BÀI TẬP CHƯƠNG I

(***Các bài tập có đánh dấu sao trước số thứ tự là các bài tập khó hơn. Các bài tập có dấu sao sau số thứ tự là các đề thi học phần đã thi.***)

1. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ C = \{3, 4, 5\}$. Hãy xác định các tập hợp

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ C_A(C)$$

$$B \cup C,\ C \cap B,\ C \setminus B,\ A\Delta B.$$

2. Tìm các tập hợp $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ và $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, biết

   (a) $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \le x \le n\}$

   (b) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n}\right\}$

   (c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \dfrac{1}{n}\right\}$

   (d) $A_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$.

3. Biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ tập hợp $A \times B$ với

   (a) $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \le a \le 3\},\ B = \{b \in \mathbb{R} \mid |b| \le 1\}$

   (b) $A = \{a \in \mathbb{R} \mid |a| \le 5\},\ B = \{b \in \mathbb{Z} \mid |b| \le 5\}$.

   Minh họa tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x > y\}$ trên mặt phẳng tọa độ.

4. Với các tập hợp A, B, C bất kì, chứng minh $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ và mô tả hình học đẳng thức đó.

5. Kí hiệu $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ và quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên B

$$(m, n)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow mq = np$$

   Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên B. Xác định các lớp tương đương.

6. Cho $p \in \mathbb{N}^*$ và quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$

$$m\mathcal{R}n \quad \text{khi và chỉ khi} \quad m - n \quad \text{chia hết cho} \quad p \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

   Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Xác định tập thương. (*Người ta gọi $\mathcal{R}$ là quan hệ đồng dư trong phép chia cho p*).

7. Ánh xạ $f :\ X \to Y$. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên X được định nghĩa

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \quad (x, x' \in X).$$

   Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên X.
   Áp dụng với ánh xạ $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho dưới đây, hãy xác định các lớp tương đương của $\mathbb{R}$ theo quan hệ tương đương định nghĩa ở trên

   $(a) \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{nếu } x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 & \text{nếu } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

   $(b) \quad f(x) = [x]$ (phần nguyên của x)

8. Tập A gồm n phần tử, tập B gồm m phần tử

   (a) Tính số phần tử của $A \times B$

   (b) Có bao nhiêu ánh xạ từ A vào B?

   (c) Nếu $n \le m$, có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?

9. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(a) Tìm tất cả các song ánh từ A lên A.

(b) Giả sử $f, g: A \to A$ được định nghĩa

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1,\ f(4) = 4$$

$$g(1) = 3,\ g(2) = 4,\ g(3) = 2,\ g(4) = 1.$$

Hãy tìm các ánh xạ $f \circ g,\ g \circ f,\ f^{-1}$.

10. Cho các ánh xạ $f: X \to Y,\ g: Y \to Z,\ h: g \circ f$. Chứng minh

(a) h là đơn ánh thì f là đơn ánh.

(b) h là toàn ánh thì g là toàn ánh.

11. Cho ánh xạ $f: X \to Y$. Chứng minh

(a) Nếu $A \subset X$ thì $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(b) Nếu $B \subset f(X)$ thì $f(f^{-1}(B)) = B$.

12.* Cho 2 ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 + 1$ và $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = z^4 + 1$, trong đó $\mathbb{R}$ là tập các số thực, $\mathbb{C}$ là tập các số phức. Chứng minh rằng f không là toàn ánh, g là toàn ánh.

13.* Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2x^3 + y, 5x^3 + 3y)$. Chứng minh rằng f là song ánh và tìm f^{-1}.

14.* Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2 + 2, 4x_1 + 3x_2 - 3)$ là song ánh trên $\mathbb{R}^2$ và tìm ánh xạ ngược f^{-1}.

15. Chứng minh rằng các tập hợp sau là các tập đếm được:

(a) Tập tất cả các số nguyên chẵn (lẻ).

(b) Tập tất cả các số hữu tỉ lớn hơn 2 và nhỏ hơn 3, $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}$.

(c) Tập tất cả các số nguyên tố.

*16. Chứng minh rằng các tập hợp sau có cùng lực lượng

$$\mathbb{R},\ \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\},\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},\quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$$

17. Viết các số phức sau dưới dạng đại số:

(a) $(1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ (b) $\dfrac{5 + 6i}{3 + 2i} + \dfrac{4 + 2i}{i}$

(c) $\dfrac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}},\ n \in \mathbb{N}^*$ (d) $\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}$

18. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$-1\ ;\ -i\ ;\ 1 + i\ ;\ -1 + i\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3} + i.$$

19.* Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{2 + i\sqrt{12}}{i\sqrt{3} - 1}\right)^7$

20. Mô tả hình học các tập hợp sau trong mặt phẳng phức:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 2\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z + 2| \leq 2\}$ (f) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}$.

21. Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{C}$ ta luôn có

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

22. Tìm tập hợp các điểm z trong mặt phẳng phức thoả mãn điều kiện

$$|z| = 2|z - i|.$$

23. Tìm căn bậc 6 của các số phức sau

(a) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ (b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ (c) $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

24. Sử dụng công thức Moivre hãy tính

(a) $(1+i)^{20}$ (b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$ (c) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{30}}$.

25. Giải các phương trình sau trên trường số phức

(a) $z^6+1=0$.

(b) $z^8-15z^4-16=0$.

(c) $z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0$ biết phương trình có một nghiệm $z=1+i$.

26. Giải phương trình trên trường số phức

(a) $z^2-2z\cos\theta+1=0, \quad \theta\in\mathbb{R}$

(b) $z^3+(1-2i)z^2+(1-i)z-2i=0$, biết phương trình có 1 nghiệm thuần ảo.

(c) $2z+6\overline{z}=3+2i$

(d) $\overline{z^7}=\dfrac{1}{z^3}$

*(e) Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n=1$ đều là các số thực.

27.* (a) Tìm các số phức z thỏa mãn phương trình $z^4+z^3+9z^2-8z+10=0$, biết phương trình có 1 nghiệm $z=-1+3i$.

(b) Tìm tất cả các đa thức (hệ số phức), sao cho đa thức đó là đơn ánh từ tập các số phức $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$.

28. Giải hệ phương trình sau với $x,y,z\in\mathbb{C}$ là các ẩn

$$\begin{cases} xy=z\\ yz=x\\ zx=y.\end{cases}$$

29. Giả sử $p\in\mathbb{Z}$ là số nguyên và ω là một căn bậc n của 1. Hãy tính tổng

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$$

*30. Các số phức $a,b,c\in\mathbb{C}$ thỏa mãn $\overline{a}a=\overline{b}b=\overline{c}c=1$ và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^3=b^3=c^3$.

31. Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto 2z^4+1$. Tính $f^{-1}(\sqrt{3}\,i)$.

32. Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\dfrac{z-2i}{iz-4}$. Tìm tập các số phức z thỏa mãn

(a) $|f(z)|=1$ (b) $f(z)\in\mathbb{R}$ (c) $f(z)\in i\mathbb{R}$.

($i\mathbb{R}$ là tập các số phức thuần ảo.)

*33. Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\dfrac{z+i\overline{z}}{1+i\lambda}$ trong đó λ là tham số thực dương.

(a) f có là song ánh không?

(b) Tìm các số phức z sao cho $f(z)=z$.

