MỤC LỤC

NGUYỄN NGỌC CỪ - NGUYỄN VĂN NGHỊ
NGUYỄN THỊ THUẦN - TRẦN ĐÌNH TRỌNG

ĐẠI SỐ

Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật

Chương 1

Tập hợp, ánh xạ và số phức

1.1 Tập hợp, các phép toán giữa các tập hợp

1.1.1 Khái niệm về mệnh đề toán học

Mệnh đề là một câu khẳng định, nó diễn đạt một khái niệm, một sự kiện, khẳng định một thực tế, trình bày một phương pháp... Trong toán học, người ta sử dụng các *mệnh đề toán học* để phát biểu một định lí, để chứng minh một công thức, để đưa vào một khái niệm... Nó phản ánh tính đúng hoặc sai của một thực tế khách quan, nó chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Mệnh đề toán học không thể vừa đúng vừa sai cũng như vừa không đúng vừa không sai. Trong giáo trình này, để thuận tiện ta nói "mệnh đề" thay cho "mệnh đề toán học".

Nếu mệnh đề A đúng, ta nói A có giá trị chân lý bằng 1, nếu mệnh đề A sai ta nói A có giá trị chân lý bằng 0. Chẳng hạn

Mệnh đề "*Mặt trời mọc ở phía đông*" là một mệnh đề đúng nên giá trị chân lý của nó bằng 1.

Mệnh đề "*Một năm có 366 ngày*" là mệnh đề sai, nên giá trị chân lý của nó bằng 0.

Khi có một hoặc hai mệnh đề ta tìm cách kết hợp chúng với nhau để tạo ra các mệnh đề mới, các cách kết hợp này được gọi các phép toán lôgic.

1) *Phép phủ định:* Phủ định của mệnh đề A là một mệnh đề đúng khi A sai và sai khi A đúng. Ký hiệu mệnh đề phủ định của A là $\rceil A$ (hoặc kí hiệu $\overline{A}$), đọc là không A. Chẳng hạn, phủ định của mệnh đề "*Mọi tháng hai đều có 28 ngày*" là mệnh đề "*Không phải tháng hai nào cũng có 28 ngày*".

2) *Phép hội:* Hội của hai mệnh đề A, B là một mệnh đề ký hiệu là $A \wedge B$ hoặc $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ đọc là "*A và B*", đúng khi cả hai mệnh đề A và B cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại. Chẳng hạn, nếu A là mệnh đề " *Tam giác ABC có* $\widehat{A} = \widehat{B}$ ", còn B là mệnh đề " *Tam giác ABC có* $\widehat{B} = \widehat{C}$" thì $A \wedge B$ là mệnh đề "*Tam giác ABC là một tam giác đều*".

3) *Phép tuyển:* Tuyển của hai mệnh đề A, B là một mệnh đề, ký hiệu $A \vee B$, đọc là "*A hoặc B* ", sai khi cả hai mệnh đề A và B cùng sai và đúng trong các trường hợp còn lại. Chẳng hạn, nếu A là mệnh đề "$k > 4$" và B là mệnh đề "$k = 4$" thì mệnh đề $A \vee B$ là mệnh đề "$k \geq 4$".

4) *Phép kéo theo:* Mệnh đề "A kéo theo B" là một mệnh đề, ký hiệu là $A \Rightarrow B$, sai khi A đúng và B sai và đúng trong các trường hợp còn lại. Chẳng hạn, nếu A là mệnh đề " *tháng hai có 30 ngày* " và B là mệnh đề "*tháng ba có giông bão* " thì $A \Rightarrow B$ là mệnh đề " *nếu tháng hai có 30 ngày thì tháng ba có giông bão*", đây là mệnh đề đúng.

5) *Phép tương đương:* "A tương đương B" là một mệnh đề, ký hiệu $A \Leftrightarrow B$, đúng khi cả hai mệnh đề A, B cùng đúng hoặc cùng sai, và sai trong các trường hợp còn lại. Chẳng hạn, mệnh đề "*tam giác ABC có* $\widehat{A} = 90°$" tương đương với mệnh đề " *tam giác ABC có độ dài các cạnh thỏa mãn hệ thức* $a^2 = b^2 + c^2$".

Giá trị chân lý của các mệnh đề định nghĩa ở trên được cho trong bảng dưới đây

A	B	$\rceil A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Mệnh đề $A \Rightarrow B$ còn được phát biểu dưới một trong các dạng "A suy ra B", "nếu A thì B", "A là một điều kiện đủ của B ", "B là một điều kiện cần của A".

Mệnh đề "$B \Rightarrow A$" được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề "$A \Rightarrow B$".

Mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ còn được phát biểu dưới một trong các dạng sau: " *A đúng khi và chỉ khi B* đúng ", " *A là điều kiện cần và đủ của B* ".

Một vài tính chất của các phép toán lôgic

Các tính chất sau thường được sử dụng để tìm giá trị chân lí của các mệnh đề

1) Phủ định của phủ định
$$\rceil(\rceil A) \Leftrightarrow A$$

2) Luật De Morgan

$$\rceil(A \wedge B) \Leftrightarrow (\rceil A) \vee (\rceil B)$$
$$\rceil(A \vee B) \Leftrightarrow (\rceil A) \wedge (\rceil B)$$

3) Tính kết hợp của phép hội và phép tuyển

$$A \wedge (B \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

4) Tính phân phối

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

5) Biểu diễn phép tương đương theo phép kéo theo

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$$

6) Nguyên lý phản đảo
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$$

Mệnh đề "$\rceil B \Rightarrow \rceil A$" được gọi là mệnh đề phản đảo của "$A \Rightarrow B$", chẳng hạn, mệnh đề phản đảo của "*nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì hàm f liên tục tại x_0*" là mệnh đề "*nếu hàm f không liên tục tại x_0 thì hàm f không có đạo hàm tại x_0*".

Để chứng minh các tính chất trên ta thường lập bảng chân lý để so sánh, chẳng hạn để chứng minh nguyên lý phản đảo ta lập bảng

A	B	$A \Rightarrow B$	$\rceil A$	$\rceil B$	$\rceil B \Rightarrow \rceil A$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

Mệnh đề tồn tại và mệnh đề toàn thể

Nếu ứng với mỗi phần tử x của một tập hợp A nào đó ta có một mệnh đề $T(x)$, thì ta nói $T(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập A.

Phát biểu "$x^2 - 1 > 0$" là một hàm mệnh đề vì ứng với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$, câu này cho ta một mệnh đề, chẳng hạn, ứng với $x = 0$, ta có mệnh đề $-1 > 0$, ứng với $x = 2$ ta có mệnh đề $3 > 0$ (mệnh đề thứ nhất sai, mệnh đề thứ hai đúng).

Cho trước hàm mệnh đề $T(x)$, mệnh đề "*có ít nhất một $x \in A$ sao cho $T(x)$*" sẽ được ký hiệu là $\exists x \in A\ T(x)$ hoặc "$\exists x \in A, T(x)$" và được gọi là mệnh đề tồn tại. Ký hiệu $\exists$ được gọi là lượng từ tồn tại.

Chẳng hạn, "*có ít nhất một số thực x sao cho $x^2 - 1 = 0$* " là một mệnh đề tồn tại và được ký hiệu dưới dạng "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$".

Mệnh đề " *với mỗi $x \in A$ ta có $T(x)$*" sẽ được ký hiệu là "$\forall x \in A\ T(x)$" hoặc "$\forall x \in A, T(x)$", và được gọi là mệnh đề toàn thể hay mệnh đề tổng quát. Ký hiệu $\forall$ gọi là lượng từ toàn thể hay lượng từ tổng quát.

Chẳng hạn, "*với mỗi số tự nhiên n, số $2^{2^n} + 1$ là một số nguyên tố* " là một mệnh đề toàn thể và được ký hiệu dưới dạng

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1 \text{ là một số nguyên tố.}$$

Phủ định của một mệnh đề tồn tại và của một mệnh đề toàn thể được thực hiện theo các quy tắc sau

$$\rceil(\exists x \in A, T(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A, \rceil T(x))$$
$$\rceil(\forall x \in A, T(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A, \rceil T(x))$$

Chẳng hạn, ta có thể viết

$$\rceil(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0)$$

mệnh đề này có thể diễn đạt như sau "*không có số thực nào thỏa mãn hệ thức $x^2 + 1 = 0$*". Tương đương với nó là mệnh đề "*với mỗi số thực x, ta đều có $x^2 + 1 \neq 0$*".

Ví dụ 1.1.1

1. Ta xét mệnh đề phức hợp sau (mệnh đề được tạo thành từ nhiều mệnh đề khác bởi các phép toán logic)

$$\rceil\Big(\forall k \in \mathbb{Z}, \big((k \text{ chia hết cho } 3) \Rightarrow (k \text{ là một số lẻ})\big)\Big)$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, k \text{ chia hết cho 3 nhưng } k \text{ là một số chẵn})$$

Mệnh đề này có thể diễn đạt như sau: "*không phải mọi số chia hết cho* 3 *là một số lẻ*" tương đương với " *có ít nhất một số chia hết cho* 3 *là một số chẵn*".

2. Một ví dụ khác ta sẽ gặp trong giải tích. Hàm f liên tục tại $x = x_0$, nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ ($x \in V_\delta$) thì $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Kí hiệu A là mệnh đề đó. Ta có thể viết A dưới dạng

$$\forall \epsilon > 0 \left(\exists \delta > 0 \left(\forall x \in V_\delta,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \right) \right).$$

Gọi A_1 là mệnh đề trong ngoặc lớn, phủ định của A có dạng $\exists \epsilon > 0\ \overline{A_1}$ hay

$$\exists \epsilon > 0\ \overline{\left(\exists \delta > 0 \left(\forall x \in V_\delta,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \right) \right)}$$

Bây giờ ta xét phủ định của A_1

$$\overline{A_1} : \quad \forall \delta > 0\ \overline{\left(\forall x \in V_\delta,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \right)}$$

Kí hiệu tiếp A_2 là mệnh đề trong ngoặc: với $\forall x \in V_\delta$ (hay $|x - x_0| < \delta$) thì $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Phủ định của A_2

$$\overline{A_2} : \quad \exists x_1 \in V_\delta,\ \overline{(|f(x_1) - f(x_0)| \leq \epsilon)}.$$

Phủ định của mệnh đề cuối cùng là $|f(x_1) - f(x_0)| > \epsilon$. Diễn đạt lại các bước liệt kê ở trên, phủ định của mệnh đề A ban đầu là

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_1, |x_1 - x_0| < \delta, |f(x_1) - f(x_0)| > \epsilon.$$

Như vậy hàm f không liên tục tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$ tồn tại x_1 thỏa mãn $|x_1 - x_0| < \delta$ sao cho

$$|f(x_1) - f(x_0)| > \epsilon.$$

1.1.2 Tập hợp

Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm gốc không được định nghĩa, ta hiểu tập hợp là một nhóm các đối tượng, các đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp.

Chẳng hạn, ta có thể nói về tập hợp các nghiệm của một phương trình hay tập hợp các hạt cát của sa mạc.

Trong giáo trình này, ta dùng ký hiệu $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ để chỉ các tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số thực.

Cho một đối tượng x và một tập E, nếu x là một phần tử của E thì ta viết $x \in E$ đọc là x thuộc E, còn nếu x không là một phần tử của E thì ta viết $x \notin E$ hay là $x \bar{\in} E$ đọc là x không thuộc E. Chẳng hạn, ta có thể viết $-1 \notin \mathbb{N}, -1 \in \mathbb{Z}$.

Một tập hợp coi như đã biết nếu với mỗi đối tượng x ta có thể biết được x là một phần tử hay không là một phần tử của tập hợp. Vì vậy có nhiều cách cho một tập hợp, chẳng hạn liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp hoặc nêu tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp. Chẳng hạn, nếu gọi A là tập các nghiệm của phương trình

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

thì ta có thể viết

$$A = \{-2, -1, 1, 2\} \text{ hoặc } A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\}.$$

Tập hợp không chứa một phần tử nào được gọi là tập rỗng và được ký hiệu là $\emptyset$, chẳng hạn

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

Xét hai tập hợp E và F.

Nếu mỗi phần tử của E cũng là một phần tử của F thì ta nói E là một tập con hay một bộ phận của F và dùng ký hiệu

$$E \subset F \text{ (đọc là } E \text{ chứa trong } F\text{) hoặc } F \supset E \text{ (đọc là } F \text{ chứa } E\text{).}$$

Chẳng hạn, ta có $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Từ định nghĩa của phép kéo theo ta suy ra với mọi tập hợp F thì $\emptyset \subset F$. Quan hệ tập này chứa trong tập kia được gọi là quan hệ bao hàm.

Nếu mỗi phần tử của E cũng là một phần tử của F và ngược lại mỗi phần tử của F cũng là một phần tử của E thì ta nói E và F là bằng nhau và viết $E = F$, như vậy

$$E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E. \end{cases}$$

Nếu $E \subset F$ và $E \neq F$ thì ta nói E là một tập con thực sự của F. Chẳng hạn, ta có $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ và do $-1 \in \mathbb{Z}$ nhưng $-1 \notin \mathbb{N}$ nên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là một tập con thực sự của các số nguyên $\mathbb{Z}$.

Trong trường hợp các phần tử của tập hợp A là các tập hợp thì thường nói A là một "họ" các tập hợp.

Chẳng hạn ta có thể nói về họ các tập con của một tập hợp hay họ các khoảng mở của trục số thực.

Trong trường hợp các phần tử của tập hợp là các ánh xạ (sẽ trình bày ở tiết sau) hay các hàm số thì thay cho thuật ngữ "tập hợp" người ta thường dùng thuật ngữ "lớp", chẳng hạn ta có thể nói về lớp các hàm số liên tục trên một đoạn.

Các phép toán về tập hợp

Xét ba tập con A, B, C của một tập hợp E.

1) *Hợp của hai tập hợp:* Hợp của hai tập hợp A, B là một tập con của E bao gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B và được ký hiệu là $A \cup B$ (đọc là A hợp B). Như vậy

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

2) *Giao của hai tập hợp:* Giao của hai tập hợp A, B là một tập con của E bao gồm các phần tử chung của A và B được ký hiệu là $A \cap B$ (đọc là A giao B). Như vậy,

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

   Trong trường hợp $A \cap B = \emptyset$ ta nói A và B là hai tập con rời nhau.

3) *Hiệu của hai tập hợp:* Ta gọi A trừ B là một tập con của E bao gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B và được ký hiệu là $A \setminus B$. Như vậy

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

   Trong trường hợp B là một tập con của A thì tập $A \setminus B$ được gọi là *phần bù* của B trong A và được ký hiệu là $C_A(B)$. Trong nhiều trường hợp ta viết $\overline{B}$ thay cho kí hiệu $C_A(B)$ nếu trước đó ta quy ước chỉ xét tới các phần tử trong tập A.

Ba phép toán trên về tập hợp thỏa mãn các tính chất sau

a) Tính lũy đẳng của phép hợp và phép giao

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$$

b) Tính kết hợp của phép hợp và phép giao

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

c) Tính giao hoán của phép hợp và phép giao

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$$

d) Tính phân phối của phép hợp đối với phép giao

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e) Tính phân phối của phép giao đối với phép hợp

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

f) Luật De Morgan

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Người ta thường viết luật De Morgan dưới dạng

$$\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}, \quad \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$$

trong đó B, C là các tập con của A và các tập phần bù được xét trong A.

Để chứng minh các tính chất này ta có thể áp dụng định nghĩa hai tập hợp bằng nhau. Chẳng hạn, ta chứng minh tính chất phân phối của phép hợp đối với phép giao

+) $\forall x \in E, x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$. Nếu $x \in A$ thì $x \in (A \cup B)$ và $x \in (A \cup C)$ do đó $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nếu $x \in B \cap C$ thì $x \in B$ và $x \in C$ nên $x \in (A \cup B)$ và $x \in (A \cup C)$ do đó $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

+) $\forall y \in E : y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ thì

$$\begin{cases} y \in A \cup B \\ y \in A \cup C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y \in A) \vee (y \in B) \\ (y \in A) \vee (y \in C) \end{cases}$$

Bốn trường hợp xảy ra có thể gộp lại thành hai trường hợp

Trường hợp $y \in A$, khi đó $y \in A \cup (B \cap C)$.

Trường hợp $\begin{cases} y \in B \\ y \in C \end{cases}$ khi đó $y \in (B \cap C)$ nên $y \in A \cup (B \cap C)$.

Mở rộng khái niệm hợp và giao của nhiều tập hợp, giả sử I là tập bất kì gồm hữu hạn hoặc vô hạn các phần tử (I đóng vai trò là tập các chỉ số), $A_i, i \in I$ là một họ các tập hợp, hợp của các tập hợp trong họ đó

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \text{ thuộc tập } A_{i_0} \text{ nào đó với } \; i_0 \in I\}.$$

Nói cách khác $a \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ khi và chỉ khi $\exists i_0 \in I: \; a \in A_{i_0}$.
Giao của một họ các tập hợp

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \text{ thuộc tất cả các tập } \; A_i \; \text{ với } \; i \in I\}.$$

Nói cách khác $a \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ khi và chỉ khi $a \in A_i$ với mọi $i \in I$.

Ví dụ 1.1.2

1. Kí hiệu $(0, 2)$ là tập các số thực dương bé hơn 2, kí hiệu tiếp $[2, 3)$ là tập các số thực lớn hơn hoặc bằng 2 và bé thua 3

   $$(0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}, \quad [2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$$

   khi đó
   $$(0, 2) \cup [2, 3) = (0, 3).$$

2. $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < n\}$, khi đó $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

3. $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$, khi đó $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

4. $H_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1 - \frac{1}{n}\}$, khi đó $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

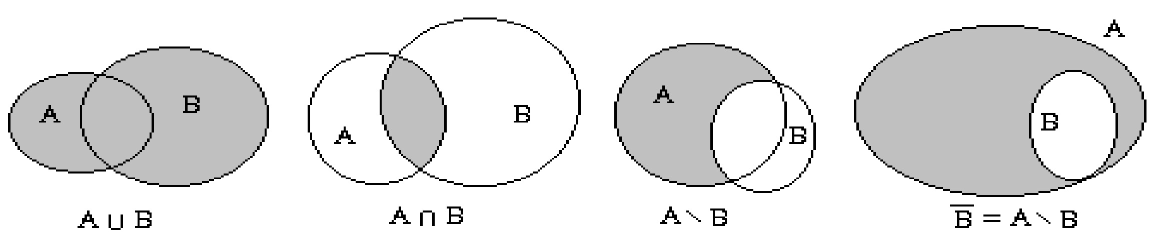
5. $K_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{n}\}$, khi đó $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

6. Kí hiệu $\left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}\right\}$, khi đó

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

Các bài tập trong ví dụ này được giải dễ dàng chỉ cần nắm chắc các khái niệm hợp, giao của các tập hợp. Chẳng hạn để chứng minh đẳng thức trong bài tập cuối, ta chỉ cần chỉ ra mọi phần tử khác 0 không thuộc $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. (Phần tử 0 hiển nhiên thuộc tập đó).
Thật vậy, với mỗi $x \neq 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\dfrac{1}{n_0} < |x|$, nói cách khác $x \notin \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right)$. Suy ra $0 \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.
Các bài tập khác cũng được giải tương tự.

Chú ý, người ta hay dùng biểu đồ Ven để minh hoạ các các mối quan hệ giữa các tập hợp cũng như các phép toán giữa chúng. Biểu đồ Ven coi mỗi tập hợp là một miền phẳng nào đó, các phép toán hợp, giao, phần bù của các miền phẳng hình dung được một cách dễ dàng hơn các tập hợp trừu tượng.



Hình 1.1: Biểu đồ Ven

Đối với phép hợp và phép giao của một họ tập hợp, luật De Morgan có dạng

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$$

trong đó $A_i, i \in I$ là các tập con của X và các tập phần bù được xét trong tập X. Để chứng minh hai công thức này ta vận dụng quy tắc phủ định mệnh đề tồn tại và mệnh đề toàn thể.

Tích Đề các của tập hợp E với tập F là một tập hợp kí hiệu là $E \times F$ và được xác định như sau

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ và } y \in F\}.$$

Chẳng hạn, nếu $E = \{a, b, c\}$ và $F = \{1, 2\}$ thì

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Tổng quát, tích Đềcác của n tập hợp $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (theo thứ tự đó) là một tập hợp, kí hiệu là

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \text{ hay } \prod_{i=1}^{n} E_i$$

và được xác định như sau

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Như vậy, mỗi phần tử của tập hợp $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ là một bộ có thứ tự n phần tử trong đó phần tử thứ i của nó là phần tử thuộc E_i.

Chẳng hạn, nếu $E = \{a, b\}, F = \{1, 2\}, G = \{\alpha\}$ thì

$$G \times E \times F = \{(\alpha, a, 1), (\alpha, a, 2), (\alpha, b, 1), (\alpha, b, 2,)\}$$

$$E \times G \times F = \{(a, \alpha, 1), (a, \alpha, 2), (b, \alpha, 1), (b, \alpha, 2)\}$$

$$E \times F \times G = \{(a, 1, \alpha), (a, 2, \alpha), (b, 1, \alpha), (b, 2, \alpha)\}.$$

Trong trường hợp $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, thay cho kí hiệu tích Đề các $E \times E \times \ldots \times E$ ta sẽ dùng kí hiệu E^n

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n} = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in E \quad \forall i = 1, 2, ..., n\}.$$

Như vậy mỗi phần tử của E^n là một bộ (có thứ tự) n phần tử của E. Đặc biệt, mỗi phần tử của tích Đề các $\mathbb{R}^n$ còn được gọi là một điểm trong $\mathbb{R}^n$.
Các phần tử của tích Đề các $\mathbb{R}^2$ thường được minh hoạ bằng các điểm trong mặt phẳng có gắn hệ trục tọa độ Đề các. Tương tự mỗi phần tử của tích Đề các $\mathbb{R}^3$ tương ứng với một điểm của không gian $Oxyz$.

1.2 Ánh xạ và quan hệ tương đương

1.2.1 Khái niệm ánh xạ

Định nghĩa 1.2.1 *Cho hai tập hợp khác rỗng E và F. Một ánh xạ f từ E vào F là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của E với một và chỉ một phần tử y của F, ta kí hiệu ánh xạ đó*

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

hay

$$E \xrightarrow{f} F,\ x \overset{f}{\mapsto} y.$$

Kí hiệu $x \overset{f}{\longmapsto} y$ để chỉ rõ quy tắc: phần tử x tương ứng với phần tử y. Phần tử $y \in F$ được gọi là ảnh của x $(\in E)$ qua ánh xạ f và được kí hiệu $f(x)$ (đọc là: f của x). Do vậy ánh xạ cũng được kí hiệu $f : E \to F,\ f(x) = y$.

Tập E được gọi là tập nguồn, tập F được gọi là tập đích của ánh xạ f.

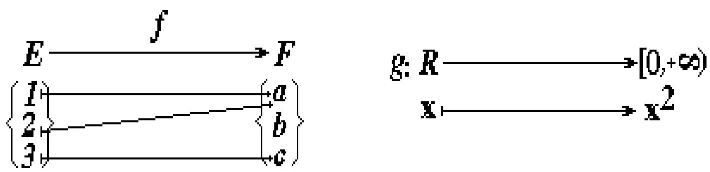
Ví dụ 1.2.1

1. Hai quy tắc f, g sau là hai ánh xạ

   Quy tắc f đặt tương ứng giữa các phần tử của $E = \{1, 2, 3\}$ với các phần tử của $F = \{a, b, c\}$

   $$1 \longmapsto a,\ 2 \longmapsto a,\ 3 \longmapsto c$$

   còn được viết $f(1) = a,\ f(2) = a,\ f(3) = c$. Quy tắc g đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in \mathbb{R}$ với phần tử $x^2 \in [0, +\infty)$ (tập các số thực không âm), ta viết $g(x) = x^2$.



Hình 1.2: Ánh xạ

2. Cho X, Y là 2 tập bất kì, $a \in X$ là một phần tử cố định thuộc Y. Quy tắc $f : X \to Y,\ x \longmapsto a$ hoặc viết $f(x) = a\ \forall x \in X$ là *ánh xạ hằng* (nói gọn là hằng ánh).
   Chẳng hạn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto 1$ là hàm hằng, người ta thường kí hiệu hàm đó $f(x) \equiv 1\ \forall x \in X$.

3. $f : X \to X$ được gọi là *ánh xạ đồng nhất* trên tập X nếu $f(x) = x$ với mọi $x \in X$. Người ta thường kí hiệu ánh xạ đồng nhất trên X là id_X.

4. Kí hiệu $2^X = \{A \ / \ A \subset X\}$ là tập hợp gồm toàn bộ các tập con của X.
   Ánh xạ $f : 2^X \to 2^X, \quad A \mapsto \overline{A} = X \backslash A$ đặt tương ứng mỗi tập A vào phần bù của chính nó trong X.

5. Ánh xạ từ tích Đề các $A \times B$ vào A

   $$P_1 : A \times B \to A, \quad (x, y) \mapsto x$$

   được gọi là *phép chiếu lên tập* A.

6. Tương tự phép chiếu từ tập $A \times B$ vào B là ánh xạ

   $$P_2 : A \times B \to B, \quad (x, y) \mapsto y.$$

7. Quy tắc f đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ với số dương y thỏa mãn hệ thức $y^2 = x$ là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}$

   $$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}.$$

   Tuy nhiên quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ với số y thỏa mãn hệ thức $y^2 = x$ *không là ánh xạ* từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}$ vì quy tắc này đặt tương ứng mỗi $x \in \mathbb{R}^+$ với 2 phần tử $y \in \mathbb{R}$.

Ta nói hai ánh xạ $f, g : E \to F$ *bằng nhau* (viết là $f = g$) nếu

$$\forall x \in E : f(x) = g(x).$$

Xét ánh xạ $f : E \to F$ và A là một tập con của E, B là một tập con của F.

Ảnh của A qua ánh xạ f là một tập con của F, kí hiệu là $f(A)$, bao gồm các phần tử của F là ảnh của ít nhất một phần tử của A

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$

hoặc có thể viết $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Trường hợp $A = E$ thì tập con $f(E)$ của F được gọi là *ảnh của ánh xạ f*.

Nghịch ảnh của B qua f là một tập con của E, kí hiệu là $f^{-1}(B)$, bao gồm các phần tử của E có ảnh thuộc B

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Nghịch ảnh của một phần tử $y \in F$, kí hiệu

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) = y\}.$$

Với ánh xạ f và g trong ví dụ đầu tiên của ví dụ 1.2.1 ta có

$$f(\{1,2\}) = \{a\},\ f^{-1}(\{a\}) = \{1,2\},\ f^{-1}(\{b,c\}) = \{3\}$$

$$g([0,2]) = [0,4],\ g([-2,0]) = [0,4],\ g([-2,2]) = [0,4]$$

$$g^{-1}([0,1]) = [-1,1],\ g^{-1}([-1,1]) = [-1,1],\ g^{-1}([-2,-1]) = \emptyset.$$

(*Lưu ý tới kí hiệu $[a,b]$ trong tập số thực $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.*)

Tính chất ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và các tập $A, B \subset X, \quad C, D \subset Y$. Khi đó

1. $A \subset B$ kéo theo $f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $C \subset D$ kéo theo $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

5. $A \subset f^{-1}(f(A))$ với mọi $A \subset X$

6. Với phép chiếu

$$\begin{aligned} P_1 : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

   ta có

$$P_1^{-1}(A) = A \times Y \quad \forall A \subset X.$$

Cũng giống như các tính chất của tập hợp, việc chứng minh các tính chất trên không khó, chỉ cần nắm vững các khái niệm ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ. Chẳng hạn để chứng minh tính chất 5, ta phải chứng minh mọi phần tử $x \in A$ đều thuộc tập $f^{-1}(f(A))$, điều đó cũng có nghĩa là ta phải chứng minh $f(x) \in f(A)$

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \;\Leftrightarrow\; f(A) \subset f(A).$$

Điều này là hiển nhiên.

1.2.2 Toàn ánh, đơn ánh, song ánh và hợp hai ánh xạ

Định nghĩa 1.2.2 *Xét ánh xạ $f : E \to F$. Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu mỗi phần tử của F là ảnh của ít nhất một phần tử của E*

$$\forall y \in F : \exists x \in E, f(x) = y.$$

Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu mỗi phần tử của F là ảnh của nhiều nhất một phần tử của E

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Ánh xạ f là song ánh nếu nó vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh.

Từ định nghĩa về ánh xạ ta suy ra:

$f : E \to F$ là toàn ánh khi và chỉ khi với $\forall y \in F$, phương trình $f(x) = y$ luôn có ít nhất một nghiệm $x \in E$. Nói cách khác $f(E) = F$.

$f : E \to F$ là đơn ánh khi và chỉ khi với $\forall y \in F$, phương trình $f(x) = y$ có nhiều nhất một nghiệm $x \in E$.

$f : E \to F$ là song ánh khi và chỉ khi với $\forall y \in F$, phương trình $f(x) = y$

luôn có đúng một nghiệm $x \in E$. Nói cách khác $\forall y \in F: \exists! x \in E, y = f(x)$. Người ta thường nói song ánh là ánh xạ 1-1 từ tập nguồn vào tập đích.

Thu hẹp của ánh xạ $f : E \to F$ lên tập $A \subset E$, kí hiệu $f|_A$ là ánh xạ

$$f|_A : A \to F, \quad f|_A(x) = f(x) \quad \text{với mọi } x \in A.$$

Hiển nhiên mọi thu hẹp của đơn ánh đều là đơn ánh.

Ví dụ 1.2.2

1. Xét ánh xạ $f : E \to F$ với $E = \{1, 2, 3\},\ F = \{a, b, c\}$ trong ví dụ 1.2.1

$$f(1) = a,\ f(2) = a,\ f(3) = c.$$

   Ánh xạ f không là toàn ánh vì phần tử $b \in F$ không là ảnh của một phần tử nào, f không là đơn ánh vì phần tử $a \in F$ là ảnh của nhiều hơn một phần tử của E.

2. Xét ánh xạ $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty),\ g(x) = x^2$. Với mỗi $y \geq 0$, phương trình $x^2 = y$ đều có nghiệm thực nên g là toàn ánh, phương trình $x^2 = 1$ có nhiều hơn một nghiệm nên g không là đơn ánh.

3. Với $f : X \to Y$ là ánh xạ bất kì, khi đó ánh xạ $x \mapsto (x, f(x))$ là đơn ánh từ X vào $X \times Y$.

4. Ánh xạ đồng nhất $id_X : X \to X$ là song ánh trên tập X.

5. Phép chiếu

$$\begin{aligned} P_1 : A \times B &\to B \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

   là toàn ánh từ tập $A \times B$ lên tập B.

6. Hàm $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$ là toàn ánh và f không là đơn ánh. Tuy nhiên thu hẹp của f lên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kí hiệu $g = f\Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

$$g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ g(x) = \sin x$$

   là đơn ánh và do vậy thu hẹp của f lên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ là song ánh.

   Tương tự hàm $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ là toàn ánh và không là đơn ánh. Thu hẹp của cos lên đoạn $[0, \pi]$ là song ánh.

Nếu $f : E \to F$ là một song ánh thì với mỗi $y \in F$ tồn tại duy nhất một phần tử $x \in E$ sao cho $f(x) = y$. Quy tắc

$$f^{-1} : F \to E$$

đặt tương ứng mỗi $y \in F$ với phần tử $x \in E$ đó được gọi là *ánh xạ ngược của song ánh* f. Như vậy,

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y.$$

Trong ví dụ 1.2.2 ở trên, thu hẹp của cos lên đoạn $[0, \pi]$

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

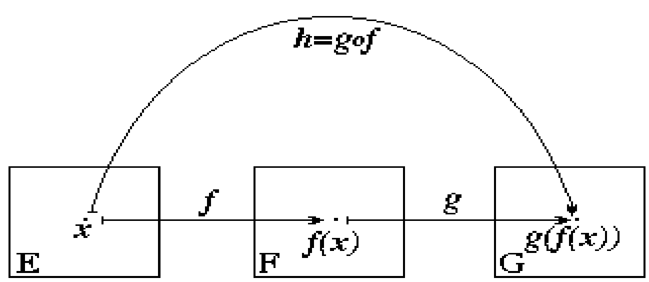
là song ánh. Do đó nó có ánh xạ ngược (ta thường nói *hàm ngược*), kí hiệu

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Hàm ngược arccos có tính chất đặc trưng cho của ánh xạ ngược

$$\arccos y = x \;\Leftrightarrow\; \cos x = y$$

với mọi $x \in [0, \pi]$ (hoặc tương đương với nó $\forall y \in [-1, 1]$).



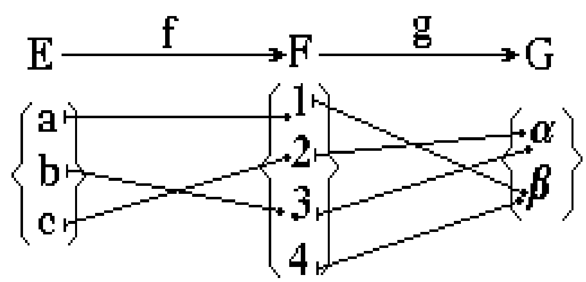
Hình 1.3: Hợp của g và f

Cho ba tập hợp E, F, G và các ánh xạ $f : E \to F, \quad g : F \to G$, khi đó ánh xạ $E \to G$

$$x \mapsto g(f(x))$$

được gọi là *ánh xạ hợp* của g và f, kí hiệu ánh xạ hợp đó là $g \circ f$. (Chú ý đến thứ tự của hợp các ánh xạ. Xem hình 1.3.)

Chẳng hạn cho hai ánh xạ



Hình 1.4: Ví dụ về hợp của g và f

Theo hình 1.4, các giá trị của ánh xạ f và g được cho như sau

$$f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2, g(1) = g(4) = \beta, g(2) = g(3) = \alpha.$$

Do vậy ánh xạ hợp của g và f, $g \circ f : E \to G$ được xác định chi tiết như sau

$$(g \circ f)(a) = \beta,\ (g \circ f)(b) = \alpha,\ (g \circ f)(c) = \alpha.$$

Trường hợp tập nguồn và tập đích của các ánh xạ trùng nhau $f, g : E \to E$, các ánh xạ $g \circ f$ và $f \circ g$ đều chiếu từ E vào E, và nói chung chúng không bằng nhau.

Ví dụ 1.2.3

Cho 2 hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$. Khi đó các hàm hợp

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2^{x^2},\ (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = (2^x)^2 = 4^x.$$

Từ các hàm số f và g ta cũng có thể tạo ra các hàm hợp khác, chẳng hạn $(f \circ f)(x) = x^4$, $(g \circ g)(x) = 2^{2^x}$, $(f \circ f) \circ g$, $g \circ (f \circ g), \ldots$

Định lí 1.2.1 *Cho hai ánh xạ $f : E \to F$ và $g : F \to G$. Khi đó*

a) Nếu f và g là đơn ánh thì $g \circ f$ cũng là đơn ánh.

b) Nếu f và g là toàn ánh thì $g \circ f$ cũng là toàn ánh.

c) Nếu f và g là song ánh thì $g \circ f$ cũng là song ánh đồng thời

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Chứng minh. Ta có $g \circ f : E \to G$

a) Với mọi $x, x' \in E$, từ hệ thức $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, do f và g là đơn ánh, suy ra

$$g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Vậy $g \circ f$ là đơn ánh.

b) Với mọi $z \in G \Rightarrow \exists y \in F : \ g(y) = z$ (vì g là toàn ánh). Mặt khác, vì $y \in F$ và f là toàn ánh nên $\exists x \in E : \ f(x) = y$. Do đó, ta có thể viết

$$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

hay $g \circ f$ là toàn ánh.

c) Từ a) và b) ta suy ra $g \circ f$ là song ánh. Với mọi $z \in G$, đặt $x = (g \circ f)^{-1}(z)$. Khi đó, theo định nghĩa ánh xạ ngược và phép hợp thành ánh xạ ta có

$$x = (g \circ f)^{-1}(x) \Rightarrow (g \circ f)(x) = z \Rightarrow g(f(x)) = z.$$

Suy ra

$$g^{-1}(z) = f(x) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(z)) = x \Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x.$$

Vậy

$$(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1}g^{-1})(z) \ \forall z \in G$$

hay $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. ■

Định lí 1.2.2 *Cho hai ánh xạ $f : E \to F$ và $g : F \to E$. Điều kiện cần và đủ để chúng là các ánh xạ ngược của nhau là*

$$g \circ f = id_E, \ \ f \circ g = id_F.$$

Chứng minh. Giả sử $g \circ f = id_E$ và $f \circ g = id_F$. Khi đó từ giả thiết $g \circ f = id_E$ suy ra g là toàn ánh. Hệ thức thứ hai $f \circ g = id_F$ kéo theo g là đơn ánh. Vậy ánh xạ g là song ánh, tồn tại ánh xạ ngược g^{-1}. Lập luận tương tự, f cũng là song ánh, $\exists f^{-1}$. Mặt khác theo giả thiết $g \circ f = id_E$ suy ra với mọi $y \in F$

$$g(y) = x \ \Leftrightarrow \ f(x) = y.$$

Nói cách khác $g = f^{-1}$.

