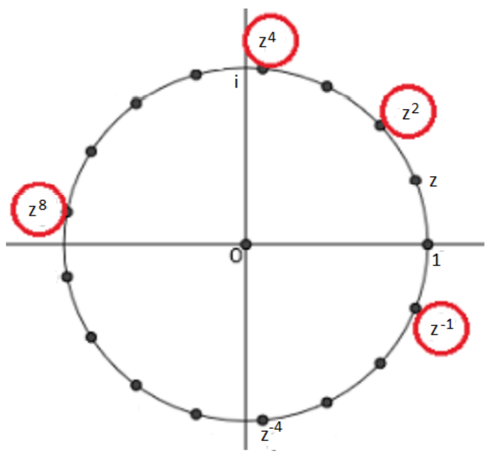
Đa giác đều 17 cạnh và cách dựng

I. Tính chất

Để trình bày cách dựng đa giác đều 17 cạnh, ta sẽ giới thiệu một số tính chất của nó. Trước tiên ta gắn các đỉnh của giác đều 17 cạnh với các số phức $1, z, z^2, z^3, ..., z^{15} = z^{-2}, z^{16} = z^{-1}$, trong đó



$$z = \cos\frac{2\pi}{17} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{17}$$

Ta đưa vào các kí hiệu

$$\alpha = z + z^{-1} \tag{1}$$

$$\beta = z + z^4 + z^{-1} + z^{-4} \tag{2}$$

$$\gamma = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + z^{-8} \tag{3}$$

$$\gamma' = z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{-3} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} \tag{4}$$

Hiển nhiên $\gamma + \gamma' = -1$.

Mặt khác nếu nhân bung (3) và (4), dễ dàng nhận thấy

$$\gamma \cdot \gamma' = 4 \cdot \sum_{i=1}^{16} z^i = -4.$$

Vậy γ và γ' là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + x - 4 = 0$, $x = \frac{1}{2}\big(-1 \pm \sqrt{17}\big)$. Từ hình vẽ trên ta dễ dàng suy ra γ là nghiệm tương ứng với dấu $+$: $\gamma = \dfrac{1}{2}\big(\sqrt{17} - 1\big)$.

Tương tự ta có thể tính β theo γ. Kí hiệu $\beta' = \gamma - \beta = z^2 + z^8 + z^{-2} + z^{-8}$ và làm tương tự như trên ta được $\beta \cdot \beta' = -1$. Vậy β là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - \gamma x - 1 = 0$. Suy ra

$$\beta = \frac{1}{2}\Big(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}\Big) = \frac{1}{4}\Big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\Big). \quad (5)$$

Cuối cùng ta tính α theo β. Kí hiệu $\alpha' = \beta - \alpha = z^4 + z^{-4}$, khi đó

$$\alpha \cdot \alpha' = (z + z^{-1})(z^4 + z^{-4}) = z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5}.$$

Giả sử $\alpha \cdot \alpha' = u$, ta chọn v sao cho $u + v = \gamma'$ hay $v = z^6 + z^7 + z^{-6} + z^{-7}$. Khi đó

$$u \cdot v = (z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5})(z^6 + z^7 + z^{-6} + z^{-7}) = -1.$$

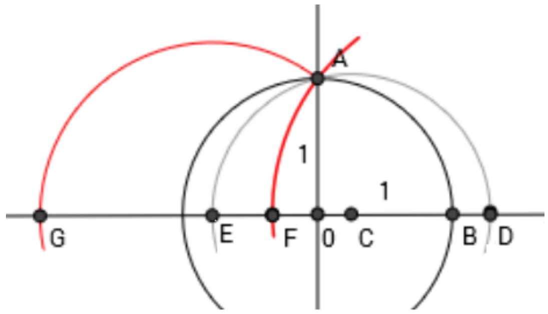
Vậy u, v là nghiệm của phương trình $x^2 - \gamma' x - 1 = 0$. Dựa vào hình vẽ trên $u > 0$, suy ra

$$u = \frac{1}{2}\Big(\gamma' + \sqrt{\gamma'^2 + 4}\Big) = \frac{1}{4}\Big(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\Big). \quad (6)$$

