Số π và bài toán “Cầu phương hình tròn”

Số π được định nghĩa khá đơn giản và dễ hiểu cho hầu hết mọi người, chỉ cần có kiến thức ban đầu về hình học sơ cấp.

Ta biết rằng mọi hình tròn đều đồng dạng với nhau, do vậy tỉ số giữa chu vi hình tròn và đường kính của nó là một số không đổi. Tỉ số đó được gọi là số π.

Từ thời cổ Hy lạp người ta đã đặt ra câu hỏi phải chăng π là số hữu tỉ? Nhưng nổi bật lên là một vấn đề khác, hấp dẫn và nổi tiếng hơn, nó ẩn sâu trong bản chất số π, đó là bài toán cầu phương hình tròn (***squaring the circle***). Đây là một vấn đề lớn, như sau này sẽ được chỉ ra, nó khó hơn rất nhiều so với câu hỏi π là số hữu tỉ hay vô tỉ?

Bài toán cầu phương hình tròn là một bài toán dựng hình: chỉ sử dụng compa và thước kẻ, hãy dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình tròn cho trước. Hoặc tương đương với nó là bài toán hãy dựng một đoạn thẳng có độ dài bằng chu vi một hình tròn cho trước.

Trải qua hàng nghìn năm, các nhà bác học nổi tiếng vẫn bó tay trước bài toán hình sơ cấp được đặt ra rất đơn giản và dễ hiểu với hầu hết mọi người.

Chính do sự đơn giản và dễ hiểu đó, bài toán tạo ra một sức hấp dẫn lớn với các nhà toán học nghiệp dư, các giáo sĩ, các nhà khoa học nửa vời và cả những người say mê toán có đầu óc khác biệt không bình thường. Họ tạo thành nhóm các nhà “cầu phương hình tròn”, và trở thành các nhà giả kim toán học, hay những người say mê tìm kiếm động cơ vĩnh cửu. Trải qua hàng nghìn năm đến nay vẫn có rất nhiều người tuyên bố họ đã giải quyết xong bài toán. Hàng trăm ngàn lá thư đã được gửi đến các viện toán, các viện hàn lâm khoa học với đủ các chứng minh phức tạp dài dòng khác nhau. Viện hàm lâm khoa học Hungary đầu thế kỉ XX đã phải ra thông báo họ sẽ bỏ qua, không đọc các bài viết liên quan đến cầu phương hình tròn và động cơ vĩnh cửu.

Nước ta cũng không thuộc diện ngoại lệ. Nhà cách mạng lão thành, Nguyễn Trí Uẩn, người đã sáng tạo ra bộ trò chơi ghép hình (kiểu Lego) duy nhất ở Việt nam từ năm 1940. Bộ ghép hình sau đó mang tên ông: **trò chơi Trí Uẩn**.

(Xem http://tringuyentrochoi.com/vi/bvct/id18/4.-Tro-choi-doi-nguoi/)

Sau này ông lại bỏ rất nhiều công sức vào việc giải bài toán cầu phương hình tròn. Ông đã cầm cố cả căn nhà duy nhất của gia đình để tìm cách bảo vệ giá trị của những nghiên cứu của mình và in chúng dưới tên sách "Cầu phương hình tròn". Năm 1960 ông yêu cầu nhà nước Việt nam phải lập hội đồng nghiệm thu để công bố lời giải bài toán ra toàn thế giới. Yêu cầu của ông đã được nhà nước cho phép và giáo sư Lê Văn Thiêm là phản biện chính của đề tài.

Người tạo ra bước đột phá lớn trong việc giải bài toán hơn nghìn năm tuổi này là nhà toán học trẻ tài ba Évariste Galois (1811-1832). Ông là cha đẻ của lý thuyết nhóm Galois, một lĩnh vực của đại số. Việc dựng hình bằng thước kẻ và compa có thể chuyển sang đại số thành việc viết các phương trình đường thẳng (phương trình bậc nhất) các phương trình đường tròn (bậc hai), giải chúng rồi tiếp tục tính toán với chúng. Như vậy các số thực có thể dựng được bằng thước kẻ và compa phải là nghiệm của các đa thức trên trường số hữu tỉ. Nói cách khác chúng là các số đại số. Galois đã đưa bài toán cầu phương hình tròn thành bài toán tương đương: phải chăng π là một số đại số?

