Chứng minh số π là số vô tỉ

Khoảng giữa thế kỉ XVIII, Johann Lambert đã chứng minh π không là số hữu tỉ. Sau này có khá nhiều người chứng minh π là số vô tỉ. Trong bài này tôi xin giới thiệu một cách chứng minh gọn đẹp của nhà toán học Canada *Ivan Morton Niven* giới thiệu trong *Bulletin of the American Mathematical Society* năm 1961. Bạn đọc có thể xem theo đường link $https://en.wikipedia.org/wiki/Proof\_that\_\pi\_is\_irrational$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, a > b, b \neq 0$. Với mọi số nguyên dương n ta lập các đa thức

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

và kí hiệu

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Bằng việc khai triển Newton nhị thức $(a-bx)^n$ ta thấy đa thức $f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{c_k x^k}{n!}$ trong đó c_k là số nguyên, hơn nữa $c_k = 0$ với mọi $k < n$. Do đó $f^{(k)}(0) = 0$ nếu $k < n$, còn với $k \geq n$: $f^{(k)}(0) = k!\frac{c_k}{n!}$ cũng là số nguyên. Suy ra $F(0)$ là số nguyên.

Mặt khác dễ dàng nhận thấy $f(x) = f(\pi - x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$ hay $f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$ cũng là số nguyên. Do vậy $F(0)$ và $F(\pi)$ là các số nguyên.

Một khẳng định nữa được suy ra từ định nghĩa của các đa thức $f(x)$ và $F(x)$. Bậc của $f(x)$ bằng $2n$ nên $f^{(2n+1)}(x) = f^{(2n+2)}(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $F'' + F = f$. Ta lại có

$$\begin{aligned}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' &= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\cos x + F(x)\sin x \\ &= (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x\end{aligned}$$

nên

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)\Big|_0^\pi = F(0) + F(\pi) \quad \text{và là một số nguyên.}$$

Nhận xét rằng $F(0) + F(\pi) > 0$ vì hàm dưới dấu tích phân liên tục và dương trong khoảng $(0, \pi)$. Nhưng với $0 < x < \pi$

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \;\Rightarrow\; F(0) + F(\pi) = \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \leq \pi\frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Điều này mâu thuẫn với các kết quả đã chỉ ra ở trên, $F(0) + F(\pi)$ luôn luôn là số nguyên dương.

Như vậy ta đã chứng minh π là số vô tỉ.

Chứng minh số e là số vô tỉ

Cách 1. Cách chứng minh rất gọn của Joseph Fourier cuối thế kỉ XVIII.
Giả sử e là số hữu tỉ $e = \frac{a}{b}$, a, b là các số tự nhiên. Xét

$$x = b!\big(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\big) = b!\big(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\big) = a(b-1)! - b!\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}.$$

Hiển nhiên x là số nguyên dương vì tất cả các số hạng trong biểu thức trên đều là số nguyên. Mặt khác do $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ nên

$$0 < x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \frac{1}{b} \leq 1.$$

Điều này vô lí với kết quả ta vừa khẳng định x là số nguyên.

Cách 2 của Sos Vera - nhà toán học Hungary.

Trước hết ta chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại các số nguyên $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ để

$$\int_0^1 x^n e^x \, dx = a_n \cdot e + b_n.$$

Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp. Giả sử nó đã đúng với n, ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Thật vậy bằng phương pháp tích phân từng phần

$$\int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = e^x \cdot x^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (n+1)x^n \, dx = e - (n+1)\int_0^1 e^x \cdot x^n \, dx = e - (n+1)(a_n \cdot e + b_n), \text{đ.p.c.m.}$$

Bây giờ ta chứng minh e là số vô tỉ bằng phản chứng. Giả sử $e = \frac{p}{q}, a, b \in \mathbb{N}, p > q > 0$. Theo khẳng định trên

$$q_n = q \cdot \int_0^1 x^n e^x \, dx = q(a_n \cdot \frac{p}{q} + b_n) = p \cdot a_n + q \cdot b_n.$$

Vậy q_n là số nguyên dương với mọi n. Mặt khác do $0 < \int_0^1 x^n e^x \, dx < e \cdot \int_0^1 x^n \, dx = \frac{e}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $q_n \to 0$, vô lí với kết quả ta vừa thu được, q_n là số nguyên dương.

