

BÀI TẬP GIẢI TÍCH I

NGUYỄN NGỌC CỬ

*Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kỹ thuật*

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Sử dụng định nghĩa hãy chứng minh các giới hạn sau

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = +\infty$ (với $\alpha > 0$)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0$ (với $\alpha < 0$)

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (với $|q| < 1$)

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ (với $|q| < 1$)

2. Chứng minh rằng

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ (với $q > 1$)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$ (với $\alpha > 0, q > 1$)

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$.

3. Cho dãy $\{u_n\}$ hội tụ và dãy $\{v_n\}$ phân kì. Hỏi các dãy $\{u_n + v_n\}$ và $\{u_n \cdot v_n\}$ hội tụ hay phân kì?

4. Cho dãy số $\{a_n\}_1^\infty$. Chứng minh rằng nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = L$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ tồn tại và bằng L .

5. Cho dãy số dương $\{a_n\}_1^\infty$. Chứng minh rằng nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

6. Cho dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ, các số hạng của dãy là các số dương $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
 Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

7. Tính giới hạn của các dãy số dưới đây

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos n\pi, & \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{1}{n} \\ \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} \\ \text{(c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n)^{\frac{1}{n}} \\ \text{(d)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{n} \\ \text{(e)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

8. Với $0 < a < b$, tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

9. Hãy tìm các giới hạn sau

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^4 - a^4 \right) \\ \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \\ \text{(c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) \\ \text{(d)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) \\ \text{(e)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} \\ \text{(f)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) \\ \text{(g)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \end{aligned}$$

10. Cho dãy số $\{a_n\}$, biết $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$. Hãy tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$$

11. Cho dãy số $\{a_n\}$, biết $a_1 = 0, a_2 = 1$ và $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ với $n \geq 2$.
Tìm số hạng thứ n của dãy và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
12. Cho dãy số $x_n = \arctg x_{n-1}$, $x_0 = a > 0$. Hãy tính $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
13. Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $0 < x_0 < 1$ tùy ý, $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.
14. Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_0 > 0$ tùy ý, $x_n = \ln(1 + x_{n-1})$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.
15. Tìm giới hạn của dãy số

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} \quad (\text{với } a > 0).$$

16. Cho $0 < a < b$ và các dãy số

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \quad \text{với } x_0 = a, y_0 = b$$

Chứng tỏ rằng hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

17. Cho dãy số $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ với $x_0 > 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

18. Cho dãy số $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$ với $x_0 > 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

19. Chứng minh rằng dãy các khoảng đóng $[a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ lồng nhau ($[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$) và thắt lại ($b_n - a_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$) có duy nhất một phần tử chung.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. (d) Sử dụng định nghĩa, chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ (với $|q| < 1$).

Bài toán tương đương với việc chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$ với $a > 1$.

Với $a > 1$, sử dụng bất đẳng thức $a^n = (1 + \alpha)^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$ ta được đ.p.c.m.

2. (b) Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$ (với $\alpha > 0, q > 1$)

Hướng dẫn: Viết $\frac{q^n}{n^\alpha} = \left(\frac{a^n}{n}\right)^\alpha$, với $a = q^{\frac{1}{\alpha}}$ và sử dụng bài tập 1. (d).

- (e) Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Hướng dẫn: Đặt $\sqrt[n]{n} = 1 + x$, $n = (1 + x)^n > \frac{n(n-1)}{2}x^2 \Rightarrow (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1}$.

- (f) Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$.

Hướng dẫn: $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}} > \frac{\ln n}{n} + 1 \Rightarrow n(\sqrt[n]{n} - 1) > \ln n$.

6. Giả thiết $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

Hướng dẫn: Sử dụng định nghĩa chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$, xét trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$. Phần còn lại hãy sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

7. (a) Không tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos n\pi$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{1}{n} = \infty$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{e^2} \quad \text{và} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{n} = 0$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e} \quad \text{và} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 0$$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$ nếu $0 < a < b$.

9. (a) $4a^3$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = 1.$

Hướng dẫn: $\sqrt{n^2+n} - n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{n^2+n} = n + \frac{1}{2} + \alpha_n$, trong đó $\alpha_n \rightarrow 0$

(e) 0

(f) 0

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = 4$

Hướng dẫn: Sử dụng $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 4$

Hướng dẫn: $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \dots = \frac{4}{n(n+1)}$ 11. Cho dãy số $\{a_n\}$, biết $a_1 = 0, a_2 = 1$ và $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ với $n \geq 2$.
Tìm số hạng thứ n của dãy và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.**Hướng dẫn:** $(a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1}) = 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2n - 1$, suy ra
 $a_n = 1 + 3 + \dots + (2n-3) = (n-1)^2 \rightarrow \infty$ 12. Với $x_0 = a > 0$, dãy số $x_n = \arctg x_{n-1}$ đơn điệu giảm. Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.13. Với $0 < x_0 < 1$, dãy số $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.**Hướng dẫn:** dãy số $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14. 0

15. $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Hướng dẫn: dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên, chẳng hạn bởi số dương $K = \max(2, a)$ 16. **Hướng dẫn:** Dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và dãy $\{y_n\}$ đơn điệu giảm.17. **Hướng dẫn:** dãy đơn điệu tăng và chứng minh nó không bị chặn.18. **Hướng dẫn:** dãy đơn điệu giảm.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Dùng định nghĩa giới hạn chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty.$$

2. Chứng minh khi $x \rightarrow +\infty$ hàm lũy thừa tiến ra vô cùng chậm hơn nhiều so với tốc độ tăng của hàm mũ, chính xác hơn, chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0, \quad (a > 1).$$

3. Chứng minh rằng không tồn tại các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$

4. Tìm các giới hạn

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x) \cdots (1+nx) - 1}{x}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

5. Tìm các giới hạn

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x}$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x}$$

6. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos nx}{x^2}$$

7. Tìm giới hạn

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$

8. Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \log_2(2+x)}{\log_2(2+x) - \log_3(3+x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2}$

9. Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} x^k \sin \frac{1}{x} \quad (k > 0)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^k \cos \frac{1}{x} \quad (k > 0)$

10. Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x - \ln^2 x \cdot \sin x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)}{\sin(\sin x)}$

11. Khi $x \rightarrow 0+$ các VCB sau có tương đương không?

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

12. Hãy xác định a để các hàm sau liên tục trên \mathbb{R}

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ a \cos x + b \sin x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \leq \frac{\pi}{2} \\ ax & \text{nếu } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

13. Hãy xác định α để hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$.

14. Trong các hàm sau $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì

$$(a) \quad u(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad v(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

15. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ -1 & \text{nếu } x = 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 0 & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$$

16. Tìm tập xác định của hàm

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^n}$$

và tìm tập hợp các điểm mà tại đó hàm liên tục.

17. Xét tính liên tục của hàm sau trên \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

18. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục thì $|f(x)|$ cũng là hàm liên tục.

19. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì các hàm

$$m(x) = \min_{a \leq t \leq x} f(t) \quad \text{và} \quad M(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t)$$

cũng liên tục trên đoạn $[a, b]$.

20. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì hàm $f(x)$ bị chặn trên khoảng đó.

21. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ xác định và bị chặn trên đoạn $[a, b]$ thì các hàm

$$m(x) = \inf_{a \leq t < x} f(t) \quad \text{và} \quad M(x) = \sup_{a \leq t < x} f(t)$$

liên tục trái trên đoạn $[a, b]$.

22. Chứng minh rằng các điểm gián đoạn của một hàm đơn điệu và bị chặn là các điểm gián đoạn loại một.

23. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì hàm $f(x)$ liên tục đều trên khoảng $[a, +\infty)$.

24. Chứng minh rằng các hàm sau liên tục đều trên \mathbb{R} .

(a) $f(x) = \sin^2 x$

(b) $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

25. Tìm hàm liên tục đều trên tập $(0, +\infty)$ trong số các hàm sau

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$
- (b) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$
- (c) $h(x) = \sin(x^2)$
- (d) $u(x) = x \sin(x)$

26. Cho 2 số thực $a < b$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục đều trên (a, b) , khi đó hàm f tồn tại các giới hạn một phía tại $x = a$ và $x = b$.

27. Cho hàm Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q} \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản (p, q là các số tự nhiên). Chứng tỏ rằng f liên tục tại các điểm vô tỉ và liên tục phải tại $x = 0$, gián đoạn tại các điểm còn lại trên đoạn $[0, 1]$.

28. Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Giả sử f liên tục tại $x = 0$. Chứng tỏ rằng tồn tại $a \in \mathbb{R}$ để $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

29. Hàm $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , giả thiết rằng tồn tại hai số $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_1)f(x_2) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại a, b, c sao cho $a < b < c$, $2b = a + c$ đồng thời

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0.$$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG II

2. **Hướng dẫn:** Đưa về bài toán chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ với $a = 1 + \alpha > 1$.

Kí hiệu $n_x = [x]$, sử dụng bất đẳng thức $(1 + \alpha)^n \geq \frac{n(n-1)\alpha^2}{2}$, ta được

$$\frac{a^x}{x} \geq \frac{n_x(n_x - 1)\alpha^2}{2(n_x + 1)} \rightarrow +\infty \text{ khi } x \rightarrow +\infty.$$

4. (a) $\frac{n(n+1)}{2}$

Hướng dẫn: Nhân tung ra và viết lại thành đa thức biến x

$$(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx) = 1 + (x+2x+\cdots+nx) + o(x)$$

(b) $\frac{3^{20}}{6^{10}}$

(c) $\frac{49}{24}$

(d) $\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$

(e) 1.

5. (a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$

(c) $-\frac{1}{12}$

(d) 14

(f) $\frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 4 - \ln 3}$

Hướng dẫn: Viết bài toán dưới dạng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 3^x}{x} \cdot \frac{x}{3^x - 4^x} \right)$.

6. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

Hướng dẫn: Viết bài toán dưới dạng sau rồi làm như bài 4.(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})2 \cdots (1 - 2\sin^2 \frac{nx}{2})}{x^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{2}$$

7. (a) 8 (b) $\frac{2}{3}$
 (c) $\frac{2}{\pi}$ (d) $\frac{1}{4}$
 (e) 1 (f) $\frac{1}{e^2}$

8. (a) 0 (b) $\frac{-3 \ln 3}{3 \ln 3 - 2 \ln 2}$
 (c) 0 (d) e^3
 (e) \sqrt{e} (f) 15

9. (a) 1 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 (c) 1

Hướng dẫn: Hướng dẫn: $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (\cos(x^{\frac{1}{x}}))^{\frac{1}{x}} = A$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(x^{\frac{1}{x}}) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2 \sin^2(\frac{x^{\frac{1}{x}}}{2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\frac{2}{x}}}{-2x} = 0$$

- (d) 1 (e) 0.
10. (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn: $\left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1}\right) \sim \tg \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2x+1}$

- (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

11. $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \sim x^{\frac{1}{4}}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x \sim x$ khi $x \rightarrow 0+$

12. (a) $a = 1$

- (b) $a = 0$

- (c) $a = \frac{2}{\pi}$

13. $\alpha > 0$

14. (a) $x = 0$ là điểm gián đoạn loại hai
 (b) $x = 0$ là điểm gián đoạn loại một.

15. $x = -1$ là điểm gián đoạn.
16. Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, hàm f liên tục tại mọi $x \neq \pm 1$
17. Hàm f liên tục tại điểm $x = 0$ và gián đoạn tại mọi điểm $x \neq 0$.
25. Hàm $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục đều trên $(0, +\infty)$

Hướng dẫn: Hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ có giới hạn hữu hạn ($=0$) khi $x \rightarrow +\infty$, do vậy khi x_1, x_2 đủ lớn $|f(x_1) - f(x_2)|$ đủ nhỏ, mặt khác trên đoạn $[0, K]$ (khoảng đóng) hàm liên tục đều.

Hàm $h(x) = \sin(x^2)$ không liên tục đều trên tập $(0, +\infty)$ vì khi chọn 2 dãy $x_n = \sqrt{n\pi}$ và $y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, ta có $\lim(x_n - y_n) = 0$ và $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ với mọi n .

Hàm $u(x) = x \sin x$ không liên tục đều trên $(0, +\infty)$ vì khi chọn 2 dãy số $x_n = 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = 2n\pi$, ta có $x_n - y_n \rightarrow 0$, tuy nhiên

$$u(x_n) - u(y_n) = (2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

26. Tồn tại các giới hạn hữu hạn một phía tại $x = a$ và $x = b$ vì nó thỏa mãn điều kiện Cauchy.
28. **Hướng dẫn:** Kí hiệu $a = f(1)$. Khi đó $f(x) = ax$ với mọi số hữu tỉ $x \in \mathbb{R}$. Mặt khác do f liên tục tại $x = 0$, suy ra f liên tục trên \mathbb{R} . (Thật vậy với dãy số bất kì $\{y_n\} \rightarrow y \Rightarrow f(y_n - y) = f(y_n) - f(y) \rightarrow f(0) = 0$). Suy ra $f(x) = ax$ với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$.
29. **Hướng dẫn:** Giả sử $x_1 < x_2$ và $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. Xét hàm liên tục $g(h) = f(x_1) + f(x_1 + h) + f(x_1 + 2h)$, $h \in [0, \frac{x_2 - x_1}{2}]$. Nếu tại 2 đầu mút x_1 và $\frac{x_2 - x_1}{2}$, hàm g trái dấu, khi đó tồn tại h^* để $g(h^*) = 0$, suy ra điều phải chứng minh.
- Ngược lại, xét hàm số $u(h) = f(x_2) + f(x_2 - h) + f(x_2 - 2h)$, $h \in [0, \frac{x_2 - x_1}{2}]$. Khi đó u tại 2 mút trái dấu, suy ra tồn tại h^* để $u(h^*) = 0$, (đ.p.c.m.)

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Chứng minh rằng các hàm $u(x) = x\sqrt[3]{x}$, $v(x) = |x| \sin x$ khả vi tại $x = 0$ và tính các đạo hàm $u'(0), v'(0)$.
2. Cho hàm số $f(x) = (1+x)(1+2x) \cdots (1+nx)$. Tính $f'(0)$.
3. Cho hàm số $f(x) = x|x-1|$. Tính $f'(0), f'_+(1), f'_-(1)$.
4. Hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ khả vi tại các điểm nào và tính đạo hàm hàm số tại các điểm đó.
5. Chứng minh rằng hàm

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$ nhưng không khả vi tại đó. Thậm chí hàm f không có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại $x = 0$.

6. Tính các đạo hàm một phía các hàm $|\ln(1+x)|$, $\sqrt{1-\cos x}$ tại điểm $x = 0$. Từ đó suy ra chúng có khả vi tại $x = 0$ không?
7. Xác định a, b để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + a & \text{nếu } x < 0 \\ bx & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

khả vi tại $x = 0$.

8. Chứng minh rằng hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

khả vi với $\forall x \in \mathbb{R}$, tuy nhiên $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

9. Áp dụng các quy tắc tính đạo hàm để tính đạo hàm các hàm số sau

$$(a) \quad y = x \ln x - x \quad (x > 0) \quad (b) \quad y = \ln^2(1 + x^2)$$

$$(c) \quad y = x^{\cos x} \quad (x > 0) \quad (d) \quad y = 2^{x^x}$$

$$(e) \quad y = e^{x^2}(\cos x + \sin x) \quad (f) \quad y = \sqrt{1 + \arcsin x}$$

10. Tính đạo hàm các hàm số

$$(a) \quad y = \sqrt{1 + \sin 2x} \quad (b) \quad y = (\arcsin x)^2$$

$$(c) \quad y = \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x} \quad (d) \quad y = \frac{\arccos x}{1 - x^2}$$

$$(e) \quad y = \ln \sqrt{1 + x + x^2} \quad (f) \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$$

11. Chứng minh rằng đoạn tiếp tuyến của hyperbol $xy = 1$ chắn bởi các trục tọa độ bị tiếp điểm chia thành hai phần bằng nhau.