(c) Với $\lambda=1$, chứng tỏ rằng ảnh của một đường tròn qua ánh xạ f là một đoạn thẳng.

34.* Xác định tập hợp các số phức $z\in\mathbb{C}$ sao cho $\dfrac{z}{z+2i}$ là số thuần ảo. Vẽ đường cong biểu diễn tập đó trên mặt phẳng phức.

35.* Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{1}{z},\ \mathbb{C}$ là tập các số phức.

(a) Kí hiệu $A = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức. Xác định tập ảnh $f(A)$, biểu diễn hình học tập ảnh đó.

(b) Gọi B là tập các số phức khác 0 thuộc đường tròn tâm i bán kính $R = 1$. Chứng minh rằng $f(B)$ là đường thẳng, biểu diễn hình học tập ảnh đó trong mặt phẳng phức.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. $C_A(C) = A \setminus C = \{1, 2, 6\},\ A\Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

2. (a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{Z}$ và $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{-1,\ 0,\ 1\}$.
(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = [-1, 1]$ và $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.
(c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = (0, 1]$ và $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.
(d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = (-1, 1)$ và $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.

3. (a) Hình chữ nhật.
(b) Hình vuông tâm $O(0, 0)$.
(c) Tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x > y\}$ gồm các điểm nằm dưới đường thẳng $y = x$ mà tọa độ các điểm đó là các số nguyên.

4. Hợp của 2 hình chữ nhật có chung một cạnh cũng là hình chữ nhật.

5. $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên B và mỗi lớp tương đương tương ứng một-một với một số hữu tỉ trong $\mathbb{Q}$. Chẳng hạn ứng với số hữu tỉ $p = \frac{3}{2}$ là lớp $\overline{p} = \{..., (-3, -2),\ (3, 2),\ (6, 4), (9, 6), ...\}$. Các lớp tương đương $\overline{p}$ tạo thành một phân hoạch của tập B.

6. Xem ví dụ 1.2.7.

7. Xem phần 2. của ví dụ 1.2.7.
(a) Lớp tương đương chứa x, $\overline{x} = \begin{cases} \{x + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{nếu} \quad \operatorname{tg} x \neq 0 \\ \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{nếu} \quad \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$
(b) $\overline{x} = \{[x] + t \mid t \in [0, 1)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \leqslant x < [x] + 1\}$.

8. (a) $m \cdot n$ (b) m^n (c) $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

9. (a) Mỗi song ánh từ A lên A tương ứng với một hoán vị các phần tử của A. Do vậy có $4! = 24$ song ánh từ A lên A.
(b) $f \circ g(1) = 1,\ f \circ g(2) = 4,\ f \circ g(3) = 3,\ f \circ g(4) = 2.$
$g \circ f(1) = 4,\ g \circ f(2) = 2,\ g \circ f(3) = 3,\ g \circ f(4) = 1$
$f^{-1}(1) = 3,\ f^{-1}(2) = 1,\ f^{-1}(3) = 2,\ f^{-1}(4) = 4.$

10. Chứng minh như cách chứng minh định lí 1.2.1.

11. Chứng minh như chứng minh các tính chất của ánh xạ.

12. $g(z) = z^4 + 1$ là toàn ánh vì phương trình $g(z) = \alpha$ hay $z^4 + 1 = \alpha$ có nghiệm với mọi $\alpha \in \mathbb{C}$.

13. f là đơn ánh và toàn ánh vì hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y = u \\ 5x^3 + 3y = v \end{cases}$ luôn có nghiệm duy nhất $(x = \sqrt[3]{3u - v}, y = -5u + 2v)$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}$. Suy ra $f^{-1}(u, v) = (\sqrt[3]{3u - v}, -5u + 2v)$.

14. $f^{-1}(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2 - 12, -4x_1 + 3x_2 + 17)$.

15. Đây là hệ quả của các định lí 1.3.1 và định lí 1.3.4.

16. Dễ dàng chứng minh tập $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ có cùng lực lượng với $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và A có cùng lực lượng với $\mathbb{R}$ do hàm số $\operatorname{tg} x$ là song ánh từ A lên $\mathbb{R}$.
Tập $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ có cùng lực lượng với $\mathbb{R}$ bởi ánh xạ $f : \mathbb{R} \to B,\ f(x) = 1 + 2^x$ là song ánh.
Cũng có thể sử dụng định lí 1.3.3 để chứng minh các tập hợp sau có cùng lực lượng
$$\mathbb{R},\ \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\},\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},\quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}.$$

17. (a) 65 (b) $\frac{53-44i}{13}$ (c) $-2i^{n+1}$ (d) $\cos 2\alpha - 2i\operatorname{tg}\alpha$.

18. $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$; $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

19. $-2^6(\sqrt{3} + i)$

20. (e) Phần bên trong hình tròn tâm là -2 bán kính bằng 2 và bên ngoài hình tròn tâm là -2 bán kính bằng 1.
(f) Tập các số thực $\mathbb{R}$.

21. Tổng bình phương 2 đường chéo bằng tổng bình phương 4 cạnh hình bình hành.

22. Đường tròn đường kính là đoạn thẳng nối 2 số phức $2i$ và $\frac{2i}{3}$.

23. Đưa số phức về dạng lượng giác rồi tìm các căn bậc 6 của chúng.

24. (a) 4^5 (b) $-2^9 \cdot 4^3 i$ (c) $-2^5 + i$.

25. (a) Các căn bậc 6 của -1.
    (b) Các căn bậc 4 của -1: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ và $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ và các căn bậc 4 của $16:\ z_{5,6} = \pm 2i,\ z_{7,8} = \pm 2$.
    (c) $z_{1,2} = 1 \pm i,\ z_{3,4} = \pm 2i$

26. (a) $z_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$
    (b) $z_1 = i,\ z_{3,4} = \frac{-1+i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-8-2i}$
    (c) $z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}i$
    (d) $z_{1,2} = \pm 1,\ z_{3,4} = \pm i$
    (e) Nghiệm của phương trình có tính chất $|z - i| = |z + i|$, suy ra nó là số thực.

27. (a) $z_1 = -1 - 3i,\quad z_2 = -1 + 3i,\quad z_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}),\quad z_4 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$
(b) Các đa thức bậc nhất $az + b$ $(a \neq 0)$ là các đơn ánh từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$.

28. $x_1 = 1, y_1 = z_1 = -1,\quad y_2 = 1, x_2 = z_2 = -1,\quad z_3 = 1, x_3 = y_3 = -1$.

29. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \omega^p \neq 1 \\ n & \text{nếu } \omega^p = 1. \end{cases}$

30. a, b, c là các căn bậc 3 của số phức có môđun bằng 1.

31. Tập $f^{-1}(\sqrt{3}\,i)$ là các nghiệm của phương trình $2z^4 + 1 = \sqrt{3}\,i$. Do vậy chúng là các căn bậc 4 của $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

32. (a) Đường thẳng song song với trục thực đi qua điểm $-i$.
    (b) Đường tròn tâm $-i$ bán kính bằng 3.
    (c) Trục ảo.