Ngược lại, giả thiết các ánh xạ f và g là các song ánh, tồn tại các ánh xạ ngược $f^{-1} = g$ (hoặc $g^{-1} = f$). Khi đó với mọi $x \in E$

$$f^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow \ f(x) = y \quad \text{hay} \quad g \circ f = id_E.$$

Định lí đã được chứng minh. Vì vậy ta có thể định nghĩa ánh xạ ngược của song ánh $f : E \to F$ là ánh xạ $f^{-1} : F \to E$ thỏa mãn các hệ thức

$$f^{-1} \circ f = id_E,\ \ f \circ f^{-1} = id_F. \ \blacksquare$$

Ví dụ 1.2.4

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, x)$.

1. Chứng tỏ rằng f là song ánh.
2. Với $A = [0, 1] \times [0, 1]$, hãy xác định tập ảnh $f(A)$.
3. Xác định ánh xạ ngược f^{-1}.

• Để chứng minh $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x+y, x)$ là song ánh ta phải chứng minh f là toàn ánh và f là đơn ánh. Theo định nghĩa toàn ánh và song ánh, điều đó xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x \qquad = \beta \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất với mọi $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$. Điều này đúng vì hệ luôn có nghiệm $x = \beta, y = \alpha - \beta$.

• Để xác định tập ảnh $f(A)$ ta cần xác định ảnh của các phần tử nằm ở "biên" của tập $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Đó là các đoạn thẳng $A_1 = \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A_2 = \{(x, 1) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A_3 = \{(0, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ và $A_4 = \{(1, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Từ quy tắc $f(x, y) = (x + y, x)$ của ánh xạ f, dễ dàng suy ra $f(A_1) = \{(x, x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ là đoạn thẳng nối $O(0, 0)$ với điểm $B(1, 1)$. Tập ảnh $f(A_2) = \{(x + 1, x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ là đoạn thẳng nối điểm $C(1, 0)$ với điểm $D(2, 1)$.

Hoàn toàn tương tự ta thấy tập ảnh $f(A_3)$ là đoạn thẳng $OC = \{(y, 0) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ và tập ảnh $f(A_4)$ là đoạn thẳng $BD = \{(y + 1, 1) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Từ các nhận xét trên suy ra f chuyển hình vuông A thành hình bình hành $OBDC$ hoặc viết tập ảnh $f(A)$ dưới dạng

$$f(A) = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x \leqslant y + 1\}.$$

• Từ nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x \qquad = \beta \end{cases}$$

suy ra ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f^{-1}(x, y) = (y, x - y)$.

Chú ý rằng với kết quả này bạn đọc có thể kiểm tra 2 hệ thức trong định lí 1.2.2: $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}},\ f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$

$$f^{-1} \circ f(x, y) = f^{-1}(x + y, x) = (x, x + y - x) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

và

$$f \circ f^{-1}(x, y) = f(y, x - y) = (x - y + y, y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 1.2.5 *(Về một vài hàm sơ cấp cơ bản)*

1. **Ánh** xạ đồng nhất $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ hoặc viết $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Hàm lũy thừa $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^2$ là song ánh, hàm ngược của f

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

   Các hệ thức trong định lí 1.2.2 ở trên chính là các đồng nhất thức

$$f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{x^2} = x,\ f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt{x})^2 = x\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

3. Hàm số mũ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = 2^x$ là một song ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}^+$, do vậy nó tồn tại hàm ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, kí hiệu $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

   Hàm f và f^{-1} thỏa mãn các hệ thức trong định lí 1.2.2

$$f^{-1} \circ f(x) = \log_2 2^x = x\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad f \circ f^{-1}(x) = 2^{\log_2 x}\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

4. Hàm lượng giác $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ là song ánh. **Ánh** xạ ngược của nó được kí hiệu

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{thỏa mãn} \quad \sin(\arcsin x) = x \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

1.2.3 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.2.3 *Cho tập E khác rỗng. Mỗi tập con $\mathcal{R}$ của tích Đềcác $E \times E$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trên E. Nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên E thì thay cho kí hiệu $(x, y) \in \mathcal{R}$ ta thường dùng kí hiệu $x\mathcal{R}y$ (đọc là: x có quan hệ $\mathcal{R}$ với y).*
Ta nói quan hệ 2 ngôi $\mathcal{R}$ trên E là quan hệ tương đương nếu
a) $\mathcal{R}$ có tính phản xạ (với mọi $x \in E,\ x\mathcal{R}x$)
b) $\mathcal{R}$ có tính đối xứng (nếu $x\mathcal{R}y$ suy ra $y\mathcal{R}x$)
c) $\mathcal{R}$ có tính bắc cầu (nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ suy ra $x\mathcal{R}z$).

Ví dụ 1.2.6

1. Quan hệ bằng nhau ("=") trên một tập bất kì là quan hệ tương đương.

2. Quan hệ đồng dư trong phép chia cho p (p là số nguyên dương cố định cho trước), kí hiệu "$\equiv$", trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ là quan hệ tương đương

$$m \equiv n \quad \text{khi và chỉ khi} \quad m - n \text{ chia hết cho } p \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

   Thật vậy, quan hệ đồng dư "$\equiv$" có tính phản xạ: $m \equiv m$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$.
   Quan hệ đồng dư "$\equiv$" có tính đối xứng: $m \equiv n$ suy ra $n \equiv m$.
   Quan hệ đồng dư "$\equiv$" có tính bắc cầu: giả sử $m \equiv n$ và $n \equiv l$, khi đó $m - n = kp, n - l = hp$ suy ra

$$m - l = (k + h)p \quad \text{với} \quad k, h \in \mathbb{Z} \quad \text{hay} \quad m \equiv l.$$

Cho quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên E. Tập hợp $\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ được gọi là *lớp tương đương của* x, kí hiệu

$$\overline{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Khi đó $E/\ \mathcal{R} = \{\overline{x} \mid x \in E\}$ được gọi là *tập thương* của E tạo bởi quan hệ tương đương $\mathcal{R}$. Hiển nhiên $\overline{x} \subset E$ là tập con của E và $x \in \overline{x}$ với mọi $x \in E$.
Ta có nhận xét rằng nếu $x\mathcal{R}y$ khi đó 2 lớp tương đương chứa x và y trùng nhau

$$\overline{x} = \overline{y}.$$

Định lí 1.2.3 *Nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên tập E thì các phần tử của tập thương $E/\mathcal{R}$ là các tập con của E đôi một rời nhau và hợp của chúng bằng E. Nói cách khác nếu*
• $\overline{x}, \overline{y} \in E/\mathcal{R}$ *và* $\overline{x} \neq \overline{y}$ *thì* $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.
• $\bigcup_{x\in E} \overline{x} = E$.
(Người ta thường dùng thuật ngữ tập thương $E/\mathcal{R}$ là một phân hoạch của E.)

Chứng minh. Với x và y là 2 phần tử bất kì thuộc E, giả sử các tập con $\overline{x}$ và $\overline{y}$ có phần tử chung $a \in \overline{x} \cap \overline{y}$, khi đó do tính bắc cầu

$$x\mathcal{R}a \quad \text{và} \quad a\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}y \quad \text{nói cách khác} \quad \overline{x} = \overline{y}.$$

Như vậy hai lớp tương đương $\overline{x}$ và $\overline{y}$ hoặc bằng nhau hoặc rời nhau $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. Mỗi $x \in E$ đều thuộc một lớp tương đương nào đó, chẳng hạn $x \in \bar{x}$. Do đó, hợp các lớp tương đương

$$\bigcup_{x\in E} \overline{x} = E.$$

Suy ra các phần tử của tập thương $E/\mathcal{R}$ (các lớp tương đương) đôi một rời nhau và là một phân hoạch của E. ■

Ví dụ 1.2.7

1. Đối với quan hệ đồng dư modulo p ($p \in \mathbb{N}^*$), mỗi phần tử của tập thương "$\mathbb{Z}/\equiv$" là tập con của $\mathbb{Z}$ gồm các số nguyên đồng dư với nhau theo p

$$\bar{k} = \{h \in \mathbb{Z} \mid h - k \text{ chia hết cho } p \text{ (hay } \exists q \in \mathbb{Z}, h - k = qp)\}.$$

Chẳng hạn, $\bar{0} = \{..., -p, 0, p, 2p, ...\}$ là tập các số nguyên chia hết cho p. $\bar{1}$ gồm các số chia cho p dư 1

$$\bar{1} = \{..., -2p + 1, -p + 1, 1, p + 1, 2p + 1, ...\}$$

2. Cho ánh xạ $f: X \to Y$. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên X được định nghĩa

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \quad (x, x' \in X).$$

(a) Trước hết ta chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên X. Thật vậy

a) $\mathcal{R}$ có tính phản xạ: với mọi $x \in X, f(x) = f(x) \;\Rightarrow\; x\mathcal{R}x$.

b) $\mathcal{R}$ có tính đối xứng: nếu $x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; f(y) = f(x)$, tức là $y\mathcal{R}x$.

c) $\mathcal{R}$ có tính bắc cầu: nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$, hay

$$f(x) = f(y) \quad \text{và} \quad f(y) = f(z)$$

suy ra $f(x) = f(z) \;\Rightarrow\; x\mathcal{R}z$.

Áp dụng định lí 1.2.2, quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ xác định tập thương

$$X/\mathcal{R} = \{\bar{x} \mid x \in X\}, \quad \text{trong đó} \quad \bar{x} = \{u \in X \mid f(u) = f(x)\}.$$

(b) Tiếp theo ta sẽ chứng minh f là hợp thành của một toàn ánh và một song ánh. Cụ thể, tồn tại toàn ánh $h : X \to X/\mathcal{R}$ và đơn ánh $g : X/\mathcal{R} \to Y$ để $f = g \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\
& X/\mathcal{R} \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Thật vậy, xét hai ánh xạ

$$\begin{aligned} h : X &\to X/\mathcal{R} \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : X/\mathcal{R} &\to Y \\ \bar{x} &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Do $h : X \to X/\mathcal{R}$ là ánh xạ từ X lên tập thương của X, mà tập thương của X chính là một phân hoạch của tập X nên hiển nhiên h là toàn ánh.

Ánh xạ $g : X/\mathcal{R} \to Y$ chuyển các phần tử của tập thương vào Y, $f(\bar{x}) = f(x)$ như vậy nếu $\bar{x} \neq \bar{x}'$, theo định nghĩa của quan hệ $\mathcal{R}$ trong X ta có $f(\bar{x}) \neq f(\bar{x}')$.

Hệ thức $f = g \circ h$ đúng vì

$$g \circ h(x) = g\big(h(x)\big) = g(\bar{x}) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Như vậy ta đã chứng minh mọi ánh xạ đều là hợp thành của một toàn ánh và một song ánh.

1.3 Lực lượng của tập hợp

Định nghĩa 1.3.1 *Ta nói tập F có cùng lực lượng với tập E nếu tồn tại một song ánh từ E vào F.*

Chẳng hạn, tập $\{a, b, c\}$ cùng lực lượng với tập $\{1, 2, 3\}$ vì ánh xạ chuyển 1 vào a, chuyển 2 vào b, chuyển 3 vào c là song ánh giữa 2 tập hợp. Tập các số thực $\mathbb{R}$ cùng lực lượng với khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vì ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

là song ánh. Nhận xét rằng theo định nghĩa trên quan hệ "cùng lực lượng" giữa các tập hợp là một quan hệ tương đương.

Định nghĩa 1.3.2 *Ta nói tập A là hữu hạn nếu tồn tại một số nguyên dương n sao cho tập A cùng lực lượng với tập gồm n số tự nhiên đầu tiên $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Khi đó, ta còn nói tập A có lực lượng bằng n.*
Một tập hợp không là hữu hạn sẽ được gọi là tập hợp vô hạn.

Chẳng hạn $\{a, b, c\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{y_1, y_2, \ldots, y_9\}$ là ba tập hợp hữu hạn và có lực lượng lần lượt là $3, 5, 9$.
Như vậy tập A có lực lượng bằng n khi và chỉ khi $\exists$ song ánh

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A.$$

Người ta quy ước tập rỗng là tập hữu hạn. Tập $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ và các khoảng số thực $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ là các tập hợp vô hạn.

Định nghĩa 1.3.3 *Tập hợp A được gọi là vô hạn đếm được nếu nó có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}^*$. Nói cách khác A vô hạn đếm được nếu $\exists$ song ánh $f : \mathbb{N}^* \to A$.*

Các tập hữu hạn và các tập vô hạn đếm được được gọi chung là các *tập đếm được*.

Ví dụ 1.3.1

1. Tập các số nguyên không âm $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ là tập đếm được vì

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N},\ n \mapsto n - 1 \quad \text{là song ánh.}$$

2. Tập tất cả các số tự nhiên chẵn (lẻ) là tập đếm được. Thật vậy kí hiệu A là tập các số tự nhiên chẵn, ánh xạ

$$f : \mathbb{N}^* \to A, \quad n \mapsto 2n$$

là song ánh. Do vậy các số tự nhiên chẵn là tập đếm được.
Tương tự nếu kí hiệu B là tập các số tự nhiên lẻ, ánh xạ

$$f : \mathbb{N}^* \to B, \quad n \mapsto 2n - 1$$

là song ánh.

Chú ý rằng theo định nghĩa trên tập A là tập vô hạn đếm được khi và chỉ khi có thể liệt kê các phần tử của nó thành một dãy hữu hạn hoặc vô hạn

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Chi tiết hơn giả sử $f : \mathbb{N}^* \to A$ là song ánh từ $\mathbb{N}^*$ lên A.

Ứng với $1 \in \mathbb{N}^*$ là phần tử $f(1) \in A$, kí hiệu $a_1 = f(1)$. Ứng với $2 \in \mathbb{N}^*$ là phần tử $f(2) \in A$, kí hiệu $a_2 = f(2)$,..., cứ tiếp tục ứng với $n \in \mathbb{N}^*$ là phần tử $f(n) \in A$, kí hiệu $a_n = f(n)$...

Do f là song ánh nên tất cả các phần tử của A có thể viết dưới dạng dãy

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$

Như vậy khái niệm về tập đếm được tương đương với khái niệm biểu diễn các phần tử của nó dưới dạng dãy. Ta có định lí sau.

Định lí 1.3.1 *Mọi tập con vô hạn của tập đếm được cũng là tập đếm được.*

Chứng minh. Giả sử A là tập đếm được và các phần tử của A có thể viết dưới dạng dãy
$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}.$$
Gọi B là tập con vô hạn của A. Kí hiệu b_1 là phần tử đầu tiên thuộc B trong dãy $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Nếu $b_1 = a_i$ khi đó ta bỏ đi i số hạng đầu của A và xét dãy còn lại $\{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_n, ...\}$. Gọi b_2 là phần tử đầu tiên thuộc thuộc B của dãy đó...

Cứ tiếp tục như vậy tất cả các phần tử của B có thể viết dưới dạng dãy
$$B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}.$$
Suy ra B là tập đếm được. ■

Định lí 1.3.2 *Nếu f là một toàn ánh từ tập đếm được A lên tập B. Khi đó B cũng là tập đếm được.*

Chứng minh. Thật vậy không mất tính tổng quát ta có quyền giả thiết $A = \mathbb{N}^*$. Kí hiệu $u(x) = \min\{f^{-1}(x)\}$ là phần tử nhỏ nhất của nghịch ảnh $f^{-1}(x)$ với mỗi $x \in B$, khi đó u là đơn ánh từ B vào $\mathbb{N}^*$ và do vậy B cùng lực lượng với tập con của $\mathbb{N}^*$. Theo định lí trên tập B là tập đếm được. ■

Từ định lí trên suy ra *mọi tập vô hạn đều chứa một tập con đếm được.*

Các tập đếm được có tính chất sau.

Định lí 1.3.3 *Hợp của hai tập hợp đếm được là một tập hợp đếm được.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử các phần tử của hai tập hợp đếm được A và B được biểu diễn dưới dạng dãy
$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$
Khi đó, ta có thể viết
$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$$
Suy ra $A \cup B$ là tập đếm được. ■

Tổng quát hơn ta có kết quả sau

Định lí 1.3.4 *Hợp của vô hạn đếm được các tập đếm được cũng là tập đếm được. Nói cách khác cho*

$$A_1, A_2, ..., A_p, ...$$

là các tập có lực lượng đếm được. Khi đó

$$A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p \cup ...$$

cũng là tập đếm được.

Từ định lí này ta suy ra ngay một hệ quả quan trọng

Hệ quả 1.3.1 *Tập các số hữu tỉ dương là tập có lực lượng đếm được.*

Thật vậy, tập các số hữu tỉ dương là hợp của dãy các tập hợp đếm được sau

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_1 = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}, \cdots, A_k = \{\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, ..., \frac{k}{n}, ...\}, ...$$

Từ đây ta cũng suy ra tập hợp toàn bộ các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập đếm được.
Chứng minh định lí 1.3.4. Liệt kê các phần tử của các tập đếm được $A_1, A_2, A_3, ...$ dưới dạng dãy

$$\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots\} \\
A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\} \\
A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_p = \{a_{p1}, a_{p2}, a_{p3}, \ldots, a_{pn}, \ldots\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Các phần tử của tập $\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$ cũng có thể liệt kê theo thứ tự các phần tử nằm trên đường gấp khúc xuất phát từ a_{11} như ở hình vẽ trên

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, \ldots, a_{1,2h}, a_{2,2h-1}, a_{3,2h-2}, \ldots\}.$$

Suy ra hợp của vô hạn đếm được các tập A_p cũng là tập đếm được. ■

Một tập hợp vô hạn không là vô hạn đếm được, được gọi là *vô hạn không đếm được.*
Ở trên ta đã thấy tập các số hữu tỉ là tập đếm được. Nói cách khác toàn bộ các số hữu tỉ có thể viết dưới dạng dãy

$$\mathbb{Q} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...\}$$

Ta có định lí sau

Định lí 1.3.5 *Tập các số thực trong khoảng* $(0, 1)$ *là tập vô hạn không đếm được.*

Chứng minh. Giả thiết chúng ta đã biết rằng mọi số thực $0 \leq a < 1$ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn (chu kì khác 9) hoặc không tuần hoàn

$$a = 0, a_1a_2a_3...a_n...$$

Ta chứng minh định lí trên bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, mọi số thực trong khoảng $(0, 1)$ có thể biểu diễn dưới dạng dãy

$$\begin{array}{c}\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...\\ \alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}...\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}$$

Kí hiệu α là số thực sau

$$\alpha = 0, a_1a_2a_3...a_n...$$

trong đó các chữ số a_i thoả mãn điều kiện sau

$$\begin{array}{ccc}a_1 \neq a_{11} & \text{và} & a_1 \neq 9\\ a_2 \neq a_{22} & \text{và} & a_2 \neq 9\\ a_3 \neq a_{33} & \text{và} & a_3 \neq 9\\ \dots\dots & & \dots\dots\\ a_n \neq a_{nn} & \text{và} & a_n \neq 9\\ \dots\dots & & \dots\dots\end{array}$$

Hiển nhiên α là số thực thuộc khoảng $(0, 1)$, tuy nhiên theo cách chọn α như trên, nó không trùng với α_i nào cả, mâu thuẫn với giả thiết phản chứng: mọi số thực trong khoảng $(0, 1)$ là số α_i nào đó. ■

Ta có thể chỉ ra tập các số thực $\mathbb{R}$ có cùng lực lượng với tập số thực trong khoảng $(0, 1)$. Người ta gọi lực lượng của tập các số thực là *continuum.* Tập các số thực là tập vô hạn không đếm được. Do vậy nó không thể biểu diễn hết các phần tử dưới dạng một dãy số nào đó.

1.4 Số phức

1.4.1 Khái niệm về trường số phức

Để đáp ứng được nhu cầu phát triển của toán học, người ta đã lần lượt đưa ra các loại số mới.

Xuất phát từ tập các số tự nhiên, để mỗi phương trình

$$x + a = b$$

có nghiệm người ta đưa ra khái niệm số 0 và số nguyên âm, sau đó để mỗi phương trình bậc nhất

$$ax = b$$

có nghiệm người ta đã đưa ra khái niệm số hữu tỷ. Để biểu diễn độ dài cạnh huyền một tam giác vuông cân, người ta đã đưa ra khái niệm số vô tỷ và để phương trình bậc hai

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.1}$$

có nghiệm, người ta đã đưa ra khái niệm số phức.

Định nghĩa 1.4.1 *Mỗi cặp hai số thực* (a, b), $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ *được gọi là một số phức. Giữa chúng có các phép toán cộng, trừ, nhân, chia được định nghĩa như sau:*

Phép cộng: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
Phép trừ: $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$.
Phép nhân: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Phép chia cho (c, d) *nếu* c *và* d *không đồng thời bằng 0* ($c^2 + d^2 > 0$)

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Tập các số phức với các phép toán trên được kí hiệu là $\mathbb{C}$ *và được gọi là trường số phức.*

Dễ dàng nhận thấy hai phép toán cộng và nhân trong $\mathbb{C}$ có tính giao hoán và tính kết hợp, phép nhân phân phối đối với phép cộng, phép trừ. Đặc biệt các phép toán giữa các số phức có dạng $\{(a, 0)/a \in R\}$ được tiến hành giống như các số thực:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0)$$

$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0),\quad (a,0):(b,0)=(a:b,0).$$

Như vậy có thể coi tập các số thực $\mathbb{R}$ đồng nhất với tập các số phức có dạng $\{(a,0)/a\in\mathbb{R}\}$, nói cách khác trường số phức $\mathbb{C}$ là trường số mở rộng của trường số thực $\mathbb{R}$. Nhận xét rằng mỗi số phức (a,b) có thể viết dưới dạng:

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1).$$

Nếu ta đồng nhất các số phức $(a,0)$, $(b,0)$ với các số thực a,b khi đó mỗi số phức (a,b) có thể viết dưới dạng

$$(a,b)=a+b\cdot(0,1).$$

Kí hiệu $i=(0,1)$ và gọi i là đơn vị ảo của trường số phức $\mathbb{C}$. Hiển nhiên

$$i^2=i\cdot i=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

i^2 có thể đồng nhất với số thực -1. (Nói cách khác số phức $i=(0,1)$ là một nghiệm của phương trình (1.1)).

Dựa vào các nhận xét trên người ta thường biểu diễn số phức dưới dạng

$$(a,b)=a+bi$$

và gọi đó là *dạng đại số của số phức*. Cho số phức $z=a+bi$, số thực a được gọi là *phần thực* của z, kí hiệu là $\mathrm{Re}(z)=a$, số thực b là *phần ảo* của z, kí hiệu là $\mathrm{Im}(z)=b$. Với cách viết này đơn vị ảo của trường số phức $\mathbb{C}$ có tính chất

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1.$$

Từ định nghĩa của phép cộng, phép nhân, phép trừ và phép chia hai số phức ta suy ra quy tắc thực hiện các phép tính đó cho hai số phức viết dưới dạng đại số

$$\begin{array}{rcl}(a+bi)+(c+di) & = & (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)\cdot(c+di) & = & (ac-bd)+(ad+bc)i\\ (a+bi)-(c+di) & = & (a-c)+(b-d)i\\ \dfrac{a+bi}{c+di} & = & \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c+di)\neq 0\end{array}$$

Do tính giao hoán, tính kết hợp của các phép toán cộng, nhân trong $\mathbb{C}$ và tính phân phối khi kết hợp phép nhân đối với các phép cộng, phép trừ, sử dụng dạng đại số của số phức công việc tính toán, rút gọn các biểu thức đại số chứa các số phức trở nên đơn giản. Chẳng hạn

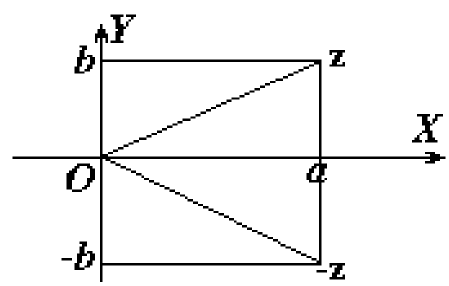
$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Mỗi số phức $(a, b) = a + bi$, về ý nghĩa hình học, được coi như một điểm (a, b) hay một véc tơ trong mặt phẳng chứa hệ trục toạ độ Đề các xOy. Mặt phẳng xOy được gọi là mặt phẳng phức, mỗi điểm trên trục Ox tương ứng với số phức $(a, 0)$ (ta đồng nhất với số thực a). Do vậy trục Ox còn được gọi là *trục thực*. Trục Oy được gọi là *trục ảo*, các số phức nằm trên trục ảo tương ứng với số phức $(0, b)$ (hay $bi,\ b \in \mathbb{R}$) được gọi là các số phức *thuần ảo*.

Số phức

$$\overline{z} = a - bi$$

được gọi là *số phức liên hợp* của $z = a + bi$. Về mặt hình học hai số phức liên hợp nhau z và $\overline{z}$ là hai điểm đối xứng nhau qua trục thực trong mặt phẳng phức. Vậy điều kiện cần và đủ để số phức z là số thực là $z = \overline{z}$.



Hình 1.5: Số phức và số phức liên hợp

Ví dụ 1.4.1

1. Do $i^2 = -1$, phương trình $z^2 + 1 = 0$ có nghiệm $z = \pm i$ trong trường phức.

2. Dễ dàng kiểm tra phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ có nghiệm

$$z_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Các nghiệm z_1 và z_2 là hai số phức liên hợp nhau.)

Nhận xét rằng việc giải các phương trình bậc hai hệ số thực trên trường phức được tiến hành như giải các phương trình bậc hai trên trường thực, chỉ cần lưu ý tới nhận xét nếu $\Delta < 0$, phương trình

$$z^2 = \Delta \quad \text{có hai nghiệm} \quad z_1 = i\sqrt{|\Delta|}, z_2 = -i\sqrt{|\Delta|}.$$

Trong ví dụ trên phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ có thể viết thành

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; z + \frac{1}{2} = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Tìm tập các số phức z có tính chất $z + \overline{z} = 2$. Minh họa hình học tập hợp đó lên mặt phẳng phức.

   Giả sử số phức z thỏa mãn tính chất trên có dạng $z = x + yi$, trong đó $x \in \mathbb{R}$ là phần thực và $y \in \mathbb{R}$ là phần ảo. Khi đó

   $$z + \overline{z} = 2 \;\Leftrightarrow\; (x + yi) + (x - yi) = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \mathrm{Re}(z) = 1.$$

   Vậy tập các số phức z thỏa mãn tính chất $z + \overline{z} = 2$ là tập các số phức có phần thực $\mathrm{Re}(z) = 1$. Biểu diễn hình học của tập hợp đó là đường thẳng $x = 1$ trong mặt phẳng phức xOy.

Dễ dàng chứng minh các tính chất sau của số phức liên hợp

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w}\\
\overline{z.w} &= \overline{z}.\overline{w}\\
\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} &= \frac{\overline{w}}{\overline{z}}, \quad (z \neq 0)
\end{aligned}$$

Từ tính chất thứ hai, liên hợp của tích bằng tích các liên hợp, ta suy ra $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Tổng quát hơn $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ là đa thức bất kì với các hệ số phức $a_i \in \mathbb{C}$ khi đó

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0}.$$

Trường hợp riêng nếu đa thức $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ có tất cả các hệ số là các số thực thì

$$\overline{P(z)} = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = P(\overline{z}).$$

1.4.2 Dạng lượng giác của số phức và phép khai căn số phức

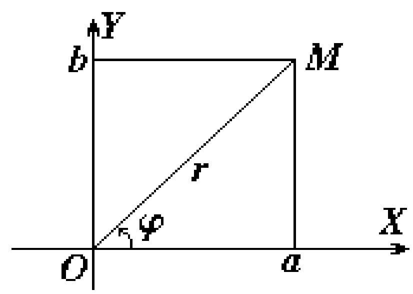
Định nghĩa 1.4.2 *Cho số phức $z = a + bi$. Khi đó $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là môđun của số phức z, kí hiệu $|z|$. Biểu diễn (a, b) dưới dạng toạ độ cực*

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

trong đó φ là góc lượng giác tạo bởi giữa véc tơ (a, b) và trục Ox. Khi đó φ được gọi là arcgumen của z, kí hiệu $Arg(z)$. Số phức z viết dưới dạng

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

được gọi là dạng lượng giác của z.



Hình 1.6: Môđun và arcgumen của số phức

Chú ý rằng tích của hai số phức liên hợp nhau $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ luôn luôn là số thực, cụ thể hơn

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Arcgumen của số phức $z = a + bi$ không xác định duy nhất và $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}(z)) = \frac{b}{a}$ nếu phần thực của z khác 0 : $Re(z) = a \neq 0$.

Môđun của số phức $z = a + bi$ thực chất là độ dài véc tơ $\overrightarrow{OM}$ suy ra môđun của số phức có các tính chất sau

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Dạng lượng giác của số phức rất thuận tiện cho việc tính tích, thương của các số phức. Ta có định lí sau

Định lí 1.4.1 *Cho hai số phức* $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *và* $z_2 = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. *Khi đó*

$$z_1 \cdot z_2 = (rs)(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)) \quad \textit{với} \quad z_2 \neq 0.$$

Định lí khẳng định khi nhân hai số phức, tích của chúng là số phức có môđun bằng tích các môđun và arcgumen bằng tổng các arcgumen của hai số phức đó. Tương tự thương của hai số phức là số phức có môđun bằng thương các môđun và arcgumen bằng hiệu các arcgumen. Từ định lí suy ra môđun của tích, thương 2 số phức có tính chất

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{với} \quad z_2 \neq 0.$$

Chứng minh định lí 1.4.1. Xét tích của 2 số phức $z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $z_2 = s(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (rs)(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= (rs)\big((\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi) + \\ &\quad +i(\sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi)\big) \\ &= (rs)(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

Phần còn lại của định lí được chứng minh bằng cách nhân z_2 với số phức $\frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$ ta được

$$z_2 \cdot \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)) = z_1. \quad \blacksquare$$

Định lí trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số phức là số phức có môđun bằng tích các môđun và arcgumen bằng tổng các arcgumen của chúng. Hơn nữa bằng quy nạp ta suy ra

Hệ quả 1.4.1 (Công thức Moivre) *Với mọi số phức* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *và số nguyên* $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Chú ý rằng công thức Moivre còn được coi là hệ quả của công thức Ơle rất tiện dụng sau đây:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \text{trong đó} \quad i \text{ là đơn vị ảo}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.}$$

Thật vậy, với số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bất kì, theo công thức Ơle

$$z = re^{i\varphi} \;\Rightarrow\; z^n = r^n(e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ví dụ 1.4.2

1. Sử dụng công thức Ơle ta có thể tính $\cos 3x, \sin 3x, \cos 5x, \sin 5x$ theo các hàm $\cos x, \sin x$

   (a) Theo công thức Ơle $e^{i3\varphi} = (e^{i\varphi})^3$ hay

   $$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3 = 4\cos^3 x - 3\cos x + i(3\sin x - 4\sin^3 x).$$

   Đồng nhất phần thực và phần ảo của 2 vế ta được

   $$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

   (b) Tương tự

   $$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$

   $$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x.$$

2. Chứng minh rằng nếu α, β là các góc nhọn có tính chất $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ và $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$ thì $\alpha + \beta = 45^0$.

   Thật vậy xét 2 số phức $z_1 = 2+i$ và $z_2 = 3+i$. Từ giả thiết $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$ suy ra α là arcgumen của z_1 và β là arcgumen của z_2. Hiển nhiên tích của 2 số phức z_1 và z_2

   $$z_1 \cdot z_2 = (2+i)(3+i) = 5(1+i)$$

   có arcgumen bằng 45^0 và theo định lí 1.4.1, số phức $z_1 \cdot z_2$ có arcgumen bằng tổng các arcgumen của z_1 và z_2. Bằng cách đó ta đã chứng minh $\alpha + \beta = 45^0$.

Lưu ý rằng trong chương trình toán phổ thông trung học ta có thể giải được một số bài toán sơ cấp bằng phép cộng véc tơ, nhân véc tơ với một số thực. Các số phức được xem như các véc tơ, ngoài phép cộng như cộng các véc tơ, chúng ta còn có thể nhân chúng với nhau theo quy tắc đã chỉ ra trong định lí 1.4.1. Do vậy số phức là một công cụ khá tốt để giải một số các bài toán sơ cấp trong chương trình phổ thông. Ví dụ trên đây minh họa cho nhận xét này.

Định nghĩa 1.4.3 *Khai căn bậc n số phức z ta được số phức ω mà $\omega^n = z$, với n là số tự nhiên lớn hơn 1.*

Theo định nghĩa này căn bậc n của z không được xác định duy nhất. Ví dụ căn bậc hai của -1, theo định nghĩa trên bằng đơn vị ảo i hoặc $-i$.

Nếu số phức z được biểu diễn dưới dạng lượng giác

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ta tìm căn bậc n của z cũng dưới dạng lượng giác

$$\omega = s(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Khi đó từ công thức Moavrơ

$$\omega^n = s^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

suy ra $s = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi + 2k\pi = n\psi$, hay

$$\omega = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Các số phức nói trên là các căn bậc n của z, tuy nhiên chỉ có đúng n căn thức khác nhau ứng với $k = 0, k = 1, \ldots, k = n-1$. Do vậy mỗi số phức khác 0 có đúng n giá trị căn bậc n khác nhau

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Về mặt hình học các căn bậc n của số phức z (kí hiệu $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$) có môđun bằng nhau và góc giữa 2 số phức ω_{k-1}, ω_k bằng $\frac{2\pi}{n}$ không phụ thuộc vào k. Do đó các căn bậc n của số phức z là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh với gốc tọa độ $O(0,0)$ luôn là tâm của đa giác đều đó.

Ví dụ 1.4.3

1. Căn bậc 3 của 1 là một trong các giá trị sau:

$$\epsilon_0 = 1,\ \ \epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Các số phức ϵ_0, ϵ_1 và ϵ_2 là các đỉnh của một tam giác đều với tâm của tam giác là số phức 0.

2. Tính các căn bậc 3 của -1. Ta viết (-1) dưới dạng lượng giác

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

   Suy ra căn bậc 3 của -1 là một trong các giá trị sau:

$$\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3},\ \ k = 0, 1, 2.$$

   Như vậy các căn bậc 3 của -1 lần lượt bằng

$$\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Chúng cũng lập thành một tam giác đều tâm là số phức 0.

3. Căn bậc n của 1 là một trong các giá trị sau:

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

   Nhận xét rằng $\epsilon_k = \epsilon_1^k$ suy ra

$$\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1}\epsilon_1^k = \frac{1-\epsilon_1^n}{1-\epsilon_1} = 0.$$

Lưu ý rằng *các căn bậc hai của một số phức là hai số phức đối nhau.* Thật vậy, nếu z_0 là một trong các căn bậc hai của z thì do $(-z_0)^2 = z$ nên $-z_0$ cũng là căn bậc hai của z. Chẳng hạn căn bậc hai của đơn vị ảo i bằng

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.4.3 Đa thức trên trường số phức

Xét đa thức bậc n ($n \geq 1$) với hệ số phức

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad (a_n \neq 0) \tag{1.2}$$

ta nói số phức z_0 là một nghiệm của đa thức $P(z)$ nếu z_0 thỏa mãn hệ thức

$$P(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_n z_0^n = 0.$$

Chẳng hạn, hai số phức $\pm i$ là hai nghiệm của đa thức

$$P(z) = z^2 + 1$$

Tương tự như đối với đa thức với hệ số thực, ta có thể chứng minh được định lý sau đây

Định lí 1.4.2 *Điều kiện cần và đủ để một số phức z_0 là một nghiệm của đa thức $P(z)$ là đa thức $P(z)$ chia hết cho $z - z_0$, tức là*

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

trong đó $Q(z)$ là một đa thức bậc $n - 1$.

Người ta nói z_0 là *nghiệm bội k của $P(z)$* nếu

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

trong đó $Q(z)$ là đa thức thoả mãn điều kiện $Q(z_0) \neq 0$.

