Một vài bài hình học quan trọng

I. Phần chung

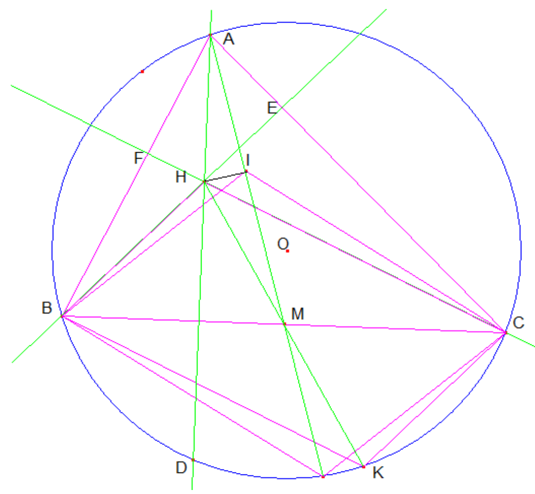
1. **lenh tao vecto, goc**: $\overrightarrow{ABA'}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOBD}$, $\overrightarrow{ABA'B}$, $\widetilde{ABC}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\widetilde{BC}$.

---

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BE và CF, điểm M là trung điểm BC, các điểm D và K lần lượt các các điểm đối xứng của H qua BC và điểm M tương ứng.

   (a) Chứng minh D thuộc đường tròn tâm (O).

   (b) Chứng minh K thuộc đường tròn tâm (O) và AK là đường kính của đường tròn đó.



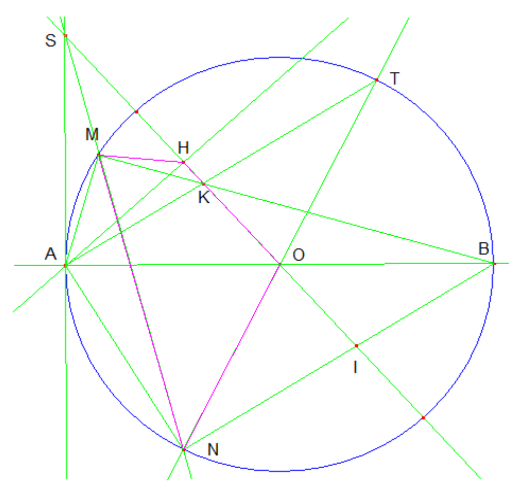
Chứng minh. Hiển nhiên D thuộc đường tròn tâm (O).
Do góc $\widehat{BKC} = \widehat{BHC} = \widehat{BDC}$ nên tứ giác $BCKD$ nội tiếp, K cũng thuộc đường tròn (O). Mặt khác $CK \parallel BH$, do vậy AK là đường kính của đường tròn (O).
Chú ý rằng HO là đường thẳng Euler nên $AH = 2OM$ và AK là đường kính. Ứng dụng vào bài sau

3. Gọi tiếp N là giao điểm của trung tuyến AM và đường tròn (O). (*Khi đó I cũng là giao điểm của trung tuyến AM và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.*) Chứng minh $BI \parallel CN$

   Chứng minh. Từ bt trên suy ra 2 tam giác BHI và CKN đối xứng với nhau qua tâm đối xứng M.

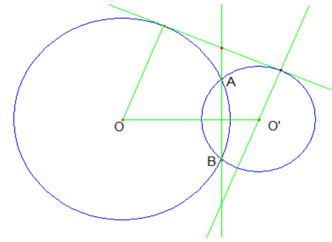
4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, lấy điểm S trên tiếp tuyến Ax. Kẻ cát tuyến bất kì SMN với (O). Đường thẳng BM cắt SO tại K.

   Chứng minh $AK \parallel BN$.
   Chứng minh. Kẻ $AH \perp SO$. Dễ dàng cm $MHON$ là tứ giác nội tiếp vì $SM \cdot SN = SH \cdot SO = SA^2 \Rightarrow \widehat{MHS} = \widehat{MNO}$. Mặt khác $\widehat{MHS} = \widehat{MAK}$ suy ra AK và NO cắt nhau tại điểm T thuộc đường tròn (O). Từ đây suy ra $AK \parallel BN$, đ.p.c.m.



---

5. Trục đẳng phương của 2 đường tròn (O) và (O'). Nếu chúng cắt nhau tại A và B. Khi đó đường thẳng AB là trục đẳng phương. Phương tích tại mọi điểm trên AB với 2 đường tròn luôn bằng nhau. Đặc biệt trục đẳng phương luôn đi qua trung điểm của đoạn thẳng tiếp tuyến chung với 2 đường tròn.



6. Định lí Menêlêuyt và định lí Ceva

(a) Đường thẳng (d) cắt các cạnh tam giác ABC tại các điểm A', B', C' (thuộc các cạnh BC, CA, AB tương ứng). Khi đó

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1.$$

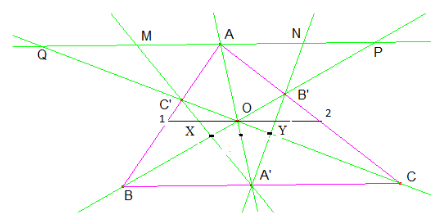
Thật vậy, hình chiếu song song theo phương (d) của 6 điểm trên lên đường thẳng bất kì lần lượt là A_1, B_1, C_1, O, O, O. Khi đó

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} \cdot \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OC_1}} \cdot \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OA_1}} = 1.$$

(b) Ba đường thẳng đi qua các đỉnh A, B, C của tam giác ABC đồng quy tại O và cắt các cạnh BC, CA, AB tại các điểm A', B', C' tương ứng. Khi đó

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1.$$

Chứng minh. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC.
Ta có $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{AM}{BA'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CA'}{AN} = -\frac{AM}{AN}$. Ta sẽ chứng minh $AM = AN$.
Thật vậy $\frac{AM}{BA'} = \frac{AQ}{BC}, \frac{AN}{A'C} = \frac{AP}{BC}$ hay
$AM = \frac{AQ \cdot BA'}{BC}, AN = \frac{AP \cdot A'C}{BC}$.
Sử dụng $\frac{AQ}{A'C} = \frac{AP}{BA'} (= \frac{AO}{OA'})$, suy ra điều phải chứng minh $AM = AN$.



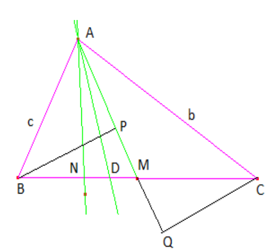
(***Chứng minh ngắn nhất***:
$\frac{C'A}{C'B} = \frac{S_{OAC}}{S_{OBC}}, \frac{A'B}{A'C} = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$ *và* $\frac{B'C}{B'A} = \frac{S_{OBC}}{S_{OAB}}$. *Nhân vế với vế 3 đẳng thức này ta được đ.p.c.m.*)

(*Một bài tập hay: kẻ đường thẳng XOY song song BC. Chứng minh $OX = OY$. Chứng minh tương tự như trên:* $\frac{OX}{A'C} = \frac{O1}{BC}, \frac{OY}{A'B} = \frac{O2}{BC} \Rightarrow OX = OY$, *không cần kẻ đường thẳng song song với BC qua A như trên.*)

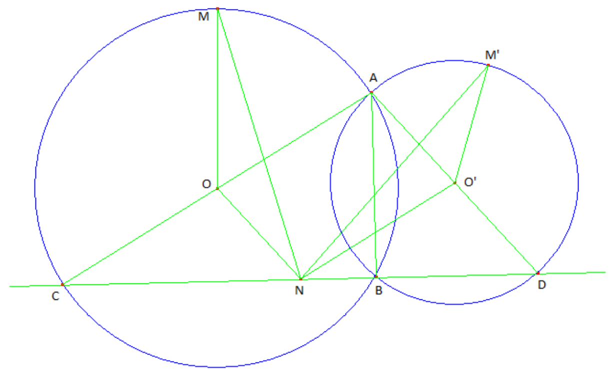
7. Trong tam giác đường thẳng đối xứng với trung tuyến qua phân giác (cùng đỉnh với trung tuyến) được gọi là đường ***đối trung***. Đường đối trung AN (hình vẽ dưới) có tính chất $\frac{NB}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Chứng minh. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC.
Ta có $\frac{NB}{NC} = \frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ACN}} = \frac{c \sin \widehat{BAN}}{b \sin \widehat{CAN}} = \frac{c \sin \widehat{CAM}}{b \sin \widehat{BAM}} = \frac{c\frac{CQ}{b}}{b\frac{BP}{c}} = \frac{c^2}{b^2}$.

Hệ quả: Từ kết quả này và sử dụng định lí Ceva suy ra trong một tam giác 3 đường đối trung đồng quy.



8. (***Thi toán QT***) Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hai điểm M và M' cùng xuất phát từ A chuyển động trên hai đường tròn (O) và (O') tương ứng với vận độ góc như nhau theo hướng ngược nhau. M chuyển động trên (O) theo hướng ngược chiều kim đồng hồ và M' chuyển động trên (O') theo hướng cùng chiều kim đồng hồ. Chứng minh M và M' cùng cách đều một điểm cố dịnh.

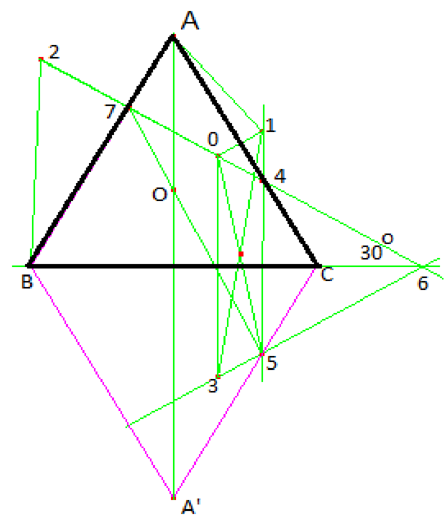


Chứng minh. Gọi N là trung điểm CD (xem hình vẽ). Ta sẽ chứng minh $MN = M'N$.

Thật do 2 tam giác bằng nhau (c.g.c) OMN và $O'M'N$ suy ra điều phải chứng minh.

(*Lưu ý rằng nếu M và M' cùng xuất phát từ A chuyển động cùng chiều trên hai đường tròn với vận tốc góc bằng nhau, khi đó MM' sẽ luôn đi qua điểm cố định B.*)

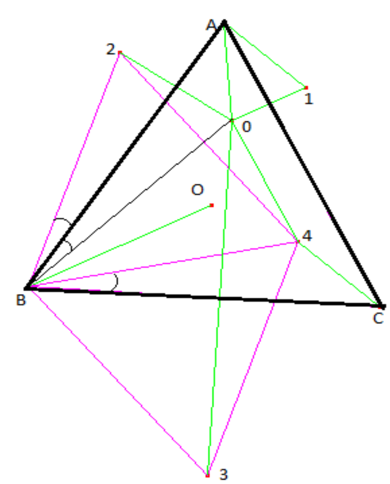
9. (***Toán 10***) Cho tam giác đều ABC tâm O và điểm 0 bất kì. Gọi 1,2,3 là các điểm đối xứng với 0 qua các cạnh tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{01} + \overrightarrow{02} + \overrightarrow{03} = 3\overrightarrow{0O}$.



Chứng minh 1.
Dựa vào hình bên ta dễ dàng chỉ ra các tam giác $014, 036$ là các tam giác đều. Đường thẳng 04 và 35 đối xứng nhau qua BC. Đường thẳng $A4$ và $A'5$ cũng đối xứng nhau qua BC. Suy ra $\overrightarrow{01} + \overrightarrow{03} = \overrightarrow{05}$.
Do $A4 = A'5 = 2A7$, suy ra 57 đi qua O và O là trọng tâm tam giác 025. Vậy

$$\overrightarrow{01} + \overrightarrow{03} + \overrightarrow{02} = 3\overrightarrow{0O}.$$

Chứng minh 2.
Ta sẽ chứng minh 2 tam giác 123 và ABC cùng trọng tâm bằng việc chứng minh $\overrightarrow{1A} + \overrightarrow{2B} + \overrightarrow{3C} = \mathbf{0}$. Dựng điểm 4 đối xứng với 0 qua BO. Dễ dàng chỉ ra các tam giác $B42$ và $B34$ là các tam giác đều. Suy ra $\overrightarrow{2B} = \overrightarrow{43} \Rightarrow \overrightarrow{2B} + \overrightarrow{3C} = \overrightarrow{4C}$ mà $\overrightarrow{A1} = \overrightarrow{4C}$, suy ra $\overrightarrow{2B} + \overrightarrow{3C} + \overrightarrow{1A} = \mathbf{0}$, đ.p.c.m.



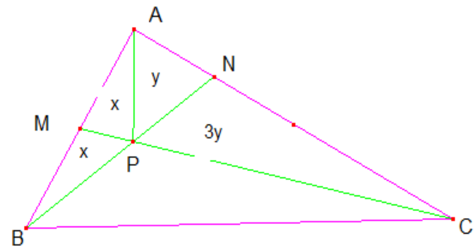
Một dạng khác của bài tập này:

Cho tam giác đều ABC tâm O và điểm D bất kì. Gọi M, N, P là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các cạnh tam giác. Chứng minh trung điểm của OD là trọng tâm tam giác MNP.

I. Hình học lớp 6 - Các bài toán tuyển sinh vào lớp 6

Bài toán 1. Một bài thi tuyển sinh vào lớp 6 (anh Được giới thiệu hôm 15/7/2019). Bài toán sẽ khó với HS cấp I nếu không được luyện tập trước các dạng tương tự.

Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AB, $N \in AC$ sao cho $NC = 3AN$. Điểm P là giao của MC và BN. Tính diện tích tam giác APN theo S, diện tích của tam giác ABC.



Gọi diện tích tam giác ABC bằng S, diện tích tam giác AMP bằng x và diện tích tam giác ANP bằng y (hình bên). Từ giả thiết suy ra $S_{\Delta BMP} = x, S_{\Delta APC} = 4y$. Ta có

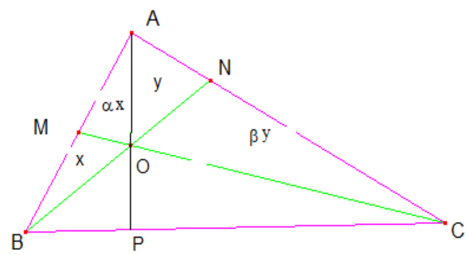
$$\begin{cases} x + 4y = \frac{S}{2} \text{ do } S_{\Delta AMC} = S_{\Delta AMP} + S_{\Delta APC} \\ 2x + y = \frac{S}{4} \text{ do } S_{\Delta ABN} = S_{\Delta APB} + S_{\Delta APN} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3S}{28}.$$

(*Cách khác. Do* $AM = MB, CN = 3AN \Rightarrow S_{APC} = S_{BPC} = 3S_{APB} \Rightarrow 4y = 6x$. *Mặt khác* $8y + 2x = S \Rightarrow y = \frac{3S}{28}$.)

Từ bài toán tuyển sinh vào cấp II ở trên, ta suy ra một cách khác để chứng minh định lí Ceva

Định lí Ceva Ba đường thẳng đi qua các đỉnh A, B, C của tam giác ABC đồng quy tại O và cắt các cạnh AB, AC, BC tại các điểm M, N, P tương ứng. Khi đó

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$



Chứng minh. Gọi diện tích tam giác ABC bằng S, các tỉ số $\frac{MA}{MB} = \alpha, \frac{CN}{NA} = \beta$ và $\frac{BP}{PC} = t$. Khi đó diện tích các tam giác nhỏ $S_{\Delta OMB} = x, S_{\Delta OMA} = \alpha x, S_{\Delta ONA} = y, S_{\Delta ONC} = \beta y$ và

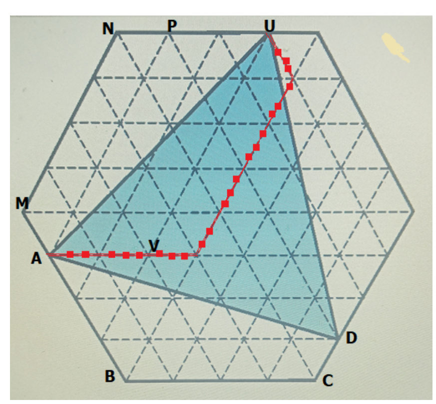
$$\begin{cases} x(1+\alpha) + y = \frac{S}{1+\beta} & \text{khi xét diện tích } \Delta ABN. \\ \alpha x + y(1+\beta) = \frac{\alpha S}{1+\alpha} & \text{khi xét diện tích } \Delta ACM. \end{cases}$$ Suy ra $x = \frac{S}{(1+\alpha)(1+\alpha\beta+\beta)}$ và $y = \frac{\alpha\beta S}{(1+\beta)(1+\alpha\beta+\beta)}$.