33. (a) f không là toàn ánh.
    (b) $f(z) = z$, trường hợp λ khác 1, khi và chỉ khi $z = 0$ và trường hợp $\lambda = 1$, khi và chỉ khi $z \in \mathbb{R}$.
    (c) Dựa vào nhận xét: $f(x + yi) = x + y$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

34. Đường tròn $x^2 + (y+1)^2 = 1$ trừ điểm $-2i$.

35. (a) $f(A) = A$
(b) $f(B)$ là đường thẳng song song với trục thực đi qua $-\frac{i}{2}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Thực hiện các phép nhân ma trận

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) Với $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, hãy tính $A^n(\theta), \quad n \in \mathbb{N}$.

2. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn

   (a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = 0$ (c) $A^2 = I_2$

   (d) $AB = BA, \quad$ trong đó $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Chứng tỏ rằng $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2$ là ma trận không.

4. Chứng minh rằng nếu hai ma trận vuông cùng cấp A và B giao hoán được ($AB = BA$), khi đó

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

   (b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

   (c) $(A+B)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$.

5* Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Tính các ma trận B^2, B^3.

   (b) Sử dụng kết quả của câu (a) hãy tính $A^n, \ n \in \mathbb{N}^*$.

*6. Hãy tính $A^n, \ n \in \mathbb{N}^*$ với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. Sử dụng định nghĩa định thức để tính

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

8. Giả sử các số tự nhiên mà mỗi số gồm 3 chữ số $\overline{a_1a_2a_3}, \ \overline{b_1b_2b_3}, \ \overline{c_1c_2c_3}$ đều chia hết cho 17. Chứng minh rằng $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ cũng chia hết cho 17.

9. Sử dụng các tính chất của định thức, tính các định thức sau

   (a) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ (định thức Vandermonde).

10. Ma trận vuông cấp n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là *ma trận phản xứng* nếu $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $i, j = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng nếu A phản xứng và cấp của ma trận, n là số tự nhiên lẻ thì $\det(A) = 0$.

11. A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn tính chất $A^{-1} = 4A$. Hãy tính

$$|\det(A^{2k+1} - A)| \quad \text{với} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

*12. (a) A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn tính chất $A^{-1} = A$. Chứng tỏ rằng $|\det(A-I)| = 0$ hoặc $|\det(A-I)| = 2^n$.

(b) A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn tính chất $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $\det B = 0$.

13. Sử dụng ma trận phụ hợp, tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

14. Sử dụng phương pháp Gauss, tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông thoả mãn

$$A^n + A^{n-1} + \cdots + A + I_n = O,$$

thì A khả nghịch và $A^{-1} = A^n$.

16. A, B là hai ma trận khả nghịch cấp n thỏa mãn $AB + BA = O$. Chứng tỏ rằng n là số chẵn.
Cho một ví dụ về hai ma trận khả nghịch A, B cấp 2 thỏa mãn

$$AB + BA = O.$$

17. Tìm hạng của các ma trận sau

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

*(b) $\begin{pmatrix} 1 & x & a & b \\ 1 & x^2 & a^2 & b^2 \\ 1 & x^3 & a^3 & b^3 \\ 1 & x^4 & a^4 & b^4 \end{pmatrix}$ (giả thiết $a \neq b$).

18* Cho $A = (a_{ij})_{6\times 6}$ là ma trận vuông cấp 6, kí hiệu A_{ij} là phần phụ đại số tương ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A. Gọi $B = (A_{ij})_{6\times 6}$ là ma trận các phần phụ đại số. Tìm hạng của B trong các trường hợp sau
(a) Hạng của ma trận A bằng 6.
(b) Hạng của ma trận A bằng 3.

19* Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Tìm hạng của A và tính ma trận nghịch đảo A^{-1}.

20. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

21. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + 4y + mz = 1 \end{cases}$ là hệ Cramer.

Hãy giải phương trình với $m = 1$.

22. Tìm a để hệ sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x - y + az = 0 \end{cases}$$

23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y + az = 3 \\ 3x - y - az = 2 \\ 2x + y + 3z = b \end{cases}$

(a) Tìm a, b để hệ có nghiệm duy nhất

(b) Tìm a, b để hệ có vô số nghiệm.

24. Giải các hệ phương trình sau

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

25* Biện luận số nghiệm hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z & = 1 \\ (m+1)x + (m+1)y + z & = 1 \\ (2m+1)x + y + z & = 1 - m. \end{cases}$$

26. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

(a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (3-2m)x + (2-m)y + z = m \\ (2-m)x + (2-m)y + z = 1 \\ x + y + (2-m)z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 8 \\ x + y - 3z = 3 \\ 4x + my + mz = 4 \\ -x + 5y + z = 9 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \end{cases}$

27. Tìm hạng của ma trận các hệ số và hạng của ma trận các hệ số mở rộng của hệ phương trình sau. Từ đó hãy tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

28. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

29. Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề các cho 3 mặt phẳng

$$x - 2y + z = mx, \quad 3x - y - 2z = my, \quad 3x - 2y - z = mz$$

Xác định giá trị của m để 3 mặt phẳng đó chứa cùng một đường thẳng.

30. (a) Cho ma trận A kiểu 4×6 và có hạng bằng 4. Phương trình $AX = B$ luôn có nghiệm với mọi $B \in \mathbb{R}^4$ không? Tại sao?

    (b) Ma trận M kiểu 4×5 và có hạng bằng 3. Ta nói phương trình $MX = B$ luôn có nghiệm với mọi $B \in \mathbb{R}^4$. Khẳng định đó đúng hay sai?

31. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

    (a) Chứng minh rằng phương trình $AX = B$ luôn có nghiệm với mọi ma trận vuông cấp hai B.

    (b) Chứng minh rằng phương trình $XA = I_3$ vô nghiệm.

32* (a) Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = b_3 \end{cases}$ có nghiệm với mọi $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ đúng hay sai? Tại sao?

(c) Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. (a) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 7 & 17 & -39 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 43 & 82 \\ -39 & -51 \end{pmatrix}$

   (c) $A^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

2. (a) $A = \mathbf{0}$, $A = I$ hoặc $A = \begin{pmatrix} a & u \\ v & 1-a \end{pmatrix}$ với các cột của A tỉ lệ với nhau.

   (b) và (c) Tương tự như (a).

   (d) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{2y}{3} & x+y \end{pmatrix}$

5. (a) $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (a) -8 (b) 259

7. $A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$

8. Sử dụng tính chất của định thức để tính định thức.

9. (a) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + x)x^{n-1}$
   (b) $x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \frac{1}{a_3 - x} + \cdots + \frac{1}{a_n - x}\right)$
   (c) Xem ví dụ 2.2.5.

10. Do $A^T = -A$ suy ra với cấp n lẻ, $\det(A) = 0$.

11. $|\det(A^{2k+1} - A)| = \frac{4^k - 1}{2^{2k+1}}$.

12. (a) Điều phải chứng minh được suy ra từ đẳng thức $(A - I)(A + I) = O$.
    (b) Hãy chứng minh $AB^k - B^kA = kB^k \quad \forall k \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow AB^k = B^k(A + kI)$. Thật vậy bằng quy nạp, $AB^{k+1} - B^k(AB) = kB^{k+1} \Rightarrow AB^{k+1} - B^k(BA + B) = kB^{k+1} \Rightarrow AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^{k+1}$. Giả sử $\det B \neq 0$ khi đó $\det A = \det(A + kI) \quad \forall k \in \mathbb{R}$. Mặt khác $\det(A + kI)$ là một đa thức bậc n đối với biến k nên đẳng thức $\det A = \det(A + kI)$ không thể xảy ra với $\forall k \in \mathbb{R}$. Suy ra đ.p.c.m.

