, A', M. Nếu các giao điểm của đường cao, trung trực, trung tuyến ΔABC thẳng hàng - đường thẳng Euler, sử dụng định lí Desargues cho $\Delta AA'M$ và $\Delta BB'N$, do AB và MN cắt nhau tại I, suy ra A', B', I thẳng hàng. Mặt khác $A'B'$ là đường cực của C, suy ra I liên hợp với C. Ta đã biết I cũng liên hợp với P, nên đường cực của I là trung tuyến CP. Mà đường cực của I phải là trung trực của AB. Suy ra CP vừa là trung tuyến vừa là trung trực của AB. Vô lí với giả thiết phản chứng, ΔABC không cân, đ.p.c.m.*

4 Bổ sung về mô hình Poincaré

Cách dựng phép nghịch đảo chuyển một điểm về tâm đường tròn k

Gọi A là điểm bất kì. Qua A dựng đường vuông góc với OA, nó cắt đường tròn k tại C (hình bên). Tìm trên đường thẳng OA điểm B sao cho đường tròn g tâm B vuông góc với k. (*Chính là giao của đường thẳng OA với đường thẳng đi qua C, vuông góc với OC*). Khi đó phép biến đổi nghịch đảo i_g tâm B chiếu điểm A vào O là phép nghịch đảo cần dựng.



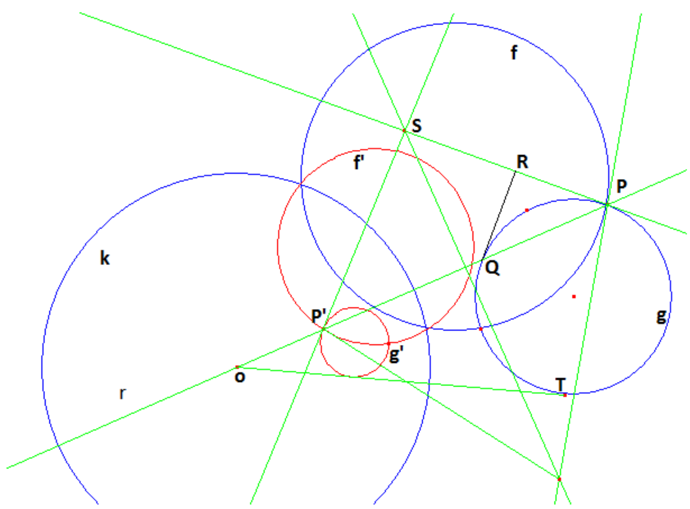
Góc giữa hai đường thẳng trong mô hình là góc (Euclide) giữa hai tiếp tuyến với chúng tại giao điểm. Ta chứng minh ***phép biến đổi nghịch đảo bảo toàn góc*** dựa theo hình vẽ dưới.

Giả sử bán kính của k bằng r và $f \cap g = P$, $f' \cap g' = P'$ và $i_k(f) = f', i_k(g) = g'$. Gọi Q là giao điểm thứ hai của cát tuyến OP với đường tròn g. Khi đó

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP' \cdot OP}{OQ \cdot OP} = \frac{r^2}{OT^2} = m.$$

Tỉ số này không phụ thuộc vị trí của P, khi $P \in g$ và chỉ chạy trên cung lớn giữa 2 tiếp điểm T và T' kẻ từ O tới đường tròn g. Vậy g' là ảnh đồng dạng phối cảnh tâm O của g với tỉ số đồng dạng m.

Suy ra tiếp tuyến $P'S$ và QR song song, suy ra tiếp PS và $P'S$ đối xứng qua trung trực của PP'. ($\Delta SPP'$ cân). Tương tự với 2 tiếp tuyến còn lại. *Vậy góc giữa các tiếp tuyến tại P và P' bằng nhau.*



Chứng minh các hệ thức lượng giác về góc tới

Từ công thức Bolyai-Lobachevsky $e^{-x} = \tan\frac{\Pi(x)}{2}$, ta dễ dàng suy ra

a) $\Pi(x) = 2\arctan e^{-x}$.

b) $\sin\Pi(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$ được suy ra từ a). Thật vậy $\sin\Pi(x) = 2\sin\arctan e^{-x}\cdot\cos\arctan e^{-x}$

$= 2\tan(\arctan e^{-x})\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan e^{-x})} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

c) $\cos\Pi(x) = \tanh x$ vì $\cos\Pi(x) = 2\cos^2(\arctan e^{-x}) - 1 = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

d) $\tan\Pi(x) = \dfrac{1}{\sinh x}$ được suy ra từ b) và c)

Các kết quả hay dùng trong phép nghịch đảo.

1. Nếu $F(x,y)=0$ là phương trình một đường cong (L) nào đó thì phép nghịch đảo đối với đường tròn $x^2+y^2=1$ chuyển L thành đường cong có phương trình

$$(L'):\ F\Big(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\Big)=0.$$

Chẳng hạn đường tròn (hoặc đường thẳng nếu $A=0$)

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

có ảnh nghịch đảo là

$$D(x^2+y^2)+Bx+Cy+A=0.$$

2. Hai đường tròn g_1,g_2 tâm $C(c_1,c_2)$ và $D(d_1,d_2)$ vuông góc với $(k):\ x^2+y^2=1$, cắt nhau tại B,T. Hai dây của chúng cắt nhau tại A. Một vài kết quả chúng ta đã và sẽ sử dụng được tổng kết lại dưới đây.