12. Tính đạo hàm cấp n các hàm sau:

$$(a) \quad f(x) = (x^2 + x + 1)e^x \quad (b) \quad f(x) = \sin 3x \cos 2x$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{1}{x - 1} \quad (d) \quad f(x) = \sin^2 x$$

$$(e) \quad f(x) = (x^2 + 4)e^{2x} \quad (f) \quad f(x) = x^2 \sin 2x$$

13. Tính đạo hàm cấp n các hàm

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (b) \quad g(x) = \frac{x^2}{1 - x}$$

$$(c) \quad u(x) = \frac{x^2 - x}{x + 4} \quad (d) \quad v(x) = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

14. Sử dụng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ để tính gần đúng

$$\operatorname{tg} 46^\circ; \quad \operatorname{arctg} 1,02; \quad \sqrt{64,5}.$$

15. Hàm $f(x)$ khả vi trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng $f'(x)$ là hàm chẵn nếu $f(x)$ là hàm lẻ và $f'(x)$ là hàm lẻ nếu $f(x)$ là hàm chẵn.
16. Hãy tính các hệ số góc của tiếp tuyến của các đường cong cho dưới dạng tham số sau đây tại các điểm thuộc đường cong, tương ứng với tham số t

(a)
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 < t < \frac{\pi}{2}). \text{ Tính } y'(x).$$

(b)
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{Tính } y'(x) \text{ tại } t = \frac{\pi}{2}$$

(c)
$$\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases} \quad \text{Tính } y'(x) \text{ tại } t = 1$$

(d)
$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad \text{Tính } y'(x), y''(x), y'''(x).$$

17. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ có không quá 2 nghiệm thực nếu n là số tự nhiên chẵn, có không quá 3 nghiệm thực nếu n là số tự nhiên lẻ.
18. Cho $f(x)$ là hàm khả vi trên đoạn $[0, 1]$ đồng thời $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.
19. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và khả vi trên khoảng $(a, +\infty)$. Giả thiết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, +\infty)$ sao cho $f'(c) = 0$.
20. Sử dụng các định lý trung bình để chứng minh các bất đẳng thức sau

(a)
$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b)
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \quad \forall x, y \geq 1.$$

(c)
$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(d)
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x, \quad \forall x \geq 0.$$

21. Viết công thức Cauchy cho các hàm $f(x) = e^{2x}$ và $g(x) = 1 + e^x$ trên đoạn $[a, b]$.

22. Tìm cực trị các hàm

(a) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$

(b) $f(x) = x + \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}$

23. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất hàm

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \quad \text{trên đoạn } [0, 1].$$

24. Chứng minh

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq x^n + (1-x)^n \leq 1 \quad \text{với } 0 \leq x \leq 1, n > 1.$$

25. Chứng minh rằng

$$x^n(1-x) \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad \text{với } 0 \leq x \leq 1, n > 1.$$

26. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n+1} \quad \text{với } x > 0, n > 1.$$

27. Khai triển Maclaurin các hàm số sau

(a) $f(x) = e^{x^2}$ (b) $f(x) = \operatorname{sh} x$

(c) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ (d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

28. Viết các khai triển Maclaurin với phần dư dạng Peano cho các hàm

(a) $f(x) = \operatorname{tg} x$ đến x^3 .

(b) $f(x) = \sin(\sin x)$ đến x^5 .

29. Viết các đa thức sau theo lũy thừa của $x - 2$

(a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 9$

(b) $f(x) = -2x^4 + 11x^3 - 18x^2 + 8x - 1$

30. Chứng minh rằng nếu hàm f có đạo hàm cấp hai tại a thì

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) + f(a-x) - 2f(a)}{x^2}$$

31. Dùng quy tắc Lôpitan để tính

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln(1 - \cos x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right),$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

32. Sử dụng khai triển Taylor để tính các giới hạn

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{1 - \cos x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{tgx - \sin x}$

33. Trong các công thức sau, công thức nào đúng

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

34. Sử dụng công thức Taylo để tính các đạo hàm cấp n tại $x = 0$ của các hàm

$$y = x^3 e^x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \arcsin x.$$

35. Sử dụng các công thức tính gần đúng

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

hãy tính $\cos 0,05$ và $\ln 1,5$ và đánh giá sai số.

36. Chứng minh rằng công thức tính gần đúng

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

có sai số không vượt quá 0,001 với các giá trị $x \in [-1, 1]$.

37. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số

(a) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

(b) $y = e^{-\frac{2x}{1-x^2}}$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}} \quad (a > 0)$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

38. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho dưới dạng tham số

(a) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

39. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho trong hệ tọa độ cực

(a) $r = a \sin 3\varphi$

(b) $r = a \cos 3\varphi$

(c) $r = 1 + 2 \cos \varphi$

(d) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

(e) $r = a(1 + \cos \varphi)$

(f) $r = a \sin 2\varphi$

(g) $r = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$

(h) $r = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$

(i) $r = \frac{1}{\varphi - \frac{\pi}{4}}$

(k) $r = \frac{\varphi}{\varphi - \frac{\pi}{4}} \quad (\varphi > \frac{\pi}{4})$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. $u'(0) = 0, \quad v'(0) = 0$

2. $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $f'(0) = 1, f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$

4. $f = \sqrt[3]{x}$ khả vi tại mọi $x \neq 0$ và $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

6. Kí hiệu $f(x) = |\ln(1+x)|, \quad g(x) = \sqrt{1-\cos x}$. Khi đó

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1, \quad g'_+(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'_-(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

7. $a = 0, \quad b = 1$

9. Đạo hàm

(a) $y' = \ln x$ (b) $y' = \frac{4x \ln(1+x^2)}{1+x^2}$

(c) $y' = x^{\cos x - 1}(\cos x - x \sin x \cdot \ln x)$ (d) $y' = 2^{x^x} x^x \ln 2 \cdot (1 + \ln x)$

(e) $e^{x^2} \left((1+2x) \cos x + (2x-1) \sin x \right)$ (f) $\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$

10.

(a) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ (b) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{\cos x - \sin x - 1}{(1-\cos x)^2}$ (d) $\frac{2x \arccos x}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(e) $\frac{1+2x}{2(1+x+x^2)}$ (f) $\frac{2x}{1-x^4}$

12. Đạo hàm cấp n

$$(a) (x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1)e^x \quad (b) \frac{1}{2} \left(5^n \sin(5x + n\frac{\pi}{2}) + \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \right)$$

$$(c) \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad (d) 2^{n-1} \sin(2x + (n-1)\frac{\pi}{2})$$

$$(e) (4x^2 + 4nx + n^2 - n + 8)2^{n-2}e^{2x}$$

$$(f) 2^n x^2 \sin(2x + n\frac{\pi}{2}) + n2^n x \sin(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}) + n(n-1)2^{n-2} \sin(2x + (n-2)\frac{\pi}{2})$$

13. Đạo hàm cấp n

$$(a) \frac{1}{4} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right) \quad (b) \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x-1)^{n+1}} \text{ với } (n \geq 2)$$

$$(c) \frac{20(-1)^n n!}{(x+4)^{n+1}} \text{ với } (n \geq 2)$$

$$(d) v^{(n)}(x) = \frac{(1+x)(2n-1)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} + \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} \text{ với } (n \geq 2)$$

16. Hệ số góc tại điểm ứng với tham số t

$$(a) -\operatorname{tg} t \quad (b) 1 \quad (c) 0$$

$$(d) y'(x) = \frac{3(1+t)}{2}, y''(x) = \frac{3}{4(1-t)^2}, y'''(x) = \frac{3}{4(1-t)^4}$$

21. Tồn tại $c \in (a, b)$ để $e^b + e^a = 2e^c$.

22. (a) Hàm đạt cực đại tại $x = \frac{-8}{27}$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$

(b) Hàm đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$

$$23. \max f = 2, \quad \min f = \sqrt[3]{2}$$

24. **Hướng dẫn:** Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất hàm $f = x^n + (1-x)^n$ trên $[0, 1]$

26. **Hướng dẫn:** Xét cực trị hàm

$$f(x) = x^n + 1 - \frac{(x+1)^n}{2^{n-1}}$$

trên $(0, +\infty)$.

