Chứng minh số π là số vô tỉ

Khoảng giữa thế kỉ XVIII, Johann Lambert đã chứng minh π không là số hữu tỉ. Sau này có khá nhiều người chứng minh π là số vô tỉ. Trong bài này tôi xin giới thiệu một cách chứng minh gọn đẹp của nhà toán học Canada *Ivan Morton Niven* giới thiệu trong *Bulletin of the American Mathematical Society* năm 1961. Bạn đọc có thể xem theo đường link $https://en.wikipedia.org/wiki/Proof\_that\_\pi\_is\_irrational$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, a > b, b \neq 0$. Với mọi số nguyên dương n ta lập các đa thức

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

và kí hiệu

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Bằng việc khai triển Newton nhị thức $(a-bx)^n$ ta thấy đa thức $f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{c_k x^k}{n!}$ trong đó c_k là số nguyên, hơn nữa $c_k = 0$ với mọi $k < n$. Do đó $f^{(k)}(0) = 0$ nếu $k < n$, còn với $k \geq n$: $f^{(k)}(0) = k!\frac{c_k}{n!}$ cũng là số nguyên. Suy ra $F(0)$ là số nguyên.

Mặt khác dễ dàng nhận thấy $f(x) = f(\pi - x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$ hay $f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$ cũng là số nguyên. Do vậy $F(0)$ và $F(\pi)$ là các số nguyên.

Một khẳng định nữa được suy ra từ định nghĩa của các đa thức $f(x)$ và $F(x)$. Bậc của $f(x)$ bằng $2n$ nên $f^{(2n+1)}(x) = f^{(2n+2)}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $F'' + F = f$. Ta lại có

$$\begin{aligned}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' &= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\cos x + F(x)\sin x \\ &= (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x\end{aligned}$$

nên

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)\Big|_0^\pi = F(0) + F(\pi) \quad \text{và là một số nguyên.}$$

Nhận xét rằng $F(0) + F(\pi) > 0$ vì hàm dưới dấu tích phân liên tục và dương trong khoảng $(0, \pi)$. Nhưng với $0 < x < \pi$

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \ \Rightarrow \ F(0) + F(\pi) = \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \leq \pi\frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Điều này mâu thuẫn với các kết quả đã chỉ ra ở trên, $F(0) + F(\pi)$ luôn luôn là số nguyên dương.

Như vậy ta đã chứng minh π là số vô tỉ.

Chứng minh số e là số vô tỉ

Cách 1. Cách chứng minh rất gọn của Joseph Fourier cuối thế kỉ XVIII.
Giả sử e là số hữu tỉ $e = \frac{a}{b}$, a, b là các số tự nhiên. Xét

$$x = b!\big(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\big) = b!\big(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\big) = a(b-1)! - b!\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}.$$

Hiển nhiên x là số nguyên dương vì tất cả các số hạng trong biểu thức trên đều là số nguyên. Mặt khác do $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ nên

$$0 < x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \frac{1}{b} \le 1.$$

Điều này vô lí với kết quả ta vừa khẳng định x là số nguyên.

Cách 2 của Sos Vera - nhà toán học Hungary.

Trước hết ta chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại các số nguyên $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ để

$$\int_0^1 x^n e^x \, dx = a_n \cdot e + b_n.$$

Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp. Giả sử nó đã đúng với n, ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Thật vậy bằng phương pháp tích phân từng phần

$$\int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = e^x \cdot x^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (n+1)x^n \, dx = e - (n+1)\int_0^1 e^x \cdot x^n \, dx = e - (n+1)(a_n \cdot e + b_n), \text{đ.p.c.m.}$$

Bây giờ ta chứng minh e là số vô tỉ bằng phản chứng. Giả sử $e = \frac{p}{q}, a, b \in \mathbb{N}, p > q > 0$. Theo khẳng định trên

$$q_n = q \cdot \int_0^1 x^n e^x \, dx = q(a_n \cdot \frac{p}{q} + b_n) = p \cdot a_n + q \cdot b_n.$$

Vậy q_n là số nguyên dương với mọi n. Mặt khác do $0 < \int_0^1 x^n e^x \, dx < e \cdot \int_0^1 x^n \, dx = \frac{e}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $q_n \to 0$, vô lí với kết quả ta vừa thu được, q_n là số nguyên dương.

Ta đã hoàn thành việc chứng minh e là số vô tỉ.