13. (a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

14. (a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
    (c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

15. Nhân cả 2 vế đẳng thức đã cho với A.

16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

17. (a) Hạng bằng 3.
    (b) Định thức của ma trận bằng $abx(x-1)(a-1)(b-1)(a-x)(b-x)(b-a)$. Từ đó biện luận theo x, a, b để tìm hạng của ma trận.

18. (a) $r(B) = 6$ (b) $r(B) = 0$.

19. Hạng của A bằng 4 và $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

20. (a) $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
    (c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ -1 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
    $$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -9 \\ 4 & 0 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
    (d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

21. Tìm $m \neq 13$. Với $m = 1$ nghiệm của hệ $x = \frac{5}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$.

22. $a = 4$.

23. (a) $a \neq \frac{21}{2}$ và b tùy ý.
    (b) $a = \frac{21}{2}$ và $b = 3$.

24. (a) $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1)$,
    (b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{7}(-6, 1, 15, 0)$

25. Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -2$ hệ có 1 nghiệm duy nhất.
    Nếu $m = 0$ hệ có vô số nghiệm.
    Nếu $m = -2$ hệ vô nghiệm.

26. (a) $m = -2$ hệ vô nghiệm
    $m = 1$ hệ vô số nghiệm
    $m \notin \{-2, 1\}$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{-m-1}{2+m},\ y = \frac{1}{2+m},\ z = \frac{(m+1)^2}{2+m}$$

    (b) $m = 3$ hệ vô nghiệm
    $m = 1$ hệ vô số nghiệm
    $m \notin \{3, 1\}$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x = -1,\ y = \frac{m-4}{m-3},\ z = \frac{1}{3-m}$$

    (c) $m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất $x = 1,\ y = 2,\ z = 0$.
    Với $m \neq 0$ hệ vô nghiệm.
    (d) $m = 1$ hệ vô số nghiệm.
    Với $m \neq 1$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

27. Hạng của chúng bằng nhau và bằng 2.

28. Nghiệm tổng quát

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

    C_1, C_2, C_3 là các hằng số tùy ý.

29. $m = -2,\ m = 0$ hoặc $m = 1$.

30. (a) đúng (b) sai.

32. (a) $r(A) = 3$ (b) đúng
    (c) Nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

    C là hằng số tùy ý.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Bài tập về không gian tuyến tính

1. Chứng minh các tập hợp sau là các không gian tuyến tính thực

   (a) $\mathcal{P}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ với các phép toán cộng, nhân đa thức với một số như thông thường.

   (b) $C_{[a,b]} = \{f(x) \mid f(x)$ liên tục trên $[a,b]\}$ với các phép toán cộng, nhân hàm số với một số thông thường.

   (c) Tập hợp các ma trận cùng kiểu $m \times n$, với các phép toán cộng, nhân ma trận với một số như đã biết.

   (d) $E = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ với các phép toán

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2), \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (e) $(\mathbb{R}^+)^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, ..., n\}$ với các phép toán

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n), \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha)$$

   (f) Tập $E \times F$ (E, F là hai không gian tuyến tính thực) với các phép toán

   $$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

   trong đó $x, x' \in E, \quad y, y' \in F$.

2. Chứng minh rằng tập các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là không gian véctơ.
   Đặc biệt, chứng minh rằng trong không gian $Oxyz$, giao của các mặt phẳng đi qua gốc toạ độ là không gian véctơ.
   Hợp của 2 mặt phẳng đi qua gốc toạ độ trong $Oxyz$ có là không gian véctơ không?

3. Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá n, tập nào dưới đây là không gian con của $\mathcal{P}_n[x]$

   (a) Tập các đa thức mà $x = 0$ là nghiệm

   $$A = \{P(x) \in \mathcal{P}_n[x] \mid P(0) = 0\}.$$

   (b) Tập các đa thức mà $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm

   $$B = \{P(x) \in \mathcal{P}_n[x] \mid P(0) = 0, \ P(1) = 0\}.$$

4. Trong số các tập con dưới đây của $\mathbb{R}^n$, tập nào là không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

   (a) $A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$

   (b) $B = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1; x_2; \cdots; x_n \in \mathbb{Z}\}$

   (c) $C = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 = x_n\}$

   (d) $D = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0\}, \quad \alpha_i, i = 1, 2, ..., n$ là các số thực cố định.

5. Trong số các tập hợp dưới đây, tập nào là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp n

   (a) Tập các ma trận chéo cấp n.

   (b) Tập các ma trận chéo cấp n mà tổng các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 0.

   (c) Tập các ma trận khả nghịch cấp n.

   (d) Tập các ma trận vuông cấp n có định thức bằng 0.

6. Trong không gian véctơ n chiều V, cho một hệ n véctơ $F = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương

   (a) F là cơ sở của V.

   (b) F là hệ sinh của V.

   (c) F độc lập tuyến tính.

7. A, B là 2 không gian con của không gian tuyến tính V. Chứng minh rằng $A \cup B$ là không gian con của V khi và chỉ khi hoặc $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

8. Chứng minh rằng
$$V_1 = \{f \in \mathcal{P}_n[x] \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$
và
$$V_2 = \{f \in \mathcal{P}_n[x] \mid f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$
là hai không gian con của $\mathcal{P}_n[x]$ (không gian các đa thức hệ số thực với bậc không lớn hơn n), đồng thời
$$V = V_1 \oplus V_2.$$

9* (a) Trong không gian véc tơ n chiều V cho hệ n véc tơ $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$. Chứng minh rằng nếu E là hệ sinh của V thì E là cơ sở của V.

(b) A và B là hai không gian con của không gian véc tơ V thỏa mãn các tính chất $V = A + B$ và $\dim V = \dim A + \dim B$. Ta có thể khẳng định $V = A \oplus B$ không? Tại sao?

10* Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y + z = 0\}$ và gọi B là không gian con sinh bởi $\mathbf{b} = (1, -3, -1)$.

(a) Xác định một cơ sở của A và chứng minh rằng $A + B = \mathbb{R}^3$. Không gian $\mathbb{R}^3$ có là tổng trực tiếp của A và B không?

(b) Tập hợp $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Xác định tập đó.

11. Cho A và B là 2 không gian con của không gian véctơ V. Chứng minh rằng nếu
$$\dim A + \dim B > \dim V$$
thì $A \cap B \neq \{\mathbf{0}\}$.

12. Tìm một cơ sở và chiều của các không gian véc tơ trong các bài tập từ bài 1 đến bài 5.

13. Cho $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ là cơ sở của không gian véctơ V, n là số tự nhiên lẻ. Chứng tỏ rằng hệ các véctơ $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ cũng là cơ sở của không gian véctơ V, trong đó
$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \quad \text{và} \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1$$
Khẳng định trên còn đúng không nếu n là số chẵn?

14. Chứng minh rằng hệ các véctơ $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$
$$\mathbf{f}_1 = (1, 2, -1), \mathbf{f}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{f}_3 = (0, 1, 1)$$
là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tính tọa độ véctơ $\mathbf{u} = (x, y, z)$ theo cơ sở F.

15. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của không gian véctơ sinh bởi 5 véctơ: $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$ và $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$ trong $\mathbb{R}^4$.

16. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của mỗi không gian véctơ sau:

   (a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

   (b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4\}$.

17. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của không gian nghiệm của hệ

   (a) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \quad + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

18. Trong $\mathbb{R}^3$, kí hiệu
$$A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}, \ B = \{(x, y, z) \mid 2x - y - 2z = 0\}.$$

   (a) Chứng minh rằng A, B là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

   (b) Tìm một cơ sở của không gian con $A \cap B$.

19. Tìm số chiều của không gian nghiệm $\begin{cases} 2x+3t=0 \\ z-2y=0 \end{cases}$ $\quad (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

20* Cho A và B là hai không gian con của $\mathbb{R}^3$ (với các phép toán thông thường trong $\mathbb{R}^3$)

$$A=\{(x,y,z)/x-3y+z=0\},\quad B=\{(x,y,z)/4x+3y-2z=0\}$$

(a) Chứng minh rằng $A+B=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ có là tổng trực tiếp của A và B không?
(b) Chứng minh rằng tập hợp $\{\mathbf{a}-\mathbf{b} \;/\; \mathbf{a}\in A, \mathbf{b}\in B\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Xác định chiều và một cơ sở của không gian con đó.

21. Chứng minh rằng các tập hợp A và B được cho dưới đây là các không gian con của $\mathbb{R}^4$. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của mỗi không gian con đó.

    (a) $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1=2x_2=x_4\}$
    (b) $B=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid 2x_1=-x_2=x_3\}$.

    Đẳng thức $\mathbb{R}^4=A\oplus B$ có đúng không? Tại sao?

22. Chứng minh rằng hệ các đa thức

$$F=\{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, ..., (x-\alpha)^n\},$$

với $\alpha\in\mathbb{R}$ cố định là cơ sở của $\mathcal{P}_n[x]$ (không gian các đa thức với bậc không vượt quá n). Tìm tọa độ của $P(x)=x^2+2x+3$ trong cơ sở F.

23. Biết $F=\{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, ..., (x-\alpha)^n\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ là cơ sở của $\mathcal{P}_n[x]$ (bài tập trên). Hãy tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ sang cơ sở F của $\mathcal{P}_n[x]$.

24. Trong không gian $\mathcal{P}_3[x]$ cho $h=x^3-2x^2+x+1$. Chứng minh rằng $B=\{h,h',h'',h'''\}$ là hệ cơ sở của $\mathcal{P}_3[x]$. Tìm ma trận chuyển từ hệ cơ sở chính tắc sang hệ cơ sở B. Hãy tìm tọa độ của $q=10x^3-8x^2+ax+b$ trong cơ sở B.

25* Cho các véc tơ trong $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{a}=(1,-2,3,2), \mathbf{b}=(2,0,-1,4), \mathbf{c}=(3,-2,-1,3), \mathbf{d}=(3,-6,6,3).$$

Chứng minh rằng $\mathscr{L}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\mathscr{L}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$. Tìm hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$.

26. Chứng minh rằng $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ là cơ sở của không gian các ma trận vuông cấp 2. Tìm tọa độ của $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ theo cơ sở đó.

27. Biết hệ các ma trận vuông cấp hai

$$E=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

là một cơ sở của không gian các ma trận vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng hệ

$$F=\{E_1, E_2, E_1+E_2+E_3, E_1+E_2+E_4\}$$

cũng là một cơ sở của $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở F sang E và tọa độ của $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ trong cơ sở F.

28* Cho tập $\mathbb{E}=\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y>0\}$. Trên $\mathbb{E}$ xác định phép cộng $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2, y_1\cdot y_2)$ và phép nhân $\alpha\cdot(x,y)=(\alpha\cdot x, y^\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Chứng minh $\mathbb{E}$ là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Xác định một cơ sở và chiều của $\mathbb{E}$.
Tìm hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}=(0,1), \mathbf{b}=(1,2), \mathbf{c}=(2,4), \mathbf{d}=(-1,\frac{1}{2})\}$ trong không gian $\mathbb{E}$ nói trên.

29* Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{\mathbf{a}_1=(-1,3,5),\ \mathbf{a}_2=(2,1,-3),\ \mathbf{a}_3=(m,2,-2),$
$\mathbf{a}_4=(1,m,1)\}$.
(a) Với $m=2$, tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$
(b) Tìm hạng của hệ véc tơ $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4\}$ (theo m).

2. Bài tập về ánh xạ tuyến tính

1. Cho ánh xạ $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, x - y + z)$

   (a) Chứng minh φ là ánh xạ tuyến tính.

   (b) Tìm Ker φ, Im φ.

   (c) Tìm ma trận của φ trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : V_1 \to V_2$, trong đó $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương

   (a) f là đơn ánh.

   (b) f là toàn ánh.

   (c) f là song ánh.

3* Cho ánh xạ tuyến tính $\quad f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4,\ 2x_1 + 2x_3 - x_4).$$

   Hãy xác định các không gian con $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ và $f^{-1}(2, -8, 2)$. Ánh xạ f là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh?

4. Cho ánh xạ $\varphi: \mathcal{P}_n[x] \to \mathcal{P}_n[x], \quad p(x) \mapsto p'(x) \quad$ ($p'(x)$ là hàm đạo hàm của $p(x)$).

   (a) Chứng minh φ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathcal{P}_n[x]$.

   (b) Tìm ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

   (c) Tìm Ker φ.

5. Biết rằng phép chiếu vuông góc T từ $\mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng $x + y + z = 0$ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

   (a) Tìm ma trận của T trong cơ sở chính tắc.

   (b) Tìm Ker T.

6. Chứng minh hạng của ánh xạ tuyến tính bằng hạng của ma trận của ánh xạ tuyến tính đó. Với A là ma trận kiểu $m \times n$ có các phần tử đều bằng nhau. Tìm hạng của A.

7. $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ là hai ma trận vuông cấp n. Kí hiệu $r(A)$ là hạng của ma trận A.

   (a) Chứng minh
$$r(A + B) \le r(A) + r(B) \le r(AB) + n.$$

   *(b) Chứng minh rằng nếu $A^2 = I_n$ thì
$$r(I_n + A) + r(I_n - A) = n.$$

8. Kí hiệu $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   Xét ánh xạ $\varphi: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = AX$

   (a) Chứng minh φ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) Tìm ma trận của φ trong cơ sở chính tắc và tọa độ của ma trận $\varphi(B)$ trong cơ sở đó, biết $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Chứng minh φ là song ánh và xác định φ^{-1}.

9* Kí hiệu $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho trong không gian $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Xét các ánh xạ

$$f, g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(X) = AXB, \quad g(X) = AXC.$$

   (a) Trong số các ánh xạ $f,\ g$ và $f \circ g$, ánh xạ nào là tuyến tính. Tìm không gian nhân của các phép biến đổi tuyến tính đó.
   (b) Trong số các ánh xạ $f,\ g$ và $f \circ g$, ánh xạ nào là song ánh, tìm ánh xạ ngược của nó.

10. φ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = (x-y+z, y+z, x+2z)$

   (a) Tìm ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

   (b) Chứng minh rằng hệ $F = \{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm ma trận của φ trong cơ sở F.