27. (a) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n+1})$
 (b) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
 (c) $\frac{1}{3x-1} = -1 - x - 3^2x^2 - \cdots - 3^n x^n + o(x^n)$
 (d) $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{6} \left(3 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots + (2^{-n} + 2(-1)^n)x^n \right) + o(x^n)$

28. (a) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
 (b) $\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$

29. (a) $(x-2)^4 + 3(x-2)^3 - 5(x-2) + 7$
 (b) $-2(x-2)^4 - 5(x-2)^3 + 4(x-2) - 1$

31. (a) $-\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{2}$
 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$
 (e) e (f) $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$

32. (a) $\frac{1}{6}$ (b) 2
 (c) $-\frac{e}{2}$ (d) $-\frac{2}{3}$

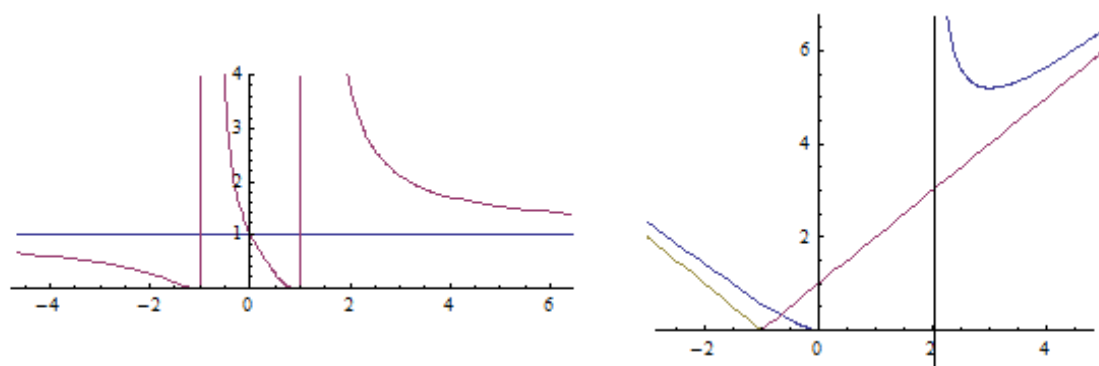
33. Cả hai đều đúng.

34. Kí hiệu $f(x) = x^3 e^x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $h(x) = \arcsin x$.

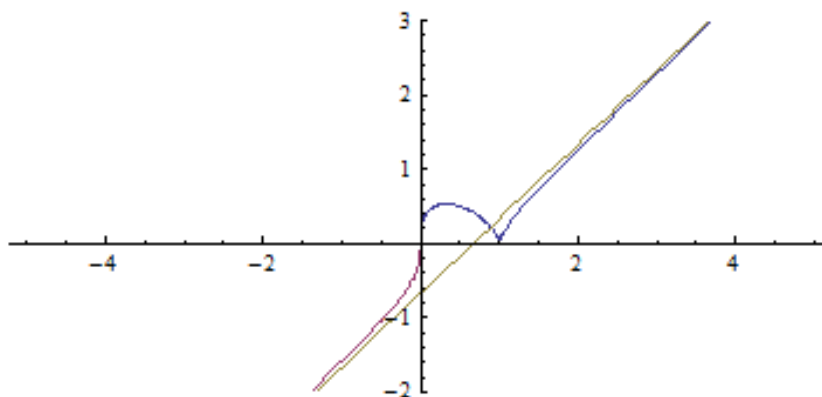
$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2), \quad g^{(n)}(0) = \begin{cases} (n-1)!(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$h^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{(2k)! \cdot (2k-1)!!}{2^k \cdot k!} & \text{nếu } n = 2k+1 \\ 0 & \text{nếu } n = 2k \end{cases}$$

37. Đồ thị

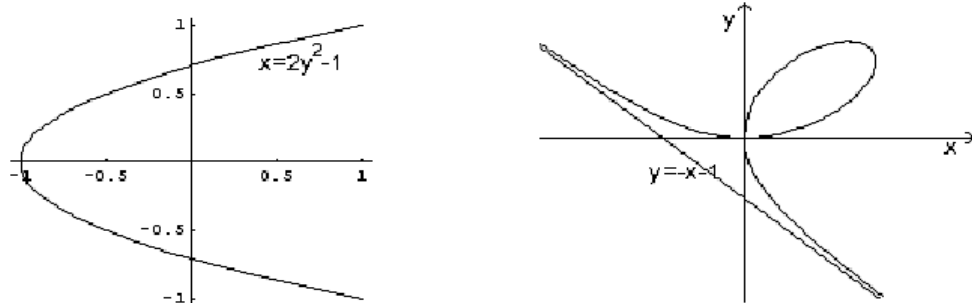


Hình 1: Đồ thị câu (b) và (c)

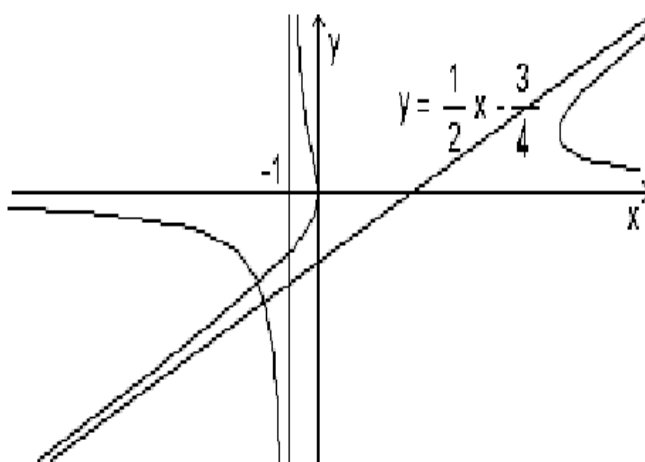


Hình 2: Đồ thị câu (d)

38. Đồ thị

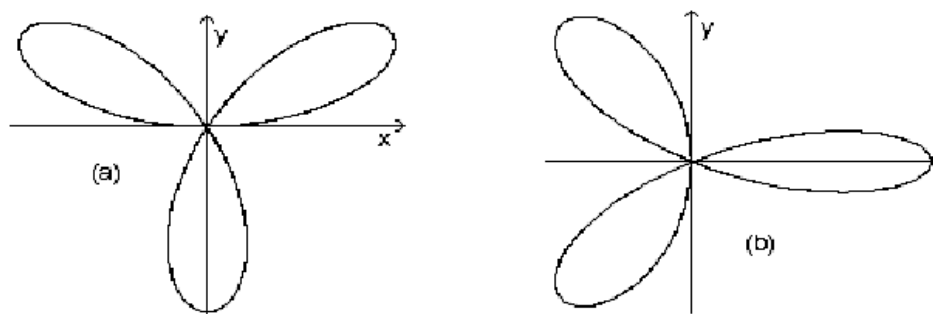


Hình 3: Đồ thị câu (a) và câu (c)

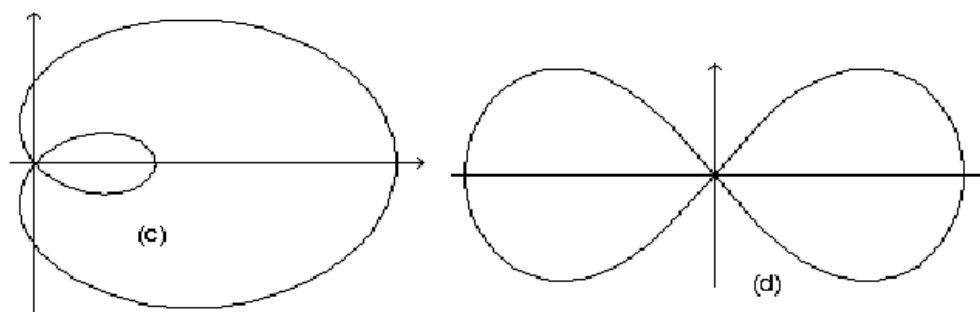


Hình 4: Đồ thị câu (b)

39. Đồ thị

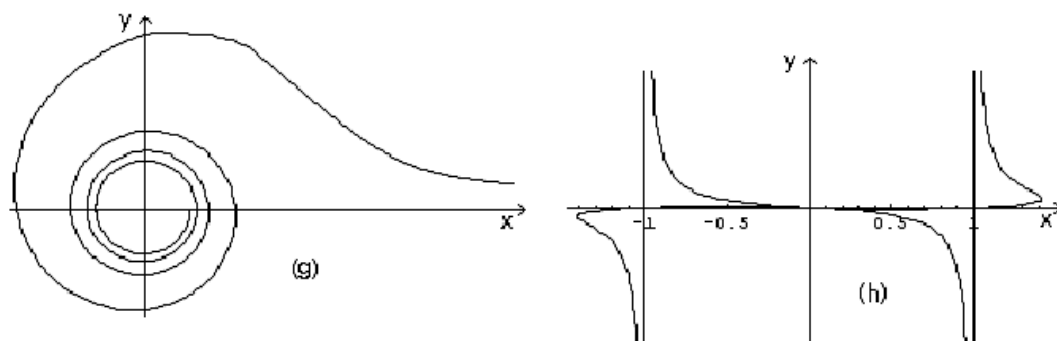


Hình 5: Đồ thị câu (a) và câu (b)

