MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO TỔNG QUÁT

Ma trận nghịch đảo tổng quát là một chủ đề hay trong đại số tuyến tính. Nó được sử dụng nhiều trong lý thuyết thống kê toán, trong tin học và một số lĩnh vực khác nhau. Ma trận nghịch đảo tổng quát sẽ đưa ra một dạng nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính nhiều nghiệm dạng ma trận, như sẽ chỉ ra dưới đây.

ĐỊNH NGHĨA *Ma trận A kiểu $m \times n$ cho trước. Ma trận A^- với kiểu $n \times m$ được gọi là ma trận nghịch đảo tổng quát của A nếu với bất kì $\mathbf{Y}$ mà hệ phương trình $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ có nghiệm thì $\mathbf{X} = A^-\mathbf{Y}$ là nghiệm của hệ phương trình đó.*

TÍNH CHẤT

• $\exists\ A^- \Leftrightarrow AA^-A = A$ (1)

Thật vậy nếu $\mathbf{a}_i$ là cột thứ i của A. Theo định nghĩa, $\mathbf{X} = A^-\mathbf{a}_i$ là nghiệm của phương trình $A\mathbf{X} = \mathbf{a}_i \Rightarrow AA^-\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \Rightarrow AA^-A = A$.

Ngược lại nếu (1) đúng và hệ phương trình $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ có nghiệm thì $AA^-A\mathbf{X} = A\mathbf{X}$ hay $AA^-\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$, suy ra $\mathbf{X} = A^-\mathbf{Y}$ là nghiệm của hệ phương trình $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

(*Chú ý rằng ma trận nghịch đảo tổng quát không duy nhất. Một số tác giả bổ sung thêm điều kiện để ma trận nghịch đảo tổng quát là duy nhất*).

• Giả thiết A^- là ma trận nghịch đảo tổng quát của A, kí hiệu $H = A^-A$

(a) $H^2 = H$.

(b) $AH = A$ và $r(A) = r(H) = s(H)$. ($s(H)$ *được gọi là vết của* H)

(c) Nghiệm của $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ có dạng $(H - I)\mathbf{u}$, với $\mathbf{u}$ là véc tơ tùy ý.

(d) Nghiệm tổng quát của $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ có dạng $\mathbf{X} = A^-\mathbf{Y} + (H - I)\mathbf{u}$, với $\mathbf{u}$ là véc tơ tùy ý.

(e) $B\mathbf{X}$ nhận một giá trị duy nhất với tất cả các nghiệm $\mathbf{X}$ của hệ phương trình $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ khi và chỉ khi $BH = B$.

(f) $r(A^-) \geq r(A)$. (*Sau đây ta sẽ chỉ ra sự tồn tại và cách tìm ma trận nghịch đảo tổng quát với hạng lớn nhất độc lập với hạng của* A).

Thật vậy (a) là hiển nhiên và $r(A) = r(H)$ là hệ quả của hệ thức $AH = A$. Đẳng thức $r(H) = s(H)$ trong (b) là do $\mathrm{Im}(H) \cap \ker(H) = \emptyset$ đồng thời $\mathrm{Im}(H)$ là không gian con riêng với giá trị riêng bằng 1, còn $\ker(H)$ là không gian con riêng với giá trị riêng bằng 0.

Điều kiện đủ của (c) là hiển nhiên. Điều kiện cần được suy ra từ hệ thức $X = (H - I) \cdot (-X)$ với mọi X là nghiệm của hệ phương trình $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Khẳng định (e) là hiển nhiên do sử dụng dạng nghiệm tổng quát của $A\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ trong (d).

Khẳng định (f) được suy ra từ (b) $r(A) = r(A^-A)$.

VÍ DỤ

Các ví dụ 1, ví dụ 2 và 3 dưới đây giới thiệu các ma trận nghịch đảo tổng quát để chúng ta kiểm tra các tính chất liệt kê ở trên. Việc tính các ma trận nghịch đảo tổng quát đó được giới thiệu ở phần cuối.

1. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ma trận nghịch đảo tổng quát của $A:\ A^- = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   Ta có thể kiểm tra các tính chất $AA^-A = A$. Ma trận $H = A^-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $H^2 = H$.

2. Với $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, ma trận nghịch đảo tổng quát $A^{-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$

   Ma trận $H = A^{-}A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$. Hiển nhiên $r(A) = r(H) = s(H) = 1$.

   Theo (d) nghiệm tổng quát của phương trình $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ là $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hay $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Ta cũng có thể nói $\mathbf{X} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng.

   Lưu ý rằng ta cũng có thể thấy ma trận nghịch đảo tổng quát của ma trận $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ *là* $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Với $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, ma trận nghịch đảo tổng quát $A^{-} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   Dễ dàng tính được ma trận $H = A^{-}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ và

   $$r(A) = r(H) = s(H) = 1.$$

   Theo phương pháp bên dưới ta tính được các ma trận nghịch đảo tổng quát khác (A_1 và A_2) của ma trận $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

   $$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = A_1 A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = A_2 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PHƯƠNG PHÁP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO TỔNG QUÁT

• Nếu H là ma trận idempotent $H^2 = H$ thì H đồng thời là ma trận nghịch đảo tổng quát của chính nó.

• Cho A là ma trận kiểu $m \times n$ có hạng bằng r. Khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến B và C cấp m, n tương ứng sao cho $BAC = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \Delta$. (Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng và cột). Khi đó $A^{-} = C\Delta^t B$ là ma trận nghịch đảo tổng quát của A.

Thật vậy xét $AA^{-}A = (B^{-1}\Delta C^{-1})(C\Delta^t B)(B^{-1}\Delta C^{-1}) = B^{-1}\Delta\Delta^t\Delta C^{-1} = B^{-1}\Delta C^{-1} = A$

(*Chú ý* $\Delta\Delta^t\Delta = \Delta$ *hay* Δ^t *là ma trận nghịch đảo tổng quát của* Δ.)

• *Phương pháp xây dựng ma trận nghịch đảo tổng quát có hạng lớn nhất* của ma trận A với kiểu $m \times n$ và có hạng bằng r. Trong phương pháp này $r(A^-) = \min(m,n)$ độc lập với hạng của A.

Giả sử $m \le n$, kí hiệu B là ma trận vuông cấp n bằng việc bổ sung các hàng $\mathbf{0}$ vào A. Bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa B về dạng hình thang, ta có thể nói $\exists C$ không suy biến sao cho $CB = H$, H là ma trận dạng hình thang $H^2 = H$. Xét ma trận A^- nhận được từ C bằng cách xóa đi $n-m$ cột cuối. Do C không suy biến nên hạng của A^-, $r(A^-) = m$. Mặt khác

$$BCB = BH = C^{-1}H^2 = C^{-1}H = B = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Kí hiệu $C = \begin{pmatrix} A^- & | & D \end{pmatrix}$, do $BCB = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^- & | & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^-A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ đẳng thức trên có dạng

$$\begin{pmatrix} AA^-A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Suy ra $AA^-A = A$ hay A^- là ma trận nghịch đảo tổng quát có hạng lớn nhất của A.

Nếu $n < m$, B được bổ sung thêm các cột $\mathbf{0}$ và A^- nhận được từ C bằng cách xóa đi $m-n$ hàng cuối.

• *Phương pháp xây dựng ma trận nghịch đảo tổng quát có hạng bằng hạng của ma trận A*

Giả sử ma trận A có hạng bằng r. Khi đó tồn tại ma trận con không suy biến B cấp r. Bằng việc đổi hàng, cột hợp lí, ma trận A có dạng

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

Ta dễ dàng chứng minh ma trận

$$A^- = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (*)$$

là ma trận nghịch đảo tổng quát của A. Thật vậy

$$AA^-A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ DB^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & DB^{-1}C \end{pmatrix}$$

Ta sẽ chứng minh $DB^{-1}C = E$, từ đó suy ra $AA^-A = A$, đ.p.c.m.

Do cấp của B bằng r và cũng là hạng của A suy ra $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BT \\ DT \end{pmatrix}$ hay $DB^{-1}C = DB^{-1}BT = DT = E$.

Nhận xét rằng với $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BT \\ DT \end{pmatrix}$ *khi đó ma trận sau*

$$A^- = \begin{pmatrix} B^{-1} & -T \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \quad (**)$$

là ma trận nghịch đảo tổng quát có hạng lớn nhất của A, $r(A^-) = \min(m,n)$. *Thật vậy*

$$AA^-A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & -T \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ DB^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & DB^{-1}C \end{pmatrix} = A.$$

VÍ DỤ

1. Tìm ma trận nghịch đảo tổng quát của $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

   Ma trận A có hạng bằng 2. Viết ma trận A dưới dạng $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ khi đó B là ma trận cấp 2 góc trái, phía trên và dễ dàng tính được $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Vậy áp dụng $(*)$ $A^{-} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận nghịch đảo tổng quát. $H = A^{-}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ bằng

$$(H - I).\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ C \end{pmatrix} = C(1, -2, 1)^t.$$

   Nhận xét rằng nếu áp công thức $(**)$ vào ta sẽ được ma trận nghịch đảo tổng quát khác. Từ hệ thức $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BT \\ DT \end{pmatrix}$ dễ dàng tính được $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ và do đó theo $(**)$ ma trận nghịch đảo tổng quát của A bằng $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sử dụng ma trận này, không khó để thấy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ trùng với kết quả trên $C(1, -2, 1)^t$ với C tùy ý.

   Thêm một nhận xét nữa, do $A^2 = A$ idempotent, nên A đồng thời cũng là ma trận nghịch đảo tổng quát của chính nó.

2. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

   Ma trận các hệ số của hệ phương trình $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Ma trận nghịch đảo tổng quát của A theo cách tính trên $A^{-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Ma trận $H = A^{-}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, suy ra nghiệm tổng quát

   $\mathbf{X} = A^{-}\mathbf{Y} + (H - I)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$ với $\mathbf{u}$ tùy ý, hay

$$\mathbf{X}^t = (-2, 4, 0, 0) + C(0, 1, 0, -1).$$