Mặt khác 2 tam giác ABO và ACO có chung đáy AO nên tỉ số diện tích giữa chúng bằng tỉ số $\frac{BP}{PC} = t$. Vậy

$$t = \frac{x + \alpha x}{y + \beta y} = \frac{(1+\alpha)x}{(1+\beta)y} = \frac{(1+\alpha)S}{(1+\alpha)(1+\alpha\beta+\beta)} : \frac{\alpha\beta(1+\beta)S}{(1+\beta)(1+\alpha\beta+\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

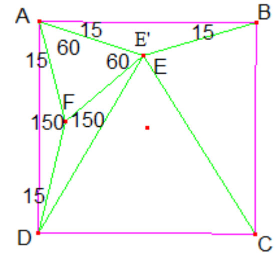
hay $\alpha\beta t = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$, đ.p.c.m. (***Xem chứng minh ngắn và hay hơn ở tr. 2.***)

Bài toán 2. Hình bên là lục giác đều gồm 96 tam giác đều bằng nhau, diện tích mỗi tam giác đều bằng 1. Tính diện tích tam giác được tô đậm.



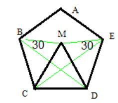
Nhận xét rằng diện tích phần tứ giác không tô màu bằng 19, nếu ta ghép khéo 2 tứ giác này lại thì ta được hình bình hành hụt mất 2 tam giác đều bé (quay tứ giác dưới $ABCD$ quanh A góc 60^0). Vậy diện tích cần tính bằng $96 - 3 \cdot 19 = 39$.
(*Hoặc nhận xét như sau: Diện tích tứ giác AMNU bằng nửa hình bình hành APUV - hình bình hành có diện tích bằng 20 - cộng với hình thang AMNP có diện tích bằng 9.*

II. Hình học lớp 7 - Phương pháp ngược. Cho hình vuông (hình dưới), từ 2 đỉnh liên tiếp A và B dựng các tia tạo với cạnh hv góc 15^0. Chứng minh tam giác tạo thành ECD là tam giác đều.

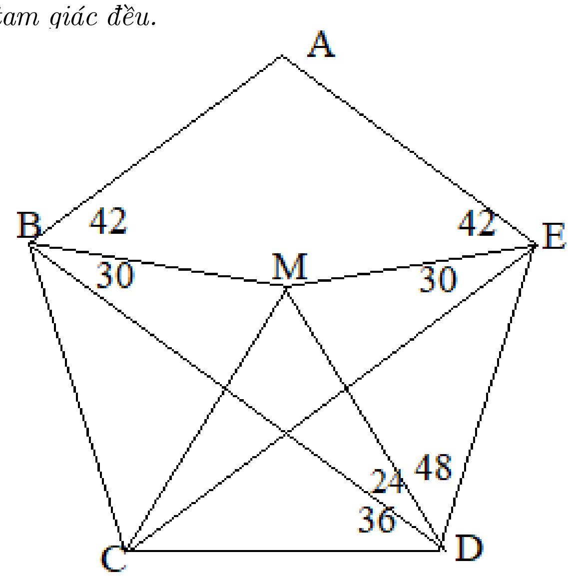


Cách 1. Theo hình bên, ta p.c.m tam giác ECD đều. Dựng điểm F sao cho $\widehat{FAD} = \widehat{FDA} = 15^0$. Khi đó tam giác AEF là tam giác đều. Suy ra $\widehat{EFD} = 150^0$. Từ đó suy ra 2 tam giác AFD và EFD bằng nhau, suy ra đ.p.c.m.

Cách 2. Dùng phương pháp ngược: Dựng tam giác đều $E'CD$. Khi đó $\widehat{E'AB} = \widehat{E'BA} = 15^0$. Do đó $E \equiv E'$, đ.p.c.m.



Mở rộng cho ngũ giác đều. Dựng điểm M : $\widehat{MBD} = \widehat{MEC} = 30^0$ hoặc $\widehat{ABM} = \widehat{AEM} = 42^0$. (Xem hình bên và hình dưới). Khi đó ΔMCD là tam giác đều.



II. Hình học lớp 7

1. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh tam giác MEF là tam giác đều.

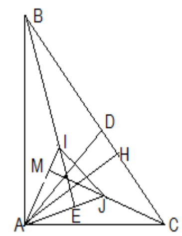
2. Cho tam giác ABC cân tại $A, \widehat{A} = 120^0, BC = 6$cm. Đường vuông góc với AB tại A cắt BC tại D. Tính độ dài BD.

3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$. Trên tia phân giác của góc $\widehat{A}$ lấy điểm E sao cho $AE = AB + AC$. Chứng minh tam giác BCE là tam giác đều.

Bài 3' Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH, phân giác AD. Gọi I, J lần lượt là các giao điểm các đường phân giác của tam giác ABH, ACH; E là giao điểm của đường thẳng BI và AJ. Chứng minh rằng:

a. Tam giác ABE vuông

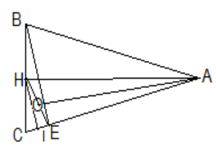
b. IJ vuông góc với AD



Bài 3" Cho tam giác cân ABC, AB = AC, đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AC. Gọi O là trung điểm của EH, I là trung điểm của EC. Chứng minh:

a. IO vuông góc với AH

b. AO vuông góc với BE



Các bài toán về 3 đường cao:
Xét tam giác AIJ có IE và JM là 2 đường cao, suy ra AD là đường cao thứ ba.

Xét tam giác AHO có IO và AE là 2 đường cao, suy ra IH là đường cao thứ ba.

4. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và tia Oz thuộc miền trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$. Qua điểm A thuộc tia Oy, vẽ AH vuông góc với Ox, cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy điểm D sao cho $BD = OA$. Chứng minh tam giác OAD là tam giác cân.

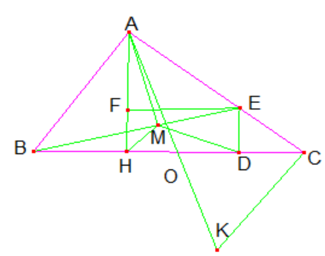
5. Cho góc $\widehat{xOz} = 120^0$, Oy là tia phân giác của góc $\widehat{xOz}$, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$, M là điểm thuộc miền trong góc $\widehat{yOz}$. Vẽ $MA \perp Ox, MB \perp Oy, MC \perp Ot$. Tính độ dài OC theo MA, MB.

5'. Cho tam giác ABC $(AB > AC)$, M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông với phân giác góc $\widehat{A}$ tại H, cắt 2 cạnh tam giác tại E, F. Chứng minh $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$ và $BE = CF$.

6. Cho tam giác ABC cân tại $A, \widehat{A} = 140^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, kẻ tia Cx sao cho $\widehat{ACx} = 110^0$. Gọi D là giao điểm của Cx và BA. Chứng minh $AD = BC$.

6'. Cho tam giác ABC cân tại $A, \widehat{A} = 20^0$. Trên AB lấy điểm E, trên AC lấy điểm F sao cho $\widehat{ACE} = 30^0, \widehat{ABF} = 20^0$. Tính góc $\widehat{BEF}$.

KT. Cho ΔABC vuông tại A $(AB < AC)$, O là trung điểm BC, trên tia đối của OA lấy điểm $K, OK = OA$. Vẽ $AH \perp BC$, trên tia HC lấy $HD = HA$. Kẻ $DE \perp BC, E \in AC$. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta CKA$.



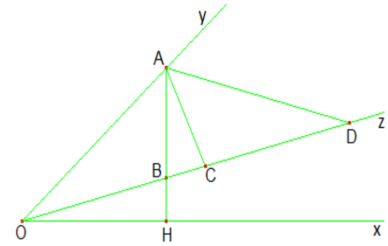
(a) Chứng minh $AB = AE$.

(b) Gọi M là trung điểm BE. Tính số đo $\widehat{CHM}$

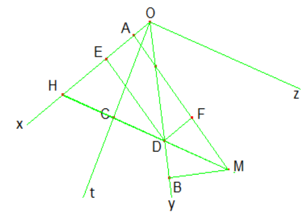
(c) Chứng minh $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

III. Bài giải hình học lớp 7

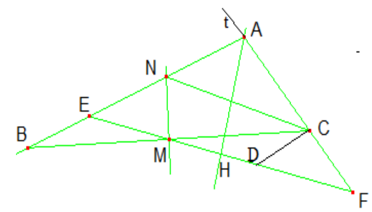
4. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và tia Oz thuộc miền trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$. Qua điểm A thuộc tia Oy, vẽ AH vuông góc với Ox, cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy điểm D sao cho $BD = OA$. Chứng minh tam giác OAD là tam giác cân. ■
Thật vậy, $\widehat{xOz} = \alpha$, chọn $C \in Oz, OA = OC \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. Góc $\widehat{ABC} = 90^0 - \alpha = \widehat{OCA}$. Tam giác ABC cân. Suy ra $\Delta AOC = \Delta DBA$, đ.p.c.m.



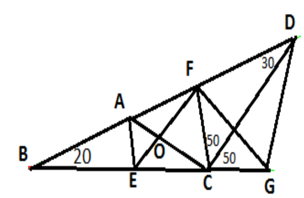
5. Cho góc $\widehat{xOz} = 120^0$, Oy là tia phân giác của góc $\widehat{xOz}$, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$, M là điểm thuộc miền trong góc $\widehat{yOz}$. Vẽ $MA \perp Ox, MB \perp Oy, MC \perp Ot$. Tính độ dài OC theo MA, MB. ■
ΔODH đều, suy ra $OC = DE$. Từ hình bên ta thấy $MA - MB = DE = OC$.



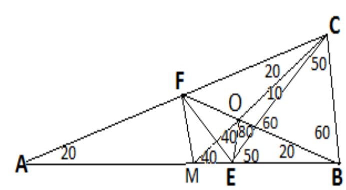
5'. Cho tam giác ABC $(AB > AC)$, M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông với phân giác góc $\widehat{A}$ tại H, cắt 2 cạnh tam giác tại E, F. Chứng minh $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$ và $BE = CF$.
Kẻ $MN \perp BC$. Góc $\widehat{BAt} = \widehat{ANC} + \widehat{ACN}$. Mặt khác $\widehat{BAt} = 2\widehat{AEH}$, $\widehat{ANC} = 2\widehat{B}$, suy ra $\widehat{ACN} = 2\widehat{BME}$, là đ.p. chứng minh $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$. Kẻ CD song song AB, dễ dàng suy ra $BE = CD = CF$.



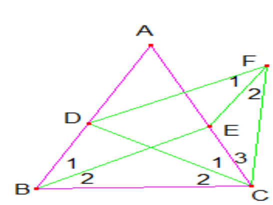
6. Cho tam giác ABC cân tại $A, \widehat{A} = 140^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, kẻ tia Cx sao cho $\widehat{ACx} = 110^0$. Gọi D là giao điểm của Cx và BA. Chứng minh $AD = BC$. ■
Vẽ các $\Delta ABE, BCF$ cân, suy ra các $\Delta OAE, OCF$ là các tam giác đều, suy ra CD là phân giác góc $\widehat{FCG}$ (G là điểm đối xứng với F qua CD). Góc $\widehat{FDC} = 30^0$ nên ΔFDG đều. Mặt khác ΔFEG cân do các góc đáy bằng 40^0. Suy ra $EF = FG = FD$, đ.p.c.m.



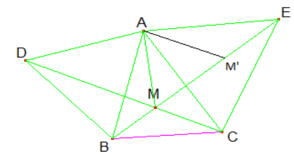
6'. Cho tam giác ABC cân tại $A, \widehat{A} = 20^0$. Trên AB lấy điểm E, trên AC lấy điểm F sao cho $\widehat{ACE} = 30^0, \widehat{ABF} = 20^0$. Tính góc $\widehat{BEF}$. ■
Dựng góc $\widehat{ACM} = 20^0 \Rightarrow \Delta OEM, \Delta OBC$ là các tam giác đều. Góc $\widehat{BEC} = 50^0$, suy ra ΔBCE cân tại B, suy ra tiếp ΔBOE cân tại B hay $\widehat{EOB} = 80^0 \Rightarrow \widehat{EOM} = 40^0$, hay ΔOEM cân tại E. Vậy $\Delta EOF = \Delta EMF$. Suy ra $\widehat{BEF} = 50^0 + 80^0 = 130^0$.



6''. Chứng minh rằng nếu một tam giác có 2 đường phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.
PP phản chứng. Giả sử ΔABC không cân, $\widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow BD > CE$. Dựng hình bình hành $DBEF$ (hình bên), ta có $EF = BD > CE$, suy ra $\widehat{C_3} > \widehat{F_2}$. Mà $\widehat{C_1} > \widehat{F_1}$, suy ra ΔDCF không cân, vô lí với giả thiết ban đầu $CD = BE$.

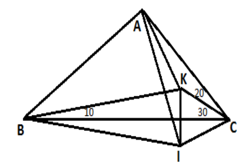


7. Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120^0. Vẽ ở phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE. Gọi M là giao điểm của DC và BE. Chứng minh $\widehat{BMC} = \widehat{AMB} = 120^0$. ■
Xét phép quay quanh A góc 60^0. Chọn M' trên BE sao cho $\Delta AMM'$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{AME} = 60^0$. Tương tự $\widehat{AMD} = 60^0$. Và dễ dàng nhận thấy phép quay chuyển DC thành BE nên góc giữa DC và BE cũng là góc 60^0. Suy ra $\widehat{BMD} = 60^0$, đ.p.c.m.

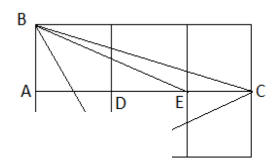


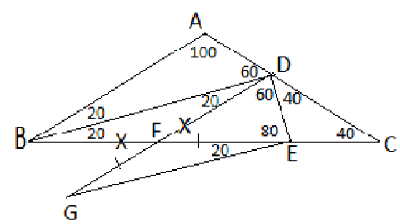
8. Cho tam giác ABC cân tại $A, \widehat{B} = \widehat{C} = 50^0$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{KBC} = 10^0, \widehat{KCB} = 30^0$. Chứng minh rằng tam giác ABK là tam giác cân và tính góc $\widehat{BAK}$. ■

Dựng điểm I sao cho tam giác IAB là tam giác đều (hình bên). Khi đó $\widehat{CBI} = 10^0$ và ΔAIC cân, suy ra $\widehat{ACI} = 80^0 \Rightarrow \widehat{BCI} = 30^0$.
Vậy I đối xứng với K qua BC. Do đó tam giác ABK cân, $AB = BK$ và $\widehat{BAK} = 70^0$ đ.p.c.m.

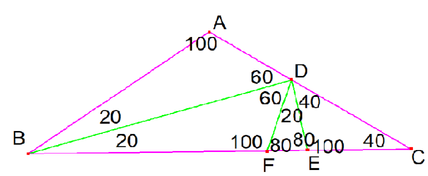


9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 3AB$. Trên AC lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^0$. ■
Qua các điểm A, D, E, C dựng 6 hình vuông bằn
Dễ dàng nhận thấy ΔGBC là tam giác vuông câ

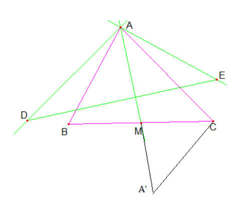




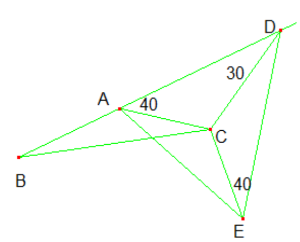
10. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A} = 100^0$, tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh $BC = BD + AD$. ■
Cách 1. Dựng các tia DE tạo với DC goác 40^0 và các tia DG, EG tạo các góc 20^0 với DB, EB như hình vẽ. Suy ra $\widehat{DGE} = 20^0 \Rightarrow BD = GD$. Như vậy $\Delta ABD = \Delta EGD$ (g.c.g). Suy ra $AD = DE = EC$ đ.p.c.m.
Cách 2. Theo hình vẽ dưới $AD = DE = DF = EC$ và $BD = BE$.