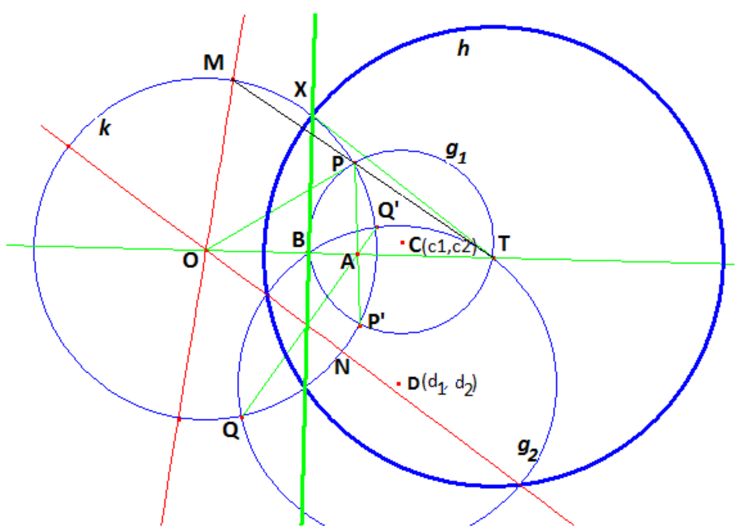
a) Đường thẳng chứa dây cung PP' là đường cực của $C(c_1,c_2)$. Phương trình của nó $c_1x_1+c_2x_2=1$.

b) Phép nghịch đảo i_k (đối với đường tròn k) chuyển B thành T, tức là $OT=\frac{1}{OB}$ hay $OT\cdot OB=1$. Qua B kẻ $OX\perp OT$ ($X\in k$), suy ra ΔTXO vuông. Vậy đường tròn (kí hiệu h) tâm T bán kính XT vuông với k, XT là tiếp tuyến của đường tròn k. Suy ra đường thẳng XB là đường cực của T.

c) Do ΔTXO vuông nên $TO\cdot TB=TX^2$, phép nghịch đảo i_h chuyển đường tròn g_1 thành đường thẳng nào đó đi qua O, kí hiệu OM và chuyển đường tròn g_2 thành đường thẳng nào đó đi qua O, kí hiệu ON. Suy ra góc giữa 2 đường tròn g_1,g_2 chính là góc giữa 2 đường thẳng OM,ON.

d) Do đường tròn h vuông với k, nên phép nghịch đảo i_h chuyển đường tròn k vào chính nó và vì vậy nó chuyển điểm P (giao của k với g_1) thành điểm M (giao của k với đường thẳng OM). Suy ra T,P,M thẳng hàng.

e) (**Song ánh F giữa 2 mô hình bảo toàn góc**). Phép chiếu xuyên tâm tâm T (với trục là đường cực BX) chuyển P vào M, chuyển A vào O, chyển dây cung PAP' thành đường thẳng OM và chuyển dây QAQ' thành ON. Suy ra góc giữa hai đường thẳng PP' và QQ' trong mô hình Klein bằng với góc giữa 2 cung PBP' và QBQ' trong mô hình Poincare (bằng góc giữa 2 đường thẳng OM,ON).

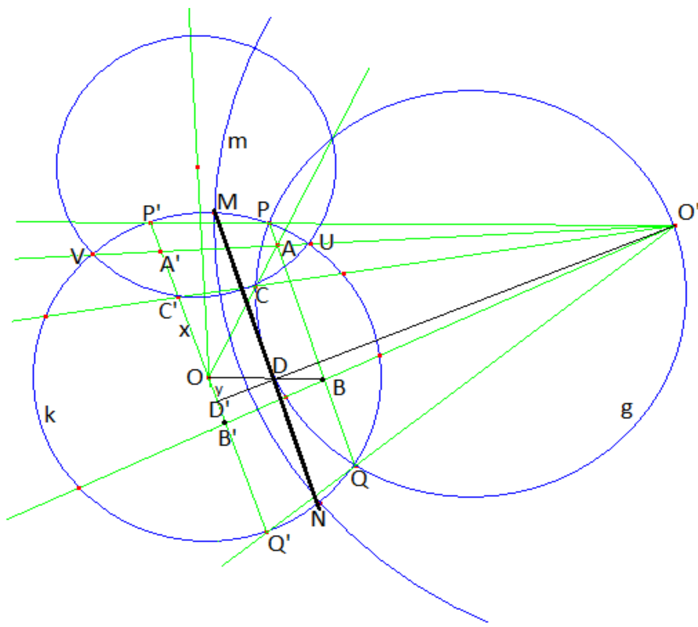


Song ánh F bảo toàn khoảng cách giữa mô hình Poincare và mô hình Caley Klein

Hình vẽ dưới đây mô tả ánh xạ F chuyển các điểm C, D thuộc cung PQ vào các điểm A, B của đoạn thẳng PQ

$$F(C) = A,\ F(D) = B.$$

Ta nhắc lại hàm $F(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ và nếu C là điểm thuộc đường tròn đi qua P, Q vuông góc với đường tròn k và thuộc đoạn OA thì $OA = \frac{2x}{1+x^2},\ x = OC$. Điều ngược lại cũng đúng, nếu $F(C) = A$ thì đường tròn đi qua C, P, Q vuông góc với k $(*)$.



