Tập hợp Cantor và đường cong Peano

Tập hợp Cantor : Xét dãy các tập hợp sau: $C_0 = [0, 1]$, C_1 nhận được từ C_0 bằng cách lấy đi khoảng mở $I_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ở chính giữa

$$C_1 = C_0 \setminus I_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

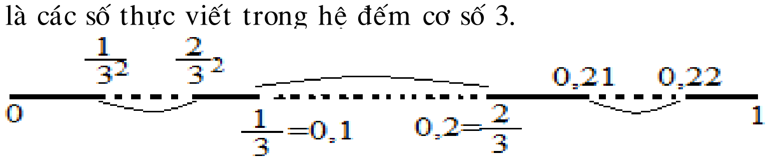
Như thế C_1 gồm 2 khoảng đóng. Ta chia mỗi khoảng đó thành 3 đoạn bằng nhau ta lấy đi khoảng mở ở chính giữa. Kí hiệu I_2 là tập bị lấy đi

$$I_2 = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$$

và

$$C_2 = [0, 1] \setminus (I_1 \cup I_2) = [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]. \quad (*)$$

Tiếp theo chúng ta lại chia mỗi đoạn trong 4 đoạn tạo thành C_2 ở trên thành 3 phần bằng nhau rồi bỏ đi phần chính giữa... Cứ thế C_n nhận được từ C_{n-1} bằng cách lấy đi 2^{n-1} khoảng mở ở chính giữa của các đoạn tạo thành C_{n-1}. Như vậy C_n gồm 2^n đoạn với độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3^n}$. Tập $C = \cap C_i = C_0 \setminus \cup I_i$ được gọi là tập hợp Cantor. Hình dưới minh họa cách xây dựng tập Cantor, đoạn gồm các gạch đứt - nối là đoạn bỏ đi, các số thập phân là các số thực viết trong hệ đếm cơ số 3.



Tính chất tập hợp Cantor :

1. Tập $C \neq \emptyset$ vì nó luôn chứa các đầu mút của các đoạn bỏ đi: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{7}{3^2}, \cdots$. Tập C có độ đo Lebesgue bằng 0, vì tổng độ dài các đoạn lấy đi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot 2^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{37} + \cdots = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\Big) = 1.$$

   Tuy nhiên lực lượng của C là continuum vì như ta sẽ chỉ ra trong bài này (tính chất 5), tồn tại một toàn ánh từ C lên đoạn $[0, 1]$.

2. Tập hợp Cantor C là tập đóng và không đâu trù mật (*nowhere dense*).

   Ta nhớ lại rằng trong không gian tô pô, tập hợp không đâu trù mật là tập hợp (gọi là A chẳng hạn) mà bao đóng của nó có phần trong là tập rỗng $int(\overline{A}) = \emptyset$.

   Ta đã biết tập Cantor C là giao của các C_i mà bản thân C_i là tập đóng vì nó là hợp hữu hạn các đoạn đóng. Suy ra C là tập đóng.

   Ta sẽ chứng minh tập Cantor C không chứa một khoảng mở bất kì nào cả. Thật vậy, giả sử ngược lại nó chứa một khoảng (a, b) nào đó. Chọn số tự nhiên n sao cho $\frac{1}{3^n} < b - a$. Theo định nghĩa, tập Cantor C được chứa trong C_n, mà C_n, tương tự như hệ thức $(*)$ gồm 2^n các đoạn thẳng (khoảng đóng) đôi một rời nhau với độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3^n}$ bé hơn $(b - a)$. Vậy tập C không chứa một khoảng mở (a, b) nào cả. Suy ra nó là tập không đâu trù mật.

3. Tập hợp Cantor C là hoàn hảo (*perfect*) và hoàn toàn không liên thông (*totally disconnected*).

   Ta nhắc lại tập hợp hoàn hảo là tập đóng và không có điểm cô lập. Không gian metric M được gọi là hoàn toàn không liên thông nếu mọi điểm $p \in M$ đều có một hệ các lân cận vừa đóng vừa mở, bán kính nhỏ tùy ý. Nói cách khác với bất kì $\varepsilon > 0$ tồn tại tập con U vừa đóng, vừa mở sao cho $p \in U \subset M_\varepsilon(p)$.