Ví dụ 1.4.4

Biết $x = -\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của đa thức

$$P_3(x) = 4x^3 - 6i\sqrt{3}x^2 - 3(3 + i\sqrt{3})x - 4. \tag{1.3}$$

Hãy tìm các nghiệm của đa thức đó.
Chia đa thức đã cho cho $x + \frac{1}{2}$ ta được

$$4x^3 - 6i\sqrt{3}x^2 - 3(3 + i\sqrt{3})x - 4 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2}x - 2\right)$$

Tam thức bậc hai $x^2 - \dfrac{1+3i\sqrt{3}}{2}x - 2$ có biệt thức

$$\Delta = 3\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Từ đó, suy ra

$$\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \pm\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$$

nên tam thức bậc hai có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+3i\sqrt{3}}{2} + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+3i\sqrt{3}}{2} - \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $-\dfrac{1}{2}$, $1+i\sqrt{3}$ và $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Ta thừa nhận không chứng minh định lí sau

Định lí 1.4.3 (Định lí cơ bản của đại số) *Bất kì đa thức có bậc lớn hơn 0 trên trường số phức luôn có ít nhất một nghiệm.*

Từ hai định lý 1.4.2 và 1.4.3 ta suy ra

Định lí 1.4.4 *Mỗi đa thức $P_n(z)$ bậc n $(n > 0)$ đều có thể phân tích thành tích của n thừa số bậc nhất*

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) \tag{1.4}$$

trong đó a_n là hệ số của z^n.

Chú ý rằng các thừa số $z - z_i$ trong phân tích trên sẽ được lặp lại k lần nếu z_i là nghiệm bội k của đa thức $P(z)$.

Ví dụ 1.4.5

1. Đa thức $z^3 - iz^2 + z - i$ có $-i$ là nghiệm và i là nghiệm bội hai, suy ra

$$z^3 - iz^2 + z - i = (z - i)^2(z + i).$$

2. Đa thức (1.3) trong ví dụ 1.4.4 có thể viết dưới dạng

$$P_3(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - (1 + i\sqrt{3})\right)\left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Xét trường hợp đặc biệt khi đa thức trên trường số phức có các hệ số thực.

Định lí 1.4.5 *Đa thức $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ có tất cả các hệ số a_i, $i = 0, 1, ..., n$ là các số thực. Khi đó nếu z_0 là nghiệm của $P(z)$ thì số phức liên hợp $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của $P(z)$. Nói cách khác mọi nghiệm của $P(z)$ hoặc là số thực hoặc là các cặp số phức liên hợp nhau.*

Chứng minh. Thật vậy, với mọi số phức $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{(a_1 z)} + \overline{(a_2 z^2)} + \ldots + \overline{a_n z^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \ldots + \overline{a_n} \cdot \overline{z^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_2} \cdot (\overline{z})^2 + \ldots + \overline{a_n} \cdot (\overline{z})^n
\end{aligned}$$

Vì các hệ số a_i là các số nên $a_i = \overline{a_i}$, $\forall i = \overline{0, n}$. Do đó

$$\overline{P(z)} = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 (\overline{z})^2 + \ldots + a_n (\overline{z})^n = P(\overline{z}).$$

Vì vậy, nếu z_0 là một nghiệm của đa thức $P(z)$ thì

$$P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0,$$

hay $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của đa thức $P(z)$. ■

Định lí 1.4.6 *Mọi đa thức bậc n ($n > 0$) với các hệ số thực đều có thể phân tích thành tích các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai hệ số thực*

$$P(x) = a_n (x - x_1) \ldots (x - x_r)(x^2 + p_1 x + q_1) \ldots (x^2 + p_s x + q_s). \qquad (1.5)$$

Chứng minh.
• Nếu mọi nghiệm của $P(x)$ đều là các số thực, khi đó theo định lí 1.4.4 đa thức có thể phân tích thành tích n nhị thức bậc nhất.

• Trường hợp đa thức $P(x)$ có nghiệm phức không thực $x = a$, khi đó theo định lí trên $x = \overline{a}$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Xét tích của hai nhị thức $x - a$ và $x - \overline{a}$

$$(x-a)(x-\overline{a}) = x^2 - (a+\overline{a})x + a \cdot \overline{a} = x^2 - 2\mathrm{Re}(a)x + |a|^2,$$

nó là tam thức bậc hai có các hệ số đều là số thực. Suy ra thương của $P(x)$ và tam thức bậc hai đó, kí hiệu $Q(x)$, lại là một đa thức có bậc $n-2$ và các hệ số là các số thực

$$P(x) = (x-a)(x-\overline{a})Q(x) = \big(x^2 - 2\mathrm{Re}(a)x + |a|^2\big)Q(x).$$

Lặp lại các bước trên cho đa thức $Q(x)$, sau hữu hạn bước ta được điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 1.4.6

1. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ là hàm đồng biến và miền giá trị của hàm bằng $\mathbb{R}$, do vậy f là song ánh trên tập các số thực $\mathbb{R}$.
   Tuy nhiên ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^3$ không là đơn ánh, bởi vì phương trình $f(z) = \alpha$ hay $z^3 = \alpha$ có đủ 3 nghiệm phức với mọi $\alpha \neq 0$ theo định lí cơ bản của đại số. Do vậy $f(z) = z^3$ không là song ánh trên tập các số phức $\mathbb{C}$. (*Nhận xét rằng cũng theo định lí cơ bản của đại số, ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^3$ là toàn ánh*).

2. Giải phương trình $z^6 - 1 = 0$.
   Đa thức $z^6 - 1$ có hai nghiệm $z_{1,2} = \pm 1$ nên

$$z^6 - 1 = (z-1)(z+1)(z^4 + z^2 + 1).$$

   Nghiệm của đa thức $z^4 + z^2 + 1$ có thể tính bằng cách đặt $t = z^2$ rồi giải phương trình bậc hai

$$t^2 + t + 1 = 0.$$

   Ta được $z_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ và $z_{5,6} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ là hai cặp nghiệm liên hợp.
   Chú ý rằng ta cũng có thể tính các nghiệm của phương trình $z^6 - 1 = 0$ bằng cách tìm các căn bậc sáu của 1. Các nghiệm $z_{1,2} = \pm 1,\ z_3,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6$ là các đỉnh của một lục giác đều tâm là số phức 0.

3. Từ ví dụ trên suy ra đa thức với hệ số thực $P(z) = z^6 - 1$ có thể phân tích thành tích các nhân tử bậc nhất và bậc hai hệ số thực

$$P(z) = (z-1)(z+1)\left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\times$$
$$\times\left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}) =$$
$$= (z-1)(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{3, 4, 5\}$. Hãy xác định các tập hợp
$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ C_A(C)$$
$$B \cup C,\ C \cap B,\ C \setminus B,\ A\Delta B.$$

2. Tìm các tập hợp $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ và $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, biết
   (a) $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \le x \le n\}$
   (b) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n}\right\}$
   (c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \dfrac{1}{n}\right\}$
   (d) $A_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$.

3. Biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ tập hợp $A \times B$ với
   (a) $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \le a \le 3\}$, $B = \{b \in \mathbb{R} \mid |b| \le 1\}$
   (b) $A = \{a \in \mathbb{R} \mid |a| \le 5\}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} \mid |b| \le 5\}$.

   Minh họa tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x > y\}$ trên mặt phẳng tọa độ.

4. Với các tập hợp A, B, C bất kì, chứng minh $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ và mô tả hình học đẳng thức đó.

5. Kí hiệu $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ và quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên B
$$(m, n)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow mq = np$$
   Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên B. Xác định các lớp tương đương.

6. Cho $p \in \mathbb{N}^*$ và quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$
$$m\mathcal{R}n \quad \text{khi và chỉ khi} \quad m - n \quad \text{chia hết cho} \quad p \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$
   Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Xác định tập thương. (*Người ta gọi $\mathcal{R}$ là quan hệ đồng dư trong phép chia cho p*).

7. Ánh xạ $f: X \to Y$. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên X được định nghĩa

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \quad (x, x' \in X).$$

   Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên X.
   Áp dụng với ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho dưới đây, hãy xác định các lớp tương đương của $\mathbb{R}$ theo quan hệ tương đương định nghĩa ở trên

   $(a) \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{nếu } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 & \text{nếu } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

   $(b) \quad f(x) = [x]$ (phần nguyên của x)

8. Tập A gồm n phần tử, tập B gồm m phần tử

   (a) Tính số phần tử của $A \times B$

   (b) Có bao nhiêu ánh xạ từ A vào B?

   (c) Nếu $n \leq m$, có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?

9. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$

   (a) Tìm tất cả các song ánh từ A lên A.

   (b) Giả sử $f, g: A \to A$ được định nghĩa

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1,\ f(4) = 4$$

$$g(1) = 3,\ g(2) = 4,\ g(3) = 2,\ g(4) = 1.$$

   Hãy tìm các ánh xạ $f \circ g,\ g \circ f,\ f^{-1}$.

10. Cho các ánh xạ $f: X \to Y,\ g: Y \to Z,\ h: g \circ f$. Chứng minh

    (a) h là đơn ánh thì f là đơn ánh.

    (b) h là toàn ánh thì g là toàn ánh.

11. Cho ánh xạ $f: X \to Y$. Chứng minh

(a) Nếu $A \subset X$ thì $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(b) Nếu $B \subset f(X)$ thì $f(f^{-1}(B)) = B$.

12* Cho 2 ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 + 1$ và $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = z^4 + 1$, trong đó $\mathbb{R}$ là tập các số thực, $\mathbb{C}$ là tập các số phức. Chứng minh rằng f không là toàn ánh, g là toàn ánh.

13* Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2x^3 + y, 5x^3 + 3y)$. Chứng minh rằng f là song ánh và tìm f^{-1}.

14* Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2 + 2, 4x_1 + 3x_2 - 3)$ là song ánh trên $\mathbb{R}^2$ và tìm ánh xạ ngược f^{-1}.

15. Chứng minh rằng các tập hợp sau là các tập đếm được:

(a) Tập tất cả các số nguyên chẵn (lẻ).

(b) Tập tất cả các số hữu tỉ lớn hơn 2 và nhỏ hơn 3, $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 3\}$.

(c) Tập tất cả các số nguyên tố.

*16. Chứng minh rằng các tập hợp sau có cùng lực lượng

$$\mathbb{R},\ \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\},\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},\quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$$

17. Viết các số phức sau dưới dạng đại số:

(a) $(1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ (b) $\dfrac{5 + 6i}{3 + 2i} + \dfrac{4 + 2i}{i}$

(c) $\dfrac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}},\ n \in \mathbb{N}^*$ (d) $\dfrac{1 + i\text{tg}\alpha}{1 - i\text{tg}\alpha}$

18. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$-1\ ;\ -i\ ;\ 1 + i\ ;\ -1 + i\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3} + i.$$

19* Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{2 + i\sqrt{12}}{i\sqrt{3} - 1}\right)^7$

20. Mô tả hình học các tập hợp sau trong mặt phẳng phức:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 2\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z+2| \leq 2\}$ (f) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}$.

21. Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{C}$ ta luôn có

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

22. Tìm tập hợp các điểm z trong mặt phẳng phức thoả mãn điều kiện

$$|z| = 2|z-i|.$$

23. Tìm căn bậc 6 của các số phức sau

(a) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ (b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ (c) $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

24. Sử dụng công thức Moivre hãy tính

(a) $(1+i)^{20}$ (b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$ (c) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{30}}$.

25. Giải các phương trình sau trên trường số phức

(a) $z^6 + 1 = 0$.

(b) $z^8 - 15z^4 - 16 = 0$.

(c) $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8 = 0$ biết phương trình có một nghiệm $z = 1 + i$.

26. Giải phương trình trên trường số phức

(a) $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$

(b) $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$, biết phương trình có 1 nghiệm thuần ảo.

(c) $2z + 6\overline{z} = 3 + 2i$

(d) $\overline{z^7} = \dfrac{1}{z^3}$

*(e) Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$ đều là các số thực.

27* (a) Tìm các số phức z thỏa mãn phương trình $z^4 + z^3 + 9z^2 - 8z + 10 = 0$, biết phương trình có 1 nghiệm $z = -1 + 3i$.
(b) Tìm tất cả các đa thức (hệ số phức), sao cho đa thức đó là đơn ánh từ tập các số phức $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$.

28. Giải hệ phương trình sau với $x, y, z \in \mathbb{C}$ là các ẩn

$$\begin{cases} xy = z \\ yz = x \\ zx = y. \end{cases}$$

29. Giả sử $p \in \mathbb{Z}$ là số nguyên và ω là một căn bậc n của 1. Hãy tính tổng

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$$

*30. Các số phức $a, b, c \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $\overline{a}a = \overline{b}b = \overline{c}c = 1$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 = b^3 = c^3$.

31. Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 2z^4 + 1$. Tính $f^{-1}(\sqrt{3}\,i)$.

32. Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{z - 2i}{iz - 4}$. Tìm tập các số phức z thỏa mãn

(a) $|f(z)| = 1$ (b) $f(z) \in \mathbb{R}$ (c) $f(z) \in i\mathbb{R}$.
($i\mathbb{R}$ là tập các số phức thuần ảo.)

*33. Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{z + i\overline{z}}{1 + i\lambda}$ trong đó λ là tham số thực dương.

(a) f có là song ánh không?
(b) Tìm các số phức z sao cho $f(z) = z$.
(c) Với $\lambda = 1$, chứng tỏ rằng ảnh của một đường tròn qua ánh xạ f là một đoạn thẳng.

34* Xác định tập hợp các số phức $z \in \mathbb{C}$ sao cho $\dfrac{z}{z+2i}$ là số thuần ảo. Vẽ đường cong biểu diễn tập đó trên mặt phẳng phức.

35* Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{1}{z},\ \mathbb{C}$ là tập các số phức.
(a) Kí hiệu $A = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức. Xác định tập ảnh $f(A)$, biểu diễn hình học tập ảnh đó.
(b) Gọi B là tập các số phức khác 0 thuộc đường tròn tâm i bán kính $R = 1$. Chứng minh rằng $f(B)$ là đường thẳng, biểu diễn hình học tập ảnh đó trong mặt phẳng phức.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. $C_A(C) = A \setminus C = \{1, 2, 6\},\ A\Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

2. (a) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{Z}$ và $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{-1,\ 0,\ 1\}$.
(b) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = [-1, 1]$ và $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.
(c) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = (0, 1]$ và $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.
(d) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = (-1, 1)$ và $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.

3. (a) Hình chữ nhật.
(b) Hình vuông tâm $O(0, 0)$.
(c) Tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x > y\}$ gồm các điểm nằm dưới đường thẳng $y = x$ mà tọa độ các điểm đó là các số nguyên.

4. Hợp của 2 hình chữ nhật có chung một cạnh cũng là hình chữ nhật.

5. $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên B và mỗi lớp tương đương tương ứng một-một với một số hữu tỉ trong $\mathbb{Q}$. Chẳng hạn ứng với số hữu tỉ $p = \frac{3}{2}$ là lớp $\overline{p} = \{..., (-3, -2),\ (3, 2),\ (6, 4), (9, 6), ...\}$. Các lớp tương đương $\overline{p}$ tạo thành một phân hoạch của tập B.

6. Xem ví dụ 1.2.7.

7. Xem phần 2. của ví dụ 1.2.7.

   (a) Lớp tương đương chứa x, $\overline{x} = \begin{cases} \{x + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{nếu} \quad \operatorname{tg} x \neq 0 \\ \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{nếu} \quad \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$

   (b) $\overline{x} = \{[x] + t \mid t \in [0, 1)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \leqslant x < [x] + 1\}$.

8. (a) $m \cdot n$ (b) m^n (c) $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

9. (a) Mỗi song ánh từ A lên A tương ứng với một hoán vị các phần tử của A. Do vậy có $4! = 24$ song ánh từ A lên A.

   (b) $f \circ g(1) = 1,\ f \circ g(2) = 4,\ f \circ g(3) = 3,\ f \circ g(4) = 2.$
   $g \circ f(1) = 4,\ g \circ f(2) = 2,\ g \circ f(3) = 3,\ g \circ f(4) = 1$
   $f^{-1}(1) = 3,\ f^{-1}(2) = 1,\ f^{-1}(3) = 2,\ f^{-1}(4) = 4.$

10. Chứng minh như cách chứng minh định lí 1.2.1.

11. Chứng minh như chứng minh các tính chất của ánh xạ.

12. $g(z) = z^4 + 1$ là toàn ánh vì phương trình $g(z) = \alpha$ hay $z^4 + 1 = \alpha$ có nghiệm với mọi $\alpha \in \mathbb{C}$.

13. f là đơn ánh và toàn ánh vì hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y = u \\ 5x^3 + 3y = v \end{cases}$ luôn có nghiệm duy nhất $(x = \sqrt[3]{3u - v}, y = -5u + 2v)$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}$. Suy ra $f^{-1}(u, v) = (\sqrt[3]{3u - v}, -5u + 2v)$.

14. $f^{-1}(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2 - 12, -4x_1 + 3x_2 + 17)$.

15. Đây là hệ quả của các định lí 1.3.1 và định lí 1.3.4.

16. Dễ dàng chứng minh tập $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ có cùng lực lượng với $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và A có cùng lực lượng với $\mathbb{R}$ do hàm số $\operatorname{tg} x$ là song ánh từ A lên $\mathbb{R}$.
    Tập $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ có cùng lực lượng với $\mathbb{R}$ bởi ánh xạ $f : \mathbb{R} \to B,\ f(x) = 1 + 2^x$ là song ánh.

    Cũng có thể sử dụng định lí 1.3.3 để chứng minh các tập hợp sau có cùng lực lượng

$$\mathbb{R},\ \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\},\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},\quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}.$$

17. (a) 65 (b) $\frac{53-44i}{13}$ (c) $-2i^{n+1}$ (d) $\cos 2\alpha - 2i\text{tg}\,\alpha$.

18. $-1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$; $\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

19. $-2^6(\sqrt{3}+i)$

20. (e) Phần bên trong hình tròn tâm là -2 bán kính bằng 2 và bên ngoài hình tròn tâm là -2 bán kính bằng 1.
(f) Tập các số thực $\mathbb{R}$.

21. Tổng bình phương 2 đường chéo bằng tổng bình phương 4 cạnh hình bình hành.

22. Đường tròn đường kính là đoạn thẳng nối 2 số phức $2i$ và $\frac{2i}{3}$.

23. Đưa số phức về dạng lượng giác rồi tìm các căn bậc 6 của chúng.

24. (a) 4^5 (b) $-2^9 \cdot 4^3 i$ (c) $-2^5 + i$.

25. (a) Các căn bậc 6 của -1.
(b) Các căn bậc 4 của -1: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ và $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ và các căn bậc 4 của $16:$ $z_{5,6} = \pm 2i,\ z_{7,8} = \pm 2$.
(c) $z_{1,2} = 1 \pm i,\ z_{3,4} = \pm 2i$

26. (a) $z_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$
(b) $z_1 = i,\ z_{3,4} = \frac{-1+i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-8-2i}$
(c) $z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}i$
(d) $z_{1,2} = \pm 1,\ z_{3,4} = \pm i$
(e) Nghiệm của phương trình có tính chất $|z-i| = |z+i|$, suy ra nó là số thực.

27. (a) $z_1 = -1-3i, \quad z_2 = -1+3i, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}), \quad z_4 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$
(b) Các đa thức bậc nhất $az+b$ $(a \neq 0)$ là các đơn ánh từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$.

28. $x_1 = 1, y_1 = z_1 = -1, \quad y_2 = 1, x_2 = z_2 = -1, \quad z_3 = 1, x_3 = y_3 = -1.$

29. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \omega^p \neq 1 \\ n & \text{nếu } \omega^p = 1. \end{cases}$

30. a, b, c là các căn bậc 3 của số phức có môđun bằng 1.

31. Tập $f^{-1}(\sqrt{3}\,i)$ là các nghiệm của phương trình $2z^4 + 1 = \sqrt{3}\,i$. Do vậy chúng là các căn bậc 4 của $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

32. (a) Đường thẳng song song với trục thực đi qua điểm $-i$.
    (b) Đường tròn tâm $-i$ bán kính bằng 3.
    (c) Trục ảo.

33. (a) f không là toàn ánh.
    (b) $f(z) = z$, trường hợp λ khác 1, khi và chỉ khi $z = 0$ và trường hợp $\lambda = 1$, khi và chỉ khi $z \in \mathbb{R}$.
    (c) Dựa vào nhận xét: $f(x + yi) = x + y$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

34. Đường tròn $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ trừ điểm $-2i$.

35. (a) $f(A) = A$
    (b) $f(B)$ là đường thẳng song song với trục thực đi qua $-\frac{i}{2}$.

Chương 2

Ma trận định thức và hệ phương trình tuyến tính

2.1 Ma trận và các phép toán trên ma trận

2.1.1 Định nghĩa và các khái niệm

Định nghĩa 2.1.1 *Ma trận kiểu $m \times n$ (hoặc cỡ $m \times n$) là một bảng hình chữ nhật gồm $m \cdot n$ số được viết thành m hàng, n cột như sau*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Để ngắn gọn ta kí hiệu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hoặc $A = (a_{ij})$.

Ta thường kí hiệu ma trận là các chữ in hoa $A, B, C, ...$, các phần tử a_{ij} của ma trận $A = (a_{ij})$ có hai chỉ số i và j: chỉ số đầu i chỉ số thứ tự hàng của phần tử đó, chỉ số thứ hai j chỉ số thứ tự cột của phần tử đó.

Ví dụ 2.1.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -10 \end{pmatrix}$ là ma trận kiểu 2×3.

Phần tử nằm ở hàng thứ hai, cột thứ ba của ma trận A

$$a_{23} = -10.$$

Ma trận không là ma trận có các phần tử đều bằng không, kí hiệu là $O_{m\times n}$.

Ma trận bằng nhau: Hai ma trận cùng kiểu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ được gọi là bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, viết là $A = B$. Chẳng hạn, với hai ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ thì

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \\ d = -2 \end{cases}$$

Các dạng đặc biệt của ma trận

Ma trận kiểu $m \times 1$ có dạng $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận cột* (m thành phần).

Ma trận kiểu $1 \times n$ có dạng $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận hàng.*

Nếu $m = n$ thì A gọi là *ma trận vuông* cấp n và đường chéo nối các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là *đường chéo chính.*

Ma trận có các phần tử nằm phía dưới (tương ứng nằm phía trên) đường chéo chính được gọi là *ma trận tam giác dưới* (tương ứng *tam giác trên*).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{là ma trận tam giác trên}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{là ma trận tam giác dưới}$$

Ma trận chéo cấp n là ma trận vuông cấp n mà các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0, tức là ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận chéo cấp n mà các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 gọi là *ma trận đơn vị* cấp n, và kí hiệu là I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Các phép toán trên ma trận

Phép cộng hai ma trận cùng kiểu

Tổng của hai ma trận cùng kiểu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ là một ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$, kí hiệu $C = A + B$, trong đó các phần tử

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Dễ dàng kiểm tra các tính chất sau

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$A + O = A$$

Ví dụ 2.1.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Phép nhân một số với ma trận

Nhân một số λ với ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$ cùng kiểu với A, kí hiệu λA, trong đó các phần tử

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n.$$

Cho A, B là hai ma trận cùng kiểu, α, β là hai số bất kì, ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$$
$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

Chú ý rằng *hiệu của hai ma trận cùng kiểu* A và B, kí hiệu $A - B$, được định nghĩa là tổng của ma trận A với ma trận $(-1)B$

$$A - B = A + (-1)B.$$

Ví dụ 2.1.3

$$a\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0 & -2a\\ 3a & 4a & 5a\end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Phép chuyển vị ma trận

Chuyển vị của ma trận A kiểu $m \times n$ là ma trận kiểu $n \times m$, kí hiệu là A^T nhận được từ A bằng cách đổi hàng thành cột (cụ thể hàng thứ i của A thành cột thứ i của A^T với mọi $i = 1, 2, ..., n$).

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad \text{thì} \quad A^T = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Ma trận vuông A gọi là đối xứng nếu $A^T = A$.

Ví dụ 2.1.4

1. $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ thì $A^T = \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ là một ma trận đối xứng vì $B^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} = B$.

Ta có các hệ thức sau đối với phép chuyển vị ma trận

$$\left(A^T\right)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Phép nhân ma trận

Tích của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ với ma trận $B = (b_{ij})_{n\times p}$ là ma trận $C = (c_{ij})$ kiểu $m \times p$, kí hiệu $C = AB$, trong đó

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Đặc biệt tích của ma trận hàng $1\times n$ với ma trận cột $n\times 1$ là ma trận kiểu 1×1, ta xem ma trận kiểu 1×1 như là một số

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Chú ý rằng phép nhân 2 ma trận chỉ được xác định khi số cột của ma trận đầu bằng số hàng của ma trận thứ hai. *Phần tử nằm ở hàng i, cột j của ma trận tích được xác định bằng phép nhân (vô hướng) hàng thứ i của ma trận thứ nhất với cột thứ j của ma trận thứ hai.*

Ví dụ 2.1.5

Tích của hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ bằng

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 + 3\cdot 5 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + 6\cdot 5 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 6\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 35 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tính chất các phép toán trên ma trận

Với A, B, C là các ma trận có kiểu phù hợp, các phép toán giữa các ma trận trình bày ở trên có các tính chất sau

1. Tính kết hợp của phép nhân ma trận $(AB)C = A(BC)$

2. Tính phân phối phải với phép cộng ma trận $A(B+C) = AB + AC$

3. Tính phân phối trái với phép cộng ma trận $(B+C)A = BA + CA$

4. Tính kết hợp với phép nhân với một số $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha)B$

5. Tích của ma trận A với ma trận không

$$A \cdot O = O \text{ và } O \cdot A = O.$$

   Lưu ý rằng các ma trận O trong các đẳng thức vừa thiết lập phải có các kiểu phù hợp với phép nhân.

6. Tích của ma trận A với ma trận đơn vị $I \cdot A = A = A \cdot I$.

7. Mối quan hệ giữa phép nhân và phép chuyển vị

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh các tính chất $1, 2$ và 7, các tính chất còn lại đơn giản hơn, việc chứng minh chúng dành cho bạn đọc.

1) Giả sử ma trận A, B, C có các kiểu sau

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times p}, C = (c_{ij})_{p\times q}.$$

Khi đó ma trận $(AB)C$ có kiểu $m \times q$ và ma trận $A(BC)$ cũng cùng kiểu $m \times q$.
Gọi x_{il} là phần tử thuộc hàng i cột l của ma trận $(AB)C$, y_{il} là phần tử tương ứng của ma trận $A(BC)$

$$\begin{aligned} x_{il} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right) = y_{il} \end{aligned}$$

Đẳng thức trên đúng với mọi $i = \overline{1,m}$ và mọi $l = \overline{1,q}$.
Vậy $(AB)C = A(BC)$.

2) Đặt $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times n}, C = (c_{ij})_{p\times n}$, ta có

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(b_{kj}+c_{kj}\right)\right)_{m\times n} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n} + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right)_{m\times n} \\
&= AB + AC.
\end{aligned}$$

7) Xét chuyển vị của tích 2 ma trận $A = (a_{ij})_{m\times p}$ và $B = (b_{ij})_{p\times n}$

$$\begin{aligned}
(AB)^T &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)^T = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk}\right) = (b_{ik})^T\,(a_{kj})^T = B^TA^T.
\end{aligned}$$

Lưu ý rằng phép nhân ma trận nói chung không có tính giao hoán, nói cách khác có thể xảy ra khả năng $AB \neq BA$.
Chẳng hạn, với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 13 & 5 \end{pmatrix} = BA$$

Tích của hai ma trận khác không có thể là ma trận không, chẳng hạn

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng ta nói đến khái niệm về ma trận khối (còn gọi là ma trận ô). Ta có thể chia ma trận $A = (a_{ij})$ thành các khối bởi các đường thẳng đứng và các đường nằm ngang. Mỗi một khối nhỏ được tạo thành là các ma trận con của ma trận A, ta có thể coi ma trận A gồm các khối nhỏ tạo thành đó. Hiển nhiên các khối trong cùng một hàng có số hàng bằng nhau và các khối trong cùng một cột có số cột cũng bằng nhau.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{14} & | & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{24} & | & a_{25} & a_{26} \\ -- & -- & -- & | & -- & | & -- & -- \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{34} & | & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & | & a_{44} & | & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & | & a_{54} & | & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

Như vậy ma trận A gồm các khối A_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Các phép toán trên ma trận khối được tính toán như trên các ma trận thông thường (các phần tử là các khối), tất nhiên các khối phải được phân chia sao cho phù hợp về kiểu (cỡ) dành cho các phép toán tương ứng. Chẳng hạn trong ví dụ sau số cột của B_{12} phải bằng số hàng của A_{21}, A_{22}, A_{23}

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} & B_{11}A_{13} + B_{12}A_{23} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} & B_{21}A_{13} + B_{22}A_{23} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2.1.6

Xét tích của hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Nếu xem ma trận A và B là các ma trận khối

$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$ với $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ là các ma trận vuông có tích $A_2B_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Khi đó các khối là các ma trận phù hợp với phép nhân suy ra

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Định thức

2.2.1 Khái niệm về định thức

Cho một ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kí hiệu M_{ij} là ma trận cấp $n-1$ nhận được từ A bằng cách xoá khỏi A hàng thứ i và cột thứ j. Ta gọi M_{ij} là ma trận con tương ứng với phần tử a_{ij} của A.

Ví dụ 2.2.1

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ta có các ma trận con của A

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$
$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$
$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 2.2.1 *Định thức của ma trận A là một số, kí hiệu*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được xác định bằng quy nạp theo n (cấp của ma trận A) như sau:

1. *Với* $n = 1, \det A = a_{11}$

2. *Với* $n = 2$*, ma trận* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*, định thức của A*

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. *Với* $n = 3$*, ma trận* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$*, định thức của A*

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\det M_{11} - a_{21}\det M_{12} + a_{31}\det M_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

4. *Trường hợp tổng quát định thức cấp n được tính thông qua các định thức cấp* $n-1$

$$\det A = a_{11}\det M_{11} - a_{21}\det M_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det M_{n1}$$

hoặc viết chi tiết hơn

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Cách xác định định thức như vậy còn được gọi là khai triển định thức theo cột thứ nhất.

Ví dụ 2.2.2

1. Tính các định thức cấp 2 và cấp 3 dưới đây

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 38 - 24 + 24 = 38.$$

2. Tính định thức ma trận tam giác trên

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Áp dụng định nghĩa, thực chất là khai triển định thức theo cột thứ nhất

$$A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \dots\dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Đặc biệt định thức của ma trận chéo bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

2.2.2 Các tính chất của định thức

Các tính chất được trình bày trong mục này rất quan trọng cho việc tính định thức. Trước hết ta phát biểu và chứng minh định lí sau

Định lí 2.2.1 *Định thức của ma trận vuông bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó*

$$\det A = \det A^T.$$

Nhận xét rằng định lí khẳng định, định thức của ma trận A còn có thể khai triển theo hàng thứ nhất

$$\det A = \det A^T = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\Delta_{1n}.$$

Trong mục này ta đưa vào kí hiệu $\Delta_{ij} = \det M_{ij}$ là định thức của ma trận con tương ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A.

Chứng minh. Ta chứng minh định lí bằng quy nạp, hiển nhiên định lí đúng với $n = 1, n = 2$. Giả sử định lí đúng với $n < k$, A là ma trận vuông cấp k. Ta có

$$\det A^T = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}a_{1i}\Delta_{1i} =$$

$$= a_{11}\Delta_{11} + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{i+1}a_{1i}\left(\sum_{m=2}^{k}(-1)^{1+m-1}a_{m1}\Delta_{1i}^{m1}\right)$$

Biểu thức trong ngoặc là khai triển định thức Δ_{1i} theo cột thứ nhất, kí hiệu Δ_{1i}^{m1} là định thức cấp $k-2$ nhận được từ A bằng cách xoá khỏi A hàng thứ nhất và cột thứ i cũng như xoá hàng thứ m, cột thứ nhất. Hoán vị các số hạng của tổng trên, chú ý $\Delta_{1i}^{m1} = \Delta_{m1}^{1i}$

$$\det A^T = a_{11}\Delta_{11} + \sum_{m=2}^{k}(-1)^{m+1}a_{m1}\left(\sum_{i=2}^{k}(-1)^{1+i-1}a_{1i}\Delta_{m1}^{1i}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}a_{m1}\Delta_{m1} = \det A. \quad \text{(đ.p.c.m.)} \quad \blacksquare$$

Do định lí trên, các khẳng định sau liên quan đến định thức của ma trận nếu đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại.

Định lí 2.2.2 *Định thức sẽ đổi dấu nếu ta đổi chỗ 2 cột (hoặc 2 hàng) cho nhau.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lí bằng quy nạp, hiển nhiên định lí đúng với $n = 2$. Giả sử định lí đúng với $n < k$, A là ma trận vuông cấp k.

1. Nếu ta đổi chỗ 2 cột thứ i và thứ j $(i, j > 1)$ cho nhau, kí hiệu A và A^0 là ma trận trước và sau khi đổi chỗ 2 cột. Khai triển A, A^0 theo cột thứ nhất

$$\det A = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{1+m} a_{m1} \Delta_{m1}, \quad \det A^0 = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{1+m} a_{m1} \Delta^0_{m1}$$

   Theo giả thiết quy nạp, các định thức Δ_{m1} và Δ^0_{m1} có cấp bằng $k - 1 < k$ nên $\Delta_{m1} = -\Delta^0_{m1}$, suy ra $\det A = -\det A^0$.

2. Nếu ta đổi chỗ 2 cột thứ nhất và thứ hai cho nhau, kí hiệu A và A^1 là ma trận trước và sau khi đổi chỗ 2 cột đó. Khai triển A, A^1 theo hàng thứ nhất

$$\det A = a_{11}\Delta_{1m} - a_{12}\Delta_{12} + \sum_{m=3}^{k} (-1)^{1+m} a_{1m} \Delta_{1m},$$

$$\det A^1 = a_{12}\Delta_{12} - a_{11}\Delta_{1m} + \sum_{m=3}^{k} (-1)^{1+m} a_{1m} \Delta^1_{1m},$$

   Cũng sử dụng giả thiết quy nạp, suy ra $\det A = -\det A^1$.

Nhận xét rằng để đổi chỗ cột thứ nhất với một cột bất kì khác, ta có thể liên tiếp đổi chỗ 2 cột cạnh nhau cho nhau (sau một số lẻ bước), kết hợp với các bước nêu trên dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. ■

Định lí 2.2.3 *A và B là hai ma trận vuông cùng cấp có các hàng (cột) như nhau, trừ hàng (cột) thứ i của 2 ma trận có thể khác nhau*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & \dots & . \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó

1. $$\det A + \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 & \dots & x_n + y_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha x_1 & \alpha x_2 & \alpha x_3 & \dots & \alpha x_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Áp dụng định lí 2.2.2, bằng cách đổi chỗ hàng thứ nhất và hàng thứ i cho nhau, ta chỉ cần chứng minh định lí đúng với hàng thứ nhất

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 & \dots & x_n + y_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

và

$$\begin{vmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 & \alpha x_3 & \dots & \alpha x_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cả 2 đẳng thức được suy ra bằng cách khai triển chúng theo hàng thứ nhất. ■

Từ các định lí trên, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau:

1. Nếu ma trận có 1 hàng (hoặc cột) gồm toàn các số 0 thì thì định thức của ma trận bằng 0.

2. Định thức có hai hàng giống nhau thì bằng 0.

3. Nếu ma trận có 2 hàng (cột) tỉ lệ thì định thức của ma trận bằng 0.

4. Định thức không thay đổi nếu cộng thêm vào một hàng (cột) bội của hàng (cột) khác.

Người ta thường xuyên sử dụng các tính chất này để đưa định thức về các dạng đơn giản hơn có thể tính trực tiếp theo định nghĩa.

Ví dụ 2.2.3

Tính định thức

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Để tính B, ta lần lượt cộng hàng thứ nhất vào các hàng hai, hàng ba,..., hàng thứ n. Khi đó định thức đã cho không thay đổi và bằng định thức ma trận tam giác trên

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

Định nghĩa 2.2.2 *Với ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ta gọi $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ *là phần phụ đại số tương ứng với phần tử* a_{ij} *của ma trận* A*.*

Ví dụ 2.2.4

Xét ma trận đã cho trong ví dụ 2.2.1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Các phần phụ đại số của ma trận A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -14, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Liên quan tới các phần phụ đại số ta có định lí sau

Định lí 2.2.4 *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó định thức của A có thể khai triển theo hàng bất kì, chính xác hơn

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \tag{2.1}$$

Chứng minh. Trường hợp $i = k$ ta đổi chỗ hàng i cho hàng $i-1$, rồi đổi tiếp cho hàng $i-2, i-3, \dots, 1$. Sau $i-1$ lần đổi dấu, hàng i của định thức chuyển lên hàng thứ nhất. Do đó,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i-1}\left(a_{i1}\Delta_{i1} - a_{i2}\Delta_{i2} + \dots + (-1)^{n+1}a_{in}\Delta_{in}\right) \\ &= (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\Delta_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \end{aligned}$$

Ta nói rằng định thức được khai triển theo hàng thứ i.
Trường hợp $i \neq k$ thì $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$ là định thức có hàng i và hàng k giống nhau suy ra định thức bằng 0. Định lí đã được chứng minh. ■

Nhận xét rằng do định thức của ma trận bất kì bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó, suy ra định lí vẫn đúng nếu ta khai triển định thức theo cột bất kì. Chính xác hơn

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } j = k \\ 0 & \text{nếu } j \neq k \end{cases} \tag{2.2}$$

Đưa vào kí hiệu A^C là ma trận chuyển vị của ma trận các phần phụ đại số A_{ij}

$$A^C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

khi đó công thức (2.1) trong định lí cũng như công thức (2.2) có thể viết dưới dạng ma trận

$$AA^C = A^C A = (\det A)I_n.$$

Ta thừa nhận định lí sau về định thức của tích 2 ma trận vuông cùng kiểu

Định lí 2.2.5 *Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Ví dụ 2.2.5

1. Cho 2 ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$. Khi đó tích của chúng

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 16 & -24 \end{pmatrix}$$

   Dễ dàng tính được $\det A = 7, \det B = -8, \det AB = -56$. Tức là $\det AB = \det A \cdot \det B$.

2. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ . & . & . & \dots & . \\ a & a & a & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

   Cộng vào hàng thứ i (với mọi $i = 2, 3, ..., n$) (-1) lần hàng thứ nhất, ta có kết quả

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ . & . & . & \dots & . \\ a & a & a & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ 0 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a \end{vmatrix}$$

   Định thức cuối là định thức của ma trận tam giác trên, theo ví dụ 2.2.2, giá trị của nó bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính

$$D = (-1)^{n-1}a^n.$$

3. Tính định thức Vandermonde

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bắt đầu từ hàng cuối, cộng vào hàng thứ n bội lần, $(-x_1)$ lần hàng thứ $n-1$. Như vậy giá trị của định thức không đổi. Bước tiếp theo, cộng vào hàng thứ $n-1$ bội lần, $(-x_1)$ lần hàng thứ $n-2$... Cứ thế tiếp tục cộng vào hàng thứ i, $(-x_1)$ lần hàng $i-1$. Bước cuối cùng cộng vào hàng thứ 2, $(-x_1)$ lần hàng thứ nhất.

$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_n^2 - x_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) D(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Định thức ở hàng cuối $D(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ cũng là định thức Vandermonde cấp $n-1$. Bằng quy nạp ta có

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

2.3 Ma trận nghịch đảo và hạng của ma trận

Định nghĩa 2.3.1 *Một ma trận vuông A cấp n được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I$ (I là ma trận vuông cấp n). Khi đó, B được gọi là ma trận nghịch đảo của A, kí hiệu là A^{-1}.*

Ví dụ 2.3.1

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, xét ma trận $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$. Ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} = I \quad \text{và} \quad BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = I.$$

Vậy A khả nghịch và $A^{-1} = B$.
Nhận xét

1. Ma trận nghịch đảo của A nếu có là duy nhất. Thật vậy, giả sử B và C đều là ma trận nghịch đảo của A, ta có

$$BA = AB = I \quad \text{và} \quad CA = AC = I.$$

   Suy ra $C(AB) = CI = C$, hơn nữa $C(AB) = (CA)B = IB = B$. Vậy $B = C$.

2. A khả nghịch thì A^{-1} cũng khả nghịch và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3. Nếu A, B khả nghịch và cùng cấp thì AB cũng khả nghịch đồng thời $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I. \end{aligned}$$

   Suy ra điều phải chứng minh.

4. A khả nghịch, $k \neq 0$ thì kA cũng khả nghịch và $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$.

Ta nhận thấy rằng nếu ma trận A khả nghịch thì $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Theo định lí 2.2.5

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1 \;\Rightarrow\; \det A \neq 0.$$

Vậy $\det A \neq 0$ là điều kiện cần để A khả nghịch. Ta có định lý sau

Định lí 2.3.1 *Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ khả nghịch khi và chỉ khi* $\det A \neq 0$. *Khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử $a_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Một ma trận có định thức khác không còn được gọi là *ma trận không suy biến.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\det A \neq 0$ theo công thức (2.1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases}$$

Ta có

$$A(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I$$

Suy ra $A\left(\dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T\right) = I$. Tương tự, theo công thức (2.2) ta có

$$(A_{ij})^T A = \det A \cdot I \quad \text{hay} \quad \left(\frac{1}{\det A}(A_{ij})^T\right) A = I.$$

Vậy A khả nghịch và
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T. \quad \blacksquare$$
Chú ý rằng với kí hiệu A^C là ma trận chuyển vị của ma trận các phần phụ đại số A_{ij}, do hệ thức $AA^C = A^C A = (\det A)I$ ta có thể viết
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^C.$$

Từ định lí trên ta suy ra điều kiện để ma trận A khả nghịch là tồn tại ma trận vuông B sao cho $AB = I$. (Từ điều kiện này suy ra $BA = I$).

Ví dụ 2.3.2

1. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Ta có
$$\det A = 1,\ A_{11} = \cos\varphi,\ A_{12} = \sin\varphi,\ A_{21} = -\sin\varphi,\ A_{22} = \cos\varphi.$$
Vậy
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ta có $\det A = -21 \neq 0$. Các phần phụ đại số
$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -15$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -9,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4. \qquad \text{Vậy ma trận nghịch đảo của } A$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 10 & -9 & -2 \\ -15 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

Để nghiên cứu các phần còn lại của chương này ta cần một khái niệm gọi là *phép biến đổi sơ cấp ma trận*

Định nghĩa 2.3.2 *Một trong các phép biến đổi sau được gọi là phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận* $A_{m\times n}$

1. *Đổi chỗ 2 hàng của ma trận A.*
2. *Nhân một hàng với một số khác* 0.
3. *Cộng vào một hàng bội của hàng khác.*

Phép biến đổi sơ cấp về cột của ma trận được định nghĩa tương tự. Khi nói tới phép biến đổi sơ cấp một ma trận tức là nói đến phép biến đổi sơ cấp về hàng hoặc về cột của ma trận đó.

Định nghĩa 2.3.3 *Ma trận* $A = (a_{ij})$ *kiểu* $m \times n$ *có dạng như sau được gọi là ma trận dạng hình thang*

1. *Nếu hàng thứ i của A gồm toàn các số* 0*, thì các hàng sau hàng i cũng gồm toàn các số* 0.
2. *Phần tử khác* 0 *đầu tiên của mỗi hàng (tính từ trái sang) luôn bằng* 1*, giả sử đó là phần tử thuộc hàng* i_0*, cột* j_0 ($a_{i_0k} = 0$ *với* $k < j_0$ *và* $a_{i_0j_0} = 1$)*, khi đó mọi phần tử của* j_0 *cột đầu tiên ở các hàng sau hàng thứ* i_0 *đều bằng* 0

$$a_{ij} = 0 \quad \text{với mọi} \quad i > i_0, j \leq j_0$$

Ma trận dạng hình thang được minh hoạ như sau, nó rất quan trọng trong việc giải hệ phương trình tuyến tính và được nhắc tới trong mục tiếp theo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có định lí sau

Định lí 2.3.2 *Bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng, một ma trận bất kì luôn có thể đưa về ma trận dạng hình thang và một ma trận vuông không suy biến luôn có thể đưa về ma trận đơn vị.*

Việc chứng minh định lí dành cho bạn đọc, các bước tiến hành để đưa một ma trận bất kì về ma trận dạng hình thang tương tự như các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận được xét trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.3.3

1. Đưa ma trận sau về dạng hình thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & -4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cộng vào hàng thứ hai (-2) lần hàng thứ nhất cũng như cộng vào hàng thứ ba

(-1) lần hàng thứ nhất.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & -4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3 \to H_3 - H_1]{H_2 \to H_2 - 2H_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chia hàng thứ 2 của ma trận vừa nhận được cho 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2 \to \frac{1}{2}H_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bước tiếp theo, từ ma trận cuối ở trên, lấy hàng thứ 4 trừ đi hàng thứ 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_4 \to H_4 - H_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nhân hàng cuối cùng với -1, ta được ma trận dạng hình thang

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng, hãy đưa ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

về ma trận đơn vị.
Đổi chỗ 2 hàng cho nhau để phần tử đầu tiên của hàng thứ nhất trong ma trận mới bằng 1. Sau đó cộng vào hàng thứ hai (-3) lần hàng thứ nhất

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cộng vào hàng thứ nhất 2 lần hàng thứ hai và sau đó nhân hàng thứ hai với (-1), ta được ma trận đơn vị cấp hai

$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Người ta đã chỉ ra rằng thực chất mỗi phép biến đổi sơ cấp về hàng ma trận A là một phép nhân vào bên trái A ma trận không suy biến (ma trận vuông có định thức khác không).

Do vậy nếu A là ma trận không suy biến, mỗi phép biến đổi sơ cấp về hàng chuyển ma trận A thành một ma trận khác cũng không suy biến. Sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp thích hợp, ma trận A được chuyển thành ma trận đơn vị. Ví dụ thứ hai trình bày ở trên minh họa cho phần cuối của định lí 2.3.2. Định lí sẽ được áp dụng để tính ma trận nghịch đảo của ma trận không suy biến sẽ trình bày trong mục sau.

Định nghĩa 2.3.4 *Hạng của ma trận $A_{m\times n}$ là số tự nhiên, kí hiệu $r(A)$ được xác định như sau*
(i) $r(A) = 0$ nếu A là ma trận không (các phần tử của A đều bằng 0).

(ii) $r(A) = r$ *nếu tồn tại một định thức con khác 0 cấp r của A đồng thời mọi định thức con cấp lớn hơn r đều bằng 0. (Định thức con cấp r của A là định thức của ma trận con cấp r nhận được từ A bằng cách xoá* $m-r$ *hàng và* $n-r$ *cột nào đó của A).*

Người ta thường nói hạng của ma trận là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận đó.

Ví dụ 2.3.4

1. Nếu A là ma trận vuông cấp n có $\det A \neq 0$ (ma trận không suy biến), khi đó $r(A) = n$.

2. Một ma trận bất kì mà các phần tử đều bằng nhau và khác 0, khi đó các định thức con cấp cao hơn 1 đều bằng 0 vì có các hàng giống nhau.

$$M = \begin{pmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{pmatrix} \quad \text{ta thấy} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0, \cdots$$

   Vậy hạng của ma trận đó bằng 1.

3. Cho ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Các định thức con cấp 3 của ma trận A đều bằng 0 (hàng thứ nhất và hàng thứ ba tỉ lệ với nhau)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

   Tồn tại một định thức con cấp 2, chẳng hạn $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ do đó $\mathrm{r}(A) = 2$.

4. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó
   - Nếu $a \neq 0$ thì $\mathrm{r}(A) = 2$.
   - Nếu $a = 0$ thì $\mathrm{r}(A) = 1$.

5. Nhận xét rằng hạng của ma trận dạng hình thang bằng số số hàng khác không của ma trận đó. Chẳng hạn với ma trận dạng hình thang

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(B) = 3.$$

   Thật vậy, mọi định thức con cấp 4 đều bằng không vì hàng thứ tư của A gồm toàn các số không, đồng thời nếu xoá cột thứ 2, thứ 3, thứ 5, thứ 6 và xoá hàng cuối cùng ta được một định thức con cấp 3 khác không

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Các phép biến đổi sơ cấp về hàng (cũng như cột) không làm thay đổi hạng của ma trận. Để chứng minh điều đó, ta coi mỗi hàng của ma trận là một véc tơ, khi đó hạng của ma trận chính là hạng của hệ các véc tơ hàng (xem chương không gian véc tơ). Do vậy một trong các phương pháp tìm *hạng của ma trận là dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận về dạng hình thang, hạng của ma trận chính là số hàng khác không của ma trận dạng hình thang đó*. Do các phép biến đổi sơ cấp về cột cũng không làm thay đổi hạng của ma trận nên ta có thể kết hợp sử dụng chúng, đưa ma trận về dạng đơn giản hơn để tìm hạng.

Ví dụ 2.3.5

1. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3 \to H_3 + H_1]{H_2 \to H_2 - 2H_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[H_3 \to -\frac{1}{5}H_3]{H_2 \to \frac{1}{7}H_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{H_3 \to H_2 + H_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bằng các phép biến đổi sơ cấp A được đưa về ma trận dạng hình thang $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có 2 hàng khác không. Vậy hạng của A, $\mathrm{r}(A) = 2$.

Nhận xét rằng nếu tính hạng của ma trận A dựa theo định nghĩa về hạng của ma trận, ta phải tính 4 định thức con cấp 3 của A, các định thức con đó đều bằng 0. Đồng thời định thức con cấp hai gồm các phần tử nằm ở 2 hàng đầu và 2 cột đầu của A có định thức khác không, $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

2. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ theo tham số λ.

Ta sử dụng các phép biến đổi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{cho nhau}]{\text{Đổi các cột}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 7 & 1 & 2 & 4 \\ 17 & 1 & 4 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{H_3 \to H_3 - 17H_1 \\ H_4 \to H_4 - 3H_1}]{H_2 \to H_2 - 7H_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 0 & -20 & -12 & 4 - 7\lambda \\ 0 & -50 & -30 & 10 - 17\lambda \\ 0 & -5 & -3 & 1 - 3\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{với hàng 2}]{\text{Đổi hàng 4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 0 & -5 & -3 & 1-3\lambda \\ 0 & -50 & -30 & 10-17\lambda \\ 0 & -20 & -12 & 4-7\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_4 \to H_4 - 4H_2]{H_3 \to H_3 - 10H_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 0 & -5 & -3 & 1-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 5\lambda \end{pmatrix}$$

Cộng vào hàng cuối cùng $(-\frac{5}{13})$ lần hàng trước nó ta được

$$\xrightarrow{H_4 \to H_4 - \frac{5}{13}H_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 0 & -5 & -3 & 1-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận cuối cùng này có dạng "gần hình thang" (các phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi hàng chưa bằng 1). Tuy nhiên từ ma trận đó, hiển nhiên ta có thể kết luận

Với $\lambda \neq 0$ ma trận có 3 hàng khác không, suy ra $\mathrm{r}(A) = 3$.

Với $\lambda = 0$ ma trận có 2 hàng khác không, suy ra $\mathrm{r}(A) = 2$.

2.4 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Hệ phương trình đại số tuyến tính là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.3}$$

Kí hiệu A là ma trận các hệ số

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ta gọi A là *ma trận liên kết* của hệ (2.3). Kí hiệu tiếp A_i là ma trận cột (cột thứ i của A), B là cột các hệ số tự do và X là ma trận cột chứa các ẩn cần tìm

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ . \\ . \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ phương trình có thể viết dưới dạng ma trận

$$AX = B \quad \text{hoặc} \quad x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = B.$$

Trường hợp $b_1 = b_2 = \ldots = b_n - 0$ hay cột các hệ số tự do $B = \mathbf{0}$ thì hệ (2.3) được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*.

2.4.1 Hệ phương trình Cramer

Xét hệ n phương trình tuyến tính n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.4}$$

Nếu định thức của ma trận liên kết khác không thì hệ (2.4) được gọi là hệ Cramer. Hệ phương trình Cramer viết dưới dạng ma trận $AX = B$, trong đó A là ma trận vuông cấp n có $\det A \neq 0$, X và B đều là các ma trận cột chứa n phần tử.

Định lí 2.4.1 (Cramer) *Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất*

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A}, x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{\det A},$$

trong đó D_i là định thức nhận được từ $\det A$ *bằng cách thay cột thứ i của A bằng cột các hệ số tự do.*

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & ... & a_{m,i-1} & b_m & a_{m,i+1} & ... & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Chứng minh. Thật vậy, do $\det A \neq 0$ nên ma trận A khả nghịch

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}.$$

(Lưu ý rằng $D_i = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$ do khai triển định thức D_i ở trên theo cột thứ i.) Điều đó chứng tỏ hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất

$$x_i = \frac{D_i}{\det A} \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.4.1

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận liên kết với hệ phương trình

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Do $\det A = 1 \neq 0$ nên hệ đã cho là hệ Cramer. Mặt khác

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Vậy hệ có duy nhất nghiệm

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A} = 7, \quad x_1 = \frac{D_2}{\det A} = -3, \quad x_1 = \frac{D_3}{\det A} = -9.$$

2.4.2 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss

Cho hệ m phương trình, n ẩn $AX = B$, hoặc chi tiết hơn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Gọi $\bar{A} = (A|B)$ là ma trận các hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}.$$

Ta giải hệ phương trình trên bằng cách đưa hệ phương trình về hệ phương trình đơn giản hơn, tương đương với nó bằng một trong số các phép biến đổi sau

- Đổi chỗ hai phương trình cho nhau
- Nhân một số khác không với một phương trình
- Cộng vào phương trình này bội lần một phương trình khác.

Mỗi phép biến đổi trên tương ứng với một phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận mở rộng $\bar{A}$. Như vậy việc giải hệ phương trình tuyến tính đưa về việc thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận mở rộng $\bar{A}$, sau hữu hạn bước, ma trận $\bar{A}$ được đưa về ma trận dạng hình thang. Từ đó ta dễ dàng tính được nghiệm của hệ phương trình.

Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính nêu trên được gọi là *phương pháp Gauss*. Nó rất tiện dụng cho việc giải các hệ nhiều phương trình, nhiều ẩn. Ngay cả với hệ Cramer, mặc dù công thức tính nghiệm được cho dưới dạng khá gọn, tuy nhiên việc áp dụng nó kéo theo khối lượng tính toán không nhỏ. Do vậy trong thực hành người ta thường sử dụng phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.

Ví dụ 2.4.2

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 2 & 2 & 6 & -4 & 8 & | & 12 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng ma trận các hệ số mở rộng, cụ thể cộng vào hàng thứ hai (-2) lần hàng thứ nhất rồi cộng vào hàng thứ ba (-1) lần hàng thứ nhất

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 2 & 2 & 6 & -4 & 8 & | & 12 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Chia hàng thứ hai cho 2, rồi lấy hàng 4 trừ đi hàng 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} H_4 \to H_4 - H_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng cộng hàng thứ ba xuống hàng thứ tư, ta được ma trận dạng hình thang

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_5 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ bằng cách giải từ phương trình cuối ngược lên, ta có nghiệm

$$x_5 = 1, x_4 = C_1, x_3 = -1 + C_1, x_2 = C_2, x_1 = 5 - C_1 - C_2,$$

với C_1, C_2 là các số tùy ý. Người ta cũng viết nghiệm trên dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -10 \end{cases}$$

Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 1 \\ -4 & 2 & 1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 4 & | & 4 \\ 10 & -3 & -6 & | & -10 \end{pmatrix}$$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng trên $\bar{A}$, $H_2 \to H_2 + 2H_1$, sau hữu hạn bước ta được ma trận dạng hình thang

$$\bar{A} \xrightarrow[H_4 \to H_4 - 5H_1]{H_3 \to H_1 + H_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -21 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{cho hàng 2}]{\text{Đổi hàng 4}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & -15 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$H_3 \to H_4 - H_3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & -15 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-21}{2} & \frac{-15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{21}{2}x_3 & = & -\frac{15}{2} \\ x_3 & = & \frac{5}{7} \end{cases}$$

Để giải hệ phương trình này ta thay nghiệm x_3 từ phương trình cuối vào phương trình thứ hai

$$x_2 = \frac{21}{2}x_3 - \frac{15}{2} = \frac{21}{2} \cdot \frac{5}{7} - \frac{15}{2} = 0.$$

Tiếp tục thay các nghiệm x_3, x_2 vào phương trình đầu, ta được nghiệm của hệ phương trình

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{4}{7}, 0, \frac{5}{7}\right).$$

Phương pháp Gauss-Jordan để giải phương trình ma trận

Người ta mở rộng phương pháp Gauss để giải phương trình ma trận. Bài toán đặt ra: tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

$$AX = B,$$

với giả thiết A là ma trận vuông không suy biến cấp m, B là ma trận cho trước kiểu $m \times n$. Nếu coi B như một ma trận ghép n cột $B_1, B_2, ..., B_n$, khi đó bài toán đưa về tìm các ma trận cột $X_1, X_2, ..., X_n$ sao cho

$$A(X_1\ X_2...X_n) = (B_1\ B_2...B_n) \text{ hay } AX_i = B_i \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n.$$

Ma trận X cần tìm chính là ma trận ghép n cột $X_1, X_2, ..., X_n$ lại

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \dots & X_n \end{pmatrix}.$$

Mỗi phương trình $AX_i = B_i$ là một hệ phương trình tuyến tính. Ta giải đồng thời n hệ phương trình tuyến tính

$$AX_i = B_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

bằng cách đưa về hệ tương đương bởi các phép biến đổi sơ cấp về hàng ma trận mở rộng $\bar{A} = (A\,|B)$. Do A không suy biến, theo định lí 2.3.2, bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận, ta có thể đưa ma trận $\bar{A}$ về dạng

$$(I\,|B^*),$$

trong đó I là ma trận đơn vị. Khi đó hệ phương trình $AX = B$ tương đương với hệ phương trình $IX = B^*$ (hay $X = B^*$). Vậy $X = B^*$ là nghiệm của phương trình $AX = B$. Phương pháp nêu trên được gọi là *phương pháp Gauss-Jordan*.

Đặc biệt, áp dụng phương pháp Gauss-Jordan để giải phương trình $AX = I$, nghiệm của nó, $X = A^{-1}$ chính là ma trận nghịch đảo của ma trận A. Sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để tính A^{-1} thuận tiện hơn nhiều so với việc tìm ma trận nghịch đảo bằng cách lập ma trận các phần phụ đại số đã giới thiệu trong mục trước.

Ví dụ 2.4.3

1. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thực chất bài toán là giải 2 hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ta giải đồng thời 2 hệ phương trình bằng cách lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\bar{A} = (A\,|B) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & | & 4 & -6 \\ 1 & 3 & | & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Biến đổi tương đương các hệ đã cho bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận $\bar{A}$.
Cộng vào hàng thứ nhất (-2) lần hàng thứ hai và đổi chỗ 2 hàng cho nhau

$$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 2 & 1 \\ 0 & -1 & | & 0 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 2 & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nếu bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng, ta đưa khối thứ nhất trong ma trận trên về ma trận đơn vị thì các nghiệm của hệ đã cho nằm trong khối ma trận thứ hai.

Nhân hàng thứ hai của ma trận trên với (-3) rồi cộng vào hàng đầu, ta được ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -23 \\ 0 & 1 & | & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vậy ma trận cần tìm

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Cho ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.
Việc tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} đưa về tìm ma trận X thỏa mãn phương trình $AX = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lập ma trận các hệ số mở rộng
$$\bar{A} = (A\,|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng trên $\bar{A}$ để đưa khối ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ trong $\bar{A}$ về ma trận đơn vị
$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$
Vậy ma trận nghịch đảo
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Lập ma trận các hệ số mở rộng
$$\bar{A} = (A\,|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng trên $\bar{A}$

$$\bar{A} \xrightarrow{H_2 \to H_2 - 3H_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_2 \text{ đổi chỗ } H_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_3 \to H_3 - 8H_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & -3 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_3 \to -\frac{1}{15}H_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_3 \to -\frac{1}{15}H_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_3 \to -\frac{1}{15}H_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_2 \to -2H_2 + H_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_1 \to 2H_2 + H_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{array}\right)$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{4}{15} & -\dfrac{2}{15} \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{15} & -\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{15} & \dfrac{8}{15} \end{pmatrix}$$

Định lí 2.4.2 (Kronecker-Capelli) *Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ có nghiệm (hay còn gọi hệ tương thích) là hạng của A bằng hạng của ma trận các hệ số mở rộng $\bar{A} = (A\,|B)$*

$$r(A) = r(\bar{A}).$$

Chứng minh. Sử dụng phương pháp Gauss để đưa hệ phương trình tuyến tính về hệ tương đương, ma trận có dạng hình thang $\bar{C} = (C\,|D)$.

$$\bar{C} = (C\,|D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & | & * \\ . & . & . & . & . & . & . & | & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Do các phép biến đổi sơ cấp về hàng không làm thay đổi hạng của ma trận, $r(A) = r(C),\ r(\bar{A}) = r(\bar{C})$.

1. Trường hợp $r(A) = r(\bar{A})$, ma trận $r(\bar{C})$ có r hàng đầu khác 0, trong đó phần tử đầu tiên khác không của hàng thứ r bằng 1 không nằm trong cột D, cột cuối cùng của ma trận $\bar{C}$. Hiển nhiên khi đó phương trình thứ r của hệ có nghiệm và theo phương pháp Gauss, thay dần các nghiệm vào phương trình trước nó, suy ra hệ đã cho có nghiệm.

$$\bar{C} = (C\,|D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & | & * \\ . & . & . & . & . & . & . & | & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Trường hợp $r(A) \neq r(\bar{A}) = r$, hiển nhiên $r(A) < r$, ma trận $r(\bar{C})$ có r hàng đầu khác 0, trong đó phần tử đứng ở vị trí cuối cùng của hàng thứ r (thuộc cột D) khác 0, các phần tử còn lại của hàng thứ r đều bằng 0 (do $r(A) < r$). Khi đó phương trình tương ứng với hàng thứ r vô nghiệm, suy

ra hệ vô nghiệm.

$$\bar{C} = (C\,|D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & | & * \\ . & . & . & . & . & . & . & | & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \boxed{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Định lí đã được chứng minh. ■

Nhận xét rằng từ ma trận các hệ số mở rộng $\bar{C}$ trong chứng minh trên, ta suy ra *hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi* $r(A) = r(\bar{A})$ *và cùng bằng số ẩn của hệ phương trình đó.*

Ví dụ 2.4.4

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

Lập ma trận các hệ số mở rộng của hệ phương trình

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 & | & 2 \\ 4 & -2 & 5 & -3 & -1 & | & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & -3 & | & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} H_2 \to H_2 - 4H_1 \\ - - - - - - - \to \\ H_3 \to H_1 + H_3 - H_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 2 & -11 & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Từ ma trận trên suy ra $\mathrm{r}(\bar{A}) = 3, \mathrm{r}(A) = 2$. Vậy hệ vô nghiệm.

2.4.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng $AX = \mathbf{0}$ hay

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Hiển nhiên mọi hệ thuần nhất đều có *nghiệm tầm thường*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Từ nhận xét ngay sau chứng minh của định lí Kronecker-Capelli, ta có

- Nếu $r(A) = n$ (số ẩn của hệ phương trình) thì nghiệm tầm thường là nghiệm duy nhất của hệ.
- Nếu $r(A) < n$ thì hệ có thêm nghiệm không tầm thường.

Đặc biệt đối với hệ thuần nhất n phương trình, n ẩn, hạng của ma trận liên kết $r(A) = n$ khi và chỉ khi $\det A \neq 0$. Ta có định lí quan trọng sau

Định lí 2.4.3 *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n phương trình, n ẩn, $AX = \mathbf{0}$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi* $\det A = 0$.

Ví dụ 2.4.5

Xác định m để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường. Ma trận các hệ số của hệ phương trình

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 3m - 5.$$

Theo định lí trên hệ có nghiệm không tầm thường nếu $\det A = 3m - 5 = 0$ hay $m = \dfrac{5}{3}$.

Về cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta lưu ý tới tính chất sau:
Nếu X_1 và X_2 là 2 nghiệm bất kì của hệ thuần nhất $AX = \mathbf{0}$, khi đó $X = C_1X_1 + C_2X_2$ cũng là nghiệm của hệ (C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý).

Thật vậy, biểu diễn nghiệm của hệ phương trình dưới dạng ma trận cột, do tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng ma trận

$$AX = A(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1AX_1 + C_2AX_2 = \mathbf{0}.$$

Từ tính chất này suy rộng ra, nếu mọi nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất được biểu diễn dưới dạng

$$\overline{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_kX_k, \tag{2.5}$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_k$ là các hằng số tùy ý, thì (2.5) được gọi là *nghiệm tổng quát* của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Cuối cùng ta có nhận xét rằng đối với *hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất* $AX = B$, mọi nghiệm của hệ luôn biểu dưới dạng

$$X = \overline{X} + X^*,$$

trong đó X^* là một *nghiệm riêng* của hệ phương trình $AX = B$ và $\overline{X}$ là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng $AX = \mathbf{0}$.

Thật vậy nếu X_1 và X_2 là hai nghiệm của hệ không thuần nhất $AX = B$, khi đó $\overline{X} = X_1 - X_2$ là nghiệm của hệ thuần nhất $AX = \mathbf{0}$, suy ra $X_2 = \bar{X} + X_1$, tổng của nghiệm thuần nhất $\overline{X}$ với nghiệm riêng X_1.

Chẳng hạn trong ví dụ 2.4.2 minh họa cách giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss, nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

được viết dưới dạng

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Dễ dàng nhận thấy $X^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ là một nghiệm riêng của hệ. Đồng thời

$$\overline{X} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

là nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát (2.6) của hệ phương trình đã cho có dạng

$$X = \overline{X} + X^*.$$

Lưu ý rằng hệ có rất nhiều nghiệm riêng, chẳng hạn nếu chọn $C_1 = C_2 = 1$ thì nghiệm riêng

$$Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và do đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho có thể viết

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

(Các bài tập có đánh dấu sao trước số thứ tự là các bài tập khó hơn. Các bài tập có dấu sao sau số thứ tự là các đề thi học phần đã thi.)

1. Thực hiện các phép nhân ma trận

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) Với $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, hãy tính $A^n(\theta), \quad n \in \mathbb{N}$.

2. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn

   (a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = 0$ (c) $A^2 = I_2$

   (d) $AB = BA$, trong đó $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Chứng tỏ rằng $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2$ là ma trận không.

4. Chứng minh rằng nếu hai ma trận vuông cùng cấp A và B giao hoán được ($AB = BA$), khi đó

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

   (b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

   (c) $(A+B)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$.

5* Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Tính các ma trận B^2, B^3.

(b) Sử dụng kết quả của câu (a) hãy tính $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

*6. Hãy tính $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. Sử dụng định nghĩa định thức để tính

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

8. Giả sử các số tự nhiên mà mỗi số gồm 3 chữ số $\overline{a_1a_2a_3},\ \overline{b_1b_2b_3},\ \overline{c_1c_2c_3}$ đều chia hết cho 17. Chứng minh rằng $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ cũng chia hết cho 17.

9. Sử dụng các tính chất của định thức, tính các định thức sau

(a) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ (định thức Vandermonde).

10. Ma trận vuông cấp n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là *ma trận phản xứng* nếu $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $i, j = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng nếu A phản xứng và cấp của ma trận, n là số tự nhiên lẻ thì $\det(A) = 0$.

11. A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn tính chất $A^{-1} = 4A$. Hãy tính
$$|\det(A^{2k+1} - A)| \quad \text{với} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

*12. (a) A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn tính chất $A^{-1} = A$. Chứng tỏ rằng $|\det(A - I)| = 0$ hoặc $|\det(A - I)| = 2^n$.

(b) A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn tính chất $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $\det B = 0$.

13. Sử dụng ma trận phụ hợp, tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

14. Sử dụng phương pháp Gauss, tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông thoả mãn
$$A^n + A^{n-1} + \cdots + A + I_n = O,$$
thì A khả nghịch và $A^{-1} = A^n$.

16. A, B là hai ma trận khả nghịch cấp n thỏa mãn $AB + BA = O$. Chứng tỏ rằng n là số chẵn.
Cho một ví dụ về hai ma trận khả nghịch A, B cấp 2 thỏa mãn
$$AB + BA = O.$$

17. Tìm hạng của các ma trận sau

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

*(b) $\begin{pmatrix} 1 & x & a & b \\ 1 & x^2 & a^2 & b^2 \\ 1 & x^3 & a^3 & b^3 \\ 1 & x^4 & a^4 & b^4 \end{pmatrix}$ (giả thiết $a \neq b$).

18* Cho $A = (a_{ij})_{6\times 6}$ là ma trận vuông cấp 6, kí hiệu A_{ij} là phần phụ đại số tương ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A. Gọi $B = (A_{ij})_{6\times 6}$ là ma trận các phần phụ đại số. Tìm hạng của B trong các trường hợp sau
(a) Hạng của ma trận A bằng 6.
(b) Hạng của ma trận A bằng 3.

19* Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tìm hạng của A và tính ma trận nghịch đảo A^{-1}.

20. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

21. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + 4y + mz = 1 \end{cases}$ là hệ Cramer.

Hãy giải phương trình với $m = 1$.

22. Tìm a để hệ sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x - y + az = 0 \end{cases}$$

23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y + az = 3 \\ 3x - y - az = 2 \\ 2x + y + 3z = b \end{cases}$

    (a) Tìm a, b để hệ có nghiệm duy nhất

    (b) Tìm a, b để hệ có vô số nghiệm.

24. Giải các hệ phương trình sau

    (a) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

25* Biện luận số nghiệm hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z &= 1 \\ (m+1)x + (m+1)y + z &= 1 \\ (2m+1)x + y + z &= 1 - m. \end{cases}$$

26. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

    (a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (3-2m)x + (2-m)y + z = m \\ (2-m)x + (2-m)y + z = 1 \\ x + y + (2-m)z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 8 \\ x + y - 3z = 3 \\ 4x + my + mz = 4 \\ -x + 5y + z = 9 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \end{cases}$

27. Tìm hạng của ma trận các hệ số và hạng của ma trận các hệ số mở rộng của hệ phương trình sau. Từ đó hãy tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

28. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

29. Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề các cho 3 mặt phẳng

$$x - 2y + z = mx, \quad 3x - y - 2z = my, \quad 3x - 2y - z = mz$$

Xác định giá trị của m để 3 mặt phẳng đó chứa cùng một đường thẳng.

30. (a) Cho ma trận A kiểu 4×6 và có hạng bằng 4. Phương trình $AX = B$ luôn có nghiệm với mọi $B \in \mathbb{R}^4$ không? Tại sao?
    (b) Ma trận M kiểu 4×5 và có hạng bằng 3. Ta nói phương trình $MX = B$ luôn có nghiệm với mọi $B \in \mathbb{R}^4$. Khẳng định đó đúng hay sai?

31. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
    (a) Chứng minh rằng phương trình $AX = B$ luôn có nghiệm với mọi ma trận vuông cấp hai B.
    (b) Chứng minh rằng phương trình $XA = I_3$ vô nghiệm.

32* (a) Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = b_3 \end{cases}$ có nghiệm với mọi $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ đúng hay sai? Tại sao?

(c) Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. (a) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 7 & 17 & -39 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 43 & 82 \\ -39 & -51 \end{pmatrix}$

   (c) $A^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

2. (a) $A = \mathbf{0}$, $A = I$ hoặc $A = \begin{pmatrix} a & u \\ v & 1-a \end{pmatrix}$ với các cột của A tỉ lệ với nhau.

   (b) và (c) Tương tự như (a).

   (d) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{2y}{3} & x+y \end{pmatrix}$

5. (a) $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (a) -8 (b) 259

7. $A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$

8. Sử dụng tính chất của định thức để tính định thức.

9. (a) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + x)x^{n-1}$

   (b) $x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1-x} + \frac{1}{a_2-x} + \frac{1}{a_3-x} + \cdots + \frac{1}{a_n-x}\right)$

   (c) Xem ví dụ 2.2.5.

10. Do $A^T = -A$ suy ra với cấp n lẻ, $\det(A) = 0$.

11. $|\det(A^{2k+1} - A)| = \frac{4^k-1}{2^{2k+1}}$.

12. (a) Điều phải chứng minh được suy ra từ đẳng thức $(A-I)(A+I) = O$.

    (b) Hãy chứng minh $AB^k - B^kA = kB^k$ và từ đây suy ra đ.p.c.m.

13. (a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

14. (a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

15. Nhân cả 2 vế đẳng thức đã cho với A.

16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

17. (a) Hạng bằng 3.
(b) Định thức của ma trận bằng $abx(x-1)(a-1)(b-1)(a-x)(b-x)(b-a)$. Từ đó biện luận theo x, a, b để tìm hạng của ma trận.

18. (a) $r(B) = 6$ (b) $r(B) = 0$.

19. Hạng của A bằng 4 và $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

20. (a) $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ -1 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -9 \\ 4 & 0 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

21. Tìm $m \neq 13$. Với $m = 1$ nghiệm của hệ $x = \frac{5}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$.

22. $a = 4$.

23. (a) $a \neq \frac{21}{2}$ và b tùy ý.
(b) $a = \frac{21}{2}$ và $b = 3$.

24. (a) $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1)$,
 (b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{7}(-6, 1, 15, 0)$

25. Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -2$ hệ có 1 nghiệm duy nhất.
 Nếu $m = 0$ hệ có vô số nghiệm.
 Nếu $m = -2$ hệ vô nghiệm.