Hình vẽ trên chỉ ra cách dựng đường tròn m, vuông góc với k và phép nghịch đảo i_m chuyển cung PQ (đường thẳng của mô hình Poincare) của g thành đường kính $P'Q'$ của đường tròn k. Đồng thời khi đó tâm O' của đường tròn m cũng là tâm phép biến đổi xuyên tâm (trục phép biến đổi xuyên tâm là MN) chuyển k vào chính nó, chuyển P, Q thành P', Q', chuyển A, B thành A', B', chuyển C, D thành C', D'.

Ta có khẳng định *song ánh F chuyển C' thành A', chuyển D' thành B'*. Thật vậy, ta sẽ chứng minh đường tròn đi qua U, V, C sẽ đi qua C'. Vì $O'U \cdot O'V = O'M^2$ và do $i_m(C) = C'$ nên $O'C \cdot O'C' = O'M^2$. Sử dụng kết quả $(*)$ vừa nhắc lại ở trên ta được $F(C') = A'$. Tương tự $F(D') = B'$.

Kí hiệu $\rho_p(C, D)$ là khoảng cách Poincare giữa C và D, kí hiệu $\rho_k(A, B)$ là khoảng cách Calyley-Klein giữa A và B. Kí hiệu $x = OC', y = OD'$. Do các tính chất bảo toàn tỉ số kép

$$(PQCD)_p = (P'Q'C'D') = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1+y}{1-y}$$

và

$$(PQAB)_k = (P'Q'A'B') = (P'Q'F(C')F(D')) = \frac{1-F(x)}{1+F(x)} \cdot \frac{1+F(y)}{1-F(y)}$$

Mặt khác

$$1 - F(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2},\ \frac{1-F(x)}{1+F(x)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2,\ \text{tương tự cho biến } y.$$

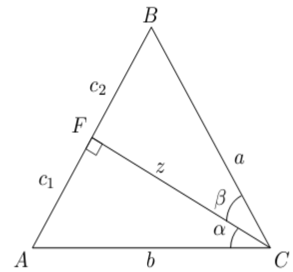
Suy ra $(PQCD)_p = (PQAB)_k^{-2}$ hay $\rho_p(C, D) = |\ln(PQCD) = \frac{1}{2}\ln(PQAB) = \rho_k(A, B)$, đ.p.c.m.

Định lí cosin về góc của hình học hyperbolic

Cho tam giác ABC với a, b, c là các cạnh đối diện lần lượt với các đỉnh A, B, C. Khi đó

$$\cos C = \sin A \sin B \cosh c - \cos A \cos B.$$

Chứng minh. Sử dụng các kí hiệu hình bên



$$\cosh c = \cosh c_1 \cosh c_2 + \sinh c_1 \sinh c_2 = \frac{\cos\alpha}{\sin A} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin B} + \sinh b \sin\alpha \cdot \sinh a \sin\beta$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdot \sinh^2 z}{\sin A \sin B} = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdot \sinh^2 z}{\sin A \sin B}$$

$$= \frac{\cos C + \sin\alpha\sin\beta(1+\sinh^2 z)}{\sin A \sin B} = \frac{\cos C + \sin\alpha\cosh z \cdot \sin\beta\cosh z}{\sin A \sin B} = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \sin B}, \quad \text{đ.p.c.m.}$$

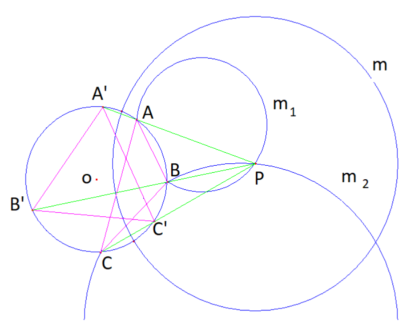
Nhận xét rằng sử dụng định lí này ta có thể tính độ dài các cạnh của tam giác vuông cân ABC, góc $\hat{C}$ vuông và $\hat{A} = \hat{B} = 30^0$ (ví dụ đã tính trong trang 18).

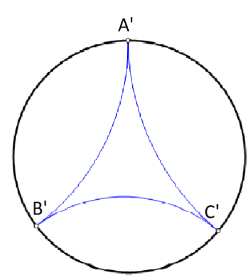
$$0 = \cos C = \sin A \sin B \cosh c - \cos A \cos B \;\Rightarrow\; \cosh c = \arctan A \cdot \arctan B = 3 \;\Rightarrow\; c \approx 1.76275$$

Tương tự nếu cần tính cạnh a, ta dùng đẳng thức

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos A = \sin C \sin B \cosh a - \cos C \cos B \;\Rightarrow\; \cosh a = \frac{\cos A}{\sin B} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; a \approx 1.14622$$

Tam giác cực là tam giác trong hình học hyperbolic mà 3 đỉnh đều nằm trên đường tròn cơ sở. Các đỉnh của tam giác được coi như những điểm vô cực. Từ mô hình Poincare ta dễ dàng nhận thấy bất kì 2 cạnh nào của tam giác cực cũng là 2 cung tròn tiếp xúc với nhau tại đỉnh tam giác. Suy ra góc ở các đỉnh của tam giác cực có độ đo bằng 0. ($\Delta A'B'C'$ trong hình vẽ dưới bên phải).





