Chuỗi điều hòa và hằng số Euler

Ta đã biết chuỗi điều hoà $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ phân kì, các tổng riêng $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n = 1, 2, ...$ tăng dần ra vô cùng. Euler đã chỉ ra tốc độ tăng của nó bằng tốc độ tăng của $\ln n$. Chính xác hơn

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + \alpha_n, \quad (*)}$$

trong đó $\mathbf{C} \approx 0,577...$ được gọi là hằng số Euler và α_n là vô cùng bé (VCB), $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Thật vậy, xét chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})\right)$. Nó là chuỗi hội tụ. Gọi C là tổng của chuỗi, người ta tính được $C \approx 0,577215665$.
Mặt khác $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)$. Từ đây suy ra $(*)$.

Phần tiếp theo ta sẽ ứng dụng hệ thức $(*)$ ở trên để tính tổng một số chuỗi đặc biệt.

1. *Chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots \quad (1)$

   Chuỗi đan dấu (1) bán hội tụ, sử dụng $(*)$ ta tính tổng của nó như sau. Tổng riêng thứ $2k$ của chuỗi (1) bằng

$$S_{2k} = \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n}\right) = (\ln 2k + C) - (\ln k + C) + \alpha_k$$

   Suy ra

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} \ln 2k - \ln k + \alpha_k = \ln 2.$$

2. *Chuỗi hoán vị của chuỗi đan dấu* (1) theo chu kì, lần lượt *hai số hạng âm tiếp theo một số hạng dương*

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \quad (2)$$

   Tổng riêng thứ $3k$ của chuỗi (2) (không tính dấu ngoặc trong chuỗi (2) ở trên) bằng

$$S_{3k} = \sum_{n=1}^{3k} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \sum_{n=1}^{3k} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3k} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

   Đây là nửa tổng riêng (thứ $6k$) của chuỗi đan dấu (1), suy ra chuỗi (2) có tổng bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

3. *Chuỗi hoán vị nữa của chuỗi đan dấu* (1) theo chu kì, lần lượt *hai số hạng âm tiếp theo ba số hạng dương*

$$\begin{aligned}
s &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2(3n-2)-1} + \frac{1}{2(3n-1)-1} + \frac{1}{2(3n)-1}\right) - \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n)}\right)\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{6k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2(3n-2)} + \frac{1}{2(3n-1)} + \frac{1}{2(3n)}\right)\right] - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{6k} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}\right)\right] - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} (\ln 2k + C + \alpha_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[(\ln 6k + C) - \frac{1}{2}(\ln 3k + C + \alpha_k)\right] - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} (\ln 2k + C + \alpha_k) = \frac{1}{2}\ln 6.
\end{aligned}$$

4. Tổng quát hơn nếu hoán vị theo chu kì: tiếp theo p số dương là q số hạng âm, bằng cách làm tương tự, tổng của chuỗi hoán vị bằng $\ln\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)$.

   Chẳng hạn với $p=4, q=3$ chuỗi sau có tổng bằng $\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 3)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2(4n-3)-1}+\frac{1}{2(4n-2)-1}+\frac{1}{2(4n-1)-1}+\frac{1}{2(4n)-1}\right)-\left(\frac{1}{2(3n-2)}+\frac{1}{2(3n-1)}+\frac{1}{2(3n)}\right)\right]$$

   Nhận xét rằng các kết quả trên gắn liền với một định lí về chuỗi bán hội tụ: *luôn tồn tại một cách hoàn vị các số hạng của chuỗi bán hội tụ để chuỗi có tổng là một số thực bất kì cho trước.*