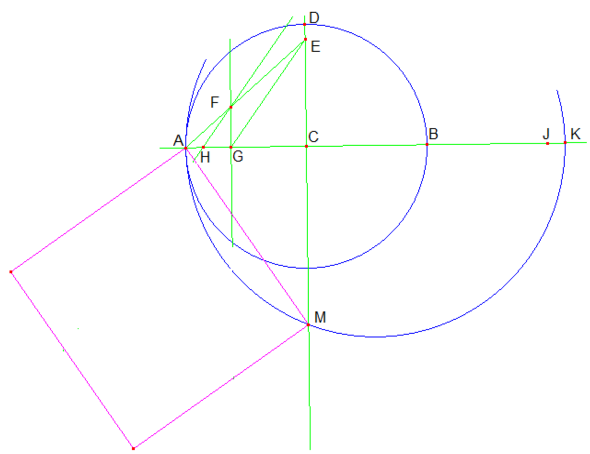
Năm 1882, Ferdinand von Lindemann, nhà toán học Đức cho đăng bài „*Über die Zahl* π“, trong đó ông chứng minh π không phải số đại số. Bài toán cầu phương hình tròn đã được giải quyết trọn vẹn sau gần 2 thiên niên kỉ. Một bài toán tiêu tốn nhiều sức lực của các nhà toán học và kéo dài nhất trong lịch sử toán học thế giới.

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH GẦN ĐÚNG SỐ π

Cầu phương hình tròn gần đúng

Mặc dù bài toán cầu phương hình tròn với độ chính xác tuyệt đối là một bài toán không thể giải được nếu chỉ sử dụng compa và thước kẻ. Năm 1882 nhà toán học Đức Lindemann đã chứng minh điều này. Tuy nhiên trước đó và cả sau này nhiều người vẫn quan tâm đến việc dựng một hình vuông (tất nhiên chỉ bằng compa và thước kẻ) sao cho diện tích của nó xấp xỉ tốt nhất với diện tích của một hình tròn cho trước.

Đó cũng là cách tính gần đúng số π. Năm 1849 nhà toán học Đức Jacob de Gelder đã chỉ ra một cách tiệm cận đơn giản và tuyệt vời cho bài toán cầu phương gần đúng này.



Cho trước đường tròn tâm C, bán kính $CD = 1$ và $CD \perp AB$. *Diện tích hình tròn bằng* π. Lấy điểm E trên bán kính CD sao cho $CE = \frac{7}{8}$. Dựng điểm F trên AE sao cho $AF = \frac{1}{2}$. Kẻ $FG \perp AB$ và $FH \parallel EG$. Dễ dàng tính được $AH = \frac{4^2}{7^2+8^2}$. Lấy trên AB kéo dài các điểm J, K sao cho $AJ = 3, JK = AH$. Khi đó độ dài đoạn AK bằng

$$3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = \frac{355}{113} \approx 3,14159292...$$

xấp xỉ với $\pi = 3,14159265...$

Đường tròn đường kính AK cắt CD tại M. Xét tam giác vuông AMK, $AM^2 = AC \cdot AK = AK = \frac{355}{113}$. Vậy hình vuông cạnh AM có diện tích xấp xỉ với π, diện tích của hình tròn cho trước. Sai số trong cách dựng trên:

* Nếu bán kính đường tròn $R = 1m$ thì sai số diện tích hình vuông bằng $0,3mm^2$.

* Nếu bán kính đường tròn $R = 100km$ thì sai số độ dài của AK bằng $7,5mm$.

Sử dụng các kết quả sau đây ta có thể tính gần đúng số π với độ chính xác tùy ý

Công thức Wallis

Trước hết ta chứng minh $\sin kx$ *với* $k = 2n-1$ *là số tự nhiên lẻ, có thể biểu diễn dưới dạng một đa thức bậc* k *của* $\sin x$, $\sin kx = P_k(\sin x)$.