   (c) Tìm Im φ.

11. Gọi f là phép là phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở chính tắc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Chứng minh rằng $\{\mathbf{a} = (1,-1,1), \mathbf{b} = (1,2,4), \mathbf{c} = (4,2,4)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

   (b) Viết ma trận của f trong cơ sở $B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

   (c) Tìm $\ker f$.

12* Cho hai phép biến đổi tuyến tính $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận của u trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và ma trận của v trong cơ sở $\mathbf{B} = \{(2,1),\ (1,1)\}$ là $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của $h = u \circ v$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

13. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ và $X \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Tìm số chiều, cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $AX = 0$.

   (b) Hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ có tương thích với mọi $B \in \mathbb{R}^3$ không? B thỏa mãn điều kiện gì để hệ có nghiệm.

14. Cho ánh xạ $f : \mathcal{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3, \quad f(p) = (p(-1), p(0), p(1))$

   (a) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính

   (b) Tìm ma trận của f trong các cơ sở chính tắc của $\mathcal{P}_2[x]$ và $\mathbb{R}^3$.

   (c) Tìm $\dim \ker(f)$

15. Chứng minh $T : \mathcal{P}_n[x] \to \mathcal{P}_n[x], \quad p \mapsto p'$ (p' là hàm đạo hàm của p) là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathcal{P}_n[x]$. Tìm các giá trị triêng và véctơ riêng của T.

16. Tìm các giá trị triêng, véctơ riêng của $\varphi :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Biết rằng trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, φ có ma trận

   (a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

17. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm hệ cơ sở để A có dạng chéo.

18. Cho φ là phép biến đổi tuyến tính trên V, $\mathbf{u}$ là véctơ riêng ứng với giá trị riêng λ. Chứng minh rằng $\mathbf{u}$ cũng là véctơ riêng của φ^3 ứng với giá trị riêng λ^3. (Lưu ý rằng φ^3 là ánh xạ hợp thành (ánh xạ tích) $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.)

19. Cho φ là phép biến đổi tuyến tính khả nghịch trên V

   (a) Chứng minh rằng nếu λ là một giá trị riêng của φ thì $\lambda \neq 0$ và λ^{-1} là giá trị riêng của φ^{-1}.

   (b) Chứng minh rằng nếu V có một cơ sở gồm các véctơ riêng của φ thì V cũng có một cơ sở gồm các véctơ riêng của φ^{-1}.

20* Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(1,1) = (-5,-1)$, $f(2,1) = (2,1)$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

*21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$, trong đó n là số nguyên dương, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Tìm trị riêng và véctơ riêng của A^{-1}.

(b) Hãy tính $\lim_{n\to\infty} A^n$.

22* Cho dãy véc tơ $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2), ..., \mathbf{a}_n = (x_n, y_n), ...$ trong $\mathbb{R}^2$ biết $\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = \ \ 3x_n + 4y_n \end{cases}$ với mọi $n \geq 1$ và $x_1 = 0, y_1 = 1$. Hãy tính $\mathbf{a}_n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

23. Chéo hóa các ma trận sau và chỉ ra các cơ sở tương ứng với từng ma trận chéo

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

24. Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\ \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_2[x]$. Biết rằng trong cơ sở $B = \{v_1 = 1 + x, v_2 = 1 - x, v_3 = x^2\}$ ma trận của f có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Tìm các trị riêng và véctơ riêng của f.

(b) Tìm ma trận của f theo cơ sở $B' = \{1, x, x^2\}$. Tính $f(1 + x + x^2)$.

25. Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\ \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_2[x]$

$$f(-2 + x - x^2) = x + x^2, f(1 + x^2) = 1 + x^2, f(x + 2x^2) = 1 + x.$$

(a) Tính $f(a + bx + cx^2)$.

(b) Tìm ma trận A của f trong cơ sở $B = \{1, x, x^2\}$. Ma trận A có chéo hoá được không?

26. Kí hiệu $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2.

(a) Chứng minh rằng

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ \middle|\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

là không gian con của $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Chứng minh $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ là cơ sở của W.

(c) Cho ánh xạ $f : W \to W$, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a + c & b \\ b & a + b + c \end{pmatrix}$

Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính trên W và tìm ma trận của f trong cơ sở C ở câu (b).

(d) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ và xác định không gian $\operatorname{Ker} f$.

27. Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} &\overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a & a + b + c + d \\ a + b + c + d & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc.

(c) Xác định các không gian $\operatorname{Im} f,\ \operatorname{Kef} f$.

(d) Tìm trị riêng, véctơ riêng của f.

28* Gọi $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \ \middle|\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp hai. Xét phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$, $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 5x + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 5x + 2y \end{pmatrix}$

(a) Tìm chiều và một cơ sở của V.

(b) Xác định không gian $\ker f$ và viết ma trận của f trong cơ sở vừa tìm được.

(c) Tìm các véc tơ riêng và các trị riêng tương ứng của f.

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Bài tập về không gian tuyến tính

4. A, C, D là các không gian con.

5. Các tập hợp trong các câu (a) và (b) là các không gian con.

9. Khẳng định $V = A \oplus B$ là đúng.

10. (a) Khẳng định $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$ là đúng.
(b) $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\} = A + B = \mathbb{R}^3$.

14. Tọa độ của $\mathbf{u} = (x, y, z)$ trong cơ sở F là $(\frac{y-z}{3}, x - \frac{y-z}{3}, -x + \frac{2y+z}{3})$

15. $\mathscr{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4}, \mathbf{a_5}) = \mathscr{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4})$.

16. $\dim A = \dim B = 3$.

17. (a) Không gian nghiệm có chiều bằng 2.
(b) Không gian nghiệm có chiều bằng 3.

18. (b) Cơ sở của $A \cap B$ gồm một véc tơ $(1, -4, 3)$.

19. Không gian nghiệm có chiều bằng 2.

21. Đẳng thức $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$ là đúng.

22. Tọa độ của $x^2 + 2x + 3$ trong cơ sở F là $(\alpha^2 + 2\alpha + 3, 2\alpha + 2, 1, 0, ..., 0)$.

23. Ma trận chuyển cơ sở $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \cdot \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -3\alpha & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

24. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang B là $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tọa độ của q trong cơ sở B là $(10, 4, 1 + \frac{a}{6}, \frac{a}{9} + \frac{b}{6} - \frac{5}{3})$.

25. Hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ bằng 3.

27. Ma trận chuyển cơ sở từ F sang $E \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tọa độ của A trong cơ sở F là $(-6, -5, 3, 4)$

28. $\dim \mathbb{E} = 2$ và hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ bằng 1.

29. (a) $\dim \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$
(b) Hạng của hệ véc tơ bằng 3 (với mọi m).

2. Bài tập về ánh xạ tuyến tính

1. (b) Ker $\varphi = \{C(1,3,2) \mid C \in \mathbb{R}\}$, Im $\varphi = \mathbb{R}^2$.
   (c) Ma trận của φ bằng $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Ker $f = \{C(-2,3,4,4) \mid C \in \mathbb{R}\}$, Im $f = \mathbb{R}^3$. (f là toàn ánh).
$$f^{-1}(2,-8,2) = \{C(-2,3,4,4) + (-2,1,4,2) \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

4. (b) Ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$
   (c) Nhân của φ là tập hợp các đa thức hằng (không gian con sinh bởi 1).