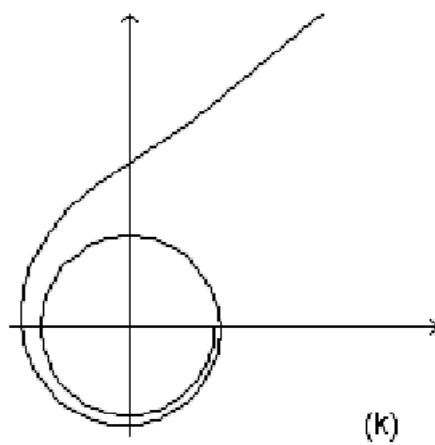


Hình 6: Đồ thị câu (c) và câu (d)

39. Đồ thị (tiếp)



Hình 7: Đồ thị câu (g) và câu (h)



Hình 8: Đồ thị câu (k)

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Tính các tích phân sau trên \mathbb{R} và vẽ đồ thị một nguyên hàm của chúng

$$\int |x|^3 dx, \quad \int e^{-|x|} dx, \quad \int \max\{1, x^2\} dx.$$

2. Tính các tích phân

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \int (x^2 + x + 1)^2 dx & \text{(b)} \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx \\ \text{(c)} \quad \int (\sin 5x - 4e^{4x} + \cos 3x + 2) dx & \text{(d)} \quad \int \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} dx \end{array}$$

3. Đổi biến để tính các tích phân

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \int \frac{3x + 1}{(x + 1)^3} dx & \text{(b)} \quad \int (4x + 1)^9 dx \\ \text{(c)} \quad \int x^3 \sqrt{x^4 + 2} dx & \text{(d)} \quad \int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x} dx \\ \text{(e)} \quad \int (3 \cos x + 1)^2 \sin x dx & \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x(x + 1)}} \end{array}$$

4. Tính các tích phân

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \int \frac{1}{\sin x} dx & \text{(b)} \quad \int \frac{1}{\cos x} dx \\ \text{(c)} \quad \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 1} dx & \text{(d)} \quad \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx \\ \text{(e)} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} & \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} \end{array}$$

5. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

(a) $\int \ln x \, dx$

(b) $\int x^3 \ln x \, dx$

(c) $\int (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x \, dx$

(d) $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

(e) $\int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \, dx$

(f) $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

(g) $\int x^5 e^{x^2} \, dx$

(h) $\int \cos(\ln x) \, dx$

6. Tính các tích phân

(a) $\int \frac{x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

(b) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

(c) $\int \frac{x^2}{x^6 + 2x^3 + 3} \, dx$

(d) $\int \frac{(x^5 + 1) \, dx}{x^4 - 8x^2 + 16}$

(e) $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} \, dx$

(f) $\int \frac{x^4 \, dx}{x^4 - 16}$

(g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

(h) $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

(k) $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} \, dx$

7. Tính tích phân các hàm lượng giác

(a) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

(b) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

(c) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

(d) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$

(e) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$

(f) $\int \cot^6 x \, dx$

8. Tính các tích phân xác định

$$(a) \int_0^4 |x - 2| dx$$

$$(b) \int_0^1 |x^2 - 2x + m| dx$$

$$(c) \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$$

$$(d) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$(e) \int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}$$

$$(f) \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$$

9. Bằng phương pháp đổi biến và tích phân từng phần hãy tính các tích phân sau

$$(a) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$(b) \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$$

$$(c) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(d) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$(e) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$(f) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(g) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$(h) \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$(k) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$(l) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$(m) \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx$$

10. Chứng minh rằng phương trình $a \sin 2x + b \sin 3x + c \cos 4x + d \cos 5x = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c, d .

11. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $[-a, a]$, thì

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

12. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-a, a]$ thì

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Áp dụng để tính $\int_{-1}^1 \frac{x \cos x}{x^2 + 1} dx$.

13. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

14. Cho $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thoả mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hãy tính

$$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

15. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và thoả mãn $f(a+b-x) = f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$, khi đó

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

16. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T , liên tục trên \mathbb{R} , khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Áp dụng để tính $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin(3x + \sin 4x) dx$.

17. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ chẵn, liên tục trên \mathbb{R} , khi đó với mọi $a > 0$

$$\int_{-b}^b \frac{f(x) dx}{a^x + 1} = \int_0^b f(x) dx.$$

Áp dụng để tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+2^x} |\sin x| dx$.

18. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm bị chặn, lồi lên trên $[a, b]$, khi đó

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

19. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

Áp dụng để tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\cos x + \sin x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos x + \sin x}.$

20. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

21. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

Áp dụng để tính $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x + 1}.$

22. Cho f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Hãy tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx.$$

23. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx} dx}{1 + e^{-x}}$$

24. Chứng minh rằng

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

25. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$ và $f(1) - f(0) = 1$. Chứng minh rằng $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

26. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $f(1) = f(0) = 0$. Gọi $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$. Chứng minh rằng $\int_0^1 |f(x)| dx \leq \frac{M}{4}$.

27. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

(a) $\int_0^1 x \ln^2 x dx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{1 + x^2}$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$

(e) $\int_1^e \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x} dx$

(f) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}} dx$

28. Xét sự hội tụ, phân kì của các tích phân suy rộng sau

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$

(c) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos x) dx}{x^\alpha}$

(e) $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^\alpha x}$

(f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$

(g) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$

(h) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

(i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

29. Chứng minh rằng tích phân sau (hàm Beta) hội tụ với mọi $x > 0, y > 0$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

30. Ứng dụng tích phân để tính các giới hạn

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n})$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right)$

31. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, x = y^2$.

32. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $x + 2y^2 = 0, x + 3y^2 = 1$.

33. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 3$.

34. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

35. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi một cung xicloit và trục hoành

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

36. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường Cacdiôt (cho trong hệ tọa độ cực)

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

37. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường $r = a \sin 3\varphi$ (cho trong hệ tọa độ cực).

38. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường $r = a(1 - \cos \varphi)$ và đường tròn $r = a$.

39. Tính thể tích của Elipxôid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

40. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt parabolôit và mặt nón

$$2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \quad z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

41. Tính thể tích miền nằm trong hình trụ và nằm dưới mặt phẳng đi qua tâm đáy, mặt phẳng đó có 1 điểm chung duy nhất với đáy trên. (Đáy có bán kính R và chiều cao hình trụ bằng h).

42. Tính thể tích miền nằm trong hai hình trụ

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

43. Tính thể tích chỏm cầu, biết bán kính hình cầu là R và chiều cao của chỏm cầu bằng $h = R - a$, ($a \leq x \leq R$)

44. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay parabol ($x = y^2, 0 < x < 1$) quay quanh 2 trục Ox và Oy .

45. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay $\sin x, 0 \leq x \leq \pi$ quanh các trục Ox và Oy .

46. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay một nhịp đường cong xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ quanh trục Ox .

47. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay một nhịp đường cong xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ xung quanh trục đối xứng của nó.

48. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi đường cong $x^4 + y^4 = a^2 x^2$ khi quay quanh trục Ox .

49. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi đường cong $x^4 + y^4 = x^3$ khi quay quanh trục Ox .
50. Tính độ dài cung đường cong $y^2 = x^3$ từ điểm $A(0, 0)$ đến điểm $B(1, 1)$.
51. Tính độ dài cung đường cong $y = 1 - \ln \cos x$ với $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
52. Tính độ dài cung parabol $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$
53. Tính độ dài cung $y = \ln(1 - x^2)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
54. Tính độ dài đường cong

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0).$$

55. Tính độ dài đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ với $a > 0$.
56. Tính độ dài đường cong cho trong hệ tọa độ cực $r = 2a(\sin \varphi + \cos \varphi)$ với $a > 0$.
57. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ xung quanh trục Ox .
58. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay đường cong

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0)$$

quanh trục Ox .

59. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay một nhịp đường cong xiclôit $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ xung quanh trục Ox .