11. Cho tam giác ABC với AM là trung tuyến. Giả thiết $AD = AC, AD \perp AC$ và $AB = AE, AB \perp AE$ như hình bên. Chứng minh $DE = 2AM, DE \perp AM$. (*Gọi* A' *đối xứng với* A *qua* M...).

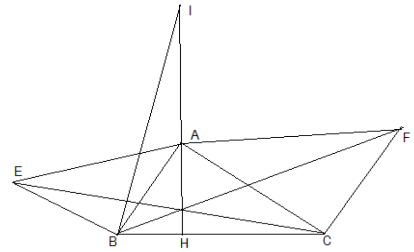


Bài 6. (*Cách giải gọn hơn.*) Dựng điểm E đối xứng với A qua CD. Chứng minh ΔDAE là tam giác đều. Từ đó suy ra $\Delta ABC = \Delta CAE \Rightarrow BC = AE = AD$.

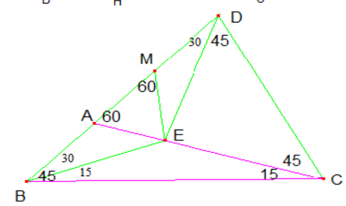


Bài tập bổ sung hình 7.

Bài 1 Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. Dựng các tam giác vuông cân ABE, ACF (vuông tại B và C). Trên tia đối của AH chọn điểm I sao cho $BC = AI$.

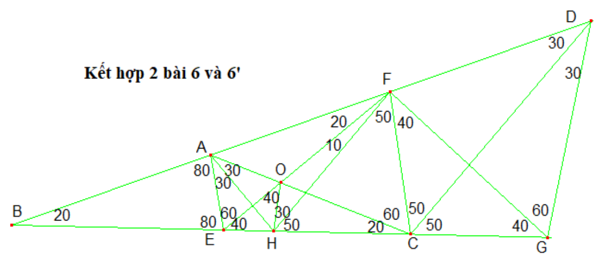


1. Chứng minh $\Delta ABI = \Delta BEC$. Chứng minh $EC \perp BI$.
2. Chứng minh EC, AH và BF đồng quy. (*Do chúng đều là các đường cao của tam giác IBC*)



Bài (+) Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^0, \widehat{C} = 15^0$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = 2AB$. CMR $\widehat{ACD} = 45^0$. (*Hoặc tính góc* $\widehat{ACD}$.) *Lời giải: Kẻ DE vuông góc với AC tại E. Gọi M là trung điểm AD, ΔAME đều. Chứng minh $EC = BE$ và $BE = ED$. Suy ra đ.p.c.m.*

Bài 2 Bài này là sự kết hợp 2 bài, bài 6 và bài 6'. Như hình bên, các tam giác BAE, BFC cân tại B, góc đỉnh B bằng 20^0.
Tam giác BEF cân tại E. Điểm H được chọn để $\widehat{AFH} = 30^0$. Điểm D được chọn để $\widehat{ACD} = 110^0$.
Khi đó $BE = EF = FD$ và $\widehat{AHC} = 130^0$.

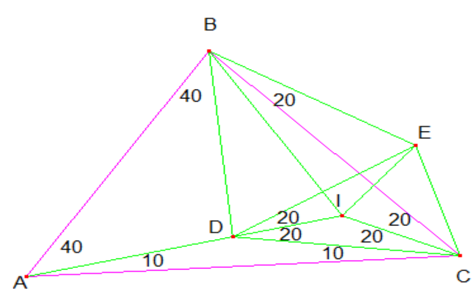


Chứng minh. Do tam giác đều OCF nên $\widehat{FCD} = 50^0$, suy ra CD là phân giác. Dựng điểm G đối xứng với F qua CD. Khi đó tam giác DFG đều. Mặt khác tam giác EFG cân vì có 2 góc đáy cùng bằng 40^0. Suy ra $BE = EF = FG = FD$.

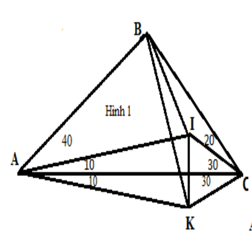
Tam giác CHF cân tại C vì có 2 góc đáy cùng bằng 50^0. Suy ra tam giác COH cân tại C, do đó $\widehat{COH} = 80^0 \Rightarrow \widehat{EOH} = 40^0$, hay tam giác HEO cân. Khi đó AH là phân giác, $\widehat{OHA} = 50^0$. Từ đây dễ dàng suy ra đ.p.c.m $\widehat{AHC} = 80^0 + 50^0 = 130^0$.

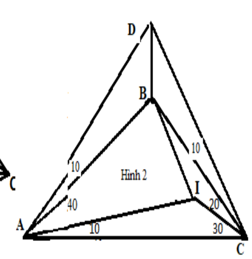
(*Chú ý rằng bài 8 cũng có thể lồng vào đây, xét tam giác cân CHF đỉnh C với các góc ở đáy bằng* 50^0.)

Bài 3 Cho tam giác ABC cân tại B và góc $\hat{B} = 80^0$. Lấy điểm I trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^0, \widehat{ICA} = 30^0$. Tính góc $\widehat{AIB}$.
Chứng minh. Kẻ phân giác BD của góc $\widehat{ABC}$, dễ dàng suy ra $DA = DB = DC$.
Dựng tam giác đều BDE (hình vẽ bên), suy ra $\widehat{IDE} = 20^0$, suy ra tiếp $\Delta IDE = \Delta IDC$. Suy ra $IE = IC = ID$.
Xét tam giác đều BDE, do $IE = ID$ nên BI là phân giác, suy ra $BI \perp DE$. Vậy góc $\widehat{AIB} = 70^0$.

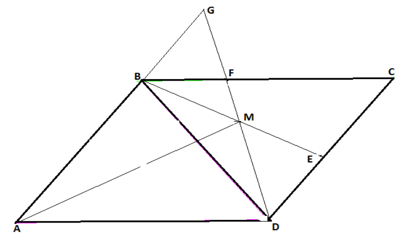


Cách 2 Dựng điểm K sao cho tam giác ABK là tam giác đều (hình 1 bên). Khi đó $\widehat{CAK} = 10^0$ và ΔBKC cân, suy ra $\widehat{BCK} = 80^0 \Rightarrow \widehat{ACK} = 30^0$.
Vậy I đối xứng với K qua AC. Do đó tam giác ABI cân, $AB = AI$ và $\widehat{AIB} = 70^0$ đ.p.c.m.
Cách 3 Dựng điểm D sao cho ΔDAC là tam giác đều (hình 2 bên). Khi đó $\widehat{ADB} = 30^0 \Rightarrow \Delta ADB = \Delta ACI \Rightarrow \Delta AIB$ cân.



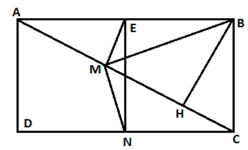


III Hình học lớp 8



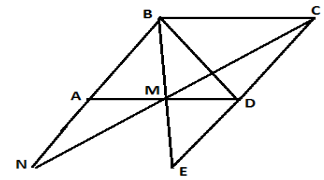
Hình 8 Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$, 2 điểm E, F thuộc các cạnh CD, CB sao cho $DE = BF$ (như hình vẽ). BE, CF cắt nhau tại M. Chứng minh AM là phân giác góc A.

Tìm được chứng minh đơn giản. Kéo dài DF cắt AB tại G. Ta có $\frac{DE}{BG} = \frac{DM}{MG} = \frac{BF}{BG} = \frac{DA}{AG}$, suy ra AM là phân giác góc $\widehat{GAD}$.



Hình 8 Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AH, DC. Chứng minh $MB \perp MN$.

Chứng minh. Gọi E là trung điểm AB. Tam giác $AMB \sim EMN$ vì $\widehat{MAB} = \widehat{MEN}$ và các cạnh tỉ lệ. Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{ENM}$, đ.p.c.m.

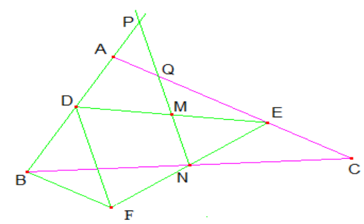


Hình 8 Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$, góc $\hat{A} = 60^0$. Chon $M \in AD$, CM cắt AB tại N. Chứng minh $AB^2 = DM \cdot BN$. Từ đó hãy chứng minh BE và DN hợp với nhau góc 60^0.

Chứng minh. Ta có $\frac{DM}{MA} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{DM+MA} = \frac{DE}{CD+DE}$ hay $\frac{DM}{AB} = \frac{DE}{CE} = \frac{AB}{BN}$, đ.p.c.m.

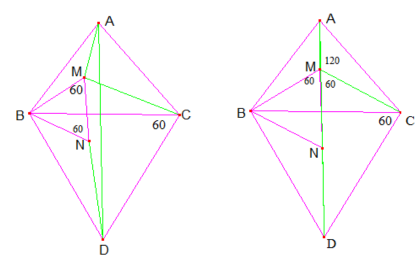
Suy ra $\Delta DMB \sim \Delta BDN \Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{BDN}$ suy ra đ.p.c.m.

Chú ý. Nếu sử dụng phép quay quanh B một góc 60^0 thì gọn hơn. Khi đó phép quay chuyển $A \to D, D \to C, N \to N'$ và $M \to M' \in DC$. Phép quay cũng chuyển đoạn ND thành $N'C$ và góc giữa ND và $N'C$ bằng 60^0. ($\Delta BMM'$ là tam giác đều).



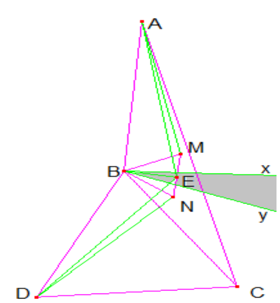
Hình 8 Bài 4. Cho tam giác ABC và lấy các điểm D, E trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm DE, BC. Chứng minh MN song song với phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Chứng minh. Gọi F là điểm đối xứng với E qua N. Chứng minh MN song song với phân giác góc $\widehat{BAC}$ cũng tức là phải chứng minh ΔAPQ cân tại A. Điều này là hiển nhiên vì ΔBDF cân và $MN \parallel DF$, đ.p.c.m.



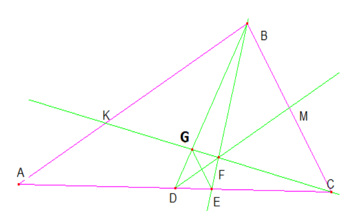
Bài hình hay 7+8. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm điểm M sao cho $MA + MB + MC$ ngắn nhất. (*Gợi ý: dựng tam giác đều BCD phía ngoài tam giác ABC như hình bên.*)

Chứng minh. Gọi M là điểm bất kì bên trong ΔABC. Dựng 2 tam giác đều BMN và BCD, khi đó $MA + MB + MC$ bằng độ dài đường gấp khúc $AMND$: $MA + MB + MC = MA + MN + ND \geq AD$. Dấu bằng xảy ra khi M nhìn các cạnh ΔABC dưới một góc 120^0. (Xem hình bên).



Trường hợp tam giác ABC có 1 góc lớn hơn 120^0 (hình bên). Dựng các tia $Bx \perp AB, By \perp BD$. Khi đó các điểm (nằm trong miền $\widehat{xBy}$) nối với B tạo với các cạnh AB, BD các góc tù. (*Chú ý rằng nếu $\widehat{ABC} = 120^0$ thì $\widehat{xBy} = 0^0$*).

Gọi E là điểm thuộc đường gấp khúc $AMND$ và nằm trong góc $\widehat{xBy}$. (Xem hình bên). Khi đó độ dài đường gấp khúc ($= MA + MB + MC$) không bé hơn $AE + ED \geq BA + BD$. Nói cách khác $MA + MB + MC \geq BA + BC$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv B$.

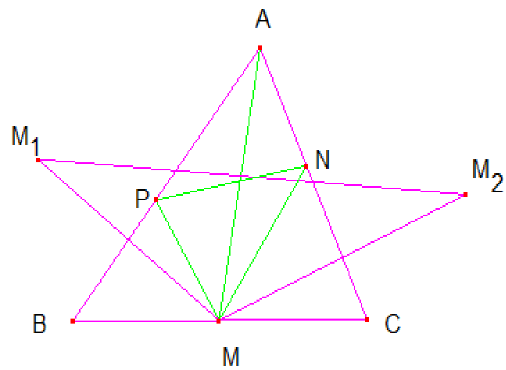


Hình 8 Bài 5. Cho tam giác ABC, $(AB > BC)$, kẻ $CK \perp BE$, BE là tia phân giác và BD là trung tuyến. (Hình bên). Gọi G, F là giao điểm CK với trung tuyến và phân giác góc B. Chứng minh EG bị DF chia thành 2 phần bằng nhau.

Chứng minh. DF song song AB. Vậy $\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF}$. Mặt khác $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2 = \frac{BK}{DF}$. Vậy EG song song BC mà M là trung điểm BC, suy ra đ.p.c.m.

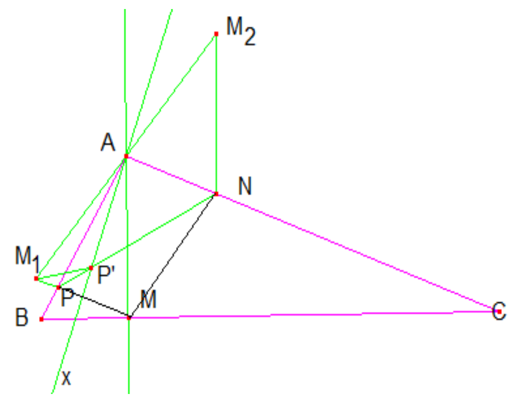
Bài hình 7. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm tam giác với chu vi bé nhất có các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác ABC.

Chứng minh. Xét tam giác MNP với các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Gọi M_1, M_2 là các điểm đối xứng với M qua các cạnh AB, AC tương ứng. (Xem hình bên). Khi đó chu vi tam giác MNP bằng độ dài đường gấp khúc M_1PNM_2. Hiển nhiên nó đạt giá trị bé nhất, đó là độ dài đoạn M_1M_2. Dễ dàng chỉ ra đoạn M_1M_2 nhỏ nhất khi M là chân đường cao của tam giác đã cho ABC.
Tương tự ta có thể nói cũng như thế về điểm N và P, chúng là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC.



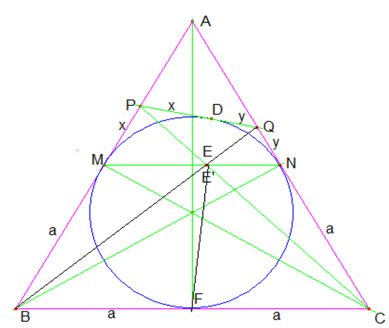
Bài hình 7a. Trường hợp tam giác ABC có một góc tù ($\widehat{A} \geq 90^0$). Tìm tam giác với chu vi bé nhất có các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác ABC.

Chứng minh. Kẻ $Ax \perp AC$, xét tam giác MNP với các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Gọi M_1, M_2 là các điểm đối xứng với M qua các cạnh Ax và AC tương ứng. (Xem hình bên). Khi đó chu vi tam giác MNP không bé hơn chu vi tam giác MNP'. Và như đã chứng minh ở bài trên, chu vi tam giác MNP' đạt giá trị bé nhất khi M là chân đường cao kẻ từ A và N, P' trùng với A.
Như vậy chu vi tam giác MNP không bé hơn $2AM = M_1M_2$ và nó đạt giá trị bé nhất đó khi M là chân đường cao kẻ từ A và N, P trùng với điểm A.



Bài Sơn nhờ. (lớp 10) Cho tam giác đều ABC và đường tròn nội tiếp O. Gọi P, Q là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng đoạn thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn (O) khi và chỉ khi $\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QC} = 1$.