5. (a) Ma trận của T trong cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
   (b) Ker $T = \{C(1,1,1) \mid C \in \mathbb{R}\}$.

6. $r(A) = 1$ nếu $A \neq O$.

7. (a) Coi ma trận là phép biến đổi tuyến tính và sử dụng tính chất: *hạng của ma trận bằng chiều của không gian ảnh*.
   (b) Sử dụng tính chất $(A-I)(A+I) = O$.

8. (b) Ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ và tọa độ của ma trận $\varphi(B)$ trong cơ sở đó, với $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ là $(1,2,1,4)$.
   (c) $\varphi^{-1}(X) = A^{-1}X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} X$

9. (a) $\ker f = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\ker g = \ker f \circ g = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$
   (b) f là song ánh và
$$f^{-1}(X) = A^{-1}XB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. (b) Ma trận của φ trong cơ sở F : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
    (c) Im φ là không con 2 chiều trong $\mathbb{R}^3$, sinh bởi $\mathbf{f}_2$ và $\mathbf{f}_3$, đồng thời ta có thể viết Im $\varphi = \{(x, y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

11. (b) Ma trận của f trong cơ sở B : $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    (c) $\ker f$ là không gian con sinh bởi $(2,1,-1)$.

12. Ma trận của $h = u \circ v$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

13. (a) Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $AX = 0$ là không gian tuyến tính 1 chiều, sinh bởi $(1,-5,-3)$.
    (b) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi tọa độ của $B(x,y,z)$ thỏa mãn $3x - y - z = 0$.

14. (b) Ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\dim \ker(f) = 0$.

15. Phép toán đạo hàm có một trị riêng duy nhất $\lambda = 0$ và véc tơ riêng là đa thức hằng.

16. (a) Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng:

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{e}_1 = (1,1,1), \lambda_2 = 0, \mathbf{e}_2 = (1,2,3)$$

(b) Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng:

$$\lambda_1 = 3, \mathbf{e}_1 = (1,2,2), \lambda_2 = -1, \mathbf{e}_2 = (1,2,1).$$

17. Trong cơ sở $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1), \mathbf{u}_3 = (1,1,0)$ ma trận A có thể chéo hóa thành $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng của f

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = (2,1), \ \lambda_2 = 3, \mathbf{u}_2 = (3,1)$$

21. (a) Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng của A^{-1}:

$$\lambda_1 = \frac{n}{n-\alpha}, \mathbf{e}_1 = (1,-1), \lambda_2 = \frac{n}{n+\alpha}, \mathbf{e}_1 = (1,1)$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{a}_n = (2 - 2^n, -2 + 3\cdot 2^{n-1}), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

23. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T$, trong đó $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$

(c) Ma trận $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ không chéo hoá được.

24. (a) Tương ứng với trị riêng $\lambda_1 = -2$ là véc tơ riêng $P_1(x) = 3 - x + 2x^2$.
Tương ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$ là véc tơ riêng $P_2(x) = 3 + x - 2x^2$.
Tương ứng với trị riêng $\lambda_3 = 4$ là véc tơ riêng $P_3(x) = -4x - x^2$.

(b) Ma trận của f theo cơ sở $B' = \{1, x, x^2\}$ $[f]_{B'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. (c) Ma trận của f trong cơ sở C là $[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

27. (d) Các véc tơ riêng tương ứng với các trị riêng $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$ lần lượt là

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28. (a) Chiều của V, $\dim V = 2$.
(c) Các giá trị riêng của f là $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 6$ với các véc tơ riêng tương ứng

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. (a) Trong không gian $\mathbb{R}^n$ chứng minh rằng

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \cdots + \alpha_n x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$$

là tích vô hướng, với $\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n$ là các số thực dương cố định, các véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Hãy viết biểu thức độ dài véc tơ theo tích vô hướng trên và bất đẳng thức Schwarz cũng như bất đẳng thức tam giác.

(b) Chứng minh rằng trong không gian các ma trận vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, biểu thức $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$ là tích vô hướng, trong đó

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

(c) Chứng minh rằng trong không gian các hàm liên tục $C_{[a,b]}$ biểu thức

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p f(x) g(x) dx, \quad (p > 0 \text{ cố định})$$

là tích vô hướng.

(d) Trong không gian $\mathcal{P}_n[x]$ với $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ ta định nghĩa

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i.$$

Chứng tỏ rằng $\langle p, q \rangle$ là tích vô hướng trên $\mathcal{P}_n[x]$.

(e) Ta biết rằng $(\mathbb{R}^+)^n$ là không gian véc tơ với các phép toán

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n), \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha).$$

Chứng minh rằng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ln y_i$ là tích vô hướng trên $(\mathbb{R}^+)^n$.

2. Trực giao hoá các hệ véc tơ sau

(a) $\{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1);\ \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0);\ \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)\}$ theo tích vô hướng

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{trong} \quad \mathbb{R}^3.$$

(b) $\{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1);\ \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0);\ \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)\}$ theo tích vô hướng

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3 \quad \text{trong} \quad \mathbb{R}^3.$$

(c) $\{p(x) \equiv 1,\ q(x) = x,\ r(x) = x^2\}$ theo tích vô hướng

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá hai $\mathcal{P}_2[x]$.

3* Chứng minh $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 4 x_3 y_3$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$. Bằng phương pháp Gram - Smidt hãy trực chuẩn hoá hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

theo tích vô hướng đó.

4* E là không gian Euclide n chiều ($n \geq 3$), các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ có tính chất

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1, \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = m.$$

(a) Chứng minh rằng với $m = -\dfrac{1}{3}$, các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ độc lập tuyến tính.

(b) Chứng minh rằng với $m = -\dfrac{1}{2}$, các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ phụ thuộc tuyến tính.

5. Xét cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ của không gian Ơclit $\mathbb{R}^3$. Kí hiệu

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_3$$

và $\mathbf{u}_3 = \beta\mathbf{e}_1 + \dfrac{\alpha}{3}\mathbf{e}_2 + \dfrac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_3$. Xác định α, β để hệ các véc tơ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

6. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ cho mặt phẳng $P: \ x + y + z = 0$ (P là không gian con).

(a) Xác định véc tơ pháp $\mathbf{n}$ của mặt phẳng đó. ($\mathbf{n}$ vuông góc, theo tích vô hướng đã cho, với mọi véc tơ trong mặt phẳng P.

(b) Tính khoảng cách ngắn nhất từ $A(5, 2, 3)$ tới mặt phẳng P.

7* Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$, cho 2 véc tơ $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ và $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$.
a) Hãy tìm một hệ cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t}\}$ trong không gian Ơclit $\mathbb{R}^3$ (với tích vô hướng đã cho) sao cho $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \mathscr{L}(\mathbf{a})$, $\mathscr{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
b) Tính khoảng cách d từ véc tơ $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ đến không gian $\mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ theo tích vô hướng đã cho ($d = \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} |\mathbf{e} - \mathbf{x}|$).

8. Cho phép biến đổi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + x_2 + x_3).$$

(a) Tìm $\dim \ker(f)$.

(b) Tìm một hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$, sao cho trong hệ cơ sở đó ma trận của f có dạng chéo.

