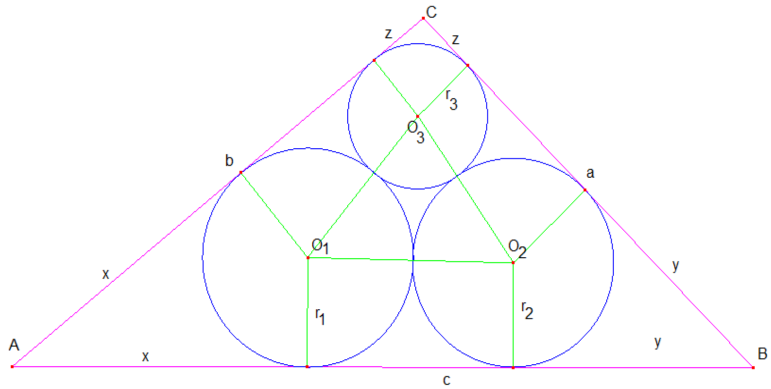
Cách 2 dựng các đường tròn Malfatti. Đây là phương pháp dựng hình dựa trên các tính toán lượng giác. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh tam giác. Không làm mất tính tổng quát, ta đặt độ dài nửa chu vi tam giác $p = 1$ để các biểu thức trong bài được viết gọn hơn. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Xem hình vẽ dưới để ghi nhớ các kí hiệu khác.



Qua hình vẽ bên dễ dàng nhận thấy $a = y + z + 2\sqrt{r_2 r_3}$, $b = x + z + 2\sqrt{r_1 r_3}$ và $c = x + y + 2\sqrt{r_1 r_2}$. Sử dụng công thức Heron $r = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$,

$$r_1 = \frac{r}{1-a} \cdot x = \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{1-a}} \cdot x$$

$$r_2 = \frac{r}{1-b} \cdot y = \sqrt{\frac{(1-a)(1-c)}{1-b}} \cdot y$$

$$r_3 = \frac{r}{1-c} \cdot z = \sqrt{\frac{(1-b)(1-a)}{1-c}} \cdot z.$$

Thay r_1, r_2, r_3 vào 3 đẳng thức trên cùng, ta được

$$(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 - 2\sqrt{y}\sqrt{z}(-\sqrt{1-a}) = (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 - 2\sqrt{y}\sqrt{z}\cos\varphi_a \quad (1)$$

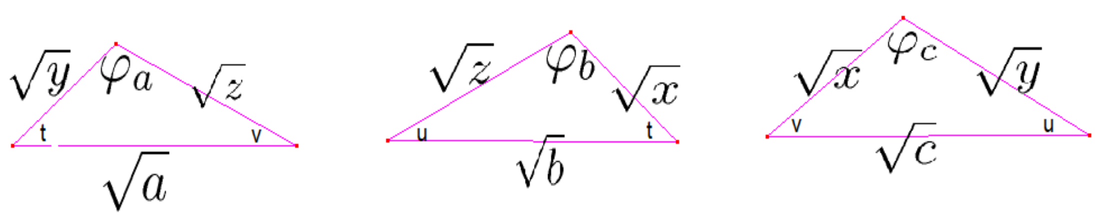
$$(\sqrt{b})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{z})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{z}(-\sqrt{1-b}) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{z})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{z}\cos\varphi_b \quad (2)$$

$$(\sqrt{c})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}(-\sqrt{1-c}) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}\cos\varphi_a \quad (3).$$

Nhận xét rằng φ_a là góc tù với $\cos\varphi_a = -\sqrt{1-a} < 0$ và tam giác với các cạnh $\sqrt{a}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ (hệ thức (1) chính là định lí hàm cos áp vào đó) nội tiếp trong đường tròn có bán kính

$$R_a = \frac{\sqrt{a}}{2\sin\varphi_a} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{1-\cos^2\varphi_a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \sin\varphi_a. \ (4)$$

Hoàn toàn tương tự đối với φ_b, φ_c và $R_b = R_c = \frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \sin\varphi_b$, $\sqrt{c} = \sin\varphi_c$ (5).



Như vậy các đường tròn ngoại tiếp 3 tam giác với các cạnh ghi ở hình trên có bán kính bằng nhau ($= \frac{1}{2}$), suy ra các góc đối diện với cạnh bằng nhau cũng bằng nhau. Kí hiệu u, v, t là các góc đối diện với các cạnh có độ dài $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ như trên hình vẽ. Từ các hệ thức $\varphi_a + v + t = \varphi_b + u + t = \varphi_c + v + u = 180^0$ suy ra

$$u = \frac{180^0 + \varphi_a - \varphi_b - \varphi_c}{2}, \ v = \frac{180^0 - \varphi_a + \varphi_b - \varphi_c}{2}, \ t = \frac{180^0 - \varphi_a - \varphi_b + \varphi_c}{2}. \ (6)$$

Các cạnh x, y, z được tính theo u, v, t bởi định lí hàm số sin với các tam giác trên

$$\sqrt{x} = \sin u, \sqrt{y} = \sin v, \sqrt{z} = \sin t. \ (7)$$

Bài toán dựng hình bây giờ quy về dựng các đoạn thẳng x, y, z. Chúng được biểu diễn thông qua các góc u, v, t cũng như $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ bởi các công thức (4), (5), (6), (7) nêu trên.