Chứng minh.
Giả sử PC cắt MN tại E và tương tự BQ cắt MN tại E'. Ta sẽ chứng minh $E \equiv E'$. (Điều này là kết quả của bài tập **Tứ giác ngoại tiếp** ngay sau đây. Tuy nhiên ở đây ta sử dụng định lí Menlêuyt để chứng minh nó.)
Thật vậy theo định lí Menlêuyt cho tam giác AMN và cát tuyến PC ta có $\frac{ME}{EN} = \frac{2PM}{AP} = \frac{2x}{a-x}$. (1)
Tương tự áp dụng định lí Menlêuyt cho tam giác AMN và cát tuyến BQ ta có $\frac{NE'}{E'M} = \frac{2QN}{AQ} = \frac{2y}{a-y}$. (2)



Bây giờ ta sẽ tính y theo x bằng việc áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác APQ: $(x+y)^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2 - (a-x)(a-y) \Rightarrow y = \frac{a(a-x)}{a+3x}$. Thay y vào (2) ta được $\frac{NE'}{E'M} = \frac{a-x}{2x}$. Kết hợp với (1) suy ra $E \equiv E'$.

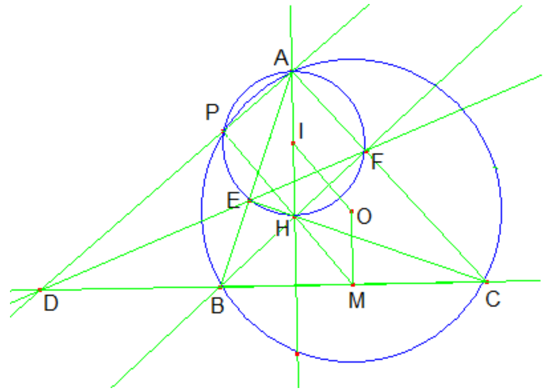
Quay trở lại bài toán ban đầu $\frac{AP}{PB} = \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{S_{NEC}}{S_{FEC}}$ và $\frac{AQ}{QC} = \frac{S_{MEB}}{S_{FEB}}$. Do $S_{BEC} = 2S_{FEC} = \frac{S_{ABC}}{2}$ suy ra $\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QC} = \frac{S_{NEC}+S_{MEB}}{S_{FEC}}$ và tổng diện tích $S_{MEB} + S_{NEC} = S_{MNCB} - \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{S_{ABC}}{4}$, suy ra điều phải chứng minh $\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QC} = 1$.

(*Nhận xét:* $\frac{AP}{PB} = \frac{S_{AEC}}{S_{BEC}} = \frac{h_1}{h_3}$, $\frac{AQ}{QC} = \frac{h_2}{h_3}$, *trong đó* h_1, h_2, h_3 *là khoảng cách từ* E *tới các cạnh tam giác đều* ABC. *Mặt khác* $h_1 + h_2 = h_3$ *và bằng nửa đường cao* ΔABC. *Từ nhận xét này ta cũng suy ra đ.p.c.m.*)

IV Hình học lớp 9

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn O, các đường cao CE, BF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BC, EF cắt nhau tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại P. Gọi M là trung điểm BC.

1. Chứng minh A, E, F, P, H nằm trên một đường tròn..
2. Chứng minh P, H, M thẳng hàng



Chứng minh.
1. là hiển nhiên vì $DB \cdot DC = DE \cdot DF = DP \cdot DA$.
2. Gọi I là trung điểm $AH, IO \parallel PH$ vì cùng $\perp AP$.
Mặt khác $IOMH$ là hình bình hành, suy ra đ.p.c.m.

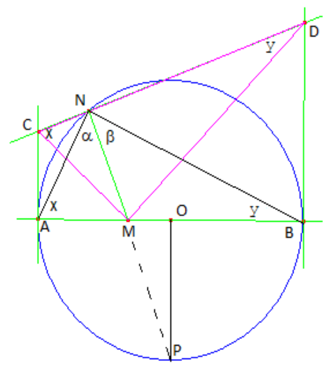
Bài 2. Cho nửa đường tròn O đường kính AB và điểm $M \in AB$ cố định. Điểm N di động trên nửa đường tròn. Qua N kẻ $CD \perp MN$. Xác định vị trí của N để diện tích tam giác MCD nhỏ nhất.

Chứng minh.
Hiển nhiên các tứ giác $AMNC, BMND$ nội tiếp. Kí hiệu các góc x, y, α, β như hình vẽ. Ta có

$$CM = \frac{MN}{\sin x} = \frac{AM}{\sin \alpha}$$

$$DM = \frac{MN}{\sin y} = \frac{BM}{\sin \beta} = \frac{BM}{\cos \alpha}$$

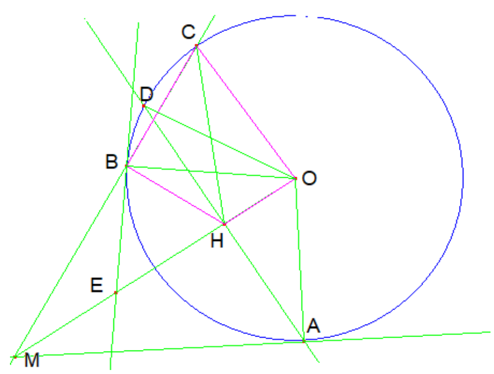
Suy ra $S_{MCD} = \frac{CM \cdot DM}{2} = \frac{AM \cdot BM}{\sin 2\alpha}$ nhỏ nhất khi $\alpha = 45^0$.
Hay ta nói MN là phân giác góc $\widehat{ANB}$.



Bài 3. **(Phương pháp ngược)** Cho đường tròn O và tiếp tuyến MA, kẻ $AH \perp OM$. Gọi E là trung điểm của HM, kẻ tiếp tuyến EB.

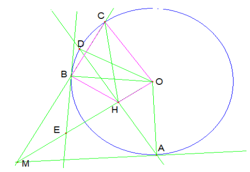
1. Chứng minh $OHBC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $MB \perp HB$ (*Nhớ lại bài hình lớp 7, trang 4: cho hình vuông, từ 2 đỉnh liên tiếp dựng các tia tạo với cạnh hv góc* 15^0. *Chứng minh tam giác tạo thành là tam giác đều. Bài này dùng phương pháp ngược sẽ nhanh hơn nhiều.*)
3. Nếu $BC = 3MB$, N là trung điểm MC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔOHN tiếp xúc BC.

Chứng minh.
1. Hiển nhiên vì $MA^2 = MH \cdot MO = MB \cdot MC$.
2. Bây giờ ta sẽ chứng minh phần 2 bằng việc thiết lập bài toán ngược.
Giả sử B là điểm thuộc đường tròn để $MB \perp HB$. Kẻ tiếp tuyến BE, ta sẽ chứng minh E là trung điểm của HM. Do qua E chỉ có 1 tiếp tuyến phía trên nên B trong bài toán ngược này chính là điểm B cũ.
Từ giả thiết này $\widehat{HOC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BCO} = \widehat{BMH} + \widehat{CBO} = 90^0$. Mặt khác $\widehat{HBO} + \widehat{CBO} = 90^0$ suy ra $\widehat{BMH} = \widehat{HBO} = \widehat{MBE} \Rightarrow \Delta EBM$ cân. đ.p.c.m

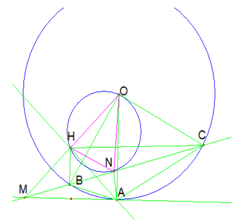


(*Nhận xét rằng do $OHBC$ là tứ giác nội tiếp nên ta có hệ quả $\widehat{BCO} = \widehat{CBO} = \widehat{BHM}$, suy ra HD là phân giác góc $\widehat{BHC}$, kết quả này không phụ thuộc điều kiện E có là trung điểm MH hay không!*)

2'. (*Mình mới tìm ra cách không dùng PP ngược để chứng minh phần 2*: Xét tam giác vuông BEO : $BE^2 = EO^2 - R^2 = (EH + HO)^2 - R^2 = EH^2 + 2EH \cdot HO + HO^2 - R^2$. Sử dụng $MH = 2EH$ đẳng thức trên viết thành $BE^2 = EH^2 + MH \cdot HO + HO^2 - R^2 = EH^2$ vì $MH \cdot HO + HO^2 - R^2 = AH^2 + HO^2 - R^2 = 0$. Suy ra $BE = EH$.
Từ đây dễ dàng suy ra $MB \perp HB$.

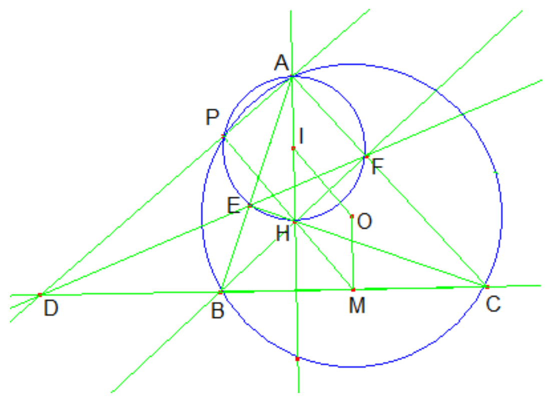


3. Ta sẽ chứng minh phần 3 bằng việc chỉ ra $MH \cdot MO = MN^2$.
Từ giả thiết $BC = 3MB$ và N là trung điểm MC suy ra $MA = MN$. Xét 2 tam giác vuông đồng dạng AMO và HMA, ta có $\frac{AM}{HM} = \frac{MO}{MN} = \frac{MN}{MH}$ suy ra $MH \cdot MO = MN^2$. đ.p.c.m



Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn O, các đường cao CE, BF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BC, EF cắt nhau tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại P. Gọi M là trung điểm BC.

1. Chứng minh A, E, F, P, H nằm trên một đường tròn..
2. Chứng minh P, H, M thẳng hàng



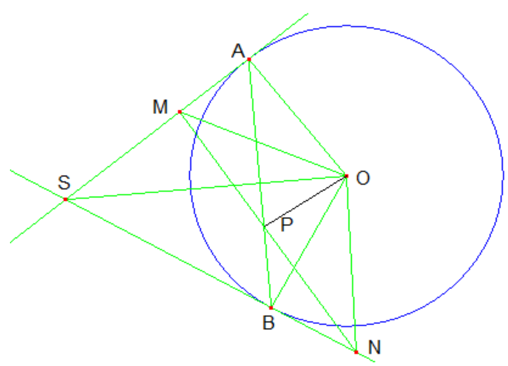
Chứng minh.
1. là hiển nhiên vì $DB \cdot DC = DE \cdot DF = DP \cdot DA$.
2. Gọi I là trung điểm $AH, IO \parallel PH$ vì cùng $\perp AP$. Mặt khác $IOMH$ là hình bình hành, suy ra đ.p.c.m.

Bài 5. (Đề thi tuyển sinh vào 10 năm 2021) Cho điểm S nằm ngoài đường tròn O, kẻ các tiếp tuyến SA, SB. Các điểm M, N thuộc SA, SB sao cho $AM = BN$ (xem hình dưới). Chứng minh giao điểm P của MN với AB là trung điểm của MN.

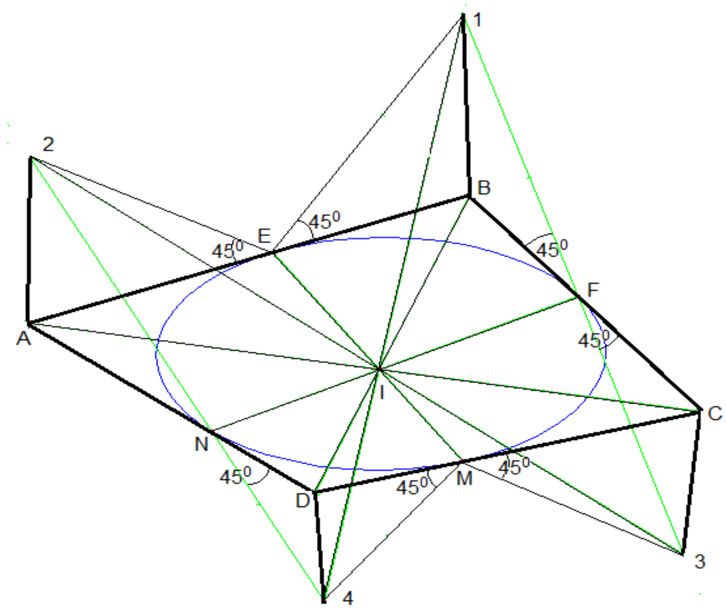
Chứng minh.
a) Chứng minh tam giác AMO bằng tam giác BNO.
b) Từ đó suy ra $\widehat{MON} = \widehat{AOB} \Rightarrow$ tứ giác $SMON$ là tứ giác nội tiếp. Vì vậy

$$\widehat{OMN} = \widehat{BSO} = \widehat{ASO} = \widehat{OAP}$$

Do đó tứ giác $AMPO$ nội tiếp suy ra $OP \perp MN$. Từ đây suy ra $PM = PN$ đ.p.c.m.



Tứ giác ngoại tiếp. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tại các tiếp điểm E, F, M, N (hình vẽ dưới). Chứng minh các đường chéo AC, BD và các đoạn thẳng nối các tiếp điểm EM, FN đồng quy tại một điểm I. (*Chứng minh dựa theo cách của Hajos Gyorgy*)



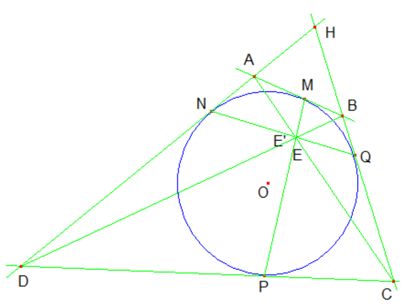
Chứng minh 1. Đây là trường hợp đặc biệt của định lí Brianchon. Cách chứng minh bài này khá đặc biệt, lồng vào trong không gian. Gọi S là mặt phẳng chứa $ABCD$. Dựng các điểm $1, 2$ phía trên mặt phẳng S sao cho $E1$ và $E2$ tạo với S góc 45^0 và A, B là hình chiếu vuông góc của $2, 1$ lên S. Tương tự, dựng các điểm $3, 4$ phía dưới mặt phẳng S sao cho $M3$ và $M4$ tạo với S góc 45^0 và C, D là hình chiếu vuông góc của $3, 4$ lên S. Khi đó 13 và 24 cũng tạo với S góc 45^0 đồng thời chúng đi qua các điểm F, N (hình vẽ bên). Dễ dàng chỉ ra $E1, M4$ cùng nằm trong một mặt phẳng. Suy ra $EM, 14$ cắt nhau tại một điểm (điểm I trên hình vẽ). Hoàn toàn tương tự $EM, 23$ cũng cắt nhau tại một điểm (sẽ là điểm I, nhưng bây giờ ta chưa khẳng định điều đó).

Cũng như vậy $13, 24$ nghiêng với S góc 45^0 lại đi qua các tiếp điểm F, N của đường tròn nên chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Suy ra 23 và 14 cắt nhau tại một điểm. Các đường thẳng $23, 14, EM$ không đồng phẳng và đôi một cắt nhau, suy ra chúng phải đồng quy tại một điểm nào đó.

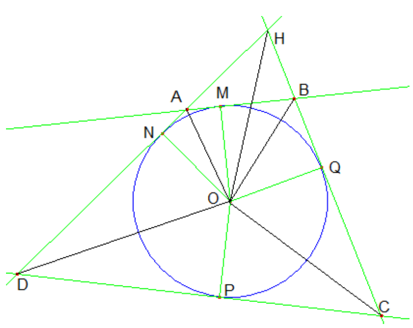
Hình chiếu của $23, 14, EM$ lên mặt phẳng S là AC, BD và EM, do vậy chúng cũng cắt nhau tại I nói trên. Lặp lại toàn bộ chứng minh trên ta suy ra AC, BD và FN đồng quy tại I, suy ra đ.p.c.m.

Chú ý: Định lí Brianchon nói 3 đoạn thẳng nối các đỉnh đối diện của một lục giác ngoại tiếp đường conic luôn đồng quy.