26. (a) $m = -2$ hệ vô nghiệm
 $m = 1$ hệ vô số nghiệm
 $m \notin \{-2, 1\}$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{-m-1}{2+m},\ y = \frac{1}{2+m},\ z = \frac{(m+1)^2}{2+m}$$

 (b) $m = 3$ hệ vô nghiệm
 $m = 1$ hệ vô số nghiệm
 $m \notin \{3, 1\}$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x = -1,\ y = \frac{m-4}{m-3},\ z = \frac{1}{3-m}$$

 (c) $m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất $x = 1,\ y = 2,\ z = 0$.
 Với $m \neq 0$ hệ vô nghiệm.
 (d) $m = 1$ hệ vô số nghiệm.
 Với $m \neq 1$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

27. Hạng của chúng bằng nhau và bằng 2.

28. Nghiệm tổng quát

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

 C_1, C_2, C_3 là các hằng số tùy ý.

29. $m = -2,\ m = 0$ hoặc $m = 1$.

30. (a) đúng (b) sai.

32. (a) $r(A) = 3$ (b) đúng

(c) Nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

C là hằng số tùy ý.

Chương 3

Không gian tuyến tính và ánh xạ tuyến tính

3.1 Không gian tuyến tính

3.1.1 Định nghĩa không gian tuyến tính

Định nghĩa 3.1.1 *Cho $V \neq \emptyset$ và K là trường số thực hoặc phức, V được gọi là không gian tuyến tính trên trường K nếu trên V xác định hai phép toán:*

a) **Phép cộng** *là ánh xạ $V \times V \to V$ ứng mỗi cặp $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ với một phần tử duy nhất trong V kí hiệu $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ thỏa mãn*

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ *với* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ *với* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
- *Tồn tại* $\mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ *với* $\forall \mathbf{x} \in V$
- $\forall \mathbf{x} \in V$ *đều tồn tại* $(-\mathbf{x}) \in V : (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = \mathbf{0}$

b) **Phép nhân** *một phần tử của K với một phần tử của V là một ánh xạ $K \times V \to V$ tương ứng mỗi cặp $(\alpha, \mathbf{x})$ với một phần tử duy nhất trong V kí hiệu $\alpha\,\mathbf{x} \in V$ (hoặc $\alpha \cdot \mathbf{x}$) thỏa mãn*

- $(\alpha\beta)\,\mathbf{x} = \alpha(\beta \cdot \mathbf{x}) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in V$
- $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in V$
- $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \quad \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{x} \in V$, *trong đó 1 là phần tử đơn vị của K.*

Mỗi phần tử $\mathbf{x} \in V$ thường được gọi là một *vectơ*. Phần tử $\mathbf{0} \in V$ trong định nghĩa trên được gọi là *vectơ không*, phần tử $(-\mathbf{x}) \in V$ được gọi là phần tử đối của $\mathbf{x}$ hay *vectơ đối* của vectơ $\mathbf{x}$. Không gian tuyến tính trên K còn được gọi là *không gian véctơ* trên trường K.

Nếu K là trường số thực, V trên $\mathbb{R}$ *được gọi là không gian tuyến tính thực*, nếu K là trường số phức, V trên $\mathbb{C}$ *được gọi là không gian tuyến tính phức.*

Ví dụ 3.1.1

1. Tập hợp các véctơ hình học trong không gian, kí hiệu V_3 với phép cộng các véctơ và nhân véctơ với một số thực như đã biết là không gian tuyến tính thực.
   Tập hợp các véctơ hình học trong mặt phẳng, kí hiệu V_2 cũng là không gian tuyến tính thực.

2. Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ trên $\mathbb{R}$ là không gian tuyến tính thực, tập các số phức $\mathbb{C}$ trên $\mathbb{R}$ cũng là không gian tuyến tính thực.
   Tập các số phức $\mathbb{C}$ trên $\mathbb{C}$ là không gian tuyến tính phức.

3. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{1,n}\}$ là không gian tuyến tính thực với các phép toán
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Tập hợp các ma trận cùng kiểu $m \times n$
$$M_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
   trong đó các phần tử a_{ij} của ma trận là các số thực là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ (phép cộng các ma trận và nhân ma trận với một số như đã biết trong chương II).
   Đặc biệt tập hợp các ma trận cột
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{0,n} \right\}$$

là không gian tuyến tính thực. Nó được gọi là không gian các véctơ cột n chiều. Tương tự ta có thể nói đến không gian tuyến tính gồm các ma trận hàng $1 \times n$.

5. Tập các đa thức bậc không quá $n, n \in \mathbb{N}^*$ là một số tự nhiên cho trước

$$\mathscr{P}_n[x] = \{P = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}\}$$

với phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số thực như đã biết, là không gian tuyến tính thực. Ta gọi là $\mathscr{P}_n[x]$ là không gian các đa thức có bậc $\leqslant n$.

6. Tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ là không gian tuyến tính thực.
Thật vậy giả sử A là ma trận kiểu $m \times n$, các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ là các ma trận cột $n \times 1$. Kí hiệu V là tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó. Nghiệm của hệ phương trình thuần nhất có các tính chất như đã trình bày trong chương trước

$$\forall X_1, X_2 \in V \;\Rightarrow\; X_1 + X_2 \in V$$

$$\forall X_1 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \alpha X_1 \in V$$

Các phép toán cộng, nhân trên V thực chất là phép cộng hai ma trận, phép nhân ma trận với một số. Do vậy chúng thỏa mãn các yêu cầu trong định nghĩa về không gian tuyến tính. Nói cách khác V là không gian véctơ.
Xét một trường hợp riêng: giao của 2 mặt phẳng (tập hợp các điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn hệ 2 phương trình)

$$\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

thực chất là tập nghiệm của hệ 2 phương trình thuần nhất, với cách lập luận trên là không gian véctơ.

7. Bạn đọc có thể tự kiểm tra các khẳng định sau: • Tập hợp $A = \{(x, y) \in$

$\mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ không là không gian véctơ thực, với các phép toán như trong ví dụ 2

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

• Tập các số thực $\mathbb{R}$ (với phép cộng và phép nhân các số thực đã biết) không là không gian tuyến tính phức.

Các tính chất cơ bản của không gian véctơ

Cho không gian tuyến tính V trên trường K. Chúng có các tính chất cơ bản sau

1. Trong không gian tuyến tính V, véctơ $\mathbf{0}$ là duy nhất. Thật vậy nếu $\mathbf{0}' \in V$ cũng có tính chất $\mathbf{0}' + \mathbf{x} = \mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in V$ thì
$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

2. Với mỗi $\mathbf{b} \in V$ tồn tại duy nhất véctơ đối $(-\mathbf{b}) \in V$.
Thật vậy giả sử tồn tại $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ sao cho $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b} = \mathbf{0} = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}$. Ta có
$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{b}_1 + (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}) = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}) + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2$$
Vậy $(-\mathbf{b})$ là duy nhất.

3. Với mọi $\alpha \in K,\ \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Thật vậy
$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}.$$
Cộng cả 2 vế với véctơ đối $(-\alpha \cdot \mathbf{0})$ ta có $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4. Tương tự $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ và $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$.
Thật vậy $0 \cdot \mathbf{a} = (0 + 0) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a}$. Cộng hai vế với $(-0 \cdot \mathbf{a})$ ta có
$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a} + (-0 \cdot \mathbf{a}) = 0 \cdot \mathbf{a}.$$
Để chứng minh $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$, xét
$$\mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{a} = (1 - 1) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$
Suy ra $(-1) \cdot \mathbf{a}$ là véctơ đối của $(-\mathbf{a})$.

Nhận xét rằng do $(-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a})$, ta có thể nói trong không gian tuyến tính hiệu 2 véctơ $\mathbf{b}$ và $\mathbf{a}$ bằng tổng của $\mathbf{b}$ với véctơ đối của $\mathbf{a}$
$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}).$$

3.1.2 Không gian con

Định nghĩa 3.1.2 *Cho V là không gian véctơ trên trường K. Tập con $U \subset V$ của không gian véctơ V được gọi là không gian con của V, kí hiệu $U \triangleleft V$, nếu U cũng là không gian véctơ trên trường K với các phép toán cộng véctơ và nhân véctơ với một số trên không gian véctơ V.*

Định lí sau là hiển nhiên

Định lí 3.1.1 *Điều kiện cần và đủ để $U \subset V$ là không gian con của không gian véctơ V là*

i) Với mọi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \;\Rightarrow\; \mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$

ii) Với mọi $\mathbf{a} \in U$ *và mọi* $\alpha \in K \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{a} \in U$.

Lưu ý rằng các yêu cầu i) và ii) trong định lí trên có thể thay bằng mệnh đề sau:

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U. \quad (*)$$

Thật vậy với $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$, từ ii) suy ra

$$\alpha\mathbf{a} \in U,\; \beta\mathbf{b} \in U \overset{\textbf{do i)}}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U.$$

Ngược lại i) được suy ra từ mệnh đề $(*)$ bằng cách chọn $\alpha = 1, \beta = 1$, ii) được suy ra từ mệnh đề $(*)$ bằng cách chọn $\beta = 0$.

Ví dụ 3.1.2 *(Về các không gian véctơ con)*

1. Tập hợp gồm một véctơ $\mathbf{0}$ hoặc chính không gian véctơ V là hai không gian con tầm thường của không gian véctơ V.

2. Tập hợp các véctơ hình học song song với một mặt phẳng cố định (hoặc song song với một đường thẳng cố định) là không gian con.

3. Áp dụng định lí 3.1.1 ta thấy ngay $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 4z = 0\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$, $V_2 = \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

   Như vậy trong không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^3$ với các phép toán thông thường:

   $$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

ngoài các không gian con tầm thường, các đường thẳng đi qua gốc tọa độ và các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ là các không gian con của $\mathbb{R}^3$. Đồng thời ta dễ dàng chỉ ra điều ngược lại mọi không gian con bất kì của $\mathbb{R}^3$ chỉ có thể là không gian con tầm thường hoặc các đường thẳng, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ.

4. Tập hợp các ma trận chéo $n \times n$ là không gian con của không gian véctơ gồm các ma trận vuông cấp n.

3.2 Cơ sở và chiều của không gian tuyến tính

Định nghĩa 3.2.1 *Cho các véctơ* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}$ *trong không gian véctơ* V. *Ta nói véctơ*

$$\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n},$$

với $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$*, là một tổ hợp tuyến tính của các véctơ* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}$.

Ví dụ véctơ $2\overrightarrow{\mathbf{a}} + 3\overrightarrow{\mathbf{b}}$ là một tổ hợp tuyến tính của hai véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ và $\overrightarrow{\mathbf{b}}$. Véc tơ $\overrightarrow{\mathbf{a}} + 3\overrightarrow{\mathbf{b}} - 2\overrightarrow{\mathbf{c}}$ là một tổ hợp tuyến tính của 3 véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$.
Cho $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}\}$ là hệ gồm k véctơ trong không gian tuyến tính V. Ta đưa vào kí hiệu $\mathscr{L}(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k})$ hay $\mathscr{L}(B)$ là tập hợp toàn bộ các tổ hợp tuyến tính của k véctơ đó

$$\mathscr{L}(B) = \{\alpha_1\mathbf{b_1} + \alpha_2\mathbf{b_2} + \cdots + \alpha_k\mathbf{b_k} \mid \alpha_i \in K,\ \forall i = \overline{1, k}\}$$

Ta sẽ chứng minh định lí sau

Định lí 3.2.1 $\mathscr{L}(B)$ *là không gian con của không gian véctơ* V.

Chứng minh. Thật vậy, với $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{L}(B)$

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k$$
$$\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{b}_k$$

Khi đó với mọi $\alpha, \beta \in K$, véctơ

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{b}_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)\mathbf{b}_k$$

cũng là một tổ hợp tuyến tính của các véctơ $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}$. Nói cách khác $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathscr{L}(B)$, áp dụng định lí 3.1.1 ta có $\mathscr{L}(B)$ là không gian con sinh bởi các véctơ $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}$. ■

Một cách tổng quát gọi $A \subset V$ là tập hợp bất kì các véctơ của không gian véctơ V. Kí hiệu

$$\mathscr{L}(A) = \{\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{u_i} \in A, \alpha_i \in K \ \forall i = \overline{1, n}\}$$

là tập hợp toàn bộ các tổ hợp tuyến tính của các véctơ trong A. Hoàn toàn tương tự như trên, $\mathscr{L}(A)$ cũng là không gian con của không gian véctơ V.

Ví dụ 3.2.1

1. Trong $\mathbb{R}^3$ xét hệ các véctơ

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Mọi véctơ trong $\mathbb{R}^3$ có thể biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của 3 véctơ đó

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Do vậy $\mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbb{R}^3$.

2. Không gian con sinh bởi một véctơ $\mathbf{a} \in V$ là tập hợp các véctơ có dạng

$$\mathscr{L}(\mathbf{a}) = \{\alpha\,\mathbf{a} \mid \alpha \in K\}.$$

Cũng như trong hình giải tích, để thuận tiện ta gọi véctơ $\alpha\,\mathbf{a}$ là véctơ *đồng phương* với $\mathbf{a}$.
Xét không gian các ma trận vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times 2}$, không gian con sinh bởi ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là tập hợp các ma trận chéo có dạng

$$\mathscr{L}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Định nghĩa 3.2.2 *Không gian véctơ $\mathscr{L}(A)$ được gọi là không gian sinh bởi A. Tập A được gọi là tập sinh của không gian véctơ $\mathscr{L}(A)$.*
Đặc biệt $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k} \in V\}$ là tập sinh của không gian véctơ V nếu mọi véctơ trong V đều là một tổ hợp tuyến tính nào đó của các véctơ $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}$

$$\forall \mathbf{u} \in V \ \Rightarrow \ \exists \alpha_i \in K, \ i = \overline{1, k}: \ \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_k\mathbf{u_k}.$$

Nếu A là *hệ các véctơ* $A = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}\}$ khi đó ta nói A là *hệ sinh* (thay cho cụm từ *tập sinh*) của không gian véctơ $\mathscr{L}(A)$. Chú ý rằng ta cần phân biệt *hệ véctơ* với *tập hợp các véctơ*: các véctơ trong hệ có thể bằng nhau chẳng hạn hệ B gồm n véctơ $\mathbf{a}$

$$B = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}, ..., \mathbf{a}\}$$

trong khi tập hợp các véctơ thuộc hệ B chỉ có duy nhất một phần tử.

Ta có nhận xét rằng $\mathscr{L}(A)$ là *không gian con nhỏ nhất* trong V chứa tất cả các véctơ của A. Mỗi không gian véctơ có vô số tập sinh (xem ví dụ 3.2.2). Không gian véctơ V cũng đồng thời là tập sinh của chính nó. Tuy nhiên trong giáo trình này ta thường quan tâm đến các tập sinh hữu hạn phần tử.

Định nghĩa trên về hệ sinh có thể diễn đạt một cách khác

Các véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}\}$ *thuộc không gian véc tơ* V *là hệ sinh của một không gian con* U *nào đó trong* V *khi và chỉ khi phương trình*

$$x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \cdots + x_k\mathbf{u_k} = \mathbf{u}$$

luôn có nghiệm $x_i \in K,\ i = \overline{1,k}$ *với mọi* $\mathbf{u} \in U$.

Khẳng định trên chứng tỏ $\mathscr{L}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_k}) = U$. Người ta thường sử dụng nó để chứng minh một hệ véc tơ nào đó là hệ sinh.

Ví dụ 3.2.2 *(Về hệ sinh của không gian véctơ)*

1. Ba véctơ (tự do) không đồng phẳng $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}\}$ là hệ sinh của không gian các véctơ hình học. Thật vậy, trong hình học giải tích, chúng ta đã biết mọi véc tơ $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ có thể phân tích theo 3 véctơ không đồng phẳng

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{b}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

   Như vậy không gian các véctơ hình học có vô số hệ sinh, bất kì 3 véctơ không đồng phẳng nào đều lập thành hệ sinh.

2. Tập hợp các đa thức $P = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ là tập sinh của không gian gồm tất cả các đa thức hệ số thực. Thật vậy, không gian con sinh bởi P

$$\mathscr{L}(P) = \{\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n}\}$$

   gồm tất cả các đa thức hệ số thực.

3. Tương tự các đa thức $\{1, x, x^2, ..., x^k\}$ là hệ sinh của không gian các đa thức có bậc không vượt quá k.

Định nghĩa 3.2.3 *Hệ n véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ của không gian véctơ V được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại trong K các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng* 0 *sao cho*

$$\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}.$$

Nói cách khác phương trình $\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}$ có nghiệm không tầm thường $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ trong K.
Một hệ n véctơ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là hệ độc lập tuyến tính. Nói cách khác hệ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ độc lập tuyến tính nếu phương trình véctơ

$$\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}$$

chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Chú ý rằng ta có thể mở rộng cho khái niệm một hệ (hoặc tập) vô hạn các véctơ độc lập tuyến tính. Tập A gồm các véctơ nào đó trong không gian tuyến tính V được gọi là độc lập tuyến tính nếu hữu hạn véctơ bất kì trong A cũng độc lập tuyến tính.

Nhận xét rằng *nếu bớt đi một số véctơ từ hệ các véctơ độc lập tuyến tính, hệ còn lại vẫn độc lập tuyến tính*, hoặc diễn đạt một cách khác tương đương *nếu thêm vào hệ phụ thuộc tuyến tính các véctơ bất kì, hệ mới vẫn phụ thuộc tuyến tính.*
Thật vậy giả sử $A = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ phụ thuộc tuyến tính, xét hệ B gồm m véctơ và B chứa mọi véctơ của A $(n \leqslant m)$

$$B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, ..., \mathbf{b}_m\}.$$

Do A phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$\alpha_1\,\mathbf{b}_1 + \alpha_2, \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n\,\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Suy ra

$$\alpha_1\,\mathbf{b}_1 + \alpha_2, \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n\,\mathbf{b}_n + 0\cdot\mathbf{b}_{n+1} + 0\cdot\mathbf{b}_{n+2} + \cdots + 0\cdot\mathbf{b}_m = \mathbf{0}.$$

Vậy B là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3.2.3

1. Trong $\mathbb{R}^3$ xét hệ các véctơ

$$B = \{\mathbf{b}_1 = (1,2,3), \mathbf{b}_2 = (-1,1,-2), \mathbf{b}_3 = (0,3,1)\}.$$

   Hệ B phụ thuộc tuyến tính vì $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$.

2. Nếu B là hệ các véctơ bất kì trong không gian tuyến tính V và B chứa véctơ $\mathbf{0}$, khi đó B phụ thuộc tuyến tính.
   Thật vậy do véctơ $\mathbf{0} \in B$, ta có ngay một tổ hợp tuyến tính $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ với hệ số khác 0.

3. Kí hiệu V_3 là tập các vec tơ hình học không gian, V_3 là không gian tuyến tính thực. Hiển nhiên hai véctơ đồng phương hoặc ba véctơ đồng phẳng là các hệ phụ thuộc tuyến tính. Tuy nhiên hai véctơ không đồng phương hoặc ba véctơ không đồng phẳng là các hệ độc lập tuyến tính.
   Ta sẽ chứng minh hệ 4 véctơ bất kì $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}$ trong V_3 phụ thuộc tuyến tính.
   Thật vậy nếu 3 véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ đồng phẳng thì chúng phụ thuộc tuyến tính và do đó bổ sung thêm véctơ $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ hệ vẫn phụ thuộc tuyến tính. Trường hợp 3 véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$ không đồng phẳng, trong hình giải tích ta đã biết khi đó véctơ $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ có thể phân tích theo 3 véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}$

$$\overrightarrow{\mathbf{d}} = \alpha_1 \overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathbf{b}} + \alpha_3 \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

   Suy ra $\alpha_1 \overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathbf{b}} + \alpha_3 \overrightarrow{\mathbf{c}} - \overrightarrow{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$, 4 véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}$ phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 3.2.2 *Một hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại trong nó một véctơ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại.*

Chứng minh. Gọi $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ là hệ các véctơ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2, \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Giả sử $\alpha_k \neq 0$, chuyển vế và chia hai vế cho α_k, ta được

$$\mathbf{b}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{b}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\mathbf{b}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{b}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\mathbf{b}_{k+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathbf{b}_n.$$

Vậy $\mathbf{b}_k$ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại trong hệ B.
Ngược lại, không làm mất tính tổng quát giả sử $\mathbf{b}_1$ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $\mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$

$$\mathbf{b}_1 = \beta_2\mathbf{b}_2 + \beta_3\mathbf{b}_3 + ... + \beta_n\mathbf{b}_n.$$

Ta có $1 \cdot \mathbf{b}_1 - \beta_2\mathbf{b}_2 - \beta_3\mathbf{b}_3 - \cdots - \beta_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$, suy ra B phụ thuộc tuyến tính. ■

Ví dụ 3.2.4 *(Về hệ phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính)*

1. Hệ 2 véctơ $\mathbf{b}$ và $\alpha\,\mathbf{b},\ \alpha \in K$ phụ thuộc tuyến tính.

2. Hệ ba véctơ $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}\}$ phụ thuộc tuyến tính vì

$$(-2) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) - (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

3. Một hệ n véctơ trong đó có 2 véctơ giống nhau (cùng bằng $\mathbf{a}$)

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_{k+1}, \cdots, \mathbf{b}_n$$

   là hệ phụ thuộc tuyến tính.

4. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, hai véctơ $\mathbf{a} = (1,0)$ và $\mathbf{b} = (0,1)$ độc lập tuyến tính. Trong $\mathbb{R}^3$, ba véctơ $\{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}$ độc lập tuyến tính.

5. Xét hệ phương trình đại số tuyến tính $AX = B$ hoặc viết chi tiết hơn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

   Kí hiệu $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ là các véctơ cột của ma trận A, $\mathbf{b}$ là ma trận cột các hệ số tự do

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},\ i = \overline{1,n},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình $AX = B$ cũng có thể viết dưới dạng

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Do vậy nếu hệ phương trình có nghiệm, $\mathbf{b}$ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$. Khi đó theo định lí 3.2.2 hệ véctơ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Định nghĩa 3.2.4 *Trong không gian véctơ V một hệ các véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ được gọi là cơ sở của V nếu chúng là hệ sinh của V và độc lập tuyến tính.*

Tổng quát hơn nếu tập hợp các véctơ A nào đó trong không gian tuyến tính V vừa là tập sinh của V vừa độc lập tuyến tính, khi đó ta cũng nói A là cơ sở của V. Như vậy cơ sở của không gian tuyến tính có thể chứa vô hạn phần tử. Người ta chứng minh được rằng mọi không gian tuyến tính đều tồn tại ít nhất một cơ sở. Trong phạm vi giáo trình này ta chỉ xét các hệ cơ sở gồm hữu hạn véctơ.

Từ định nghĩa trên ta suy ra *điều kiện cần và đủ để hệ các véctơ* $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ *là cơ sở của không gian véctơ V*, là:

1. Với mọi $\mathbf{u} \in V$, $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ sao cho

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n}.$$

   Nói cách khác phương trình $x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \cdots + x_k\mathbf{u_k} = \mathbf{u}$ luôn có nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ với mọi $\mathbf{u} \in V$.

2. Từ hệ thức $\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}$ luôn suy ra

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Ví dụ 3.2.5 *(Về cơ sở của không gian véctơ)*

1. Trong không gian véctơ hình học ba véctơ không đồng phẳng bất kì là hệ cơ sở của không gian đó. Đặc biệt $\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\}$ là một cơ sở.

2. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, các véctơ

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e_n} = (0, 0, ..., 0, 1)$$

lập thành một cơ sở. Cơ sở đó được gọi là *cơ sở chính tắc* của R^n.
Thật vậy, mọi véctơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}.$$

Các véctơ $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$ độc lập tuyến tính vì từ hệ thức

$$x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0).$$

3. Hệ các đa thức $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ độc lập tuyến tính vì $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \equiv 0$ khi và chỉ khi $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.
Mặt khác trong ví dụ 3.2.2 ta đã biết hệ B là hệ sinh của không gian các đa thức có bậc không vượt quá n. Suy ra $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ là cơ sở của không gian đó.

4. Trong không gian các ma trận cùng kiểu, tập các ma trận mà mỗi ma trận chỉ có duy nhất một phần tử 1 đứng trong nó, các phần tử còn lại bằng 0 là một cơ sở. Chẳng hạn trong không gian các ma trận cùng kiểu 3×2, kí hiệu $\mathscr{M}_{3\times 2}$ các ma trận

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lập thành hệ cơ sở của $\mathscr{M}_{3\times 2}$.

Một không gian véctơ có thể có nhiều hệ cơ sở. Tuy nhiên ta có định lí sau

Định lí 3.2.3 *Số véctơ trong hai cơ sở bất kì của không gian véctơ V luôn bằng nhau.*

Như vậy số lượng các véctơ trong các hệ cơ sở khác nhau là như nhau, người ta gọi số đó là *chiều của không gian véctơ V, kí hiệu* $\dim V$.

Để chứng minh định lí ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 3.2.1 *Cho* $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *và* $B' = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ *là hai hệ véctơ trong không gian tuyến tính* V*. Nếu mọi vectơ trong* B *đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ trong* B' *và giả thiết số lượng các véctơ trong* B *nhiều hơn số lượng các véctơ trong* B'

$$n > m$$

thì B *là hệ phụ thuộc tuyến tính.*

Từ bổ đề trên ta có thể nói trong vô số tổ hợp tuyến tính của m vectơ có không quá m vectơ độc lập tuyến tính.

Chứng minh bổ đề. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số vectơ của B'.
Thật vậy, với $m = 1$, tức là hệ B' chỉ gồm một véctơ $B' = \{\mathbf{y}\}$, từ giả thiết suy ra các véctơ $\mathbf{x}_i$ trong B bằng bội lần véctơ $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x}_i = \alpha_i \mathbf{y} \ \forall i = \overline{1, n} \ \Rightarrow \ B \text{ phụ thuộc tuyến tính.}$$

Giả sử bổ đề đúng với $m - 1$, ta xét hệ B' gồm m vectơ và $n > m$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \alpha_{11}\mathbf{y}_1 + \alpha_{21}\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_{m1}\mathbf{y}_m \\ \mathbf{x}_2 = \alpha_{12}\mathbf{y}_1 + \alpha_{22}\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_{m2}\mathbf{y}_m \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \mathbf{x}_n = \alpha_{1n}\mathbf{y}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\mathbf{y}_m \end{cases} \tag{3.1}$$

• Nếu $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \ldots = \alpha_{1n} = 0$, thì các véctơ trong B chỉ là tổ hợp tuyến tính của $m - 1$ vectơ $\{\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$. Theo giả thiết quy nạp hệ véctơ B phụ thuộc tuyến tính.
• Tồn tại ít nhất một trong các số $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n} \neq 0$. Không làm mất tính tổng quát giả sử $\alpha_{11} \neq 0$. Xét hệ $(n - 1)$ vectơ $A = \{\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2 - \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_3 - \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}\mathbf{x}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x}'_n = \mathbf{x}_n - \dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\mathbf{x}_1 \end{cases}$$

Từ (3.1) ta thấy mỗi véctơ trong hệ A là tổ hợp tuyến tính của $(m - 1)$ vectơ $\{\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ của B'. Áp dụng giả thiết quy nạp cho hệ A gồm $(n - 1)$ véctơ và hệ $\{\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ gồm $(m-1)$ vectơ, do $n > m$ nên $n-1 > m-1$, suy ra A phụ thuộc tuyến tính. Nói cách khác tồn tại các số không đồng thời bằng không $\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n \in K$ sao cho

$$\gamma_2\mathbf{x}_2' + \gamma_3\mathbf{x}_3' + ... + \gamma_n\mathbf{x}_n' = \mathbf{0}$$

hay

$$\gamma_2\mathbf{x}_2 + \gamma_3\mathbf{x}_3 + ... + \gamma_n\mathbf{x}_n - (\frac{\alpha_{12}\gamma_2}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{13}\gamma_3}{\alpha_{11}} + \cdots + \frac{\alpha_{1n}\gamma_n}{\alpha_{11}})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}.$$

Vậy $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ phụ thuộc tuyến tính. ■

Chứng minh định lí 3.2.3: Số véctơ trong hai cơ sở bất kì là bằng nhau.
Thật vậy, giả sử $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ và $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ là hai cơ sở của V. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $m \neq n$, không làm mất tính tổng quát ta có quyền giả thiết $m > n$.
Do C là hệ sinh nên các véctơ trong B là tổ hợp tuyến tính các véctơ trong C. Theo bổ đề 3.2.1 hệ B phụ thuộc tuyến tính, điều đó vô lí với giả thiết B là hệ cơ sở của không gian V. ■

Ví dụ 3.2.6

1. Cơ sở chính tắc của không gian véctơ thực $\mathbb{R}^n$ là hệ các véc tơ

   $$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e_n} = (0, 0, ..., 0, 1).$$

   Suy ra chiều của không gian $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2. Ta đã biết $\{1, x, x^2\}$ là hệ cơ sở của không gian các đa thức có bậc không vượt quá 2. Vậy chiều của không gian đó $\dim \mathscr{P}_2[x] = 3$.

3. Không gian $\mathscr{M}_{2\times 2}$ gồm các ma trận vuông cấp 2 có một hệ cơ sở

   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Vậy $\dim \mathscr{M}_{2\times 2} = 4$.

4. Trong ví dụ 3.2.5 không gian $\mathscr{M}_{3\times 2}$ có một cơ sở gồm các ma trận

   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $\dim \mathscr{M}_{3\times 2} = 6$.

Từ định lí 3.2.3, ta suy ra một kết quả quan trọng

Định lí 3.2.4 *Trong không gian véctơ n chiều V mọi hệ m véctơ độc lập tuyến tính với $m < n$ đều có thể bổ sung thêm để trở thành hệ cơ sở của V.*

Chứng minh. Giả sử $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ là hệ m véctơ độc lập tuyến tính trong không gian n chiều V. Do $m < n$, B không là hệ sinh của không gian V, suy ra không gian con sinh bởi hệ B là không gian con thực sự của V

$$\mathscr{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m) \subsetneq V.$$

Nói cách khác tồn tại một véctơ $\mathbf{b} \in V$ và $\mathbf{b} \notin \mathscr{L}(B)$. Theo định lí 3.2.2, hệ $m+1$ véctơ

$$B' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}\}$$

độc lập tuyến tính. Ta lặp lại quá trình trên cho hệ B' nếu $m + 1 < n$, cho đến khi ta thu được hệ B^* chứa hệ B và B^* gồm n véctơ độc lập tuyến tính. Ta sẽ chứng minh B^* là cơ sở của V.

Giả sử ngược lại, khi đó B^* không là hệ sinh của V, lập luận như trên ta suy ra tồn tại một véctơ $\mathbf{b}^* \in V$ sao cho hệ $n+1$ véctơ

$$\widehat{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}^*\}$$

độc lập tuyến tính. Điều đó mâu thuẫn với bổ đề 3.2.1, theo bổ đề đó hệ $n+1$ véctơ $\widehat{B}$ phụ thuộc tuyến tính. ■

Ví dụ 3.2.7

1. Trong không gian véctơ hình học V hệ ba véctơ

   $$\{\overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}} + 3\overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{i}} - \overrightarrow{\mathbf{k}}\}$$

   là một cơ sở của V.
   Thật vậy, ba véctơ kể trên không đồng phẳng. Trong hình học giải tích ta đã biết mọi véctơ trong không gian đều có thể phân tích theo 3 véctơ không đồng phẳng, do đó chúng là một hệ sinh của không gian V. Mặt khác hệ 3 véctơ không đồng phẳng bất kì độc lập tuyến tính (xem ví dụ 3.2 3), suy ra chúng là cơ sở của V và $\dim V = 3$.

2. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hiển nhiên

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$

là không gian con (thỏa mãn định lí 3.1.1). Hãy tìm một cơ sở và xác định chiều của không gian con đó.
Xét hệ các véctơ sau

$$B = \{\mathbf{b}_1 = (4, 0, 0, -1), \mathbf{b}_2 = (0, 2, 0, -1), \mathbf{b}_3 = (0, 0, 4, -3)\}$$

Dễ dàng nhận thấy $B \subset V$ và hệ B độc lập tuyến tính. Thật vậy hệ phương trình $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ hay

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Suy ra không gian con sinh bởi B, không gian $\mathscr{L}(B)$ có chiều bằng 3. Mặt khác $\mathscr{L}(B) \subset V \subsetneqq \mathbb{R}^4$, nên không gian V có chiều bằng 3 và hệ véctơ $B = \{\mathbf{b}_1 = (4, 0, 0, -1), \mathbf{b}_2 = (0, 2, 0, -1), \mathbf{b}_3 = (0, 0, 4, -3)\}$ là cơ sở của nó.

3. Hệ các đa thức $\{\mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = x + 1, \mathbf{p}_3 = x^2 + x + 1\}$ là cơ sở của $\mathscr{P}_2[x]$, không gian các đa thức có bậc không vượt quá 2.
Thật vậy do $\dim \mathscr{P}_2[x] = 3$, ta chỉ cần chứng minh các đa thức $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ độc lập tuyến tính. Xét hệ thức $\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2 + \alpha_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$ hay

$$\alpha_1 + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3(x^2 + x + 1) \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hệ thức trên chỉ đúng khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

4. Cho tập $E = \{(x, y) \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$. Trên E người ta định nghĩa phép cộng $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1 + y_2)$ và phép nhân $\alpha \cdot (x, y) = (x^\alpha, \alpha \cdot y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh E là không gian tuyến tính thực. Tìm chiều và một cơ sở của E.

Việc chứng minh E là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ đơn giản chỉ là việc kiểm tra các yêu cầu trong định nghĩa 3.1.1 về không gian tuyến tính. Chú ý rằng phép cộng và phép nhân ngoài ở đây không quen thuộc như trong các ví dụ khác. Véc tơ $(1,0) \in E$ là phần tử trung hoà (véc tơ $\mathbf{0}$) của E, véc tơ đối của $(x,y) \in E$ là véc tơ $(\frac{1}{x}, -y)$.

Xét hệ hai véctơ trong E, $\{\mathbf{a} = (1,1), \mathbf{b} = (2,0)\}$. Chúng độc lập tuyến tính. Thật vậy hệ phương trình $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ hay

$$\begin{cases} 1^x \cdot 2^y &= 1 \\ x + y \cdot 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{chỉ có nghiệm tầm thường} \quad x = y = 0.$$

Mặt khác hệ hai véctơ $\{\mathbf{a} = (1,1), \mathbf{b} = (2,0)\}$ là hệ sinh của E do hệ phương trình

$$\begin{cases} 1^x \cdot 2^y &= \alpha \\ x + y \cdot 0 = \beta \end{cases}$$

có nghiệm với mọi $\beta \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha > 0$ $(x = -\beta,\ y = \log_2 \alpha)$.
Vậy $\{\mathbf{a} = (1,1), \mathbf{b} = (2,0)\}$ là cơ sở của E và $\dim E = 2$.

3.3 Tọa độ vectơ và phép đổi cơ sở

3.3.1 Tọa độ vectơ

Trước hết ta chứng minh định lí sau

Định lí 3.3.1 *Điều kiện cần và đủ để hệ các véctơ $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ là cơ sở của V là véctơ bất kì $\mathbf{x} \in V$ được biểu diễn duy nhất dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của các véctơ đó*

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n}.$$

Bộ n số (có thứ tự) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ trong đẳng thức trên được gọi là tọa độ của véctơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở B.

Chứng minh điều kiện cần. Nếu $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ là cơ sở và

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \beta_1 \mathbf{u_1} + \beta_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \beta_n \mathbf{u_n}$$

Khi đó

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{u_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{u_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{u_n} = \mathbf{0},$$

suy ra $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$ hay $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ...\ \alpha_n = \beta_n$.
Các hệ số α_i là duy nhất trong các biểu diễn của $\mathbf{x}$.

Chứng minh điều kiện đủ. Do giả thiết mọi véctơ trong V đều có một biểu diễn duy nhất theo các véctơ $\mathbf{u}_i$, như vậy từ hệ thức $\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}$ và hệ thức $0 \cdot \mathbf{u_1} + 0 \cdot \mathbf{u_2} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{u_n} = \mathbf{0}$, ta suy ra

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \mathbf{0}.$$

Nói cách khác hệ các véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ độc lập tuyến tính. Mặt khác theo giả thiết mọi véctơ trong V đều là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $\mathbf{u}_i$, suy ra hệ đó là hệ sinh của V. Vậy hệ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ là cơ sở của V. ■

Nhận xét rằng tọa độ của cùng một véctơ trong các cơ sở khác nhau là khác nhau, thậm chí khi hoán vị các véc tơ trong hệ cơ sở, tọa độ của véctơ cũng thay đổi theo.

Chú ý rằng kí hiệu $\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ để nói $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của véctơ $\mathbf{x}$. Để thuận tiện cho nhiều tính toán sau này, người ta đưa ra kí hiệu $[\mathbf{x}]$ là ma trận cột các tọa độ của véctơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở đã cho,

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad [\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

để chỉ rõ cột tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở B.