Hình vẽ bên trái chỉ ra cách dựng phép nghịch đảo chuyển 3 điểm bất kì trên đường tròn cơ sở A, B, C thành các đỉnh của tam giác đều $\Delta A'B'C'$. Góc $\widehat{PAB}$ không đổi (bằng nửa hiệu 2 cung $A'B' = 60^0$ và AB). Tương tự $\widehat{BPC}$ không đổi nên P là giao của hai cung m_1 và cung m_2. Vậy phép nghịch đảo tâm P đường tròn m chuyển tam giác ΔABC thành tam giác đều $\Delta A'B'C'$.

Tích của hai phép biến đổi nghịch đảo thích hợp sẽ chuyển một tam giác cực bất kì thành một tam giác cực bất kì khác. Từ nhận xét này ta có thể nói hai tam giác cực bất kì luôn bằng nhau.

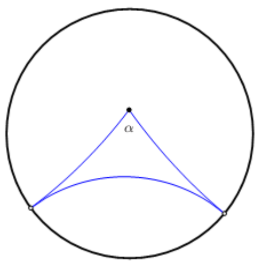
Diện tích tam giác và số khuyết góc của tam giác

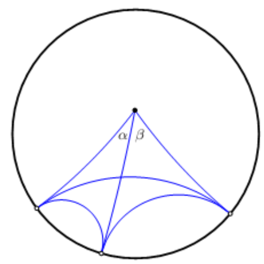
Như đã trình bày trước đây, trong hình học hyperbolic, hàm *số khuyết* của tổng các góc của tam giác, kí hiệu $\delta(\Delta ABC) = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}$ được dùng để định nghĩa *diện tích tam giác*. Diện tích tam giác là cơ sở để ta tính diện tích đa giác, hình tròn... Vì vậy ta sẽ làm rõ hơn khái niệm này qua mô hình Poincare.

Kí hiệu $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}$ là tam giác với các góc ở đỉnh bằng α, β, γ. Trường hợp tam giác có 3 đỉnh đều nằm trên đường tròn đơn vị, các góc ở đỉnh bằng 0, tam giác đó được kí hiệu $\Delta_{0,0,0}$ và ta gọi nó là tam giác cực. Nhận xét rằng các tam giác cực luôn bằng nhau vì tồn tại phép biến đổi xạ ảnh chiếu 2 tam giác như vậy vào nhau. Mặt khác mọi tam giác luôn có thể mở rộng thành tam giác cực nên tam giác cực là tam giác lớn nhất trong hình học hyperbolic. Ta gán cho tam giác đặc biệt, lớn nhất này diện tích

$$\text{Diện tích tam giác cực } S(\Delta_{0,0,0}) := \pi.$$

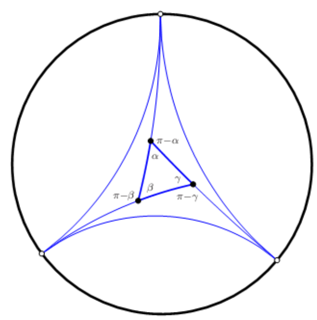
Bây giờ ta sẽ xét các $\Delta_{\alpha,0,0}$ có góc α với đỉnh nằm trong hình tròn tròn và 2 đỉnh còn lại là hai điểm cực nằm trên đường tròn. Kí hiệu $f(\alpha) := S(\Delta_{\alpha,0,0})$. Hàm diện tích này thỏa mãn điều kiện đầu $f(0) = \pi$ và $f(\pi) = 0$ (tam giác suy biến).





Do tính cộng tính của diện tích $f(\alpha) + f(\beta) = \pi + f(\alpha + \beta)$. Đạo hàm theo α ta được $f'\alpha) = f'(\alpha + \beta)$ là hằng số. Vậy f là hàm bậc nhất. Do các điều kiện đầu $f(0) = \pi,\ f(\pi) = 0$ suy ra

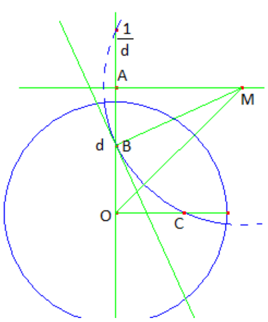
$$S(\Delta_{\alpha,0,0}) = \pi - \alpha.$$



Sử dụng kết quả trên cùng hình vẽ bên ta dễ dàng kết luận

$$S(\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta(\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}).\ (*)$$

Điều kiện đầu $S(\Delta_{0,0,0}) := \pi$ dẫn đến công thức tính diện tích tam giác $(*)$ là phù hợp với quy tắc tính diện tích trong hình học Euclide khi tam giác vô cùng nhỏ.



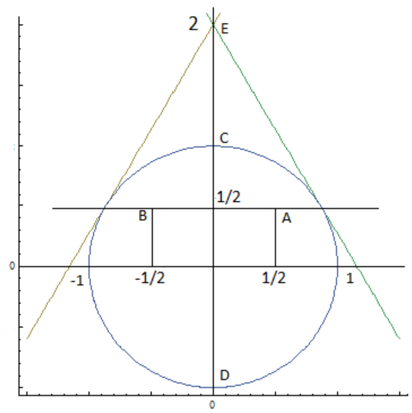
Thật vậy, xét tam giác vuông cân OBC, đỉnh O nằm ở tâm đường tròn, cạnh là khoảng cách $\rho = \rho(O, B)$ ứng với khoảng cách Euclide $d = d(O, B) = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} = \tanh\frac{\rho}{2}$. Tam giác OBC vô cùng nhỏ khi $\rho \to 0$. Khi đó diện tích tam giác xấp xỉ $\frac{\rho^2}{2}$ theo hình học Euclide.
Góc nhọn α của tam giác cân là góc giữa tiếp tuyến tại B với OB bằng $\widehat{AMB} = \alpha, \tan\alpha = \frac{AB}{AM} = \frac{1-d^2}{1+d^2}$. Suy ra

$$\alpha = \arctan\frac{1 - d^2}{1 + d^2} = \arctan\frac{2e^\rho}{e^{2\rho} + 1}.$$

Theo $(*)$, diện tích $S(\Delta OBC) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{2e^\rho}{e^{2\rho}+1} = \frac{\rho^2}{2} + o(\rho^2)$ khi $\rho \to 0$. Diện tích này xấp xỉ với $\frac{\rho^2}{2}$ như mong đợi đã nói đến ở trên.