Ta đã hoàn thành việc chứng minh e là số vô tỉ.

Chứng minh số e là số siêu việt

Cách chứng minh của Charles Hermite năm 1873.

Bổ đề. Với f là đa thức bậc m và với mọi $t \in \mathbb{R}$, tích phân

$$I(t,f) = \int_0^t e^{t-u} f(u)\,du = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t). \quad (1)$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$I(t,f) = e^t f(0) - f(t) + I(t,f').$$

Tiếp tục tính tích phân từng phần $I(t,f')$

$$I(t,f) = e^t f(0) - f(t) + I(t,f') = e^t\big(f(0)+f'(0)\big) - \big(f(t)+f'(t)\big) + I(t,f'').$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh bổ đề trên.

Bây giờ ta sẽ chứng minh e là số siêu việt bằng phản chứng. Giả sử e là nghiệm của đa thức bậc n với các hệ số hữu tỉ. Không làm mất tính tổng quát ta giả thiết đa thức này hệ số nguyên. Nói cách khác

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0 \quad \text{với} \quad a_0 a_n \neq 0.$$

Xét biểu thức $J = a_n I(n,f) + a_{n-1} I(n-1,f) + \cdots + a_1 I(1,f) + a_0 I(0,f) = \sum_{k=0}^{n} a_k I(k,f)$, trong đó $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p$ là đa thức bậc $m = (n+1)p - 1$ và p là số nguyên tố đủ lớn.

Áp dụng (1) trong bổ đề ta được

$$J = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_k e^k f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k) = \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0)\sum_{k=0}^{n} a_k e^k - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k) = -\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k).$$

Các số $1, 2, 3, ..., n$ là các nghiệm bậc p của f và số 0 là nghiệm bậc $p-1$ của f, hay $f^{(j)}(k) = 0$ với mọi $j < p-1$, do vậy chỉ số j dưới dấu $\sum$ chỉ xuất phát từ $j = p-1$

$$J = -\sum_{j=p-1}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k) = -a_0 f^{(p-1)}(0) - \sum_{j=p}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k).$$

Hiển nhiên số hạng đầu trong biểu thức J ở trên ứng với $p = j-1$ bằng

$-a_0 f^{(p-1)}(0) = -a_0 (p-1)!(-1)^{np} n!^p$ chia hết cho $(p-1)!$ và không chia hết cho p, nếu$p > \max\{n, |a_0|\}$.

Các số hạng còn lại trong J đều chia hết cho $p!$ vì như trên đã nói $f^{(j)}(k)$ chia hết cho $p!$ với $j \geq p, 0 \leq k \leq n$. Do đó J là số nguyên khác 0 và chia hết cho $(p-1)!$, suy ra

$$(p-1)! \leq |J|.$$

Mặt khác từ định nghĩa của $I(k,f) = \int_0^k e^{k-u} f(u)\, du$, trong đó $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p$ và $|f(x)| \le n^{p-1}\big((n+1)(n+2)\cdot 2n\big)^p \le n^{-1}\big(2n!\big)^p$ với $0 \le x \le n$, suy ra

$$|J| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |I(k,f)| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot n \cdot e^n \cdot n^{-1}\big(2n!\big)^p \le A \cdot n \cdot e^n \cdot \big(2n!\big)^p \le B \cdot \big(2n!\big)^p,$$

trong đó $A = \max\{|a_0|, |a_1, \cdots, |a_n|\}$ và $B = A \cdot n \cdot e^n$. Sử dụng bất đẳng thức cơ bản $e^p \ge \dfrac{p^{p-1}}{(p-1)!}$ ta được

$$p^{p-1}e^{-p} \le (p-1)! \le B \cdot \big(2n!\big)^p \Rightarrow \; p^{p-1} \le B \cdot \big(2n! \cdot e\big)^p \qquad \text{vô lí khi số } p \text{ đủ lớn.}$$

Ta đã hoàn thành việc chứng minh e là số siêu việt.

Tổng quát hơn là định lí của Lindemann-Weierstrass, được chứng năm 1885. Khẳng định π, e là các số siêu việt ngay lập tức là hệ quả của định lí này. Định lí cần các kiến thức sâu hơn về đại số, nằm ngoài nội dung của bài viết này.