   Đây là 2 tính chất kì lạ và có vẻ "đối lập" nhau. Nó không chứa các điểm rời rạc nhau (perfect) nhưng giữa 2 điểm bất kì không có đường cong liên tục nào trong C có thể nối chúng lại.

   Chứng minh tính chất 3. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì và lấy $p \in C$ tùy ý. Gọi n là số tự nhiên đủ lớn sao cho $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Khi đó p sẽ thuộc một trong các khoảng đóng I_n nào đó có độ dài $\frac{1}{3^n}$ (giống như một khoảng đóng trong hệ thức $(*)$ ở trên). Các đầu mút của đoạn I_n này (luôn $\in C$) nằm trong $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$. Có vô hạn các số như vậy, suy ra p là điểm tụ của C. Vậy tập Cantor C là hoàn hảo.

   Ta nhận xét rằng $C \subset C_n \ \ \forall n$ và C_n gồm hữu hạn các khoảng I_n đôi một rời nhau nên $C \cap I_n, C \cap I_n^c$ là các tập vừa đóng, vừa mở trong C. Vì $C = \Big(C \cap I_n\Big) \cup \Big(C \cap I_n^c\Big)$, hợp của 2 tập rời nhau cùng mở trong C nên tập Cantor C hoàn toàn không liên thông, đ.p.c.m.

4. Tập hợp Cantor C gồm đúng các số thực $x = 0, a_1a_2a_3...a_n...$ (viết trong hệ cơ số 3) mà a_i chỉ là 2 hoặc 0 với mọi i. Mọi số thực thuộc C (trong hệ cơ số 3) chỉ có duy nhất một cách biểu diễn với các chữ số 2 hoặc 0. Thật vậy, nếu có 2 cách biểu diễn, khi đó hiệu của chúng bằng 0, mặt khác

$$
\begin{aligned}
&0, a_1a_2a_3...a_k2... - 0, a_1a_2a_3...a_k0... \geq \\
&\quad 0, a_1a_2a_3...a_k2 - 0, a_1a_2a_3...a_k1 = 0,000...01 > 0, \text{ vô lí!}
\end{aligned}
$$

5. Tồn tại một toàn ánh f từ tập Cantor C lên đoạn $[0,1]$.

   Ta xây dựng ánh xạ $f : C \longrightarrow [0,1]$ như sau. Với mỗi số thực trong C, $x = 0, a_1a_2a_3...a_n...$ (viết trong hệ cơ số 3) mà a_i bằng 2 hoặc 0, ảnh của nó $f(x)$ là số thực trong đoạn $[0,1]$ nhận được từ biểu diễn của x bằng việc thay toàn bộ các chữ số 2 thành chữ số 1. Lưu ý rằng biểu diễn đó của $f(x)$ được viết trong hệ nhị phân (cơ số 2). Ví dụ

$$f(0,202022) = 0,101011$$

$$f(0,00202) = 0,00101$$

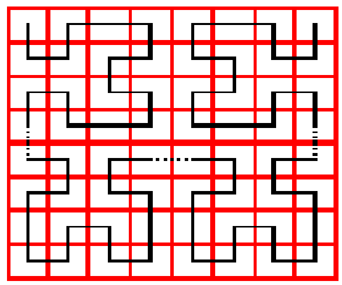
   Hiển nhiên f là toàn ánh và do đó lực lượng của tập Cantor bằng lực lượng của tập $[0,1]$, cotinuum. Đây có lẽ là tính chất kì lạ nhất của tập Cantor, một tập không chứa một khoảng nào cả, có độ đo Lebesgue bằng 0 nhưng có lực lượng tương đương với đoạn $[0,1]$.

Đường cong Peano

Đường cong là một khái niệm chung trong toán học. Nó thường được hiểu "nôm na" là không gian ảnh của một ánh xạ liên tục $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Quan niệm này bị nhà toán học người Ý, Giuseppe Peano (1858-1932) bác bỏ, bằng việc chỉ ra tồn tại một ánh xạ liên tục $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mà tập ảnh của nó lấp kín hình vuông $[0, 1] \times [0, 1]$ trong $\mathbb{R}^2$. Do vậy khái niệm "Đường cong Peano" thực chất là chỉ ra ví dụ này.