Tứ giác ngoại tiếp. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tại các tiếp điểm M, N, P, Q (hình vẽ dưới). Chứng minh các đường chéo AC, BD và các đoạn thẳng nối các tiếp điểm MP, NQ đồng quy tại một điểm.

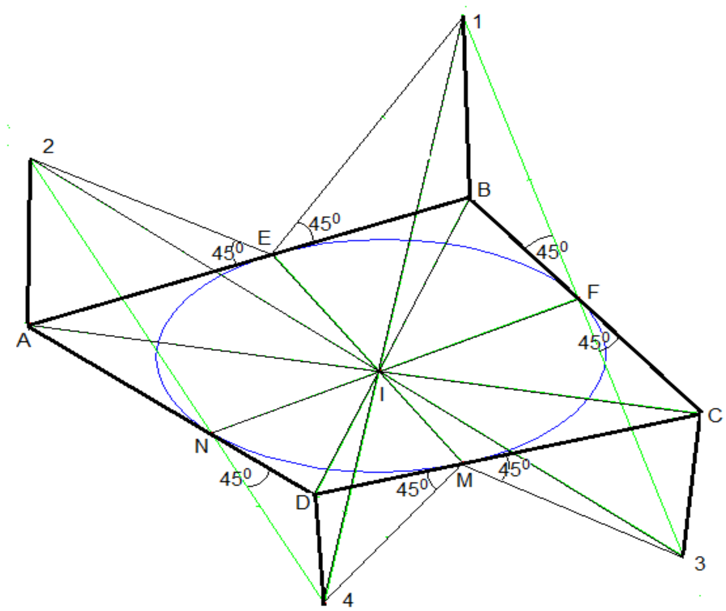


Chứng minh 2. Giả sử BD cắt NQ tại E và tương tự AC cắt NQ tại E'. Ta sẽ chứng minh $E \equiv E'$. Thật vậy theo định lí Menlêuyt cho tam giác HNQ và cát tuyến BD ta có $\frac{NE}{EQ} = \frac{DN}{DH} \cdot \frac{BH}{BQ}$ (1)
Tương tự áp dụng định lí Menlêuyt cho tam giác HNQ và cát tuyến AC ta có $\frac{NE'}{E'Q} = \frac{AN}{AH} \cdot \frac{CH}{CQ}$ (2). Để $E \equiv E'$, ta p.c.m. (1) = (2) hay $\frac{DN}{DH} \cdot \frac{BH}{BQ} = \frac{AN}{AH} \cdot \frac{CH}{CQ} \Leftrightarrow DN \cdot BH \cdot AH \cdot CQ = DH \cdot BQ \cdot AN \cdot CH$ $\Leftrightarrow \frac{AH}{DH} : \frac{AN}{ND} = \frac{CH}{HB} : \frac{CQ}{QB} \Leftrightarrow (ADHN) = (CBHQ)$, tỉ số kép.



Các tỉ số kép $(ADHN), (CBHQ)$ bằng với các tỉ số kép của các đường thẳng đi qua tâm O và các điểm trong tỉ số đó. (Hình bên). Ta p.c.m. $\frac{\sin \widehat{AOH}}{\sin \widehat{HOD}} : \frac{\sin \widehat{AON}}{\sin \widehat{NOD}} = \frac{\sin \widehat{HOC}}{\sin \widehat{HOB}} : \frac{\sin \widehat{QOC}}{\sin \widehat{QOB}}$ (3). Chú ý $\widehat{HOD} = 90^0 + \frac{\widehat{C}}{2}$... (3) $\Leftrightarrow \frac{\sin \widehat{AOH}}{\sin \widehat{AON}} = \frac{\sin \widehat{QOB}}{\sin \widehat{HOB}}$. Thật vậy $\widehat{AOH} = \widehat{DAO} - \widehat{DHO} = \frac{\widehat{HBA}}{2}$ và $\widehat{QOB} = \frac{\widehat{HBA}}{2}$, suy ra $\widehat{AOH} = \widehat{QOB}$. Tương tự (hoặc suy ra ngay từ tính chất phân giác HO) góc $\widehat{AON} = \widehat{HOB}$, đ.p.c.m.
Hoàn toàn tương tự như từ đầu đến bây giờ, MP cũng đi qua điểm E.

Chứng minh vắn tắt tứ giác ngoại tiếp cách 1. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tại các tiếp điểm E, F, M, N (hình vẽ dưới). Chứng minh các đường chéo AC, BD và các đoạn thẳng nối các tiếp điểm EM, FN đồng quy tại một điểm I. (*Cách chứng minh này rất thú vị, hiếm gặp. Tứ giác $ABCD$ được nhúng vào trong không gian, phỏng theo cách chứng minh định lí Brianchon của Hajos Gorgy.*)

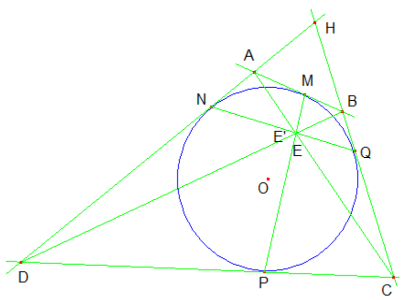


Chứng minh. Gọi S là mặt phẳng chứa $ABCD$. Dựng các điểm $1, 2$ phía trên mặt phẳng S sao cho $E1$ và $E2$ tạo với S góc 45^0 và A, B là hình chiếu vuông góc của $2, 1$ lên S. Tương tự, dựng các điểm $3, 4$ phía dưới mặt phẳng S sao cho $M3$ và $M4$ tạo với S góc 45^0 và C, D là hình chiếu vuông góc của $3, 4$ lên S. Khi đó 13 và 24 cũng tạo với S góc 45^0 đồng thời chúng đi qua các điểm F, N (hình vẽ bên).

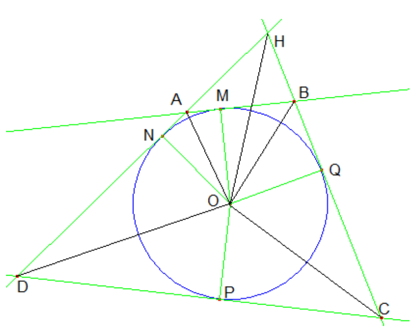
Trong không gian dễ dàng chỉ ra trong số các đường thẳng $23, 14, EM, FN$ không có 3 đường nào đồng phẳng và chúng đôi một cắt nhau, suy ra chúng phải đồng quy tại một điểm I nào đó.

Hình chiếu của $23, 14, EM, FN$ lên mặt phẳng S là các đường thẳng AC, BD, EM, FN. Vậy chúng cũng cắt nhau tại I nói trên, đ.p.c.m.

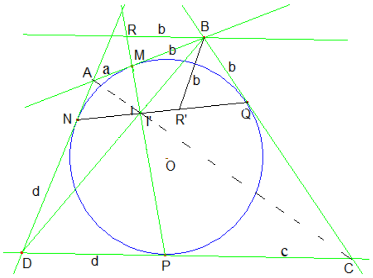
Chứng minh sơ cấp bài toán tứ giác ngoại tiếp. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tại các tiếp điểm M, N, P, Q (hình vẽ dưới). Chứng minh các đường chéo AC, BD và các đoạn thẳng nối các tiếp điểm MP, NQ đồng quy tại một điểm.



Chứng minh 1. Giả sử BD cắt NQ tại E và tương tự AC cắt NQ tại E'. Ta sẽ chứng minh $E \equiv E'$. Thật vậy theo định lí Menlêuyt cho tam giác HNQ và cát tuyến BD ta có $\frac{NE}{EQ} = \frac{DN}{DH} \cdot \frac{BH}{BQ}$ (1)
Tương tự áp dụng định lí Menlêuyt cho tam giác HNQ và cát tuyến AC ta có $\frac{NE'}{E'Q} = \frac{AN}{AH} \cdot \frac{CH}{CQ}$ (2). Để $E \equiv E'$, ta sẽ c.m. (1) = (2) hay sử dụng tỉ số kép, ta p.c.m. $(ADHN) = (CBHQ)$, $\left(\text{tức là } \frac{AH}{HD} : \frac{AN}{ND} = \frac{CH}{HB} : \frac{CQ}{QB}\right)$.



Các tỉ số kép $(ADHN), (CBHQ)$ bằng với các tỉ số kép của các đường thẳng đi qua tâm O nối với các điểm trong các tỉ số đó. (Hình bên).
Do đó ta p.c.m. $\frac{\sin\widehat{AOH}}{\sin\widehat{HOD}} : \frac{\sin\widehat{AON}}{\sin\widehat{NOD}} = \frac{\sin\widehat{HOC}}{\sin\widehat{HOB}} : \frac{\sin\widehat{QOC}}{\sin\widehat{QOB}}$.
Điều này dễ dàng suy ra từ tính chất O là giao của các đường phân giác của các góc của tam giác HDC: $\sin\widehat{HOD} = \sin\widehat{QOC}$, $\sin\widehat{HOC} = \sin\widehat{NOD}$ và O cũng là giao của các đường phân giác của các góc của tam giác HAB: $\widehat{AOH} = \widehat{QOB}, \widehat{AON} = \widehat{HOB}$.
Do NQ và MP có vai trò hoàn toàn như nhau, chứng minh tương tự, ta được MP cũng đi qua điểm E, đ.p.c.m.

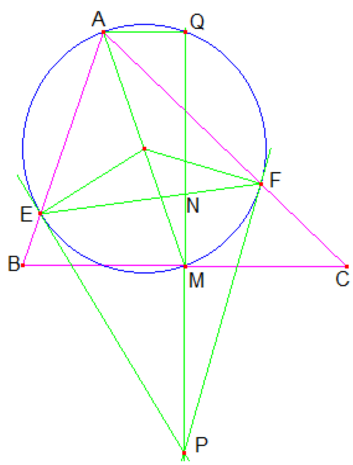


Chứng minh 2. Giả sử BD cắt MP tại I và tương tự BD cắt NQ tại I'. Ta sẽ chứng minh $I \equiv I'$. Thật vậy kẻ $BR \parallel CD$ (hình vẽ bên). Kí hiệu $b = BM = BQ, d = DP = DN$, ta có tam giác BRM cân và do đó $\frac{BI}{ID} = \frac{b}{d}$ (1)
Tương tự kẻ $BR' \parallel AD$, ta cũng có tam giác $BR'Q$ cân và do đó ta có tỉ số $\frac{BI'}{I'D} = \frac{b}{d}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$, đ.p.c.m.

(*Đây là cách chứng minh khá gọn của Phạm Hùng.*)

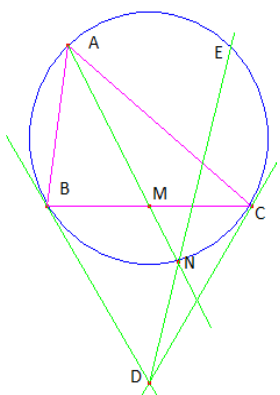
(*Bài tập trên có thể phát biểu dưới dạng: Hãy cm* $\frac{BI}{ID} = \frac{b}{d}$ *và tương tự* $\frac{AI}{IC} = \frac{a}{c}$, *trong đó* $AM = a, PC = c$).

Bài tập hay: Các bài tập sau sử dụng các khái niệm về **tứ giác điều hòa, đường thẳng polar (đường cực), định lí Mêneleuyt** nên khá hay.



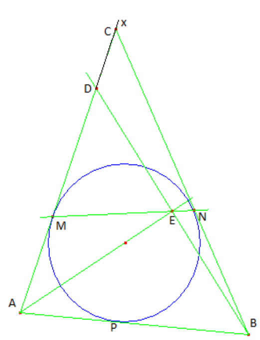
Bài tập 1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Đường tròn đường kính AM cắt AB, AC tại E, F. Các tiếp tuyến với đường tròn tại E, F cắt nhau tại P. Chứng minh P cách đều B và C.

Chứng minh. Đường thẳng PM kéo dài cắt đường tròn tại Q. Do PE, PF là các tiếp tuyến với đường tròn nên EF là đường thẳng polar của điểm P hay $(MQPN) = -1$, chúng là hàng điểm điều hòa. Suy ra tỉ số kép của các đường thẳng $(EM, EQ, EP, EN) = -1$ hay tứ giác nội tiếp $EMFQ$ là tứ giác điều hòa. Do vậy tỉ số kép của các đường thẳng $(AE, AF, AM, AQ) = -1$, mà M là trung điểm BC nên AQ song song với BC. Từ đó suy ra $PQ \perp BC$ tại M, đ.p.c.m.



Bài tập 2. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM cắt đường tròn ngoại tiếp tại N, các tiếp tuyến với đường tròn tại B, C cắt nhau tại D. Chứng minh DN luôn đi qua một điểm cố định nếu B, C di chuyển trên đường tròn sao cho BC luôn song song với một phương cố định.

Chứng minh. Cũng như bài trước, tứ giác nội tiếp $BNCE$ là tứ giác điều hòa. Do M là trung điểm BC nên AE song song với BC. Nói cách khác DN luôn đi qua điểm cố định E, đ.p.c.m.



Bài tập 3. Cho tam giác ABC, điểm C di chuyển trên tia Ax. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh tại M, N (hình vẽ bên). Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Chứng minh. Chọn điểm $D \in Ax$ sao cho $AB = AD$. Gọi E là giao điểm của BD và phân giác góc $\widehat{A}$. Dễ dàng chỉ ra $DM = BN$ và các điểm N, E, M trên các cạnh tam giác BCD thỏa mãn định lí Mêneleuyt: $\frac{NC}{NB} = \frac{p-c}{p-b}$, $\frac{MD}{MC} = \frac{p-b}{p-c}$, p là nửa chu vi tam giác ABC. Suy ra MN luôn đi qua điểm E cố định, đ.p.c.m.

DỰNG HÌNH BẰNG COMPA

Định lí Mohr - Mascheroni: Bất kỳ điểm nào dựng được bằng thước kẻ và compa thì cũng có thể dựng được chỉ bằng cách dùng compa.

Mặc dù Georg Mohr phát minh ra từ năm 1672 và độc lập với nó là Lorenzo Mascheroni năm 1797, nhưng cũng phải đến năm 1928, người ta mới chứng minh chặt chẽ và đầy đủ định lí đó. Việc dựng hình chỉ bằng compa là các bước dài dòng, lặp đi lặp lại nhiều và do định lí trên đã được chứng minh đầy đủ nên bây giờ nó không được chú ý nhiều. Tuy vậy, đối với học sinh phổ thông, cũng là một cách để rèn luyện tư duy thú vị.

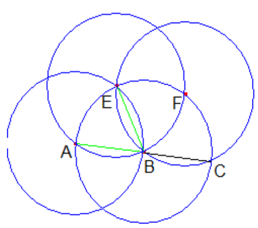
Bài tập: Dựng tâm đường tròn cho trước bằng compa.

Để giải nó ta cần biết 3 bài toán sau (xem hình vẽ dưới):

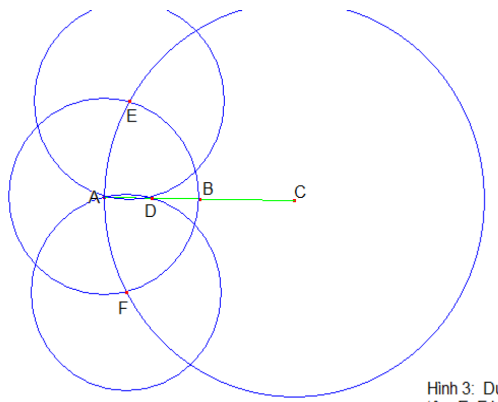
Hình 1. Cho trước hai điểm A và B, chỉ dùng compa, dựng điểm C trên đường thẳng AB sao cho $AC = 2AB$.

Hình 2. Cho trước hai điểm A và B, chỉ dùng compa, dựng trung điểm D của AB. Chú ý C là điểm mà AC=2AB.

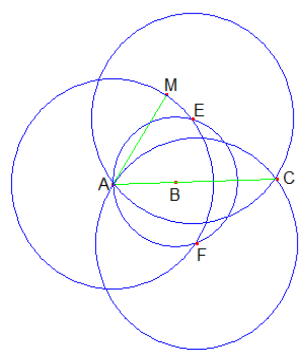
Hình 3. Cho trước 3 điểm A, B và M, chỉ dùng compa, dựng điểm C trên đường thẳng AB sao cho $AB \cdot AC = AM^2$.