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. $\int |x|^3 dx = \frac{|x|x^3}{4} + C$

$$\int e^{-|x|} dx = F(x) + C, \text{ trong đó } F(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ e^x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$\int \max\{1, x^2\} dx = G(x) + C, \text{ trong đó } G(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2}{3} & \text{nếu } x \geq 1 \\ x & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ \frac{x^3-2}{3} & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$$

2. (a) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + x + C$ (b) $\lg x - x + C$

(d) $\ln(\ln(\ln x)) + C$

3. (a) $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1}$ (b) $\frac{(4x+1)^{10}}{40} + C$

(c) $\frac{\sqrt{(x^4+2)^3}}{6} + C$ (d) $\frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x + C$

(e) $-\frac{(3 \cos x + 1)^3}{9} + C$

(f) Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

Hướng dẫn: Với $x \in (0, +\infty)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}} = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C$$

Với $x \in (-\infty, -1)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1 + (\sqrt{-x-1})^2}} = -2 \ln(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}) + C$$

Gộp lại $I = 2 \operatorname{sign} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C$ trên miền $(0, +\infty) \cup (-\infty, -1)$

$$4. (a) \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \quad (b) \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + C$$

$$(c) \frac{1}{4} \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + C \quad (d) \sqrt{4 - x^2} + 2 \ln x - 2 \ln(2 + \sqrt{4 - x^2}) + C$$

Hướng dẫn: Đặt $t = 4 - x^2$

$$(e) \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} + C$$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4}$

$$(f) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$$

5. Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

$$(a) \quad x \ln x - x + C \quad (b) \quad \frac{x^4}{16}(4 \ln x - 1)$$

$$(c) \quad (x + \frac{x^3}{3}) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}(x^2 + 2 \ln(1 + x^2)) \quad (d) \quad 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}$$

$$(e) \quad x \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2}$$

$$(f) \quad \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13}(2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C$$

$$(g) \quad \int x^5 e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$$

$$(h) \quad \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

$$6. (a) \quad \frac{2-x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C \quad (b) \quad \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$$

$$(c) \quad \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^3+1}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}} + C$$

(d) **Hướng dẫn:**

$$\frac{(x^5 + 1)}{x^4 - 8x^2 + 16} = x - \frac{31}{16(2+x)^2} + \frac{129}{32(2+x)} + \frac{33}{16(x-2)^2} + \frac{127}{32(x-2)}$$

$$(e) \quad \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{x} + C$$

$$(f) \int \frac{x^4 dx}{x^4 - 16} = x + \frac{1}{2} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \ln \frac{x-2}{x+2} \right) + C$$

$$(g) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C$$

$$(h) \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}x) - \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}x)) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + 1 + \sqrt{2}x}{x^2 + 1 - \sqrt{2}x} + C$$

$$(i) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

Hướng dẫn: Đặt $u = \frac{x+1}{x-1}$, đưa về tính $-\frac{1}{2} \int u^{-\frac{2}{3}} du$

$$(k) I = \int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13 \arcsin(x-3) + C$$

Hướng dẫn: $I = \int \frac{-3d(-x^2+6x-8)}{2\sqrt{-x^2+6x-8}} + \int \frac{13dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$

$$7. (a) \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$$

$$(c) \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$$

$$(d) -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}$$

$$(e) \cos x + \frac{2}{\cos x} + C$$

$$(f) -\frac{1}{5 \operatorname{tg}^5 x} + \frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} - x + C$$

$$8. (a) \int_0^4 |x-2| dx = 4$$

Hướng dẫn: $\int_0^4 |x-2| dx = \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx$

(b) **Hướng dẫn:** Trên đoạn $[0, 1]$, hàm $f(x) = x^2 - 2x + m$ luôn cùng dấu nếu $m > 1$ hoặc $m < 0$. Trường hợp trường hợp $0 \leq m \leq 1$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, 1 - \sqrt{1-m}) \quad \text{và} \quad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in (1 - \sqrt{1-m}, 1)$$

$$(c) 2$$

$$(d) \ln 2$$

$$(e) \frac{\pi}{8}$$

$$(f) \frac{14}{15}$$

$$9. \text{ (a) } 2 - \frac{\pi}{2} \quad (t = e^x - 1) \quad (b) \quad = \int_0^1 \sqrt{1 - (x - 1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(c) \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Hướng dẫn: Kí hiệu I là tích phân cần tính, đổi biến $x = \operatorname{tg} t$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t + \cos t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t + \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4}) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sqrt{2} \sin t) dt.$$

Đổi biến tiếp $t = \frac{\pi}{2} - u$, khi đó $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2} \cos t) dt$, suy ra $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

$$(d) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x = \tan t) \quad (e) \quad \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad (x = \sin t)$$

$$(f) \quad \frac{\pi}{16} \quad (x = \sin t) \quad (g) \quad \pi\sqrt{2} - 4 \quad (= 2 \int_0^1 \arcsin x d(\sqrt{1+x}))$$

$$(h) \quad e - 2 \quad (i) \quad \pi - 2$$

$$(k) \quad \frac{4\pi}{3} - 2 \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \quad (l) \quad \frac{5\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{\ln 3}{2}$$

13. **Hướng dẫn:** Đổi biến $a + b - x = t$.

$$14. \quad I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = 6.$$

Hướng dẫn: Đặt $I_1 = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx$ và đổi biến $x = -t$. Suy ra

$$I = I_1 + I_2 = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx.$$

$$16. \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 200\sqrt{2}, \quad \int_0^{2\pi} \sin(3x + \sin 4x) dx = 0.$$

$$17. \text{Đổi biến } x = -t \Rightarrow \text{đ.p.c.m.} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+2^x} |\sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \pi - 2.$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\cos x + \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos x + \sin x} = \frac{\pi - 1}{4}$$

$$21. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x + 1} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$22. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx = L$$

Hướng dẫn: Đổi biến và dùng quy tắc Lôpitan $\int_0^1 f(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx} dx}{1 + e^{-x}} = 0$$

Hướng dẫn: Đặt $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx} dx}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - e^{1-n}}{n-1} - I_{n-1}$. Dãy $\{I_n\}$ đơn điệu giảm.

$$24. \text{Hướng dẫn: Đặt } p = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, q = \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ việc tích phân 2 vế bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\frac{f}{p} \cdot \frac{g}{q} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{f^2}{p^2} + \frac{g^2}{q^2} \right).$$

$$25. \text{Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức trong bài 24. cho 2 hàm } f' \text{ và } g \equiv 1.$$

26. **Hướng dẫn:** Áp dụng công thức Lagrange cho hàm f ta có thể c.m. các bất đẳng thức $|f(x)| \leq Mx$ trên $[0, \frac{1}{2}]$, và $|f(x)| \leq M(1-x)$ trên $[\frac{1}{2}, 1]$. Suy ra

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} Mx dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 M(1-x) dx = \frac{M}{4}.$$

27. Các tích phân đều hội tụ và kết quả

- | | |
|-------------------|---|
| (a) $\frac{1}{4}$ | (b) 0 |
| (c) $1 - \ln 2$ | (d) $\frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{4}$ |
| (e) $\frac{3}{2}$ | (f) $\frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})$ |

28. (a) Phân kì (b) Hội tụ (c) Hội tụ
- (d) Hội tụ nếu $\alpha < 3$ và phân kì nếu $\alpha \geq 3$.
- (e) Hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kì nếu $\alpha \geq 1$.
- (f) Hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kì nếu $\alpha \leq 1$.
- (g) Tích phân $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$ hội tụ.

Hướng dẫn: Xét tích phân $\int_1^b \sin(x^2) dx = \int_1^{b^2} \frac{\sin(t) dt}{2\sqrt{t}}$ rồi tính tiếp bằng tích phân từng phần.

- (h) Phân kì (i) Hội tụ.

30. (a) $\frac{1}{p+1}$ (b) $\frac{2}{3}$
- (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 1.

