ĐỊNH LÍ BERNSTEIN

Cho hai tập hợp A, B và hai đơn ánh $f : A \to B,\ g : B \to A$. Khi đó tồn tại song ánh giữa A và B.

CHỨNG MINH. Ta định nghĩa tập $S \subset A$ như sau

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} (g\circ f)^n (A\setminus g(B)) = (A\setminus g(B)) \ \cup\ (g\circ f)(A\setminus g(B)) \ \cup\ (g\circ f)^2(A\setminus g(B))$$
$$\cup\, (g\circ f)^3(A\setminus g(B)) \ \cup\ (g\circ f)^4(A\setminus g(B)) \ \cup\ \cdots$$

(hoặc viết $S_0 = A\setminus g(B), S_{n+1} = g(f(S_n)), ..., S = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n$).

Khi đó ánh xạ $h : A \to B,\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{với } x \in S \\ g^{-1}(x) & \text{với } x \notin S \end{cases}$ là song ánh từ A lên B.

• Ánh xạ h được xác định duy nhất vì nếu $x \notin S$ khi đó $x \notin (A\setminus g(B)) \ \Rightarrow\ x \in g(B) \ \Rightarrow\ \exists g^{-1}(x)$.

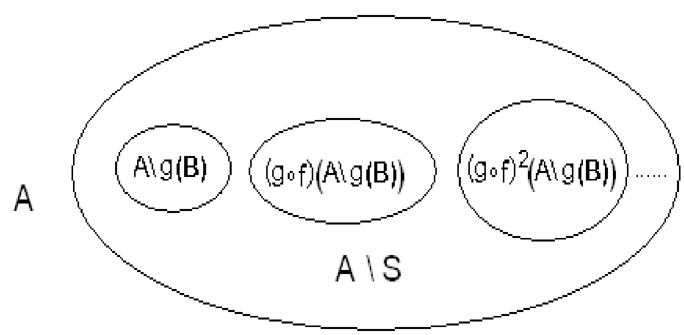
• Ánh xạ h là đơn ánh vì nếu $f(x) = g^{-1}(y)$ thì $(g\circ f)(x) = y$. Suy ra khi $x \in S$ thì $y \in S$. (Điều này cũng có nghĩa là nếu $x \in S$ và $y \notin S$ thì $h(x) \neq h(y)$).

• h là toàn ánh vì với $y \in B$ tùy ý

a) Nếu $g(y) \notin S$, kí hiệu $x = g(y)$, ta đã định nghĩa $h(x) = y$.

b) Nếu $g(y) \in S$, khi đó tồn tại $n > 0$ và $x \in A\setminus g(B)$ để $(g\circ f)^n(x) = g(y)$. Kí hiệu $z = (g\circ f)^{n-1}(x)$ khi đó $(g\circ f)(z) = g(y)$ hay $f(z) = y$. Hiển nhiên $z \in S$ và như vậy $h(z) = f(z) = y$. $\square$

NHẬN XÉT *Các tập hợp $(A\setminus g(B))$, $(g\circ f)(A\setminus g(B))$, $(g\circ f)^2(A\setminus g(B)), \cdots$ hợp thành S là các tập đôi một rời nhau như trong minh họa dưới đây.*



Thật vậy, tập thứ hai $(g\circ f)(A\setminus g(B)) \subset g(B)$ trong khi tập thứ nhất nằm ngoài $g(B)$.
Xét tập thứ hai $(g\circ f)(A\setminus g(B)) \subset g(B)$ và tập thứ ba $(g\circ f)^2(A\setminus g(B)) \subset g(B)$, nếu chúng có phần tử chung

$$(g\circ f)(u) = (g\circ f)^2(v), \text{ với } u, v \in A\setminus g(B) \ \Rightarrow\ u = (g\circ f)(v), \text{ vô lí do nhận xét trước.}$$

Ba tập hợp đầu trong sơ đồ trên đôi một rời nhau. Bằng quy nạp ta hoàn thành chứng minh nhận xét trên.

Dưới đây là các vị dụ minh họa cho cách chứng minh định lí Bernstein nêu trên.

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho các tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ và $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$. Hai ánh xạ

$$f : A \to B,\ f(x) = 4x, \quad g : B \to A,\ g(y) = y.$$

Khi đó

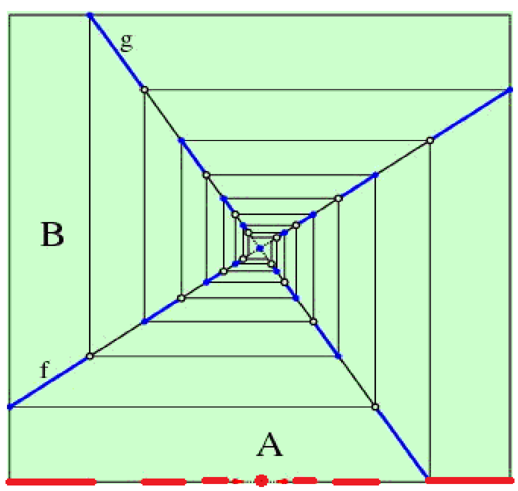
$$S = \{4^m(2n+1),\ m, n = 0, 1, 2, ...\} \quad h(x) = \begin{cases} 4x & \text{với } x \in S \\ x & \text{với } x \notin S. \end{cases}$$

VÍ DỤ 2. $A = [0, 1],\ B = [0, 1)$. Hai ánh xạ $f(x) = \frac{x}{2}$ và $g(y) = y$. Khi đó

$$S = \{\frac{1}{2^n},\ n = 0, 1, 2, ...\} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{với } x \in S \\ x & \text{với } x \notin S. \end{cases}$$

VÍ DỤ 3.(Larry Hammick) Các tập $A = B = [0, 1]$ và các hàm

$$f : A \to B,\ f(x) = \frac{3x+1}{5}, \quad g : B \to A,\ g(y) = \frac{4-3y}{5}.$$



Đồ thị hàm f được vẽ trong hệ trục coi A là trục hoành, B là trục tung và đồ thị hàm g được vẽ trong hệ trục coi B là trục hoành, A là trục tung.

Tập S gồm các cặp đoạn thẳng đối xứng qua tâm $x = \frac{1}{2}$ (vẽ đậm) trong A. Chú ý rằng điểm $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ thuộc đồ thị hàm h và $x = \frac{1}{2} \notin S$.

Ví dụ này xuất phát từ định lí Banach: *X, Y là hai tập hợp và $f : X \to Y,\ g : Y \to X$ là hai ánh xạ bất kì - không nhất thiết là đơn ánh. Khi đó tồn tại hai phân hoạch $X = X' \cup X''$ và $Y = Y' \cup Y''$ sao cho $f(X') = Y'$ và $g(Y'') = X''$.*