Hình 1: AC=2AB



Hình 2: Dựng D là trung điểm AB

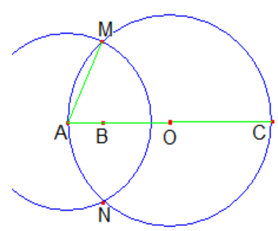


Hình 3: Dựng C sao cho AB.AC=AM², C là giao 2 đường tròn tâm E, F bán kính FA=EA. Chú ý A, E, F thuộc đ.tròn tâm B

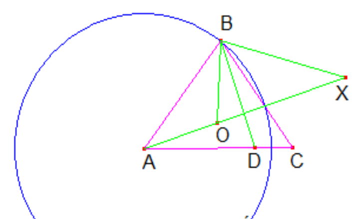
Quay lại bài tập: Dựng tâm đường tròn cho trước bằng compa.
Chọn A, M, N trên đường tròn đã cho sao cho AM=AN, (hình bên). Dựng trung điểm B của MN và dựng điểm C trên AB sao cho

$$AM^2 = AB \cdot AC.$$

Khi đó AC là đường kính, trung điểm O của AC chính là tâm đường tròn đã cho.

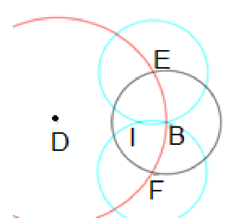


Dựng tâm O đ.tròn



Dựng tâm O đ.tròn ngoại tiếp ABC
1. Dựng D, nghịch đảo của C
2. Dựng X đối xứng với A qua BD
3. Dựng O, nghịch đảo của X.

Chú ý: Dựng hình bằng compa thực chất xoay quanh PHÉP NGHỊCH ĐẢO. Phép nghịch đảo chuyển đường thẳng thành đường tròn. Vì thế dựng giao 2 đoạn thẳng sẽ chuyển thành giao của 2 đường tròn. Hình bên chỉ ra cách dựng điểm nghịch đảo I của D qua đường tròn tâm B (bán kính r). Trước tiên dựng đường tròn tâm D, bán kính DB, tiếp theo dựng các đường tròn tâm E, F. Giao của 2 đường tròn này là điểm I cần dựng: $BD \cdot BI = BE^2 (= r^2)$.
Ở bài tập trước các bước hình 1, 2, 3 đều là trường hợp đặc biệt.



Dựng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cũng chỉ cần dựa vào PHÉP NGHỊCH ĐẢO là ổn. (*Xem file DungHinhCompa.docx trong thư mục LINHTINH*). Từ đó suy ra cách dựng giao 2 đoạn thẳng cũng như giao của một đoạn thẳng và đường tròn.

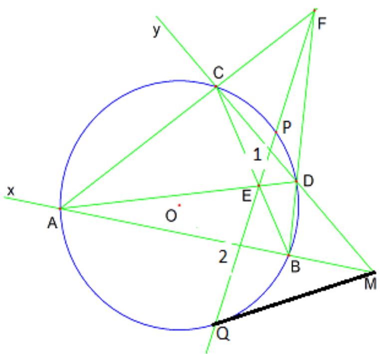
Chú ý: Dựng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ta đã giới thiệu ở hình vẽ trên.

Dựng giao 2 đoạn thẳng chuyển về dựng giao của 2 đường tròn bằng cách dùng PHÉP NGHỊCH ĐẢO.

Lưu ý rằng nếu đã biết cách dựng giao của 2 đoạn thẳng, sử dụng nó ta cũng dựng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng cách dựng 2 trung trực của 2 cạnh tam giác rồi dựng giao 2 trung trực đó.

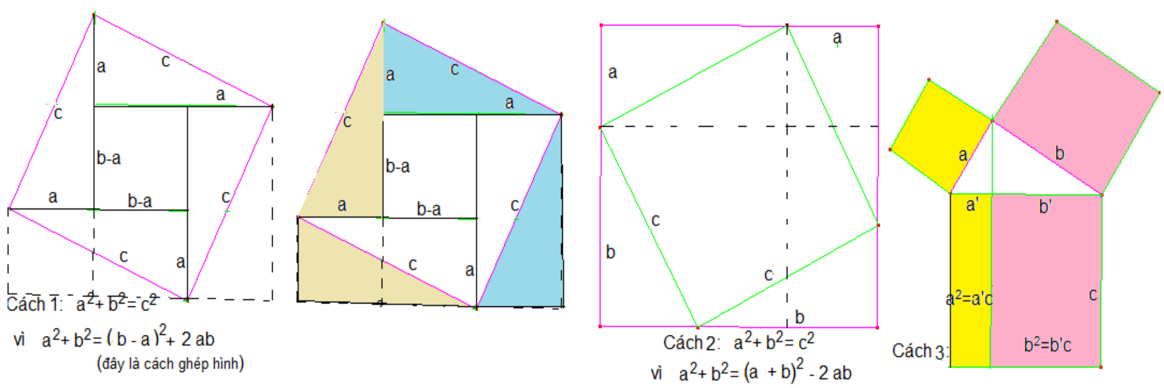
Dựng tâm đường tròn nội tiếp tam giác có thể thực hiện như sau: đầu tiên dựng 2 phân giác của 2 góc ứng với 2 đỉnh bất kì của tam giác. Bước thứ hai dựng giao của 2 phân giác, đó là tâm đường tròn nội tiếp. Bước cuối cùng tìm chân đường vuông góc hạ xuống cạnh bất kì, điểm đó chính là trung điểm của phép đối xứng tâm nội tiếp qua một cạnh tam giác.

DỰNG TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN CHỈ BẰNG THƯỚC KẺ

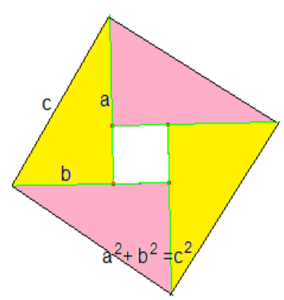


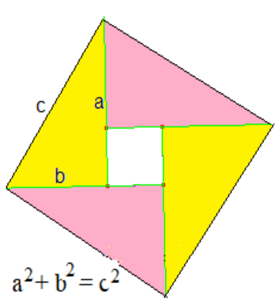
Hình bên chỉ ra cách dựng tiếp tuyến từ điểm M đến đường tròn tâm O chỉ bằng thước kẻ.
Trước tiên qua M ta dựng 2 tia Mx, My bất kì, chúng cắt đường tròn (O) tại các điểm A, B, C, D. Các đường chéo và các cạnh tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại E, F (hình bên). Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại các điểm P, Q. Khi đó MP và MQ là 2 tiếp tuyến đi qua M của đường tròn đã cho.
Điều thú vị là 2 tia Mx, My dựng tùy ý nhưng đường thẳng EF luôn đi qua 2 điểm cố định P, Q (chúng là 2 tiếp điểm của các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ M).

Các cách chứng minh gọn và hay định lí Pitago.

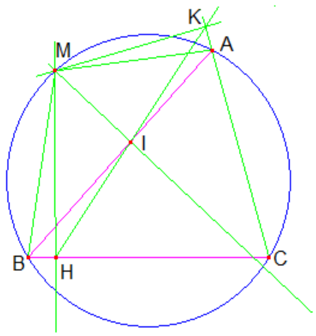


Hình dưới là biểu tượng của cách chứng minh gọn, hay của định lí Pitago. Nó được coi là một biểu tượng đơn giản, thâm thúy của toán học về sức mạnh trí tuệ từ hàng nghìn năm trước.





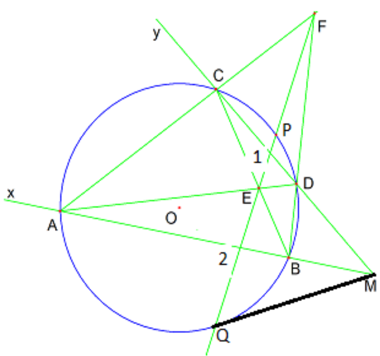
ĐỊNH LÍ WALACE



Cho tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp, điểm M thuộc đường tròn. Chứng minh chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các cạnh tam giác thẳng hàng.

Chứng minh. Tứ giác $MHCK$ và $MBCA$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BMH} = \widehat{AMK}$. Các tứ giác $MBHI$ và $MIAK$ cũng nội tiếp, suy ra $\widehat{BMH} = \widehat{BIH}$, $\widehat{AMK} = \widehat{AIK}$. Vậy $\widehat{BIH} = \widehat{AIK}$ hay H, I, K thẳng hàng.

DỰNG TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN CHỈ BẰNG THƯỚC KẺ



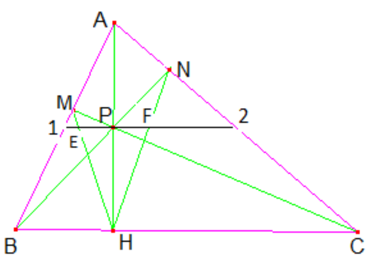
Hình bên chỉ ra cách dựng tiếp tuyến từ điểm M đến đường tròn tâm O chỉ bằng thước kẻ.

Trước tiên qua M ta dựng 2 tia Mx, My bất kì, chúng cắt đường tròn (O) tại các điểm A, B, C, D. Các đường chéo và các cạnh tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại E, F (hình bên). Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại các điểm P, Q. Khi đó MP và MQ là 2 tiếp tuyến đi qua M của đường tròn đã cho.

Chứng minh. Thực chất bài toán nêu trên là trường hợp riêng của *hình học xạ ảnh* mà tỉ số kép đóng vai trò trung tâm. Trường hợp đặc biệt của tỉ số kép là *hàng điểm điều hòa*. Xin nhắc lại *trong một tam giác, 2 đỉnh và chân các đường phân giác trong, ngoài trên cạnh chứa 2 đỉnh đó tạo thành hàng điểm điều hòa*. Cách chứng minh vắn tắt:

Để chứng minh MP và MQ là 2 tiếp tuyến, trước hết ta sử dụng một định lí về *tứ giác toàn phần*: Gọi các điểm $2, 1$ là giao của EF với các cạnh AB, CD (hình bên). Khi đó các điểm $A, B, 2, M$ là hàng điểm điều hòa. (Tương tự $C, D, 1, M$ cũng là hàng điểm điều hòa). Xét trường hợp riêng khi AB là đường kính, ta suy ra ngay MP và MQ là 2 tiếp tuyến với đường tròn.

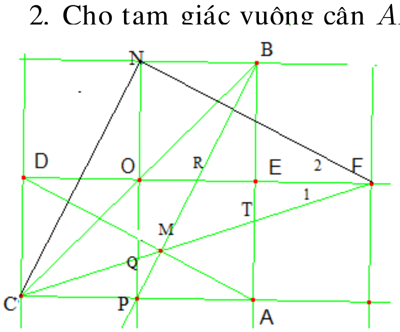
CÁC BÀI TOÁN HÌNH LỚP 8 ĐƠN GIẢN NHƯNG KHÔNG DỄ



1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Lấy điểm P tùy ý trên AH, các đường thẳng CP, BP lần lượt cắt các cạnh AB, AC tại M, N. Chứng minh $\widehat{AHM} = \widehat{AHN}$.

Chứng minh. Hoặc sử dụng *hàng điểm điều hòa* hoặc chứng minh như *cm định lí Ceva* ở file này trang 2. (*Qua P kẻ đường thẳng song song với BC, cắt HM, HN tại 2 điểm E, F. Khi đó P là trung điểm của EF. Thật vậy $\frac{PE}{HC} = \frac{P1}{BC}, \frac{PF}{HB} = \frac{P2}{BC} \Rightarrow PE = PF$*).

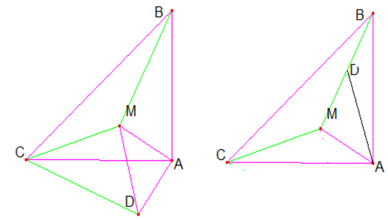
2. Cho tam giác vuông cân ABC, đỉnh A. Lấy điểm M bên trong tam giác sao cho $MA = 1, MB = 2$ và $\widehat{AMC} = 135^0$. Hãy tính MC.



Giải. Do chỉ có ***duy nhất*** 1 điểm M thỏa mãn bài toán, nên bằng phương pháp ngược, trước hết ta giải bài sau. Lồng tam giác ABC vào các hình vuông bằng nhau như hình bên. DA cắt CF tại M. Khi đó $\widehat{CMD} = \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = 45^0$ và $\frac{FM}{MC} = \frac{DF}{AC} = \frac{3}{2}$. Mặt khác BP đi qua M vì $\frac{RF}{CP} = \frac{3}{2}$. Dễ thấy $AM \perp BP$. Do $BER \sim BMA$ nên $MB = 2MA$. ***Như vậy điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.***

Trở về bài toán chính, $AB^2 = MA^2 + MB^2$ suy ra cạnh hình vuông bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$, từ đó ta có thể tính được $MC = \sqrt{2}$.

2'. Cho tam giác vuông cân ABC, đỉnh A. Lấy điểm M bên trong tam giác sao cho $MA = 1, MB = 2$ và $\widehat{AMC} = 135^0$. Hãy tính MC. (***Chỉ dùng kiến thức lớp 7***).



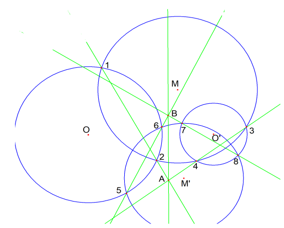
Giải. Cách giải tuyệt cú mèo của Phú: Dựng tam giác vuông cân AMD. Suy ra $\Delta MBA = \Delta DCA$ hay $CD = MB = 2$. Tam giác MCD vuông, có $MD = \sqrt{2}$. Vậy $MC = \sqrt{2}$, đ.p.c.m.

2''.*Cho tam giác vuông cân ABC, đỉnh A. Lấy điểm M bên trong tam giác sao cho $MA = 1, MB = 2$ và $MA \perp MB$. Hãy tính $\widehat{AMC}$.*

Ta sẽ dùng PP ngược nếu sử dụng cách giải của Phú, hoặc ta gọi D là trung điểm MB, khi đó $\Delta DBA = \Delta MAC$ suy ra góc $\widehat{AMC} = 135^0$, (xem hình thứ 2 ở bên).

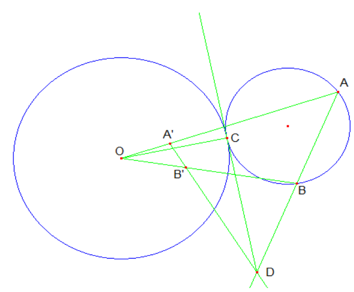
2*. *Cho tam giác vuông cân ABC, đỉnh A. Lấy điểm M bên trong tam giác sao cho $MC : MA : MB = = 1 : 2 : 3$. Tính góc $\widehat{AMC}$.* Giải như bài 2', suy ra ΔMCD vuông, vậy $\widehat{AMC} = 135^0$.

DỰNG TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA 2 ĐƯỜNG TRÒN.



Dựng đường tròn (M) cắt 2 đường tròn (O) và (O') tại $1, 2, 3, 4$. Hai đường thẳng $12, 34$ cắt nhau tại A. Tương tự đường tròn (M') cắt 2 đường tròn (O) và (O') tại $5, 6, 7, 8$. Hai đường thẳng $56, 78$ cắt nhau tại B. Khi đó đường thẳng AB là trục đẳng phương của (O) và (O').

CÁC BIẾN DẠNG BÀI TOÁN APOLLONIUS.



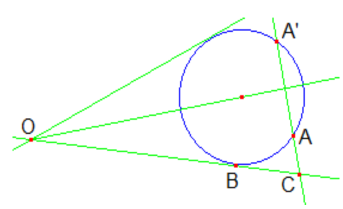
1. Dựng đường tròn đi qua 2 điểm A, B và tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước.

Giải. Gọi A', B' là các điểm nghịch đảo của A, B đối với (O). Gọi D là giao của AB và $A'B'$, C là tiếp điểm của (O) với đường tròn cần dựng. Khi đó dễ dàng chứng minh CD là tiếp tuyến chung của đường tròn (O) và đường tròn cần dựng. Từ đó suy ra cách dựng.