Giả sử trong cơ sở B biết $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của $\mathbf{x}$ và $(y_1, y_2, ..., y_n)$ là tọa độ của $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \cdots + x_n\mathbf{u_n},\ \mathbf{y} = y_1\mathbf{u_1} + y_2\mathbf{u_2} + \cdots + y_n\mathbf{u_n}.$$

Khi đó

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1)\mathbf{u_1} + (x_2 + y_2)\mathbf{u_2} + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{u_n}$$
$$\alpha\,\mathbf{x} = \alpha\, x_1\mathbf{u_1} + \alpha\, x_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha\, x_n\mathbf{u_n}\ \forall\alpha \in K.$$

Nói cách khác tọa độ của tổng hai véctơ bằng tổng các tọa độ của hai véctơ đó (trong cùng cơ sở B). Ta cũng có thể viết khẳng định đó dưới dạng các cột tọa độ

$$[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_B = [\mathbf{x}]_B + [\mathbf{y}]_B$$
$$[\alpha\mathbf{x}]_B = \alpha[\mathbf{x}]_B.$$

Ví dụ 3.3.1

1. Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá hai

$$\mathscr{P}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

xét các hệ cơ sở $B_1 = \{1, x, x^2\}$, $B_2 = \{x^2, x, 1\}$, $B_3 = \{x, 1, x^2\}$.
Tọa độ của $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ trong cơ sở B_1 là (c, b, a).
Tọa độ của $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ trong cơ sở B_2 là (a, b, c).
Tọa độ của $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ trong cơ sở B_3 là (b, c, a).
Ta viết các ma trận cột tọa độ của $\mathbf{P} = ax^2 + bx + c$ trong các cơ sở khác nhau

$$[\mathbf{p}]_{B_1} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{p}]_{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{p}]_{B_3} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

2. Trong không gian các ma trận vuông cấp hai

$$\mathscr{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

hệ các ma trận sau là hệ cơ sở $(\dim \mathscr{M}_{2\times 2} = 4)$

$$B = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Để xác định tọa độ của $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ta thấy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hay

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4.$$

Vậy tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở B là $(2, 1, 3, -1)$.

3. Trong $\mathbb{R}^3$, cho véctơ $\mathbf{u} = (3, 6, 2)$ và hệ cơ sở

$$B = \{\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 1), \mathbf{c} = (0, -2, 1)\}$$

(a) Trong cơ sở chính tắc $\mathbf{e_1} = (1,0,0), \mathbf{e_2} = (0,1,0), \mathbf{e_3} = (0,0,1)$ tọa độ của $\mathbf{u}$ là $(3,6,2)$.

(b) Véc tơ $\mathbf{u}$ là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$\mathbf{u} = (3,6,2) = (1,0,1) + 2(1,2,1) - (0,-2,1) = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

Vậy $(1,2,-1)$ là tọa độ của $\mathbf{u}$ trong cơ sở $B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ của $\mathbb{R}^3$. Tuy nhiên nếu đổi thứ tự các véc tơ trong cơ sở, chẳng hạn trong cơ sở $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ của $\mathbb{R}^3$ véctơ $\mathbf{u}$ có tọa độ là $(2,1,-1)$.

4. Dễ dàng chứng minh được không gian con sinh bởi các đa thức $1, x, x^2$ và không gian con sinh bởi các đa thức $1, x+1, (x+1)^2$ trùng nhau

$$\mathscr{L}(1, x, x^2) = \mathscr{L}\big(1, x+1, (x+1)^2\big)$$

đồng thời $B = \{1, x, x^2\}$ và $B' = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ là hai cơ sở của không gian con đó. Tọa độ của $(x+1)^2$ trong cơ sở B là $(1,2,1)$ trong khi tọa độ của $(x+1)^2$ trong cơ sở B' bằng $(0,0,1)$.

3.3.2 Đổi cơ sở

Để xây dựng công thức tính tọa độ của cùng một véctơ trong các cơ sở khác nhau, ta đưa vào khái niệm *ma trận chuyển cơ sở*.
Giả sử trong không gian n chiều V cho hai cơ sở $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ và $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$, mỗi véctơ $\mathbf{f}_i$ trong cơ sở F được biểu diễn tuyến tính theo các véctơ $\mathbf{e}_j$ trong cơ sở E

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\mathbf{e}_j = t_{1i}\mathbf{e}_1 + t_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{ji}\mathbf{e}_i + \cdots + t_{ni}\mathbf{e}_n \ \forall i = \overline{1,n}$$

Các toạ độ t_{ji} tạo thành một ma trận (t_{ji}) được gọi là *ma trận chuyển cơ sở* từ E sang F, kí hiệu

$$T_E^F = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Cột thứ i của ma trận trên là cột tọa độ $[\mathbf{f}_i]_E$ trong cơ sở E. Ta sẽ chứng minh ma trận chuyển cơ sở T_E^F từ E sang F khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó chính là ma trận chuyển cơ sở T_F^E từ F sang E

$$\left(T_E^F\right)^{-1} = T_F^E.$$

Thật vậy giả sử $\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n u_{kj}\mathbf{f}_k \ \forall j = \overline{1,n}$ hay $T_F^E = (u_{ij})$ và $T_E^F = (t_{ij})$ như đã kí hiệu ở trên. Ta có

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n t_{ji}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n t_{ji}\sum_{k=1}^n u_{kj}\mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{kj}t_{ji}\right)\mathbf{f}_k$$

Suy ra $\displaystyle\sum_{j=1}^n u_{kj}t_{ji}$ bằng 1 hoặc 0 tuỳ theo $k = i$ hoặc $k \neq i$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n u_{kj}t_{ji} = 1 & \text{nếu } k = i \\ \sum_{j=1}^n u_{kj}t_{ji} = 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases}$$

Các đẳng thức trên có thể viết dưới dạng ma trận $(u_{ji})(t_{ji}) = I_n$, nói cách khác các ma trận chuyển cơ sở từ E sang F và từ F sang E là nghịch đảo của nhau.

Kí hiệu $[\mathbf{u}]_E$ và $[\mathbf{u}]_F$ là *ma trận các toạ độ của cùng một véctơ* $\mathbf{u} \in V$ trong các cơ sở $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ và $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ tương ứng

$$[\mathbf{u}]_E = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{pmatrix} \quad [\mathbf{u}]_F = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{trong đó} \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n b_i\mathbf{f}_i$$

Định lí 3.3.2 *Toạ độ của véctơ* $\mathbf{u}$ *trong cơ sở* $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ *và trong cơ sở* $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ *được liên hệ với nhau bằng hệ thức*

$$T_E^F[\mathbf{u}]_F = [\mathbf{u}]_E \quad \textit{hay} \quad \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{pmatrix}$$

Nhận xét rằng do $\left(T_E^F\right)^{-1} = T_F^E$ suy ra $[\mathbf{u}]_E = T_E^F[\mathbf{u}]_F \Leftrightarrow [\mathbf{u}]_F = T_F^E[\mathbf{u}]_E$.

Chứng minh. Ta có các đẳng thức

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} t_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ji} b_i \right) \mathbf{e}_j$$

Suy ra $a_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ji} b_i$ với mọi $j = 1, 2, ..., n$ hay $[\mathbf{u}]_E = T_E^F [\mathbf{u}]_F$. ■

Hệ thức giữa $[\mathbf{u}]_E$ và $[\mathbf{u}]_F$ trong định lí thường được gọi là *công thức đổi cơ sở* của cùng một véctơ trong các cơ sở khác nhau.

Ví dụ 3.3.2

1. Gọi $E = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho một cơ sở $F = \{\mathbf{f}_1 = (1, 2), \mathbf{f}_2 = (3, 7)\}$. Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang F. Với $\mathbf{x} = (3, 4)$ là một véctơ trong $\mathbb{R}^2$, hãy tìm toạ độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở F.
   Ma trận chuyển cơ sở $T_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, suy ra $T_F^E = \left(T_E^F\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Vậy toạ độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở F

   $$[\mathbf{x}]_F = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Ta có thể kiểm tra lại $\mathbf{x} = (3, 4) = 9\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 = 9(1, 2) - 2(3, 7)$.

2. Trong $\mathbb{R}^3$ hệ

   $$C = \{\mathbf{c}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{c}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{c}_3 = (1, 1, 1)\}$$

   là một cơ sở. Thật vậy, nếu

   $$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

   thì ta có $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Do đó hệ C độc lập tuyến tính. Suy ra C là cơ sở trong $\mathbb{R}^3$.
   Giả sử $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là tọa độ của $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ trong cơ sở C

   $$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3)$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ x_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ x_3 = \alpha_3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \alpha_1 = x_1 - x_2 \\ \alpha_2 = x_2 - x_3 \\ \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở C bằng $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$ hoặc viết dưới dạng ma trận cột

$$[\mathbf{x}]_C = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Một cách khác để tính tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở C là áp dụng công thức đổi tọa độ trong định lí 3.3.2. Kí hiệu E là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^3$. Hiển nhiên ma trận chuyển cơ sở từ E sang C

$$T_E^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_C^E = \left(T_E^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó tọa độ của $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ trong cơ sở C (viết dưới dạng ma trận cột) bằng

$$[\mathbf{x}]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

3. Trong cơ sở $E = \{x^2, x, 1\}$ của không gian các đa thức có bậc không lớn hơn 2, xét cơ sở $B = \{\mathbf{b}_1 = x^2 - 2x - 2, \mathbf{b}_2 = 2x^2 + 3x, \mathbf{b}_3 = 2x^2 + 5x + 1\}$. Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B

$$T_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_B^E = \left(T_E^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Do đó tọa độ của một đa thức bất kì trong cơ sở B, chẳng hạn tọa độ của $\mathbf{u} = x^2 + 2x + 2$ trong B

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Nói cách khác

$$\mathbf{u} = x^2 + 2x + 2 = -7(x^2 - 2x - 2) + 16(2x^2 + 3x) - 12(2x^2 + 5x + 1).$$

Bạn đọc dễ dàng kiểm tra lại đẳng thức trên.

4. Xét không gian $\mathscr{P}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ và các tập hợp $B = \{1, x, x^2\}, C = \{3, (x-1), (x-1)^2\}$. Chứng minh rằng C là cơ sở và tìm tọa độ của $\mathbf{p} = x^2$ trong cơ sở C
   Từ hệ thức $\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot (x-1) + \alpha_3 \cdot (x-1)^2 = \mathbf{0}$ suy ra

$$\alpha_3 x^2 + (-2\alpha_3 + \alpha_2)x + (\alpha_3 + 3\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

hay

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ cho ta nghiệm duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Điều đó chứng minh C là hệ độc lập tuyến tính. Mặt khác $\dim \mathscr{P}_2[x] = 3$, nên C là hệ cơ sở.
Tiếp theo, ta đi tìm tọa độ của $\mathbf{p} = x^2$ trong cơ sở C. Ta có

$$T_B^C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_C^B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức đổi tọa độ trong định lí 3.3.2, tọa độ của $\mathbf{p} = x^2$ trong cơ sở C bằng tích của ma trận T_C^B với cột tọa độ của $\mathbf{p} = x^2$ trong cơ sở B. Do $\mathbf{p} = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

suy ra tọa độ của $\mathbf{p} = x^2$ trong cơ sở C

$$[\mathbf{p}]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta dễ dàng kiểm tra $\mathbf{p} = x^2 = \frac{1}{3} \cdot 3 + 2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2$.

3.3.3 Hạng của hệ véctơ

Định nghĩa 3.3.1 *Trong không gian V cho hệ n véctơ $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$. Ta nói hạng của hệ bằng k, kí hiệu $r(B) = k$, nếu tồn tại k véctơ độc lập tuyến tính trong B và mọi hệ con nhiều hơn k véctơ của B đều phụ thuộc tuyến tính.*

Ta quy ước nếu hệ véctơ chỉ gồm các véctơ không, hạng của hệ bằng 0. Giả sử hạng của hệ véctơ B bằng k, không làm mất tính tổng quát, ta có thể coi k vectơ đầu tiên $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ của B độc lập tuyến tính. Do không tồn tại nhiều hơn k véctơ độc lập tuyến tính trong B, mọi véctơ khác của B đều là tổ hợp tuyến tính của các véctơ này. Nói cách khác mọi véctơ của B đều thuộc không gian con sinh bởi $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$

$$B \subset \mathscr{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k).$$

Suy ra $\mathscr{L}(B) = \mathscr{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$ và $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ là cơ sở của không gian $\mathscr{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$, đồng thời chiều của $\mathscr{L}(B)$ bằng k

$$\dim \mathscr{L}(B) = k.$$

Vậy ta có định lí

Định lí 3.3.3 *Trong không gian V cho hệ véctơ $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_n}\}$. Hạng của hệ véctơ đó bằng số chiều của không gian $\mathscr{L}(B)$ sinh bởi hệ B.*

Như vậy ta có thể nói hạng của hệ véctơ là số lượng tối đa các véctơ độc lập tuyến tính của hệ và cũng bằng số chiều của không gian con sinh bởi hệ đó.

Ví dụ 3.3.3

1. Các véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}$ là 4 véctơ đồng phẳng (trong không gian các véctơ hình học), trong đó có 2 véctơ không đồng phương, khi đó hạng của hệ véctơ $\{\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}\}$ bằng 2.

2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ các véctơ

$$B = \{\mathbf{b}_1 = (1, 2, 0), \mathbf{b}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (0, 3, 0)\}.$$

   Khi đó $r(B) = 2$ vì $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ độc lập tuyến tính và $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

Định lí sau cho ta biết mối quan hệ giữa hạng của một hệ véctơ và hạng của ma trận.

Định lí 3.3.4 *Kí hiệu* $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_m}\}$ *là các véctơ cột của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nm} \end{pmatrix}$$

Khi đó hạng của ma trận A bằng hạng của hệ véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_m}\}$ *và cũng bằng số chiều của không gian con* $\mathscr{L}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_m})$.

Chứng minh. Giả sử hạng của A bằng $r(A) = r$, không làm mất tính tổng quát giả thiết rằng định thức con cấp r nằm ở r hàng đầu và r cột đầu của A khác 0

$$D_r = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ta sẽ chứng minh các véctơ $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_r}\}$ (tương ứng với r cột của định thức trên) độc lập tuyến tính. Thật vậy phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1\underline{\mathbf{u}}_1 + x_2\underline{\mathbf{u}}_2 + ... + x_r\underline{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0}$$

(Các véctơ $\underline{\mathbf{u}}_i$ nhận được từ $\mathbf{u}_i$ bằng cách xoá bớt các thành phần không liên quan tới định thức con cấp r nói trên). Suy ra phương trình véctơ $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + ... + x_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ cũng chỉ có nghiệm tầm thường.

Ta sẽ chứng minh tiếp mọi véctơ $\mathbf{u}_k$ trong hệ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m\}$ đều phụ thuộc tuyến tính vào r véctơ đầu của hệ. Thật vậy với mọi $i = 1, 2, ..., m$ và mọi $k = 1, 2, ..., n$ định thức con cấp $r + 1$ sau luôn có giá trị bằng 0

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} & u_{1i} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} & u_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} & u_{ri} \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kr} & u_{ki} \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển định thức đó theo hàng cuối cùng, với kí hiệu A_{kj} là phần phụ đại số tương ứng của u_{kj}

$$u_{k1}A_{k1} + u_{k2}A_{k2} + \cdots + u_{kr}A_{kr} + u_{ki}D_r = 0.$$

Do $D_r \neq 0$ và A_{kj} không phụ thuộc vào k $(k = 1, 2, ..., n)$, suy ra

$$u_{ki} = \lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2} + \cdots + \lambda_r u_{kr} \quad \text{với mọi} \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Điều đó chứng minh véctơ cột $\mathbf{u}_i$ phụ thuộc tuyến tính vào r véctơ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r\}$. Nói cách khác hạng của hệ véctơ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m\}$ bằng hạng của ma trận A. ■

Chú ý rằng các véctơ cột u_i (của A) tương ứng với các cột của định thức con D_r thường được gọi là các cột cơ sở, đồng thời các hàng của ma trận A tương ứng với các hàng của định thức con D_r được gọi là các hàng cơ sở. Định lí trên khẳng định mọi cột của ma trận A phụ thuộc tuyến tính vào các cột cơ sở của nó. Chứng minh tương tự (thay chữ cột bằng hàng) ta cũng có kết quả mọi véctơ hàng của ma trận A phụ thuộc tuyến tính vào các hàng cơ sở của nó (xét A^T thay cho A).

Đặc biệt từ định lí trên suy ra nếu A là ma trận cỡ $n \times m$ và m cột của ma trận A độc lập tuyến tính, khi đó hạng của A bằng m (hoặc tương tự nếu n hàng của ma trận A độc lập tuyến tính, khi đó $r(A) = n$).
Nếu A là ma trận vuông cấp n, có hạng $r(A) = n$ (hay $\det A \neq 0$) khi đó các véctơ cột cũng như các véctơ hàng của ma trận A độc lập tuyến tính.

Cũng từ định lí trên suy ra các phép biến đổi sơ cấp một ma trận không làm thay đổi số các véctơ hàng cơ sở hoặc số các véctơ cột cơ sở của ma trận, do vậy các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.

Ví dụ 3.3.4

1. Chứng minh rằng trong $\mathbb{R}^3$ các véctơ

$$\mathbf{a} = (1, -1, -2), \mathbf{b} = (2, 1, 0), \mathbf{c} = (2, 3, 1)$$

độc lập tuyến tính.
Thật vậy, gọi A là ma trận mà các cột là các véctơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Định thức của ma trận $\det A = -5 \neq 0$, suy ra $r(A) = 3$. Vậy hạng của hệ các véctơ $\{\mathbf{a} = (1, -1, -2), \mathbf{b} = (2, 1, 0), \mathbf{c} = (2, 3, 1)\}$ cũng bằng 3, các véctơ độc lập tuyến tính.

2. Bổ sung thêm vào ma trận A trong ví dụ trên một cột bất kì, chẳng hạn

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Khi đó hạng của ma trận B vẫn bằng 3 và hệ véctơ cột của ma trận B

$$\{\mathbf{a} = (1, -1, -2), \mathbf{b} = (2, 1, 0), \mathbf{c} = (2, 3, 1), \mathbf{d} = (3, 1, 4)\}$$

có hạng cũng bằng 3.

3.3.4 Tổng và tổng trực tiếp các không gian con

Định nghĩa 3.3.2 *Cho $A, B \triangleleft V$ là hai không gian con của không gian vectơ V. Đặt*

$$A + B = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$$

Khi đó, $A + B$ được gọi là tổng của hai không gian con A và B.

Định lí 3.3.5 *Nếu $A, B \triangleleft V$ thì $A + B \triangleleft V$, $A \cap B \triangleleft V$, nói cách khác tổng và giao của hai không gian con cũng là không gian con.*

Chứng minh. Thật vậy, với $\mathbf{t} \in A + B,\ \mathbf{z} \in A + B$ là 2 véctơ bất kì. Khi đó, tồn tại các vectơ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A,\ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in B$ sao cho

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1,\ \mathbf{z} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2.$$

$\forall \alpha, \beta \in K$, ta có

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + \beta(\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = (\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) + (\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2)$$

Do $A \triangleleft V$ và $B \triangleleft V$ nên $\alpha x_1 + \beta x_2 \in A, \alpha y_1 + \beta y_2 \in B$. Suy ra $\mathbf{u} \in A + B$, vậy $A + B \triangleleft V$.
Phần còn lại của định lí: $A \cap B \triangleleft V$ là hiển nhiên. Bạn đọc tự chứng minh. ■

Nhận xét rằng định lí có thể mở rộng cho tổng và giao của hữu hạn các không gian con $V_i \lhd V,\ i = \overline{1,k}$:

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_i \in V_i\ \forall i = \overline{1,k}\} \text{ và } \bigcap_{i=1}^{k} V_i$$

là các không gian con của V.

Chú ý rằng hợp của hai không gian con nói chung không là không gian con. Ta có thể thấy điều khẳng định đó trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.3.5

Xét 2 không gian con trong $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{và} \quad B = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Hiển nhiên $A \lhd \mathbb{R}^2,\ B \lhd \mathbb{R}^2$ và

$$A + B = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Tuy nhiên $A \cup B$ không là không gian con của $\mathbb{R}^2$ do phép cộng 2 véctơ không đóng trong $A \cup B$. Chẳng hạn 2 véc tơ $\mathbf{a} = (1,0),\ \mathbf{b} = (0,1) \in A \cup B$ tuy nhiên $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1,1) \notin A \cup B$.

Định nghĩa 3.3.3 *Cho A và B là hai không gian con của không gian vectơ V. Nếu $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ thì $A + B$ được gọi là tổng trực tiếp của A và B, kí hiệu $A \oplus B$.*

Trong ví dụ 3.3.5 ở trên, với 2 không gian con của $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{và} \quad B = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

do $A \cap B = \{(0,0)\}$, ta có

$$A \oplus B = \mathbb{R}^2.$$

Định lí 3.3.6 *Mọi véctơ trong tổng trực tiếp $\mathbf{u} \in A \oplus B$ được phân tích duy nhất*

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B.$$

Chứng minh. Giả sử véctơ $\mathbf{u} \in A \oplus B$ có hai cách phân tích

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in A,\ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in B$$

Khi đó $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$. Mặt khác $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \in A$ và $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \in B$, suy ra

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 \in A \cap B = \{\mathbf{0}\}.$$

Vậy $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ và $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ hay $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ và $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$, đ.p.c.m. ■

Định lí 3.3.7 *Nếu $A, B \lhd V$ là hai không gian con hữu hạn chiều của không gian véctơ V thì*

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Đặc biệt, $\dim(A \oplus B) = \dim A + \dim B$.

Chứng minh. Giả sử $\dim(A \cap B) = k$, $\dim A = n, \dim B = m$. Chọn một cơ sở bất kì của $A \cap B$

$$M = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k\}$$

Theo định lí 3.2.4 ta sẽ bổ sung véctơ để mở rộng M thành các cơ sở của A, cũng như cơ sở của B. Bổ sung $(n - k)$ vec tơ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-k}$ để hệ

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-k}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k\} \quad \text{là cơ sở của } A.$$

Bổ sung $(m - k)$ vec tơ $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{m-k}$ để hệ

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{m-k}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k\} \quad \text{là cơ sở của } B.$$

Ta sẽ chứng minh $m + n - k$ vec tơ

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-k}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{m-k}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k\}$$

là một cơ sở của $A + B$.

Thật vậy, xét tổ hợp tuyến tính của các véctơ trong hệ $\mathcal{C}$

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_{n-k}\mathbf{a}_{n-k} + \beta_1\mathbf{c}_1 + \beta_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{c}_k +$$

$$+\gamma_1\mathbf{b}_1 + \gamma_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \gamma_{m-k}\mathbf{b}_{m-k} = \mathbf{0} \quad \text{hay} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

trong đó $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_{n-k}\mathbf{a}_{n-k}$, $\mathbf{b} = \gamma_1\mathbf{b}_1 + \gamma_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \gamma_{m-k}\mathbf{b}_{m-k}$ và $\mathbf{c} = \beta_1\mathbf{c}_1 + \beta_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{c}_k$.
Do $\mathbf{a} = -\mathbf{b} - \mathbf{c} \in B$ và $\mathbf{a} = \sum \alpha_i\mathbf{a}_i \in A$, suy ra $\mathbf{a} \in A \cap B$. Điều đó chỉ xảy ra

khi $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Vậy $\mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
Tương tự từ đẳng thức $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ suy ra $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$.
Các véctơ $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$ kéo theo các hệ số $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ bằng 0. Điều đó chứng minh

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-k}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{m-k}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k\}$$

là cơ sở của $A + B$. Từ đây suy ra $\dim(A + B) = n + m - k$ hay

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B). \ \blacksquare$$

Ví dụ 3.3.6

1. Trong $\mathbb{R}^3$, xét hai không gian con

$$A = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{và} \quad B = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

   Rõ ràng $A \lhd \mathbb{R}^3, B \lhd \mathbb{R}^3$. Hơn nữa $M = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)\}$ là cơ sở của A và $N = \{\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở của B. Do $A \cap B = \mathbf{0}$ nên $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

2. Xét trong $\mathbb{R}^3$ hai không gian vectơ con (về mặt hình học là 2 mặt phẳng đi qua $(0, 0, 0)$)

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

$$B = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 - y_2 + y_3 = 0\}$$

   Chọn các cơ sở của A và B lần lượt là $M = \{\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)\}$ và $N = \{\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_2 = (0, 1, 1)\}$. Không gian $A \cap B$ (giao của 2 mặt phẳng) gồm các véctơ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   trong đó $C \in \mathbb{R}$ tùy ý, là không gian con một chiều với $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 1)$ là cơ sở của $A \cap B$. (Về mặt hình học $A \cap B$ là đường thẳng đi qua $(0, 0, 0)$ nhận $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 1)$ làm véctơ chỉ phương).
   Ta có thể kiểm tra $A + B = \mathbb{R}^3$ và $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1\}$ là một cơ sở của $A + B$.

3. Các nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ có thể coi là giao của ba mặt phẳng đi qua $(0,0,0)$ (ba không gian con) hoặc giao của hai không gian con dưới đây của $\mathbb{R}^3$

$$(d): \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (P): \ 4x + 3y - 2z = 0.$$

   Về mặt hình học (d) là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), do đó giao của chúng bằng (d). Đó chính là không gian con sinh bởi véctơ $(1,2,5)$.

4. Kí hiệu A và B là các không gian con của $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x,y,z) \mid x - 3y + z = 0\}, \quad B = \{(x,y,z) \mid 4x + 3y - 2z = 0\}.$$

   Hiển nhiên $A + B = \mathbb{R}^3$, tuy nhiên đó không là tổng trực tiếp, do A và B là các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$, $A \cap B$ là đường thẳng giao của 2 mặt phẳng nên $A \cap B \neq \{\mathbf{0}\}$.

   Nhận xét rằng do B là không gian véc tơ trong $\mathbb{R}^3$ nên tập hợp $\{\mathbf{a} - \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$, kí hiệu $A - B$ cũng là tập hợp các véc tơ $\{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$. Do đó $A - B = A + B = \mathbb{R}^3$.

5. Nếu kí hiệu C là không gian con $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ và D là không gian con sinh bởi véctơ $\mathbf{b} = (3, -4, 0)$, khi đó tổng trực tiếp $C \oplus D$ chính là không gian con $B = \{(x,y,z) \mid 4x + 3y - 2z = 0\}$

$$B = C \oplus D.$$

   Thật vậy về mặt hình học C là đường thẳng đi qua gốc tọa độ nhận véc tơ $\mathbf{a} = (1,2,5)$ làm véc tơ chỉ phương. Suy ra $C = \mathscr{L}(\mathbf{a})$ và $D = \mathscr{L}(\mathbf{b})$. Hai đường thẳng (không gian con) C và D có tổng trực tiếp là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ chứa 2 véc tơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$. Dễ dàng kiểm tra thấy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$, suy ra $B = C \oplus D$.

   Nhận xét rằng theo định lí 3.3.6, mọi véc tơ trong B phân tích duy nhất theo 2 véc tơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \ \forall \mathbf{u} \in B.$$

3.4 Ánh xạ tuyến tính

3.4.1 Các khái niệm cơ bản về ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 3.4.1 *Cho hai không gian véctơ thực U và V. Ánh xạ $f : U \to V$ được gọi là ánh xạ tuyến tính từ không gian U vào không gian V nếu*

- $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
- $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, *với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in U$

Trường hợp U trùng với V thì ánh xạ tuyến tính $f : U \to U$ được gọi là *phép biến đổi tuyến tính trên U*.
Trường hợp $V = \mathbb{R}$ thì ánh xạ tuyến tính $f : U \to \mathbb{R}$ được gọi là *dạng tuyến tính trên U*.

Định lí 3.4.1 *Điều kiện cần và đủ để $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính là*

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \quad \text{với mọi } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{mọi } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$$

Chứng minh. Điều kiện trên là cần vì theo định nghĩa ánh xạ tuyến tính

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = f(\alpha\mathbf{x}) + f(\beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}).$$

Điều kiện đó cũng là đủ vì yêu cầu thứ nhất của định nghĩa được thỏa mãn nếu chọn $\alpha = \beta = 1$, yêu cầu thứ hai cũng được thỏa mãn nếu chọn $\beta = 0$. ■

Ví dụ 3.4.1 *Các ví dụ về ánh xạ tuyến tính*

1. Ánh xạ $f : U \to V$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$ (véctơ $\mathbf{0}$ trong V) với mọi $\mathbf{x} \in U$ là ánh xạ tuyến tính (còn được gọi là *ánh xạ không*).
2. Ánh xạ đồng nhất $f : V \to V$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ từ không gian V lên V là ánh xạ tuyến tính, thường được kí hiệu I hoặc id_V.
3. Ánh xạ $f : V \to V$ được xác định như sau

   $$f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

   với $\alpha \in \mathbb{R}$ là số thực cố định nào đó, là phép biến đổi tuyến tính, còn được gọi là phép vị tự. f là phép vị tự phóng to nếu $|\alpha| > 1$ và thu nhỏ nếu $|\alpha| < 1$.

4. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$f(x_1, x_2) = x_1, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

là ánh xạ tuyến tính, còn được gọi là phép chiếu $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}$.

5. Gọi h là một trong các phép biến đổi hình học: phép chiếu song song, vuông góc lên đường thẳng hoặc mặt phẳng cố định nào đó, phép lấy đối xứng qua tâm (hoặc qua đường thẳng, qua mặt phẳng nào đó), phép tịnh tiến, phép quay, phép vị tự (trong chương trình toán ở bậc phổ thông trung học, chúng ta đã làm quen với các phép biến đổi hình học này). Kí hiệu A', B' là ảnh qua phép biến đổi h của các điểm A, B

$$h(A) = A', \quad h(B) = B'$$

Gọi V là không gian các véctơ hình học $V = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathbb{R}^3\}$. Ta biết rằng V là không gian tuyến tính thực. Ánh xạ $f : V \to V$ được xác định như sau

$$f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}, \quad \text{với mọi } \overrightarrow{AB} \in V$$

là phép biến đổi tuyến tính. (Ta cũng đặt tên cho phép biến đổi tuyến tính f các tên tương ứng của h: *phép chiếu, phép quay...*)

Thật vậy yêu cầu đầu tiên của ánh xạ tuyến tính là hiển nhiên

$$f(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = f(\overrightarrow{AB}) + f(\overrightarrow{BC})$$

Yêu cầu thứ hai $f(\alpha\overrightarrow{AB}) = \alpha f(\overrightarrow{AB})$ cũng thỏa mãn với các phép biến đổi hình học kể trên.

Khá nhiều phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ thuộc dạng này. Chẳng hạn phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng xOy trong $\mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, y, 0), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

phép đối xứng qua $O(0, 0, 0)$

$$d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, d(x, y, z) = (-x, -y, -z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

phép quay quanh gốc tọa độ một góc φ trong mặt phẳng xOy

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

phép chiếu vuông góc lên đường thẳng...

6. $\mathscr{P}_n[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực với bậc không vượt quá n. Ánh xạ $f : \mathscr{P}_n[x] \to \mathscr{P}_n[x], \quad f(p(x)) = p'(x)$ với $\forall p(x) \in \mathscr{P}_n[x]$, là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{P}_n[x]$.

7. Kí hiệu $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{M}_3$ là các không gian tuyến tính gồm các ma trận cột

$$\mathscr{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathscr{M}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ánh xạ $A : \mathscr{M}_3 \to \mathscr{M}_2$ được xác định như sau

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Sử dụng tính chất phân phối của phép toán nhân ma trận dễ dàng chứng minh được A là ánh xạ tuyến tính từ $\mathscr{M}_3$ vào $\mathscr{M}_2$.

Nhận xét rằng một ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ hoàn toàn được xác định, nếu ta biết các ảnh của các véc tơ trong một cơ sở nào đó của U. Thật vậy giả sử $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ là một cơ sở của U và $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), ..., f(\mathbf{a}_n)$ là ảnh của chúng. Khi đó ảnh của véctơ bất kì $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i$ trong U bằng

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i \mathbf{a}_i) = \alpha_1 f(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{a}_n).$$

Nhận xét này là cơ sở cho khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính được xét tới trong mục sau.

Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$.

1. Ánh xạ tuyến tính f chuyển véctơ không trong U thành véctơ không trong V

$$f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V.$$

Thật vậy $f(\mathbf{0}_U) = f(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$.

2. Nếu hệ các véctơ $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_m\}$ phụ thuộc tuyến tính trong U thì $f(B) = \{f(\mathbf{b}_1), f(\mathbf{b}_2), ..., f(\mathbf{b}_m)\}$ cũng phụ thuộc tuyến tính trong V.
   Thật vậy $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho
   $$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + ... + \alpha_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}_U.$$
   Do $f(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + ... + \alpha_m \mathbf{b}_m) = \alpha_1 f(\mathbf{b}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{b}_2) + ... + \alpha_m f(\mathbf{b}_m)$ suy ra
   $$\alpha_1 f(\mathbf{b}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{b}_2) + ... + \alpha_m f(\mathbf{b}_m) = f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V.$$
   Nói cách khác ánh xạ tuyến tính chuyển hệ các véctơ phụ thuộc tuyến tính thành hệ phụ thuộc tuyến tính. Chú ý rằng ảnh của các véctơ độc lập tuyến tính (qua ánh xạ tuyến tính) nói chung không độc lập tuyến tính.

3. *Ánh xạ tuyến tính chuyển một không gian con thành không gian con.* Giả sử A là không gian véctơ con của U, $A \triangleleft U$, thì tập ảnh của A
   $$f(A) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}$$
   cũng là không gian con của V.
   Thật vậy xét 2 véctơ bất kì $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \in f(A)$
   $$\alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) = f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}).$$
   Do A là không gian véctơ con nên $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in A \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, suy ra
   $$\alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) = f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \in f(A).$$

4. Tương tự như tính chất 3, với ánh xạ tuyến tính, *tập nghịch ảnh của không gian véctơ con cũng là không gian con.* Giả sử B là không gian véctơ con của V, xét 2 véctơ bất kì $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(B)$. Khi đó $f(\mathbf{x}),\ f(\mathbf{y}) \in B$ và
   $$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \in B.$$
   Do đó $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in f^{-1}(B) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Theo định lí 3.1.1, $f^{-1}(B)$ là không gian con của V.

Định nghĩa 3.4.2 *Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$. Tập hợp $f(U)$ (gồm các phần tử ảnh của U qua ánh xạ f) được gọi là không gian ảnh của f, kí hiệu $Im(f)$*
$$Im(f) = \{f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\}$$
Tập nghịch ảnh $f^{-1}(\mathbf{0}_V)$ được gọi là nhân của f, kí hiệu $Ker(f)$
$$Ker(f) = \{\mathbf{u} \in U \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V\}.$$

Từ tính chất 3 và 4 của ánh xạ tuyến tính suy ra $\mathrm{Im}(f)$ và $\mathrm{Ker}(f)$ là các không gian con của U và V tương ứng.

Lưu ý rằng $\mathrm{Ker}(f)$ là không gian con nên $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$ và chứa ít nhất một véctơ $\mathbf{0}$ của không gian U. Ta có định lí sau

Định lí 3.4.2 *Nếu $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính thì f là đơn ánh khi và chỉ khi $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.*

Chứng minh. Nếu f là đơn ánh thì nghịch ảnh $f^{-1}(\mathbf{0}_V)$ chỉ gồm duy nhất một phần tử $\mathbf{0}_U$, hay $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.
Ngược lại giả sử $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$. Từ hệ thức $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, ta có

$$f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Vậy f là đơn ánh. ■

Ví dụ 3.4.2

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, 2x + 3z).$$

a) Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.
b) Xác định không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$ và tìm một cơ sở của nó.
c) Xác định không gian nhân $\mathrm{Ker}(f)$ và tìm một cơ sở của không gian đó.

Ta sẽ lần lượt giải từng phần của ví dụ này.

a) Trước hết ta chứng minh f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ và $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ là 2 véctơ tùy ý trong $\mathbb{R}^3$. Với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}\alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}) = \Big(&(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2),\\ &(\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2),\\ &2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha z_1 + \beta z_2)\Big) = f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Vậy f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

b) Xác định không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$ tức là tìm các véctơ $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+y+z &= t_1 \qquad (1) \\ x-y+2z &= t_2 \qquad (2) \\ 2x+3z &= t_3 \qquad (3) \end{cases}$$

Nhân các phương trình (1), (2) với -1 rồi cộng vào (3) ta được

$$0 = t_3 - t_1 - t_2. \qquad (4)$$

Dễ dàng chứng minh (4) cũng là điều kiện đủ để hệ phương trình có nghiệm. Vậy không gian ảnh của f

$$\mathrm{Im}(f) = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t_3 - t_1 - t_2 = 0\}.$$

Về mặt hình học không gian $\mathrm{Im}(f)$ chính là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ $x + y - z = 0$. Từ đó suy ra $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ và $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ là 2 véctơ cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$.

c) Không gian nhân $\mathrm{Ker}(f)$ là tập hợp các véctơ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \\ 2x+3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -z \\ x-y = -2z \end{cases}$$

Dễ dàng thấy nghiệm của hệ thuần nhất trên đây

$$\mathrm{Ker}(f) = \{C(-3, 1, 2) \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Như vậy $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, véctơ $(-3, 1, 2)$ là cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$.