Các ví dụ về ma trận phép biến đổi xạ ảnh

1. Viết phép biến đổi xạ ảnh mà đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là trục, chuyển đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ vào chính nó. Có nhiều phép biến đổi thỏa mãn điều đó. Cụ thể hơn ta chỉ ra ảnh của 4 điểm $A(1/2, 1/2), B(-1/2, 1/2)$ (2 điểm cố định trên đường thẳng $y = 1/2$) và $C(0,1), D(0,-1)$ (2 điểm chuyển đổi lẫn nhau trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$) là các điểm $A' = A, B' = B$ và $C' = D(0,-1), D' = C(0,1)$



Các véc tơ đại diện cho A, B, C, D lần lượt là

$$\mathbf{a} = (1,1,2),\ \mathbf{b} = (-1,1,2),\ \mathbf{c} = (0,-3,-3),\ \mathbf{d} = (0,-1,1), \quad \mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad (1)$$

Các véc tơ đại diện cho ảnh A', B', D', C' (ứng với thứ tự A, B, C, D) lần lượt là

$$\mathbf{a} = (1,1,2),\ \mathbf{b} = (-1,1,2),\ -\mathbf{d} = (0,1,-1),\ -\mathbf{c} = (0,3,3), \quad -\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d} \quad (2)$$

Chú ý rằng các véc tơ thứ tư trong (1) *và* (2) *đều bằng tổng của 3 véc tơ đầu.* Khi đó phép biến đổi cần tìm chuyển 3 véc tơ đầu đại diện cho A, B, C, D thành 3 véc tơ đầu đại diện cho A', B', C', D'

$$\mathbf{a} \to \mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \to \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} \to -\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

hay ma trận trong cơ sở $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ma trận chuyển cơ sở từ chính tắc sang $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ là $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Vậy ma trận của phép biến đổi xạ ảnh cần tìm $[f]$ trong cơ sở chính tắc sẽ bằng

$$TAT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad [f] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng phép biến đổi xạ ảnh này có $E(0,2)$ là centrum và $y = 1/2$ là trục.

Ví dụ 2 Viết phép biến đổi xạ ảnh mà đường thẳng $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là trục, chuyển đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ vào chính nó. Khi đó tâm phép biến đổi là $(\sqrt{2}, 0, 1)$. Ma trận của phép chiếu xuyên tâm cần tìm có thể tính như trong các vị dụ dưới đây

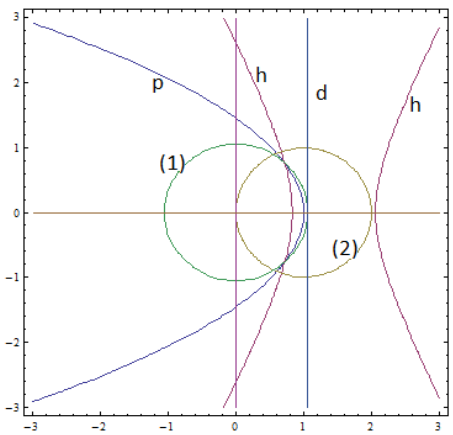
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Phép chiếu sẽ mang đường thẳng $-2\sqrt{2}x_1 + 3x_3 = 0$ (hệ số là hàng cuối của ma trận A) hay $(d): \ x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ thành đường thẳng vô cực.

Ma trận A chuyển điểm (x_1, x_2, x_3) thành điểm $(-3x_1 + 2\sqrt{2}x_3, x_2, -2\sqrt{2}x_1 + 3x_3)$ nên phép chiếu chuyển đường cong $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ thành đường cong $F(-3x_1 + 2\sqrt{2}x_3, x_2, -2\sqrt{2}x_1 + 3x_3) = 0$.

Chẳng hạn đường tròn $(1): \ x^2 + y^2 = \frac{9}{8}$ tiếp xúc với đường thẳng (d) nói trên. Phép chiếu sẽ chuyển nó thành parabol $(p): \ 12\sqrt{2}x + 8y^2 = 17$. Tương tự
Phép chiếu chuyển đường tròn $(2): \ x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 = 0$ (tâm là điểm $(1,0)$, bán kính bằng 1) thành hyperbol (do nó cắt (d) tại 2 điểm nên đường cong ảnh có 2 điểm vô cực)

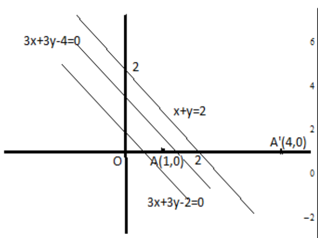
$$(h): \ (9 - 12\sqrt{2})x^2 + (40 - 12\sqrt{2})x + 2y^2 = 16\sqrt{2} - 9.$$