Chú ý: bài toán có 2 nghiệm.

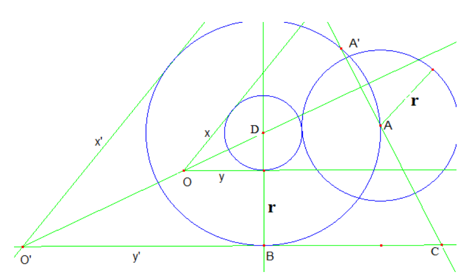
2. Dựng đường tròn tiếp xúc với 2 đường thẳng và đi qua một điểm (điểm A) có thể giải cách khác gọn hơn vấn đề 35. trong trang web *https://facstaff.susqu.edu/brakke/rulerandcompass*.

Điểm A cho trước. Gọi A' đối xứng với A qua phân giác. Dựa vào hệ thức $CB^2 = CA \cdot CA'$ ta dựng được điểm B.

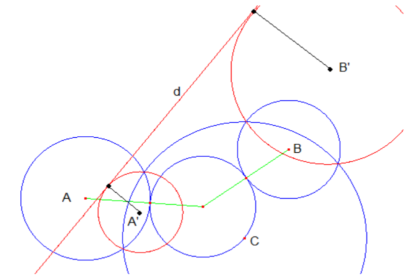


3. Dựng đường tròn tiếp xúc với 2 đường thẳng x, y và tiếp xúc với một đường tròn tâm A bán kính **r** cho trước.

Dựng góc $\widehat{x'O'y'}$ sao cho x, y và x', y' cùng cách nhau một khoảng bằng bán kính **r**. Khi đó OO' là phân giác. Đưa về bài toán 2, dựng đường tròn tiếp xúc với 2 đường thẳng x', y' và đi qua điểm A. Khi đó tâm D cũng là tâm của đường tròn cần dựng. Dựng như hình bên: dựa vào hệ thức $CB^2 = CA \cdot CA'$ để dựng điểm B.

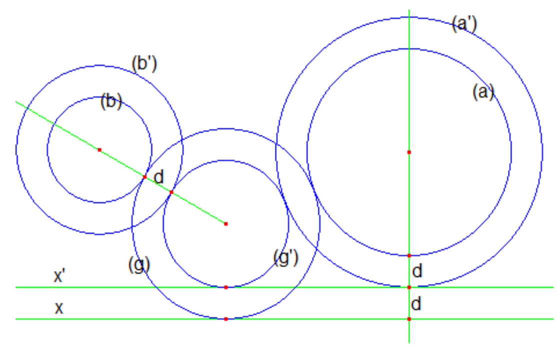


4. Dựng đường tròn tiếp xúc với 2 đường tròn tâm A, B và đi qua điểm C cho trước.
Dựng đường tròn tâm C bán kính tùy ý. Khi đó phép nghịch đảo đối với đường tròn (C) sẽ chuyển (A) và (B) thành 2 đường tròn (A') và (B') nào đó, đường tròn cần dựng sẽ thành đường thẳng d. Việc dựng d tiếp xúc với 2 đường tròn (A') và (B') là đơn giản, vì d là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đó.

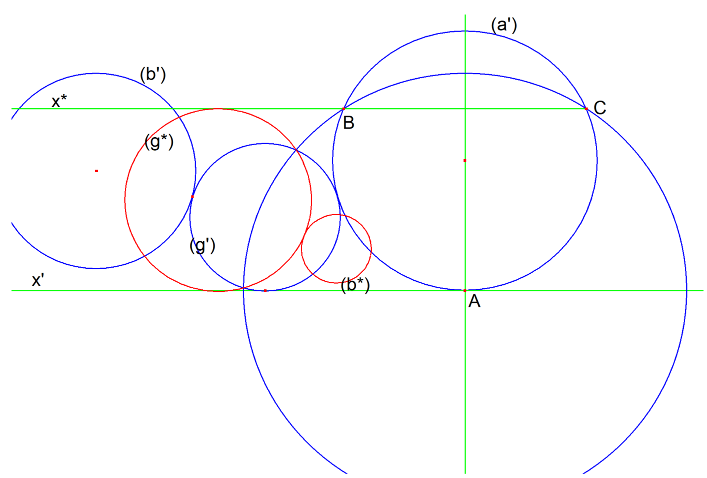


Ảnh nghịch đảo của d qua đường tròn tâm C chính là đường tròn cần dựng.

5. Dựng đường tròn tiếp xúc với 2 đường tròn $(a), (b)$ cho trước và tiếp xúc với đường thẳng x cho trước.
Theo hình vẽ bên, ta chỉ cần dựng đường tròn (g') tiếp xúc với 2 đường tròn $(a'), (b')$ và tiếp xúc với đường thẳng x'. Đường tròn (g) cần dựng sẽ là đường tròn tâm của (g'), bán kính tăng thêm d so với bán kính của (g').

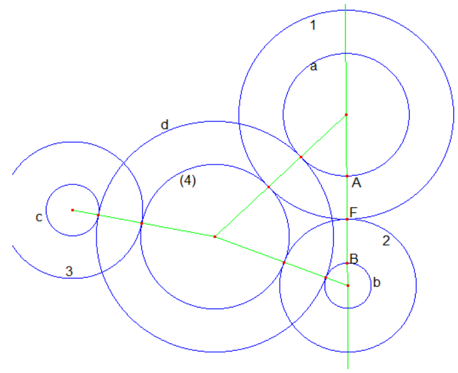


Dựng đường tròn tâm A bán kính $AB = AC$ bất kì. Phép nghịch đảo với đường tròn này chuyển đường tròn (a') thành đường thẳng x^* đi qua B, C, chuyển đường tròn (b') thành đường tròn (b^*).
Theo hình vẽ bên, ta chỉ cần dựng đường tròn (g^*) tiếp xúc với 2 đường thẳng x', x^* và tiếp xúc với đường tròn (b^*). Đường tròn (g') cần dựng sẽ là ảnh nghịch đảo của đường tròn (g^*).

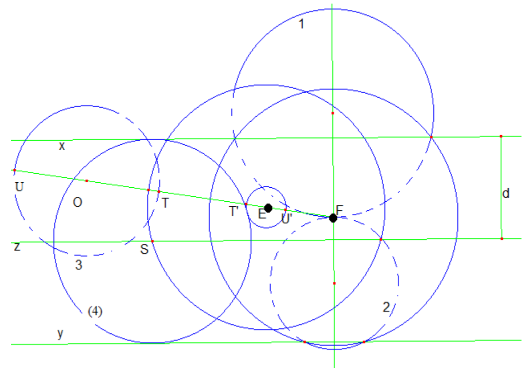


BÀI TOÁN APOLLONIUS: Dựng đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn cho trước.

Bài toán. Cho trước 3 đường tròn a, b, c. Hãy dựng đường tròn d tiếp xúc với các đường tròn a, b, c. Bài toán đưa về trường hợp 2 đường tròn trong 3 đường tròn cho trước tiếp xúc với nhau. Hình bên chỉ ra việc đó bằng cách tăng bán kính 3 đường tròn a, b, c thêm cùng một khoảng $\frac{AB}{2}$. Bây giờ phải dựng đường tròn (4) tiếp xúc với các đường tròn $1, 2, 3$. Đường tròn 1 và 2 tiếp xúc với nhau tại trung điểm F của AB.
Khi đó tăng bán kính (4) lên thêm $\frac{AB}{2}$ thành đường tròn d cần dựng. Đưa về bài toán 1.

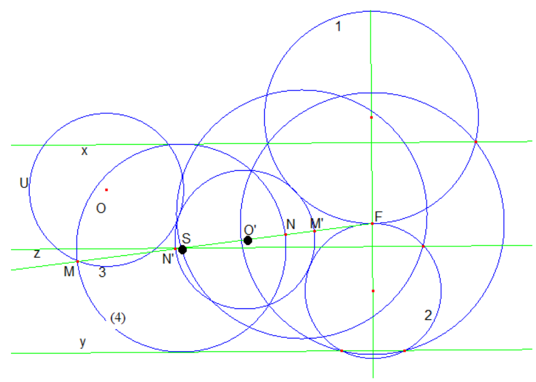


Bài toán 1. Cho trước 3 đường tròn $1, 2, 3$ trong đó 1và 2 tiếp xúc nhau tại F. Hãy dựng đường tròn tiếp xúc với các đường tròn $1, 2, 3$.
Sử dụng phép nghịch đảo: dựng đường tròn tâm F bán kính tùy ý sao cho phép nghịch đảo qua đường tròn này biến 1và 2 thành các đường thẳng x, y, biến đường tròn 3 thành đường tròn tâm E đường kính $T'U'$. (Các điểm T', U' là nghịch đảo của T, U qua đường tròn tâm F).
Bài toán đưa về dựng đường tròn (4) tiếp xúc với 2 đường thẳng x, y và tiếp xúc với đường tròn tâm E.



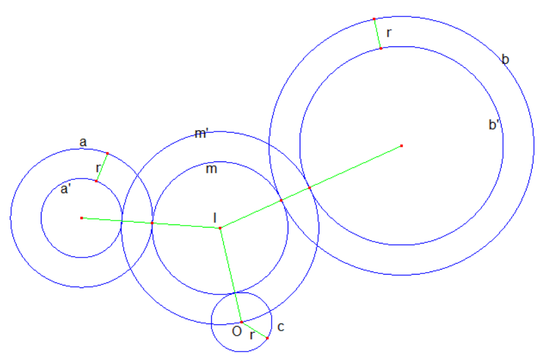
Hình bên chỉ ra việc đó bằng cách dựng đường tròn tâm E với bán kính là tổng của d và $\frac{U'T'}{2}$. (d là khoảng cách giữa x, z chính là nửa khoảng cách giữa x và y). Đường tròn này cắt đường thẳng z tại S, Khi đó đường tròn (4) cần dựng là đường tròn tâm S bán kính bằng d. Để hoàn thành bài toán 1, ta làm bài toán sau:

Bài toán 2. Biết đường tròn (4) tâm S ở bài toán 1: dựng đường tròn tiếp xúc với các đường tròn $1, 2, 3$.
Tia FS cắt (4) tại M, N. Dựng các điểm M', N' nghịch đảo với M, N.
Đường tròn tâm O' trung điểm đoạn $M'N'$ với bán kính $\frac{M'N'}{2}$ là đường tròn cần dựng. (*Do tính chất phép nghịch đảo các đường thẳng hay đường tròn tiếp xúc nhau thì ảnh nghịch đảo cũng tiếp xúc nhau*).



Chú ý rằng do các đường thẳng hay đường tròn có thể tiếp xúc ngoài hoặc trong với nhau nên bài toán có nhiều nghiệm. Hãy tham khảo *https://facstaff.susqu.edu/brakke/rulerandcompass*. Bài toán Apollonius là vấn đề 39. của trang này.

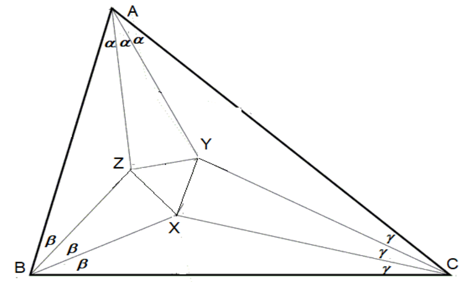
Một cách khác để giải bài toán Apollonius, sử dụng **4.** *mục trước (các biến dạng của bài toán Apollonius), dựng đường tròn (m') đi qua O và tiếp xúc với $(a'), (b')$. Hai đường tròn này cùng tâm với $(a), (b)$ và có bán kính giảm đi r - bán kính của (c). Sau đó dựng đường tròn (m) cùng tâm I với (m') và bán kính cũng giảm đi r. Đường tròn (m) là đường tròn cần dựng tiếp xúc với các đường tròn $(a), (b), (c)$ đã cho.*



ĐỊNH LÍ MORLEY - TRISECTOR THEOREM.

Định lí

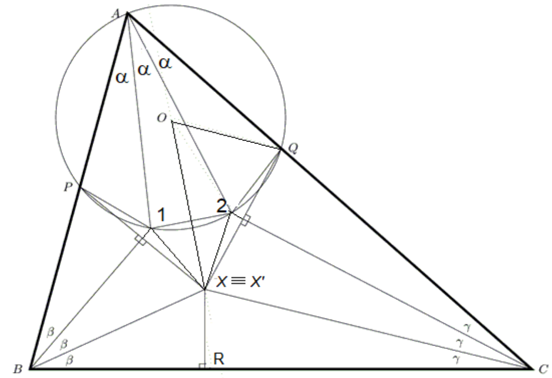
Từ mỗi đỉnh của tam giác ABC bất kì, kẻ 2 tia chia các góc trong của tam giác thành 3 góc bằng nhau. Các tia này cắt nhau tại các điểm X, Y, Z, xem hình bên. Chứng minh tam giác XYZ là tam giác đều.



Chứng minh.

Gọi P, Q là các điểm trên các cạnh tam giác sao cho $BP = BX, CQ = CX$.

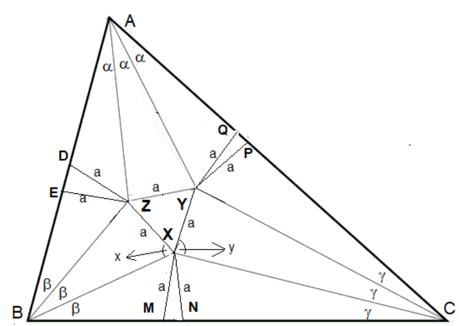
Đường tròn tâm (O) ngoại tiếp tam giác APQ, xem hình bên, cắt 2 tia xuất phát từ A tại các điểm $1, 2$. Hiển nhiên $P1 = 12 = 2Q$. Tam giác XPQ cân vì các cạnh $XP = XQ (= 2XR)$, suy ra $XO \perp 12$. Từ các góc xung quanh điểm X dễ dàng tính được $\widehat{OXQ} = 60^0 - \alpha$. Xét tam giác OXQ ta có thể chứng minh $X2 = Q2 \quad (*)$. Thật vậy $\widehat{XOQ} = 3\alpha, \widehat{XO2} = \alpha$, lấy $X' \in OX$ sao cho $X'12$ là tam giác đều. Khi đó $Q2 = X'2$ và từ hệ thức



$(90^0 - \alpha) + 3\alpha + 30^0 + 2\widehat{X'Q2} = 180^0$ (tổng các góc trong tam giác OQX') suy ra $\widehat{OX'Q} = 60^0 - \alpha$. Vậy $X \equiv X'$. Đẳng thức $(*)$ $X2 = Q2$ chứng tỏ điểm $2 \equiv Y$ và tương tự điểm $1 \equiv Z$, các điểm Y, Z là các điểm nêu trong phát biểu định lí. (Xem hình vẽ trong phần định lí). Tam giác XYZ chính là tam giác đều $X'12$ ta đã dựng ở trên, đ.p.c.m.

Chứng minh cách khác - Phương pháp ngược.

Ta chỉ cần dựng một hình thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là dựng được một tam giác ABC với các góc $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ (α, β, γ cho trước) và một tam giác đều XYZ cạnh a bên trong tam giác ABC sao cho các đoạn AY, AZ chia góc $\widehat{A}$ thành 3 góc bằng nhau, mỗi góc bằng α, các đoạn BX, BZ chia góc $\widehat{B}$ thành 3 góc, mỗi góc bằng β và các đoạn CX, CY chia góc $\widehat{C}$ thành 3 góc mỗi góc bằng γ.



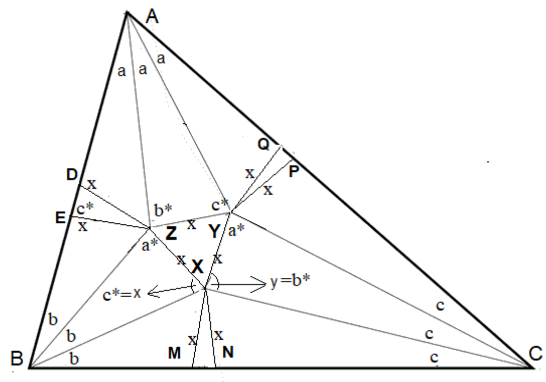
Giả sử ta dựng được tam giác như thế. Gọi M là điểm đối xứng với Y qua CX và N là điểm đối xứng với Z qua BX, xem hình trên. Tương tự P, Q là các điểm đối xứng với Z, X qua CY, AY tương ứng, D, E là các điểm đối xứng với X, Y qua BZ, AZ. Các đoạn XM, XN, YP, YQ, ZD, ZE bằng nhau và bằng a, cạnh tam giác đều XYZ.