Có một cách xây dựng Đường cong Peano khá trực quan: chỉ ra một dãy các ánh xạ liên tục $f_n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, $n = 1, 2, ..$ hội tụ đều đến f, trong đó $f_n([0, 1])$ là không gian ảnh của f_n, nó là đường gấp khúc chạy gần hết hình vuông $[0, 1] \times [0, 1]$ như hình vẽ dưới đây.



Dưới đây chúng ta sẽ xây dựng Đường cong Peano theo một cách khác, sử dụng tập Cantor đã biết ở phần trên.

Trước tiên ta nếu một nhận xét về tập Cantor:
Nếu $x_1, x_2 \in C$ và $|x_1 - x_2| < \frac{1}{3^n}$ thì trong hệ cơ số 3, n chữ số sau dấu phảy của chúng trùng nhau.

Thật vậy giả sử chỉ k chữ số đầu tiên ($k < n$) của x_1 và x_2 giống nhau, khi đó

$$x_1 - x_2 \geq 0, a_1 a_2 ... a_k 2 - 0, a_1 a_2 ... a_k 1 = \frac{1}{3^{k+1}} \geq \frac{1}{3^n}, \text{ vô lí.}$$

Bây giờ ta xét ánh xạ $f: \ C \longrightarrow C^2$

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 ... \ \mapsto (0, a_1 a_3 a_5 ... \ , \ 0, a_2 a_4 a_6 ...)$$

Ta sẽ chứng minh f liên tục trên C.

Gọi $x_0 \in C$ là điểm tùy ý. Với $\varepsilon > 0$ bất kì cho trước, tồn tại số tự nhiên $n \in \mathbb{N} : \varepsilon > \frac{1}{3^{n-1}}$. Khi đó nếu $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{3^{2n}}$ thì $2n$ chữ số sau dấu phảy của x và x_0 trùng nhau, suy ra các tọa độ của $f(x)$ và $f(x_0)$ chênh nhau không vượt quá $\frac{1}{3^n}$. Do vậy

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{3^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3^{2n}}} < \frac{1}{3^{n-1}} < \varepsilon, \text{ đ.p.c.m.}$$

Hiển nhiên f là toàn ánh, nói cách khác tập ảnh của f bằng C^2.

Tiếp theo ta sẽ suy rộng liên tục f ra toàn bộ đoạn $[0,1]$ bằng cách:

1. Lập ánh xạ

$$g:\ C^2 \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$$

$$(0,a_1a_3...\ ,\ 0,a_2a_4...\ \mapsto (0,b_1b_3...\ ,\ 0,b_2b_4...),$$

trong đó

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{nếu} \quad a_i = 0 \\ 1, & \text{nếu} \quad a_i = 2 \end{cases}$$ và ảnh của g là các số viết theo hệ cơ số 2.

Hiển nhiên g là toàn ánh. Ta sẽ chứng minh g liên tục trên C^2. Chọn $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) \in C^2$ và $\varepsilon > 0$ tùy ý. Gọi n là số tự nhiên sao cho $\varepsilon > \frac{1}{2^{n-1}}$ và $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in C^2 :\ |x - x_0| < \delta = \frac{1}{3^n}$. Khi đó các tọa độ tương ứng của x và x_0 có n chữ số đầu tiên (sau dấu phảy) trùng nhau, suy ra các tọa độ tương ứng của $g(x)$ và $g(x_0)$ cũng có n chữ số đầu tiên (sau dấu phảy) trùng nhau. Như vậy

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \sqrt{\frac{2}{2^{2n}}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon, \text{ đ.p.c.m.}$$

2. Cuối cùng xét ánh xạ liên tục $g \circ f : C \to [0,1]\times[0,1]$. Ta sẽ suy rộng liên tục nó ra toàn bộ đoạn $[0,1]$ bằng các hàm tuyến tính: ảnh của các khoảng bỏ đi (khi thiết lập tập C) là các đoạn thẳng nối các ảnh của các đầu mút các khoảng đó. Hàm suy rộng đó chính là một ánh xạ liên tục chiếu đoạn thẳng $[0,1]$ lên hình vuông $[0,1]\times[0,1]$. Không gian ảnh (hay miền giá trị) của ánh xạ là toàn bộ hình vuông $[0,1]\times[0,1]$. Cách thiết lập ánh xạ này là một ứng dụng tuyệt vời của tập Cantor trong việc xây dựng **Đường cong Peano**.