Tập hợp Cantor và các tính chất của nó

Tập hợp Cantor : Xét dãy các tập hợp sau: $C_0 = [0,1]$, C_1 nhận được từ C_0 bằng cách lấy đi khoảng mở $I_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ở chính giữa

$$C_1 = C_0 \setminus I_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

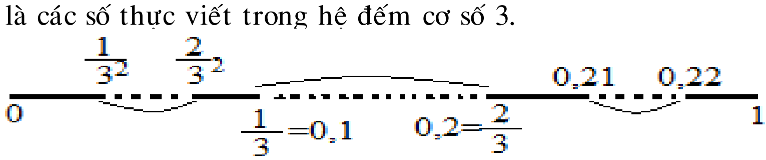
Như thế C_1 gồm 2 khoảng đóng. Ta chia mỗi khoảng đó thành 3 đoạn bằng nhau ta lấy đi khoảng mở ở chính giữa. Kí hiệu I_2 là tập bị lấy đi

$$I_2 = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$$

và

$$C_2 = [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2) = [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, 1]. \quad (*)$$

Tiếp theo chúng ta lại chia mỗi đoạn trong 4 đoạn tạo thành C_2 ở trên thành 3 phần bằng nhau rồi bỏ đi phần chính giữa... Cứ thế C_n nhận được từ C_{n-1} bằng cách lấy đi 2^{n-1} khoảng mở ở chính giữa của các đoạn tạo thành C_{n-1}. Như vậy C_n gồm 2^n đoạn với độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3^n}$. Tập $C = \cap C_i = C_0 \setminus \cup I_i$ được gọi là tập hợp Cantor. Hình dưới minh họa cách xây dựng tập Cantor, đoạn gồm các gạch đứt - nối là đoạn bỏ đi, các số thập phân là các số thực viết trong hệ đếm cơ số 3.



Tính chất tập hợp Cantor :

1. Tập $C \neq \emptyset$ vì nó luôn chứa các đầu mút của các đoạn bỏ đi: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{7}{3^2}, \cdots$. Tập C có độ đo Lebesgue bằng 0, vì tổng độ dài các đoạn lấy đi

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot 2^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{37} + \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.$$

   Tuy nhiên lực lượng của C là continuum vì như ta sẽ chỉ ra trong bài này (tính chất 5), tồn tại một toàn ánh từ C lên đoạn $[0,1]$.

2. Tập hợp Cantor C là tập đóng và không đâu trù mật (*nowhere dense*).

   Ta nhớ lại rằng trong không gian tô pô, tập hợp không đâu trù mật là tập hợp (gọi là A chẳng hạn) mà bao đóng của nó có phần trong là tập rỗng $int(\overline{A}) = \emptyset$.

   Ta đã biết tập Cantor C là giao của các C_i mà bản thân C_i là tập đóng vì nó là hợp hữu hạn các đoạn đóng. Suy ra C là tập đóng.

   Ta sẽ chứng minh tập Cantor C không chứa một khoảng mở bất kì nào cả. Thật vậy, giả sử ngược lại nó chứa một khoảng (a,b) nào đó. Chọn số tự nhiên n sao cho $\frac{1}{3^n} < b - a$. Theo định nghĩa, tập Cantor C được chứa trong C_n, mà C_n, tương tự như hệ thức $(*)$ gồm 2^n các đoạn thẳng (khoảng đóng) đôi một rời nhau với độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3^n}$ bé hơn $(b-a)$. Vậy tập C không chứa một khoảng mở (a,b) nào cả. Suy ra nó là tập không đâu trù mật.

3. Tập hợp Cantor C là hoàn hảo (*perfect*) và hoàn toàn không liên thông (*totally disconnected*).

   Ta nhắc lại tập hợp hoàn hảo là tập đóng và không có điểm cô lập. Không gian metric M được gọi là hoàn toàn không liên thông nếu mọi điểm $p \in M$ đều có một hệ các lân cận vừa đóng vừa mở, bán kính nhỏ tùy ý. Nói cách khác với bất kì $\varepsilon > 0$ tồn tại tập con U vừa đóng, vừa mở sao cho $p \in U \subset M_\varepsilon(p)$.

   Đây là 2 tính chất kì lạ và có vẻ "đối lập" nhau. Nó không chứa các điểm rời rạc nhau (perfect) nhưng giữa 2 điểm bất kì không có đường cong liên tục nào trong C có thể nối chúng lại.

   Chứng minh tính chất 3. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì và lấy $p \in C$ tùy ý. Gọi n là số tự nhiên đủ lớn sao cho $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Khi đó p sẽ thuộc một trong các khoảng đóng I_n nào đó có độ dài $\frac{1}{3^n}$ (giống như một khoảng đóng trong hệ thức $(*)$ ở trên). Các đầu mút của đoạn I_n này (luôn $\in C$) nằm trong $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$. Có vô hạn các số như vậy, suy ra p là điểm tụ của C. Vậy tập Cantor C là hoàn hảo.

   Ta nhận xét rằng $C \subset C_n \;\; \forall n$ và C_n gồm hữu hạn các khoảng I_n đôi một rời nhau nên $C \cap I_n, C \cap I_n^c$ là các tập vừa đóng, vừa mở trong C. Vì $C = \Big(C \cap I_n\Big) \cup \Big(C \cap I_n^c\Big)$, hợp của 2 tập rời nhau cùng mở trong C nên tập Cantor C hoàn toàn không liên thông, đ.p.c.m.

4. Tập hợp Cantor C gồm đúng các số thực $x = 0, a_1a_2a_3...a_n...$ (viết trong hệ cơ số 3) mà a_i chỉ là 2 hoặc 0 với mọi i. Mọi số thực thuộc C (trong hệ cơ số 3) chỉ có duy nhất một cách biểu diễn với các chữ số 2 hoặc 0. Thật vậy, nếu có 2 cách biểu diễn, khi đó hiệu của chúng bằng 0, mặt khác

$$0, a_1a_2a_3...a_k2... - 0, a_1a_2a_3...a_k0... \geq$$
$$0, a_1a_2a_3...a_k2 - 0, a_1a_2a_3...a_k1 = 0, 000...01 > 0, \text{ vô lí!}$$

5. Tồn tại một toàn ánh f từ tập Cantor C lên đoạn $[0, 1]$.

   Ta xây dựng ánh xạ $f : C \longrightarrow [0, 1]$ như sau. Với mỗi số thực trong C, $x = 0, a_1a_2a_3...a_n...$ (viết trong hệ cơ số 3) mà a_i bằng 2 hoặc 0, ảnh của nó $f(x)$ là số thực trong đoạn $[0, 1]$ nhận được từ biểu diễn của x bằng việc thay toàn bộ các chữ số 2 thành chữ số 1. Lưu ý rằng biểu diễn đó của $f(x)$ được viết trong hệ nhị phân (cơ số 2). Ví dụ

$$f(0, 202022) = 0, 101011$$

$$f(0, 00202) = 0, 00101$$

   Hiển nhiên f là toàn ánh và do đó lực lượng của tập Cantor bằng lực lượng của tập $[0, 1]$, cotinuum. Đây có lẽ là tính chất kì lạ nhất của tập Cantor, một tập không chứa một khoảng nào cả, có độ đo Lebesgue bằng 0 nhưng có lực lượng tương đương với đoạn $[0, 1]$.