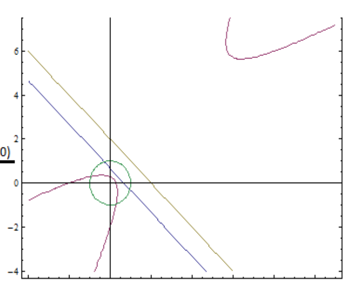


3. Viết biểu diễn của phép chiếu projektiv có $O(0,0)$ là điểm bất định và đường thẳng $x + y = 2$ là trục, mang điểm $A(1,0)$ thành điểm $A'(4,0)$.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

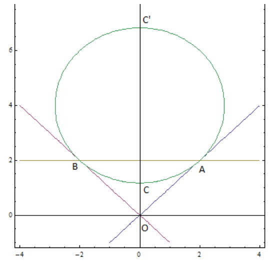
Phép chiếu sẽ mang đường thẳng $3x + 3y - 2 = 0$ thành đường thẳng vô cực và mang đường thẳng vô cực thành đường thẳng $3x + 3y - 4 = 0$. Điều đó hoàn toàn phù hợp với việc dựng hình các điểm thường và điểm vô cực bằng hình học.





Phép biến đổi xạ ảnh $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ chuyển hypecbol $7x^2 + 7y^2 - 18xy + 12x + 12y - 4 = 0$ thành đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$

4.
Viết phép biến đổi xạ ảnh mà $O(0,0)$ là điểm bất định và đường thẳng $y = 2$ là trục, chuyển đường tròn $x^2 + (y-4)^2 = 8$ vào chính nó. Như vậy ta chỉ cần ảnh của 4 điểm $O(0,0), A(2,2), B(-2,2), C(0, 4-2\sqrt{2})$ là các điểm $O'(0,0), A'(2,2), B'(-2,2), C'(0, 4+2\sqrt{2})$



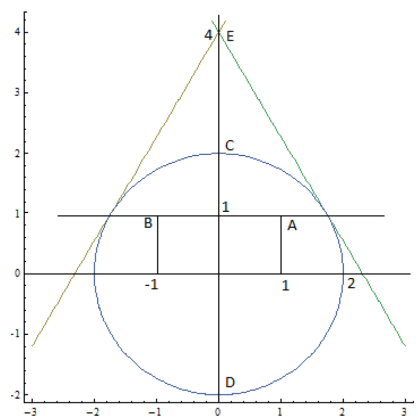
Véc tơ đại diện cho C là $\mathbf{c}((0,4,2+\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot\mathbf{o} + \mathbf{a} + \mathbf{b}$, véc tơ đại diện cho C' là $2(0, 4+2\sqrt{2}, 1) = -2(1+\sqrt{2})\cdot\mathbf{o} + (2+\sqrt{2})\mathbf{a} + (2+\sqrt{2})\mathbf{b}$. Khi đó phép biến đổi cần tìm chuyển

$$\sqrt{2}\cdot\mathbf{o} \to -2(1+\sqrt{2})\cdot\mathbf{o}, \quad \mathbf{a} \to (2+\sqrt{2})\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \to (2+\sqrt{2})\mathbf{b}$$

hay ma trận trong cơ sở chính tắc sẽ là bội lần của $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Chú ý rằng phép biến đổi xạ ảnh này chuyển đường tròn thành đường tròn và 2 điểm trên đó giao với đường $y = 3x$ vào lẫn nhau: $D(2,6)$ với $D'(\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$

5. Viết phép biến đổi xạ ảnh mà đường thẳng $y = 1$ là trục, chuyển đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ vào chính nó. Có nhiều phép biến đổi thỏa mãn điều đó. Cụ thể hơn ta chỉ ra ảnh của 4 điểm $A(1,1), B(-1,1)$ (2 điểm cố định trên đường thẳng $y = 1$) và $C(0,2), D(0,-2)$ (2 điểm chuyển đổi lẫn nhau trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$) là các điểm $A' = A(1,1), B' = B(-1,1)$ và $C' = D(0,-2), D' = C(0,2)$



Các véc tơ đại diện cho A, B, C, D lần lượt là $\mathbf{a} = (2,2,2)$, $\mathbf{b} = (-2,2,2)$, $\mathbf{c} = (0,-6,-3)$, $\mathbf{d} = (0,-2,1)$ Véc tơ đại diện cho D là $\mathbf{d}((0,-2,1) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, véc tơ đại diện cho $D' = C$ là $-\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Khi đó phép biến đổi cần tìm chuyển

$$\mathbf{a} \to \mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \to \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} \to \mathbf{d}$$

hay ma trận trong cơ sở $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ma trận chuyển cơ sở từ chính tắc sang $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ là $T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Vậy ma trận của phép biến đổi xạ ảnh cần tìm $[f]$ trong cơ sở chính tắc sẽ bằng

$$TAT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad [f] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng phép biến đổi xạ ảnh này có $E(0,4)$ là centrum và $y = 1$ là trục.