Định lí 3.4.3 *U là không gian tuyến tính n chiều, $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim U \ (= n).$$

Chứng minh. Giả sử $\dim Ker(f) = k$, gọi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k\}$ là cơ sở nào đó của $\text{Ker}(f) \subset U$. Bổ sung thêm $n-k$ véctơ để hệ các véctơ sau

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$$

trở thành cơ sở của không gian U. Ảnh của các véctơ cơ sở này lập thành hệ sinh của không gian con $\text{Im}(f)$. Song do $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k \in \text{Ker}(f)$ nên

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2) = \cdots = f(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$$

suy ra $\{f(\mathbf{e}_{k+1}), f(\mathbf{e}_{k+2}), ..., f(\mathbf{e}_n)\}$ là hệ sinh của không gian con $\text{Im}(f)$. Ta sẽ chứng minh hệ các véctơ $\{f(\mathbf{e}_{k+1}), f(\mathbf{e}_{k+2}), ..., f(\mathbf{e}_n)\}$ là cơ sở của $\text{Im}(f)$ bằng việc chứng minh hệ độc lập tuyến tính. Giả sử

$$\alpha_{k+1} f(\mathbf{e}_{k+1}) + \alpha_{k+2} f(\mathbf{e}_{k+2}) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}, \quad \text{suy ra}$$

$$f(\alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \alpha_{k+2}\mathbf{e}_{k+2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0},$$

hay $\alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \alpha_{k+2}\mathbf{e}_{k+2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n \in \text{Ker}(f)$. Mặt khác mọi véctơ trong $\text{Ker}(f)$ là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k$

$$\alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \alpha_{k+2}\mathbf{e}_{k+2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k$$

Do $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ là cơ sở của U nên chúng độc lập tuyến tính, suy ra

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \cdots = \alpha_n = 0$$

điều đó chứng minh các véctơ $f(\mathbf{e}_{k+1}), f(\mathbf{e}_{k+2}), ..., f(\mathbf{e}_n)$ độc lập tuyến tính và là cơ sở của $\text{Im}(f)$. Suy ra $\dim \text{Im}(f) = n - k$. Nói cách khác

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = k + (n-k) = n. \quad \blacksquare$$

Định nghĩa 3.4.3 *Số chiều của không gian ảnh $Im(f)$ được gọi là hạng của ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$, kí hiệu $r(f)$. Số chiều của không gian nhân $Ker(f)$ được gọi là số khuyết của ánh xạ tuyến tính f, kí hiệu $d(f)$.*
Phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ trên không gian V được gọi là không suy biến nếu hạng của f bằng $\dim V$, ngược lại f được gọi là suy biến.

Định lí trên còn được viết dưới dạng

$$r(f) + d(f) = n \text{ (số chiều của không gian nguồn)}$$

Từ định lí trên dễ dàng chứng minh được phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ không suy biến khi và chỉ khi

$$Im(f) = V \quad \Leftrightarrow \quad \dim Im(f) = \dim V \quad \Leftrightarrow \quad Ker(f) = \{\mathbf{0}\}.$$

Định lí 3.4.4 *Nếu ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ có ánh xạ ngược thì ánh xạ ngược $f^{-1} : V \to U$ cũng là ánh xạ tuyến tính.*

Chứng minh. Với $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$, $\exists\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ sao cho $\mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1), \mathbf{y}_2 = f(\mathbf{x}_2)$ hay $\mathbf{x}_1 = f^{-1}(\mathbf{y}_1), \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Ta có

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) &= f^{-1}\big(\alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{x}_2)\big) = f^{-1}\big(f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2)\big) \\ &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 = \alpha_1 f^{-1}(\mathbf{y}_1) + \alpha_2 f^{-1}(\mathbf{y}_2). \end{aligned}$$

Vậy f^{-1} là ánh xạ tuyến tính. ■

Định nghĩa 3.4.4 *Hai không gian tuyến tính U và V được gọi là đẳng cấu tuyến tính (nói tắt là đẳng cấu) nếu tồn tại một song ánh tuyến tính từ U lên V.*

Định lí 3.4.5 *Điều kiện cần và đủ để hai không gian véctơ U và V đẳng cấu là $\dim U = \dim V$.*

Chứng minh. Giả sử f là song ánh tuyến tính từ U lên V. Theo định lí 3.4.3

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim U.$$

Do f là song ánh nên $\dim Ker(f) = 0, \dim Im(f) = \dim V$. Từ hệ thức trên suy ra $\dim U = \dim V$.
Ngược lại, nếu hai không gian véctơ U và V có số chiều bằng nhau, ánh xạ tuyến tính chuyển lần lượt các véctơ cơ sở của U vào các véctơ cơ sở của V là song ánh. Suy ra U và V đẳng cấu. ■

Chú ý rằng một song ánh tuyến tính từ U lên V chuyển một hệ sinh của U thành hệ sinh của V, chuyển hệ các véctơ độc lập tuyến tính trong U thành hệ các véctơ độc lập tuyến tính trong V và do đó cũng chuyển một cơ sở của U thành một cơ sở của V.

Ví dụ 3.4.3

Cho hai không gian véctơ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ và $V = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}$. (Về phương diện hình học, xét trong không gian có hệ trục tọa độ Đề các $Oxyz$, U là mặt phẳng đi qua $O(0, 0, 0)$ và V là mặt phẳng xOy). Dễ dàng chỉ ra $\dim U = \dim V = 2$, hai không gian véc tơ U và V đẳng cấu. Giữa hai không gian U và V tồn tại vô số song ánh tuyến tính, chẳng hạn phép chiếu vuông góc mọi điểm của mặt phẳng U lên mặt phẳng xOy là song ánh tuyến tính

$$f : U \to V,\ \ f(x, y, z) = (x, y, 0).$$

3.4.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Xét hai không gian tuyến tính U và V với các cơ sở $B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ và $B_2 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ tương ứng. Ánh xạ tuyến tính $T : U \to V$ được xác định duy nhất nếu biết các ảnh $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), ..., T(\mathbf{e}_n)$ trong V

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{i1}\mathbf{f}_i + \cdots + a_{m1}\mathbf{f}_m \\ &\cdots \\ T(\mathbf{e}_j) &= a_{1j}\mathbf{f}_1 + a_{2j}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{ij}\mathbf{f}_i + \cdots + a_{mj}\mathbf{f}_m \\ &\cdots \\ T(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{in}\mathbf{f}_i + \cdots + a_{mn}\mathbf{f}_m \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.4.5 *Ma trận A mà cột thứ j của A là tọa độ của véctơ $T(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, ..., n$ được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : U \to V$ trong các cơ sở B_1, B_2 đã cho*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nhận xét rằng ma trận của ánh xạ tuyến tính từ không gian n chiều vào không gian m chiều là ma trận kiểu $m \times n$.
Ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính $T : U \to V$ trong các cơ sở khác nhau nói chung sẽ khác nhau.
Nếu $T : U \to U$ là phép biến đổi tuyến tính, không gian đích và không gian nguồn trùng nhau (đều là không gian U), gọi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ là cơ sở của U,

khi đó ma trận của T trong cơ sở B được xác định như sau: cột thứ j của ma trận là tọa độ của véctơ $T(\mathbf{e}_j), j = 1, 2, ..., n$ trong chính cơ sở B đó. *Ma trận của phép biến đổi tuyến tính là ma trận vuông.*

Sử dụng ma trận của ánh xạ tuyến tính ta có thể tính được toạ độ của véctơ ảnh $T(\mathbf{x})$ trong cơ sở B_2 nếu biết toạ độ của véctơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở B_1.

Thật vậy giả sử $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở B_1

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Khi đó

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{f}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\mathbf{f}_m.$$

Như vậy tọa độ của $T(\mathbf{x})$ trong cơ sở B_2 bằng

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).$$

Viết tọa độ của $\mathbf{x}, T(\mathbf{x})$ dưới dạng ma trận cột

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \; [T(\mathbf{x})] = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

hay $[T(\mathbf{x})] = A[\mathbf{x}]$. Nói cách khác *ma trận cột tọa độ của véctơ ảnh* $[T(\mathbf{x})]$ (vế trái của đẳng thức trên) là *tích của 2 ma trận: ma trận ánh xạ tuyến tính A với ma trận cột tọa độ* $[\mathbf{x}]$.

Ví dụ 3.4.4

1. Ma trận của phép biến đổi đồng nhất trong không gian n chiều V là ma trận đơn vị cấp n
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
Thật vậy, trong một cơ sở bất kì $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, ảnh của các véctơ cơ sở bằng chính nó
$$id_V(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + 1 \cdot \mathbf{e}_i + \cdots + 0 \cdot \mathbf{e}_n \quad \forall i = \overline{1, n}.$$
Tọa độ của nó trong cơ sở B chính là cột thứ i của ma trận đơn vị.

2. Ma trận của phép vị tự $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ trong một cơ sở bất kì của $\mathbb{R}^3$, tương tự như ví dụ trên có dạng
$$[f] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

3. Ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ (người ta gọi ánh xạ này là phép chiếu lên $\mathbb{R}^2$). Ma trận của T trong các cơ sở chính tắc $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ của $\mathbb{R}^2$ bằng
$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Tổng quát hơn ví dụ trên, xét phép chiếu song song với phương $\overrightarrow{\mathbf{v}}(1, 0, -1)$ lên mặt phẳng xOy, kí hiệu $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Ảnh của các véctơ cơ sở
$$T(1, 0, 0) = (1, 0),\ T(0, 1, 0) = (0, 1),\ T(0, 0, 1) = (1, 0).$$
Ma trận của phép chiếu T nói trên trong các cơ sở chính tắc
$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

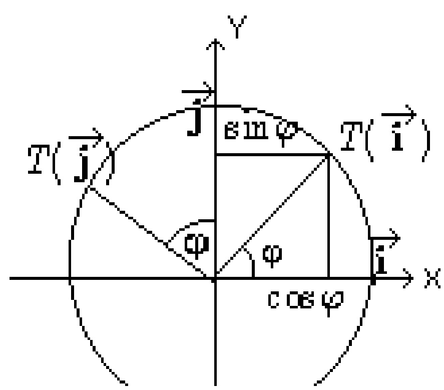
Dựa vào ma trận $[T]$, dễ dàng tính được tọa độ ảnh của véctơ bất kì qua phép chiếu song song nói trên. Chẳng hạn ảnh của véctơ $\overrightarrow{\mathbf{a}}(1,2,3)$ viết dưới dạng ma trận cột

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Phép chiếu song song nói trên đưa $\overrightarrow{\mathbf{a}}(1,2,3)$ thành véctơ $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4,2) \in \mathbb{R}^2$: $T(1,2,3) = (4,2)$.

5. Xét phép quay tâm O trong mặt phẳng xOy với góc quay φ. Kí hiệu phép biến đổi tuyến tính đó là $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Gọi $B = \{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

$$T(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = T(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi), T(\overrightarrow{\mathbf{j}}) = T(0,1) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$



Hình 3.1: Phép quay

Vậy ma trận của phép quay trong cơ sở chính tắc là

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Chẳng hạn ma trận của phép quay tâm O với góc quay $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tuy nhiên ma trận của phép quay đó trong cơ sở khác, ví dụ trong cơ sở $B' = \{\overrightarrow{2\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}\}$

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Cho phép biến đổi tuyến tính $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ với ma trận của A trong cơ sở chính tắc $[A] = \begin{pmatrix} -12 & 35 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$. Nói cách khác

$$A(1,0) = (-12,-6), \ A(0,1) = (35,17).$$

Gọi $B = \{\mathbf{u} = (5,2), \mathbf{v} = (7,3)\}$ là một cơ sở khác của $\mathbb{R}^2$. Hiển nhiên tọa độ của $A\mathbf{u}$ và $A\mathbf{v}$ trong cơ sở chính tắc (viết dưới dạng véctơ cột)

$$[A\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} -12 & 35 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2[\mathbf{u}]$$

$$[A\mathbf{v}] = \begin{pmatrix} -12 & 35 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 3[\mathbf{v}]$$

Như vậy $A\mathbf{u} = 2\mathbf{u}, A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$, do đó ma trận của A trong cơ sở B nói trên có dạng chéo

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.4.3 Các phép toán giữa các ánh xạ tuyến tính

Xét tập hợp $\mathscr{L}(E,F)$ gồm tất cả các ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ E vào không gian F. Giả sử $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ là hai ánh xạ bất kì. Ta xác định các phép toán sau:

1. Cộng 2 ánh xạ tuyến tính: *tổng của f và g* là ánh xạ từ E vào F, kí hiệu $f + g : E \to F$

$$(f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \quad \text{với mọi} \quad \mathbf{u} \in E.$$

2. Nhân ánh xạ tuyến tính với một số: *tích của* f *với một số* $\alpha \in \mathbb{R}$ là ánh xạ từ E vào F, kí hiệu $\alpha f : E \to F$

$$(\alpha f)(\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) \quad \text{với mọi} \quad \mathbf{u} \in E.$$

Ta sẽ chứng minh $f + g, \alpha f$ cũng là các ánh xạ tuyến tính từ không gian E vào không gian F.

Thật vậy với các số thực bất kì $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ tùy ý

$$(f+g)(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})+g(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = f(\alpha\mathbf{u})+f(\beta\mathbf{v})+g(\alpha\mathbf{u})+g(\beta\mathbf{v})$$
$$= \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) + \alpha g(\mathbf{u}) + \beta g(\mathbf{v}) = \alpha(f+g)(\mathbf{u}) + \beta(f+g)(\mathbf{v}).$$

Vậy $f + g$ là ánh xạ tuyến tính: $f + g \in \mathscr{L}(E, F)$. Chứng minh tương tự αf cũng là ánh xạ tuyến tính: $\alpha f \in \mathscr{L}(E, F)$. Từ đó suy ra $\mathscr{L}(E, F)$ là không gian tuyến tính.

3. Cho hai ánh xạ tuyến tính $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Hợp thành của f và g, kí hiệu $g \circ f$ từ E vào G

$$g \circ f(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) \quad \text{với mọi} \quad \mathbf{u} \in E$$

được gọi là *tích hai ánh xạ tuyến tính* g và f. Dễ dàng chứng minh $g \circ f$ là ánh xạ tuyến tính: $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Từ định nghĩa các phép toán đối với ánh xạ tuyến tính nêu trên, bạn đọc có thể chứng minh tính chất: *tích các ánh xạ tuyến tính có tính kết hợp, tính phân phối đối với phép cộng*

- $(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) = f \circ (\alpha g)$ với $\forall g \in \mathscr{L}(E, F)$, $\forall f \in \mathscr{L}(F, G)$ và $\forall \alpha \in K$.
- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ với $\forall h \in \mathscr{L}(V, E)$, $\forall g \in \mathscr{L}(E, F)$ và $\forall f \in \mathscr{L}(F, G)$.
- $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$ với $\forall g, g' \in \mathscr{L}(E, F)$ và $\forall f \in \mathscr{L}(F, G)$.
- $(g + g') \circ h = g \circ h + g' \circ h$ với $\forall h \in \mathscr{L}(V, E)$ và $\forall g, g' \in \mathscr{L}(E, F)$.

Cũng như tích hai ma trận, tích hai ánh xạ tuyến tính nói chung không có tính giao hoán. Về ma trận của tổng, tích các ánh xạ tuyến tính, ta có định lí sau

Định lí 3.4.6 *Giả sử* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ *và* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ *là các cơ sở của các không gian* E, F, G *tương ứng,* $f, g \in \mathscr{L}(E, F), h \in \mathscr{L}(F, G)$ *là các ánh xạ tuyến tính. Kí hiệu* $[f], [g], [h]$ *là các ma trận của* f, g, h *trong các cơ sở đã cho. Khi đó*

- $[f] + [g]$ *là ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f + g : E \to F$.
- $\lambda[f]$ *là ma trận của ánh xạ tuyến tính* λf $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- $[h] \cdot [g]$ *là ma trận của ánh xạ tích* $h \circ g : E \to G$.

Các kết quả trên có thể viết tắt: $[f + g] = [f] + [g]$, $[\lambda f] = \lambda[f]$, $[h \circ g] = [h][g]$.

Chứng minh. Hai mệnh đề đầu dành cho bạn đọc tự chứng minh. Ta sẽ chứng minh mệnh đề cuối.
Giả sử $[h] = (h_{ij})_{p\times m}$ là ma trận của ánh xạ $h : F \to G$ và $[g] = (g_{ij})_{m\times n}$ là ma trận của ánh xạ $g : E \to F$. Để tìm ma trận của ánh xạ tích $h \circ g$, ta tính tọa độ của ảnh $(h \circ g)(\mathbf{e}_i)$ trong G và các tọa độ đó được viết vào cột thứ i của ma trận, $i = 1, 2, ..., n$.

$$(h \circ g)(\mathbf{e}_i) = h(g(\mathbf{e}_i)) = h\left(\sum_{j=1}^{m} g_{ji}\mathbf{f}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} g_{ji}h(\mathbf{f}_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} g_{ji}\sum_{k=1}^{p} h_{kj}\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m} h_{kj}g_{ji}\right)\mathbf{u}_k.$$

Vậy phần tử nằm ở hàng k, cột i của ma trận $[h \circ g]$ là $\sum_{j=1}^{m} h_{kj}g_{ji}$. Mặt khác đây chính là tích hàng thứ k của ma trận $[h]$ với cột thứ i của $[g]$. Điều này đúng với mọi $k = 1, 2, ..., n,\ i = 1, 2, ..., p$. Suy ra

$$[h \circ g] = [h][g] \quad \text{đ.p.c.m.} \ \blacksquare$$

Xét trường hợp riêng khi phép biến đổi tuyến tính $f : E \to E$ không suy biến. Khi đó theo định lí 3.4.4, f là song ánh và do vậy tồn tại ánh xạ ngược $f^{-1} : E \to E$

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_E \quad (\text{ánh xạ đồng nhất trên } E).$$

Định lí cũng khẳng định f^{-1} là phép biến đổi tuyến tính trên E. Áp dụng định lí trên, tích 2 ma trận của 2 phép biến đổi f và f^{-1}

$$[f][f^{-1}] = I \quad \text{là ma trận đơn vị} \quad \Rightarrow \quad [f^{-1}] = [f]^{-1}.$$

Vậy *ma trận của ánh xạ ngược f^{-1} bằng ma trận nghịch đảo của ma trận của f.* Một hệ quả trực tiếp được suy ra từ khẳng định này là: *điều kiện cần và đủ để phép biến đổi tuyến tính $f : E \to E$ không suy biến là* $\det[f] \neq 0$.

Ví dụ 3.4.5

Ta đã biết phép quay tâm O trong mặt phẳng xOy với góc quay φ là phép biến đổi tuyến tính có ma trận trong cơ sở chính tắc

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Tích của hai phép quay với góc quay φ, θ là phép biến đổi tuyến tính có ma trận

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$$

Đây cũng là phép quay với góc quay $\varphi + \theta$.

Đặc biệt khi $\varphi + \theta = 0$ hay $\theta = -\varphi$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

các phép quay với góc quay bằng φ và $-\varphi$ là các phép biến đổi tuyến tính ngược của nhau.

3.4.4 Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Bây giờ chúng ta sẽ xét đến ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau. Ta nhắc lại các kí hiệu trong mục đổi cơ sở: T là ma trận chuyển cơ sở từ $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ sang $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\mathbf{e}_j = t_{1i}\mathbf{e}_1 + t_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{ji}\mathbf{e}_i + \cdots + t_{ni}\mathbf{e}_n \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

T không suy biến và T^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ sang $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$.

Định lí 3.4.7 *Giả sử ma trận của phép biến đổi tuyến tính h trong cơ sở E là A và trong cơ sở F là B.*

$$A = [h]_E \quad \text{và} \quad B = [h]_F$$

T là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở E sang cơ sở F, khi đó

$$A = TBT^{-1} \quad hay \quad B = T^{-1}AT.$$

Chứng minh. Kí hiệu các tọa độ của $\mathbf{u}$ cũng như $h(\mathbf{u})$ dưới dạng cột trong các cơ sở E, F:

$$[\mathbf{u}]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{u}]_F = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ .. \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad [h(\mathbf{u})]_E = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}, \quad [h(\mathbf{u})]_F = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ .. \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$[h(\mathbf{u})]_E = A[\mathbf{u}]_E, \quad [h(\mathbf{u})]_F = B[\mathbf{u}]_F.$$

Trong mục đổi cơ sở, ta biết rằng $[\mathbf{u}]_E = T[\mathbf{u}]_F$, $[h(\mathbf{u})]_E = T[h(\mathbf{u})]_F$. Suy ra

$$T[h(\mathbf{u})]_F = [h(\mathbf{u})]_E = A[\mathbf{u}]_E = A(T[\mathbf{u}]_F) = (AT)[\mathbf{u}]_F$$

Nhân cả 2 vế đẳng thức trên với T^{-1} về bên trái, ta được

$$[h(\mathbf{u})]_F = T^{-1}AT[\mathbf{u}]_F$$

Kết hợp với đẳng thức $[h(\mathbf{u})]_F = B[\mathbf{u}]_F$, ta có

$$T^{-1}AT[\mathbf{u}]_F = B[\mathbf{u}]_F \quad \text{với mọi véctơ } \mathbf{u} \in V$$

Suy ra điều phải chứng minh $B = T^{-1}AT$. ■

Nhận xét rằng từ hệ thức $A = TBT^{-1}$ suy ra

$$\begin{aligned} \det A &= \det(TBT^{-1}) = \det T \cdot \det B \cdot \det(T^{-1}) \\ &= \det T \cdot \det(T^{-1}) \cdot \det B = \det B. \end{aligned}$$

Như vậy định thức của các ma trận A và B trong các cơ sở khác nhau của cùng một phép biến đổi tuyến tính luôn bằng nhau. Do đó ta có thể định nghĩa *định thức của phép biến đổi tuyến tính f là định thức của ma trận phép biến đổi tuyến tính trong một cơ sở bất kì*, kí hiệu $\det(f)$. Giá trị của định thức của phép biến đổi tuyến tính, theo nhận xét trên không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở. Chẳng hạn

- Phép biến đổi đồng nhất id_V trên V có định thức $\det(id_V) = \det(I) = 1$.
- Phép quay T trong ví dụ 3.4.5 có định thức $\det(T) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$.

Định nghĩa 3.4.6 *A và B là hai ma trận vuông cấp n. Ta nói A đồng dạng với B, kí hiệu $A \sim B$, nếu tồn tại một ma trận không suy biến P sao cho*

$$A = P^{-1}BP.$$

Từ định lí vừa chứng minh trên suy ra $A \sim B$ khi và chỉ khi tồn tại một phép biến đổi tuyến tính h trong không gian n chiều sao cho A và B là các ma trận của cùng phép biến đổi tuyến tính h trong các cơ sở nào đó.

Ví dụ 3.4.6

1. Trong mặt phẳng xOy xét phép chiếu vuông góc $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lên đường thẳng $x + 2y = 0$. Kí hiệu các điểm $M(1, 0)$ và $N(0, 1)$, dễ dàng tính được

$$h(M) = h(1,0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{-2}{5}\right) \text{ và } h(N) = h(0,1) = \left(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Vậy ma trận của h trong cơ sở chính tắc $E = \{\mathbf{u} = (1, 0), \mathbf{v} = (0, 1)\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Dựa vào ma trận của phép chiếu h, ta có thể tính được hình chiếu vuông góc của điểm bất kì $A(x_1, y_1)$ lên đường thẳng $x + 2y = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4x_1-2y_1}{5} \\ \frac{-2x_1+y_1}{5} \end{pmatrix}$$

Hình chiếu của điểm A là $(\frac{4x_1-2y_1}{5}, \frac{-2x_1+y_1}{5})$.

Nhận xét rằng từ ý nghĩa hình học của đường thẳng $x + 2y = 0$: véctơ $\mathbf{u} = (1, 2)$ là véctơ pháp, véctơ $\mathbf{v} = (2, -1)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng, suy ra

$$h(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad h(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Vậy ma trận của phép chiếu vuông góc h trong hệ cơ sở $F = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ có dạng đơn giản

$$[h]_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ ma trận của h trong cơ sở $F = \{\mathbf{u} = (1,2), \mathbf{v} = (2,-1)\}$, áp dụng định lí 3.4.7 về ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau, ta có thể tìm ma trận của h trong cơ sở chính tắc E.
Ma trận chuyển cơ sở từ E sang cơ sở F

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Theo định lí 3.4.7, ma trận của h trong cơ sở chính tắc E

$$[h]_E = T[h]_F T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. Phép lấy đối xứng các điểm qua đường thẳng $x+2y=0$ cũng là phép biến đổi tuyến tính. Tương tự như ví dụ trên dễ dàng tính được ma trận của phép lấy đối xứng trong cơ sở chính tắc

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Điểm đối xứng với $B(x_0, y_0)$ qua đường thẳng $x+2y=0$ được tính

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x_0-4y_0}{5} \\ \frac{-4x_0-3y_0}{5} \end{pmatrix}$$

Vậy điểm đối xứng với $B(x_0, y_0)$ qua đường thẳng $x+2y=0$

$$B'\left(\frac{3x_0-4y_0}{5}, \frac{-4x_0-3y_0}{5}\right).$$

3. Xét trong $\mathscr{P}_2[x] = \{P = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (không gian các đa thức có bậc không vượt quá 2) phép biến đổi tuyến tính đạo hàm $f : \mathscr{P}_2[x] \to \mathscr{P}_2[x],\ P(x) \mapsto P'(x)$.
Do phép tính đạo hàm $(1)' = 0,\ (x)' = 1,\ (x^2)' = 2x$ hay

$$f(1) \equiv 0,\ f(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^2,\ f(x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Ma trận của phép tính đạo hàm trong cơ sở chính tắc $B = \{1, x, x^2\}$

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Xét một cơ sở khác của $\mathscr{P}_2[x]$, $\quad C = \{-1, x-1, (x-1)^2\}$. Ma trận chuyển cơ sở từ B sang C

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ C sang B. Theo định lí 3.4.7, ma trận của f trong cơ sở C

$$[f]_C = T^{-1}[f]_B T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hay

$$[f]_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lưu ý rằng ta có thể tính trực tiếp $[f]_C$ (không sử dụng định lí 3.4.7) bằng cách tính tọa độ của đạo hàm các hàm trong C theo cơ sở đó

$$(-1)' \equiv 0,\ (x-1)' = 1 = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2$$

$$\big((x-1)^2\big)' = 2(x-1) = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2.$$

Các tọa độ này chính là các cột tương ứng của ma trận $[f]_C$ đã tính ở trên.

3.5 Trị riêng, véctơ riêng của phép biến đổi tuyến tính

Định nghĩa 3.5.1 *f là phép biến đổi tuyến tính trong không gian véctơ V. Số thực λ được gọi là giá trị riêng của f nếu tồn tại một véctơ khác véctơ không $\mathbf{v} \in V$ sao cho*

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

Véc tơ $\mathbf{v}$ khi đó được gọi là véctơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ.

Nhận xét rằng

1. Nếu $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$, khi đó mọi véctơ khác không trong $\mathrm{Ker}(f)$ đều là véctơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$. Nói cách khác mọi phép biến đổi tuyến tính suy biến có trị riêng $\lambda = 0$.

2. Nếu $\mathbf{v}$ là véctơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ, khi đó mọi véctơ có dạng $\alpha\mathbf{v}$, ($\alpha \in \mathbb{R}$ và $\alpha \neq 0$) là các véctơ riêng với cùng giá trị riêng λ. Thật vậy
$$f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}).$$

3. $f : V \to V$ là phép vị tự trên không gian tuyến tính V
$$f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}\ \forall\mathbf{u} \in V,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ cố định.}$$
Khi đó mọi véctơ khác $\mathbf{0}$ trong V đều là véctơ riêng ứng với giá trị riêng duy nhất α.

4. Giả sử λ là một giá trị riêng nào đó của phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véctơ V. Khi đó
$$V_1 = \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}\}$$
là không gian con của V và không gian con đó được gọi là *không gian con riêng* ứng với trị riêng λ.

Định nghĩa 3.5.2 *Cho phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ trong không gian véctơ n chiều V. Khi đó $P(\lambda) = \det(f - \lambda \cdot id_V)$ là đa thức bậc n của λ và đa thức $P(\lambda)$ được gọi là đa thức đặc trưng của f.*

Chú ý rằng định thức của phép biến đổi tuyến tính là định thức của ma trận của phép biến đổi tuyến tính đó trong cơ sở bất kì. Trong mục trước ta đã nhấn mạnh định thức của phép biến đổi tuyến tính không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở cũng như ma trận trong cơ sở đó.
Chẳng hạn phép biến đổi đồng nhất trong không gian n chiều V có đa thức đặc trưng
$$P(\lambda) = \det(I_n - \lambda \cdot I_n) = (1 - \lambda)^n.$$
Định lí sau cho ta cách xác định giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính

Định lí 3.5.1 *α là trị riêng của phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ khi và chỉ khi α là nghiệm của đa thức đặc trưng của f.*

Chứng minh.
Điều kiện cần: Giả sử α là trị riêng và $\mathbf{u}$ là véctơ riêng ứng với trị riêng α của f. Khi đó
$$f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u} \quad \text{hay} \quad (f - \alpha \cdot id_V)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$
Do véctơ riêng $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, phép biến đổi tuyến tính $f - \alpha \cdot id_V$ suy biến, suy ra $\det(f - \alpha \cdot id_V) = 0$, α là nghiệm của đa thức đặc trưng $P(\lambda)$.
Điều kiện đủ: Giả sử $P(\alpha) = 0 \Rightarrow \det(f - \alpha \cdot id_V) = 0$, phép biến đổi tuyến tính $f - \alpha \cdot id_V$ suy biến, suy ra tồn tại véctơ $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ sao cho
$$(f - \alpha \cdot id_V)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{hay} \quad f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}. \ \blacksquare$$

Từ chứng minh trên ta suy ra cách tìm trị riêng, véctơ riêng của phép biến đổi tuyến tính:

- Giả sử ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở B nào đó của không gian n chiều V có dạng
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
Tính đa thức đặc trưng $P(\lambda)$ bằng cách viết ma trận của $f - \alpha \cdot id_V$ trong cơ sở B và tính định thức của ma trận.
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

- Tìm nghiệm của đa thức đặc trưng $P(\lambda)$ để tính các trị riêng của phép biến đổi tuyến tính.

- Với mỗi giá trị riêng α vừa tính ở bước trên, các véctơ khác $\mathbf{0}$ trong không gian nhân $\mathrm{Ker}(f - \alpha \cdot id_V)$ là các véctơ riêng tương ứng với trị riêng α. Do vậy tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của véctơ riêng $\mathbf{u}$ trong cơ sở B thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, mọi nghiệm không tầm thường $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ đều là tọa độ (trong cơ sở B) của véctơ riêng của f ứng với trị riêng α.

Chúng ta cần nhấn mạnh rằng việc tính định thức, đa thức đặc trưng, trị riêng, véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính, theo quy tắc trên đều được thực hiện thông qua cơ sở B của không gian véc tơ V. Tuy nhiên chúng không phụ thuộc vào cơ sở mà ta lựa chọn.

Ví dụ 3.5.1

1. Trở lại với phép chiếu vuông góc $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lên đường thẳng $x + 2y = 0$. Ma trận của h trong cơ sở chính tắc (xem ví dụ 3.4.6)

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda$$

Các trị riêng của h : $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 0$.
Để tìm véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 1$, giải hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-1 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{-4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Một trong số các nghiệm của hệ phương trình $x_1 = 2, x_2 = -1$. Vậy $\mathbf{u} = (2, -1)$ là véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$.
(Toàn bộ nghiệm của hệ phương trình: $(x_1, x_2) = C(2, -1)$ trong đó C tùy

ý khác 0, nói cách khác tập hợp các véctơ $C\mathbf{u} = C(2, -1)$ là không gian con riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$).

Tương tự, véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \cdot C \\ x_2 = 2 \cdot C \end{cases} \quad \text{hay } \mathbf{v} = C(1, 2).$$

2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho phép biến đổi tuyến tính

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2 - 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + 5x_3)$$

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda-6)^2.$$

Suy ra các trị riêng của $f: \ \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6$.

Tìm véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 2+3 & 4 & -2 \\ 4 & 2+3 & 2 \\ -2 & 2 & 5+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tìm véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 4 & -2 \\ 4 & 2-6 & 2 \\ -2 & 2 & 5-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Vậy mọi véctơ khác $\mathbf{0}$ thuộc mặt phẳng $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ là các véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$. Nói cách khác mặt phẳng

$$(P): \ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

là không gian con riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$. Chẳng hạn với véctơ $\mathbf{u} = (5, 1, -8) \in (P)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ -48 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix},$$

suy ra $\mathbf{u} = (5, 1, -8)$ là véctơ riêng của f ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$.

Bây giờ ta sẽ nghiên cứu một lớp các phép biến đổi tuyến tính rất quan trọng trong nhiều ứng dụng thực hành. Đó là các phép biến đổi tuyến tính trong không gian n chiều E, chúng có n véctơ riêng và các véctơ riêng này lập thành một cơ sở của E.

Giả sử phép biến đổi tuyến tính

$$f : E \to E$$

có các véctơ riêng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ với các trị riêng tương ứng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

$$f(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Đồng thời các véctơ riêng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ lập thành một cơ sở của E, gọi B là cơ sở gồm các véctơ riêng đó. Ma trận của f trong cơ sở B có dạng chéo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gọi A là ma trận của f trong cơ sở bất kì, T là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở đó sang cơ sở B gồm các véctơ riêng. Khi đó theo định lí 3.4.7

$$A = T\Lambda T^{-1} \quad \text{hay} \quad \Lambda = T^{-1}AT. \tag{3.2}$$

Nói cách khác ma trận của phép biến đổi tuyến tính f luôn luôn đồng dạng với ma trận chéo Λ. Lưu ý rằng các cột của ma trận chuyển cơ sở T trong công thức trên là tọa độ các véctơ riêng của f.

Nhận xét rằng một số phép biến đổi hình học trong $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ như phép chiếu vuông góc lên đường thẳng, phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng, phép đối xứng, phép vị tự... đều thuộc lớp này. Ma trận của chúng trong các cơ sở thích hợp (gồm toàn các véctơ riêng) có dạng chéo. (Xem ví dụ 3.5.1)

Định nghĩa 3.5.3 *Ma trận vuông A được gọi là ma trận chéo hoá được nếu A đồng dạng với một ma trận chéo nào đó.*

Một ma trận vuông bất kì cấp n có thể xem như một phép biến đổi tuyến tính trong không gian n chiều, ma trận đó cũng là ma trận của phép biến đổi tuyến tính. Do vậy ta có thể nói các khái niệm *trị riêng, véctơ riêng của ma trận* chính là trị riêng, véctơ riêng của phép biến đổi tuyến tính.

Từ các điều đã trình bày trên ta có

Định lí 3.5.2 *Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A cấp n chéo hoá được là A có đủ n véctơ riêng độc lập tuyến tính.*

Khi đó ma trận chéo Λ công thức (3.2) đồng dạng với ma trận A. Ma trận T trong công thức (3.2) (các cột của T là các véc tơ riêng, chúng tạo thành một cơ sở) được gọi là *ma trận làm chéo hoá A.*

Ví dụ 3.5.2

1. Chéo hoá ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$.

   Ta coi A là phép biến đổi tuyến tính trong không gian 2 chiều, để thuận tiện ta giả thiết A là phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathscr{M}_2$, không gian các ma trận cột 2 chiều

   $$A : \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_2, \ \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + \sqrt{5}x_2 \\ \sqrt{5}x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

   Đa thức đặc trưng

   $$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

Các trị riêng của A : $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = -3$.
Để tìm véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 3$, giải hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -5x_1 + \sqrt{5}x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Tương tự véctơ riêng ứng với $\lambda_2 = -3$ bằng $C \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nếu ta chọn ma trận chuyển cơ sở gồm các véctơ riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$,

kí hiệu $T = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$ thì

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ hay } A = T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} T^{-1}$$

Ma trận A đồng dạng với ma trận chéo $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Ma trận $T = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$ làm chéo hoá ma trận đã cho A.