Ta chứng minh điều đó bằng quy nạp. Với $k = 1$ là hiển nhiên. Giả sử khẳng định trên đúng với $k < 2n$ và k lẻ, ta sẽ chứng minh nó đúng với $k = 2n+1$.

$$\sin(2n+1)x = \sin[(2n-1)x + 2x] = \sin(2n-1)x \cdot \cos 2x + \cos(2n-1)x \cdot \sin 2x =$$

$$= \sin(2n-1)x \cdot (1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{2}[\sin(2n+1)x - \sin(2n-3)x]. \text{ Suy ra}$$

$$\sin(2n+1)x = 2\sin(2n-1)x \cdot (1 - 2\sin^2 x) - \sin(2n-3)x.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp suy ra đ.p.c.m.

Từ đẳng thức $\sin(2n+1)x = P_{2n+1}(\sin x)$ ta lại có nhận xét đa thức $P_k(x)$ bậc $k = 2n+1$ có k nghiệm thực khác nhau $x_i = \sin\frac{i\pi}{k}$, $i = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm n$, suy ra $P_k(x) = C\prod_{i=-n}^{n}(x - x_i)$ hay

$$\sin kx = C\prod_{i=-n}^{n}(\sin x - \sin\frac{i\pi}{k}) = C\sin x\prod_{i=1}^{n}(\sin^2 x - \sin^2\frac{i\pi}{k}). \quad (1)$$

Hằng số C được xác định bằng cách chia cả 2 vế cho x rồi chuyển qua giới hạn khi $x \to 0$:

$$2n+1 = C\prod_{i=-n, i\neq 0}^{n}(-\sin\frac{i\pi}{k}) = C\prod_{i=1}^{n}\Big(-\sin^2\frac{i\pi}{k}\Big).$$

Thay kx bằng t vào đẳng thức (1) cùng với hằng số C ta được

$$\sin t = k\sin\frac{t}{k}\prod_{i=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{t}{k}}{\sin^2\frac{i\pi}{k}}\Big) \to t\prod_{i=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t^2}{i^2\pi^2}\Big) \text{ khi } k = 2n+1 \to \infty.$$

Đây là công thức Euler

$$\boxed{\sin t = t\prod_{i=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t^2}{i^2\pi^2}\Big)} \quad (2)$$

và nếu thay $t = \frac{\pi}{2}$ ta có công thức Wallis

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.}$$

Công thức Euler

Từ khai triển Maclaurin hàm $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$, thay $t = \pi x$ ta được

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \frac{\pi^6 x^6}{7!} + \cdots$$

Mặt khác sử dụng công thức Euler (2), cũng thay $t = \pi x$ ta được $\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{i=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{i^2}\Big)$. Bằng cách nhân bung hàm này để biểu diễn nó dưới dạng chuỗi hàm rồi so sánh với các hệ số ở dòng trên, chẳng hạn so sánh hệ số của x^2, ta có

$$-\frac{\pi^2}{3!} = -(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots) \quad \text{hay} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}.$$

Với việc so sánh hệ số của x^4:

$$\frac{\pi^4}{5!} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{j^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}-\frac{1}{i^2}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\Big(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{i^2}\Big), \quad \text{suy ra} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

So sánh hệ số của x^6 dẫn đến

$$\frac{\pi^6}{7!} = \frac{1}{3!}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j, i\neq k, k\neq j}}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{j^2}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\sum_{i\neq j}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{j^2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{i^2}-\frac{1}{j^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i\neq j}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{j^2}\Big(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{i^2}-\frac{1}{j^2}\Big) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\big(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{j^2}-\frac{1}{i^2 j^2}-\frac{1}{j^4}\big)-\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{i^2}+\frac{2}{i^4}\Big)$$

$$\frac{\pi^6}{7!} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\Big(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{i^2}-\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{i^2}+\frac{2}{i^4}\Big), \quad \text{suy ra} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Sử dụng các công thức Wallis và Euler kể trên ta có thể tính gần đúng số π với độ chính xác tùy ý. Công thức cuối của Euler, nếu ta chỉ tính tổng với 12 số hạng đầu, sẽ dẫn đến kết quả $\pi \approx 3,1415923$.