9* Cho φ là phép biến đổi trực giao trên không gian Ơclit E. Chứng minh rằng

$$< \mathbf{a}, \varphi(\mathbf{b}) > = < \varphi^{-1}(\mathbf{a}), \mathbf{b} > \quad \text{với mọi} \ \ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E.$$

10* Cho φ, ψ là các phép biến đổi đối xứng trên không gian Ơclit E. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phép biến đổi $\varphi \circ \psi$ cũng đối xứng là $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

11. Viết các dạng toàn phương (trong $\mathbb{R}^4$) sau đây dưới dạng ma trận

(a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3x_4$.

(b) $\omega(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

(c) $\omega(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

(d) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

12. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ là ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở trực chuẩn.

(a) Viết dạng song tuyến tính tương ứng. Đưa ω về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao. Tìm phép biến đổi trực giao đó.

(b) Tìm trị riêng của ma trận $B = A^2 + A + I_3$.

13. Bằng phương pháp Lagrange hãy đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

(a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ (xét trong $\mathbb{R}^3$).

(b) $\omega(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_3x_1$ (xét trong $\mathbb{R}^3$).

(c) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4$ (xét trong $\mathbb{R}^4$).

14. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận $B = \varphi(A)$, trong đó $\varphi(x) = x^2 + x - 2$. Chứng minh $\det B = 0$.

(b) Coi A là ma trận của dạng toàn phương ω. Hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

15. Xác định một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ sao cho trong cơ sở đó dạng toàn phương $\omega(\mathbf{x})$ dưới đây có dạng chính tắc. Tìm dạng chính tắc đó

(a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(b) $\omega(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

16. Xác định một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^4$ sao cho trong cơ sở đó dạng toàn phương $\omega = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ có dạng chính tắc.

17. Trong số các dạng toàn phương sau, dạng nào xác định dương, xác định âm, không xác định dấu

(a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(b) $\omega(\mathbf{x}) = -11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(c) $\omega(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

18* $\mathbb{R}^2$ là không gian Ơclit với tích vô hướng $\big\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \big\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$. Phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở chính tắc $B = \{(1,0), (0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$ có ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Hãy cho một cơ sở trực chuẩn bất kì của không gian Ơclit đã cho và viết ma trận của f trong cơ sở đó.

(b) Phép biến đổi f có là phép biến đổi trực giao không?

19* Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Ma trận A có là ma trận trực giao không?

(b) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

20. Cho dạng toàn phương $\omega = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

(a) Tìm λ để ω xác định dương.

(b) Với $\lambda = 2$, hãy đưa dạng trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

21. Đưa các đường bậc hai sau về dạng chính tắc. Vẽ các đường bậc hai đó trong hệ trục tọa độ Đề các xOy

(a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$

(b) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

(c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

22. Chứng minh rằng phép biến đổi

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x, \alpha y),$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một số cố định khác 0, chuyển đường thẳng thành đường thẳng, đường tròn thành elip.
Phép biến đổi đó có là phép biến đổi tuyến tính không? Tìm trị riêng véc tơ riêng nếu T là phép biến đổi tuyến tính.

23. Viết phương trình các đường thẳng

(a) đi qua $A(0, 1, 0)$ và nằm trọn trong mặt hypebôlôit một tầng

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

(b) đi qua gốc tọa độ $O(0, 0, 0)$ và nằm trọn trong mặt yên ngựa

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z.$$

24. Bằng cách chuyển sang hệ trục tọa độ mới, chứng tỏ rằng đường cong trong không gian được cho bởi hệ thức

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(giao của hình trụ và mặt phẳng) là elip. Xác định các bán trục của elip đó.

25. Đưa các mặt bậc hai sau về dạng chính tắc và nhận dạng chúng

(a) $7x^2 + 7y^2 - 10xy + 8xz + 8yz - 2z^2 + 24x - 24y + 24 = 0$

(b) $6x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz + 6yz + 4y - 4z - 12 = 0.$

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

2. (b) Với tích vô hướng $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$, bằng phương pháp Gram - Smidt, ta được hệ trực giao

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{1}{6}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{6}(-7,5,-1),\ \mathbf{v}_3 = \frac{1}{17}(6,3,-4)$$

3. Với tích vô hướng $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$

$$\{\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3\}.$$

Bằng phương pháp Gram - Smidt, trực chuẩn hoá hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ ta được hệ cơ sở trực chuẩn

$$\{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1)\}$$

5. $\alpha = -1,\ \beta = 0$ hoặc $\alpha = 2,\ \beta = \frac{2}{3}$

6. (a) Véc tơ $C(2,1,2) \mid C \in \mathbb{R}$ vuông với mọi véc tơ trong P.
(b) Khoảng cách ngắn nhất từ A tới P là $d = 2$.

7. (a) $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0),\ \mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1),\ \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$
(b) $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. (b) $\{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$, ma trận của f có dạng chéo trong đó.

11. (a) Ma trận của $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3x_4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \omega(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]^T AT.$$

12. (a) Với phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \omega(x,y,z) = 6{x'}^2 + 3{y'}^2 + 2{z'}^2.$$

(b) Các trị riêng của B là $\lambda_1 = 43,\ \lambda_2 = 13, \lambda_3 = 7$.

14. (a) Với trị riêng $\lambda_1 = 54$, các véc tơ riêng tương ứng có dạng $C_1(2,0,1) + C_2(2,1,0)$.
Với trị riêng $\lambda_2 = 0$, các véc tơ riêng tương ứng $C(-1,2,2)$. Do đó $\det B = 0$.

15. (a) Trong cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\}$

$$\omega = 6x^2 + 3y^2 - 2z^2.$$

(b) Dạng chính tắc $\omega = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2$.

16. $\omega = 4y_1^2 - 4y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2$.

17. (a) Không xác định dấu.
(b) Xác định âm.
(c) Xác định dương.

18. (b) f không là phép biến đổi trực giao vì f không bảo toàn độ dài

$$\mathbf{e_1} = (1,0), |\mathbf{e_1}| = 1, \quad \text{trong khi} \quad f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} = (0,1), |\mathbf{e_2}| = \sqrt{2}$$

19. (a) Ma trận A không là ma trận trực giao.
(b) Do $\frac{1}{2}A$ là ma trận trực giao và cũng là ma trận đối xứng, suy ra $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

20. (a) $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$.

21. (a) Với phép biến đổi trực giao (phép quay) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ đường cong đã cho là elip $\frac{u^2}{2} + \left(v - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$.
(b) Đường bậc hai là parabol.
(c) Đường bậc hai đã cho là 2 đường thẳng

$$-2x + y = 1 \quad \text{và} \quad -2x + y = -4.$$

22. T là phép biến đổi tuyến tính có 2 giá trị riêng 1 và α.

23. (a) Đường thẳng $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ và đường thẳng $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$
(b) Đường thẳng $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ và đường thẳng $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

24. Hai bán trục của elip bằng a và $\sqrt{2}$.

25. (a) Mặt nón, trong hệ trục thích hợp $O'x'y'z'$: $2(x' + \sqrt{2})^2 - {y'}^2 + {z'}^2 = 0$.
(b) Mặt parabôlôit $2{x'}^2 + {y'}^2 - 2z' - 3 = 0$.