31. $S = \frac{1}{3}$

32. $S = 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy = \frac{4}{3}$

$$33. \quad S = \frac{1}{3} \left(\sqrt{2} + 9 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$34. \quad \pi ab$$

$$35. \quad 12\pi$$

$$36. \quad 3a^2\pi$$

$$37. \quad \frac{a^2\pi}{2}$$

$$38. \quad \left(\frac{5\pi}{4} - 2 \right) a^2$$

$$39. \quad V = \frac{4\pi abc}{3}$$

$$40. \quad V = \frac{5\pi}{2}$$

$$41. \quad V = \frac{2R^2h}{3}$$

$$42. \quad V = \frac{16a^3}{3}.$$

$$43. \quad \text{Tính thể tích chòm cầu, chiều cao của chòm cầu bằng } h = R - a \quad (a \leq x \leq R)$$

$$V = \pi \left(\frac{2R^3}{3} + \frac{a^3}{3} - aR^2 \right) = \frac{(3R - h)h^2\pi}{3}$$

$$45. \quad V_x = \frac{\pi^2}{2}, \quad V_y = 2\pi^2$$

$$47. \quad V = \frac{3a^3\pi^3}{2} - \frac{8a^3\pi}{3}$$

$$48. \quad V = \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$49. \quad V = \frac{\pi^2}{16}$$

$$50. \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

$$51. \frac{\ln 3}{2}$$

$$52. \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$$

$$53. \ln 3 - \frac{1}{2}$$

$$54. 6a$$

$$55. 16a$$

$$56. 2\sqrt{2}a\pi$$

Nhận xét rằng $r = 2a(\sin \varphi + \cos \varphi)$ là đường tròn đường kính $2\sqrt{2}a$

$$57. S = \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \right)$$

$$58. S = \frac{12a^2\pi}{5}$$

$$59. S = \frac{64a^2\pi}{3}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Chứng minh rằng các chuỗi sau hội tụ và tính tổng của chuỗi

$$(a) \quad \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$(b) \quad \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)(2n+2)}$$

$$(c) \quad \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

2. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^3 + 4n^2 - 5}}$$

$$(d) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 - 2}$$

$$(e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n+2}{3n}$$

$$(f) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$(g) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

$$(h) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln^2 n}$$

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$$

$$(k) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$$

3. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^2 n + 2)}$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^2 n + 2)}$$

4. Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} & \text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2} \\ \text{(e)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right) \end{array}$$

5. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

6. Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ hoặc phân kì của các chuỗi

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n - \sqrt{n})} \\ \text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})} \end{array}$$

7. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

8. Xét sự hội tụ đều của các dãy hàm

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1} & \text{trên } 0 \leq x \leq 1 \\ \text{(b)} \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n & \text{trên } -\infty < x < +\infty \\ \text{(c)} \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} & \text{trên } 0 < x < +\infty \\ \text{(d)} \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{trên } -\infty < x < +\infty \end{array}$$

9. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 1$$

10. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ hội tụ đều trên $[1, +\infty)$ nhưng không hội tụ đều trên khoảng $[0, +\infty)$

11. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} \ln x$ hội tụ đều trên $(0, 1)$ và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \ln x$ không hội tụ đều trên khoảng đó.

12. Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

hội tụ đều trên khoảng $[0, +\infty)$

13. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

Tổng của chuỗi có liên tục, khả vi trên miền hội tụ của chuỗi không?

14. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} (tgx)^n \end{aligned}$$

15. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n - 3^n} & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)} \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{x^n}{n} & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n e^n} x^n \\ \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n - n^4} & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n - n} \end{array}$$

16. Tìm miền hội tụ của các chuỗi

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n} & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0) \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)^3 \quad (x > 0) & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{nx} \quad (x > 0) \\ \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[3]{nx}} \quad (x > 0) & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n} x^n \end{array}$$

17. Chứng minh rằng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(1 + e^x)^3 = 8 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1} + 4^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

18. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)}$$

19. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n-1)}}{(n-1)!}$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

20. Khai triển các hàm sau thành chuỗi MacLaurin

$$(a) f(x) = (x^2 + x)e^x$$

$$(b) g(x) = e^{-x^2}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^8}{1-x}$$

$$(d) g(x) = \cos^2 x$$

$$(e) u(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(f) v(x) = \sin^3 x$$

21. Sử dụng khai triển Taylor các hàm thích hợp để tính tổng các chuỗi số

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots$$

22. Tính tổng của chuỗi

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{7.8.9} + \dots$$

23. Sử dụng khai triển hàm thành chuỗi, hãy tính gần đúng

$$(a) \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{với độ chính xác } 10^{-4}$$

$$(b) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{với độ chính xác } 10^{-4}$$

24. Khai triển Fourier hàm $f(x) = \pi - x$ theo các hàm sin trên đoạn $[0, \pi]$.
25. Khai triển Fourier hàm $f(x) = x^2$ theo các cosin trên đoạn $[-\pi, \pi]$.
26. Khai triển Fourier hàm $f(x) = x^2$ theo cả sin và cosin trên đoạn $[0, 2\pi]$.
27. Khai triển Fourier hàm $f(x) = e^x$ theo cả sin và cosin trên đoạn $[-1, 1]$.
28. Áp dụng khai triển Fourier các hàm thích hợp để tính tổng các chuỗi số

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. (a) $\frac{1}{2}$
 (b) $\frac{1}{4}$
 (c) $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$

2. (a) Hội tụ (b) Phân kì
 (c) Hội tụ (d) Hội tụ
 (e) Phân kì (f) Hội tụ
 (g) Phân kì (h) Phân kì
 (i) Hội tụ (k) Hội tụ

3. (a) Phân kì với $x \neq k\pi$ (b) Phân kì
 (c) Hội tụ (d) Phân kì

4. (a) Hội tụ (b) Hội tụ
 (c) Hội tụ (d) Hội tụ

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ phân kì

Hướng dẫn: Ta có

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{n} - (-1)^n)}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}.$$

Áp dụng định lí Leibnitz cho chuỗi thứ nhất.

- (f) Hội tụ

5. Hội tụ.

Hướng dẫn: Sử dụng định lí Leibnitz.

6. (a) Hội tụ tuyệt đối
 (b) Hội tụ tuyệt đối

7. Phân kì
8. (a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ hội tụ đều đến 0 trên $[0, 1]$
 (b) $f_n(x) = \frac{\arctg x^n}{n}$ hội tụ đều đến 0 trên \mathbb{R}
 (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ hội tụ đến x trên \mathbb{R} nhưng không đều.
 (d) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ hội tụ đến e^x trên \mathbb{R} nhưng không đều.
9. **Hướng dẫn:** $\int_0^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx + \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx = I_1 + I_2$
 Dễ dàng chứng minh $\lim I_1 = 0$. Mặt khác $\frac{x^n}{1+x^n}$ hội tụ đều trên $[1+\varepsilon, 2]$ tới 1. Suy ra điều phải chứng minh.
10. **Hướng dẫn:** Sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass.
11. **Hướng dẫn:** Tổng riêng của chuỗi thứ nhất $S_{1n} = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x} x \ln x$ hội tụ đều trên $(0, 1)$ tới $\frac{x \ln x}{1+x}$
 Tổng riêng của chuỗi thứ hai $S_{2n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} x \ln x \rightarrow \frac{x \ln x}{1-x}$ không đều trên $(0, 1)$. Chẳng hạn chọn $x_n = \frac{n-1}{n}$, khi đó $\left(S_{2n} - \frac{x \ln x}{1-x} \right) \Big|_{x=x_n} \not\rightarrow 0$.
13. **Hướng dẫn:** Chuỗi hội tụ đều trên các khoảng $(-\infty, -1-\varepsilon)$ và $(1+\varepsilon, +\infty)$, suy ra tổng của chuỗi liên tục và khả vi trên $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$.
14. (a) Miền hội tụ $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
 (b) Miền hội tụ $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{tg} x \leq 1\}$
15. (a) $-5 < x < 5$ (b) $-1 \leq x \leq 1$
 (c) $-1 \leq x \leq 1$ (d) $-e < x < e$
 (e) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ (f) $-2 < x < 2$
16. (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \frac{1}{2}\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \max\{a, b\}\}$
 (c) $\forall x > 0$ (d) $\forall x > 0$
 (e) $\forall x > 0$ (f) $-1 < x < 1$

18. Miền hội tụ $-1 \leq x \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)} = \begin{cases} (x+1) \ln(x+1) - x & \text{nếu } -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$$

19. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad \forall |x| < 1$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad \forall |x| < 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n-1)}}{(n-1)!} = e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \forall |x| < 1$

20. (a) $(x^2 + x)e^x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) x^{n+1}$

(b) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

(c) $\frac{x^8}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+8}$

(d) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{2n}}{2 \cdot (2n)!}$

(e) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(f) $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3 - 3^{2n+1}) x^{2n+1}}{4 \cdot (2n+1)!}$

21. (a) $\ln 2$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) \sqrt{e}

22. $\ln 2 - \frac{1}{2}$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin nx}{n}$$

$$25. \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$26. \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right)$$

$$27. \frac{e^2 - 1}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n n\pi \sin n\pi x}{1 + n^2\pi^2} \right) \right]$$

$$28. (a) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Hướng dẫn: Khai triển Fourier hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

PHỤ LỤC: CÁC ĐỀ THI GIẢI TÍCH I

ĐỀ SỐ 1

Câu 1 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$

Tìm a, b, c để $f(x)$ khả vi trên \mathbb{R} .

Câu 2 Tính đạo hàm cấp n hàm số $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0+0} (e^x - 1)^{\sin x}$.