Lặp lại cách làm như trên do $\alpha + \alpha' = \beta, \alpha \cdot \alpha' = u$ ta được α và α' là các nghiệm của phương trình $x^2 - \beta x + u = 0$ hay

$$\alpha = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4u}}{2} \quad \text{và} \quad \alpha' = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4u}}{2}. \quad (7)$$

II. Cách dựng đa giác đều 17 cạnh



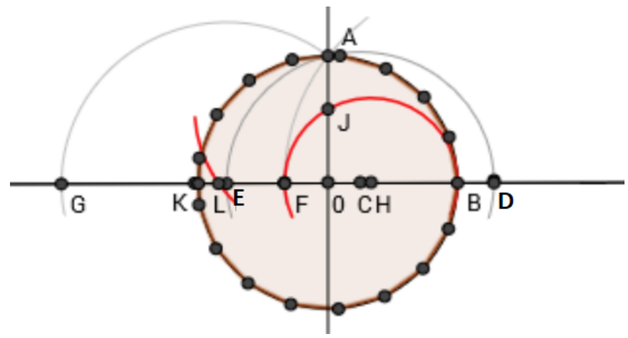
Trong hệ trục tọa độ Descartes vẽ đường tròn đơn vị, tâm là gốc tọa độ O. Đường tròn tâm O cắt các trục tọa độ tại A và B. (Hình bên).

1. Dựng điểm C trên trục hoành sao cho $OC = \frac{1}{4}OB$.
2. Dựng đường tròn tâm C bán kính CA, nó cắt trục hoành tại D và E.
3. Dựng đường tròn tâm D bán kính DA, nó cắt trục hoành tại F.
4. Dựng đường tròn tâm E bán kính EA, nó cắt trục hoành tại G.

Các bước tiếp theo:

5. Đường tròn đường kính FB cắt trục tung tại J
6. Dựng trung điểm K của OG.
7. Dựng đường tròn tâm J bán kính OK, nó cắt trục hoành tại L.

Khi đó độ dài đoạn KL bằng cạnh của đa giác đều 34 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị.
Từ đó ta dễ dàng dựng được các đỉnh của đa giác đều 17 cạnh.



III. Chứng minh sự đúng đắn của cách dựng đa giác đều 17 cạnh

Cách chứng minh được trình bày dựa theo cuốn sách của Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond New York, Springer-Verlag*, 250-259 (2000). Tôi đã có một vài nhận xét nhỏ rút ngắn được các tính toán phức tạp. Dựa theo cách dựng, ta sẽ tính độ dài đoạn KL và chứng minh độ dài đó bằng cạnh của đa giác đều 34 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị.

1. Ta có $OE = OA - OC = \sqrt{1 + (\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$

2. Dễ dàng tính được

$$OG = OE + EA = \frac{1}{4}\Big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\Big).$$ Vậy $OG = \beta$ theo công thức (5).

3. Tương tự $OF = DA - OD = \dfrac{1}{4}\Big(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\Big) = u$ theo (6).

3. Tính $KL = OK - LJ = \frac{OG}{2} - \sqrt{JL^2 - JO^2} = \frac{OG}{2} - \sqrt{JL^2 - JH^2 + OH^2}$, trong đó H là tâm đường tròn đường kính FB (hình trên). Vậy $KL = \frac{OG}{2} - \sqrt{(\frac{OG}{2})^2 - (\frac{1+OF}{2})^2 + (\frac{1-OF}{2})^2} = \frac{OG}{2} - \sqrt{(\frac{OG}{2})^2 - OF}$ hay $KL = \frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 - u} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4u}}{2}$. Như vậy $KL = \alpha'$ theo công thức (7) cuối mục I. trong đó α' được định nghĩa $\alpha' = z^4 + z^{-4}$.

Hình vẽ bên chỉ ra $\alpha' = z^4 + z^{-4}$ là độ dài cạnh đáy tam giác cân có đỉnh là z^4, cạnh bên bằng đơn vị và góc ở đỉnh bằng $\frac{\pi}{17}$.
Đó chính là độ dài cạnh của đa giác đều 34 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị.