HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

BÀI TẬP GIẢI TÍCH II

NGUYỄN NGỌC CỪ

Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+xy)^{\frac{1}{x^2+xy}}$ (f) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$

(g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$ (h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3}{x^2+y^2-xy}$

2. Chứng minh rằng không tồn tại các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+y)}{y}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin y}{x^4+y^2}$

3. Cho hàm $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2-\cos y^2}{x^2+y^2}$. Xét giới hạn hàm số trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$ và xét các giới hạn lặp trong quá trình $x\to 0,\ y\to 0$ của hàm đó.

3'. Cho hàm $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{y} & \text{nếu } y\neq 0\\ 0 & \text{nếu } y=0.\end{cases}$ Tìm giới hạn hàm số trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$ và tìm các giới hạn lặp trong quá trình $x\to 0,\ y\to 0$ của hàm đó.

4. Tìm các điểm gián đoạn của hàm

(a) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{nếu } \ x+y\neq 0\\ 0 & \text{nếu } \ x+y=0\end{cases}$$

(b) $$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x}{y} & \text{nếu } \ y\neq 0\\ 1 & \text{nếu } \ y=0\end{cases}$$

5. Tìm A để các hàm số dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}^2$

(a) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-yx^2}{x^3-y^3} & \text{nếu } \ x\neq y\\ A & \text{nếu } \ x=y\end{cases}$$

(b) $$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} & \text{nếu } \ (x,y)\neq(0,0)\\ A & \text{nếu } \ x=y=0\end{cases}$$

6. Tìm giới hạn $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}$.

7. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

(a) $u=xy^{\frac{x}{y}}$ (b) $u=x^{yz}$

(c) $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$ (d) $u=x^{y^2z}$

(e) $u=\ln\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ (f) $u=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{xz}\right)$

8. Chứng minh rằng hàm

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{nếu } \ x^2+y^2>0\\ 0 & \text{nếu } \ x=y=0\end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $(0,0)$ nhưng tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ tại điểm $(0,0)$ đó.

9. Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

(a) $u = (x^2 + y^2)^2$ (b) $u = \ln(x^2 + y^2)$

(c) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (d) $u = \sin(x + yz)$

(e) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ (f) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

(g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2} + \sin x$ (h) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

10. Tính $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$, trong đó $f(x, y) = e^{xy}$.

11. Chứng tỏ rằng các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 của hàm sau tại điểm $O(0, 0)$ không bằng nhau

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2 - xy^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

12. Cho hàm số $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$. Hãy tính

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{tại} \quad A(1, 2).$$

13. Chứng minh rằng hàm $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ thỏa mãn phương trình $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

14. Chứng minh rằng hàm $u(x, y) = f(xy) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, với f, g là các hàm thực một biến số, khả vi đến cấp hai, thỏa mãn phương trình

$$x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = yu'_y - xu'_x.$$

15. Chứng minh rằng hàm $u(t, x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$, với $a > 0, t > 0$ thỏa mãn phương trình $u'_t = a^2u''_{xx}$.

16. Chứng minh rằng $u = f(x - at) + g(x + at)$, với a là hằng số, f và g có đạo hàm cấp hai liên tục, là nghiệm của phương trình
$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}.$$

17. Chứng minh rằng $u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} g\left(\frac{y}{x}\right)$, với n là số tự nhiên, f và g có đạo hàm cấp hai liên tục, là nghiệm của phương trình
$$x^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} = n(n-1)u.$$

18. Hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ có khả vi tại $(0, 0)$ không?

19. Hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$ có khả vi tại $(0, 0)$ không?

20. Chứng minh rằng hàm $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = y = 0 \end{cases}$ có các đạo hàm riêng $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ nhưng không khả vi tại $(0, 0)$.

21. Chứng minh rằng hàm
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$
tồn tại các đạo hàm riêng tại $O(0, 0)$, song hàm không khả vi tại $O(0, 0)$.

22. Tính đạo hàm hàm $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ tại điểm $M(3, 1)$ theo hướng từ M đến $N(6, 5)$.

23. Tính đạo hàm hàm $f = x^2 + y^2$ theo hướng lập với Ox góc 120^0 tại $M(1, 0)$.

24. Tính đạo hàm hàm $f = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ theo hướng phân giác góc phần tư thứ nhất tại $M(1, 1)$.

25. Tìm $\overrightarrow{grad}\ u$ tại $M(-2, 3, 4)$ với $u = xyz$ và tính đạo hàm của u tại đó theo hướng $\overrightarrow{grad}\ u$.

26. Cho hàm véc tơ $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2, xy)$. Chứng tỏ rằng $\mathbf{f}$ khả vi tại $M(1,1)$. Tính đạo hàm $\mathbf{f}'$ và vi phân $d\mathbf{f}$ tại M.

27. Tìm đạo hàm của các hàm véc tơ sau

    (a) $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (xy, x^2+y^2, x^2-y^2)$.

    (b) $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2, x+y+z)$.

28. Cho các hàm véc tơ $\mathbf{f}(u,v) = (u-2v, uv)$ và $\mathbf{g}(x,y,z) = (x+y^2, xy-z)$. Tìm đạo hàm của hàm véc tơ $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ tại $M(1,0,2)$.

29. Tính các đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$, biết
$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0.$$

30. Sử dụng phép đổi biến $x = \frac{1}{t}$ hãy đưa phương trình sau về phương trình của hàm theo biến t
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0.$$

31. Tìm các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm ẩn $z = z(x,y)$, biết nó được xác định bởi hệ thức

    (a) $x^2+y^2+z^2 = a^2$

    (b) $x+y+z = e^z$

    (c) $x+y+z = e^{-(x+y+z)}$

32. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của u và v, biết chúng được xác định bởi các hệ thức
$$\begin{cases} xy - z\cos u\cos v = 0 \\ yz - x\cos u\sin v = 0 \end{cases}$$

33. Tìm cực trị các hàm số dưới đây

    (a) $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

    (b) $u = x^3 + y^3 - (x+y)^2$.

    (c) $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4.$

(e) $f(x,y) = y^4 + 2y^2 + 2x^2 - 2xy^2 - 4x + 2.$

(f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

33'. (a) Tìm điểm cao nhất (có tung độ y lớn nhất) thuộc elip

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

(b) Tìm điểm cao nhất (có tung độ y lớn nhất) thuộc elip

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

(c) Hàm ẩn $y = y(x)$ được xác định bởi hệ thức $4xy^2 + 4x^2y = 1.$ Tính đạo hàm hàm ẩn $\dfrac{dy}{dx}$ và tìm cực trị hàm ẩn đó.

34. Tìm cực trị các hàm

(a) $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x.$ (*Hệ phương trình cho điểm dừng duy nhất* $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2)$. *Hàm đạt cực tiểu tại* M, $u(M) = -\frac{17}{4}$.)

(b) $u = xyz(1 - x - y - z).$

(c) $u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1.$

(d) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

35. Tìm cực trị có điều kiện các hàm sau

(a) Tìm cực trị $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1.$

(b) $u = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

(c) $u = xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

(d) $f = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

(e) $f = 3x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = R^2$

(f) $u = x^2 + z^2 - y^2$ với điều kiện $x - y + z = 0$

(g) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

36. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm

    (a) $z = x^2 - y^2$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

    (b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

    (c) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$

    (d) $u(x, y, z) = (x^2 + 2xy + 3y^2 - 5)\sin^2 z$ trên tập đóng (không bị chặn) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z \in \mathbb{R}\}$, biết D là tam giác với các đỉnh $(-1, 1), (2, 1)$ và $(-1, -2)$.

    (e) $u = x - 2y + 3z$ trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

    (f) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

37. (a) Trong số các tam giác nội tiếp trong đường tròn, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

    (b) Trong số các tam giác ngoại tiếp đường tròn, tìm tam giác có diện tích bé nhất.

    (c) Trong số các hình lục giác ngoại tiếp đường tròn, tìm hình có diện tích bé nhất.

38. Tìm hình hộp có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

39. Một công ty vận chuyển bưu điện chỉ nhận các gói hàng hình hộp chữ nhật với tổng chiều dài và chu vi mặt cắt (chu vi thiết diện vuông góc với chiều dài gói hàng) không quá $6m$. Hãy xác định kích thước gói hàng mà công ty nhận vận chuyển sao cho nó có thể tích lớn nhất.

40. Tìm điểm thuộc mặt $xy^2z^3 = 2$ mà khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ $O(0, 0, 0)$ là ngắn nhất.

41. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong ellip $x^2+4y^2 = 4$. (Hình chữ nhật nội tiếp có các cạnh song song với các trục tọa độ).

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Giới hạn và liên tục

1A. Tóm tắt lí thuyết

• Giới hạn hàm véc tơ $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ nếu $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0$ sao cho khi $\mathbf{x}$ thỏa mãn $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ thì $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon$.

Giả thiết hàm véc tơ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ gồm m hàm thành phần, khi đó

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., m$$

trong đó $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$. Như vậy việc tìm giới hạn hàm véc tơ sẽ đưa về bài toán tìm giới hạn hàm thực n biến số f_i.
• Giả thiết f, g là các hàm thực n biến số, tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = u, \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = v$. Khi đó ta có quy tắc *giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương 2 hàm f và g bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn 2 hàm đó* như quy tắc tìm giới hạn hàm một biến

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\big) = u + v, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\big) = u - v.$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})\big) = u \cdot v, \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0).$$

• *Nguyên lí kẹp*: với hàm số nhiều biến số $f, u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ giả thiết

$$u(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{x}), \ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} u(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} v(\mathbf{x}) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

Đặc biệt tích của một VCB và hàm giới nội cũng là VCB trong cùng một quá trình. Cụ thể hơn, giả thiết $\alpha, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f là hàm bị chặn tại một lân cận nào đó của $\mathbf{a}$ và $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\alpha(\mathbf{x}) = 0$, khi đó

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(\alpha(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})\big) = 0.$$

Chúng ta thường dùng nguyên lí này để tìm giới hạn các hàm thực nhiều biến số.

• Sử dụng nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy để chứng minh việc *không tồn tại giới hạn hàm số* trong một quá trình nào đó.

Chẳng hạn để chứng minh hàm $f(x, y)$ không tồn tại giới hạn trong quá trình $(x, y) \to \mathbf{a}$, ta cần chỉ ra 2 dãy điểm cùng dần tới điểm $\mathbf{a}$, $\{\mathbf{a}_n\} \to \mathbf{a}$ và $\{\mathbf{b}_n\} \to \mathbf{a}$ đồng thời giới hạn hàm ứng với 2 dãy điểm đó tồn tại và khác nhau

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{b}_n).$$

• Hàm $\mathbf{f}$ liên tục tại $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ nếu giới hạn hàm trong quá trình $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ bằng giá trị thay thế của hàm tại $\mathbf{a}$ (như đối với hàm thực một biến số)

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

1B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập giới hạn, liên tục

1. Tìm các giới hạn

(b) $\displaystyle \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^3y^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^3y^2}{x^2 + y^2} + 1.$

Áp dụng tiêu chuẩn kẹp (như giới hạn hàm một biến) để tìm giới hạn, ta có

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3y^2}{x^2}\right| = |xy^2|.$$

Hiển nhiên $\displaystyle \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} |xy^2| = 0$, suy ra giới hạn $\displaystyle \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^3y^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$

(d) $\displaystyle \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{y^4}{x^2 + y^2}.$

Để tính giới hạn thứ nhất, ta có

$$0 \leq \frac{x^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4}{x^2} = x^2 \to 0 \text{ khi } (x, y) \to (0, 0), \text{ suy ra } \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

Giới hạn thứ hai được tính tương tự

$$0 \le \frac{y^4}{x^2+y^2} \le \frac{y^4}{y^2} = y^2 \to 0, \text{ suy ra } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$

(h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{x^2+y^2-xy} = 0$ được chứng minh tương tự như các bài trên.

Thật vậy $\dfrac{x^3}{x^2+y^2-xy} = \dfrac{x^3}{(y-\frac{x}{2})^2+\frac{3x^2}{4}}$ suy ra

$$0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2-xy}\right| \le \frac{|x|^3}{\frac{3x^2}{4}} = \frac{4|x|}{3} \to 0 \text{ khi } (x,y)\to(0,0).$$

2. Chứng minh rằng không tồn tại các giới hạn sau

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Xét các giới hạn riêng khi $(x,y)\to(0,0)$ theo các phương khác nhau.

• Cho $(x,y)\to(0,0)$ trên đường $y = x$. Khi đó giá trị hàm số luôn bằng 0, do vậy giới hạn riêng theo hướng này cũng bằng 0.

$$\left.\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|_{y=x} \equiv 0.$$

• Cho $(x,y)\to(0,0)$ trên trục hoành $y = 0$. Khi đó giá trị hàm số luôn bằng 1, do vậy giới hạn riêng theo hướng này cũng bằng 1.

$$\left.\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|_{y=0} = \frac{x^2}{x^2} \equiv 1.$$

Hai giới hạn riêng này khác nhau, suy ra hàm số không có giới hạn trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$.

Nhận xét rằng ta có thể tính giới hạn riêng của hàm khi chọn $y = kx$ và cho $x \to 0$. Khi đó $(x, y) \to (0, 0)$ và giới hạn hàm số theo phương $y = kx$ bằng

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Như vậy các giới hạn riêng khác nhau khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo các phương khác nhau. Hàm số không tồn tại giới hạn.

(d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x \sin y}{x^4 + y^2}$

Xét các giới hạn riêng hàm $\dfrac{x \sin y}{x^4 + y^2}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo các phương khác nhau.

• Cho $(x, y) \to (0, 0)$ trên trục hoành $y = 0$. Khi đó giá trị hàm số luôn bằng 0, do vậy giới hạn riêng theo hướng này cũng bằng 0.

• Cho $(x, y) \to (0, 0)$ trên đường $y = x$. Khi đó giá trị hàm số bằng $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^4 + x^2}$ và

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{x^4 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^4 + x^2} = 1.$$

Hai giới hạn riêng này khác nhau, suy ra hàm số không có giới hạn.

3. Cho hàm $f(x, y) = \dfrac{\cos x^2 - \cos y^2}{x^2 + y^2}$. Xét giới hạn hàm số trong quá trình $(x, y) \to (0, 0)$ và xét các giới hạn lặp trong quá trình $x \to 0,\ y \to 0$ của hàm đó.

   • Giới hạn hàm số trong quá trình $(x, y) \to (0, 0)$.

   Do $f(x, y) = \cos x^2 - \cos y^2 = -2 \sin \dfrac{x^2 + y^2}{2} \sin \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ nên

$$f(x, y) = \frac{\cos x^2 - \cos y^2}{x^2 + y^2} = -2 \frac{\sin \frac{x^2 + y^2}{2}}{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{x^2 - y^2}{2}.$$

   Hiển nhiên $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} -2 \dfrac{\sin \frac{x^2 + y^2}{2}}{x^2 + y^2} = 1$ và $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sin \dfrac{x^2 - y^2}{2} = 0$ suy ra giới hạn hàm số $\lim f(x, y) = 0$ trong quá trình $(x, y) \to (0, 0)$.

• Các giới hạn lặp

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2 - 1}{x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} = 0$$
$$\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y^2}{y^2} = 0,$$

phù hợp với định lí 1.2.3 về mối liên hệ giữa giới hạn bội và giới hạn lặp.

3'. Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{y} & \text{nếu } \ y \neq 0\\ 0 & \text{nếu } \ y = 0.\end{cases}$
Tìm giới hạn hàm số trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$ và tìm các giới hạn lặp trong quá trình $x\to 0,\ y\to 0$ của hàm đó.

• Giới hạn hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$ vì hàm $f(x,y)$ là tích của một VCB x^2+y^2 trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$ và hàm bị chặn $\sin\frac{1}{y}$.
• Các giới hạn lặp
$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} y^2\sin\frac{1}{y} = 0$ (tích của một VCB và hàm bị chặn), trong khi không tồn tại giới hạn lặp thứ hai $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ do không tồn tại $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$.

Bài tập trên cho ta một nhận xét rằng việc tồn tại giới hạn bội của hàm nhiều biến không kéo theo sự tồn tại của các giới hạn lặp. Chú ý rằng bài tập số 2. ở trên cho các ví dụ minh họa điều ngược lại: sự tồn tại của các giới hạn lặp cũng không kéo theo sự tồn tại của giới hạn bội.

4. Tìm các điểm gián đoạn của hàm

(a) $$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{nếu } \ x+y\neq 0\\ 0 & \text{nếu } \ x+y = 0\end{cases}$$

Hiển nhiên hàm liên tục tại các điểm nằm ngoài đường thẳng $x+y=0$. Do đó ta chỉ tìm các điểm gián đoạn của hàm trên đường thẳng $y=-x$.

• Tại các điểm $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ trên đường thẳng $y = -x$, do tử thức của hàm $x^2 + y^2$ tiến tới số khác 0, trong khi mẫu thức tiến tới không trong quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$, hàm không có giới hạn. Như thế chúng là các điểm gián đoạn của hàm.

• Tại điểm $(0,0)$, hàm đã cho cũng không liên tục. Thật vậy xét dãy điểm $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \to (0,0)$, giá trị hàm số tại các điểm này

$$f(x_n, y_n) = \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \to 2 \quad khi \quad n \to \infty.$$

Giới hạn này khác giá trị thay thế $f(0,0) = 0$. Vậy $(0,0)$ cũng là điểm gián đoạn của hàm.

Nhận xét rằng trong quá trình $(x, y) \to (0,0)$, tử thức $x^2 + y^2$ và mẫu thức $x + y$ là các vô cùng bé, bậc của tử cao hơn bậc của mẫu, song hàm phân thức $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ không tồn tại giới hạn.

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{x}{y} & \text{nếu } \; y \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } \; y = 0 \end{cases}$$

Hiển nhiên hàm liên tục tại các điểm nằm ngoài trục hoành $y = 0$. Do đó ta chỉ tìm các điểm gián đoạn của hàm trên đường thẳng $y = 0$.

• Tại điểm $A(x_0, 0) \neq (0,0)$ trên trục hoành $y = 0$, giá trị hàm số $f(A) = 1$. Dãy điểm $A_n(x_0, \frac{x_0}{n}) \to A$ trong khi giá trị hàm tại các điểm này, $f(A_n) = \sin\frac{nx_0}{x_0} = \sin n$, lập thành dãy số không có giới hạn. Vậy hàm gián đoạn tại các điểm khác $(0,0)$ trên trục hoành $y = 0$.

• Tại điểm $O(0,0)$, hàm đã cho cũng không liên tục, do chẳng hạn cho $x = y \to 0$, giới hạn hàm tương ứng bằng $\sin 1 \neq f(0,0) = 1$, khác với giá trị thay thế tại $O(0,0)$.

5. Tìm A để các hàm số dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}^2$

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - yx^2}{x^3 - y^3} & \text{nếu } \; x \neq y \\ A & \text{nếu } \; x = y \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ A & \text{nếu} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Cả hai bài tập đều có cách giải giống nhau. Ta sẽ giải bài (b), phần (a) dành cho bạn đọc.

Ta có khẳng định không tồn tại A để hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Cụ thể hơn ta sẽ chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

Thật vậy xét giới hạn riêng của hàm bằng việc chọn $y = kx$ khi cho $x \to 0$. Khi đó giới hạn hàm số theo phương $y = kx$ bằng

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{x^2 - kx^2 + k^2x^2}{x^2 + kx^2 + k^2x^2} = \sin \frac{1 - k + k^2}{1 + k + k^2}.$$

Như vậy với các giá trị k khác nhau các giới hạn riêng tương ứng của hàm cũng khác nhau. Hàm đã cho không có giới hạn và do vậy không liên tục tại $O(0,0)$.

6. Tìm giới hạn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} = L.$

Ta có $\dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} = \dfrac{x(\sin y - y)}{x^2 + y^2} + \dfrac{y(x - \sin x)}{x^2 + y^2}$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x(\sin y - y)}{x^2 + y^2} = 0$ và $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y(x - \sin x)}{x^2 + y^2} = 0$. Từ đó suy ra $L = 0$.

Thật vậy với $xy \neq 0$, $\left|\dfrac{x(\sin y - y)}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\dfrac{x(\sin y - y)}{2xy}\right| = \left|\dfrac{\sin y - y}{2y}\right| \to 0$ khi $(x,y) \to (0,0)$ và giá trị hàm số luôn bằng 0 tại các điểm thuộc trục hoành hoặc trục tung.

Tương tự giới hạn thứ hai $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y(x - \sin x)}{x^2 + y^2} = 0.$

Nhận xét rằng ta có thể tính giới hạn $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$ bằng cách sử dụng khai triển Maclorin $\sin x = x + o(x^2)$ và $\sin y = y + o(y^2)$

trong quá trình $x \to 0$ và $y \to 0$

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy + xo(y^2) - yx + yo(x^2)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xo(y^2)+yo(x^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xo(y^2)}{x^2+y^2} + \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yo(x^2)}{x^2+y^2} = 0+0
\end{aligned}
$$

Các giới hạn sau cùng bằng 0 do ước lượng

$$0 \le \left|\frac{xo(y^2)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|xo(y^2)|}{y^2} \to 0 \;\text{ khi }\; (x,y)\to(0,0)$$

và

$$0 \le \left|\frac{yo(x^2)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|yo(x^2)|}{x^2} \to 0 \;\text{ khi }\; (x,y)\to(0,0).$$

Lưu ý rằng chúng ta không được tính giới hạn hàm 2 biến $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ *bằng cách chuyển về hệ tọa độ cực* $x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi$ *và ngộ nhận*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\to 0}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;(!)$$

Điều này không đúng. Chúng ta có thể nghiệm thấy qua ví dụ giới hạn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ *không tồn tại* (xem bài tập 2), *tuy nhiên nếu chuyển qua hệ tọa độ cực, hàm có giới hạn bằng 1!*

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\Bigg|_{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}} = \frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2} = \cos^2\varphi \to 1$$

trong quá trình $(r,\varphi)\to(0,0)$.

2. Đạo hàm và vi phân

2A. Tóm tắt lí thuyết

• Đạo hàm riêng hàm n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tại $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ theo biến x_k là đạo hàm hàm một biến $F(x_k) = f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n)$ tại $x_k = a_k$
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \lim_{x_k \to a_k} \frac{F(x_k) - F(a_k)}{x_k - a_k}.$$
Như vậy khi tính đạo hàm riêng hàm f theo biến x_k, các các biến khác biến x_k đóng vai trò như tham số trong f.
• Các đạo hàm riêng cấp hai không phụ thuộc việc tính đạo hàm riêng theo thứ tự biến trước biến sau, chẳng hạn
$$f''_{xy}(\mathbf{a}) = f''_{yx}(\mathbf{a})$$
nếu chúng liên tục tại $\mathbf{a}$. (Định lí Schwarz).
• Hàm véc tơ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ khả vi tại $\mathbf{a}$ và đạo hàm, kí hiệu $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ là ma trận các đạo hàm riêng tại đó
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$
nếu
$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A(\mathbf{x} - \mathbf{a})| = o(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|),$$
hay
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \mathbf{0}.$$
• Trường hợp riêng hàm thực hai biến $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$ khả vi tại $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ nếu
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - f'_x(\mathbf{a}) \cdot (x - x_0) - f'_y(\mathbf{a}) \cdot (y - y_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0$$
hoặc viết dưới dạng
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(\mathbf{a}) - f'_x(\mathbf{a}) \cdot \Delta x - f'_y(\mathbf{a}) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

• Quy tắc tính đạo hàm hàm hàm hợp

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(\mathbf{a})\big)\cdot\mathbf{g}'(\mathbf{a}),$$

trong đó vế phải là tích 2 ma trận đạo hàm $\mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(\mathbf{a})\big)$ và $\mathbf{g}'(\mathbf{a})$.
• Đạo hàm theo hướng $\mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ là véc tơ đơn vị) tại $\mathbf{a}$ của hàm véc tơ $\mathbf{f}$

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{e})-\mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}.$$

Các đạo hàm riêng là đạo hàm theo hướng $\mathbf{e}_i = (0,...,0,1,0,...0)\in\mathbb{R}^n$.
• Công thức tính đạo hàm hàm ngược

$$\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{x}) = \Big(\mathbf{f}'\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\right)\Big)^{-1},$$

trong đó vế phải là ma trận nghịch đảo của đạo hàm hàm véc tơ $\mathbf{f}$ tại điểm $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$.
• Công thức tính đạo hàm hàm ẩn $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ của hệ thức véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\Bigg(\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Bigg)^{-1}\mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Trường hợp riêng, hệ thức $F(x,y)=0$ xác định hàm ẩn khả vi $y=f(x)$ và

$$f'(x) = -\big(F'_y(x,y)\big)^{-1}F'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Hệ thức ba biến $F(x,y,z)=0$ xác định hàm ẩn khả vi $z=f(x,y)$ và đạo hàm hàm ẩn là các đạo hàm riêng

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

• Vi phân hàm thực n biến $f(x_1,x_2,...,x_n)$

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n.$$

Với hàm 2 biến $f(x,y)$ vi phân $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$.

Vi phân cấp k hàm f là vi phân của vi phân cấp $k-1$ hàm đó $d^k f = d(d^{k-1}f)$. Đặc biệt vi cấp hai hàm 2 biến

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

2B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập đạo hàm vi phân

7. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số

(a) $u = xy^{\frac{x}{y}}$

Để tính các đạo hàm riêng của hàm $u(x, y)$, chẳng hạn $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$, ta coi y là hằng số (tham số) trong biểu thức của hàm một biến $u = u(x, y)$. Khi đó đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ tại điểm (x, y) bằng đạo hàm (theo x) hàm một biến $u = u(x, y)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \left(xy^{\frac{x}{y}}\right)'_x = y^{\frac{x}{y}} + x\left(y^{\frac{x}{y}}\right)'_x &= y^{\frac{x}{y}} + x\left(y^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \ln y\right)\\ &= y^{\frac{x}{y}} + xy^{\frac{x}{y}-1}\ln y\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x\left(y^{\frac{x}{y}}\right)'_y = x\left(e^{\frac{x}{y}\ln y}\right)'_y &= xy^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\ln y\right)'_y\\ &= x^2 y^{\frac{x}{y}}\frac{1-\ln y}{y^2} = x^2 y^{\frac{x}{y}-2}(1-\ln y).\end{aligned}$$

(b) $u = x^{yz}$.

Đây là hàm 3 biến. Để tính các đạo hàm riêng chẳng hạn $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y, z)$, ta coi x và z là các tham số hằng số

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = (x^{yz})'_y = x^{yz}\cdot \ln x \cdot (yz)'_y = zx^{yz}\ln x.$$

8. Chứng minh rằng hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x=y=0 \end{cases}$ gián đoạn tại $(0,0)$ nhưng tồn tại các đạo hàm riêng tại đó $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$.

   Ta sẽ chứng minh hàm f gián đoạn tại $(0,0)$ bằngviệc chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$. Thật vậy cho $(x,y)\to(0,0)$ trên đường cong $y=kx^3$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^6}{(1+k^2)x^6} = \frac{k}{1+k^2}.$$

   Các giới hạn riêng này khác nhau ứng với các giá trị k khác nhau. Vì vậy hàm f không liên tục tại $(0,0)$.

   Bây giờ ta tính các đạo hàm riêng $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ theo định nghĩa 1.3.1.

   Lập hàm $F(x) = f(x,0)$, hàm này đồng nhất với hằng số $F(x)\equiv 0$, suy ra $F'(0)=0$. Do đó đạo hàm riêng $f'_x(0,0) = F'(0) = 0$.

   Đạo hàm riêng $f'_y(0,0) = 0$ cũng được tính tương tự.

   Như vậy sự liên tục của hàm nhiều biến không là điều kiện cần cho sự tồn tại của các đạo hàm riêng.

9. Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

   (b) $u = \ln(x^2+y^2)$

   Tính các đạo hàm riêng cấp hai là tính đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

   Như vậy với hàm 2 biến $u(x,y)$ ta có thể có 4 đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Chú ý rằng do định lí 1.3.1, các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp bằng nhau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(d) $u = \sin(x + yz)$.

Đây là hàm 3 biến. Chúng ta có thể có 9 đạo hàm riêng cấp hai. (Để thuận tiện sau này các đạo hàm riêng cấp hai thường được viết vào một ma trận). Các đạo hàm riêng cấp một của hàm

$$u'_x = \cos(x+yz),\ u'_y = z\cos(x+yz),\ u'_z = y\cos(x+yz).$$

Việc tính đạo hàm riêng cấp hai hàm số tương tự như bài tập trên, bạn đọc tự làm để rèn luyện kĩ năng cho bản thân. Chẳng hạn

$$u''_{yz} = \Big(z\cos(x+yz)\Big)'_z = \cos(x+yz) - yz\sin(x+yz).$$

Bạn đọc có thể kiểm nghiệm lại định lí 1.3.1 về sự bằng nhau của các đạo hàm riêng hỗn hợp

$$u''_{zy} = \Big(y\cos(x+yz)\Big)'_y = \cos(x+yz) - yz\sin(x+yz).$$

10. Tính $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$, trong đó $f(x,y) = e^{xy}$.

Trước hết ta tính $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} = y^4 e^{xy}$.

Bây giờ ta có thể tính tiếp đạo hàm cấp 4 (theo biến y, coi x là tham số hằng số) bằng quy tắc Leibnits để tính đạo hàm tích 2 hàm số một biến

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} = e^{xy}(x^4y^4 + 16x^3y^3 + 72x^2y^2 + 96xy + 24).$$

11. Chứng tỏ rằng các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 của hàm sau tại điểm $O(0,0)$ không bằng nhau

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2 - xy^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Trước hết ta tính các đạo hàm riêng cấp một của f.
• Để tính $f'_x(0,0)$ tại điểm $O(0,0)$, theo định nghĩa 1.3.1, ta lập hàm $F(x) = f(x,0) \equiv 0$, hàm này đồng nhất với 0, $(F(x) \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$, suy ra $f'_x(0,0) = F'(0) = 0$.

• Dễ dàng tính được đạo hàm riêng f'_x tại các điểm $(x,y) \neq 0$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3(x^2+2xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = y = 0 \end{cases}$$

Tương tự

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(2x^3-3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = y = 0 \end{cases}$$

Từ đây, áp dụng định nghĩa 1.3.1 để tính các đạo hàm riêng, suy ra các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 tại điểm $O(0,0)$ khác nhau, cụ thể

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y-0} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0.$$

Chú ý rằng định lí 1.3.1 khẳng định các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp bằng nhau chỉ khi chúng là các hàm liên tục.

12. Cho hàm số $u(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$. Hãy tính

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{tại} \quad A(1,2).$$

Các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm u

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(y^2-x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Suy ra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,2) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1,2) = \frac{1}{9}.$$

13. Chứng minh rằng hàm $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ thỏa mãn phương trình $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

Các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm u

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{y-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$$

Suy ra

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2} + \frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2} \equiv 0.$$

14. Chứng minh rằng hàm $u(x,y) = f(xy) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, với f, g là các hàm thực một biến số, khả vi đến cấp hai, thỏa mãn phương trình

$$x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = yu'_y - xu'_x.$$

Các đạo hàm riêng cấp một của hàm u

$$u'_x = yf'(xy) - \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right), \quad u'_y = xf'(xy) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$u''_{xx} = y^2f''(xy) + 2\frac{y}{x^3}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$u''_{yy} = x^2f'(xy) + \frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

Từ đây suy ra đ.p.c.m vì chúng cùng bằng

$$x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = 2\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$yu'_y - xu'_x = 2\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right).$$

15. Chứng minh rằng hàm $u(t,x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$, với $a > 0, t > 0$ thỏa mãn phương trình $u'_t = a^2u''_{xx}$.

Hàm $u(t,x)$ là hàm mật độ của đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn. Nó đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong lí thuyết xác suất. Ta có

$$u'_x = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \frac{x-x_0}{2a^2t}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$$

$$\begin{aligned}
u''_{xx} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\frac{-1}{2a^2t} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^4t^2}\right)e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \\
u'_t &= \left(-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{4a^2t^2}\right)e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\frac{-1}{2t} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^2t^2}\right)e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh $u'_t = a^2u''_{xx}$.

16. Chứng minh rằng $u = f(x-at) + g(x+at)$, với a là hằng số, f và g có đạo hàm cấp hai liên tục, là nghiệm của phương trình

$$u''_{tt} = a^2u''_{xx}.$$

Dễ dàng chứng minh cả 2 vế của đẳng thức trên bằng nhau và cùng bằng

$$a^2f''(x-at) + a^2g''(x+at).$$

17. Chứng minh rằng $u = x^nf\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n}g\left(\frac{y}{x}\right)$, với n là số tự nhiên, f và g có đạo hàm cấp hai liên tục, là nghiệm của phương trình

$$x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy} = n(n-1)u.$$

Bạn đọc tự kiểm tra bằng cách tính đúng các đạo hàm riêng cấp 2 của u.

18. Hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ có khả vi tại $(0,0)$ không?

Dễ dàng chỉ ra tồn tại các đạo hàm riêng cấp một của f, cụ thể $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$. Hàm f khả vi tại $O(0,0)$ hay không, theo định nghĩa 1.3.3 về hàm khả vi, phụ thuộc vào việc giới hạn sau có tồn tại và bằng 0 hay không

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ta sẽ chứng minh giới hạn trên không tồn tại bằng cách xét các giới hạn riêng khi $(x,y)\to(0,0)$ theo các phương khác nhau.

• Khi $(x,y)\to(0,0)$ trên trục hoành $y=0$, khi đó giới hạn trở thành giới hạn hàm hằng ($\equiv 0$), giới hạn riêng theo phương này bằng 0.

• Trên đường thẳng $y=x$ khi $x\to 0+$, giới hạn trở thành

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^3}-x-x}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{2}-2)x}{\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}.$$

Các giới hạn riêng khác nhau khi $(x,y)\to(0,0)$ theo các phương khác nhau. Hàm f không khả vi tại $O(0,0)$.

19. Hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^4}$ có khả vi tại $(0,0)$ không?

Ta sẽ chứng minh hàm $\sqrt[3]{x^4+y^4}$ khả vi tại $O(0,0)$. Thật vậy các đạo hàm riêng cấp một của f, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Kí hiệu $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, theo định nghĩa hàm khả vi ta phải chứng minh

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{\frac{x^4+y^4}{\varrho^3}} = 0.$$

Ta thấy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4}{\varrho^3} \le \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4}{|x|^3} = 0$ và tương tự $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^4}{\varrho^3} \le \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^4}{|y|^3} = 0$. Suy ra $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{\dfrac{x^4+y^4}{\varrho^3}} = 0$, đây là đ.p.c.m.

20. Chứng minh rằng hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x=y=0 \end{cases}$ có các đạo hàm riêng $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ nhưng không khả vi tại $(0,0)$.

Hướng dẫn: *Chứng minh $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$ và hãy chỉ ra không tồn tại giới hạn (không thỏa mãn định nghĩa hàm khả vi)*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2+yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bằng cách cho $(x,y) \to (0,0)$ theo các phương khác nhau $y = kx$.

21. Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \left(1-\cos\dfrac{x^2}{y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2} & \text{nếu } y\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } y=0 \end{cases}$

(a) Hàm f có liên tục tại $O(0,0)$ không? Tại sao?

(b) Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Hàm f có khả vi tại $O(0,0)$ không? Tại sao?

Bạn đọc tự giải bài này bằng phương pháp như các bài tập đã giải ở trên.

22. Tính đạo hàm hàm $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ tại điểm $M(3,1)$ theo hướng từ M đến $N(6,5)$.

Đạo hàm theo hướng là tích vô hướng của véc tơ $\overrightarrow{grad}$ với véc tơ đơn vị chỉ hướng đó. Các đạo hàm riêng của hàm u tại điểm $M(3,1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(3,1) = 3x^2 - 6xy + 3y^2\Big|_{x=3,y=1} = 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(3,1) = -3x^2 + 6xy\Big|_{x=3,y=1} = -9.$$

Vậy véc tơ građiên của hàm $\overrightarrow{gradu}(M) = (12,-9)$. Véc tơ đơn vị chỉ hướng của véc tơ $\overrightarrow{MN}(3,4)$, kí hiệu $\mathbf{e} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Suy ra đạo hàm hàm u theo hướng $\overrightarrow{MN}$

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}(M) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}(3,1) = 12\cdot\frac{3}{5} - 9\cdot\frac{4}{5} = 0.$$

23. Tính đạo hàm hàm $f = x^2 + y^2$ theo hướng lập với Ox góc 120^0 tại $M(1,0)$.

Véc tơ građiên của hàm f tại $M(1,0)$ bằng

$$\overrightarrow{grad}f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{x=1,y=0} = (2x, 2y)\big|_{x=1,y=0} = (2,0).$$

Các côsin chỉ hướng lập với Ox góc 120^0

$$\mathbf{e} = (\cos 120^0, \sin 120^0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(M) = \overrightarrow{grad}f(1,0)\cdot \mathbf{e} = -1.$

Bạn đọc tự giải hai bài tập sau bằng phương pháp như các bài tập đã giải ở trên.

24. Tính đạo hàm hàm $f = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ theo hướng phân giác góc phần tư thứ nhất tại $M(1,1)$.

25. Tìm $\overrightarrow{grad}\ u$ tại $M(-2,3,4)$ với $u = xyz$ và tính đạo hàm của u tại đó theo hướng $\overrightarrow{grad}\ u$.

26. Cho hàm véc tơ $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2 + y^2, xy)$. Chứng tỏ rằng $\mathbf{f}$ khả vi tại $M(1,1)$. Tính đạo hàm $\mathbf{f}'$ và vi phân $d\mathbf{f}$ tại M.

Sử dụng định lí 1.3.3 (*sự liên tục của các đạo hàm riêng kéo theo tính khả vi của hàm*), suy ra hàm $\mathbf{f}$ khả vi. Kí hiệu $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, khi đó đạo hàm hàm véc tơ $\mathbf{f}$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận

$$\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \mathbf{f}'(M) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}\Big|_{x=1,y=1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi phân hàm $\mathbf{f}$ tại M là véc tơ vi phân các hàm thành phần f_1 và f_2

$$d\mathbf{f}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2dx + 2dy \\ dx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1(M) \\ df_2(M) \end{pmatrix}$$

Nói cách khác $df_1(M) = 2dx + 2dy$ và $df_2(M) = dx + dy$.

Tuy nhiên ta cũng có thể chứng minh hàm $\mathbf{f}$ khả vi tại $M(1,1)$ bằng định nghĩa 1.3.3 về hàm khả vi.

Lập hiệu $\Delta\mathbf{f} - \mathbf{f}'(M)\Delta\mathbf{x}$, ta phải chứng minh hiệu đó là VCB cấp cao hơn $|\Delta\mathbf{x}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Số gia hàm $\mathbf{f}$ tại $M(1,1)$ (viết dưới dạng tọa độ) bằng

$$\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(\Delta x + 1, \Delta y + 1) - \mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} \Delta x^2 + 2\Delta x + \Delta y^2 + 2\Delta y \\ \Delta x\Delta y + \Delta x + \Delta y \end{pmatrix}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{f} - \mathbf{f}'(M)\Delta\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \Delta x^2 + 2\Delta x + \Delta y^2 + 2\Delta y \\ \Delta x\Delta y + \Delta x + \Delta y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ \Delta x\Delta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh cả 2 thành phần véc tơ này là VCB cấp cao hơn $|\Delta\mathbf{x}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ trong quá trình $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Ta đã hoàn thành việc chứng minh hàm $\mathbf{f}$ khả vi tại $M(1,1)$ bằng định nghĩa hàm khả vi.

27. Tìm đạo hàm của các hàm véc tơ sau

(a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (xy, x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

(b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$.

Phần (a) dành cho bạn đọc, đạo hàm hàm véc tơ $\mathbf{f}$ trong phần (b) là ánh xạ tuyến tính có ma trận gồm các đạo hàm riêng cấp một

$$\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Cho các hàm véc tơ $\mathbf{f}(u,v) = (u-2v, uv)$ và $\mathbf{g}(x,y,z) = (x+y^2, xy-z)$. Tìm đạo hàm của hàm véc tơ $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ tại $M(1,0,2)$.

Sử dụng công thức tính đạo hàm hàm hợp $(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(M) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(M)\big)\mathbf{g}'(M)$. Kí hiệu $\mathbf{a} = \mathbf{g}(M) = (1,-2)$

$$\mathbf{g}'(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y & x & -1 \end{pmatrix}\Big|_{(1,0,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(M)\big) = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ v & u \end{pmatrix}\Big|_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra $(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(M) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Chú ý rằng ta có thể tính trực tiếp đạo hàm hàm $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$*, không sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp*

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y,z) = (x + y^2 - 2xy + 2z, x^2y - xz + xy^3 - y^2z)$$

Suy ra đạo hàm hàm véc tơ tại $M(1,0,2)$ *bằng*

$$\begin{pmatrix} 1-2y & 2y-2x & 2 \\ 2xy + y^3 - z & x^2 + 3xy^2 - 2yz & -x - y^2 \end{pmatrix}\Big|_{M(1,0,2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

29. Tính các đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$, biết

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0.$$

Hệ thức trên xác định hàm ẩn $y = y(x)$. Công thức tính đạo hàm hàm ẩn

$$y'(x) = -(F'_y)^{-1}F'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3(x^2+y^2)^2 2x - 6x}{3(x^2+y^2)^2 2y - 6y} = -\frac{x}{y}.$$

Đạo hàm cấp hai $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y''(x) = \left(-\dfrac{x}{y(x)}\right)' = \dfrac{xy'(x) - y}{y^2}\cdot y'(x)$. Thay $y' = -\frac{x}{y}$ ta được

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''(x) = -\frac{x^2+y^2}{y^3}\cdot\left(-\frac{x}{y}\right) = \frac{x^3+xy^2}{y^4}.$$

30. Sử dụng phép đổi biến $x = \frac{1}{t}$ hãy đưa phương trình sau về phương trình của hàm theo biến t

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0.$$

Với phép đổi biến $x = \frac{1}{t}$, đặt $u(t) = y(\frac{1}{t})$, ta có

$$u'(t) = y' \cdot \frac{-1}{t^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -t^2u'$$

$$u''(t) = y'' \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right)^2 + y' \cdot \frac{2}{t^3} = \frac{y''}{t^4} - \frac{2u'}{t} \;\Rightarrow\; y'' = t^4u'' + 2t^3u'$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{1}{t^2}(t^4u'' + 2t^3u') + \frac{2}{t}(-t^2u') + a^2t^2u = 0 \quad \text{hay} \quad u'' + a^2u = 0.$$

Phương trình này khá đơn giản, bạn đọc có thể thấy $u(t) = \cos at$ *hoặc* $u(t) = \sin at$ *là nghiệm. Suy ra* $y = \sin\frac{a}{x}, y = \cos\frac{a}{x}$ *thỏa mãn phương trình đã cho. Ta sẽ nghiên cứu cách giải các phương trình dạng này trong chương phương trình vi phân.*

31. Tìm các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm ẩn $z = z(x, y)$, biết nó được xác định bởi hệ thức

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $x + y + z = e^z$

(c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

Ta sẽ giải bài tập (a), bạn đọc tự giải các bài tập (b) và (c) bằng phương pháp tương tự.

Hàm ẩn $z = z(x, y)$ được xác định từ hệ thức $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Áp dụng công thức tính đạo hàm hàm ẩn

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{và} \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ta được

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z},\ \ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{y}{z}.$$

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$z''_{xx} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial x} = -\frac{z - xz'_x}{z^2} = -\frac{z + x\cdot\frac{x}{z}}{z^2} = -\frac{z^2+x^2}{z^3}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial z'_x}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial y} = \frac{xz'_y}{z^2} = \frac{-x\cdot\frac{y}{z}}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}$$

Tương tự $z''_{yy} = -\dfrac{z^2+y^2}{z^3}$.

32. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của u và v, biết chúng được xác định bởi các hệ thức

$$\begin{cases} xy - z\cos u\cos v = 0 \\ yz - x\cos u\sin v = 0 \end{cases}$$

Các hệ thức trên xác định hàm ẩn u, v theo x, y, z có thể viết gọn dưới dạng $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, trong đó $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v)$, hàm véc tơ $\mathbf{F} = (P, Q)$ với

$$\begin{cases} P(\mathbf{x},\mathbf{u}) = xy - z\cos u\cos v \\ Q(\mathbf{x},\mathbf{u}) = yz - x\cos u\sin v. \end{cases}$$

Áp dụng công thức tính đạo hàm hàm ẩn

$$\mathbf{u}'_{\mathbf{x}} = -\left(\mathbf{F}'_{\mathbf{u}}\right)^{-1}\mathbf{F}'_{\mathbf{x}} = -\begin{pmatrix} P'_u & P'_v \\ Q'_u & Q'_v \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} z\sin u\cos v & z\cos u\sin v \\ x\sin u\sin v & -x\cos u\cos v \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} y & x & -\cos u\cos v \\ -\cos u\sin v & z & y \end{pmatrix}$$

Tính ma trận nghịch đảo rồi nhân hai ma trận trên ta được các đạo hàm riêng cần tìm

$$u'_x = \frac{z\cos u\sin^2 v - xy\cos v}{xz\sin u}, \qquad u'_y = -\frac{x^2\cos v + z^2\sin v}{xz\sin u}$$
$$u'_z = -\frac{x\cos u\cos^2 v + yz\sin v}{xz\sin u}, \quad v'_x = -\frac{xy\sin v + z\cos u\sin v\cos v}{xz\cos u}$$
$$v'_y = \frac{z^2\cos u - x^2\sin v}{xz\cos u}, \qquad v'_z = \frac{yz\cos v - x\cos u\sin v\cos v}{xz\cos u}$$

Nhận xét rằng, ta cũng có thể tính đạo hàm hàm ẩn bằng cách vi phân hai vế của các hệ thức đã cho rồi xử lí kĩ thuật một cách khéo léo hệ phương trình thu được, ta có thể rút ra các đạo hàm riêng cần tìm của hàm ẩn. Tuy nhiên phương pháp sử dụng công thức tính đạo hàm hàm ẩn trình bày trên đây vừa có tính chất tổng quát hơn và có cách nhìn sáng sủa hơn về hàm ẩn, đạo hàm hàm ẩn.

3. Cực trị hàm nhiều biến số

3A. Tóm tắt lí thuyết

• Cực trị tự do

Hàm số nhiều biến $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại $\mathbf{a}$ nếu tồn tại một lân cận V của $\mathbf{a}$ sao cho

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \big(f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{a})\big) \quad \text{với mọi } \mathbf{x} \text{ thuộc lân cận } V.$$

Người ta nói hàm f đạt cực trị thay cho khái niệm hàm đạt cực đại hoặc cực tiểu. Điều kiện cần để hàm đạt cực trị tại $\mathbf{a}$ là điểm $\mathbf{a}$ phải là điểm dừng của hàm. (Điểm dừng là điểm mà các đạo hàm riêng của f tại đó bằng 0).

Vậy bước thứ nhất trong quy tắc tìm cực trị hàm nhiều biến là tìm điểm dừng của hàm bằng việc giải hệ phương trình

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Điều kiện đủ để hàm đạt cực trị hay không đạt cực trị tại điểm dừng $\mathbf{a}$ phụ thuộc vào vi phân cấp hai hàm f tại $\mathbf{a}$

i) Nếu $d^2 f(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu tại $\mathbf{a}$.

ii) Nếu $d^2 f(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại tại $\mathbf{a}$.

iii) Nếu vi phân cấp hai $d^2 f(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương không xác định dấu thì f không đạt cực trị tại $\mathbf{a}$.

• Cực trị có điều kiện

Cực trị có điều kiện là bài toán tìm cực trị hàm $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ khi các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn hệ thức $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{0}$.

Để tìm cực trị có điều kiện, trước hết ta lập hàm

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\varphi(\mathbf{x}),$$

trong đó tham số λ được gọi là *nhân tử Lagrange*. Những điểm mà hàm $f(\mathbf{x})$ có thể đạt cực trị có điều kiện thỏa mãn hệ phương trình Lagrange

$$\begin{cases} \Phi'(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên (cùng với các nhân tử Lagrange λ tương ứng) cũng gọi là điểm dừng của hàm $\Phi(\mathbf{x})$. Tại điểm dừng $\mathbf{a}$, tính vi phân

cấp hai $d^2\Phi(\mathbf{a})$. Ta cũng có kết luận tương tự như đã biết khi tìm cực trị tự do
i) Nếu $d^2\Phi(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu có điều kiện tại $\mathbf{a}$.
ii) Nếu $d^2\Phi(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại có điều kiện tại $\mathbf{a}$.
iii) Nếu vi phân cấp hai $d^2\Phi(\mathbf{a})$ không là dạng toàn phương xác định dương hoặc âm, bài toán sẽ phức tạp hơn đôi chút. Trong trường hợp này, ta đưa về bài toán tìm cực trị tự do hàm ít biến hơn, sau khi thay hàm ẩn xác định từ điều kiện $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ vào hàm f. Chúng ta sẽ nói chi tiết hơn ở phần trình bày cách giải các bài tập cụ thể ở phần sau.

3B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập tìm cực trị hàm nhiều biến

33. Tìm cực trị các hàm số dưới đây

(b) $u = x^3 + y^3 - (x+y)^2$.

Điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 - 2(x+y) = 0 \\ u'_y = 3y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad 3x^2 = 3y^2 \\ 3y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

i) Với $x + y = 0$, hệ có nghiệm $x_1 = 0, y_1 = 0$
ii) Với $x = y$, hệ có thêm nghiệm $x_2 = y_2 = \frac{4}{3}$
Vậy hàm số có 2 điểm dừng $M_1(0,0)$ và $M_2(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

Vi phân cấp 2 của hàm u là dạng toàn phương với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2 & -2 \\ -2 & 6y-2 \end{pmatrix}.$$

Tại các điểm dừng $M_1(0,0)$ và $M_2(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, ma trận của dạng toàn phương lần lượt là

• Tại $M_1(0,0)$: $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, ma trận của dạng vi phân cấp 2 không thuộc lớp các dạng toàn phương mà theo đó có thể áp dụng định lí 1.5.2 kết luận về việc hàm đạt cực trị hay không - đó là các

dạng toàn phương xác định dương, xác định âm hoặc không xác định dấu. Vì vậy ta sẽ trực tiếp kiểm tra (dựa vào định nghĩa) xem hàm có khả năng đạt cực trị tại $M_1(0,0)$ không?
Với $x < 0, y < 0$ và (x,y) thuộc lân cận điểm $M_1(0,0)$, hàm $u = x^3 + y^3 - (x+y)^2 < 0 = u(M_1)$, trong khi đó $u(x,y) > u(M_1) = 0$ nếu chọn $x = \frac{1}{n}$ và $y = -\frac{1}{n+1}$. Do vậy ta có thể kết luận hàm u không đạt cực trị tại $M_1(0,0)$.
• Tại $M_2(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) : A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, dạng toàn phương xác định dương, hàm đạt cực tiểu tại M_2. Giá trị cực tiểu $u(M_2) = -\frac{64}{27}$.
(c) Tìm cực trị hàm $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.

Điểm dừng là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -6y^2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$. Hàm số có 4 điểm dừng $M_1(-1,-1), M_2(1,1)$ và $M_3(-1,1), M_4(1,-1)$.
Vi phân cấp 2 của hàm u, $d^2u = 6x\,dx^2 - 12y\,dy^2$ là dạng toàn phương, ma trận của dạng toàn phương có dạng chéo

$$A = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xx} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng chỉ ra dạng toàn phương $d^2u = 6x\,dx^2 - 12y\,dy^2$ không xác định dấu tại các điểm $M_1(-1,-1), M_2(1,1)$ và
• xác định dương tại $M_4(1,-1)$. Do đó hàm u đạt cực tiểu tại $M_4(1,-1)$. Giá trị cực tiểu $u(M_4) = -6$.
• d^2u xác định âm tại $M_3(-1,1)$. Vì vậy u đạt cực đại tại $M_3(-1,1)$. Giá trị cực đại $u(M_3) = 6$.
(e) Tìm cực trị hàm $f(x,y) = y^4 + 2y^2 + 2x^2 - 2xy^2 - 4x + 2$.
Điểm dừng là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x - 2y^2 - 4 = 0 \\ 4y^3 + 4y - 4xy = 0. \end{cases}$. Hệ phương trình cho điểm dừng duy nhất $M(1,0)$. Hàm f khả vi tại mọi điểm trên $\mathbb{R}^2$, do vậy nó có thể đạt cực trị tại nhiều nhất 1 điểm, điểm $M(1,0)$.
Ta sẽ chứng minh hàm đạt cực tiểu tại $M(1,0)$. Thật vậy

$$y^4 + 2y^2 + 2x^2 - 2xy^2 - 4x + 2 = (y^2 - x + 1)^2 + (x-1)^2 \geq 0 = f(1,0).$$

(*Lưu ý rằng tại điểm dừng $M(1,0)$, vi phân cấp 2 không thuộc lớp các dạng toàn phương xác định dương, xác định âm hay không xác định dấu để có thể sử dụng định lí 1.5.2 trong việc xét cực trị hàm số.*)

(f) Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
Hàm số có 3 điểm dừng $M_1(0,0), M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Bạn đọc dễ dàng chứng minh hàm đạt cực tiểu tại M_2, M_3. Lập luận tương tự như câu (b), bạn đọc hãy tự chứng minh hàm không đạt cực trị tại M_1.

33'. (a) Tìm điểm cao nhất (có tung độ y lớn nhất) thuộc elip

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0. \quad (*)$$

Có thể coi đây là bài toán tìm cực trị (max) hàm ẩn $y = y(x)$, xác định từ hệ thức $(*)$.
Điểm dừng của hàm ẩn là nghiệm của phương trình $y'(x) = 0$ hay

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2x+y}{2y+x} = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình cho 2 điểm dừng của hàm ẩn $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ và $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.
Đạo hàm cấp hai hàm ẩn

$$y''(x) = \frac{(2y'+1)(2x+y) - (2+y')(2y+x)}{(2y+x)^2}.$$

Tại điểm $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$y''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{(2y'+1)(2x+y) - (2+y')(2y+x)}{(2y+x)^2}\Big|_{x=-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} < 0.$$

Vậy hàm đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (*Bằng cách tương tự bạn đọc tự chứng minh hàm đạt giá trị bé nhất tại điểm* $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.)
Nhận xét rằng về mặt hình học, 2 đường thẳng $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ *và* $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ *tiếp xúc trên và dưới với elip* $(*)$.

(b) Tìm điểm cao nhất (có tung độ y lớn nhất) thuộc elip

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0.$$

Bằng phương pháp đạo hàm hàm ẩn, tương tự như bài trên, bạn đọc tự chứng minh hàm đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1, y = 2$.

(c) Hàm ẩn $y = y(x)$ được xác định bởi hệ thức $4xy^2 + 4x^2y = 1$.
Tính đạo hàm hàm ẩn $\dfrac{dy}{dx}$ và tìm cực trị hàm ẩn đó.

Hướng dẫn: *Đạo hàm hàm ẩn* $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = -\dfrac{y(2x+y)}{x(2y+x)}$.
Điểm dừng của hàm ẩn là nghiệm $y'(x) = 0$ *hay* $y = -2x$. *Thay vào hệ thức* $4xy^2 + 4x^2y = 1$ *ta được* $x = \frac{1}{2}, y = -1$. *Nhận xét rằng hàm ẩn chỉ có thể đạt cực trị tại* $x = \frac{1}{2}$ *và tại đó* $y(\frac{1}{2}) = -1, y'(\frac{1}{2}) = 0$. *Sử dụng nhận xét này để tính đạo hàm cấp hai*

$$y''(\frac{1}{2}) = -\frac{2y\big(x(2y+x)\big)}{\big(x(2y+x)\big)^2} = -\frac{2y}{x(2y+x)} = -\frac{8}{3} < 0.$$

Vậy hàm đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$, *giá trị cực đại bằng* -1.

34. Tìm cực trị các hàm

(a) $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$.
Tìm điểm dừng hàm số bằng việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} u'_x = 4x - 2y - 1 = 0 \\ u'_y = 2y - 2x = 0 \\ u'_z = 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình cho điểm dừng duy nhất $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2)$. Vi phân cấp hai d^2u của hàm u là dạng toàn phương với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d^2u là dạng toàn phương xác định dương vì các định thức con chính góc của A đều dương

$a_{11} = 4 > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ \det A = 8 > 0.$

Vậy hàm đạt cực tiểu tại $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2),\ u(M) = -\frac{17}{4}$.

(b) Tìm cực trị $u = xyz(1 - x - y - z)$.

Hệ phương trình $\begin{cases} yz(1 - 2x - y - z) = 0 \\ xz(1 - x - 2y - z) = 0 \\ xy(1 - x - y - 2z) = 0 \end{cases}$ cho điểm dừng là tất cả các điểm thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz, tất cả các điểm thuộc các đường thẳng

$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ và điểm $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Ta sẽ chứng minh hàm đạt cực đại tại điểm $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ và không đạt cực trị tại tất cả các điểm dừng còn lại.

• Ma trận các đạo hàm riêng cấp hai của hàm u

$$\begin{pmatrix} -2yz & z(1-2x-2y-z) & y(1-2x-y-2z) \\ z(1-2x-2y-z) & -2xz & x(1-x-2y-2z) \\ y(1-2x-y-2z) & x(1-x-2y-2z) & -2xy \end{pmatrix}$$

Tại điểm $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, ma trận trên $u''(M) = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận của dạng toàn phương xác định âm. Thật vậy các định thức con chính góc của $u''(M)$

$$a_{11} = -\frac{2}{16} < 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{16^2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{16^2} > 0,\ \det A = -\frac{4}{16^3} < 0.$$

Như vậy hàm u đạt cực đại tại điểm $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}),\ u(M) = \frac{1}{4^4}$.

• Tại các điểm dừng còn lại, theo định nghĩa có thể chỉ ra hàm không đạt cực trị. Chẳng hạn, tại điểm $B(x_0, 0, 0)$ thuộc trục hoành, giá trị hàm số $u(B) = 0$

i) Với $x_0 \neq 0$ và $x_0 \neq 1$, xét các điểm thuộc lân cận điểm B như $B_1(x_0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ và $B_2(x_0, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, giá trị hàm tại B_1 và B_2 luôn trái dấu nhau. Suy ra hàm không đạt cực trị tại $B(x_0, 0, 0)$.

ii) Với $x_0 = 0$, điểm $B(x_0, 0, 0)$ là gốc hệ trục tọa độ, ta chọn các điểm thuộc lân cận điểm $O(0,0,0)$ như $B_1(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ và $B_2(\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, giá trị hàm tại B_1 và B_2 luôn trái dấu nhau. Hàm cũng không đạt cực trị tại đó.

Với các điểm dừng khác bạn đọc tự chứng minh hàm không đạt cực trị bằng phương pháp tương tự.

(c) $u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$.
Hướng dẫn: *Hàm số có 2 điểm dừng:* $M_1(1,-2,\frac{1}{2})$ *và* $M_2(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4},-\frac{1}{4})$. *Điểm* $M_1(1,-2,\frac{1}{2})$ *là điểm cực tiểu,* $u(M_1) = -\frac{9}{2}$.
$M_2(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4},-\frac{1}{4})$ *không là điểm cực trị do ma trận* u'' *tại đó* $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *không xác định dấu. Lưu ý rằng nếu tồn tại 2 phần tử trái dấu nhau trên đường chéo của ma trận* u''*, khi đó dạng toàn phương tương ứng không xác định dấu.*

(d) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x>0, y>0, z>0)$.
Hướng dẫn: *Hàm số có điểm dừng duy nhất* $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$. *Ma trận các đạo hàm riêng cấp hai tại đó,* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ *xác định dương. Hàm đạt cực tiểu tại* $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$.

35. Tìm cực trị có điều kiện các hàm sau

(b) $u = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Lập hàm $\Phi = x^2 + y^2 + \lambda(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1)$ và tìm điểm dừng bằng việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x + \lambda \cdot \frac{1}{a} = 0 \\ \Phi'_y = 2y + \lambda \cdot \frac{1}{b} = 0 \\ \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{-2a^2b^2}{a^2+b^2} \\ x = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y = \frac{a^2b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Vi phân cấp hai hàm Φ tại điểm $M(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2})$ với $\lambda = \frac{-2a^2b^2}{a^2+b^2}$ là dạng toàn phương $d^2\Phi(M) = 2dx^2 + 2dy^2$ xác định dương. Vậy M là điểm cực tiểu, $u(M) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.
Lưu ý rằng về mặt hình học, đây là bài toán tìm khoảng cách ngắn nhất

từ điểm $O(0,0)$ tới đường thẳng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Giá trị cực tiểu vừa tính, $u(M)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ là bình phương khoảng cách đó.

(c) Tìm cực trị $u=xy$ với điều kiện $x^2+y^2=1$.

Lập hàm $\Phi=xy+\lambda(x^2+y^2-1)$ và tìm điểm dừng bằng việc giải hệ phương trình $\begin{cases}\Phi'_x=y+2\lambda x=0\\ \Phi'_y=x+2\lambda y=0\\ \quad x^2+y^2=1.\end{cases}$

• Với $\lambda=-\frac{1}{2}$ hàm số có 2 điểm dừng $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ và $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Tại các điểm này, vi phân cấp hai $d^2\Phi(M_1)=-dx^2+2dxdy-dy^2$ bán xác định âm, ma trận của dạng toàn phương $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Ta chưa có cơ sở để kết luận ngay về cực trị có điều kiện.

Trong trường hợp này, sử dụng vi phân cấp một hệ thức $x^2+y^2=1$ tại các điểm dừng nói trên, $dx+dy=0$, ta có $d^2\Phi=-4dx^2$ xác định âm. Vậy hàm đạt cực đại tại $M_1,M_2,\ u(M_1)=u(M_2)=\frac{1}{2}$.
• Tương tự với $\lambda=\frac{1}{2}$ ta có 2 điểm dừng $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ và $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Tại các điểm này, hàm đạt cực tiểu $u(M_3)=u(M_4)=-\frac{1}{2}$.
Ta có thể giải bài tập trên bằng cách đặt $x=\cos t, y=\sin t$ rồi đưa về hàm một biến.

(f) $u=x^2+z^2-y^2$ với điều kiện $x-y+z=0$

Hướng dẫn: *Hệ phương trình Lagrange có nghiệm duy nhất $M(0,0,0)$, $\lambda=0$. Vi phân cấp 2 tại đó không xác định dấu.*
Đưa về hàm 2 biến, sau khi thay $y=x+z$ vào: $u_1=x^2+z^2-y^2=-2xz$. Hàm có điểm dừng duy nhất $M_1(0,0)$ và không đạt cực trị tại đó.

(g) Tìm cực trị $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.
Giả thiết $a,b,c>0$. Lập hàm $\Phi=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.
Để tìm điểm dừng ta xét các trường hợp sau:
• Với a,b,c đôi một khác nhau, giả sử $0<a<b<c$. Hệ phương trình

$$\begin{cases}\Phi'_x=\frac{2x}{a^2}+2\lambda x=0\\ \Phi'_y=\frac{2y}{b^2}+2\lambda y=0\\ \Phi'_z=\frac{2z}{c^2}+2\lambda z=0\\ \quad x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-\frac{1}{a^2},\ M_{1,2}=(\pm1,0,0)\\ \lambda=-\frac{1}{b^2},\ M_{3,4}=(0,\pm1,0)\\ \lambda=-\frac{1}{c^2},\ M_{5,6}=(0,0,\pm1)\end{cases}$$

Vi phân cấp hai của hàm $\Phi(x, y, z)$

$$d^2\Phi(x, y, z) = \left(\frac{2}{a^2} + 2\lambda\right) dx^2 + \left(\frac{2}{b^2} + 2\lambda\right) dy^2 + \left(\frac{2}{c^2} + 2\lambda\right) dz^2.$$

Tại $M_{1,2} = (\pm 1, 0, 0)$, $d^2\Phi(x, y, z) = \left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}\right) dy^2 + \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}\right) dz^2$. Do vi phân cấp một của hàm điều kiện tại $M_{1,2} = (\pm 1, 0, 0)$, $dx = 0$, suy ra vi phân cấp 2 theo 2 biến độc lập y, z xác định âm. Hàm đạt cực đại có điều kiện tại $M_{1,2}$.
Tương tự, hàm đạt cực tiểu tại $M_{5,6}$.
• Với $a = b < c$, các điểm dừng gồm $M(0, 0, \pm 1)$ ứng với $\lambda = -\frac{1}{c^2}$ và tập hợp các điểm thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ trên mặt phẳng $z = 0$ ứng với $\lambda = -\frac{1}{a^2}$. Tương tự như trên hàm đạt cực tiểu tại $M(0, 0, \pm 1)$. Tại các điểm thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, ta phải xét riêng. Dễ dàng chứng minh hàm đạt cực đại có điều kiện tại đó. Thật vậy

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1 - z^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2}\right) \le \frac{1}{a^2}.$$

• Với $a < b = c$, bài toán được xét tương tự. Như vậy cả 2 trường hợp đặc biệt này, cũng như trường hợp đầu ($a < b < c$) hàm luôn đạt cực đại tại $M(\pm 1, 0, 0)$ và đạt cực tiểu tại $M(0, 0, \pm 1)$.
• Với $a = b = c$, bài toán trở thành tầm thường.

Nhận xét rằng bài toán có ý nghĩa hình học như ví dụ 1.5.2.3 trong giáo trình và cũng có thể giải gọn hơn bằng cách đưa về tìm cực trị tự do hàm 2 biến.

36. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm
(b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \le 4$

Hàm số liên tục trên hình tròn $x^2 + y^2 \le 4$. Do vậy hàm đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Mặt khác hàm cũng khả vi tại mọi điểm nên nó đạt max và min tại một trong các điểm dừng.

• Trước hết ta tìm các điểm dừng của hàm ở bên trong hình tròn $x^2 + y^2 < 4$. Các điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = -2xe^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2) + 2xe^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = -2ye^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2) + 4ye^{-x^2-y^2} = 0 \\ \qquad x^2 + y^2 < 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \\ 2y(2 - x^2 - 2y^2) = 0 \\ \quad x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được các điểm dừng $M_1(0,0), M_{2,3}(0,\pm 1), M_{4,5}(\pm 1,0)$.
• Xét bài toán tìm cực trị hàm f trên biên của hình tròn nói trên $x^2+y^2=4$. Ta đưa về việc tìm cực trị hàm một biến $f(y)=e^{-4}(4+y^2)$. Từ đây dễ dàng tính được ở trên biên hàm f đạt giá trị bé nhất tại $(\pm 2,0)$, $f(\pm 2,0)=4e^{-4}$ và đạt giá trị lớn nhất tại $(0,\pm 2)$, $f(0,\pm 2)=8e^{-4}$.

So sánh các giá trị này với giá trị hàm số tại các điểm dừng M_i ở trên ta được

$$\max f = f(M_{2,3}) = f(0,\pm 1) = 2e^{-1} \quad \text{và} \quad \min f = f(M_1) = f(0,0) = 0.$$

(c) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=0, y=\frac{\pi}{2}$
Hướng dẫn: *Tiến hành các bước như bài tập trên, ta thấy hàm số chỉ có một điểm dừng bên trong hình chữ nhật* $M(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$. *Xét tiếp ở trên biên, cuối cùng ta thu được kết quả: hàm* f *đạt* max *tại* $M(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ *và đạt* min *tại* $(0,0)$.

(d) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất hàm $u(x,y,z)=(x^2+2xy+3y^2-5)\sin^2 z$ trên tập đóng (không bị chặn) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D, z\in\mathbb{R}\}$, biết D là tam giác với các đỉnh $(-1,1),(2,1)$ và $(-1,-2)$.

Do $0\le \sin^2 z\le 1$, bài toán đưa về tìm max, min hàm hai biến

$$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2-5 \text{ trên miền tam giác } D.$$

• Hàm số có một điểm dừng duy nhất $M_1(0,0)$ từ hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 2x+2y=0 \\ f'_y = 2x+6y=0. \end{cases}$$

• Biên của miền D là các đoạn thẳng song song với các trục tọa độ

$$y\equiv 1 \text{ với } -1\le x\le 2, \quad x\equiv -1 \text{ với } -2\le y\le 1.$$

và đoạn thẳng $y=x-1$ với $-1\le x\le 2$. Lần lượt ta xét cực trị hàm f trên các cạnh của tam giác.

Trên đoạn $x\equiv -1$ với $-2\le y\le 1$, hàm $f=3y^2-2y+4$ có thể đạt cực trị tại $M_2(-1,\frac{1}{3})$ và tương tự trên cạnh thứ ba $y=x-1$ với $-1\le x\le 2$

hàm f có thể đạt cực trị tại $M_3(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. So sánh các giá trị hàm số tại các điểm M_1, M_2, M_3 và tại các đỉnh tam giác ta được

$$\max f = f(-1,-2) = 12, \quad \min f = f(M_3) = f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{14}{3}.$$

(e) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất hàm $u = x - 2y + 3z$ trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Hướng dẫn: *Không có điểm dừng. Bài toán dẫn đến việc tìm cực trị hàm* u *với điều kiện* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. *Từ đó suy ra hàm đạt giá trị nhỏ nhất tại* $M_1(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{6}{\sqrt{14}}, -\frac{9}{\sqrt{14}})$ *và đạt giá trị lớn nhất tại* $M_2(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}})$. *Chú ý rằng có thể giải bằng việc sử dụng bất đẳng thức Côsi-Bunhacốpxki.*

(f) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất hàm $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Hướng dẫn: *Như bài tập trên.*

37. (a) Trong số các tam giác nội tiếp trong đường tròn, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

Gọi x, y, z là các góc trong tam giác, $0 < x, y, z < \pi, x + y + z = \pi$. Diện tích tam giác khi đó bằng $S = 2R^2 \sin x \sin y \sin z$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Bài toán dẫn đến việc tìm giá trị lớn nhất của hàm S với $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < \pi\}$.

Do $S = 2R^2 \sin x \sin y \sin z = 0$ khi (x, y) thuộc biên miền D, suy ra S đạt giá trị lớn nhất tại điểm bên trong miền D. Điểm đó phải là điểm dừng của hàm S, tức là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} S'_x = 2R^2 \cos x \sin y \sin(x+y) + 2R^2 \sin x \sin y \cos(x+y) = 0 \\ S'_y = 2R^2 \sin x \cos y \sin(x+y) + 2R^2 \sin x \sin y \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y) = 0 \\ \cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

hay $x = y = \frac{\pi}{3}$. Vậy trong số các tam giác nội tiếp trong đường tròn, tam giác đều có diện tích lớn nhất.

Chú ý rằng nếu kí hiệu x, y, z là các góc ở tâm đường tròn $x + y + z = 2\pi$, khi đó diện tích tam giác bằng $S = \frac{1}{2}R^2\big(\sin x + \sin y - \sin(x+y)\big)$ và từ đây cũng tìm được điều kiện để diện tích tam giác S đạt giá trị lớn nhất.

Bằng phương pháp tương tự, bạn đọc tự giải 2 bài tập sau
(b) Trong số các tam giác ngoại tiếp đường tròn, tìm tam giác có diện tích bé nhất.
(c) Trong số các hình lục giác ngoại tiếp đường tròn, tìm hình có diện tích bé nhất.

38. Tìm hình hộp có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Hướng dẫn: *Gọi (x, y, z) là một đỉnh hình hộp, khi đó các đỉnh còn lại có tọa độ $(\pm x, \pm y, \pm z)$. Thể tích hình hộp $V = 8xyz$. Theo bất đẳng thức Côsi, $x^2y^2z^2$ đạt $\max$ khi $|x| = |y| = |z|$. Chú ý rằng bất đẳng thức Côsi có thể được chứng minh bằng cách xét giá trị lớn nhất hàm số.*

39. Một công ty vận chuyển bưu điện chỉ nhận các gói hàng hình hộp chữ nhật với tổng chiều dài và chu vi mặt cắt (chu vi thiết diện vuông góc với chiều dài gói hàng) không quá $6m$. Hãy xác định kích thước gói hàng mà công ty nhận vận chuyển sao cho nó có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn: *Gọi (x, y) là các cạnh của thiết diện và z là chiều dài gói hàng. Bài toán dẫn đến việc tìm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x > 0, y > 0, z > 0, 2x + 2y + z \leq 6$ sao cho thể tích gói hàng $V = xyz$ đạt giá trị lớn nhất.*

40. Tìm điểm thuộc mặt $xy^2z^3 = 2$ mà khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ $O(0, 0, 0)$ là ngắn nhất.
Hướng dẫn: *Gọi $M(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cần tìm, khi đó véc tơ $\mathbf{n}(x_0, y_0, z_0)$ cùng phương với véc tơ pháp của mặt cong $xy^2z^3 = 2$ tại M, tức là $\boxed{(F'_x, F'_y, F'_z) \parallel (x_0, y_0, z_0)\ (*)}$. Suy ra x_0, z_0 cùng dấu. Nếu $x_0 = z_0 > 0$*

$$x_0^2 = \frac{y_0^2}{2} = \frac{z_0^2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3^{\frac{-1}{4}}, z_0 = \sqrt{3}x_0 = 3^{\frac{1}{4}}, y_0 = \pm\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}$$

Ta được 4 điểm $M_{1,2}(3^{\frac{-1}{4}}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})$, $M_{3,4}(-3^{\frac{-1}{4}}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}})$. Khoảng cách đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{1}{4}}$.

Chứng minh (*): Thật vậy xét hàm khoảng cách từ (x, y, z) tới $O(0, 0, 0)$ với (x, y, z) thuộc mặt $xy^2z^3 = 2$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Xem $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi mặt đã cho, khi đó u đạt giá trị bé nhất tại (x_0, y_0) và do đó

$$u'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{2x + 2zz'_x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\Big|_M = 0 \Rightarrow z'_x(M) = -\frac{x_0}{z_0}.$$

Mặt khác theo công thức đạo hàm hàm ẩn $z'_x(M) = -\frac{F'_x}{F'_z}$, suy ra $\frac{x_0}{z_0} = \frac{F'_x}{F'_z}$. Tương tự ta có $\frac{y_0}{z_0} = \frac{F'_y}{F'_z}$, đ.p.c.m.

Sẽ gọn hơn nếu ta xét hàm $f = u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ thay cho hàm $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kể cả sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để giải bài toán cực trị có điều kiện, ta sẽ được: điểm cần tìm là điểm thỏa mãn $x_0^2 = \frac{y_0^2}{2} = \frac{z_0^2}{3}$

41. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong ellip $x^2 + 4y^2 = 4$. (Hình chữ nhật nội tiếp có các cạnh song song với các trục tọa độ).
Hướng dẫn: *Hãy đưa về bài toán cực trị có điều kiện. Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có đỉnh là các điểm:* $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\, dxdy$, D là tam giác nối các đỉnh $O(0,0)$, $A(10,1)$, $B(1,1)$.

2. Tính tích phân $\iint\limits_D |x+y|\, dxdy$ với $D = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

3. Tính tích phân $\iint\limits_D x\sqrt{4-y^2}\, dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 4, x > 0$.

4. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{|x+y^2|}\, dxdy$, trong đó $D = [-4,0] \times [0,2]$.

5. Tính diện tích các miền phẳng dưới đây

   (a) Giới hạn bởi $xy = 2,\ xy = 4$ và $y = x,\ y = 4x$.

   (b) Giới hạn bởi $xy = a,\ xy = 3a$ và $y^2 = ax,\ y^2 = 2ax \quad (a > 0)$.

   (c) Giới hạn bởi $x + y = 3,\ x + y = 5$ và $y = 2x,\ y = 4x$.

   (d) Giới hạn bởi $x + y = 3,\ x + y = 2$ và $y = 2x,\ y = -2x$.

   (e) Giới hạn bởi các đường $y^2 = px,\ y^2 = qx \quad (0 < p < q)$ và các đường $x^2 = ay, x^2 = by \quad (0 < a < b)$.

6. Tính tích phân
$$\iint\limits_D (2x+y)(x-2y)\, dxdy,$$
D là hình vuông, biết tọa độ các đỉnh $A(1,0)$; $B(3,1)$; $C(2,3)$; $D(0,2)$.

7. Tính tích phân $\iint\limits_D e^{x+y}\sqrt[3]{2x-y}\, dxdy$, với D là miền hữu hạn giới hạn bởi các đường thẳng $x+y=0, x+y=1, 2x-y=0, 2x-y=2$.

8. Sử dụng phép đổi biến để tính tích phân $\iint\limits_D xy\,dxdy$, với D là hình vuông nối các đỉnh $(0,0),(1,1),(2,0)$ và $(1,-1)$.

9. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt trụ
$$xy = 1,\ xy = 4,\ y = 3x,\ y = 6x,$$
mặt phẳng xOy và mặt cong $z = xy^3 + 4$.

10. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt
$$\frac{x}{3} + \left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{và} \quad x = 0.$$

11. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z^2 = xy$.

12. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt
$$2x = y^2 + z^2,\ (y^2 + z^2)^2 = 4(y^2 - z^2) \quad \text{và} \quad x = 0.$$

13. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt
$$y = 1 - z^2,\ x + z = 1$$
và các mặt phẳng tọa độ.

14. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, với D là miền giới hạn bởi đường cong
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad (x > 0).$$

15. Tính tích phân $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, trong đó miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được xác định bởi các bất đẳng thức
$$x^2 + y^2 \geq 1 \quad \text{và} \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

16. Tính các tích phân sau

    (a) $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2y$

    (b) $\iint\limits_D \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2x$

    (c) $I = \iint\limits_D \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\right) dxdy$ với D giới hạn bởi

    $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \ (*)$$

    (d) Tính thể tích miền không gian giới hạn bởi các mặt $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ và $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1.$

17. Tính tích phân
    $$I = \iint\limits_D e^{4x^2+y^2}\, dxdy$$
    trong đó miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được xác định bởi bất đẳng thức
    $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

18. Tính tích phân
    $$I = \iint\limits_D \sqrt{2x^2 + 2xy + 2y^2}\, dxdy.$$
    trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 1\}$.

19. Tính tích phân
    $$I(R) = \iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy,$$
    với D_R là hình tròn tâm $O(0, 0)$ bán kính R. Từ kết quả đó hãy suy ra giá trị của tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

20. Tính $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2}$, V là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 \le z \le 4$.

21. Tính $I = \displaystyle\iiint\limits_V \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$z \ge 0,\ x^2+y^2 \le z^2 \le 1.$$

22. Hãy sử dụng phép đổi biến thích hợp để tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$$

và các mặt phẳng tọa độ $x=0,\ y=0,\ z=0$.

23. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_M z^2 dxdydz,$$

trong đó M là giao của hai hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$.

24. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_M (x+y+z)^2 dxdydz,$$

trong đó M giới hạn bởi các miền $2az \ge x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2$.

25. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt nón và mặt cầu:

$$x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=2z.$$

26. Tính tích phân $I = \displaystyle\iiint\limits_V xyz\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$x^2+y^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2.$$

27. Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \dfrac{(3x^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1}$, trong đó V là miền giới hạn bởi bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

28. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

trong đó $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq x\}$.

29. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{2x^2-2xy+3y^2-2yz+2z^2}\,dxdydz.$$

trong đó miền V được xác định bởi bất đẳng thức

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2-2xy+3y^2-2yz+2z^2 \leq 1\}.$$

30. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz.$$

31. Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong mặt trụ $2x = x^2+y^2$.

32. Tính diện tích phần mặt cầu

$$x^2+y^2+z^2 = 4, \quad (z \geq 0)$$

nằm trong hình trụ $(x-1)^2+y^2 \leq 1$.

33. Tính diện tích phần mặt cong $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2 \leq 4$.

34. Tính diện tích phần mặt cong $z = x^2+y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 25$.

35. Tính diện tích mặt tròn xoay nhận được khi quay cung đường cong $f(x)$, với $a \le x \le b$ $\big(f'(x) \ge 0\big)$ xung quanh trục Ox. Giả thiết $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$.

36. Tính thể tích phần hình trụ $x^2+y^2 = 2ax$ nằm giữa 2 mặt $x^2+y^2 = 2az$ và $z = 0$.

37. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt cong

    (a) $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

    (b) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz$.

    (c) $y = (x^2 + y^2)^2 + z^4$.

38. Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất D

    (a) Giới hạn bởi các đường $y = px^2$ và $y = b$, biết $p > 0, b > 0$.

    (b) Giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}x+1$ và $y = \dfrac{1}{2}x-1$.

    (c) D là tứ giác lồi với các đỉnh $(4, 4)$, $(5, 7)$, $(10, 10)$, $(12, 4)$.

39. Xác định trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 4,\ z = 2 - \frac{1}{2}x,\ z = 0.$$

40. Xác định trọng tâm của nửa hình cầu đồng chất bán kính R.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Tích phân kép trên miền phẳng

1A. Tóm tắt lí thuyết

• Tích phân hàm $f(x,y)$ trên hình chữ nhật $H = [a,b] \times [c,d]$, theo định lí Fubini

$$\iint\limits_H f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

• Tích phân hàm $f(x,y)$ trên miền phẳng $M \subset \mathbb{R}^2$, trong đó M được xác định bởi các bất đẳng thức

$$M = \{(x,y)/a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

($y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm liên tục xác định trên $[a,b]$), được tính bởi công thức

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Tương tự nếu $M \subset \mathbb{R}^2$ là miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức

$$M = \{(x,y) \mid c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\},$$

trong đó $x_1(y)$ và $x_2(y)$ là các hàm liên tục xác định trên $[c,d]$, khi đó

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

• Trường hợp $M \subset \mathbb{R}^2$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm trục đối xứng, hàm $f(x,y)$ khả tích trên M và là hàm lẻ theo biến y

$$f(x,y) = -f(x,-y) \text{ với mọi } (x,y) \in M \quad \Rightarrow \quad \iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = 0.$$

• Tương tự *nếu tập M nhận đường thẳng $x = 0$ (trục tung) làm trục đối xứng (hoặc gốc tọa độ O làm tâm đối xứng), hàm dưới dấu tích phân $f(x, y)$ là hàm lẻ theo x, khả tích trên M*

$$f(x, y) = -f(-x, y) \quad \forall (x, y) \in M.$$

(hoặc $f(x, y) = -f(-x, -y) \quad \forall (x, y) \in M$). Khi đó

$$\iint_M f(x, y)\, dxdy = 0.$$

• Sử dụng phép đổi biến $(x, y): \ M' \to M$ với $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ để tính tích phân $\iint_M f(x, y)\, dxdy$. Gọi $A = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$ là ma trận đạo hàm của phép đổi biến, Jacobien của nó bằng $J(u, v) = |\det A|$. Khi đó

$$\iint_M f(x, y)\, dxdy = \iint_{M'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot J(u, v)\, dudv.$$

• Đặc biệt khi đổi biến sang hệ tọa độ cực, phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

là song ánh từ tập D lên tập M. Jacobien của phép đổi biến bằng $J = r$. Khi đó

$$\iint\limits_M f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi dr.$$

Nếu miền D (trong hệ tọa độ cực) được xác định bởi các bất đẳng thức

$$D = \{(\varphi, r) \mid \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}.$$

Ta có

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

1B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập tích phân kép

1. Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy$, D là tam giác nối các đỉnh $O(0,0)$, $A(10,1)$, $B(1,1)$.

   Bằng cách chiếu miền D lên trục tung, miền D có dạng

   $$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le 10y\}.$$

   Do vậy tích phân kép

   $$I = \iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}\,dx\Big) dy$$
   $$= \int\limits_0^1 \frac{2}{3y}(xy - y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_y^{10y} dy = \int\limits_0^1 18y^2\,dy = 6.$$

2. Tính tích phân $\iint\limits_D |x + y|\,dxdy$ với $D = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

   Do tính đối xứng qua $O(0,0)$ của miền D và hàm dưới dấu tích phân $f(x,y) = |x + y|$ có tính chất $f(x,y) = f(-x,-y)$ suy ra

   $$I = \iint\limits_D |x + y|\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} (x + y)\,dxdy,$$

   trong đó $D_1 = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, -x \le y \le 1\}$ là nửa hình vuông D. (*Trên* D_1, $x + y \ge 0$).

   $$\iint\limits_{D_1} (x + y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-x}^1 (x + y)dy = \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{4}{3}.$$

   Vậy $I = 2I_1 = \dfrac{8}{3}$.

3. Tính tích phân $\iint\limits_D x\sqrt{4-y^2}\,dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2+y^2=4,\ x>0$

Sử dụng tính đối xứng qua trục hoành của miền D

$$\iint\limits_D x\sqrt{4-y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} x\sqrt{4-y^2}\,dx = \int\limits_0^2 (4-y^2)^{\frac{3}{2}}dy$$
$$= -\frac{1}{4}y(y^2-10)\sqrt{4-y^2} + 6\arcsin\frac{y}{2}\Big|_0^2 = 3\pi.$$

Chú ý rằng có thể tính $\int\limits_0^2 (4-y^2)^{\frac{3}{2}}dy$ *bằng cách đổi biến* $y = 2\sin t$

$$\int\limits_0^2 (4-y^2)^{\frac{3}{2}}dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4 t\,dt = 3\pi.$$

4. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{|x+y^2|}\,dxdy$, trong đó $D = [-4,0]\times[0,2]$.

Hướng dẫn: $|x+y^2| = \begin{cases} x+y^2 & \text{nếu } x \geq -y^2 \\ -x-y^2 & \text{nếu } x < -y^2 \end{cases}$

Suy ra $I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-4}^{-y^2} \sqrt{-x-y^2}\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-y^2}^{0} \sqrt{x+y^2}\,dx = 2\pi + \frac{8}{3}.$

5. Các bài tập (a), (b), (c) về tính diện tích miền phẳng có cách làm như bài tập (d) dưới đây và chúng có đáp số

$$\text{(a)}\quad 4\ln 2, \quad \text{(b)}\quad \frac{2a\ln 2}{3}, \quad \text{(c)}\quad \frac{16}{5}.$$

(d) Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi $x+y=3,\ x+y=2$ và $y=2x,\ y=-2x$.

Gọi M là miền phẳng cần tính diện tích. Diện tích miền phẳng

$$S(M) = \iint_M dxdy.$$

Ta tính tích phân bằng việc đổi biến $u = x + y,\ v = \dfrac{2x}{y}$ khi đó các biến mới $(u, v) \in D = [2, 3] \times [-1, 1]$ và Jacobien của hàm véc tơ (x, y) theo (u, v), kí hiệu $J(u, v)$ bằng

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{y} & \frac{-2x}{y^2} \end{vmatrix}^{-1} = \left(\frac{-2x}{y^2} - \frac{2}{y} \right)^{-1} = \frac{-2u}{(2+v)^2}$$

Diện tích miền phẳng do vậy

$$S(M) = \iint_D |J(u, v)| dxdy = \int_2^3 du \int_{-1}^1 \frac{2u\, dv}{(2+v)^2} = \int_2^3 \frac{4u\, du}{3} = \frac{10}{3}.$$

Chú ý rằng với miền phẳng M giới hạn bởi $x + y = 3,\ x + y = 2$ và $y = 2x,\ y = -2x$, không thể sử dụng phép đổi biến $u = x + y,\ v = \dfrac{y}{x}$ $(*)$ rồi ngộ nhận (!) $u \in [2, 3],\ v \in [-2, 2]$ để tính tích phân $S(M) = \iint_M dxdy$.
Bạn đọc có thể kiểm tra phép đổi biến $(*)$ ứng với $u \in [2, 3]$ và biến $v \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Jacobien $J(u, v) = \frac{u}{(1+v)^2}$. Vậy

$$S(M) = \int_2^3 du \int_{-\infty}^2 \frac{u\, dv}{(1+v)^2} + \int_2^3 \int_2^\infty \frac{u\, dv}{(1+v)^2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{10}{3}.$$

(e) Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = px,\ y^2 = qx$ $(0 < p < q)$ và các đường $x^2 = ay, x^2 = by$ $(0 < a < b)$.

Diện tích miền phẳng là tích phân $S(M) = \iint_M dxdy$ được tính bằng việc đổi biến $u = \dfrac{y^2}{x},\ v = \dfrac{x^2}{y}$. Khi đó $(u, v) \in D = [p, q] \times [a, b]$ và Jacobien của hàm véc tơ (x, y) theo (u, v)

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy diện tích miền phẳng

$$S(M) = \iint_M dxdy = \int_p^q du \int_a^b \frac{dv}{3} = \frac{1}{3}(p-q)(a-b).$$

6. Tính tích phân

$$\iint\limits_D (2x+y)(x-2y)\,dxdy,$$

D là hình vuông, biết tọa độ các đỉnh $A(1,0)$; $B(3,1)$; $C(2,3)$; $D(0,2)$.

Hướng dẫn: *Đổi biến* $u = x-2y, v = 2x+y,\ D' = \{-4 \le u \le 1, 2 \le u \le 7\}$

$$\iint\limits_D (2x+y)(x-2y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} uv \cdot \frac{1}{5}\,dudv = -\frac{135}{4}.$$

Nhận xét rằng ta có thể trực tiếp tính tích phân bằng cách chia hình vuông thành 3 miền tương ứng với các khoảng $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ *của biến* x

$$I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2-2x}^{x/2+2} (2x+y)(x-2y)\,dy = -\frac{835}{96}$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)/2}^{x/2+2} (2x+y)(x-2y)\,dy = -\frac{935}{48}$$

$$I_3 = \int\limits_2^3 dx \int\limits_{(x-1)/2}^{7-2x} (2x+y)(x-2y)\,dy = -\frac{535}{96}$$

Khi đó tích phân cần tính bằng $I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{135}{4}$.

7. Tính tích phân $\iint\limits_D e^{x+y}\sqrt[3]{2x-y}\,dxdy$, với D là miền hữu hạn giới hạn bởi $x+y=0, x+y=1, 2x-y=0, 2x-y=2$.

Hướng dẫn: $I = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 e^u\,du \int\limits_0^2 v^{1/3}\,dv.$

8. Sử dụng phép đổi biến để tính tích phân $\iint\limits_D xy\,dxdy$, với D là hình vuông nối các đỉnh $(0,0),(1,1),(2,0)$ và $(1,-1)$.

   Hướng dẫn: *Đổi biến $u = y + x, v = y - x, 0 \le u \le 2, -2 \le v \le 0$, suy ra $I = 0$. Chú ý rằng có thể sử dụng tính đối xứng để suy ra tích phân bằng 0.*

9. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt trụ

$$xy = 1,\; xy = 4,\; y = 3x,\; y = 6x,$$

mặt phẳng xOy và mặt cong $z = xy^3 + 4$.

Ta biết rằng thể tích vật thể

$$V = \iint\limits_D \left(xy^3 + 4\right)\,dxdy,$$

trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi các đường cong

$$xy = 1; \quad xy = 4; \quad y = 3x; \quad y = 6x,$$

trong mặt phẳng $z = 0$.

Sử dụng phép đổi biến $u = xy, v = \frac{y}{x}$ hay

$$x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}; \quad y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}.$$

Ma trận Jacobien của phép đổi biến bằng

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Vậy Jacobien của phép đổi biến bằng

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Mặt khác dễ dàng nhận thấy phép đổi biến (x, y) là song ánh từ hình chữ nhật

$$D^* = \{(u, v) \mid 1 \le u \le 4, 3 \le v \le 6\}$$

lên D. Áp dụng định lí đổi biến

$$V = \iint\limits_{D} \left(xy^3 + 4\right) dxdy = \iint\limits_{D^*} (u^2v + 4)\frac{1}{2v} dudv$$
$$= \int_1^4 du \int_3^6 \left(\frac{u^2}{2} + \frac{2}{v}\right) dv = \frac{63}{2} + 6\ln 2.$$

Nhận xét rằng Jacobien của phép đổi biến có thể tính thông qua đạo hàm hàm ngược của ánh xạ $\mathbf{h} = (u, v) = (xy, \frac{y}{x})$, $J(u, v) = \frac{1}{\det \mathbf{h}'(\mathbf{h}^{-1}(u,v))}$. *Ta có*

$$\mathbf{h}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{h}'\left(\mathbf{h}^{-1}(u, v)\right) = \left.\frac{2y}{x}\right|_{\frac{y}{x}\to v} = 2v.$$

Suy ra Jacobien $J = \frac{1}{2v}$.

10. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$$\frac{x}{3} + \left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{và} \quad x = 0.$$

Đây là vật thể giới hạn bởi mặt $x = 0$ và mặt $x = 3 - 3\left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}\right)^2$ - hình dạng như parabôlôit quay xuống mặt $x = 0$. Thể tích vật thể bằng

$$V = \iint\limits_{D} 3\left(1 - \left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}\right)^2\right) dydz,$$

trong đó D là miền xác định bởi elip $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ trong mặt phẳng $x = 0$. Đổi biến $y = 3r\cos\varphi, z = 2r\sin\varphi$, Jacôbiên $J = 6r$, ta được

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 3(1 - r^4)6r\, dr = 12\pi.$$

11. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z^2 = xy$.

Hướng dẫn: *Do tính đối xứng*

$$V = 2\iint\limits_D \left(\sqrt{xy} - x^2 - y^2\right) dxdy$$

trong đó D là miền giới hạn bởi $x^2 + y^2 = \sqrt{xy}$*. Chuyển sang hệ tọa độ cực* $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$*, miền D trở thành miền* D^*

$$D^* = \left\{(\varphi, r) \ / \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\right\}$$

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} \left(r\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi} - r^2\right) r\, dr = \frac{1}{24}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{96}.$$

12. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$$2x = y^2 + z^2,\ (y^2 + z^2)^2 = 4(y^2 - z^2) \quad \text{và} \quad x = 0.$$

Hướng dẫn: *Thể tích vật thể bằng*

$$V = \iint\limits_D \frac{y^2 + z^2}{2}\, dydz$$

D là miền xác định bởi đường cong $(y^2 + z^2)^2 = 4(y^2 - z^2)$ *trong mặt phẳng yOz. Phương trình của nó trong hệ tọa độ cực* $y = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi$ *là* $r^2 = 4\cos 2\varphi$

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r^3}{2}\, dr = \pi.$$

13. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $y = 1 - z^2, x + z = 1$ và các mặt phẳng tọa độ.

Hướng dẫn: *Xét trong góc phần tám* $x > 0, y > 0, z > 0$*, miền đó gần giống như hình chóp với đỉnh* $(0, 0, 1)$ *đáy là hình vuông với các đỉnh* $O(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$

nằm trong mặt phẳng xOy, thiết diện $S(z)$ là hình chữ nhật có các cạnh dài $1-z$ và $1-z^2$. Suy ra $S(z)=(1-z)(1-z^2),\ (0<z<1)$. Vậy thể tích vật thể bằng

$$V=\int_0^1 S(z)dz=\int_0^1 (1-z)(1-z^2)dz=\frac{5}{12}.$$

Nhận xét rằng ta có thể tính thể tích vật thể bằng cách đưa về tích phân kép: $V=\iint\limits_D (1-z)dydz$ với D là miền phẳng trong mặt phẳng yOz giới hạn bởi trục Oy, Oz và parabôl $y=1-z^2$

$$V=\int_0^1 dz\int_0^{1-z^2}(1-z)dy=\frac{5}{12}.$$

14. Tính $I=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$ với D là miền giới hạn bởi đường cong

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\quad (x>0).$$

Đường cong nói trên trong hệ tọa độ cực $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ có phương trình $r^2=a^2\cos 2\varphi$, trong đó $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ do $x>0$. Ta tính tích phân bằng cách chuyển sang hệ tọa độ cực $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, miền D trở thành miền D^*

$$D^*=\left\{(\varphi,r)\ \Big|\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le a\sqrt{\cos 2\varphi}\right\}$$

Do vậy

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[1-\left(2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}\right]d\varphi$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sqrt{2}\sin^3\varphi\right)d\varphi=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5-4\sqrt{2}}{3}\right).$$

15. Tính tích phân $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, trong đó miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được xác định bởi các bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 \geq 1 \quad \text{và} \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Miền D là phần nằm trong hình tròn $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ và nằm ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Miền D có dáng như hình trăng khuyết, đối xứng qua trục tung. Do vậy chỉ cần tính tích phân trên một nửa miền D, miền $D_1 \subset D$ ứng với $x > 0$. Chuyển qua hệ tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, miền D_1 trở thành miền D^*

$$D^* = \left\{(\varphi, r)\ /\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq r \leq 2\sin\varphi\right\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} I = 2\iint\limits_{D_1} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{2\sin\varphi} \frac{2r\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\, dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}(4\sin^2\varphi - 1)\, d\varphi = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

16. Tính các tích phân sau

(a) $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$ với D là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 = 2y$.

Đường tròn $x^2+y^2 = 2y$ trong hệ tọa độ cực có phương trình $r = 2\sin\varphi$, trong đó $0 \leq \varphi \leq \pi$. Ta tính tích phân bằng cách chuyển sang hệ tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, miền D trở thành

$$D^* = \left\{(\varphi, r)\ \middle|\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 2\sin\varphi\right\}$$

Do vậy

$$I = \iint\limits_{D^*} \sqrt{4 - r^2}\, r\, d\varphi dr = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4 - r^2}\, r\, dr = \frac{8}{9}(3\pi - 4).$$

(b) $I = \iint\limits_D \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dxdy$ với D là miền giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2x$.

Đường tròn $x^2+y^2 = 2x$ trong hệ tọa độ cực $x = 1+r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ có phương trình $r = 1$. Chuyển sang hệ tọa độ cực $x = 1+r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr = \frac{2}{3}\pi.$$

(c) $I = \iint\limits_D \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\right) dxdy$ với D là miền giới hạn bởi

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \ (*)$$

Đổi biến $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = r\cos\varphi, \frac{y}{4} - \frac{1}{2} = r\sin\varphi$ khi đó đường cong $(*)$ là đường tròn $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Jacôp biên của phép biến đổi $J = 3\cdot 4\cdot r = 12r$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2} - r^2\right)\cdot 12r\, dr = 2\pi\cdot\frac{27}{4} = \frac{27\pi}{2}.$$

(d) Tính thể tích miền không gian giới hạn bởi mặt parabôlôit $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ và mặt phẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.

Hướng dẫn: *Thể tích* $V = \iint\limits_D \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) dxdy$ *với* D *là miền phẳng giới hạn bởi*

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Tương tự như bài tập trên

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2} - r^2\right)\cdot 6r\, dr = 2\pi\cdot\frac{27}{8} = \frac{27\pi}{4}.$$

17. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D e^{4x^2+y^2}\, dxdy$$

trong đó miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được xác định bởi bất đẳng thức

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Miền D là hình elip. Ta sẽ rính tích phân bằng cách đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases}$

Ánh xạ (x, y) chuyển miền D^* lên miền D, trong đó D^* là miền hình chữ nhật

$$D^* = \{(\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Jacôbiên của ánh xạ (x, y)

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi \end{vmatrix} = 2r.$$

Suy ra tích phân cần tìm

$$I = \iint\limits_D e^{4x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^2} 2r\, dr = 2\pi(e-1).$$

18. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \sqrt{2x^2 + 2xy + 2y^2}\, dxdy$$

trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 1\}$.

Trước hết ta nhận xét rằng miền D là một hình elip. Sử dụng phép biến đổi không suy biến (chẳng hạn bằng phương pháp Lagrange) đưa dạng toàn phương $\omega = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{2}y^2$ về dạng chính tắc

$$\begin{cases} u = \sqrt{2}(x + \frac{1}{2}y) \\ v = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}v \\ y = \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v \end{cases}$$

Phép biến đổi chuyển hình tròn $\overline{D} = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ thành miền D, Jacôbiên của phép biến đổi $J(u,v) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, áp dụng định lí đổi biến

$$I = \iint\limits_D \sqrt{2x^2 + 2xy + 2y^2}\, dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\, dudv.$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực $u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi$, khi đó $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ và $0 \leq r \leq 1$, ta được

$$I = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\, dudv = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\, dr = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

19. Tính tích phân $I(R) = \iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$, với D_R là hình tròn tâm $O(0,0)$ bán kính R. Từ kết quả đó hãy suy ra giá trị của tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Bằng cách chuyển sang hệ tọa độ cực, dễ dàng tính được tích phân

$$I(R) = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Như vậy tích phân kép suy rộng trên toàn bộ mặt phẳng

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{R\to+\infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

Do tính đối xứng, tích phân này bằng 4 lần tích phân trên góc phần tư thứ nhất của $\mathbb{R}^2$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

2. Tích phân bội ba trên miền không gian

2A. Tóm tắt lí thuyết

• Giả sử $V \subset \mathbb{R}^3$ là miền được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(x, y, z)/a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

khi đó

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Nếu kí hiệu

$$M = \{(x, y)/a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

là hình chiếu của V lên mặt phẳng xOy. Ta có

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_M \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

Ngoài ra nếu kí hiệu $S(x)$ là thiết diện tạo bởi V với mặt phẳng đi qua x, vuông góc với trục Ox, khi đó

$$\iiint\limits_V f(x, y)\, dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)\, dydz.$$

• Công thức đổi biến tổng quát để tích phân bội

Cho hàm $f : M \to \mathbb{R}$ khả tích trên tập giới nội $M \subset \mathbb{R}^n$. Gọi $\mathbf{g} : M' \to M$ là song ánh từ $M' \subset R^n$ lên M, khả vi liên tục trên tập M'. Kí hiệu $|\mathbf{g}'(\mathbf{y})|$ là Jacobien của ánh xạ $\mathbf{g}$ tại $\mathbf{y} \in M'$: $|\mathbf{g}'(\mathbf{y})| = |\det \mathbf{g}'(\mathbf{y})|$, khi đó

$$\int\limits_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))|\mathbf{g}'(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}.$$

• Đổi biến sang hệ tọa độ trụ bằng phép biến đổi

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Giả sử phép biến đổi đó là song ánh từ tập V lên tập M. Jacobien của phép đổi biến bằng $J = r$. Ta có

$$\iiint\limits_{M} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, d\varphi dr.$$

Đặc biệt trong hệ tọa độ trụ nếu miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(\varphi, r, z)/\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), z_1(\varphi, r) \le z_2(\varphi, r)\},$$

khi đó

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int_{z_1(\varphi,r)}^{z_2(\varphi,r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

• Đổi biến sang hệ tọa độ cầu: sử dụng phép biến đổi

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

để tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_{M} f(x,y,z)dxdydz.$$

Giả sử phép biến đổi đó là song ánh từ tập V lên tập M. Jacobien của phép đổi biến sang hệ tọa độ cầu $J = r^2\sin\theta$. Khi đó

$$I = \iiint\limits_{V} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, d\varphi dr d\theta.$$

Đặc biệt khi miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(\varphi, r, \theta)/\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), \theta_1(\varphi, r) \le \theta \le \theta_2(\varphi, r)\},$$

áp dụng định lí Fubini ta được

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 dr \int_{\theta_1(\varphi,r)}^{\theta_2(\varphi,r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

2B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập tích phân bội ba

20. Tính $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{1+x^2+y^2}$, V là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 \le z \le 4$.

Ta tính tích phân bội ba I bằng cách đổi biến sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Khi đó tích phân theo biến mới sẽ được tính trên miền

$$V^* = \{(\varphi, r, z) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r^2 \le z \le 4\}.$$

Jacôbiên của phép biến đổi $J(\varphi, r, z) = r$. Ta có

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2} = \iiint\limits_{V^*} \frac{r\,d\varphi dr dz}{1+r^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{r^2}^4 \frac{rdz}{1+r^2}$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \frac{r(4-r^2)dr}{1+r^2} = \pi(5\ln 5 - 4).$$

21. Tính $I = \iiint\limits_V \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$z \ge 0,\ x^2+y^2 \le z^2 \le 1.$$

Chuyển sang hệ tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$ Hình chiếu của V lên mặt phẳng $z = 0$ là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$, suy ra các biến $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ và $r \leq z \leq 1$. Ta được

$$I == \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\, dr \int_r^1 \sin(\pi r) dz = 2\pi \int_0^1 (1-r) r \sin(\pi r) dr = \frac{8}{\pi^2}.$$

22. Sử dụng phép đổi biến thích hợp để tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ và các mặt phẳng tọa độ.

Thể tích vật thể, kí hiệu M giới hạn bởi các mặt nói trên

$$V = \iiint_M dxdydz.$$

Phép đổi biến $x = u^2, y = v^2, z = t^2$ là hàm véctơ chuyển miền không gian $T = \{(u, v, t) \mid u + v + t \leq 1, u, v, t \geq 0\}$ thành miền M cần tính thể tích. (T là hình chóp tam giác đỉnh O, đáy là tam giác nối các điểm có tọa độ bằng 1 trên các trục u, v, t).

Jacôbiên là định thức cấp 3 của ánh xạ đạo hàm hàm véc tơ $J = 8uvt$. Vậy

$$V = \iiint_M dxdydz = \iiint_T 8uvt\, dudvdt = 8\int_0^1 u\, du \int_0^{1-u} v\, dv \int_0^{1-u-v} t\, dt$$
$$= 8\int_0^1 u\, du \int_0^{1-u} \frac{v(1-u-v)^2}{2} dv = 8\int_0^1 \frac{u(1-u)^4}{24} du = \frac{1}{90}.$$

23. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_M z^2 dxdydz,$$

trong đó M là giao của hai hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

Giao của 2 mặt cầu là đường tròn $(C):\ x^2 + y^2 = \frac{3}{4}R^2$ nằm trên mặt phẳng $z = \frac{R}{2}$. Chia M thành hai miền rời nhau $M = M_1 \cup M_2$, trong đó M_1 là hình quạt cầu - phần nằm trong M và phía trên hình nón đỉnh O đáy là đường tròn C - M_2 là phần nằm trong M và phía dưới hình nón.

Bằng cách đổi biến sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ miền không gian M_1 có các biến mới $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R$ và $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. Jacôbiên của phép biến đổi $J = r^2\sin\theta$. Do vậy tích phân thứ nhất

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint\limits_{M_1} z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\,dr \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \frac{7}{24}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4\,dr = \frac{7}{60}\pi R^5. \end{aligned}$$

Chiếu miền M_2 xuống xOy là đường tròn tâm O. Với $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ cố định, biến r sẽ biến thiên từ 0 đến mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$ hay $0 \le r \le 2R\cos\theta$. Tích phân thứ hai

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint\limits_{M_2} z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr \\ &= 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32R^5}{5}\cos^5\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{64\pi R^5}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{R^5\pi}{160} \end{aligned}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{7}{60}\pi R^5 + \dfrac{R^5\pi}{160} = \dfrac{59}{480}\pi R^5.$

24. Tính tích phân
$$I = \iiint\limits_M (x+y+z)^2 dxdydz,$$
trong đó M giới hạn bởi các miền $2az \ge x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2$.

Hướng dẫn:

$$I = \iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz + \iiint\limits_M 2(xy + yz + xz)dxdydz.$$

Tích phân thứ hai bằng 0 do tính đối xứng, trong khi tích phân thứ nhất là ví dụ 3.5.1.6 trong sách giáo khoa. $I = \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$.

25. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt nón và mặt cầu:

$$x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

Kí hiệu miền không gian nói trên và thể tích miền đó cùng là V, khi đó $V = \iiint\limits_V dxdydz$. Bằng cách đổi biến sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ các biến mới $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ và $0 \le r \le 2\cos\theta$. Vậy thể tích vật thể

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr = \pi.$$

26. Tính tích phân $I = \iiint\limits_V xyz\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2.$$

Trước hết ta nhận xét rằng hàm $f(x, y, z) = xyz$ khả tích trên miền V. Mặt khác ta thấy miền V nhận mặt phẳng xOz làm mặt phẳng đối xứng, $V = V_1 \cup V_2$, trong đó V_1 là nửa bên trái mặt phẳng xOz và V_2 là phần còn lại, nửa bên phải. Hàm dưới dấu tích phân $(f(x, y, z) = xyz)$ nhận các giá trị đối nhau tại các điểm đối xứng nhau qua mặt phẳng xOz (hàm lẻ theo biến y)

$$f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \quad \forall (x, y, z) \in V.$$

Từ tính chất tích phân bội suy ra tích phân hàm f trên V_1 và V_2 cũng đối nhau. Vậy $I = \iiint\limits_V xyz\, dxdydz = 0$.

27. Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \dfrac{(3x^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1}$, trong đó V là miền giới hạn bởi bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Do tính đối xứng, các tích phân sau bằng nhau

$$\iiint\limits_V \frac{(3x^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1} = \iiint\limits_V \frac{(3y^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1} = \iiint\limits_V \frac{(3z^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1}$$

Mặt khác tổng của chúng bằng 3 lần thể tích hình cầu

$$\iiint\limits_V \frac{(3x^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1} + \iiint\limits_V \frac{(3y^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1} + \iiint\limits_V \frac{(3z^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1} =$$

$$= \iiint\limits_V \frac{(3x^4+3y^4+3z^4+3)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1} = \iiint\limits_V 3\,dxdydz = 3\cdot\frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

Suy ra $I = \dfrac{4\pi}{3}$.

28. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

trong đó $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le x\}$.

$V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le x\} = \{(x,y,z) \mid (x-\frac{1}{2})^2+y^2+z^2 \le (\frac{1}{2})^2\}$ là hình cầu tâm $(\frac{1}{2},0,0)$ bán kính $R=\frac{1}{2}$. Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ các biến mới $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \pi$ và $0 \le r \le \sin\theta\cos\varphi$. Vậy tích phân

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{r\sin\theta\cos\varphi} r^3\,dr = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5\theta\cos^4\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{4}{15}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$

29. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{2x^2 - 2xy + 3y^2 - 2yz + 2z^2}\, dxdydz.$$

trong đó $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 2yz + 2z^2 \leq 1\}$.
Sử dụng phép biến đổi trực giao T để đưa dạng toàn phương dưới căn về dạng chính tắc ta có
$I = \iiint\limits_{V^*} \sqrt{u^2 + 2v^2 + 4t^2}\, dudvdt$, trong đó miền V^* là elipxôit

$$V^* = \{(u, v, t) \mid u^2 + 2v^2 + 4t^2 \leq 1\}$$

(Chú ý rằng Jacốpbiên của phép biến đổi trực giao T bằng 1). Đổi biến tiếp

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\theta \sin\varphi \\ z = \frac{1}{2} r \cos\theta, \end{cases} \quad \text{với} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi,$$

khi đó Jacốpbiên $J = \frac{1}{2\sqrt{2}} r^2 \sin\theta$. Suy ra

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

30. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz.$$

Tích phân I chính là tích phân bội ba hàm $f = x^2 + y^2$ trong nửa hình cầu $V:\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0$

$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

Ta sẽ tính tích phân bội ba này bằng cách sử dụng phép đổi biến sang hệ tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ với $0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

3. Một vài ứng dụng tích phân

3A. Tóm tắt lí thuyết

• Diện tích miền phẳng $D \subset \mathbb{R}^2$ bằng

$$S(D) = \iint_D dxdy.$$

Thể tích miền $V \subset \mathbb{R}^3$ trong không gian được tính thông qua tích phân bội ba

$$\lambda(V) = \iiint_V dxdydz.$$

Nếu miền V là hình trụ cong giới hạn bởi mặt đáy dưới là miền phẳng D trong mặt phẳng xOy, đáy trên là mặt cong $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$ nằm trên mặt phẳng xOy, (các đường sinh song song với trục Oz), khi đó thể tích miền V bằng tích phân kép

$$\lambda(V) = \iint_V f(x, y)dxdy.$$

• Diện tích mặt cong $z = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy.$$

Trường hợp tổng quát hơn khi hàm véc tơ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ là biểu diễn tham số mặt cong S nào đó, trong đó (u, v) biến thiên trong miền phẳng $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó diện tích mặt cong S bằng

$$\iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)|\, dudv,$$

trong đó véc tơ tích có hướng $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)$ là véc tơ pháp của mặt cong.

Nếu sử dụng các kí hiệu: $\mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in D$ là biểu diễn tham số mặt cong S và ta dẫn vào các kí hiệu

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r'}_u^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, \\ F &= \mathbf{r'}_u\mathbf{r'}_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \\ G &= \mathbf{r'}_v^2 = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v. \end{aligned}$$

Khi đó diện tích mặt cong S cũng bằng

$$\iint\limits_D |\mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v)|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

• Khối lượng của vật thể V

$$m = \iiint\limits_V \varrho(x,y,z) dxdydz,$$

trong đó $\varrho(x,y,z)$ là hàm khối lượng riêng tại $(x,y,z) \in V$.

Tọa độ trọng tâm của V được tính theo công thức

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint\limits_V x\varrho(x,y,z) dxdydz \\ \overline{y} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint\limits_V y\varrho(x,y,z) dxdydz \\ \overline{z} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint\limits_V z\varrho(x,y,z) dxdydz. \end{cases}$$

3B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập ứng dụng tích phân

31. Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong mặt trụ $2x = x^2+y^2$.

    Diện tích mặt cong được tính theo công thức

    $$S = \iint_D \sqrt{1+{f'}_x^2+{f'}_y^2}\,dxdy$$

    trong đó $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \ \Rightarrow \ {f'}_x^2+{f'}_y^2 = 1$, miền D là hình tròn $(x-1)^2+y^2 \le 1$. Vậy diện tích mặt cong

    $$S = \iint_D \sqrt{1+{f'}_x^2+{f'}_y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}S(D) = \pi\sqrt{2}.$$

32. Tính diện tích phần mặt cầu

    $$x^2+y^2+z^2 = 4, \quad (z \ge 0)$$

    nằm trong hình trụ $(x-1)^2+y^2 \le 1$.

    Kí hiệu $f = \sqrt{4-x^2-y^2}$ là hàm biểu diễn nửa trên mặt cầu

    Diện tích phần mặt cầu cần tính bằng
    $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1+{f'}_x^2+{f'}_y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$, trong đó miền lấy tích phân $D = \{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2 \le 1$ là hình tròn đáy hình trụ.

    Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với các biến

    $$(\varphi, r) \in D^* = \{(\varphi, r) \mid -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi\}.$$

    Vậy diện tích phần mặt cầu cần tính

    $$S = \iint\limits_{D^*} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} 2r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}drd\varphi = 4(\pi-2).$$

Nhận xét rằng ta cũng có thể tính theo công thức $S = 2\iint\limits_{D^*} |\mathbf{n}(\varphi,\theta)|\, d\varphi d\theta$

với **n** *là véc tơ pháp của mặt cầu* $\begin{cases} x = 2sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\theta, \end{cases}$ $|\mathbf{n}| = 4\sin\theta$, *các biến* φ, θ *trong miền* $D^* = \{(\varphi,\theta) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} - \varphi\}$. *Vậy*

$$\begin{aligned} S = 2\iint\limits_{D^*} |\mathbf{n}(\varphi,\theta)|\, d\varphi d\theta &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} 4\sin\theta\, d\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)\, d\varphi = 4\pi - 8. \end{aligned}$$

33. Tính diện tích phần mặt cong $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 4$.

Hướng dẫn *Bạn đọc hãy tự giải bài tập này, sử dụng công thức*

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

34. Tính diện tích phần mặt cong $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 25$.

Tương tự như bài tập trên

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy,$$

trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 5^2$. Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

khi đó

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 r\sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{2\pi}{12}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^5 = \frac{\pi}{6}\left(101\sqrt{101} - 1\right).$$

35. Tính diện tích mặt tròn xoay nhận được khi quay cung đường cong $y = f(x), a \le x \le b$ $\big(f'(x) \ge 0\big)$ xung quanh trục Ox. Giả thiết $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$.

    Gắn mặt cong với hệ trục $Oxyz$ khi đó nửa mặt trên (phía trên mặt phẳng xOy) tương ứng với $y \ge 0$ có phương trình

    $z = \sqrt{f^2(x) - y^2}$ với $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$.

    Phần mặt cong này tương ứng với (x, y) *trong góc phần tư thứ nhất trên mặt phẳng* xOy. Véc tơ pháp

    $$\mathbf{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{-f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}, 1 \right),$$

    suy ra $|\mathbf{n}| = \dfrac{|f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}$. Do đó diện tích phần mặt cong nói trên

    $$S = \iint\limits_D |\mathbf{n}|\, dxdy = \int\limits_a^b \left(|f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)} \underbrace{\int_0^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}}_{\arcsin \frac{y}{f}\big|_0^f = \frac{\pi}{2}} \right) dx$$
    $$= \frac{\pi}{2} \int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

    Diện tích cả mặt tròn xoay (như trong giải tích 1) bằng $4S$. Mặt tròn xoay cũng có thể được cho dưới dạng hệ thức $f^2(x) - y^2 - z^2 = 0$. (Trong trường hợp này việc viết phương trình tiếp diện thông qua véc tơ pháp tuyến được tính toán gọn hơn).

36. Tính thể tích phần hình trụ $x^2 + y^2 = 2ax$ nằm giữa 2 mặt $x^2 + y^2 = 2az$ và $z = 0$.

    Phần hình trụ này có đáy dưới là hình tròn $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, đáy trên là mặt parabôlôit $x^2 + y^2 = 2az$. Thể tích phần hình trụ là tích phân bội ba $V = \iiint_V dxdydz$. Ta tính tích phân bằng cách chuyển sang hệ tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$ với các biến $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2a\cos\varphi$

và $0 \le z \le \frac{r^2}{2a}$. Khi đó

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} rdr \int\limits_0^{\frac{r^2}{2a}} dz = \frac{3}{4}\pi a^3.$$

37. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong

(a) $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

Hướng dẫn: *Chuyển sang hệ tọa độ cầu* $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ *mặt cong* $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ *có phương trình* $r^3 = \cos\theta$ *hay* $r = (\cos\theta)^{\frac{1}{3}}$ *trong hệ tọa độ cầu. Do* $z \ge 0$ *nên các biến* $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$*. Khi* θ, φ *biến thiên, hàm* $r(\varphi, \theta) = (\cos\theta)^{\frac{1}{3}}$ *biểu diễn mặt mặt cong kín gần giống như mặt cầu đi qua gốc tọa độ và điểm* $(0, 0, 1)$ *trên trục* Oz*. Thể tích vật thể*

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(\cos\theta)^{\frac{1}{3}}} r^2\sin\theta\, dr = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Chú ý rằng khi cắt mặt đã cho bởi mặt phẳng $z = a$*, giao là đường tròn* $x^2 + y^2 = a^{\frac{1}{2}} - a^2$*. Do vậy mặt* $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ *là mặt tròn xoay. Thể tích có thể tính bằng công thức*

$$V = \int_0^1 S(a)da = \int_0^1 \pi(a^{\frac{1}{2}} - a^2)da = \frac{\pi}{3}.$$

(b) Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong $(x^2+y^2+z^2)^3 = xyz$.

Chuyển sang hệ tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ mặt cong có phương trình $r^3 = \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$.

Từ phương trình của mặt cong $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz$ ta thấy $xyz \geq 0$, suy ra nếu $z > 0$ thì x, y cùng dấu, nếu $y > 0$ thì x, z cùng dấu,... Suy ra chỉ cần vẽ mặt cong trong góc phần tám thứ nhất $(x > 0, y > 0, z > 0)$ và lấy đối xứng qua các trục tọa độ (đối xứng qua các đường thẳng Ox, Oy, Oz chứ không phải đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ) ta được đồ thị toàn bộ mặt cong. Trong góc phần tám thứ nhất mặt cong $r^3 = \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$ với $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ là mặt cong kín. Theo nhận xét trên lấy đối xứng qua các trục tọa độ, toàn bộ vật thể gồm 4 mặt cong kín như 4 quả mít gắn vào gốc tọa độ. Thể tích vật thể, do vậy bằng

$$\begin{aligned}
V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{r(\varphi,\theta)} r^2\, dr \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \frac{1}{3}\cdot\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\, d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(c) Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong

$$y = (x^2 + y^2)^2 + z^4.$$

Chuyển sang hệ tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

mặt cong có phương trình $2\sin\theta\sin\varphi = r^3(2 - \sin^2 2\theta)$ hay

$$r(\varphi, \theta) = \left(\frac{2\sin\theta\sin\varphi}{2 - \sin^2 2\theta}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Do $y \geq 0$ nên $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$. Khi θ, φ biến thiên trên hình chữ nhật này $r(\varphi, \theta) = \left(\frac{2\sin\theta\sin\varphi}{2-\sin^2 2\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$ biểu diễn mặt mặt cong kín.

Vật thể đối xứng qua mặt phẳng xOy. Thể tích vật thể bằng

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r(\varphi,\theta)} r^2 \sin\theta \, dr \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\theta \, d\theta}{2-\sin^2 2\theta} = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta \, d\theta}{2-\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2-\sin^2 2\theta} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin 2\theta}{2-\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\, d\theta}{2-\sin^2 2\theta} - \frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2\theta}{\sqrt{2}+\sin 2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\mathrm{tg}2\theta}{2+\mathrm{tg}^2 2\theta} = \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}2\theta}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng hàm trong tích phân đầu của hàng thứ hai đối xứng qua đường thẳng $x = \frac{\pi}{4}$ trong khi hàm dưới dấu tích phân tiếp theo đối xứng qua điểm $(\frac{\pi}{4}, 0)$. Vì vậy tích phân thứ hai này bằng 0.

Nhận xét tằng có thể chuyển sang hệ tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$$

mặt cong có phương trình $z^4 = r(\sin\varphi - r^3)$. *Miền tương ứng với nửa trên mặt phẳng* xOy $0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le (\sin\varphi)^{1/3}, 0 \le z \le \big(r(\sin\varphi - r^3)\big)^{1/4}$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin^{\frac{1}{3}}\varphi} \big(r(\sin\varphi - r^3)\big)^{1/4} r\, dr \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin^{\frac{1}{3}}\varphi} \big(\frac{\sin\varphi - r^3}{r^3}\big)^{1/4} dr^3 \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \big(\frac{\sin\varphi - t}{t}\big)^{1/4} dt
\end{aligned}$$

Đổi biến tiếp $t = \sin\varphi \sin^2 u$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\varphi \cos^{\frac{3}{2}} u \sin^{\frac{1}{2}} u \, du \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} u \sin^{\frac{1}{2}} u \, du \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} u \sin^{\frac{1}{2}} u \, du = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Tích phân trên hàng cuối được tính nhờ sử dụng kết quả về hàm Beta $B(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} u \sin^{\frac{1}{2}} u \, du$*. Việc tính trực tiếp tích phân này phức tạp hơn.*

38. Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất D

(a) Giới hạn bởi các đường $y = px^2$ và $y = b$, biết $p > 0, b > 0$.
Diện tích miền D bằng

$$S = \iint_D dxdy = 2\int_0^{\sqrt{\frac{b}{p}}} dx \int_{px^2}^{b} dy = 2\int_0^{\sqrt{\frac{b}{p}}} (b - px^2)dx = \frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{p}}.$$

Áp dụng công thức $\overline{x} = \frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dxdy,\ \overline{y} = \frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dxdy$ để tính tọa độ trọng tâm

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dxdy = \frac{1}{S}\int_{-\sqrt{\frac{b}{p}}}^{\sqrt{\frac{b}{p}}} x\,dx \int_{px^2}^{b} dy = 0.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dxdy = \frac{2}{S}\int_0^{\sqrt{\frac{b}{p}}} dx \int_{px^2}^{b} ydy = \frac{3b}{5}.$$

(b) Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0,\ y = -\frac{1}{2}x + 1$ và $y = \frac{1}{2}x - 1$.
Hướng dẫn: *Sử dụng các công thức tìm trọng tâm, ta được* $\overline{x} = \frac{2}{3}, \overline{y} = 0$*. Trọng tâm của bản phẳng* D *trùng với trọng tâm tam giác* D*.*

(c) D là tứ giác lồi với các đỉnh $(4,4)$, $(5,7)$, $(10,10)$, $(12,4)$. Tìm tọa độ trọng tâm của bản phẳng D đó.

Hướng dẫn: *Sử dụng các công thức tính trọng tâm dạng tích phân. Diện tích tứ giác* $S = S_1 + S_2$, *trong đó* S_1 *là diện tích hình thang* $(4,4),(12,4),\ (5,7),(11,7)$ *và* S_2 *là diện tích tam giác* $(10,10),(5,7),(11,7)$.

$$S_1 = \int_4^7 dy \int_{\frac{y+8}{3}}^{\frac{40-y}{3}} dx = 21,\ S_2 = 9 \ \Rightarrow\ S = S_1 + S_2 = 30.$$

Hoành độ trọng tâm $\bar{x}$ *và tương tự với tung độ trọng tâm* $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{1}{30}\left(\int_4^7 dy \int_{\frac{y+8}{3}}^{\frac{40-y}{3}} x\,dx + \int_7^{10} dy \int_{\frac{5y-20}{3}}^{\frac{40-y}{3}} x\,dx\right) = \frac{168+78}{30} = \frac{41}{5}$$
$$\bar{y} = \frac{1}{30}\left(\int_4^7 y\,dy \int_{\frac{y+8}{3}}^{\frac{40-y}{3}} dx + \int_7^{10} y\,dy \int_{\frac{5y-20}{3}}^{\frac{40-y}{3}} dx\right) = \frac{114+9}{30} = \frac{41}{10}.$$

Lưu ý rằng trọng tâm của bản phẳng hình tứ giác không đồng nhất với trọng tâm của hệ thống gồm 4 đỉnh của tứ giác đó.

Tuy nhiên *trọng tâm của bản phẳng hình tam giác trùng với trọng tâm của hệ thống 3 đỉnh của tam giác đó.* Thật vậy chia tam giác bất kì thành các tam giác có một cạnh song song với trục tọa độ rồi tịnh tiến để một đỉnh về $O(0,0)$. Việc chứng minh khẳng định trên với tam giác như vậy rất đơn giản (ví dụ tam giác $O(0,0), A(1,0), B(1,k)$). Vấn đề bây giờ phải chứng minh khi phân chia một tam giác thành 2 tam giác nhỏ, nếu khẳng định đúng với các tam giác nhỏ thì cũng đúng với tam giác lớn.

Chia tam giác ABC thành 2 tam giác ABD và ACD với D thuộc cạnh BC Kí hiệu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ là các véc tơ xác định các đỉnh A, B, C, D. Giả thiết trọng tâm của bản phẳng ABD và ACD bằng $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}}{3}$ và $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$ tương ứng. Khi đó trọng tâm của bản phẳng ABC, theo cách tính tích phân là véc tơ

$$
\begin{aligned}
(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{S}\left(\iint\limits_{\Delta ABC} x\,dxdy, \iint\limits_{\Delta ABC} y\,dxdy\right) \\
&= \frac{1}{S}\left(\iint\limits_{S_1} x\,dxdy + \iint\limits_{S_2} x\,dxdy, \iint\limits_{S_1} y\,dxdy + \iint\limits_{S_2} y\,dxdy\right) \\
&= \frac{1}{S}\left(S_1\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}}{3} + S_2\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Véc tơ trên bằng $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{3} + \dfrac{S_1\mathbf{b}+S_2\mathbf{c}}{3S}$. Mặt khác do D thuộc cạnh BC nên

$$\frac{\mathbf{d}}{3} = \frac{S_2\mathbf{b}+S_1\mathbf{c}}{3S}.$$

Thay vào véc tơ trên ta được trọng tâm của bản phẳng ABC bằng

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}.$$

39. Xác định trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt

$$x^2+y^2=4,\ z=2-\frac{1}{2}x,\ z=0.$$

Ta có thể thấy đây là vật thể hình trụ mà đáy dưới là hình tròn (của hình trụ $x^2+y^2=4$) trên mặt phẳng $z=0$ và đáy trên là giao hình trụ với mặt phẳng $z=2-\frac{1}{2}x$. Thể tích vật thể có thể tính bằng việc tích phân thiết diện $S(x)$ (thiết diện vuông góc với Ox). Dễ dàng nhận thấy thiết diện đó là hình chữ nhật có độ dài các cạnh bằng $2\sqrt{4-x^2}$ và $2-\frac{x}{2}$. Vậy thể tích vật thể bằng

$$V=\int_{-2}^{2} S(x)dx = \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}(2-\frac{x}{2})dx = 8\pi.$$

Vậy tọa độ trọng tâm $\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}$ được tính bằng cách đổi biến tích phân sang tọa độ trụ

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{V}\iiint\limits_V x\,dxdydz = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_0^{2-\frac{r\cos\varphi}{2}} r\cos\varphi\,dz\\
&= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2r^2\cos\varphi - \frac{r^3\cos^2\varphi}{2}\right) dr\\
&= -\frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{r^3\cos^2\varphi}{2} dr = -\frac{1}{V}\int_0^{2\pi} 2\cos^2\varphi d\varphi\\
&= -\frac{1}{8\pi}\cdot 2\pi = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V y\,dxdydz = 0 \quad \text{(do tính đối xứng).}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{V}\iiint\limits_V z\,dxdydz = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_0^{2-\frac{r\cos\varphi}{2}} z\,dz\\
&= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{r(4-r\cos\varphi)^2}{8}\,dr\\
&= \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{17\pi}{2} = \frac{17}{16}.
\end{aligned}$$

40. Xác định trọng tâm của nửa hình cầu đồng chất bán kính R.
Hướng dẫn: *Gắn nửa hình cầu với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp: tâm cầu là gốc tọa độ, đỉnh của nửa hình cầu nằm trên trục Oz. Bạn đọc tự tính tọa độ trọng tâm theo các công thức tích phân đã sử dụng trong các bài tập trên, kết quả*

$$\overline{x} = 0,\ \overline{y} = 0,\ \overline{z} = \frac{3R}{8}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Tính các tích phân đường loại một

   (a) $\int_L (x^2+y^2)ds$, L là đoạn thẳng nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(2,4)$.

   (b) $\int_L x\,ds$, L là cung parabol $y=x^2$ nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(2,4)$.

   (c) $\int_L xy\,ds$, L là chu tuyến hình vuông $|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

2. Tính diện tích mặt trụ $x^2+y^2=4$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z=0$ và $z=4-x$.

3. Tính diện tích mặt trụ $y=\dfrac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z=0, x=0$, $z=x$ và $y=6$.

4. Tính các tích phân đường loại một

   (a) $\int_L \dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, L là đường đinh ốc

   $$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt,\ 0\le t\le 2\pi.$$

   (b) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, L là đường tròn $x^2+y^2+z^2=R^2, x=y$.

5. Tính tích phân đường loại hai các hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y)$ theo cung L

   (a) $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+(y^2-x^2)\mathbf{j}$, $\quad L:\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{x}{3}=1,\quad 0\le x\le 1.$

   (b) $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$, $\quad L:\ x=2t^2,\ y=3t-5,\quad 0\le t\le 2.$

   (c) $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-y\mathbf{j}$, $\quad L:\ x=a\cos t,\ y=b\sin t,\quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}.$

6. Tính tích phân $\oint\limits_C xdx + ydy - zdz$ trên đường tròn C

   $$x = R\cos\alpha\cos t,\ y = R\cos\alpha\sin t\ \ z = R\sin\alpha, \qquad (\alpha \quad \text{là hằng số})$$

   và hãy tính tích phân cùng hàm đó $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy - zdz$ theo một đường cong trơn bất kì nối $A(1, 0, -3)$ với $B(6, 4, 8)$.

7. Hãy tính công sinh ra khi một chất điểm chuyển động dọc theo cung

   $$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

   dưới tác dụng của lực $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x - y, x + y, xyz)$.

8. Sử dụng công thức Green để tính

   $$\oint\limits_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$

   theo hướng dương dọc theo chu tuyến của tam giác nối các đỉnh $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ và $C(1, 3)$.
   Hãy kiểm tra lại kết quả bằng cách tính trực tiếp.

9. Hãy tính tích phân $\oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx$ theo hướng dương trên đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$.

10. Hãy xác định hàm $u = u(x, y)$ thỏa mãn

    (a) $du = 2xye^{x^2y}dx + x^2e^{x^2y}dy$.

    (b) $du = \big(y\cos x - \sin(x - y)\big)dx + \big(\sin x + \sin(x - y)\big)dy$.

    (c) $du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy$

    (d) $du = (2xy - z^2 - yz)dx + (x^2 + z^2 - xz)dy + (2yz - 2xz - xy)dz$

    (e) $du = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x - 1)^3}}dx + zdy + ydz$.

11. Tính tích phân $\int\limits_L (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$, L là một nhịp đường xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi, (a > 0)$.

12. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường cong

    (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

    (b) $(x+y)^3 = xy$.

    (c) $x^3 + y^3 - xy = 0$.
    (Hướng dẫn: đặt $y = tx$).

13. Tính tích phân $\displaystyle\oint_C ydx + zdy + xdz$ trên đường tròn C

    $$x = R\cos\alpha\cos t,\ y = R\cos\alpha\sin t,\ z = R\sin\alpha, \qquad (\alpha \quad \text{là hằng số}).$$

14. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} yzdx + zxdy + xydz$ theo một đường cong trơn bất kì nối $A(1,1,1)$ với $B(a,b,c)$.

15. Tính tích phân
    $$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
    theo một đường cong trơn bất kì nối $A(0,0,0)$ với $B(3,4,5)$.

16. Tính tích phân đường loại hai $\displaystyle\int_C z - ydx\, dy$ với C là giao của mặt phẳng $x + y = 1$ với mặt cong $z = x^2 + y^2$, định hướng từ $A(1,0,1)$ tới $B(0,1,1)$.

17. Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$ là cung thuộc giao của mặt phẳng $x + y = 2$ và mặt parabôlôit $z = 2x^2 + y^2$ nối 2 điểm $A(1,1,3)$ và $B(2,0,8)$. Tính tích phân đường loại hai trên cung $\overset{\frown}{AB}$
    $$I = \oint_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx + 2x\,dy + dz.$$

18. Gọi L là giao hai mặt trụ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

(tương ứng với $y > 0, z > 0$) nối điểm $(1, 0, 0)$ với điểm $(-1, 0, 0)$. Hãy tính các tích phân

- $I_1 = \int\limits_L y^2\,dx - xy\,dy + z^2\,dz.$
- $I_2 = \int\limits_L xz\,dx + xy\,dy + yz\,dz.$

19. Gọi C là giao nằm trong góc phần tám thứ nhất $x > 0, y > 0, z > 0$ của hai mặt trụ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Hãy tính các tích phân

- $I_1 = \int\limits_C y^2\,dx - xy\,dy + z^2\,dz.$
- $I_2 = \int\limits_C xz\,dx + xy\,dy + yz\,dz.$

20. Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S (x + y + z)dS$, với S là mặt của hình lập phương $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a.$

21. Tính tích phân mặt $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, với S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

22. Tính diện tích chỏm cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ với chiều cao chỏm cầu là h.

23. Tính tích phân mặt loại một $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS$, với S là mặt nón

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad (0 \le z \le b).$$

24. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S z\,dxdy$, với S là mặt ngoài của elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

25. Tính tích phân mặt loại hai

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx$$

trên mặt cong S (hướng lên phía trên)

$x = 4\cos u \cos v,\ y = 4\cos u \sin v,\ z = 4\sin u,\ $ với $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$.

26. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S xy\,dydz + (2x+y)\,dzdx + zdxdy$ trên mặt cong S

$$x = u + 2v,\ y = -v,\ z = u^2 + 3v, \quad \text{với } 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 1.$$

27. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S \dfrac{1}{xz}\,dydz + \dfrac{1}{yz}\,dzdx$ trên mặt cong S (hướng lên phía trên)

$$x = 5\cos^3 u \cos v,\ y = 5\cos^3 u \sin v,\ z = 5\sin^3 u,$$

với $\dfrac{\pi}{4} \le u \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le v \le 2\pi$. (*Đồ thị mặt S gần giống như một tháp hình nón*).

28. Tính

$$\iint\limits_S yz\,dydz + xz\,dzdx + xy\,dxdy$$

với S là mặt ngoài của tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và $x + y + z = a$.

29. Tính tích phân mặt

$$\iint_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

với S là mặt ngoài của hình lập phương $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

30. Áp dụng định lí Stokes tính tích phân $I = \oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, với C là elip

$$x^2 + y^2 = 1, x + z = 1.$$

31. Áp dụng định lí Stokes và kiểm tra kết quả thông qua tính trực tiếp tích phân $I = \oint\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, với C là đường gấp khúc nối các điểm

$$A(a,0,0),\ B(0,a,0),\ C(0,0,a),\ A(a,0,0).$$

32. Áp dụng định lí Stokes tính $I = \oint\limits_C e^x dx + (x^2+y)dy + z\,dz$, với C là biên của phần mặt phẳng $2x + y + 2z = 2$ thuộc góc phần tám thứ nhất và C có hướng ngược với chiều quay của kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

33. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, với C là đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Tích phân đường

1A. Tóm tắt lí thuyết

• Tích phân đường loại một hàm $f : L \to \mathbb{R}$ xác định trên cung đường cong $L \subset \mathbb{R}^3$. Đường cong L có $\mathbf{g}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in (a, b)$ là biểu diễn tham số, khi đó

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)|dt = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Chú ý rằng độ dài cung L bằng

$$\int_a^b |\mathbf{g}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt).$$

Trường hợp đặc biệt khi đường cong L là đường cong phẳng được cho bởi phương trình $y = g(x), x \in (a, b)$, khi đó

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx.$$

• Người ta dùng tích phân đường loại một để tính diện tích các mặt trụ có đáy dưới là đường cong phẳng L thuộc mặt phẳng xOy, đường sinh trùng với phương Oz và có $f(x, y)$ là độ cao của đường sinh ứng với điểm $(x, y) \in L$. Diện tích mặt trụ như vậy bằng

$$\int_L f(x, y)\,ds.$$

• Tích phân đường loại hai hàm véc tơ

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

xác định trên cung đường cong $L \subset \mathbb{R}^3$ với $\mathbf{g}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in (a,b)$ là biểu diễn tham số, kí hiệu dưới dạng véc tơ $I = \displaystyle\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ hoặc

$$I = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)\,dt.$$

Công thức chi tiết hơn để tính tích phân đường loại hai

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b \Big(P(\mathbf{g}(t)) \cdot x'(t) + Q(\mathbf{g}(t)) \cdot y'(t) + R(\mathbf{g}(t)) \cdot z'(t)\Big)dt.$$

• Định lí Green: Tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\big)$ trên biên của miền phẳng $D \subset \mathbb{R}^2$ (đường cong kín L) bằng tích phân kép trên miền D

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

• Hệ quả của định lí Green: miền phẳng D giới hạn bởi đường cong kín L, khi đó diện tích miền D

$$S(D) = \oint\limits_L x\,dy = \oint\limits_L -y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx.$$

• Tích phân không phụ thuộc đường đi: Điều kiện để tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x}))$ trên cung L trong miền hình sao D chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút của cung đó là ma trận đạo hàm

$$\mathbf{F}'(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(M)}{\partial x} & \frac{\partial P(M)}{\partial y} & \frac{\partial P(M)}{\partial z} \\ \frac{\partial Q(M)}{\partial x} & \frac{\partial Q(M)}{\partial y} & \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \\ \frac{\partial R(M)}{\partial x} & \frac{\partial R(M)}{\partial y} & \frac{\partial R(M)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

là ma trận đối xứng tại mọi điểm $M \in D$. Nói cách khác với mọi $M \in D$

$$\frac{\partial Q(M)}{\partial x} = \frac{\partial P(M)}{\partial y}, \ \frac{\partial P(M)}{\partial z} = \frac{\partial R(M)}{\partial x}, \ \frac{\partial R(M)}{\partial y} = \frac{\partial Q(M)}{\partial z}.$$

Khi đó tồn tại hàm $u(x,y,z)$ để $du = Pdx + Qdy + Rdz$, nó được tính bằng tích phân đường loại hai

$$u(x,y,z) = \int\limits_{AM} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

trong đó AM là một cung bất kì trong D nối điểm $A(x_0, y_0, z_0)$ cố định tùy ý với điểm $M(x,y,z)$ trong D. (Người ta gọi hàm $u(x,y,z)$ là nguyên hàm của hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, các nguyên hàm chỉ sai khác nhau một hằng số). Tích phân trên cũng bằng

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz.$$

Đặc biệt khi $D \subset \mathbb{R}^2$, nguyên hàm của $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx.$$

• Nếu $u(\mathbf{x})$ là nguyên hàm của hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, khi đó tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên một cung trơn bất kì L chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ của cung đó và

$$\int\limits_{L} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}) \quad \left(= u(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}^{\mathbf{x}=\mathbf{b}} \right).$$

1B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập tích phân đường

1. Tính tích phân đường loại một

   (a) $\int\limits_{L} (x^2+y^2)ds$, L là đoạn thẳng nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(2,4)$.

   Phương trình biểu diễn đoạn thẳng $AB:\ \ g(x) = 2x,\ 0 \le x \le 2$. Áp dụng công thức $\int_L f\,ds = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$ ta có

$$\int\limits_{L} (x^2+y^2)ds = \int_0^2 (x^2+4x^2)\sqrt{1+4}\,dx = \int_0^2 5x^2\sqrt{5}\,dx = \frac{40\sqrt{5}}{3}.$$

(b) $\int\limits_L x\,ds$, L là cung parabol $y = x^2$ nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(2,4)$.

Tương tự như bài tập trên

$$\int\limits_L x\,ds = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2) = \frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}}-1).$$

(c) $\int\limits_L xy\,ds$, L là chu tuyến hình vuông $|x|+|y| = a$ $(a > 0)$.

$|x|+|y| = a$ là hình vuông nối các đỉnh $A(a,0), B(0,a), C(-a,0), D(0,-a)$. Do đó

$$I = \int\limits_L xy\,ds = \int\limits_{AB} xy\,ds + \int\limits_{BC} xy\,ds + \int\limits_{CD} xy\,ds + \int\limits_{DA} xy\,ds.$$

Từ định nghĩa tích phân đường loại một suy ra 2 tích phân $\int\limits_{AB} xy\,ds$ và $\int\limits_{BC} xy\,ds$ là 2 số đối nhau (hàm dưới dấu tích phân xy là hàm lẻ theo biến x, 2 đoạn yhẳng AB và BC đối xứng qua trục Oy). Vì vậy

$$\int\limits_{AB} xy\,ds + \int\limits_{BC} xy\,ds = 0, \quad \text{tương tự} \quad \int\limits_{CD} xy\,ds + \int\limits_{DA} xy\,ds = 0.$$

2. Tính diện tích mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0$ và $z = 4 - x$.

   Diện tích mặt trụ được tính bằng tích phân đường loại một $\int\limits_C (4-x)\,ds$ trên đường tròn $C:\ x^2+y^2 = 4$ trong mặt phẳng xOy. Biểu diễn tham số của $C:\ x = 2\cos t, y = 2\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Suy ra

$$\int\limits_{x^2+y^2=4} (4-x)\,ds = \int\limits_0^{2\pi} (4-2\cos t)\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 16\pi.$$

Ta cũng có thể sử dụng tích phân kép để tính diện tích mặt trụ. Biểu diễn tham số mặt trụ $\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\sin u \\ z = v, \end{cases}$ *với* $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 4 - 2\cos u$*. Suy ra véc tơ pháp* $|\mathbf{n}| = |(x'_u, y'_u, z'_u) \wedge (x'_v, y'_v, z'_v)| = 2$ *và do vậy diện tích mặt trụ*

$$S = \iint_D |\mathbf{n}|\, dudv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{4-2\cos u} 2\, dv = 16\pi.$$

3. Tính diện tích mặt trụ $y = \dfrac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0, x = 0$, $z = x$ và $y = 6$.

Hướng dẫn: *Sử dụng tích phân đường loại một để tính diện tích mặt trụ*

$$\int\limits_{\substack{y=\frac{3x^2}{8} \\ 0\le x\le 4}} x\, ds = \int_0^4 x\sqrt{1 + \frac{3^2x^2}{4^2}}dx = \frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Bạn đọc cũng có thể tính diện tích mặt trụ thông qua một biểu diễn tham số của mặt trụ $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{3u^2}{8} \\ z = v \end{cases}$ $0 \le u \le 4, 0 \le v \le u$ *rồi đưa về tích phân kép như bài tập trên.*

4. Tính các tích phân đường loại một

   (a) $I = \displaystyle\int\limits_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, L là một nhịp đường đinh ốc với biểu diễn tham số $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}dt}{a^2 + b^2t^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2b\pi}{a}.$$

(b) Tính $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, L là đường tròn $x^2+y^2+z^2=R^2, x=y$.

L là đường tròn lớn: giao của mặt cầu và mặt phẳng đi qua tâm cầu. Phương trình tham số của đường tròn

$$\begin{cases} x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t \\ R\sin t, \end{cases} \qquad \text{với} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Suy ra $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\cdot R\,dt = 2\pi R^2.$

5. Tính tích phân đường loại hai các hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y)$ theo cung L

(a) $\mathbf{F} = (x^2+y^2)\mathbf{i} + (y^2-x^2)\mathbf{j}$, $\quad L: \dfrac{y}{2} - \dfrac{x}{3} = 1$, $\ 0 \le x \le 1$.

Hàm biểu diễn cung $L:\ y = 2 + \frac{2x}{3}$, $0 \le x \le 1$. Áp dụng công thức $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\big)dx$ ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_0^1 \big(x^2 + (2+\frac{2x}{3})^2 + \frac{2}{3}(2+\frac{2x}{3})^2 - \frac{2}{3}x^2\big)dx \\ &= \int_0^1 (\frac{29x^2}{27} + \frac{40x}{9} + \frac{20}{3})dx = \frac{29}{81} + \frac{20}{9} + \frac{20}{3} = \frac{749}{81}.\end{aligned}$$

(b) Tính tích phân đường loại hai trên cung L hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y)$
$\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$, $\quad L:\ x = 2t^2,\ y = 3t-5,\ \ 0 \le t \le 2.$

L có biểu diễn tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (a,b)$, áp dụng công thức $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot$

$y'(t)\big)dt$ ta được

$$\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_0^2 \Big((2t^2-3t+5)4t + 3(6t^3-10t^2)\Big)dt$$
$$= \int_0^2 (26t^3 - 42t^2 + 20t)dt = 32.$$

(c) Tính tích phân hàm $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ trên cung $L: \ x = a\cos t, y = b\sin t$, với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-a^3\cos^2 t\sin t - b^2\sin t\cos t\Big)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3\cos^2 t\, d\cos t - b^2\sin t\, d\sin t) = -\frac{a^3}{3} - \frac{b^2}{2}.$$

6. Tính tích phân $\oint\limits_C xdx + ydy - zdz$ trên đường tròn C

$$x = R\cos\alpha\cos t,\ y = R\cos\alpha\sin t\ \ z = R\sin\alpha, \qquad (\alpha \quad \text{là hằng số}).$$

Hàm dưới dấu tích phân $\mathbf{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (x,y,-z)$ khả vi liên tục và ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x,y,z)$ là ma trận đối xứng tại mọi điểm

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Suy ra tích phân hàm $\mathbf{F}(x,y,z)$ trên đường cong kín bất kì bằng 0

$$\oint\limits_C xdx + ydy - zdz = 0.$$

Tích phân $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy - zdz$ chỉ phụ thuộc 2 mút A và B (không phụ thuộc cung nối 2 điểm $A(1,0,-3)$ với $B(6,4,8)$). Cũng vì vậy hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,-z)$ có nguyên hàm

$$u(x,y,z) = \int_0^x xdx + \int_0^y ydy - \int_{z_0}^z zdz = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}.$$

Suy ra

$$I = \int_{\widehat{AB}} xdx + ydy - zdz = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_A^B = -2.$$

7. Hãy tính công sinh ra khi một chất điểm chuyển động dọc theo cung

$$L: \ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

dưới tác dụng của lực $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x-y, x+y, xyz)$.

Công sinh ra, kí hiệu A là tích phân đường loại hai hàm $\mathbf{F}$ trên cung L

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_0^{2\pi} \Big((\cos t - \sin t)(\cos t)' + (\cos t + \sin t)(\sin t)' + t\cos t \sin t)\Big)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t\sin t \cos t)\, dt = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

8. Sử dụng công thức Green để tính tích phân

$$I = \oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

theo hướng dương dọc theo chu tuyến của tam giác nối các đỉnh $A(1,1)$, $B(2,2)$ và $C(1,3)$.

Theo công thức Green, tính tích phân trên đường cong kín L bằng tích phân kép trên miền phẳng giới hạn bởi L

$$\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \iint_{\Delta ABC} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

Áp dụng công thức này trên $\Delta ABC = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2, x \le y \le 4-x\}$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta ABC} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \iint_{\Delta ABC} (2(x+y) - 4y)\, dxdy = \iint_{\Delta ABC} 2(x-y) dxdy \\ &= \int_1^2 dx \int_x^{4-x} 2(x-y)dy = \int_1^2 -4(x-2)^2 dx = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

9. Hãy tính tích phân $I = \oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx$ theo hướng dương trên đường tròn $x^2+y^2=R^2$.

Áp dụng công thức Green đưa tích phân đường về tích phân kép

$$\begin{aligned} I &= \oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx = \iint_D \left((xy^2)'_x - (-yx^2)'_y\right) dxdy \\ &= \iint_D \left(y^2+x^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3dr = \frac{\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

10. Hãy xác định hàm $u = u(x,y)$ thỏa mãn

(a) $du = 2xye^{x^2y}dx + x^2e^{x^2y}dy$.

Các hàm $P(x,y) = 2xye^{x^2y},\ Q(x,y) = x^2e^{x^2y}$ khả vi tại mọi điểm và

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xe^{x^2y}(1+x^2y).$$

Áp dụng công thức tính nguyên hàm $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$,

chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$

$$u(x,y) = \int\limits_0^y Q(x,y)dy = \int\limits_0^y x^2e^{x^2y}dy = e^{x^2y} - 1.$$

Vậy hàm $u(x,y) = e^{x^2y} + C$.

(b) Tìm hàm $u = u(x,y)$ thỏa mãn

$$du = \big(y\cos x - \sin(x-y)\big)dx + \big(\sin x + \sin(x-y)\big)dy.$$

Cũng như bài tập (a), các hàm $P(x,y) = y\cos x - \sin(x-y)$, $Q(x,y) = \sin x + \sin(x-y)$ khả vi tại mọi điểm và

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \cos x + \cos(x-y).$$

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$ và áp dụng công thức tính nguyên hàm

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \\ &= \int_0^x -\sin x\, dx + \int_0^y \big(\sin x + \sin(x-y)\big)dy \\ &= \cos x - 1 + y\sin x - \cos x + \cos(x-y) = y\sin x + \cos(x-y). \end{aligned}$$

Vậy $u(x,y) = y\sin x + \cos(x-y) + C$.

(c) Tìm hàm $u = u(x,y)$ thỏa mãn

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Ta thấy

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$ và áp dụng công thức tính nguyên hàm

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_1^x P(x,y_0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy \\ &= \int_1^x dx + \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= x - 1 + \sqrt{x^2+y^2} - x = \sqrt{x^2+y^2} - 1. \end{aligned}$$

Vậy $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$.

(d) Tìm hàm $u = u(x, y, z)$ thỏa mãn

$$du = (2xy - z^2 - yz)dx + (x^2 + z^2 - xz)dy + (2yz - 2xz - xy)dz.$$

Hàm $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = (2xy - z^2 - yz, x^2 + z^2 - xz, 2yz - 2xz - xy)$ khả vi liên tục và ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x, y, z)$ là ma trận đối xứng tại mọi điểm

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x - z & -y - 2z \\ 2x - z & 0 & 2z - x \\ -y - 2z & 2z - x & 2y - 2x. \end{pmatrix}$$

Vậy nguyên hàm của hàm véc tơ $\mathbf{F}(x, y, z)$ được tính theo công thức

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz.$$

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ và áp dụng công thức trên ta được

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int\limits_0^y x^2 dy + \int\limits_0^z (2yz - 2xz - xy)dz \\ &= x^2y - xyz - xz^2 + yz^2. \end{aligned}$$

Vậy $u(x, y, z) = x^2y - xyz - xz^2 + yz^2 + C.$

(e) Tìm hàm $u = u(x, y, z)$ thỏa mãn

$$du = \frac{-1}{2\sqrt{(x-1)^3}}dx + zdy + ydz.$$

Đáp số: $u = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^3}} + yz.$

11. Tính tích phân $I = \int\limits_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, L là một nhịp đường xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi,\ (a > 0).$

Gọi $A(2\pi a, 0)$ là điểm cuối của cung xiclôit. Do tích phân trên đoạn thẳng OA bằng 0 nên

$$I = -\oint_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy,$$

trong đó C là đường cong kín gồm cung xiclôit và đoạn thẳng OA, hướng theo chiều dương. Chuyển qua công thức Green:

$$I = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_D m\, dxdy = -mS(D),$$

trong đó $S(D)$ là diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp đường xiclôit và trục hoành

$$S(D) = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

Vậy $I = -3\pi m a^2$.

12. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong

(a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Áp dụng công thức $S(D) = \dfrac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx$ để tính diện tích miền D, với L trong bài tập này là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Biểu diễn tham số của elip

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ \text{với } 0 \le t \le 2\pi.$$

Diện tích elip bằng

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)dt = \pi ab.$$

(b) Tính diện tích miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi đường cong

$$(x+y)^3 = xy.$$

Trước hết ta khảo sát sơ bộ đường cong trên bằng cách biểu diễn đường cong dưới dạng tham số. Thay $y = tx$ vào phương trình đường cong đã cho $(x+tx)^3 = tx^2$ ta được biểu diễn tham số của đường cong

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{(1+t)^3} \\ y = \dfrac{t^2}{(1+t)^3}. \end{cases}$$

Cung đường cong nằm trong góc phần tư thứ nhất là đường cong kín giới hạn một miền phẳng hữu hạn D, ứng với tham số $0 \le t < +\infty$.

(Cung đường cong nằm trong góc phần tư thứ hai ứng với tham số $-1 < t \leq 0$ và cung đường cong nằm trong góc phần tư thứ tư ứng với tham số $-\infty < t < -1$).

Áp dụng công thức $\dfrac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx$ để tính diện tích miền D

$$\begin{aligned}
S(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{(1+t)^3}\cdot\frac{t(2-t)}{(1+t)^4} - \frac{t^2}{(1+t)^3}\cdot\frac{1-2t}{(1+t)^4}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{t^2(2-t)}{(1+t)^7} - \frac{t^2(1-2t)}{(1+t)^7}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2dt}{(1+t)^6} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2d(1+t)}{(1+t)^6} = \frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng đường cong kín giới hạn miền hữu hạn D có một biểu diễn tham số khác. Xét phép đổi biến $x = r\cos^2 t, y = r\sin^2 t$ - do D thuộc góc phần tư thứ nhất, khi đó $r = r(t) = \dfrac{\sin^2 2t}{4}$. Vậy biên của D có một biểu diễn tham số

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2t\cos^2 t \\ y = \dfrac{1}{4}\sin^2 2t\sin^2 t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

Áp dụng công thức

$$\begin{aligned} S(D) &= \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{32}(1+3\cos 2t)\sin^5 2t - \frac{1}{32}(3\cos 2t - 1)\sin^5 2t\right) \\ &= \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2t\,dt = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

(c) Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $x^3+y^3-xy=0$.

Thay $y = tx$ vào phương trình đường cong $x^3+y^3-xy=0$ ta được biểu diễn tham số của đường cong kín

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad \text{với} \quad 0 \le t < +\infty.$$

Đồ thị gần giống như bài toán trước, tuy nhiên đường cong này có tiệm cận khi $t \to -1$, phương trình tiệm cận $y = -x - \frac{1}{3}$.

Áp dụng công thức tính diện tích miền D

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt = \frac{1}{6}.$$

Với phép đổi biến $x = r\cos^{\frac{2}{3}} t,\ y = r\sin^{\frac{2}{3}} t$ ta có một biểu diễn tham số khác của đường cong

$$\begin{cases} x = \cos^{\frac{4}{3}} t \sin^{\frac{2}{3}} t \\ y = \cos^{\frac{2}{3}} t \sin^{\frac{4}{3}} t \end{cases} \qquad (0 \le t \le \frac{\pi}{2}).$$

Vậy diện tích miền D bằng

$$\begin{aligned}
S(D) &= \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{6}(1+3\cos 2t)\sin 2t + \frac{1}{6}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\sin 2t\,dt = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

13. Tính tích phân $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$ trên đường tròn C

$$x = R\cos\alpha\cos t,\ y = R\cos\alpha\sin t,\ z = R\sin\alpha, \qquad (\alpha \quad \text{là hằng số}).$$

Đường tròn C hiển nhiên là giao giữa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2$ và mặt phẳng $z = R\sin\alpha$. Tham số t trong biểu diến tham số của đường tròn $t \in [0, 2\pi]$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} (-R^2\cos^2\alpha\sin^2 t + R^2\cos\alpha\sin\alpha\cos t)dt = -\pi R^2\cos^2\alpha.$$

14. Tính tích phân $I = \int\limits_{\widehat{AB}} yzdx + zxdy + xydz$ theo một đường cong trơn bất kì nối $A(1,1,1)$ với $B(a,b,c)$.

Hàm $\mathbf{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (yz, xz, xy)$ khả vi liên tục và ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x,y,z)$ là ma trận đối xứng tại mọi điểm

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Do vậy tích phân đã cho không phụ thuộc đường đi, chỉ phụ thuộc 2 đầu mút A và B

$$I = u(B) - u(A),$$

trong đó $u(x, y, z)$ là nguyên hàm của hàm hàm véc tơ $\mathbf{F}$. Nó được tính bởi công thức

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz \\ &= \int_0^x 0\,dx + \int_0^y 0\,dy + \int_0^z xydz = xyz + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} yzdx + zxdy + xydz = u(x, y, z)\Big|_A^B = u(B) - u(A) = abc - 1.$$

15. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

theo một đường cong trơn bất kì nối $A(0, 0, 0)$ với $B(3, 4, 5)$.

Hướng dẫn: *Dễ dàng kiểm tra tích phân đã cho không phụ thuộc đường đi, chỉ phụ thuộc 2 đầu mút A và B (ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x, y, z)$ là ma trận đối xứng) và nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân bằng $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Suy ra $I = 5\sqrt{2}$.*

16. Tính tích phân đường loại hai $\int\limits_C z - ydx\,dy$ với C là giao của mặt phẳng $x + y = 1$ với mặt cong $z = x^2 + y^2$, định hướng từ $A(1, 0, 1)$ tới $B(0, 1, 1)$.

Hướng dẫn: *Biểu diễn tham số của $(C):\ x = 1 - t, y = t, z = 2t^2 - 2t + 1$ với $0 \leq t \leq 1$. Khi đó*

$$\int\limits_C -ydx + z\,dy = \int\limits_0^1 (t + 2t^2 - 2t + 1)dt$$

17. Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$ là cung thuộc giao của mặt phẳng $x + y = 2$ và mặt parabôlôit $z = 2x^2 + y^2$ nối 2 điểm $A(1, 1, 3)$ và $B(2, 0, 8)$. Tính tích phân đường loại hai trên cung $\overset{\frown}{AB}$

$$I = \oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx + 2x\,dy + dz.$$

Hướng dẫn: *Biểu diễn tham số của cung* $\overset{\frown}{AB}$: $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2(1 + t)^2 + (1 - t)^2$ *với* $0 \leq t \leq 1$.

18. Gọi L là giao hai mặt trụ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

(tương ứng với $y > 0, z > 0$) nối điểm $(1, 0, 0)$ với điểm $(-1, 0, 0)$. Hãy tính các tích phân

- $I_1 = \int\limits_L y^2\,dx - xy\,dy + z^2\,dz.$
- $I_2 = \int\limits_L xz\,dx + xy\,dy + yz\,dz.$

Đáp số: $I_1 = -2, \quad I_2 = \frac{2}{3}.$

19. Gọi C là giao nằm trong góc phần tám thứ nhất $x > 0, y > 0, z > 0$ của hai mặt trụ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Hãy tính các tích phân

- $I_1 = \int\limits_C y^2\,dx - xy\,dy + z^2\,dz.$
- $I_2 = \int\limits_C xz\,dx + xy\,dy + yz\,dz.$

Đáp số: $I_1 = -\frac{2}{3}, \quad I_2 = \frac{1}{3}.$

2. Tích phân mặt

2A. Tóm tắt lí thuyết

• Tích phân mặt loại một: Mặt cong S với $\mathbf{g}(u,v),(u,v)\in D$ là biểu diễn tham số, hàm f xác định liên tục trên $\overline{S}$. Khi đó tích phân mặt loại một

$$\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(\mathbf{g}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|dudv,$$

trong đó $\mathbf{n}(u,v)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt S

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u,v)\wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u,v).$$

Do vậy công thức trên cũng có thể viết dưới dạng

$$\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(\mathbf{g}(u,v))|\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u,v)\wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u,v)|dudv.$$

Trường hợp riêng khi S được cho bởi hàm hai biến $z = g(x,y),(x,y)\in D$

$$\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+{g'}_x^2+{g'}_y^2}\,dxdy.$$

• Khối lượng của mặt cong

$$m = \iint\limits_S \varrho(x,y,z)dS,$$

trong đó $\varrho(\mathbf{x}) = \varrho(x,y,z)$ là khối lượng riêng của mặt cong tại $(x,y,z)\in S$. Tọa độ trọng tâm của mặt cong S

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iint\limits_S x\varrho(x,y,z)dS \\ y_S = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iint\limits_S y\varrho(x,y,z)dS \\ z_S = \dfrac{1}{m}\displaystyle\iint\limits_S z\varrho(x,y,z)dS. \end{cases}$$

• Tích phân mặt loại hai hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})\big)$ trên mặt cong định hướng S, với $\mathbf{g}(u,v), (u,v) \in D$ là biểu diễn tham số

$$\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v)\, dudv.$$

Tích phân mặt loại hai thường được viết dưới dạng

$$\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Tích phân đó bằng tổng các tích phân

$$\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + \iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy.$$

Mỗi tích phân có thể tính độc lập. Chẳng hạn nếu phương trình của mặt cong S có thể biểu diễn dưới dạng tường $z = z(x,y)$, trong đó (x,y) thuộc miền D_1 nào đó của mặt phẳng xOy. Khi đó

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\, dxdy = \pm \iint\limits_{D_1} R(x,y,z(x,y))\, dxdy.$$

Dấu trước tích phân là dấu + hoặc dấu - tùy theo góc tạo bởi giữa trục cao Oz với véc tơ pháp tuyến là góc nhọn hay góc tù.

Tương tự ta có công thức dưới đây nếu phương trình biểu diễn mặt cong S có dạng tường $y = y(x,z)$, trong đó (x,z) thuộc miền D_2 nào đó của mặt phẳng xOz

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\, dxdz = \pm \iint\limits_{D_2} Q(x,y(x,z),z)\, dxdz.$$

Cũng như vậy

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\, dydz = \pm \iint\limits_{D_3} P(x(y,z),y,z)\, dydz.$$

• Định lí Stokes: Cho hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})\big)$ xác định trên mặt cong định hướng S. Kí hiệu L là biên của mặt S và

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Khi đó tích phân mặt loại hai hàm véc tơ $\mathbf{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x})$ trên S bằng tích phân đường loại hai trên đường cong kín L

$$\iint\limits_S \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, d\mathbf{S} = \oint\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

• Định lí Gauss-Ôxtrôgradxki: Hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})\big)$ xác định trên miền $V \subset \mathbb{R}^3$. Gọi S là mặt biên (mặt cong kín) của miền V và kí hiệu

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Khi đó tích phân mặt loại hai hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên mặt S (định hướng ra ngoài) bằng tích phân bội ba

$$\iiint\limits_V div\mathbf{F}\, dxdydz = \iint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S}.$$

Đặc biệt thể tích của miền V bằng tích phân mặt loại hai trên mặt biên của V

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy.}$$

2B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập tích phân mặt

20. Tính tích phân mặt loại một $I = \iint\limits_S (x+y+z)dS$, với S là mặt của hình lập phương $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

    Gọi S_1, S_2 là 2 mặt trên và dưới của hình lập phương. Chúng nằm trên các mặt phẳng $z = a$ và $z = 0$ tương ứng. Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại một $\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g'^2_x+g'^2_y}\,dxdy$ ta được tổng các tích phân mặt theo mặt trên $(z = a)$ và mặt dưới $(z = 0)$ hình lập phương

    $$\iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} = \iint\limits_D (x+y+a)\sqrt{1+0+0}dxdy + \iint\limits_D (x+y)\sqrt{1+0+0}dxdy$$
    $$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x+y+a)dy + \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x+y)dy = 3a^3.$$

    Tương tự với các cặp mặt đối nhau của hình lập phương. Suy ra

    $$I = \iint\limits_S (x+y+z)dS = 9a^3.$$

21. Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, với S là mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$.

    Biểu diễn tham số của mặt cầu S

    $$x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u, 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi.$$

    Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại một theo một biểu diễn tham số $\mathbf{g}(u,v)$ của mặt S

    $$\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(\mathbf{g}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|dudv,$$

trong đó $\mathbf{n}(u,v) = \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u,v)$ ta được

$$I = \int_S (x^2+y^2)dS = \iint_D (\sin^2 u \cos^2 v + \sin u^2 \sin^2 v)|\mathbf{n}(u,v)|dudv,$$

trong đó tọa độ của véc tơ pháp tuyến:

$$\mathbf{n}(u,v) = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \frac{1}{2}sin2u).$$

Suy ra $|\mathbf{n}(u,v)| = \sin u$ và do vậy tích phân

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (\sin^2 u \cos^2 v + \sin u^2 \sin^2 v) \sin u \, dudv \\ &= \iint_D \sin^3 u \, dudv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin^3 u \, du = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 u \, du = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

22. Tính diện tích chỏm cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2$ với chiều cao chỏm cầu là h.

Gọi S là chỏm cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq R-h$. Chỏm cầu S có chiều cao bằng h. Biểu diễn tham số của chỏm cầu

$$x = R\sin u \cos v,\ y = R\sin u \sin v,\ z = R\cos u,$$

với $(u,v) \in D$, trong đó

$$D = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq \arccos\frac{R-h}{R}, 0 \leq v \leq 2\pi.\}$$

Với biểu diễn tham số này của chỏm cầu, độ dài của véc tơ pháp tuyến $|\mathbf{n}(u,v)| = R^2 \sin u$. Ta đã biết diện tích chỏm cầu bằng tích phân mặt loại một $\iint_S dS$. Tích phân đó tính theo biểu diễn tham số trên bằng

$$\iint_S dS = \iint_D |\mathbf{n}(u,v)| \, dvdu = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\arccos\frac{R-h}{R}} R^2 \sin u \, du = 2\pi Rh.$$

23. Tính tích phân mặt loại một $I = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, với S là mặt nón

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad (0 \le z \le b).$$

Hướng dẫn: *Phương trình nặt nón* $z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ *với* (x, y) *thuộc hình tròn* $x^2 + y^2 \le a^2$. *Áp dụng công thức*

$$\iint_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g'^2_x + g'^2_y}\,dxdy$$

ta được

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy = \frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}.$$

24. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S z\,dxdy$, với S là mặt ngoài của elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Biểu diễn tham số của mặt elipxôit

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta, \end{cases}$$

trong đó (φ, θ) thuộc miền phẳng $D = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi\}$. Véc tơ pháp của mặt hướng ra ngoài

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (x'_\theta, y'_\theta, z'_\theta) \wedge (x'_\varphi, y'_\varphi, z'_\varphi) \\ &= (bc\cos\varphi\sin^2\theta, ac\sin\varphi\sin^2\theta, ab\cos\theta\sin\theta). \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại hai theo một biểu diễn tham số $\mathbf{g}(u,v)$ của mặt S

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v)dudv,$$

hàm véc tơ $\mathbf{F}$ trong bài tập này $\mathbf{F} = (0,0,z)$, ta được

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{S} &= \iint\limits_D c\cos\theta \cdot ab\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{4\pi abc}{3}.\end{aligned}$$

Nhận xét rằng ta có thể giải bài tập trên bằng cách áp dụng định lí Gauss-Ôxtrôgradxki

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Tích phân đã cho bằng thể tích của elipxôit

$$I = \iint\limits_S z\,dxdy = \iiint\limits_V dxdydz$$

Sử dụng phép đổi biến sau (gần giống như chuyển sang tọa độ cầu)

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta, \end{cases}$$

khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V^* = \{(\varphi, r, \theta)/0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Jacốpbiên của ánh xạ bằng $abcr^2\sin\theta$.

Suy ra

$$I = \iiint_V dxdydz = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi abc}{3}.$$

25. Tính tích phân mặt loại hai

$$\iint\limits_S x\, dydz + y\, dzdx$$

trên mặt cong S (hướng lên phía trên)

$x = 4\cos u \cos v,\ y = 4\cos u \sin v,\ z = 4\sin u,$ với $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}.$

Chú ý rằng đây cũng là biểu diễn tham số của phần tám mặt cầu, tham số u (khác với dạng thông dụng hơn) có thể coi là góc nghiêng giữa bán kính véc tơ với mặt phẳng xOy.

Theo cách biểu diễn tham số này, véc tơ pháp

$$\mathbf{n} = (16\cos^2 u \cos v, 16\cos^2 u \sin v, 16\sin u \cos u).$$

Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại hai

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{S} &= \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) dudv \\ &= \iint\limits_D 64\cos^3 u\, dudv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 64\cos^3 u\, du \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \\ &= 32\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 u\, du = \frac{64\pi}{3}. \end{aligned}$$

26. Tính tích phân mặt loại hai $\displaystyle\iint\limits_S xy\, dydz + (2x+y)\, dzdx + zdxdy$ trên mặt cong S

$$x = u + 2v,\ y = -v,\ z = u^2 + 3v, \quad \text{với } 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 1.$$

Mặt cong S là một phần mặt parabôlôit, tương ứng với các tham số $(u,v) \in [0,3] \times [0,1]$. Véc tơ pháp của S tại điểm ứng với tham số (u,v)

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (x'_u, y'_u, z'_u) \wedge (x'_v, y'_v, z'_v)\\ &= (1,0,2u) \wedge (2,-1,3)\\ &= (2u, 4u-3, -1).\end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại hai

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v)dudv\\ &= \int_0^1 dv \int_0^3 \big(-2uv(u+2v) + (2u+3v)(4u-3) - (u^2+3v)\big)du\\ &= \int_0^1 dv \int_0^3 \big(u^2(7-2v) - 2u(2v^2-6v+3) - 12v\big)du\\ &= \int_0^1 (36-18v^2)dv = 30.\end{aligned}$$

27. Tính tích phân mặt loại hai $\displaystyle\iint_S \frac{1}{xz}dydz + \frac{1}{yz}dzdx$ trên mặt cong S (hướng lên phía trên)

$$x = 5\cos^3 u \cos v,\ \ y = 5\cos^3 u \sin v,\ \ z = 5\sin^3 u,$$

với $\dfrac{\pi}{4} \le u \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le v \le 2\pi$. (*Đồ thị mặt S gần giống như một tháp hình nón*).

Véc tơ pháp của mặt S hướng lên phía trên

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (x'_v, y'_v, z'_v) \wedge (x'_u, y'_u, z'_u)\\ &= (75\cos^4 u \sin^2 u \cos v, 75\cos^4 u \sin^2 u \sin v, 75 \sin u \cos^5 u).\end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại hai

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v))\cdot\mathbf{n}(u,v)dudv$$
$$= \iint\limits_D \frac{6\cos u}{\sin u}dudv = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6\cos u}{\sin u}du\int_0^{2\pi} dv = 6\pi\ln 2.$$

28. Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint\limits_S yz\,dydz + xz\,dzdx + xy\,dxdy$$

với S là mặt ngoài của tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x+y+z=a$.

Áp dụng định lí Gauss-Ôxtrôgradxki, tích phân trên mặt cong kín S chuyển thành tích phân bội trên miền V giới hạn bởi mặt cong kín đó

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\,d\mathbf{S} = \iiint\limits_V div\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

$$I = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial yz}{\partial x}+\frac{\partial xz}{\partial y}+\frac{\partial xy}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint\limits_V (0+0+0)dxdydz = 0.$$

29. Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

với S là mặt ngoài của hình lập phương $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a$.

Áp dụng định lí Gauss-Ôxtrôgradxki

$$I = \iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$= \iiint\limits_V (2x+2y+2z)dxdydz = 3a^4.$$

30. Áp dụng định lí Stokes tính tích phân $I = \oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, với C là elip

$$x^2 + y^2 = 1, x + z = 1.$$

Áp dụng định lí Stokes

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= -2\iint\limits_S dydz + dxdz + dxdy.$$

Với S là elip trong mặt phẳng $x + z = 1$ có hướng lên trên theo véc tơ $(1, 0, 1)$. Elip có 2 bán trục bằng $a = \sqrt{2}$ và $b = 1$, suy ra diện tích ellip bằng $\sqrt{2}\pi$. Hàm dưới dấu tích phân là hàm véc tơ hằng. Vậy tích phân I được suy ra ngay từ định nghĩa tích phân mặt

$$I = -2\iint\limits_S dydz + dxdz + dxdy = -4\pi.$$

Phương trình chính tắc của elip $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$ có thể xác định như đã biến đổi trong đại số tuyến tính.

Chọn hệ cơ sở trực chuẩn $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ *với các véc tơ* $\mathbf{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0)$ *và* $\mathbf{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ *là véc tơ pháp của mặt phẳng* $x+z = 1$.

Phép đổi tọa độ với ma trận có các cột là các véc tơ nói trên

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \textit{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}} \\ y = \quad y' \\ z = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Elip $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$ *có phương trình trong hệ trục mới*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y'^2 = 1 \\ \quad z' = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Do đó elip có 2 bán trục bằng $a = \sqrt{2}$ và $b = 1$ như đã trình bày ở trên.

Nhận xét rằng ta có thể tính trực tiếp tích phân I, sử dụng biểu diễn tham số của elip $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$

$$x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, z = 1 - x = 1 - \cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= \int_0^{2\pi} \big[(\sin\varphi + \cos\varphi - 1)(-\sin\varphi) + (1 - 2\cos\varphi)\cos\varphi + \\ &+ (\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\varphi\big] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\varphi + \cos\varphi - 2)d\varphi = -4\pi. \end{aligned}$$

31. Áp dụng định lí Stokes và kiểm tra kết quả thông qua tính trực tiếp tích phân $I = \oint\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, với C là đường gấp khúc nối các điểm

$$A(a, 0, 0),\ B(0, a, 0),\ C(0, 0, a),\ A(a, 0, 0).$$

Áp dụng định lí Stokes

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\Delta ABC} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ &= -2 \iint\limits_{\Delta ABC} z\,dydz + x\,dxdz + y\,dxdy. \end{aligned}$$

Tam giác ΔABC là miền nằm trong mặt phẳng $x + y + z = a$. Với biểu diễn tham số $x = u, y = v, z = a - u - v$, dễ dàng tính được véc tơ pháp $\mathbf{n}(u, v) = (1, 1, 1)\ \forall (u, v) \in \Delta OAB$.

Vậy tích phân mặt loại hai trên ΔABC được tính bằng cách đưa về tích phân kép trên ΔOAB

$$\begin{aligned} I &= -2 \iint\limits_{\Delta ABC} z\,dydz + x\,dxdz + y\,dxdy \\ &= -2 \iint\limits_{\Delta OAB} \big[(a-u-v)\cdot 1 + u\cdot 1 + v\cdot 1\big] dudv \\ &= -2 \iint\limits_{\Delta OAB} a\,dudv = -a^3. \end{aligned}$$

Ta có thể tính trực tiếp tích phân I bằng cách đưa về tính tổng 3 tích phân đường trên các đoạn thẳng AB, BC và CA

$$I = \int\limits_{AB} y^2dx+z^2dy+x^2dz + \int\limits_{BC} y^2dx+z^2dy+x^2dz + \int\limits_{CA} y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

Đoạn thẳng AB trong tích phân thứ nhất, nằm trong mặt phẳng xOy có biểu diễn tham số $x = a - t, y = t, z = 0,\ t \in (0, a)$

$$I_1 = \int\limits_{AB} y^2dx + z^2dy + x^2dz = \int_0^a -t^2dt = -\frac{a^3}{3}.$$

Đoạn thẳng BC trong tích phân thứ hai, nằm trong mặt phẳng yOz có biểu diễn tham số $x = 0, y = a - t, z = t,\ t \in (0, a)$

$$I_2 = \int\limits_{BC} y^2dx + z^2dy + x^2dz = \int_0^a -t^2dt = -\frac{a^3}{3}.$$

Tương tự tích phân thứ ba trên đoạn thẳng CA (thuộc mặt phẳng xOz)

$$I_2 = \int\limits_{CA} y^2dx + z^2dy + x^2dz = \int_0^a -t^2dt = -\frac{a^3}{3}.$$

Suy ra tích phân

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -a^3.$$

32. Áp dụng định lí Stokes tính $I = \oint\limits_C e^x dx + (x^2+y)dy + z\,dz$, với C là biên của phần mặt phẳng $2x+y+2z=2$ thuộc góc phần tám thứ nhất và C có hướng ngược với chiều quay của kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

Hướng dẫn: *$I = \iint\limits_S 2x\,dxdy = \iint\limits_D 2x\,dxdy$ với D là hình chiếu vuông góc của S (phần mặt phẳng $2x+y+2z=2$ thuộc góc phần tám thứ nhất) lên mặt phẳng xOy. Suy ra D là tam giác có các đỉnh $O(0,0), A(1,0), B(0,2)$. Vậy*

$$I = \int\limits_0^1 2x\,dx \int\limits_0^{2-2x} dy = \int\limits_0^1 (4x-4x^2)\,dx = \frac{2}{3}.$$

33. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, với C là đường tròn

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Giao của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$ với mặt phẳng đi qua tâm cầu $x+y+z=0$ là đường tròn chính bán kính R. Kí hiệu S là mặt phẳng giới hạn bởi đường tròn đó. Áp dụng định lí Stokes ta có thể tính tích phân I

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= -\iint\limits_S dydz + dxdz + dxdy.$$

Mặt tròn S trong mặt phẳng $x+y+z=0$ định hướng lên trên theo véc tơ pháp của mặt phẳng $\mathbf{n} = (1,1,1)$. Diện tích hình tròn bằng πR^2. Hàm dưới dấu tích phân là hàm véc tơ hằng $\mathbf{F} = (1,1,1)$. Vậy tích phân I được suy ra ngay từ định nghĩa tích phân mặt

$$I = -\iint\limits_S dydz + dxdz + dxdy = \frac{\pi R^2 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{F} = -\sqrt{3}\pi R^2.$$

Ta cũng có thể tính trực tiếp bằng cách viết biểu diễn tham số của đường tròn C.

Chuyển sang hệ trục mới $Ox'y'z'$ sao cho đường tròn C nằm trong mặt phẳng $y'Oz'$, trục Ox' vuông góc với mặt phẳng đó. Phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

chuyển phương trình đường tròn C thành $\begin{cases} {y'}^2 + {z'}^2 = R^2 \\ x' = 0 \end{cases}$

Với biểu diễn tham số của C: $x' = 0, y' = R\cos t, z' = R\sin t$, *suy ra*

$$\begin{cases} x = R(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}) \\ y = R(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}) \\ z = -R\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t \end{cases}$$

cũng là một biểu diễn tham số của đường tròn C.

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz = -\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3}R^2}{2}\, dt = -\sqrt{3}\pi R^2.$$

Nhận xét rằng hình chiếu vuông góc của đường tròn C xuống mặt phẳng xOy là ellip $2x^2 + 2y^2 + 2xy = R^2$. Đưa dạng toàn phương $2x^2 + 2y^2 + 2xy$ về dạng chính tắc (như đã làm trong đại số tuyến tính), sau đó ta dễ dàng tìm được biểu diễn tham số của đường tròn C. Với phép biến đổi $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$ *ellip có phương trình ${x'}^2 + 3{y'}^2 = R^2$. Ellip có 2 bán trục R và $\frac{R}{\sqrt{3}}$, biểu diễn tham số của ellip:* $x' = R\cos t, y' = \frac{R}{\sqrt{3}}\sin t$

Vậy ellip $2x^2 + 2y^2 + 2xy = R^2$ *có biểu diễn tham số*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}R\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{3}}\sin t \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}R\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases} \quad \textit{hay} \quad \begin{cases} x = R(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}) \\ y = R(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}). \end{cases}$$

Vậy biểu diễn tham số của C: $\begin{cases} x = R(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}) \\ y = R(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}) \\ z = -R\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t. \end{cases}$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Giải các phương trình vi phân có biến phân ly

(a) $(x^2 + x)\,dx + (y+1)^2\,dy = 0$ (b) $xy' - y = y^3$

(c) $(1 + e^x)yy' = e^x,\ y\big|_{x=0} = 1$ (d) $y - xy' = a(1 + x^2y')$

(e) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$ (f) $y' = \cos(x-y)$

(g) $y'\sin x = y\ln y, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$ (h) $y' = (8x + y + 1)^2$

(i) $(2x + 3y)dx + (4x + 6y)dy = 0$ (k) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$

(l) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$

(m) $\mathrm{tg}^2 x\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,\mathrm{cotg}^2 y\,dy = 0.$

2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

(a) $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ (b) $(x-y)y\,dx - x^2dy = 0$

(c) $(x\,dy - y\,dx) = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ (d) $2(x + yy')^2 = y^2(1 + y'^2)$

(e) $(x-y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$ (f) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

(g) $x\ln\dfrac{x}{y} - y\,dx = 0$ (h) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

(i) $x\cos\dfrac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\dfrac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$

(k) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0,\quad y\big|_{x=2} = 1.$

3. Giải các phương trình tuyến tính cấp một và phương trình Bernoulli

   (a) $y' - y\sin x = \sin x \cos x$ (b) $2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$

   (c) $y' + ay = e^{mx}$ (d) $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$

   (e) $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$ (f) $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$

4. Giải các phương trình vi phân sau

   (a) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y\Big|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$

   (b) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y\Big|_{x=0} = \frac{9}{4}$

   (c) $y\,dx + (x + x^2y)dy = 0$

   (d) $2xy\dfrac{dx}{dy} = 2x^2 + 4y^2.$

5. Chứng minh rằng phương trình $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 3$ có một nghiệm là tam thức bậc hai. Giải phương trình này.

6. Chứng minh rằng hàm số $y = x\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình

$$xy' - y = x^2e^{x^2}.$$

   Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn: $y\Big|_{x=1} = 1.$

7. Chứng minh rằng phương trình $(x^3-1)y' = y^2 + x^2y - 2x$ có một nghiệm dạng $y_1 = x^\alpha$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách đặt $y = y_1 + z$.

8. Giải các phương trình vi phân toàn phần hoặc sử dụng thừa số tích phân để đưa phương trình về phương trình vi phân toàn phần và giải chúng.

   (a) $(x^2+y^2+2x)dx+2xy\,dy=0$

   (b) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$

   (c) $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0,\ y\big|_{x=0}=2$

   (d) $x\,dy+y\,dx+\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$

   (e) $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0.$

9. Giải các phương trình vi phân sau

   (a) $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy=0$

   (b) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy=0$

   (c) $(x+y^2)dx-2xy\,dy=0$

   (d) $\dfrac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$

   (e) $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0.$

10. Chứng minh rằng phương trình

$$(1-x^3)y'-y^2+x^2y+2x=0$$

    có một nghiệm dạng $y_1=ax^n,\ n\in\mathbb{N}$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách đặt $y=y_1+\dfrac{1}{z}$.

11. Giải các phương trình vi phân cấp hai

    (a) $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$

    (b) $y'' = e^x + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

    (c) $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

    (d) $y''(1+\ln x) + \dfrac{1}{x}y' = 2 + \ln x,\ y\big|_{x=1} = \dfrac{1}{2},\ y'\big|_{x=1} = 1$

    (e) $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

12. Giải các phương trình vi phân sau

    (a) $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y'^2 + y^2}$

    (b) $y'' + 2y'(1-2y) = 0,\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

    (c) $xy'' - y' = x^2 \ln x,\ y\big|_{x=1} = -\dfrac{4}{9},\ y'\big|_{x=1} = -1$

    (d) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

    (e) $y''^2 + y'^2 = a^2.$

13. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất biết một nghiệm riêng $y_1(x)$

    (a) $y''(\sin x - \cos x) - 2y'\sin x + y(\cos x + \sin x) = 0,\ y_1 = e^x$

    (b) $(1-x^2)y'' - xy' + \dfrac{y}{4} = 0,\ y_1 = \sqrt{1+x}$

    (c) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0,\quad y_1(x)$ là một đa thức.

(d) $(1+x)y'' + (1-x)y' - y = 0, \quad y_1 = (1+x)^{-1}$

(e) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x)$ là hàm có dạng $x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

14. Giải các phương trình vi phân sau biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình

(a) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0, \quad y_1(x)$ có dạng $e^{\alpha x}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $(2x - x^2)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0, \ y\big|_{x=1} = 0, \ y'\big|_{x=1} = -1$ biết $y_1(x) = e^x$.

(c) $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$, biết phương trình có 2 nghiệm riêng $y_1(x) = 1$ và $y_2(x) = x$.

(d) $x^2y'' + xy' - y = x^2$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm $y_1(x) = x$.

(e) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng dạng đa thức.

15. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

(a) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$

(b) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$

(c) $y'' + y = 6\sin 2x$

(d) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

(e) $y'' - 4y = e^x\big((-4x+4)\cos x - (2x-6)\sin x\big)$.

16. Giải các phương trình vi phân sau

(a) $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$.

(b) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4\sin x)$.

(c) $y'' + 4y = \cos^2 x$

(d) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

(e) $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$.

17. Giải phương trình vi phân sau bằng phép đổi biến $x = \sqrt{t}$

$$xy'' - y' - x^3y = x^5.$$

18. Giải phương trình vi phân $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln x$ bằng phép đổi biến $x = e^t$.

19. Giải phương trình vi phân $y'' - y' - 4e^{2x}y = e^{2x}\cos e^x$ bằng phép đổi biến $e^x = t$.

20. Giải các hệ phương trình vi phân sau

(a) $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y-x} \end{cases}$

(b) Đề sai $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z^2} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y+3z} \\ z' = \dfrac{z}{2y+3z} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz} \\ z' = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z + 3 \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z + 1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x} \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$

(k) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Phương trình vi phân cấp một

1A. Tóm tắt lí thuyết

• Bài toán Cauchy: Phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$ với điều kiện đầu $y\big|_{x=x_0} = y_0$, trong đó hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền $G \subset \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm thuộc G. Khi đó trong lân cận điểm $x = x_0$, phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$.
Ngoài ra nếu giả thiết tiếp $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trên miền G thì nghiệm đó là duy nhất.
• Phương trình có biến phân ly là phương trình có dạng $f(x)dx = g(y)dy$. Tích phân 2 vế

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

dẫn đến nghiệm tổng quát.
• Phương trình đẳng cấp cấp một là phương trình vi phân có thể đưa được về dạng

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Đặt $y = xz(x)$, với hàm $z(x)$ chưa biết, ta có $y' = z + x \cdot z'$. Thay vào phương trình trên ta có thể đưa về dạng phân ly biến số

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

• Phương trình vi phân toàn phần là phương trình vi phân có dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

trong đó $P(x, y), Q(x, y)$ là các hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, đồng thời

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

Khi đó $u(x,y) = C$ là nghiệm tổng quát của phương trình, trong đó $u(x,y)$ là nguyên hàm của hàm véc tơ $\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ trên D

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp một có dạng

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Công thức sau cho nghiệm tổng quát của phương trình

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

• Phương trình Becnuli là phương trình vi phân dạng

$$y' + p(x)y = y^\alpha f(x).$$

Phương trình Becnuli có thể đưa về phương trình tuyến tính bằng phép đổi biến $z = y^{1-\alpha}$, nếu $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x).$$

1B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập phương trình vi phân cấp một

1. Giải các phương trình vi phân có biến phân ly

(a) $(x^2 + x)\,dx + (y+1)^2\,dy = 0$ (b) $xy' - y = y^3$

(c) $(1+e^x)yy' = e^x,\ y\big|_{x=0} = 1$ (d) $y - xy' = a(1 + x^2y')$

(e) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$ (f) $y' = \cos(x-y)$

(g) $y'\sin x = y\ln y, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$ (h) $y' = (8x + y + 1)^2$

(i) $(2x+3y)dx + (4x+6y)dy = 0$ (k) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$

(l) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$

(m) $\mathrm{tg}^2 x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x\, \mathrm{cotg}^2 y\, dy = 0.$

Bài giải

(a) Viết $y' = \dfrac{dy}{dx}$ rồi phân li biến số bằng cách đưa phương trình về dạng $(x^2 + x)\, dx = -(y+1)^2\, dy$. Tích phân 2 vế

$$\int (x^2 + x)\, dx = -\int (y+1)^2\, dy,$$

ta được nghiệm tổng quát $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{(y+1)^3}{3} + C$ hay

$$2\big(x^3 + (y+1)^3\big) + 3x^2 = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

(b) Đưa phương trình về dạng $\dfrac{x\, dy}{dx} = y + y^3$ hay $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y + y^3}$. Tích phân 2 vế

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y + y^3} = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{y\, dy}{y^2 + 1}$$

hay

$$\ln x + \ln C = \ln y - \ln \sqrt{y^2 + 1}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho $y = Cx\sqrt{y^2 + 1}$.

(c) Giải phương trình $(1 + e^x)yy' = e^x$, với điều kiện đầu $y\big|_{x=0} = 1$. Phân li các biến số x và y rồi lấy tích phân 2 vế

$$y\, dy = \frac{e^x dx}{1 + e^x} \quad \Rightarrow \quad \int y\, dy = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

ta được $\frac{y^2}{2} + C = \ln(1 + e^x)$. Với điều kiện đầu $y\big|_{x=0} = 1$, $\frac{1}{2} + C = \ln 2$ suy ra $C = \ln 2 - \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm của phương trình vi phân

$$\frac{y^2 - 1}{2} + \ln 2 = \ln(1 + e^x).$$

(d) Giải phương trình $y - xy' = a(1 + x^2y')$.

• Với $a = 0$, ta đưa phương trình về dạng $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$

• Với $a \neq 0$, ta đưa phương trình về dạng $\dfrac{dy}{y-a} = \dfrac{dx}{ax^2+x}$. Tích phân 2 vế

$$\int \frac{dy}{y-a} = \int \frac{dx}{ax^2+x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1}\right) dx \quad \Rightarrow \ln(y-a) = \ln\frac{Cx}{1+ax}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $y - a = \dfrac{Cx}{1+ax}$ hay $y = \dfrac{Cx + a + a^2x}{1+ax}$.

(e) Giải phương trình $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$y' = \sin(x-y) - \sin(x+y) = -2\cos x \sin y.$$

Phân li các biến số x và y rồi lấy tích phân 2 vế

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sin y} = -\int 2\cos x\,dx$$

hay

$$\ln \operatorname{tg}\frac{y}{2} - \ln C = -2\sin x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ce^{-2\sin x}.$$

(f) Giải phương trình $y' = \cos(x-y)$.

Đặt $u = y - x$, trong đó $u = u(x)$ là hàm cần tìm thỏa mãn phương trình vi phân

$$u' = \cos u - 1 = -2\sin^2\frac{u}{2} \quad \text{hay} \quad \int \frac{du}{2\sin^2\frac{u}{2}} = -\int dx$$

Suy ra $\operatorname{cotg}\dfrac{u}{2} = x + C$ hay $\operatorname{cotg}\dfrac{y-x}{2} = x + C$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

(h) Giải phương trình $y' = (8x+y+1)^2$. ***Hướng dẫn***: *Đặt* $u = 8x+y+1$.

(l) Giải phương trình $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$.

Đặt $u=2x+3y$, trong đó $u=u(x)$ là hàm cần tìm, $u'=2+3y'$ hay $y'=\dfrac{u'-2}{3}$. Thay vào phương trình đã cho

$$3(u-1)+(2u-5)(u'-2)=0.$$

Viết $u'=\dfrac{du}{dx}$ và giải bằng phương pháp tách biến ta được

$$\frac{(5-2u)du}{7-u}=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{(5-2u)du}{7-u}=x+C.$$

Vậy nghiệm của phương trình vi phân $2u+9\ln(u-7)=x+C$. Thay $u=2x+3y$, ta được nghiệm tổng quát

$$3x+6y+9\ln(2x+3y-7)=C.$$

2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

(a) $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$ (b) $(x-y)y\,dx-x^2dy=0$

(c) $(x\,dy-y\,dx)=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ (d) $2(x+yy')^2=y^2(1+y'^2)$

(e) $(x-y)dx+(2y-x+1)dy=0$ (f) $xy'^2+2xy'-y=0$

(g) $x\ln\dfrac{x}{y}-y\,dx=0$ (h) $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

(i) $x\cos\dfrac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)=y\sin\dfrac{y}{x}(x\,dy-y\,dx)$

(k) $(x^2-3y^2)dx+2xy\,dy=0,\quad y\big|_{x=2}=1.$

Bài giải

(a) Giải phương trình $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$.

Coi y là biến độc lập, $x=x(y)$ là hàm theo biến y, phương trình có dạng đẳng cấp cấp một

$$x'=\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Đặt $x = y \cdot u(y)$, với $u(y)$ là hàm chưa biết cần tìm. Thay $x' = u + yu'$ ta được $u + yu' = u + 2\sqrt{u}$ hay

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2dy}{y} \;\Rightarrow\; \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{2dy}{y} \;\Rightarrow\; x = y\ln^2 Cy.$$

(b) Giải phương trình $(x - y)y\,dx - x^2dy = 0$.

Hiển nhiên $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ là nghiệm. Coi $x = x(y)$ là hàm theo biến y, phương trình có dạng đẳng cấp $(\frac{x}{y} - 1)x' = \frac{x^2}{y^2}$. Đặt $x = y \cdot u(y)$, $x' = u + yu'$, thay vào phương trình vi phân ta được

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{u-1}{u}du = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow u = \ln x + C.$$

Thay $u = \frac{x}{y}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình $x = y(\ln|x| + C)$.

(c) Giải phương trình $(x\,dy - y\,dx) = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

Phương trình vi phân có dạng đẳng cấp, đặt $u = \frac{y}{x}$ rồi phân li biến số

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow u + \sqrt{1+u^2} = Cx.$$

Vậy phương trình có nghiệm $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

(d) Giải phương trình $2(x + yy')^2 = y^2(1 + {y'}^2)$.

Đặt $u = \frac{y}{x}$, đưa phương trình về dạng

$$2(\frac{1}{u} + y')^2 = 1 + {y'}^2 \;\Leftrightarrow\; {y'}^2 + \frac{4y'}{u} + \frac{2-u^2}{u^2} = 0$$

hay $y' = \frac{-2}{u} \pm \frac{\sqrt{u^2+2}}{u}$. Thay $y' = u + u'x$ ta được

$$uu'x = -(u^2 + 2) \pm \sqrt{u^2 + 2}.$$

Đặt tiếp $v = u^2 + 2 \Rightarrow dv = 2uu'dx$ thay vào phương trình trên rồi tách biến

$$xdv = -2(v \pm \sqrt{v})dx \Leftrightarrow \frac{dv}{v \pm \sqrt{v}} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v \pm \sqrt{v}} = -2\int \frac{dx}{x},$$

ta được $2\ln(\sqrt{v} \pm 1) = -2\ln \frac{x}{C}$ hay $\sqrt{y^2 + 2x^2} \pm x = C$. Nghiệm của phương trình cũng có thể viết dưới dạng

$$y = \sqrt{(C \pm x)^2 - 2x^2}.$$

(e) Giải phương trình $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0.$

Ta sẽ sử dụng phép biến đổi sau để đưa phương trình đã cho về dạng đẳng cấp

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Khi đó

$$y' = Y' = \frac{(Y + b) - (X + a)}{2(Y + b) - (X + a) + 1} = \frac{Y - X + (b - a)}{2Y - X + (2b - a + 1)}$$

Phương trình trên có dạng đẳng cấp khi và chỉ khi các hệ số tự do của tử thức và mẫu thức bằng 0

$$\begin{cases} b - a = 0 \\ 2b - a + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy với phép đổi biến $x = X - 1, y = Y - 1$, phương trình vi phân đã cho có dạng đẳng cấp

$$Y' = \frac{Y - X + (b - a)}{2Y - X + (2b - a + 1)} = \frac{Y - X}{2Y - X}$$

Đặt $u = \dfrac{Y}{X}$ và giải bằng phương pháp tách biến ta được

$$\frac{(2u - 1)du}{2u^2 - 2u + 1} = -\frac{dX}{X} \Rightarrow 2u^2 - 2u + 1 = \frac{C}{X^2}.$$

Thay $u = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y+1}{x+1}$, nghiệm của phương trình vi phân đã cho

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y = C.$$

Chú ý rằng phương trình đã cho, $(x-y)dx + (2y-x+1)dy = 0$ có thể đưa về dạng phương trình vi phân toàn phần và ta có cách khác (sẽ đề cập sau) để giải nó.

(f) Giải phương trình $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

Đặt $u = \frac{y}{x}$ rồi thay $y' = u'x + u$, phương trình trên trở thành phương trình $u'^2x^2 + 2(u+1)u'x + u^2 + u = 0$. Suy ra $xu' = -(u+1) \pm \sqrt{u+1}$ hay

$$\frac{dt}{t \pm \sqrt{t}} = -\frac{dx}{x}.$$

Tích phân 2 vế ta được

$$2\ln(\sqrt{t} \pm 1) = -\frac{1}{2}\ln\frac{x}{C} \text{ hay } \sqrt{t} \pm 1 = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Vậy nghiệm của phương trình $y = (C \pm \sqrt{x})^2 - x$.

(g) Giải phương trình $x \ln\dfrac{x}{y} - y\,dx = 0$

Xem $x = x(y)$ là hàm theo biến y, phương trình vi phân đã cho có dạng đẳng cấp $x' = \dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y}$. Đặt $u = \frac{x}{y} \Rightarrow x' = u'y + u$ rồi giải phương trình bằng cách phân li biến số

$$u'y + u = u\ln u \;\Leftrightarrow\; y\frac{du}{dy} = u(\ln u - 1) \;\Leftrightarrow\; \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dy}{y}.$$

Tích phân hai vế

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln u - 1 = Cy \;\Rightarrow\; x = ye^{Cy+1}.$$

(h) Giải phương trình $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

Hướng dẫn: Đặt $u = \frac{y}{x}$, nghiệm của phương trình $y = xe^{Cx+1}$.

(i) Giải phương trình $x\cos\dfrac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\dfrac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$.

Hiển nhiên phương trình có dạng đẳng cấp. Đặt $u = \frac{y}{x}$, phương trình trở thành $uxu'\operatorname{tg} u = xu' + 2u$ hay

$$\frac{(u\operatorname{tg} u - 1)du}{u} = \frac{2dx}{x}.$$

Tích phân 2 vế

$$\int \frac{(u\operatorname{tg} u - 1)du}{u} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln(u\cos u) = -2\ln\frac{x}{C} \Rightarrow \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}.$$

(k) Giải phương trình $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0, \quad y\big|_{x=2} = 1.$

Hướng dẫn: Đưa phương trình về dạng

$$y' + \frac{x}{2y} - \frac{3y}{2x} = 0.$$

Đặt $u = \frac{y}{x}$, nghiệm tổng quát của phương trình

$$xu' = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow u^2 - 1 = Cx \quad \text{hay} \quad \frac{y^2}{x^2} = Cx + 1.$$

Sử dụng điều kiện đầu $y\big|_{x=2} = 1$, suy ra $\dfrac{y^2}{x^2} = -\dfrac{3}{8}x + 1$ hay $y^2 = x^2 - \frac{3}{8}x^3$.

3. Giải các phương trình tuyến tính cấp một và phương trình Bernoulli

   (a) $y' - y\sin x = \sin x\cos x$ (b) $2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$

   (c) $y' + ay = e^{mx}$ (d) $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$

   (e) $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$ (f) $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$

Bài giải

(a) Giải phương trình $y' - y\sin x = \sin x\cos x$.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức tính nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp một

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right),$$

với $p = -\sin x$, $q = \sin x\cos x$, ta được $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$.

(b) Giải phương trình $2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$.

Chia cả 2 vế cho $2x(x-1)$ để đưa phương trình về dạng tuyến tính cấp một rồi áp dụng công thức nghiệm với $p = \dfrac{2x-1}{2x(x-1)}$, $q = \dfrac{-1}{\sqrt{2x(x-1)}}$

$\displaystyle\int p\,dx = \int \frac{2x-1}{2x(x-1)}dx = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(x-1))$ và

$$\int qe^{\int p}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

Do $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln(x + \sqrt{x^2+m})$ nên

$$\int qe^{\int p}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = -\frac{1}{2}\ln(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x(x-1)})$$

Suy ra

$$y = \frac{C}{\sqrt{x(x-1)}} - \frac{\ln(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x(x-1)})}{2\sqrt{x(x-1)}} = \frac{C' - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x(x-1)}}$$

(c) Giải phương trình $y' + ay = e^{mx}$.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức tính nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp một ta được

$$y = \begin{cases} \frac{1}{m+a}e^{mx} + Ce^{-ax} & \text{nếu} \quad m+a \neq 0 \\ xe^{-ax} + Ce^{-ax} & \text{nếu} \quad m+a = 0. \end{cases}$$

(d) Giải phương trình $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$.

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một với $p = -\dfrac{x^2-1}{x(1+x^2)}$ và $q = \dfrac{-2}{1+x^2}$.

Ta có

$$-\int p = \int (\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x})dx = \ln\frac{x^2+1}{x}, \int qe^{\int p} = \int \frac{-2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Áp dụng công thức tính nghiệm $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$, suy ra $y = \frac{1}{x} + C\frac{x^2+1}{x}$.

(e) Giải phương trình $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$.

Hướng dẫn: Đặt $u = \sin y$ rồi đưa phương trình đã cho về dạng tuyến tính cấp một, ta được

$$u = \sin y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

(f) Giải phương trình $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$.

Coi $x = x(y)$ là hàm theo biến y, phương trình đã cho có dạng tuyến tính

$$x' + \frac{yx}{1+y^2} = \frac{\sin y}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Áp dụng công thức tính nghiệm với $p = \frac{y}{1+y^2}$ và $q = \frac{\sin y}{\sqrt{y^2+1}}$, ta được

$$x = \frac{C}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{\cos y}{\sqrt{y^2+1}}.$$

4. Giải các phương trình vi phân sau

(a) $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y\big|_{x=e} = \frac{e^2}{2}$

(b) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y\big|_{x=0} = \frac{9}{4}$

(c) $y\,dx + (x + x^2y)dy = 0$

(d) $2xy\frac{dx}{dy} = 2x^2 + 4y^2$.

Bài giải

(a) Giải phương trình $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y\Big|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$.

Hướng dẫn: Phương trình có dạng tuyến tính. Áp dụng công thức nghiệm phương trình tuyến tính ta được $y = \dfrac{1}{2}x^2\ln x + C\ln x$. Với điều kiện đầu $y\Big|_{x=e} = \frac{e^2}{2} \Rightarrow C = 0$. Vậy $y = \dfrac{1}{2}x^2\ln x$.

(b) Giải phương trình $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y\Big|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$.

Đây là phương trình Bernoulli, chia cả 2 vế cho $\sqrt{y}$ ta được

$$y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' + \sqrt{y} = e^{\frac{x}{2}}.$$

Đặt $u = \sqrt{y}$ để đưa về phương trình tuyến tính cấp một

$$u' + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

Áp dụng công thức nghiệm phương trình tuyến tính ta được $u = \sqrt{y} = Ce^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$. Với điều kiện đầu $y\Big|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$, thay $x = 0$ và $y = \frac{9}{4}$ vào nghiệm, ta được $C = 1$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho $y = 1 + e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^{x}$.

(c) Giải phương trình $y\,dx + (x + x^2y)dy = 0$.

Hướng dẫn: Coi $x = x(y)$ là hàm theo biến y, phương trình đã cho có dạng tuyến tính

$$x' + \frac{x}{y} = -x^2.$$

Giải phương trình, áp dụng công thức nghiệm phương trình tuyến tính ta được $x = \dfrac{1}{y(\ln|y| + C)}$.

(d) Giải phương trình $2xy\dfrac{dx}{dy} = 2x^2 + 4y^2$.

Đây là phương trình Bernoulli, nếu coi $x = x(y)$ là hàm, y là biến

$$x' - \frac{x}{y} = \frac{2y}{x}.$$

Nhân cả 2 vế với x và đặt $u = x^2$, $u' = 2x \cdot x'$, phương trình được đưa về dạng tuyến tính cấp một

$$u' - \frac{2u}{y} = 4y.$$

Giải phương trình này ta được nghiệm tổng quát $u = y^2(4\ln|y| + C)$ hay

$$x^2 = y^2(4\ln|y| + C).$$

5. Chứng minh rằng phương trình $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 3$ có một nghiệm là tam thức bậc hai. Giải phương trình này.

   Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình dưới dạng $y = ax^2 + bx + c$. Thay y và $y' = 2ax + b$ vào phương trình

$$x(x^2+1)(2ax+b) - (2x^2+3)(ax^2+bx+c) \equiv 3.$$

   Rút gọn đẳng thức, ta có

$$-bx^3 - (a+2c)x^2 - 2bx - 3c \equiv 3.$$

   Đồng nhất các hệ số của 2 vế ta được $a = 2, b = 0, c = -1$. Vậy $y^* = 2x^2 - 1$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho. Ta cũng biết rằng nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp một có dạng $y = \overline{y} + y^*$, trong đó y^* là một nghiệm riêng bất kì và $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng.

   Phương trình thuần nhất tương ứng $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 0$ có thể được giải bằng cách phân li biến số

$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x^2+3)}{x(x^2+1)}dx = \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx.$$

   Tích phân 2 vế ta được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y = C\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = \overline{y} + y^* = C\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} + 2x^2 - 1.$$

6. Chứng minh rằng hàm số $y = x\int\limits_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình

$$xy' - y = x^2e^{x^2}.$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn: $y\Big|_{x=1} = 1$.

Hướng dẫn: Phương trình $xy' - y = x^2e^{x^2}$ là phương trình tuyến tính cấp một. Dễ dàng tìm được $y = Cx$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $xy' - y = 0$. Kết hợp với phần đầu của bài tập, suy ra nghiệm của phương trình đã cho

$$y = x + x\int_1^x e^{t^2}dt.$$

7. Chứng minh rằng phương trình $(x^3-1)y' = y^2 + x^2y - 2x$ có một nghiệm dạng $y_1 = x^\alpha$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách đặt $y = y_1 + z$.

Thay $y_1 = x^\alpha$ và $y_1' = \alpha x^{\alpha-1}$ vào y và y' của phương trình đã cho

$$(x^3-1)\alpha x^{\alpha-1} = x^{2\alpha} + x^2x^\alpha - 2x$$

hay

$$\alpha x^{\alpha+2} - \alpha x^{\alpha-1} = x^{2\alpha} + x^{\alpha+2} - 2x.$$

Đẳng thức đúng với mọi x nếu $\alpha = 2$. Suy ra $y_1 = x^2$ là nghiệm của phương trình đã cho $(x^3-1)y' = y^2 + x^2y - 2x$.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình, đặt $y = y_1 + z = x^2 + z$ ta đưa phương trình đã cho về phương trình

$$(x^3-1)(2x+z') = (x^2+z)^2 + x^2(x^2+z) - 2x$$

hay

$$(x^3-1)z' = z^2 + 3x^2z \;\Leftrightarrow\; z' - \frac{3x^2z}{x^3-1} = \frac{1}{x^3-1}z^2.$$

Đây là phương trình Bernoulli, đặt $u = z^{-1}$, $u' = -z^{-2}z'$, phương trình được đưa về dạng tuyến tính cấp một

$$u' + \frac{3x^2u}{x^3-1} = \frac{-1}{x^3-1},$$

với $p = \dfrac{3x^2}{x^3-1}$ và $q = \dfrac{-1}{x^3-1}$.

Ta có

$$\int p = \int \frac{3x^2}{x^3-1}dx = \ln(x^3-1), \quad \int qe^{\int p} = -\int \frac{(x^3-1)\,dx}{x^3-1} = x.$$

Áp dụng công thức tính nghiệm $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$,

suy ra $u = \dfrac{x+C}{x^3-1}$. Vậy $y = y_1 + z = x^2 + z = x^2 + \dfrac{1}{u} = x^2 + \dfrac{x^3-1}{x+C}$.

8. Giải các phương trình vi phân toàn phần

   (a) $(x^2+y^2+2x)dx + 2xy\,dy = 0$

   (b) $(2x-y+1)dx + (2y-x-1)dy = 0$

   (c) $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0,\ y\big|_{x=0} = 2$

   (d) $x\,dy + y\,dx + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$

   (e) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

Bài giải

(a) Giải phương trình $(x^2+y^2+2x)dx + 2xy\,dy = 0$.

Phương trình đã cho có dạng $P\,dx + Q\,dy = 0$, trong đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Do đó phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Áp dụng công thức tính nghiệm của phương trình vi phân toàn phần

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C,$$

chọn $x_0 = y_0 = 0$, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$\int_0^x (x^2 + 2x)dx + \int_0^y 2xy\, dy = C \quad \text{hay} \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 = C.$$

(b) Bạn đọc tự giải phương trình vi phân $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy = 0$.
Nghiệm là họ đường cong $x^2 + x + y^2 - xy - y = C$.

(c) Giải phương trình $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0,\ y\big|_{x=0} = 2.$

Đây là phương trình vi phân toàn phần do

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (x + e^{\frac{x}{y}})}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \left(e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})\right)}{\partial x}.$$

Chọn $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ và tính nguyên hàm của (P, Q) bằng việc sử dụng công thức

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_1^y Q(x_0, y)dy + \int_0^x P(x,y)dx \\ &= \int_1^y dy + \int_0^x (x + e^{\frac{x}{y}})dx = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} - 1. \end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là họ đường cong $u(x, y) = C$ hay

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

Thay điều kiện đầu $y\big|_{x=0} = 2$ vào họ đường cong ta được $C = 2$. Vậy nghiệm của phương trình với điều kiện đầu đã cho

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2.$$

(d) Giải phương trình $x\,dy + y\,dx + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

Phương trình đã cho có dạng $P\,dx + Q\,dy = 0$, chi tiết hơn phương trình được đưa về

$$\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0.$$

Đây là phương trình vi phân toàn phần vì

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Với $x_0 = 1,\ y_0 = 0$, công thức sau cho nguyên hàm của (P, Q)

$$u = \int_1^x 0\,dx + \int_0^y \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0 + xy - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Vậy nghiệm của phương trình vi phân đã cho

$$xy - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$$

(e) Giải phương trình $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

Đưa phương trình về dạng

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0.$$

Ta thấy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Suy ra phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tương tự như các bài tập ở trên, ta dễ dàng tính được nghiệm tổng quát của phương trình

$$\sqrt{1+x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$$

9. Giải các phương trình vi phân toàn phần hoặc sử dụng thừa số tích phân để đưa phương trình về phương trình vi phân toàn phần và giải chúng.

   (a) $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right) dx = 0$

   (b) $(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1)dx + (\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2})dy = 0$

   (c) $(x + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

   (d) $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$

   (e) $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

Bài giải

(a) Giải phương trình $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right) dy = 0$

Hướng dẫn: *Đây là phương trình vi phân toàn phần. Nghiệm tổng quát*

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{xy}{y-x} = C$$

(b) Giải phương trình

$$(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1)dx + (\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2})dy = 0.$$

Đáp số: $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C.$

(c) Giải phương trình $(x + y^2)dx - 2xy\,dy = 0.$

Tìm thừa số tích phân dạng $\mu(x)$. Nói cách khác xác định $\mu(x)$, sao cho phương trình

$$\mu(x)(x + y^2)dx - 2xy\mu(x)\,dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó điều kiện

$$\frac{\partial\mu(x)(x + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial\big(-2xy\mu(x)\big)}{\partial x}$$

dẫn đến việc thừa số tích phân $\mu(x)$ là nghiệm của phương trình

$$xy\mu'(x) + 2\mu(x)y = 0.$$

Dễ dàng tìm được thừa số tích phân : $\mu = \frac{1}{x^2}$. Do vậy nghiệm của phương trình đã cho ban đầu là nghiệm của phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{(x+y^2)dx}{x^2} - \frac{2y\,dy}{x} = 0.$$

Phương trình có nghiệm $\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} = C$.

(d) Giải phương trình $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$

Hướng dẫn: *chọn* $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ *làm thừa số tích phân, phương trình có nghiệm tổng quát*

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} = C.$$

(e) Giải phương trình $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

Hướng dẫn: *Với thừa số tích phân* $\mu = e^x$, *phương trình có nghiệm*

$$e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) = C.$$

10. Chứng minh rằng phương trình $(1-x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0$ có một nghiệm dạng $y_1 = ax^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách đặt $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$.

    Thay $y_1 = ax^n$ vào phương trình đã cho rồi đồng nhất 2 vế của đẳng thức ta được một nghiệm $y_1 = -x^2$.

    Đặt $y = y_1 + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} - x^2$ để đưa phương trình về dạng tuyến tính cấp một

$$z' + \frac{3x^2z}{x^3-1} = \frac{1}{x^3-1}.$$

Khi đó $z = \frac{x+C}{x^3-1}$. Vậy phương trình có nghiệm tổng quát

$$y = \frac{x^3-1}{x+C} - x^2 = -\frac{Cx^2+1}{x+C}.$$

2. Phương trình vi phân cấp hai

2A. Tóm tắt lí thuyết

• Phương trình vi phân cấp hai không chứa y : $F(x, y', y'') = 0$ có thể đưa về phương trình vi phân cấp một bằng cách đặt $y' = z(x)$. Khi đó ta cần giải phương trình cấp một $F(x, z, z') = 0$.

• Phương trình vi phân cấp hai không chứa x : $F(y, y', y'') = 0$ có thể đưa về phương trình vi phân cấp một bằng cách đặt $y' = z\big(y(x)\big)$. Khi đó $y'' = z' \cdot z$ và phương trình được đưa về phương trình vi phân cấp một.

• Phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất hệ số hằng $y'' + py' + qy = 0$. Xét phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 + pk + q = 0.$$

a) Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2$, khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

b) Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực trùng nhau $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$, khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}.$$

c) Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, khi đó phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát

$$\bar{y} = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

• Phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng $y'' + py' + qy = f(x)$. (*Phương pháp hệ số bất định để tìm nghiệm riêng*)

a) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x. Khi đó, nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng sau

$\star$) $y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$, nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

$\star$) $y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x)$, nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng.

$\star$) $y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$, nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n, cùng bậc với đa thức $P_n(x)$ với các hệ số chưa biết cần tìm.

b) $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$. Khi đó, ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất y^* dưới dạng

$\star$) $y^* = e^{\alpha x}[M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x]$, nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

$\star$) $y^* = xe^{\alpha x}[M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x]$, nếu $\alpha \pm i\beta$ trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng.

trong đó $M_l(x)$, $N_l(x)$ là các đa thức bậc l với $l = \max(m, n)$, các hệ số chưa biết cần tìm.

• Phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ có nghiệm tổng quát $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$.
Nếu biết nghiệm $y_1(x)$của phương trình thuần nhất khi đó nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ có dạng

$$y_2(x) = y_1(x)\cdot u(x), \quad \text{trong đó} \quad u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p\,dx}\,dx.$$

• Phương trình tuyến tính cấp hai tổng quát

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.
Giả thiết $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình trên. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất có dạng

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là các hàm của x được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

2B. Bài giải và hướng dẫn giải các bài tập phương trình vi phân cấp hai

11. Giải các phương trình vi phân cấp hai

(a) $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$

(b) $y'' = e^x + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

(c) $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

(d) $y''(1+\ln x) + \dfrac{1}{x}y' = 2 + \ln x,\ y\big|_{x=1} = \dfrac{1}{2},\ y'\big|_{x=1} = 1$

(e) $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

Bài giải

(a) Giải phương trình $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}.$

Ta có $y' = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C_1.$

Vậy

$y = -\displaystyle\int \frac{dx}{2(x-1)^2} + \int \frac{dx}{2(x+1)^2} + C_1x = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + C_1x + C_2$

(b) Giải phương trình $y'' = e^x + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

Hướng dẫn: Như câu (a) ta được $y = e^x + \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1x + C_2.$

(c) Giải phương trình $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0.$

Phương trình vi phân không chứa y, đặt $p(x) = y' \Rightarrow p'(x) = y''$, thay vào phương trình vi phân

$$(1+x^2)p' + p^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \frac{dp}{p^2+1} = -\frac{dx}{x^2+1}.$$

Tích phân 2 vế ta được $\operatorname{arctg} p = -\operatorname{arctg} x + C$ hay

$$y' = \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x + C) = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} = \frac{1}{C_1}(\frac{C_1^2 + 1}{1 + C_1 x} - 1).$$

Suy ra $y = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int(\frac{C_1^2+1}{1+C_1x} - 1)dx = -\dfrac{x}{C_1} + \dfrac{(1+C_1^2)\ln(1+C_1x)}{C_1^2} + C_2.$

(d) Giải phương trình $y''(1+\ln x)+\dfrac{1}{x}y' = 2+\ln x,\ y\big|_{x=1}= \dfrac{1}{2},\ y'\big|_{x=1}= 1.$

Phương trình không chứa y, đặt $p(x) = y' \Rightarrow p'(x) = y''$ và thay vào phương trình vi phân

$$(1 + \ln x)p' + \frac{p}{x} = 2 + \ln x.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Giải phương trình ta được $y' = p = \dfrac{C}{1 + \ln x} + x$. Sử dụng điều kiện đầu $y'\big|_{x=1}= 1$ suy ra $C = 0$. Phương trình có dạng đơn giản $y' = x$ với điều kiện đầu $y\big|_{x=1}= \dfrac{1}{2}$. Vậy $y = \dfrac{x^2}{2}$ là nghiệm.

(e) Giải phương trình $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

Phương trình không chứa x, đặt $p(y(x)) = y' \Rightarrow p(x)\cdot p'(x) = y''$ và thay vào phương trình vi phân ta có $p \equiv 0$ $(y \equiv C)$ hay $2yp'+p = -p^3$. Đây là phương trình Bernoulli, hàm cần tìm $p = p(y)$ là hàm theo biến y.

Bằng cách đặt $z(y) = \dfrac{1}{p^2(y)}$ như đã biết trong phương pháp giải phương trình Bernoulli, ta tìm được

$$y' = p = \frac{1}{\sqrt{C_1 y - 1}} \quad \text{hay} \quad \sqrt{C_1 y - 1}dy = dx.$$

Tích phân 2 vế ta được nghiệm tổng quát

$$C_1(x + C_2) = \frac{2}{3}(C_1 y - 1)^{\frac{3}{2}}.$$

12. Giải các phương trình vi phân sau

    (a) $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y'^2 + y^2}$

    (b) $y'' + 2y'(1 - 2y) = 0,\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

    (c) $xy'' - y' = x^2 \ln x,\ y\big|_{x=1} = -\dfrac{4}{9},\ y'\big|_{x=1} = -1$

    (d) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

    (e) $y''^2 + y'^2 = a^2$.

Bài giải

(a) Giải phương trình $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y'^2 + y^2}$

Phương trình không chứa x, đặt $p(y(x)) = y' \Rightarrow p(x) \cdot p'(x) = y''$ và thay vào ta được

$$p' = \frac{p}{y} + \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}.$$

Đây là phương trình đẳng cấp cấp một, đặt $u = \dfrac{p}{y}$ và phân li biến số

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{dy}{y}.$$

Tích phân 2 vế ta có $\ln(u + \sqrt{u^2+1}) = \ln(C_1 y)$, hay $p + \sqrt{p^2 + y^2} = C_1 y^2$. Bình phương 2 vế ta tìm được

$$p = \frac{C_1^2 y^2 - 1}{2C_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2d(C_1 y)}{C_1^2 y^2 - 1} = dx.$$

Giải phương trình cuối cùng ta được nghiệm tổng quát

$$\ln \frac{C_1 y - 1}{C_1 y + 1} = x + C_2.$$

(b) Giải phương trình $y'' + 2y'(1-2y) = 0,\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn: Đặt $p(y(x)) = y'(x) \Rightarrow 2y' = (2y-1)^2$. Giải tiếp bằng cách phân li biến số ta được

$$\frac{2dy}{(2y-1)^2} = dx \ \Rightarrow \ y = \frac{x}{2(x+1)}.$$

(c) Giải phương trình $xy'' - y' = x^2 \ln x,\ y\big|_{x=1} = -\dfrac{4}{9},\ y'\big|_{x=1} = -1$.

Hướng dẫn: Phương trình không chứa y, đặt $p(x) = y' \ \Rightarrow \ p'(x) = y''$ và giải phương trình

$$xp' - p = x^2 \ln x.$$

Suy ra $p = y' = x^2 \ln x - x^2 + Cx$. Sử dụng điều kiện đầu ta được $C = 0$, từ đó tính được nghiệm

$$y = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{4x^3}{9}.$$

(d) Giải phương trình $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$.

Hướng dẫn: Phương trình không chứa y, đặt $p(x) = y' \ \Rightarrow \ p'(x) = y''$ và giải phương trình

$$yp' - p = -p^2 \Rightarrow \frac{1}{y'} = 1 + \frac{C_1}{y} \Rightarrow x = y + C_1 \ln|y| + C_2.$$

(e) Giải phương trình $y''^2 + y'^2 = a^2$.

Hướng dẫn: Phương trình không chứa y, đặt $p(x) = y' \ \Rightarrow \ p'(x) = y''$ và giải bằng phương pháp phân li biến số

$$\frac{dp}{\sqrt{a^2 - p^2}} = dx \Rightarrow \int \frac{dp}{\sqrt{a^2 - p^2}} = \int dx.$$

Suy ra

$$\arcsin \frac{y'}{a} = x + C_1 \Rightarrow y' = a \sin(x + C_1) \Rightarrow y = -a\cos(x + C_1) + C_2.$$

13. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất biết một nghiệm riêng $y_1(x)$

    (a) $y''(\sin x - \cos x) - 2y'\sin x + y(\cos x + \sin x) = 0,\ \ y_1 = e^x$

    (b) $(1 - x^2)y'' - xy' + \dfrac{y}{4} = 0,\ \ y_1 = \sqrt{1+x}$

    (c) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$, biết nghiệm $y_1(x)$ là một đa thức.

    (d) $(1+x)y'' + (1-x)y' - y = 0,\ \ y_1 = (1+x)^{-1}$

    (e) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0,\ \ y_1(x)$ là hàm có dạng $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Bài giải

(a) Giải phương trình $y''(\sin x - \cos x) - 2y'\sin x + y(\cos x + \sin x) = 0$, biết một nghiệm $y_1 = e^x$. Sử dụng công thức $u(x) = \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p\,dx}\,dx$ để tính nghiệm $y_2 = e^x \cdot u(x)$ độc lập tuyến tính với y_1

$$\int p\,dx = \int \frac{2\sin x\,dx}{\cos x - \sin x} = \int \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - 1\right) dx = -x - \ln(\cos x - \sin x),$$

suy ra

$$u(x) = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int p\,dx}\,dx = \int \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{e^{2x}} dx = \frac{\sin x}{e^x}.$$

Vậy nghiệm thứ hai độc lập với nghiệm đã cho $y_2 = e^x \cdot u(x) = \sin x$.
Nghiệm tổng quát $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$.

(b) Giải phương trình $(1 - x^2)y'' - xy' + \dfrac{y}{4} = 0$, biết phương trình có một nghiệm $y_1 = \sqrt{1+x}$. Áp dụng công thức $u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p\,dx}\,dx$ để tính nghiệm độc lập tuyến tính với y_1. Ta có

$$\int p\,dx = \int \frac{-x\,dx}{1 - x^2} = \frac{\ln(1 - x^2)}{2}$$

$$u(x) = \int \frac{1}{1+x} e^{-\int p\,dx}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-x)dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Trước hết ta tính $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ bằng phép đổi biến $x = \sin t$.

Tính tiếp $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ suy ra $u(x) = -\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho $y = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{|1-x|}$.

(c) Giải phương trình $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$, biết nghiệm $y_1(x)$ là một đa thức.

Hướng dẫn: Ta có thể tìm nghiệm $y_1(x) = x^2+1$ bằng phương pháp hệ số bất định. Áp dụng công thức $u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p\,dx}\,dx$ để tính nghiệm độc lập tuyến tính với y_1. Từ đó suy ra nghiệm tổng quát $y = C_1(x^2+1) + C_2 e^x$.

(d) Giải phương trình $(1+x)y'' + (1-x)y' - y = 0$ biết một nghiệm

$$y_1(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Hướng dẫn: Có thể tính được nghiệm độc lập tuyến tính với y_1, $y_2 = e^x(1+x)^{-1}$.Từ đó suy ra nghiệm tổng quát.

(e) Giải phương trình $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ biết nghiệm $y_1(x)$ là hàm có dạng x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Đáp số: Nghiệm $y_1 = x$ và nghiệm tổng quát $y = C_1 x + C_2 \ln x$.

14. Giải các phương trình vi phân sau biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình

    (a) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$, $y_1(x)$ có dạng $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

    (b) $(2x-x^2)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0$, $y\big|_{x=1} = 0$, $y'\big|_{x=1} = -1$ biết $y_1(x) = e^x$.

    (c) $(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$, biết phương trình có 2 nghiệm riêng $y_1(x) = 1$ và $y_2(x) = x$.

    (d) $x^2y'' + xy' - y = x^2$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm $y_1(x) = x$.

(e) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng dạng đa thức.

Bài giải

(a) ***Đáp số***: $y = C_1e^{-2x} + C_2(4x^2+1)$.
(b) ***Đáp số***: $y = e^{x-1} - x^2$

(c) Giải phương trình $(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$, biết phương trình có 2 nghiệm riêng $y_1(x) = 1$ và $y_2(x) = x$.

Ta biết rằng hiệu 2 nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho $v_1(x) = y_2(x) - y_1(x) = x - 1$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng

$$(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2. \quad (*)$$

Áp dụng công thức $u(x) = \int \frac{1}{v_1^2(x)} e^{-\int p\,dx}\,dx$ để tính nghiệm độc lập tuyến tính với v_1. Bạn đọc tự làm và tính được nghiệm độc lập tuyến tính với v_1 của phương trình $(*)$ là $v_2(x) = x^2$. Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1(x-1) + C_2x^2 + 1.$$

(d) Giải phương trình $x^2y'' + xy' - y = x^2$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm $y_1(x) = x$.

Hướng dẫn: Bạn đọc có thể tự giải và tính được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = C_1x + \frac{C_2}{x}.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho bằng phương pháp Lagrange. Nghiệm đó có dạng

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)x + \frac{C_2(x)}{x},$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} C_1'(x)x + \frac{C_2'(x)}{x} = 0 \\ C_1'(x) - \frac{C_2'(x)}{x^2} = 1. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $C_1' = \dfrac{1}{2},\ C_2' = -\dfrac{x^2}{2}$. Suy ra $C_1(x) = \dfrac{x}{2},\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{6}$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = \frac{x^2}{3} + C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

(e) Giải phương trình $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng dạng đa thức.

Hướng dẫn: Bằng phương pháp hệ số bất định ta có thể tìm được một nghiệm $y_1(x) = x + 1$ của phương trình thuần nhất.

Áp dụng công thức $u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p\,dx}\,dx$ để tính nghiệm độc lập tuyến tính với y_1 : $y_2 = \dfrac{C_2}{x}$. Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = C_1(x+2) + \frac{C_2}{x}.$$

Bằng phương pháp Lagrange như bài tập trên ta tính được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1(x+2) + \frac{C_2}{x} + (\frac{x}{2} + 1)\ln x - \frac{x}{4} + 1.$$

15. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

(a) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$

(b) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$

(c) $y'' + y = 6\sin 2x$

(d) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

(e) $y'' - 4y = e^x\big((-4x+4)\cos x - (2x-6)\sin x\big)$.

Bài giải

(a) Giải phương trình $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$.

Phương trình đặc trung $k^2 - 4k = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $k_1 = 0$ và $k_2 = 4$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Vế phải của phương trình không thuần nhất đã cho có dạng $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, trong đó $P(x) = -12x^2 + 6x - 4$ là một tam thức bậc hai và $\alpha = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trung. Áp dụng phương pháp hệ số bất định, ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho dưới dạng

$$y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Thay $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx,\ y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ và $y'' = 6Ax + 2B$ vào phương trình đã cho rồi đồng nhất 2 vế ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 6A - 8B = 6 \\ 2B - 4C = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 1, B = 0, C = 1.$$

Suy ra $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx = x^3 + x$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho. Vậy nghiệm tổng quát

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{4x} + x^3 + x.$$

(b) Giải phương trình $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$.

Sử dụng phương pháp hệ số bất định như bài trên để tìm nghiệm riêng của 2 phương trình

$$y'' - 2y' - 3y = -4e^x \quad (A)$$

$$y'' - 2y' - 3y = 3. \quad (B)$$

Phương trình (A) có nghiệm riêng $y_1 = e^x$. Phương trình (B) có nghiệm riêng $y_2 = -1$. Theo nguyên lí chồng chất nghiệm, nghiệm riêng của phương trình đã cho

$$y^* = y_1 + y_2 = e^x - 1.$$

Hiển nhiên $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng của cả (A) và (B). Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + e^x - 1.$$

(c) ***Đáp số***: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2\sin 2x$
(d) ***Đáp số***: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$
(e) ***Đáp số***: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + e^x\big((x - \frac{6}{5})\cos x - \frac{7}{5}\sin x\big)$.

16. Giải các phương trình vi phân sau

(a) $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$.

(b) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4\sin x)$.

(c) $y'' + 4y = \cos^2 x$.

(d) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

(e) $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$.

Bài giải

(a) Giải phương trình $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$.

Phương trình đặc trưng $k^2+6k+8 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $k_1 = -2$ và $k_2 = -4$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x}.$$

Áp dụng phương pháp hệ số bất định, bạn đọc dễ dàng tìm được nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y^* = \frac{3}{2}xe^{-2x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + \frac{3}{2}xe^{-2x}.$$

(b) Giải phương trình $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4\sin x)$.

Phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm

$$\bar{y} = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định, ta thấy nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $y = e^x(Ax\cos x + Bx\sin x)$. Thay y, y', y'' vào phương trình đã cho ta được

$$e^x(2B\cos x - 2A\sin x) = e^x(2\cos x - 4\sin x).$$

Suy ra $B = 1, A = 2$, hay $y^* = e^x(2x\cos x + x\sin x)$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = \bar{y} + y^* = e^x\big((C_1 + 2x)\cos x + (C_2 + x)\sin x\big).$$

(c) Giải phương trình vi phân $y'' + 4y = \cos^2 x$.

Hướng dẫn: Vế phải của phương trình: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$. Xét 2 phương trình vi phân

$$y'' + 4y = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$y'' + 4y = \frac{\cos 2x}{2} \qquad (2)$$

Bằng phương pháp hệ số bất định, dễ dàng tìm được các hàm $y_1 = \dfrac{1}{8}$ và $y_2 = \dfrac{x\sin 2x}{8}$ lần lượt là các là nghiệm riêng của phương trình (1) và (2) tương ứng. Suy ra

$$y^* = y_1 + y_2 = \frac{1}{8}(x\sin 2x + 1)$$

là nghiệm riêng của phương trình đã cho. Do đó phương trình có nghiệm tổng quát

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}(x\sin 2x + 1).$$

(d) Giải phương trình $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm tổng quát

$$\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Ta giải phương trình vi phân đã cho bằng phương pháp Lagrange: tìm nghiệm dưới dạng $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$, trong đó các hàm $C_1(x)$ và $C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình

$$C_1'(x) = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$C_1 = -\int \frac{\sin 2x\, dx}{2\cos 2x} = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|, \quad C_2 = \frac{x}{2}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

(e) Giải phương trình $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$.

Phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm tổng quát

$$\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Tìm nghiệm của phương trình đã cho dưới dạng $y = C_1(x)\cos x + C_(x)\sin 2x$, trong đó các hàm $C_1(x)$ và $C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = -\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình
$$C_1'(x) = \frac{1}{2\cos x\sqrt{\sin 2x}}, \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2\sin x\sqrt{\sin 2x}}.$$
Do đó
$$C_1 = \int \frac{dx}{2\cos x\sqrt{\sin 2x}} = \int \frac{\cos 2x\,dx}{2\cos x\sqrt{\sin 2x}} + \int \frac{2\sin^2 x\,dx}{2\cos x\sqrt{\sin 2x}}.$$
Tính tích phân thứ nhất bằng phương pháp tích phân từng phần
$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{2\cos x\sqrt{\sin 2x}} = \int \frac{d\sqrt{\sin 2x}}{2\cos x} = \frac{\sqrt{\sin 2x}}{2\cos x} - \int \frac{\sqrt{\sin 2x}\sin x}{2\cos^2 x}dx$$
$$= \frac{\sqrt{\sin 2x}}{2\cos x} - \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}.$$
Suy ra $C_1 = \dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{2\cos x}$. Tương tự $C_2 = \dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{2\sin x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho
$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sqrt{\sin 2x}.$$

17. Giải phương trình vi phân sau bằng phép đổi biến $x = \sqrt{t}$
$$xy'' - y' - x^3y = x^5.$$

Với phép đổi biến $x = \sqrt{t}$, đặt $u(t) = y(\sqrt{t})$, ta có
$$u'(t) = \frac{y'}{2\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad y' = 2\sqrt{t}u'$$
$$u''(t) = \frac{y''}{4t} - \frac{y'}{4t\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad y'' = 4tu'' + 2u'.$$
Thay vào phương trình đã cho ta được
$$4t\sqrt{t}u'' - t\sqrt{t}u = t^2\sqrt{t} \quad \text{hay} \quad u'' - \frac{u}{4} = \frac{t}{4}.$$
Phương trình tuyến tính hệ số hằng $u'' - \dfrac{u}{4} = \dfrac{t}{4}$ có nghiệm
$$u = C_1e^{\frac{t}{2}} + C_2e^{-\frac{t}{2}} - t.$$
Thay trở lại $t = x^2$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho
$$y = C_1e^{\frac{x^2}{2}} + C_2e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2.$$

18. Giải phương trình vi phân $x^2y'' + xy' - 4y = x^2 \ln x$ bằng phép đổi biến $x = e^t$.

    Đáp số: $y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x^2}{16}(2\ln^2 x - \ln x)$.

19. Giải phương trình vi phân $y'' - y' - 4e^{2x}y = e^{2x}\cos e^x$ bằng phép đổi biến $e^x = t$.

    Hướng dẫn: Với phép đổi biến $e^x = t$ hay $x = \ln t$, đặt $u(t) = y(\ln t)$, ta có

$$u'(t) = \frac{y'}{t} \quad \Rightarrow \quad y' = tu'$$

$$u''(t) = \frac{y'' - y'}{t^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = t^2u'' + tu'.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$t^2u'' - 4t^2u = t^2\cos t \quad \text{hay} \quad u'' - 4u = \cos t.$$

Giải phương trình tuyến tính hệ số hằng ta được nghiệm riêng $u = -\dfrac{1}{5}\cos t$. Thay trả lại $t = e^x$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1e^{2e^x} + C_2e^{-2e^x} - \frac{1}{5}\cos e^x.$$

20. Giải các hệ phương trình vi phân sau

(a) $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y + 3z} \\ z' = \dfrac{z}{2y + 3z} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz} \\ z' = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z + 3 \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z + 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x} \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$ (k) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases}$

Bài giải

(a) Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x}. \end{cases}$

Ta coi $y = y(x),\ z = z(x)$ l các hàm cần tìm theo biến độc lập x. Đạo hàm 2 vế phương trình thứ nhất

$$y'' = \frac{z'}{z^2},$$

rồi thay z, z' từ các phương trình hệ vào, ta được phương trình vi phân cấp hai

$$y'' = \frac{(1 - y')^2}{(y - x)}.$$

Đặt $u = y - x$, phương trình vi phân mới với $u = u(x)$ là hàm cần tìm

$$u'' = \frac{u'^2}{u} \quad \text{hay} \quad u''u - u'^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{u'}{u}\right)' = 0.$$

Từ đây suy ra $u = C_1 e^{C_2 x}$ và do vậy nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x + C_1 e^{C_2 x} \\ z = -\frac{1}{C_1 C_2 e^{C_2 x}}. \end{cases}$

(b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

Đạo hàm 2 vế phương trình thứ hai $z'' = \frac{y'}{2}$, rồi thay $y' = \frac{y^2}{z}$ và $z' = \frac{y}{2}$ vào phương trình ta được

$$z'' = \frac{y^2}{2z} = \frac{2z'^2}{z} \quad \text{hay} \quad \left(\frac{z'}{z}\right)' = \left(\frac{z'}{z}\right)^2.$$

Suy ra $\dfrac{z'}{z} = -\dfrac{1}{x+C}$ hay $z = \frac{1}{C_1x+C_2}$. Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân đã cho

$$\begin{cases} y = \frac{-2C_1}{(C_1x+C_2)^2} \\ z = \frac{1}{C_1x+C_2}. \end{cases}$$

Đáp số các bài tập còn lại:

(c) $y = C_1x + C_2,\ z = Cy$, với $2C_1 + 3CC_1 = 1$

(d) $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t \\ y = C_2\cos t - C_1\sin t \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y = C_2\sqrt[3]{3x^2 + C_1} \\ z = \frac{\sqrt[3]{3x^2+C_1}}{2C_2^2} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} \\ z = 2C_1e^{3x} + C_2e^{2x} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y = (C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x + 1 \\ z = C_1\cos x + C_2\sin x + 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} - 2e^{-x} \\ z = -C_1e^{x} - \frac{3}{2}C_2e^{2x} + e^{-x} \end{cases}$

(i) Các trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2$, có nhiều cách chọn ma trận các véc tơ riêng $\begin{cases} x = C_1e^{t} + (C_2 + C_3)e^{-2t} \\ y = C_1e^{t} - C_2e^{-2t} \\ z = C_1e^{t} - C_3e^{-2t} \end{cases}$

(k) Các trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

$$\begin{cases} x = -2C_1e^{t} - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t} \\ y = C_1e^{t} + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t} \\ z = 2C_1e^{t} + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}. \end{cases}$$

MỤC LỤC

Bài tập chương I 2
Hướng dẫn giải bài tập chương I 9
Bài tập chương III 46
Hướng dẫn giải bài tập chương III 52
Bài tập chương IV 87
Hướng dẫn giải bài tập chương IV 93
Bài tập chương V 125
Hướng dẫn giải bài tập chương V 131