6. Ví dụ về cách xác định ma trận của phép chiếu xuyên tâm chuyển parabol thành đường tròn. Parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{4} + 1$. Khi đó tiêu điểm parabol $F(0,2)$, đỉnh $D(0,1)$ và trục hoành là đường chuẩn của parabol. Đường tròn có phương trình $x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$. Phép chiếu xuyên tâm tâm $O(0,0)$ chuyển parabol thành đường tròn có ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Thật vậy các véc tơ đại diện cho A, C, D, B lần lượt

$$\mathbf{a} = (2,-2,-1),\ \mathbf{c} = (0,0,-2),\ \mathbf{d} = (0,4,4)$$

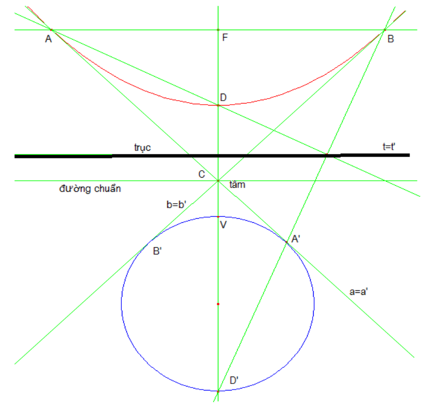
$\Rightarrow\ \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = (2,2,1) \qquad (1)$

Tọa độ $D'(0,a,1)$, trong đó kí hiệu $a = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Các véc tơ đại diện cho A', C', D', B'

$$\mathbf{a}' = (1,-1,2),\ \mathbf{c}' = (0,0,-4-\frac{2}{a}),\ \mathbf{d}' = (0,2,\frac{2}{a})$$

và $\quad \mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \mathbf{c}' + \mathbf{d}' = (1,1,-2) \qquad (2)$

Làm như trong các ví dụ trước, thay trả $a = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,



ta được ma trận của phép chiếu xuyên tâm cần tìm $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Nhận xét rằng ta có thể tính được trục của phép chiếu xuyên tâm là đường thẳng $y = \frac{4}{8+\sqrt{2}}$.

7. Ví dụ về phép đối xứng qua đường thẳng $(d):\ y = 2x + 1$.

Nó là phép biến đổi Euclide, không phải là phép biến đổi tuyến tính. Ta sẽ tìm phép biến đổi xạ ảnh (cũng là phép biến đổi tuyến tính) để nghiên cứu nó. Trước hết ta tịnh tiến theo véc tơ $\mathbf{a} = (-2,-5)$ đường thẳng (d) trở thành không gian con $(d'):\ y = 2x$. Phép đối xứng qua đường thẳng (d') có ma trận $\begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Chuyển sang hệ tọa độ thuần nhất rồi tịnh tiến đến điểm $M(2,5)$, phép biến đổi có ma trận $\begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 2 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hay $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Do phép biến đổi ngược với tịnh tiến đến điểm $M(2,5)$ có ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nên phép đối xứng qua đường thẳng $(d):\ y = 2x+1$ có ma trận

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi xạ ảnh này chiếu (x,y,z) *thành* $(-3x+4y-4z, 4x+3y+2z, 5z)$ *nên điểm ảnh có tọa độ*

$$\left(\frac{-3x+4y-4z}{5z}, \frac{4x+3y+2z}{5z}\right)\Big|_{z=1} = \left(\frac{-3x+4y-4}{5}, \frac{4x+3y+2}{5}\right)$$

trong mặt phẳng. Đường cong $F(x,y) = 0$ *sẽ trở thành* $F(\frac{-3x+4y-4}{5}, \frac{4x+3y+2}{5}) = 0$. *Ví dụ nó chuyển đường tròn* $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3^2$ *thành chính nó. Tâm đường tròn thuộc đường thẳng* (d).

Về mặt hình học ta cũng dễ dàng chỉ ra phép đối xứng qua đường thẳng $(d):\ y = 2x+1$ là phép biến đổi xuyên tâm mà trục là (d) và tâm là điểm vô cực $(1,2,0)$.

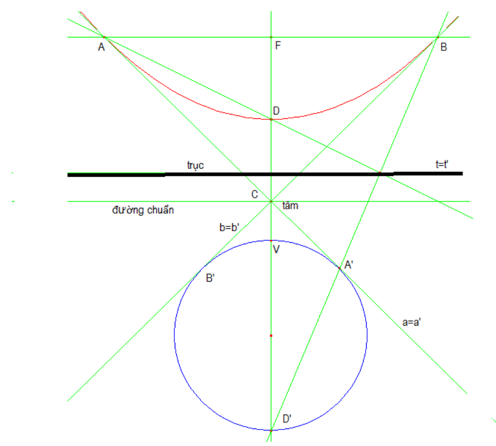
Lưu ý rằng nếu phép đối xứng qua đường thẳng $(d):\ y = 2x + 1$ không xét trong không gian xạ ảnh, do nó không là ánh xạ tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$ nên mối liên hệ giữa tọa độ (x, y) của điểm bất kì với tọa độ ảnh $(\overline{x}, \overline{y})$ của nó được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\ y-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

8. Phép chiếu xuyên tâm chuyển parabol thành đường tròn

(*Giải ví dụ 6. bằng hình học*)

Hình vẽ bên minh họa cách xây dựng phép biến đổi xuyên tâm chuyển một parabol biết tiêu điểm, biết đường chuẩn thành đường tròn. Ta biết đỉnh parabol cách đều đường chuẩn và tiêu điểm. Từ C kẻ 2 tiếp tuyến CA, CB tới parabol. (A, B và F cách đều đường chuẩn). Do 2 tiếp tuyến này cũng là tiếp tuyến của đường tròn nên giao của chúng sẽ là tâm C của phép biến đổi xuyên tâm. Đỉnh D của parabol và điểm vô cực của trục parabol sẽ thành 2 điểm D' và V của đường tròn. Chọn D' tùy ý, vẽ đường tròn đi qua D' và tiếp xúc với 2 tiếp tuyến. Giao của DA với $D'A'$ nằm trên trục của phép biến đổi xuyên tâm. (*Tam giác ABC vuông cân.*)