Nhận xét rằng 3 tam giác AEZ, AYZ, AYP đỉnh A bằng nhau. Ta gọi chúng là các tam giác thuộc nhóm I, có các góc bằng $\alpha, \beta + 60^0, \gamma + 60^0$. Tương tự các tam giác bằng nhau đỉnh B thuộc nhóm II, có các góc bằng $\beta, \gamma + 60^0, \alpha + 60^0$ và các tam giác bằng nhau đỉnh C thuộc nhóm III, có các góc bằng $\gamma, \beta + 60^0, \alpha + 60^0$.

Thật vậy gọi $\widehat{BXZ} = x, \widehat{CXY} = y, \widehat{MXN} = t$. Cộng tất cả các góc đỉnh X lại ta được phương trình $2x + 2y - t = 300^0 \quad (1)$. Xét tam giác XBC ta có phương trình thứ hai $x + y - t = 120^0 + \alpha \quad (2)$. Từ 2 phương trình (1) và (2) suy ra $t = 60^0 - 2\alpha, x = \gamma + 60^0, y = \beta + 60^0$.

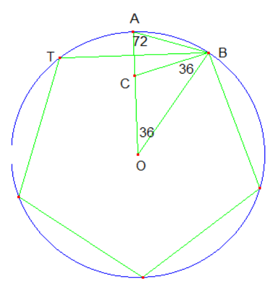
Từ các nhận xét kể trên bây giờ đến bước dựng hình. Dựng tam giác AYZ (thuộc nhóm I) với cạnh $YZ = a$ và các góc $\widehat{A} = \alpha, \widehat{Y} = \gamma + 60^0, \widehat{Z} = \beta + 60^0$. Tương tự dựng tam giác BXZ (thuộc nhóm II) và tam giác CXY (thuộc nhóm III). Tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

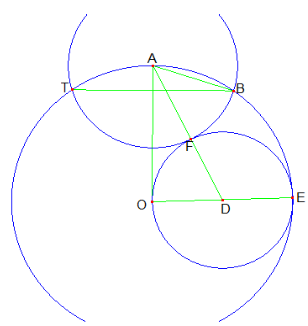
Chú ý rằng nếu ta đưa vào các kí hiệu $a* = a + 60^0$, $b* = b + 60^0, c* = c + 60^0$ thì các tam giác thuộc nhóm I có các góc bằng $a, b*, c*$, các tam giác thuộc nhóm II có các góc bằng $b, a*, c*$ và các tam giác thuộc nhóm III có các góc bằng $c, b*, a*$. (*Tất cả các tam giác này có một cạnh có độ dài bằng cạnh tam giác đều* XYZ).
Ghép 9 tam giác này lại như hình bên ta được một hình thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chẳng hạn khi ghép các tam giác nhóm I với nhóm II, vì góc $\widehat{EZD} = 60^0 - 2c$ (do tam giác ZED cân có góc đáy bằng c^*) nên
$\widehat{AZD} = \widehat{AZE} - \widehat{EZD} = 60^0 + b - (60^0 - 2c) = b + 2c$.
Khi đó do $\widehat{EDZ} = \widehat{DAZ} + \widehat{AZD}$ $(c* = a + b + 2c)$, góc ngoài của tam giác DAZ bằng tổng 2 góc trong, nên 3 điểm E, D, A thẳng hàng.



Tương tự D, E, B thẳng hàng. Như vậy ta đã dùng phương pháp ngược để chứng minh định lí Morley một cách dễ dàng, gọn gàng hơn các cách chứng minh khác.

Dựng ngũ giác đều. Gọi $AB = x, AC = m, OA = R = 1$ và xét 2 tam giác đồng dạng ta được $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{R} \Rightarrow m = x^2$ hay $1 - x = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Từ đó suy ra cách dựng:
Lấy trung điểm D của bán kính $OE (OE \perp OA)$, nối A với D. Đường tròn tâm D bán kính $\frac{R}{2} = \frac{1}{2}$ cắt AD tại F. Khi đó $AF = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Đường tròn tâm A bán kính AF cắt (O) tại B và T, 2 đỉnh liên tiếp của ngũ giác đều cần dựng.





Chú ý rằng từ đây ta cũng tính được $\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ và $\sin 36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

BÀI TẬP ĐẠI SỐ LỚP 7 CỦA HẢI LONG

- Biết $\dfrac{bz-cy}{a} = \dfrac{cx-az}{b} = \dfrac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

  Bài giải. Đặt $t = \dfrac{bz-cy}{a} = \dfrac{cx-az}{b} = \dfrac{ay-bx}{c} \Rightarrow t = \dfrac{bc\frac{z}{c} - bc\frac{y}{b}}{a} = \dfrac{ac\frac{x}{a} - ac\frac{z}{c}}{b} = \dfrac{ab\frac{y}{b} - ab\frac{x}{a}}{c}$
  hay $t = \dfrac{bc(\frac{z}{c} - \frac{y}{b})}{a} = \dfrac{ac(\frac{x}{a} - \frac{z}{c})}{b} = \dfrac{ab(\frac{y}{b} - \frac{x}{a})}{c}$. Ta sẽ chứng minh $t = 0$, từ đó suy ra $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, đ.p.c.m. Thật vậy
  $$\begin{cases} \dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{at}{bc} = \dfrac{a^2t}{abc} \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{bt}{ac} = \dfrac{b^2t}{abc} \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{a} = \dfrac{at}{bc} = \dfrac{c^2t}{abc} \end{cases}$$
  Cộng vế với vế 3 đẳng thức này ta được $0 = \dfrac{(a^2+b^2+c^2)t}{abc} \Rightarrow t = 0$.

- Giả thiết $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ với a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)}$.

  Bài giải. Đặt $t = a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$, khi đó ta có hệ phương trình
  $$\begin{cases} y+z = \frac{t}{a} \\ x+z = \frac{t}{b} \\ x+y = \frac{t}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{b} + \frac{t}{c} - \frac{t}{a}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{a} + \frac{t}{c} - \frac{t}{b}\right) \\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{a} + \frac{t}{b} - \frac{t}{c}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = \frac{t}{c} - \frac{t}{b} = \frac{(b-c)t}{bc} = a(b-c)\cdot\frac{t}{abc} \\ z - x = \frac{t}{a} - \frac{t}{c} = \frac{(c-a)t}{ac} = b(c-a)\cdot\frac{t}{abc} \\ x - y = \frac{t}{b} - \frac{t}{a} = \frac{(a-b)t}{ab} = c(a-b)\cdot\frac{t}{abc}. \end{cases}$$
  Vậy $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)}$ và cùng bằng $\dfrac{t}{abc}$.

- Biết $\frac{x^{2018}+y^{2018}+z^{2018}+t^{2018}}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{x^{2018}}{a^2} + \frac{y^{2018}}{b^2} + \frac{z^{2018}}{c^2} + \frac{t^{2018}}{d^2}$. Hãy tính $T = x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} + t^{2019}$.

  Bài giải. Ta sử dụng kết quả sau: nếu $\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \frac{d}{d'}$, với các số a, b, c, d không âm và a', b', c', d' dương thì
  $$a = b = c = d = 0.$$
  Thật vậy $a+b+c+d = (a'+b'+c'+d')\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \frac{d}{d'}\right) = a+b+c+d + a\frac{b'}{a'} + b\frac{c'}{b'} + d\frac{c'}{d'} + \cdots$
  Suy ra tổng các số không âm $a\frac{b'}{a'} + b\frac{c'}{b'} + c\frac{d'}{c'} + d\frac{c'}{d'} + \cdots = 0$, hay $a = b = c = d = 0$. Vậy $T = 0$.

- Cho a_1, a_2, a_3, a_4 khác 0 thỏa mãn $a_2^2 = a_1 \cdot a_3, a_3^2 = a_2 \cdot a_4, a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 \neq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \dfrac{a_1}{a_4}$.

  Bài giải. Từ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 = \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^3 = \frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}$. Mặt khác $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \frac{a_1}{a_4}$, đ.p.c.m.

- Cho a, b, c khác nhau và khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{b+a}$. Tính $P = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c}$.

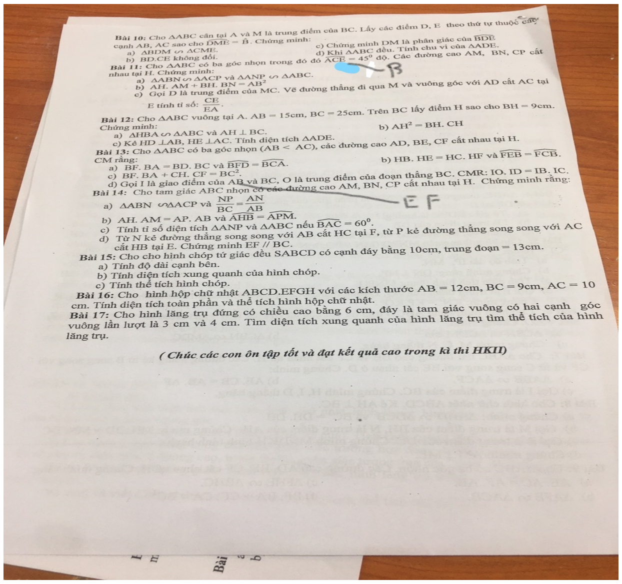
  Bài giải. $t = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{b+a} = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{3}{t} = 6$.

- CMR nếu $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} = M$ $(*)$ thì $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$.

  Bài giải. Từ $(*) \Rightarrow M = \frac{x+2y+z}{9a} = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c}$, đ.p.c.m.

Đại số Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$, biết a, b, c, d dương.
Giả sử $a \le b \le c \le d$, ta có $|x-a| + |x-d| = |x-a| + |d-x| \ge d-a$
$$|x-b| + |x-c| = |x-b| + |c-x| \ge c-b.$$
Vậy $\min A = (d-a) + (c-b)$, dấu "=" xảy ra khi $b \le x \le c$.

BÀI TẬP HÌNH HỌC LỚP 8 CỦA HẢI LONG



Bài 10: Cho ΔABC cân tại A và M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$. Chứng minh:

a) $\Delta BDM \backsim \Delta CME$.

b) BD.CE không đổi.

c) Chứng minh DM là phân giác của $\widehat{BDE}$

d) Khi ΔABC đều. Tính chu vi của ΔADE.

Bài 11: Cho ΔABC có ba góc nhọn trong đó đó $\widehat{ACE} = 45^0$ độ. Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Chứng minh:

B

a) $\Delta ABN \backsim \Delta ACP$ và $\Delta ANP \backsim \Delta ABC$.

b) $AH.\ AM + BH.\ BN = AB^2$

c) Gọi D là trung điểm của MC. Vẽ đường thẳng đi qua M và vuông góc với AD cắt AC tại E tính tỉ số: $\frac{CE}{EA}$.

Bài 12: Cho ΔABC vuông tại A. AB = 15cm, BC = 25cm. Trên BC lấy điểm H sao cho BH = 9cm. Chứng minh:

a) $\Delta HBA \backsim \Delta ABC$ và $AH \perp BC$.

b) $AH^2 = BH.\ CH$

c) Kẻ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$. Tính diện tích ΔADE.

Bài 13: Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. CM rằng:

a) $BF.\ BA = BD.\ BC$ và $\widehat{BFD} = \widehat{BCA}$.

b) $HB.\ HE = HC.\ HF$ và $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$.

c) $BF.\ BA + CH.\ CF = BC^2$.

d) Gọi I là giao điểm của AB và BC, O là trung điểm của đoạn thẳng BC. CMR: $IO.\ ID = IB.\ IC$.

Bài 14: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

EF

a) $\Delta ABN \backsim \Delta ACP$ và $\frac{NP}{BC} = \frac{AN}{AB}$

b) $AH.\ AM = AP.\ AB$ và $\widehat{AHB} = \widehat{APM}$.

c) Tính tỉ số diện tích ΔANP và ΔABC nếu $\widehat{BAC} = 60^0$.

d) Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt HC tại F, từ P kẻ đường thẳng song song với AC cắt HB tại E. Chứng minh EF // BC.

Bài 15: Cho cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng 10cm, trung đoạn = 13cm.

a) Tính độ dài cạnh bên.

b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

c) Tính thể tích hình chóp.

Bài 16: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH với các kích thước AB = 12cm, BC = 9cm, AC = 10 cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình hộp chữ nhật.

Bài 17: Cho hình lăng trụ đứng có chiều cao bằng 6 cm, đáy là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt là 3 cm và 4 cm. Tìm diện tích xung quanh của hình lăng trụ tìm thể tích của hình lăng trụ.

(Chúc các con ôn tập tốt và đạt kết quả cao trong kì thi HKII)

Bài 10. Chỉ cần xét góc, ta được $\Delta BMD \sim \Delta CEM$, rồi do M là trung điểm nên $\Delta BMD \sim \Delta MED$. Từ đó suy ra DM là phân giác, M là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔADE.

Bài 11 c). ME cắt AD tại F. Từ ΔAMD với MF là đường cao, suy ra $AF = 4FD$. Kẻ $DK \parallel CE \Rightarrow AE = 4DK \Rightarrow AE = 2EC$.

Bài 14 d). Kết luận câu này vẫn đúng khi H không là trực tâm. Kéo dài NF cắt BC tại T. Dùng định lí Thalet, $\frac{NE}{EB} = \frac{AP}{PB} = \frac{NF}{FT}$ suy ra đ.p.c.m.

BÀI KIỂM TRA

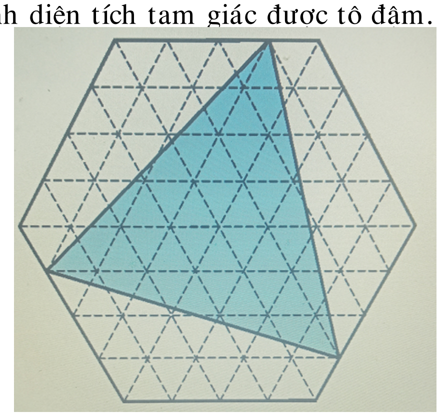
1. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh tam giác MEF là tam giác đều.

2. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^0$, $BC = 6$cm. Đường vuông góc với AB tại A cắt BC tại D. Tính độ dài BD.

3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$. Trên tia phân giác của góc $\widehat{A}$ lấy điểm E sao cho $AE = AB + AC$. Chứng minh tam giác BCE là tam giác đều.

4. Rút gọn biểu thức:
$$A = \left(\frac{2x^2+1}{x^3-1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{x^2-2}{x^2+x+1}\right)$$
Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$. Tìm GTNN của A. Tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Bài toán hình lớp 6 đăng trên vnexpress.net cách đây vài tháng: Hình dưới là lục giác đều gồm 96 tam giác đều bằng nhau, diện tích mỗi tam giác đều bằng 1. Tính diện tích tam giác được tô đậm.



Viết lại lời giải bài toán của anh Bích nhé! $x^2+x+1 = 0$ (1) $\Leftrightarrow$ $x+1+\frac{1}{x} = 0$ (2). Bước này đúng. Bước tiếp theo là sai khi trừ (1) và (2) cho nhau rồi khẳng định (2) $\Leftrightarrow$ $x^2 - \frac{1}{x} = 0$. Đúng hơn phải là (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2+x+1 &= 0 \\ x+1+\frac{1}{x} &= 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - \frac{1}{x} &= 0 \\ x^2+x+1 &= 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - \frac{1}{x} &= 0 \\ x+1+\frac{1}{x} &= 0. \end{cases}$ Như thế không có gì vô lí cả.

Chẳng hạn ta xét bài toán giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2-2x+1 &= 0 \\ \dfrac{1}{x} &= 1. \end{cases}$ Thực ra 2 phương trình này đều tương đương với nhau và tương đương với $x = 1$.