Chuỗi điều hòa và hằng số Euler

Ta đã biết chuỗi điều hoà $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ phân kì, các tổng riêng $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, n=1,2,...$ tăng dần ra vô cùng. Euler đã chỉ ra tốc độ tăng của nó bằng tốc độ tăng của $\ln n$. Chính xác hơn

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+C+\alpha_n,\quad (*)}$$

trong đó $\mathbf{C}\approx 0,577...$ được gọi là hằng số Euler và α_n là vô cùng bé (VCB), $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Thật vậy, xét chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right)$. Nó là chuỗi hội tụ. Gọi C là tổng của chuỗi, người ta tính được $C\approx 0,577215665$.

Mặt khác $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln k\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln(n+1)$. Từ đây suy ra $(*)$.

Phần tiếp theo ta sẽ ứng dụng hệ thức $(*)$ ở trên để tính tổng một số chuỗi đặc biệt.

1. *Chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\quad(1)$

   Chuỗi đan dấu (1) bán hội tụ, sử dụng $(*)$ ta tính tổng của nó như sau. Tổng riêng thứ $2k$ của chuỗi (1) bằng

$$S_{2k}=\left(\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2n}\right)=\left(\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2n}\right)=(\ln 2k+C)-(\ln k+C)+\alpha_k$$

   Suy ra

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots=\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\lim_{k\to\infty}\ln 2k-\ln k+\alpha_k=\ln 2.$$

2. *Chuỗi hoán vị của chuỗi đan dấu* (1) theo chu kì, lần lượt *hai số hạng âm tiếp theo một số hạng dương*

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\quad(2)$$

   Tổng riêng thứ $3k$ của chuỗi (2) (không tính dấu ngoặc trong chuỗi (2) ở trên) bằng

$$S_{3k}=\sum_{n=1}^{3k}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=\sum_{n=1}^{3k}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3k}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

   Đây là nửa tổng riêng (thứ $6k$) của chuỗi đan dấu (1), suy ra chuỗi (2) có tổng bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

3. *Chuỗi hoán vị nữa của chuỗi đan dấu* (1) theo chu kì, lần lượt *hai số hạng âm tiếp theo ba số hạng dương*

$$\begin{aligned}
s&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2(3n-2)-1}+\frac{1}{2(3n-1)-1}+\frac{1}{2(3n)-1}\right)-\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2(2n)}\right)\right]\\
&=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{6k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2(3n-2)}+\frac{1}{2(3n-1)}+\frac{1}{2(3n)}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\right]\\
&=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{6k}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)\right]-\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\big(\ln 2k+C+\alpha_k\big)\\
&=\lim_{k\to\infty}\left[\big(\ln 6k+C\big)-\frac{1}{2}\big(\ln 3k+C+\alpha_k\big)\right]-\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\big(\ln 2k+C+\alpha_k\big)=\frac{1}{2}\ln 6.
\end{aligned}$$

4. Tổng quát hơn nếu hoán vị theo chu kì: tiếp theo p số dương là q số hạng âm, bằng cách làm hoàn toàn tương tự, tổng của chuỗi hoán vị bằng $\ln\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)$.

Thật vậy, tổng riêng thứ k của chuỗi hoán vị (mỗi số hạng của nó chứa tổng của p số hạng dương và q số hạng âm, sau một số bước biến đổi như đã viết chi tiết ở trên, bằng

$$\sum_{n=1}^{2pk}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{pn-(p-1)}+\frac{1}{pn-(p-2)}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{qn-(q-1)}+\frac{1}{qn-(q-2)}+\cdots+\frac{1}{qn}\right)$$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{2pk}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{pk}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{qk}\frac{1}{n}$. Áp dụng công thức Euler $(*)$ cho từng số hạng của biểu thức này

$$=\left(\ln 2pk+C\right)-\frac{1}{2}\left(\ln pk+C\right)-\frac{1}{2}\left(\ln qk+C\right)+\alpha_k=\ln 2pk-\frac{1}{2}\ln pk-\frac{1}{2}\ln qk+\alpha_k\to\ln\left(2\cdot\sqrt{\frac{p}{q}}\right)\text{ khi }k\to\infty.$$

Ta đã chứng minh tổng của chuỗi hoán vị bằng $\ln\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)$.

Bạn đọc có thể kiểm tra từng bước qua trường hợp riêng, chẳng hạn với chuỗi hoán vị: tiếp theo 4 số hạng dương là 3 số hạng âm $(p=4, q=3)$ chuỗi sau có tổng bằng $\ln\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2(4n-3)-1}+\frac{1}{2(4n-2)-1}+\frac{1}{2(4n-1)-1}+\frac{1}{2(4n)-1}\right)-\left(\frac{1}{2(3n-2)}+\frac{1}{2(3n-1)}+\frac{1}{2(3n)}\right)\right]$$

Nhận xét rằng các kết quả trên minh họa phần nào cho một định lí về chuỗi bán hội tụ: *luôn tồn tại một cách hoán vị các số hạng của chuỗi bán hội tụ để chuỗi có tổng là một số thực bất kì cho trước.*