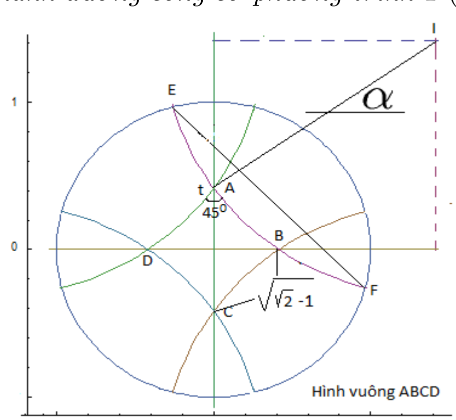
9. ("Hình vuông" trong mô hình Poincare mà góc ở đỉnh bằng 45^0)

Với đường tròn $(C):\ x^2 + y^2 = 1$ điểm nghịch đảo của điểm $A(0, t)$ là $A'(0, \frac{1}{t})$. Đường tròn vuông góc với (C) và đi qua $A(0, t), B(t, 0)$ có tâm là giao của các trung trực của AA' và AB. Tâm của đường tròn đó có tọa độ $I(\frac{1+t^2}{2t}), \frac{1+t^2}{2t})$. (*Đặc biệt với $t = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$, đường tròn đó có bán kính $r = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$.*)

Do tính đối xứng, các điểm C, D đối xứng với A, B qua O sẽ cùng với A, B tạo thành hình "vuông" (tứ giác đều) trong mô hình Poincare. Bây giờ ta sẽ tính các góc của hình vuông này. Gọi α là góc giữa trục Oy với tiếp tuyến tại A. Hệ số góc của đường thẳng AI bằng $\tan\alpha$. Tọa độ của véc tơ AI bằng $AI(\frac{1+t^2}{2t}, \frac{1-t^2}{2t})$, suy ra $\tan\alpha = \frac{1-t^2}{2t} : \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Như vậy $\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$ khi $t = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$, hay $\tan 2\alpha = 1$. Suy ra các góc ở đỉnh của hình "vuông" $ABCD$ trong mô hình Poincare bằng $2\alpha = 45^0$.

Chú ý rằng dây cung EF cắt trục tung tại điểm $M(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Dây cung này là ảnh Izomorfizmus của cung EF vào dây EF qua ánh xạ $F(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. (*Trong trường hợp tổng quát, đường tròn chuẩn có bán kính R, khi đó Izomorfizmus là ánh xạ $F(t) = \frac{2tR^2}{R^2+t^2}$ - dễ dàng chỉ ra bằng việc xét tam giác đồng dạng*).

Nhận xét rằng phép biến đổi nghịch đảo luôn chuyển đường tròn thành đường tròn. Có thể chỉ ra điều này bằng việc xét phép biến đổi nghịch đảo qua đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Khi đó đường cong với phương trình $F(x, y) = 0$ chuyển thành đường cong có phương trình $F(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) = 0$.



Các hàm hyperbolic

Các công thức tính toán trong hình học hyperbolic thường gắn với các hàm hyperbolic. Đó cũng là một trong các lí do hình học Bolyai - Lôbasepxki được gọi là hình học hyperbolic. Ta nhắc lại định nghĩa và tính chất các hàm hyperbolic

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Các hàm hyperbolic có tính chất

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

và

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Đặc biệt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh\, x\, \cosh x.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Cannon,J.W.,W.J.Floyd,R.Kenyon,andW.R.Parry(1997). HYPERBOLIC GEOMETRY. MSRI Publications 31, 59 - 115.

[2] James W. Cannon, William J.Floyd, Richard Kenyon, and Walter R. Parry. HYPERBOLIC GEOMETRY (*Có thể tải về từ internet*)

[3] Sverrir Thorgeirsson(2014). HYPERBOLIC GEOMETRY: HISTORY, MODELS, AND AXIOMS (*Có thể tải về từ internet*)

[4] Zoltán Szilasi (2012) CLASSICAL THEOREMS ON HYPERBOLIC TRIANGLES FROM A PROJECTIVE POINT OF VIEW (*Có thể tải về từ internet*)

[5] GREENBERG, MARVIN JAY. EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES. 4th ed. New York: W.H. Freeman, 2008 (*Có thể tải về từ internet*)

[6] Tiffani Traver (2014). TRIGONOMETRY IN THE HYPERBOLIC PLANE (*Có thể tải về từ internet*)

[7] Jurgen Richter-Gebert. PERSPECTIVES ON PROJECTIVE GEOMETRY. Springer, 2010 (*Có thể tải về từ internet*)

Tài liệu tham khảo bằng tiếng Hung

(*Các tài liệu này có thể tải về từ internet*)

[1] Moussong Gábor. GEOMETRIA. Eotvos Loránd Tudományegyetem Geometriai Tanszék, 2013

[2] Hajós, Gyorgy. BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA. Eotvos Loránd Tudományegyetem Geometriai Tanszék, 1999

[3] Kerekjárto Béla. A GEOMETRIA ALAPJAIRÓL. Projektiv Geometria, 1944