Câu 4 Tính tích phân

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn giới hạn bởi đường cong

$$x^2 - 2|xy| + 5y^2 = 1.$$

Câu 6 Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos 2a_n + \ln(e^{-1} + |a_n|) \right)$$

cũng hội tụ tuyệt đối.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ ax^3 + bx^2 + c & \text{nếu } x \leq 0. \end{cases}$

Tìm a, b, c để $f(x)$ khả vi trên \mathbb{R} .

Câu 2 Tính đạo hàm cấp n hàm số $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0+0} (e^x - 1)^{\ln(1+x)}$.

Câu 4 Tính tích phân $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn giới hạn bởi đường cong

$$5x^2 + 2|xy| + y^2 = 1.$$

Câu 6 Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos 2a_n - \ln(e + a_n) \right) \text{ hội tụ tuyệt đối.}$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n+1}$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1 Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_0 > 0$ tùy ý, $x_n = \ln(1 + x_{n-1})$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$.

Câu 3 Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x$. Hãy tính $f^{(8)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 4 Tính một nguyên hàm của $f(x) = x|x-1|$ trên \mathbb{R} .

Câu 5 Cho dãy số $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng tổng tích phân của hàm số thích hợp để tìm $\lim u_n$.

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(3^{\frac{1}{n}} - 1)}{3 + \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right)^n$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n} x^{n+1}}{n!}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1 Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_0 > 0$ tùy ý, $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}} - 1$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x - \sin x}$.

Câu 3 Cho hàm số $f(x) = \cos^3 x$. Hãy tính $f^{(7)}(\frac{\pi}{2})$.

Câu 4 Tính một nguyên hàm của $f(x) = x|x^3 - 1|$ trên \mathbb{R} .

Câu 5 Cho dãy $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 + k^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng tổng tích phân của hàm số thích hợp để tìm $\lim u_n$.

Câu 6 Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 1)$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1 Định nghĩa đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp cao hàm số tại một điểm. Áp dụng để tính $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$ cho hàm số $f(x) = |x - 1|^3$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x - \operatorname{tg} x}$.

Câu 3 Cho hàm $f(x) = 1 + \sin(x^2)$. Chứng minh rằng hàm số

$$g(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

đơn điệu tăng trên khoảng $(0, +\infty)$.

Câu 4 Tính tích phân $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

Câu 5 Tính tích phân $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 6}}$.

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \frac{1}{n}}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1 Định nghĩa hàm khả vi. Chứng minh rằng hàm $f(x) = |x - 1| \sin \pi x$ khả vi tại $x = 1$ và hàm $g(x) = |x - 1| \cos \pi x$ không khả vi tại $x = 1$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$.

Câu 3 Cho hàm $f(x) = 1 + \cos(x^2)$. Chứng minh rằng hàm số

$$g(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

đơn điệu tăng trên khoảng $(0, +\infty)$

Câu 4 Tính tích phân $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

Câu 5 Tính tích phân $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \arctg \frac{1}{n}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} (1+3^n)x^n$.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1 Phát biểu định lí Lagrange. Áp dụng để chứng minh hàm số

$$f(x) = \sin^n x$$

($n \in \mathbb{N}^*$) liên tục đều trên \mathbb{R} .

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$.

Câu 3 Cho hàm $y = x^2 \sin 2x$. Hãy tính $y^{(9)}(0)$.

Câu 4 Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Câu 5 Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$, biết $f(a) = f(b) = 0$ và $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Xét dãy số $a_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Câu 6 Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}.$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)x^{2n-1}$.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1 Phát biểu định lí Lagrange. Áp dụng để chứng minh hàm số $f(x) = \cos^n x$ ($n \in \mathbb{N}^*$) liên tục đều trên \mathbb{R}

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 \cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$.

Câu 3 Cho hàm $y = x^2 \cos 2x$. Hãy tính $y^{(8)}(0)$.

Câu 4 Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Câu 5 Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$, biết $f(a) = f(b) = 0$ và $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Xét dãy số $a_n = \int_a^b f(x) \cos nx \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Câu 6 Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}$. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos a_n - 1}{a_n^2}$.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n} x^{n+2}}{(n+1)!}$.

ĐỀ SỐ 9

Câu 1 Chứng minh một dãy số thực hội tụ thì bị chặn. Hãy cho một thí dụ về dãy số thực bị chặn nhưng không hội tụ.

Câu 2 Cho hàm $y = \cos^4 x$. Hãy tính $y^{(10)}(0)$.

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Câu 4 Tính tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$.

Câu 5 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}; \quad z = -1.$$

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{2^n \cdot n!}$.

ĐỀ SỐ 10

Câu 1 Phát biểu và chứng minh tính duy nhất của giới hạn dãy số. Dãy số $u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ hội tụ hay phân kì? Chứng minh.

Câu 2 Cho hàm $y = \sin^4 x$. Hãy tính $y^{(10)}(0)$.

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.

Câu 4 Tính tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{4dx}{x^3+8}$.

Câu 5 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1; \quad z = x^2 + \frac{y^2}{4}; \quad z = -2.$$

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n^2}}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$.

ĐỀ SỐ 11

Câu 1 Cho dãy số thực u_n , $n \in \mathbb{N}^*$ biết $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 Hãy xác định các khoảng đơn điệu và tìm cực trị hàm số

$$y = \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

Câu 3 Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}.$$

Câu 4 Tính tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x^3}.$$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn trong mặt phẳng xOy được giới hạn bởi các đường:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x = 2a \quad (a > 0, b > 0).$$

Câu 6 Phát biểu định lý Leibnitz về sự hội tụ của chuỗi đan dấu. Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + (-1)^{n+1}}$$

hội tụ hay phân kì? Chứng minh.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^{-n})x^{n+2}.$$

ĐỀ SỐ 12

Câu 1 Cho dãy số thực u_n , $n \in \mathbb{N}^*$ biết $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n - 3}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 Hãy xác định các khoảng đơn điệu và tìm cực trị hàm số

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^3}.$$

Câu 3 Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Câu 4 Tính tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{(x+1)^3}.$$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn trong mặt phẳng xOy được giới hạn bởi các đường:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1; \quad y = 2b \quad (a > 0, b > 0).$$

Câu 6 Phát biểu điều kiện cần để chuỗi hội tụ. Áp dụng để tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^{-n})x^{n+1}.$$

ĐỀ SỐ 13**Câu 1** Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+3x}}{\ln(x+1)}$$

Câu 2 Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos 4x)}{x} & \text{nếu } x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \setminus \{0\} \\ a & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Tìm a để $f(x)$ khả vi tại $x = 0$. Tính $f'(0)$.**Câu 3** Tìm một nguyên hàm $\Phi(x)$ của hàm $f(x) = |x| \sin x$ trên \mathbb{R} , thoả mãn $\Phi(0) = 1$.**Câu 4** Sử dụng tổng tích phân của hàm số thích hợp, tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

biết

$$u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Câu 5 Tính tích phân

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Câu 6 Chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$$

hội tụ hay phân kì? Tại sao?

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}.$$

ĐỀ SỐ 14

Câu 1 Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

Câu 2 Chứng minh hàm $f(x) = x^3 + 1 + \ln(x+2)$ đơn điệu tăng trên tập xác định của hàm. Từ đó hãy suy ra phương trình $x^3 + 1 + \ln(x+2) = 0$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 3 Tìm a để $f(x) = |x-1| \cos(x+a)$ khả vi trên \mathbb{R} .

Câu 4 Sử dụng tổng tích phân của hàm số, hãy tìm giới hạn của dãy số

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{3n^2 + k^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Câu 5 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} \quad \text{và} \quad z = 3.$$

Câu 6 Cho dãy số $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ biết $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2 + \cos a_n}$$

hội tụ.

Câu 7 Khai triển hàm $f(x) = x^2 \ln(2+x^2)$ thành chuỗi MacLaurin.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1 Chứng minh rằng nếu dãy số thực $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì dãy hội tụ.

Áp dụng để chứng minh dãy số $u_1 = a > 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, hội tụ. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin^3 x + 2 \cos x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 3 \cos^2 x}.$$

Câu 3 Viết công thức Taylor (dạng Peano) hàm $f(x) = x\sqrt{4 + x^2}$ tại lân cận điểm $x = 0$ đến cấp $n = 5$. Từ đó hãy suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 4 Tính tích phân

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}.$$

Câu 5 Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + |\ln x|)^4}.$$

Câu 6 Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n^2}$$

hội tụ hay phân kì? Tại sao?

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$