2. Chéo hoá ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ta coi A là phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathscr{M}_3$

$$A : \mathscr{M}_3 \to \mathscr{M}_3, \ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((3-\lambda)^2 - 1\big) = (2-\lambda)^2(\lambda - 4)$$

Các trị riêng của A : $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 4$.
Để tìm véctơ riêng ứng với $\lambda_1 = 2$, giải hệ phương trình

$$\begin{vmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

Chọn 2 véctơ riêng độc lập tuyến tính có các tọa độ thỏa mãn phương trình trên (tồn tại 2 véctơ độc lập tuyến tính trong mặt phẳng $x - y + z = 0$)

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tương tự chọn véctơ riêng ứng với $\lambda_2 = 4$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ba véctơ riêng X_1, X_2, X_3 độc lập tuyến tính, lập thành một cơ sở của $\mathscr{M}_3$. Chọn ma trận chuyển cơ sở gồm 3 véctơ riêng X_1, X_2, X_3

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó ma trận T làm chéo hoá ma trận A và $T^{-1}AT$ là ma trận chéo

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Định lí 3.5.3 *Nếu phép biến đổi tuyến tính f trong không gian n chiều E có đủ n giá trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Khi đó các véctơ riêng tương ứng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ lập thành một cơ sở của không gian E và ma trận của f trong cơ sở đó có dạng chéo*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh n véctơ riêng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ ứng với n giá trị riêng lập thành một cơ sở của không gian E ($\dim E = n$). Khi đó hiển nhiên ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở gồm các véctơ riêng có dạng chéo.

Chứng minh định lí bằng quy nạp theo số chiều của E. Định lí rõ ràng đúng khi $n = \dim E = 1$.

Giả sử điều đó cũng đúng với mọi không gian véctơ có số chiều nhỏ hơn k ($k > 1$), ta sẽ chứng minh trong không gian k chiều, k véctơ riêng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k$ ứng với k giá trị riêng đôi một khác nhau lập thành một cơ sở của không gian đó.

Thật vậy từ hệ thức $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ (1), suy ra

$$f(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{0} \quad \text{hay} \quad \alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0} \ \ (2)$$

Nhân cả 2 vế của (1) với λ_1 rồi lấy (2) trừ đi, ta được

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{e}_k = \mathbf{0} \ \ (3)$$

Hạn chế của f lên không gian con $E' = \mathscr{L}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, ..., \mathbf{e}_k)$, ($E'$ có số chiều nhỏ hơn k), cũng là phép biến đổi tuyến tính. Phép biến đổi tuyến tính trên E' có $k-1$ giá trị riêng đôi một khác nhau, theo giả thiết quy nạp các véctơ riêng tương ứng $\mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ là cơ sở của không gian E'. Vì vậy chúng độc lập tuyến tính và từ (3)

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0$$

do giả thiết các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ đôi một khác nhau. Thay $\alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ vào (1) ta suy ra tiếp $\alpha_1 = 0$. Vậy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k$ độc lập tuyến tính, suy ra nó là cơ sở của không gian k chiều, (đ.p.c.m) ■

Ví dụ 3.5.3

1. f, g là hai phép biến đổi tuyến tính trên V. Giả sử $\dim V = n$, f có n giá trị riêng đôi một khác nhau và mọi véc tơ riêng của f cũng là véc tơ riêng của g (các giá trị riêng của f và g không nhất thiết phải bằng nhau). Chứng minh rằng $f \circ g = g \circ f$.

   Giả sử $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ là các véctơ riêng của f (và cũng là của g) tương ứng với các trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ của f và các trị riêng $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ của g

   $$f(\mathbf{u}_i) = \lambda_i\mathbf{u}_i, \ g(\mathbf{u}_i) = \mu_i\mathbf{u}_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

   Khi đó $f \circ g(\mathbf{u}_i) = \lambda_i\mu_i\mathbf{u}_i = g \circ f(\mathbf{u}_i)$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Theo định lí trên, các véc tơ riêng $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ lập thành một cơ sở của V và do nhận xét sau ví dụ 3.4.1: ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định nếu biết ảnh của các véc tơ trong một cơ sở nào đó, suy ra 2 ánh xạ tuyến tính $f \circ g$ và $g \circ f$ bằng nhau.

2. Hãy chéo hoá ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ta coi ma trận A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n, ..., x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Theo định lí 3.5.2, ma trận A có thể chéo hoá khi và chỉ khi phép biến đổi tuyến tính f có đủ n véc tơ riêng lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

Dễ dàng nhận thấy không gian nhân của phép biến đổi tuyến tính f là tập hợp các véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

Đây là không gian véc tơ có chiều bằng $n - 1$, (xem bài tập 4 (a)), do đó có thể chọn ra một cơ sở gồm $n - 1$ véc tơ. Chúng là các véc tơ riêng của f với các trị riêng tương ứng bằng nhau và bằng 0.

Theo định lí 3.4.3, chiều của không gian nhân và chiều của không gian ảnh của phép biến đổi tuyến tính f có tổng bằng n, suy ra không gian ảnh có chiều bằng 1. Dễ dàng chỉ ra véc tơ $\mathbf{u} = (1, 1, ..., 1)$ thuộc không gian ảnh của f, $\mathbf{u} = (1, 1, ..., 1)$ là véc tơ riêng của f và trị riêng tương ứng bằng n

$$f(\mathbf{u}) = f(1, 1, ..., 1) = (n, n, ..., n) = n \cdot \mathbf{u}.$$

Như vậy f có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$, véc tơ $\mathbf{u}$ trong không gian ảnh và $n - 1$ véc tơ riêng trong $\mathrm{Ker}(f)$. Suy ra ma trận A có thể chéo hoá. Ma trận T mà các cột là tọa độ của các véc tơ riêng nói trên làm chéo hoá A. Có thể chọn được nhiều ma trận T như vậy, chẳng hạn ta chọn

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ A = T\Lambda T^{-1},\ \text{với } \Lambda = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

(Các bài tập có đánh dấu sao trước số thứ tự là các bài tập khó hơn. Các bài tập có dấu sao sau số thứ tự là các đề thi học phần đã thi.)

1. Bài tập về không gian tuyến tính

1. Chứng minh các tập hợp sau là các không gian tuyến tính thực

   (a) $\mathscr{P}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ với các phép toán cộng, nhân đa thức với một số như thông thường.

   (b) $C_{[a,b]} = \{f(x) \mid f(x)$ liên tục trên $[a, b]\}$ với các phép toán cộng, nhân hàm số với một số thông thường.

   (c) Tập hợp các ma trận cùng kiểu $m \times n$, với các phép toán cộng, nhân ma trận với một số như đã biết.

   (d) $E = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ với các phép toán

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2), \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (e) $(\mathbb{R}^+)^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, ..., n\}$ với các phép toán

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n), \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha)$$

   (f) Tập $E \times F$ (E, F là hai không gian tuyến tính thực) với các phép toán

   $$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

   trong đó $x, x' \in E, \quad y, y' \in F.$

2. Chứng minh rằng tập các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là không gian véctơ.
   Đặc biệt, chứng minh rằng trong không gian $Oxyz$, giao của các mặt phẳng đi qua gốc toạ độ là không gian véctơ.
   Hợp của 2 mặt phẳng đi qua gốc toạ độ trong $Oxyz$ có là không gian véctơ không?

3. Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá n, tập nào dưới đây là không gian con của $\mathscr{P}_n[x]$

(a) Tập các đa thức mà $x = 0$ là nghiệm

$$A = \{P(x) \in \mathscr{P}_n[x] \mid P(0) = 0\}.$$

(b) Tập các đa thức mà $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm

$$B = \{P(x) \in \mathscr{P}_n[x] \mid P(0) = 0,\ P(1) = 0\}.$$

4. Trong số các tập con dưới đây của $\mathbb{R}^n$, tập nào là không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$

    (a) $A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$
    (b) $B = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1; x_2; \cdots ; x_n \in \mathbb{Z}\}$
    (c) $C = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 = x_n\}$
    (d) $D = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0\}, \quad \alpha_i, i = 1, 2, ..., n$ là các số thực cố định.

5. Trong số các tập hợp dưới đây, tập nào là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp n

    (a) Tập các ma trận chéo cấp n.
    (b) Tập các ma trận chéo cấp n mà tổng các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 0.
    (c) Tập các ma trận khả nghịch cấp n.
    (d) Tập các ma trận vuông cấp n có định thức bằng 0.

6. Trong không gian véctơ n chiều V, cho một hệ n véctơ $F = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương

    (a) F là cơ sở của V.
    (b) F là hệ sinh của V.
    (c) F độc lập tuyến tính.

7. A, B là 2 không gian con của không gian tuyến tính V. Chứng minh rằng $A \cup B$ là không gian con của V khi và chỉ khi hoặc $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

8. Chứng minh rằng

$$V_1 = \{f \in \mathscr{P}_n[x] \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

và

$$V_2 = \{f \in \mathscr{P}_n[x] \mid f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

là hai không gian con của $\mathscr{P}_n[x]$ (không gian các đa thức hệ số thực với bậc không lớn hơn n), đồng thời

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

9* (a) Trong không gian véc tơ n chiều V cho hệ n véc tơ $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$. Chứng minh rằng nếu E là hệ sinh của V thì E là cơ sở của V.

(b) A và B là hai không gian con của không gian véc tơ V thỏa mãn các tính chất $V = A + B$ và $\dim V = \dim A + \dim B$. Ta có thể khẳng định $V = A \oplus B$ không? Tại sao?

10* Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y + z = 0\}$ và gọi B là không gian con sinh bởi $\mathbf{b} = (1, -3, -1)$.

(a) Xác định một cơ sở của A và chứng minh rằng $A + B = \mathbb{R}^3$. Không gian $\mathbb{R}^3$ có là tổng trực tiếp của A và B không?

(b) Tập hợp $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$ có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Xác định tập đó.

11. Cho A và B là 2 không gian con của không gian véctơ V. Chứng minh rằng nếu

$$\dim A + \dim B > \dim V$$

thì $A \cap B \neq \{\mathbf{0}\}$.

12. Tìm một cơ sở và chiều của các không gian véc tơ trong các bài tập từ bài 1 đến bài 5.

13. Cho $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ là cơ sở của không gian véctơ V, n là số tự nhiên lẻ. Chứng tỏ rằng hệ các véctơ $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ cũng là cơ sở của không gian véctơ V, trong đó

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \quad \text{và} \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1$$

Khẳng định trên còn đúng không nếu n là số chẵn?

14. Chứng minh rằng hệ các véctơ $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$

$$\mathbf{f}_1 = (1, 2, -1), \mathbf{f}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{f}_3 = (0, 1, 1)$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tính tọa độ véctơ $\mathbf{u} = (x, y, z)$ theo cơ sở F.

15. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của không gian véctơ sinh bởi 5 véctơ:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1),\ \mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0),\ \mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1),\ \mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$$

và $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$ trong $\mathbb{R}^4$.

16. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của mỗi không gian véctơ sau:

(a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

(b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4\}$.

17. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của không gian nghiệm của hệ

(a) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

18. Trong $\mathbb{R}^3$, kí hiệu

$$A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\},\ B = \{(x, y, z) \mid 2x - y - 2z = 0\}.$$

(a) Chứng minh rằng A, B là các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm một cơ sở của không gian con $A \cap B$.

19. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3t = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases}$$

với x, y, z, t là các ẩn của hệ.

20* Cho A và B là hai không gian con của $\mathbb{R}^3$ (với các phép toán thông thường trong $\mathbb{R}^3$)

$$A = \{(x, y, z)/x - 3y + z = 0\}, \quad B = \{(x, y, z)/4x + 3y - 2z = 0\}$$

(a) Chứng minh rằng $A + B = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ có là tổng trực tiếp của A và B không?
(b) Chứng minh rằng tập hợp $\{\mathbf{a} - \mathbf{b} \ / \ \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Xác định chiều và một cơ sở của không gian con đó.

21. Chứng minh rằng các tập hợp A và B được cho dưới đây là các không gian con của $\mathbb{R}^4$. Hãy tìm số chiều và chỉ ra một cơ sở của mỗi không gian con đó.

(a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 2x_2 = x_4\}$
(b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 = -x_2 = x_3\}$.

Đẳng thức $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$ có đúng không? Tại sao?

22. Chứng minh rằng hệ các đa thức

$$F = \{1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, ..., (x - \alpha)^n\},$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định là cơ sở của $\mathscr{P}_n[x]$ (không gian các đa thức với bậc không vượt quá n). Tìm tọa độ của $P(x) = x^2 + 2x + 3$ trong cơ sở F.

23. Biết $F = \{1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, ..., (x - \alpha)^n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là cơ sở của $\mathscr{P}_n[x]$ (bài tập trên). Hãy tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ sang cơ sở F của $\mathscr{P}_n[x]$.

24. Trong không gian $\mathscr{P}_3[x]$ cho $h = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng $B = \{h, h', h'', h'''\}$ là hệ cơ sở của $\mathscr{P}_3[x]$. Tìm ma trận chuyển từ hệ cơ sở chính tắc sang hệ cơ sở B. Hãy tìm tọa độ của $q = 10x^3 - 8x^2 + ax + b$ trong cơ sở B.

25* Cho các véc tơ trong $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{a} = (1, -2, 3, 2), \mathbf{b} = (2, 0, -1, 4), \mathbf{c} = (3, -2, -1, 3), \mathbf{d} = (3, -6, 6, 3).$$

Chứng minh rằng $\mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. Tìm hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$.

26. Chứng minh rằng $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là cơ sở của không gian các ma trận vuông cấp 2. Tìm tọa độ của $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ theo cơ sở đó.

27. Biết hệ các ma trận vuông cấp hai

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

là một cơ sở của không gian các ma trận vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng hệ

$$F = \{E_1, E_2, E_1 + E_2 + E_3, E_1 + E_2 + E_4\}$$

cũng là một cơ sở của $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở F sang E và tọa độ của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ trong cơ sở F.

28* Cho tập $\mathbb{E} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Trên $\mathbb{E}$ xác định phép cộng $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2)$ và phép nhân $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, y^\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\mathbb{E}$ là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Xác định một cơ sở và chiều của $\mathbb{E}$.
Tìm hạng của hệ các véc tơ

$$\{\mathbf{a} = (0, 1), \mathbf{b} = (1, 2), \mathbf{c} = (2, 4), \mathbf{d} = (-1, \frac{1}{2})\}$$

trong không gian $\mathbb{E}$ nói trên.

29* Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ

$$\{\mathbf{a}_1 = (-1, 3, 5),\ \mathbf{a}_2 = (2, 1, -3),\ \mathbf{a}_3 = (m, 2, -2), \mathbf{a}_4 = (1, m, 1)\}.$$

(a) Với $m = 2$, tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

(b) Tìm hạng của hệ véc tơ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ (theo m).

2. Bài tập về ánh xạ tuyến tính

1. Cho ánh xạ $\varphi: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, x - y + z)$

   (a) Chứng minh φ là ánh xạ tuyến tính.

   (b) Tìm Ker φ, Im φ.

   (c) Tìm ma trận của φ trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

2. Cho ánh xạ tuyến tính $f: V_1 \to V_2$, trong đó $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương

   (a) f là đơn ánh.

   (b) f là toàn ánh.

   (c) f là song ánh.

3* Cho ánh xạ tuyến tính $\quad f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4,\ 2x_1 + 2x_3 - x_4).$$

   Hãy xác định các không gian con Ker f, Im f và $f^{-1}(2, -8, 2)$. **Ánh** xạ f là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh?

4. Cho ánh xạ $\varphi: \ \mathscr{P}_n[x] \to \mathscr{P}_n[x], \quad p(x) \mapsto p'(x) \quad (p'(x)$ là hàm đạo hàm của $p(x))$.

   (a) Chứng minh φ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{P}_n[x]$.

   (b) Tìm ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

   (c) Tìm Ker φ.

5. Biết rằng phép chiếu vuông góc T từ $\mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng $x + y + z = 0$ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

   (a) Tìm ma trận của T trong cơ sở chính tắc.

   (b) Tìm Ker T.

6. Chứng minh hạng của ánh xạ tuyến tính bằng hạng của ma trận của ánh xạ tuyến tính đó. Với A là ma trận kiểu $m \times n$ có các phần tử đều bằng nhau. Tìm hạng của A.

7. $A, B \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ là hai ma trận vuông cấp n. Kí hiệu $r(A)$ là hạng của ma trận A.

   (a) Chứng minh
   $$r(A+B) \leq r(A) + r(B) \leq r(AB) + n.$$

   *(b) Chứng minh rằng nếu $A^2 = I_n$ thì
   $$r(I_n + A) + r(I_n - A) = n.$$

8. Kí hiệu $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   Xét ánh xạ $\varphi: \ \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = AX$

   (a) Chứng minh φ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) Tìm ma trận của φ trong cơ sở chính tắc và tọa độ của ma trận $\varphi(B)$ trong cơ sở đó, biết $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Chứng minh φ là song ánh và xác định φ^{-1}.

9* Kí hiệu $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho trong không gian $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Xét các ánh xạ
   $$f, g : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(X) = AXB, \quad g(X) = AXC.$$

   (a) Trong số các ánh xạ f, g và $f \circ g$, ánh xạ nào là tuyến tính. Tìm không gian nhân của các phép biến đổi tuyến tính đó.
   (b) Trong số các ánh xạ f, g và $f \circ g$, ánh xạ nào là song ánh, tìm ánh xạ ngược của nó.

10. φ là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z)$

   (a) Tìm ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

   (b) Chứng minh rằng hệ $F = \{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm ma trận của φ trong cơ sở F.

(c) Tìm $\operatorname{Im}\varphi$.

11. Gọi f là phép là phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở chính tắc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Chứng minh rằng $\{\mathbf{a} = (1, -1, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 4), \mathbf{c} = (4, 2, 4)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Viết ma trận của f trong cơ sở $B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(c) Tìm $\ker f$.

12* Cho hai phép biến đổi tuyến tính $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận của u trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và ma trận của v trong cơ sở $\mathbf{B} = \{(2, 1),\ (1, 1)\}$ là $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của $h = u \circ v$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

13. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ và $X \in \mathbb{R}^3$.

(a) Tìm số chiều, cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $AX = 0$.

(b) Hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ có tương thích với mọi $B \in \mathbb{R}^3$ không? B thỏa mãn điều kiện gì để hệ có nghiệm.

14. Cho ánh xạ $f : \mathscr{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3, \quad f(p) = (p(-1), p(0), p(1))$

(a) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính

(b) Tìm ma trận của f trong các cơ sở chính tắc của $\mathscr{P}_2[x]$ và $\mathbb{R}^3$.

(c) Tìm $\dim\ker(f)$

15. Chứng minh $T : \mathscr{P}_n[x] \to \mathscr{P}_n[x], \quad p \mapsto p'$ (p' là hàm đạo hàm của p) là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{P}_n[x]$. Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của T.

16. Tìm các giá trị triêng, véctơ riêng của $\varphi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Biết rằng trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, φ có ma trận

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

17. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm hệ cơ sở để A có dạng chéo.

18. Cho φ là phép biến đổi tuyến tính trên V, $\mathbf{u}$ là véctơ riêng ứng với giá trị riêng λ. Chứng minh rằng $\mathbf{u}$ cũng là véctơ riêng của φ^3 ứng với giá trị riêng λ^3. (Lưu ý rằng φ^3 là ánh xạ hợp thành (ánh xạ tích) $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.)

19. Cho φ là phép biến đổi tuyến tính khả nghịch trên V

    (a) Chứng minh rằng nếu λ là một giá trị riêng của φ thì $\lambda \neq 0$ và λ^{-1} là giá trị riêng của φ^{-1}.

    (b) Chứng minh rằng nếu V có một cơ sở gồm các véctơ riêng của φ thì V cũng có một cơ sở gồm các véctơ riêng của φ^{-1}.

20* Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(1,1) = (-5,-1)$, $f(2,1) = (2,1)$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

*21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$, trong đó n là số nguyên dương, $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (a) Tìm trị riêng và véctơ riêng của A^{-1}.

    (b) Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

22* Cho dãy véc tơ $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2), ..., \mathbf{a}_n = (x_n, y_n), ...$ trong $\mathbb{R}^2$ biết $\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = \ 3x_n + 4y_n \end{cases}$ với mọi $n \geq 1$ và $x_1 = 0, y_1 = 1$. Hãy tính $\mathbf{a}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Chéo hóa các ma trận sau và chỉ ra các cơ sở tương ứng với từng ma trận chéo

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

24. Cho phép biến đổi tuyến tính $f: \mathscr{P}_2[x] \to \mathscr{P}_2[x]$. Biết rằng trong cơ sở $B = \{v_1 = 1 + x, v_2 = 1 - x, v_3 = x^2\}$ ma trận của f có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Tìm các trị riêng và véctơ riêng của f.

(b) Tìm ma trận của f theo cơ sở $B' = \{1, x, x^2\}$. Tính $f(1 + x + x^2)$.

25. Cho phép biến đổi tuyến tính $f: \mathscr{P}_2[x] \to \mathscr{P}_2[x]$

$$f(-2 + x - x^2) = x + x^2, f(1 + x^2) = 1 + x^2, f(x + 2x^2) = 1 + x.$$

(a) Tính $f(a + bx + cx^2)$.

(b) Tìm ma trận A của f trong cơ sở $B = \{1, x, x^2\}$. Ma trận A có chéo hoá được không?

26. Kí hiệu $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2.

(a) Chứng minh rằng $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Chứng minh $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ là cơ sở của W.

(c) Cho ánh xạ $f: W \to W$, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} a + c & b \\ b & a + b + c \end{pmatrix}$
Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính trên W và tìm ma trận của f trong cơ sở C ở câu (b).

(d) Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ và xác định không gian $\operatorname{Ker} f$.

27. Cho ánh xạ

$$f : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} a & a+b+c+d \\ a+b+c+d & c \end{pmatrix}$$

(a) Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc.

(c) Xác định các không gian $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Kef} f$.

(d) Tìm trị riêng, véctơ riêng của f.

28* Gọi $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp hai. Xét phép biến đổi tuyến tính

$$f : V \to V, \ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} 5x+2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 5x+2y \end{pmatrix}$$

(a) Tìm chiều và một cơ sở của V.

(b) Xác định không gian $\ker f$ và viết ma trận của f trong cơ sở vừa tìm được.

(c) Tìm các véc tơ riêng và các trị riêng tương ứng của f.

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Bài tập về không gian tuyến tính

4. A, C, D là các không gian con.

5. Các tập hợp trong các câu (a) và (b) là các không gian con.

9. Khẳng định $V = A \oplus B$ là đúng.

10. (a) Khẳng định $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$ là đúng.
(b) $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\} = A + B = \mathbb{R}^3$.

14. Tọa độ của $\mathbf{u} = (x, y, z)$ trong cơ sở F là $(\frac{y-z}{3}, x - \frac{y-z}{3}, -x + \frac{2y+z}{3})$

15. $\mathscr{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4}, \mathbf{a_5}) = \mathscr{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4})$.

16. $\dim A = \dim B = 3$.

17. (a) Không gian nghiệm có chiều bằng 2.
(b) Không gian nghiệm có chiều bằng 3.

18. (b) Cơ sở của $A \cap B$ gồm một véc tơ $(1, -4, 3)$.

19. Không gian nghiệm có chiều bằng 2.

21. Đẳng thức $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$ là đúng.

22. Tọa độ của $x^2 + 2x + 3$ trong cơ sở F là $(\alpha^2 + 2\alpha + 3, 2\alpha + 2, 1, 0, ..., 0)$.

23. Ma trận chuyển cơ sở $$T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \cdot \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -3\alpha & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

24. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang B là $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tọa độ của q trong cơ sở B là $(10, 4, 1 + \frac{a}{6}, \frac{a}{9} + \frac{b}{6} - \frac{5}{3})$.

25. Hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ bằng 3.

27. Ma trận chuyển cơ sở từ F sang E $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Tọa độ của A trong cơ sở F là $(-6, -5, 3, 4)$

28. $\dim \mathbb{E} = 2$ và hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ bằng 1.

29. (a) $\dim \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$
    (b) Hạng của hệ véc tơ bằng 3 (với mọi m).

2. Bài tập về ánh xạ tuyến tính

1. (b) $\operatorname{Ker} \varphi = \{C(1, 3, 2) \mid C \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$.
   (c) Ma trận của φ bằng $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\operatorname{Ker} f = \{C(-2, 3, 4, 4) \mid C \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. ($f$ là toàn ánh).

$$f^{-1}(2, -8, 2) = \{C(-2, 3, 4, 4) + (-2, 1, 4, 2) \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

4. (b) Ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$
   (c) Nhân của φ là tập hợp các đa thức hằng (không gian con sinh bởi 1).

5. (a) Ma trận của T trong cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
   (b) $\operatorname{Ker} T = \{C(1, 1, 1) \mid C \in \mathbb{R}\}$.

6. $r(A) = 1$ nếu $A \neq O$.

7. (a) Coi ma trận là phép biến đổi tuyến tính và sử dụng tính chất: *hạng của ma trận bằng chiều của không gian ảnh.*
(b) Sử dụng tính chất $(A-I)(A+I)=O$.

8. (b) Ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ và tọa độ của ma trận $\varphi(B)$ trong cơ sở đó, với $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ là $(1,2,1,4)$.
(c) $\varphi^{-1}(X)=A^{-1}X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} X$

9. (a) $\ker f=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\ker g=\ker f\circ g=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$
(b) f là song ánh và

$$f^{-1}(X)=A^{-1}XB^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. (b) Ma trận của φ trong cơ sở F : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
(c) $\operatorname{Im}\varphi$ là không con 2 chiều trong $\mathbb{R}^3$, sinh bởi $\mathbf{f}_2$ và $\mathbf{f}_3$, đồng thời ta có thể viết $\operatorname{Im}\varphi=\{(x,y,x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

11. (b) Ma trận của f trong cơ sở B : $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(c) $\ker f$ là không gian con sinh bởi $(2,1,-1)$.

12. Ma trận của $h=u\circ v$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

13. (a) Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $AX=0$ là không gian tuyến tính 1 chiều, sinh bởi $(1,-5,-3)$.
(b) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi tọa độ của $B(x,y,z)$ thỏa mãn $3x-y-z=0$.

14. (b) Ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(c) $\dim\ker(f) = 0$.

15. Phép toán đạo hàm có một trị riêng duy nhất $\lambda = 0$ và véc tơ riêng là đa thức hằng.

16. (a) Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng:

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{e}_1 = (1,1,1), \lambda_2 = 0, \mathbf{e}_2 = (1,2,3)$$

(b) Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng:

$$\lambda_1 = 3, \mathbf{e}_1 = (1,2,2), \lambda_2 = -1, \mathbf{e}_2 = (1,2,1).$$

17. Trong cơ sở $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1), \mathbf{u}_3 = (1,1,0)$ ma trận A có thể chéo hóa thành $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

20. Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng của f

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = (2,1),\ \ \lambda_2 = 3, \mathbf{u}_2 = (3,1)$$

21. (a) Các giá trị triêng và véctơ riêng tương ứng của A^{-1}:

$$\lambda_1 = \frac{n}{n-\alpha}, \mathbf{e}_1 = (1,-1), \lambda_2 = \frac{n}{n+\alpha}, \mathbf{e}_1 = (1,1)$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix}\operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha\\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha\end{pmatrix}$

22. $\mathbf{a}_n = (2 - 2^n, -2 + 3\cdot 2^{n-1}),\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

23. (a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} T$, trong đó $T = \begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} P$

(c) Ma trận $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ không chéo hoá được.

24. (a) Tương ứng với trị riêng $\lambda_1 = -2$ là véc tơ riêng $P_1(x) = 3 - x + 2x^2$.
Tương ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$ là véc tơ riêng $P_2(x) = 3 + x - 2x^2$.
Tương ứng với trị riêng $\lambda_3 = 4$ là véc tơ riêng $P_3(x) = -4x - x^2$.

(b) Ma trận của f theo cơ sở $B' = \{1, x, x^2\}$ $[f]_{B'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. (c) Ma trận của f trong cơ sở C là $[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

27. (d) Các véc tơ riêng tương ứng với các trị riêng $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2$ lần lượt là

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28. (a) Chiều của V, $\dim V = 2$.
(c) Các giá trị riêng của f là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ với các véc tơ riêng tương ứng

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chương 4

Không gian Euclide và dạng toàn phương

4.1 Không gian Euclide

4.1.1 Tích vô hướng và không gian Euclide

Định nghĩa 4.1.1 *Cho E là không gian véc tơ thực. Ánh xạ $E^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là tích vô hướng, kí hiệu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, nếu nó thỏa mãn các tính chất*

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ *với mọi* $\mathbf{x} \in E$ *và* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.
- $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *và mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.
- $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$.

Không gian véc tơ E hữu hạn chiều cùng với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ được gọi là không gian Ơclit (Euclide).

Dễ dàng chứng minh được các tính chất sau của tích vô hướng

i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{x} \in E$

ii) $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$

iii) $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4.1.1 *(Các ví dụ về không gian Euclide)*

1. Trong không gian các véc tơ hình học, như đã biết tích vô hướng

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = |\overrightarrow{\mathbf{a}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{b}}| \cos(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})$$

   thỏa mãn các yêu cầu trên, do vậy không gian các véc tơ hình học là không gian Euclide với tích vô hướng $\langle \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} \rangle = \overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

2. Trong không gian véc tơ E cho hệ cơ sở $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ và hai véc tơ tùy ý $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i.$$

   Biểu thức

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   thỏa mãn các yêu cầu trong định nghĩa tích vô hướng. Vậy không gian E với tích vô hướng trên là không gian Euclide.
   Đặc biệt không gian $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide với tích vô hướng

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

   trong đó $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. Tích vô hướng này trên $\mathbb{R}^n$ cũng được gọi là *tích vô hướng Euclide.*

3. Dễ dàng chứng minh được trong $\mathbb{R}^3$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3u_2 v_2 + 2u_3 v_3, \text{ với } \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

   là tích vô hướng. Với tích vô hướng đó, $\mathbb{R}^3$ là không gian Euclide.

4. Kí hiệu $\mathscr{P}_n[x]$ là không gian các đa thức có bậc không vượt quá n. Dễ dàng kiểm tra

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \quad \forall f, g \in \mathscr{P}_n[x]$$

   thỏa mãn các yêu cầu của tích vô hướng. Vậy $\mathscr{P}_n[x]$ là không gian Euclide $n+1$ chiều.

Định nghĩa 4.1.2 *Trong không gian Euclide E, biểu thức $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ $\forall \mathbf{x} \in E$ được gọi là độ dài của véc tơ $\mathbf{x}$, kí hiệu*

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Ví dụ 4.1.2

1. Trong không gian các véc tơ hình học, với tích vô hướng

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}} \rangle = |\overrightarrow{\mathbf{a}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{b}}| \cos(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})$$

   độ dài véc tơ theo định nghĩa trên trùng với độ dài hình học đoạn thẳng nối gốc và ngọn véc tơ.

2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, độ dài của $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bằng

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Độ dài véc tơ hiển nhiên có các tính chất sau

i) $|\mathbf{x}| \geq 0$ $\forall \mathbf{x} \in E$ và $|\mathbf{x}| = 0$ khi và chỉ khi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

ii) $|\alpha \cdot \mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in E$

iii) Độ dài véc tơ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

Bất đẳng thức này sẽ được phát biểu lại và chứng minh trong định lí 4.1.1 dưới đây sử dụng bất đẳng thức Schwarz.

Định lí 4.1.1 *Trong không gian Euclide E ta luôn có các bất đẳng thức sau*

(i) Bất đẳng thức Schwarz: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$

(ii) Bất đẳng thức tam giác: $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$

Chứng minh.
(i) *Bất đẳng thức Schwarz*: bất đẳng thức hiển nhiên đúng khi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
Xét trường hợp $|\mathbf{u}| > 0$, với số thực $t \in \mathbb{R}$ bất kì

$$0 \leq \langle t\mathbf{u} - \mathbf{v}, t\mathbf{u} - \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t + |\mathbf{v}|^2 \qquad (*)$$

Vế phải của bất đẳng thức $(*)$ là tam thức bậc hai không âm với mọi $t \in \mathbb{R}$, suy ra biệt thức

$$\Delta' = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2 \leq 0 \quad \text{hay} \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|.$$

(ii) *Bất đẳng thức tam giác*: Thay $t = -1$ vào $(*)$ và áp dụng bất đẳng thức Schwarz: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ ta được

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + |\mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$$

Suy ra bất đẳng thức tam giác: $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. ■

Ví dụ 4.1.3

1. Bất đẳng thức Schwarz trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ chính là bất đẳng thức Bunhiacốpki

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

2. Với tích vô hướng $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3$ trong $\mathbb{R}^3$, bất đẳng thức Schwarz có dạng

$$|u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3| \leq \sqrt{u_1^2 + 3u_2^2 + 2u_3^2}\sqrt{v_1^2 + 3v_2^2 + 2v_3^2}$$

3. Bất đẳng thức Schwarz và bất đẳng thức tam giác trong không gian Euclide $\mathscr{P}_n[x]$ với tích vô hướng $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^1 g^2(x)}dx$$

$$\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} + \sqrt{\int_0^1 g^2(x)}dx \geq \sqrt{\int_0^1 (f(x) + g(x))^2 dx}$$

Nhận xét rằng tích vô hướng trong không gian Euclide là mở rộng khái niệm tích vô hướng của 2 véc tơ hình học. Trong không gian Euclide người ta cũng định nghĩa góc giữa hai véc tơ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *là góc* φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$ *sao cho*

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ hay $\left| \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \right| \leq 1$, định nghĩa trên hoàn toàn hợp lí. Đặc biệt nếu

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ là hai véc tơ khác $\mathbf{0}$, khi đó góc giữa hai véc tơ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ bằng 90^0, ta nói $\mathbf{u}$ *vuông góc hoặc trực giao* với $\mathbf{v}$, kí hiệu $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Định lí 4.1.2 (Định lí Pitago trong không gian Euclide)
Nếu $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là 2 véc tơ trực giao trong không gian Euclide thì*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Chứng minh. Do $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ta có

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2. \blacksquare$$

Các kết quả sau là hiển nhiên, bạn đọc tự chứng minh

1. Nếu $\mathbf{v}$ trực giao với các véc tơ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ khi đó $\mathbf{v}$ trực giao với mọi véc tơ trong không gian con $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k)$ sinh bởi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$.

2. Tập hợp các véc tơ trực giao với $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ là không gian con của E.

Định lí 4.1.3 *Nếu hệ các véc tơ* $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ *khác* $\mathbf{0}$ *trong* E *đôi một trực giao với nhau thì hệ* B *độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. Nhân vô hướng cả hai vế với $\mathbf{u}_i$, $i = \overline{1, n}$ ta được

$$\alpha_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle + \alpha_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i \rangle + \cdots + \alpha_i\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle + \cdots + \alpha_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle = 0.$$

Do $\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_i \rangle = 0$ với mọi $m \neq i$, suy ra

$$\alpha_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0. \ \forall i = \overline{1, n}$$

Vậy $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ độc lập tuyến tính. ■

Từ định lí trên suy ra nếu *trong không gian Euclide n chiều E tồn tại một hệ n véc tơ khác $\mathbf{0}$, đôi một trực giao nhau, khi đó hệ n véc tơ đó lập thành cơ sở của E. Người ta gọi cơ sở như vậy là cơ sở trực giao trong E.*

Định nghĩa 4.1.3 *$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ là hệ cơ sở trực giao trong không gian Euclide E, đồng thời độ dài của từng véc tơ trong B bằng 1*

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = \cdots = |\mathbf{e}_n| = 1.$$

Khi đó $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ được gọi là hệ cơ sở trực chuẩn của E.

Như vậy, hệ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của một không gian Euclid n chiều khi và chỉ khi

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Trong không gian Euclide các véc tơ có độ dài bằng 1 được gọi là *véc tơ đơn vị*. Do vậy ta thường nói cơ sở trực chuẩn là hệ cơ sở trực giao gồm các véc tơ đơn vị.

Nhận xét rằng nếu

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, \ \mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n$$

hay nói cách khác $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $(y_1, y_2, ..., y_n)$ là các tọa độ của $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ trong hệ cơ sở trực chuẩn $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ thì

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Đặc biệt

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \ |\mathbf{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Ví dụ 4.1.4

1. Trong không gian véc tơ hình học, hệ các véc tơ $\{\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}\}$ (các véc tơ đơn vị của các trục tọa độ Đề các $Oxyz$) lập thành một cơ sở trực chuẩn.

2. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3,$$
cơ sở chính tắc $B = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}$ là hệ cơ sở trực giao. Tuy nhiên B không là hệ cơ sở trực chuẩn vì độ dài $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{3} \neq 1$. Hệ $\{\mathbf{e}_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3\}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

3. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng Euclide
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n,$$
cơ sở chính tắc là hệ cơ sở trực chuẩn.

4. Trong không gian Euclide E với $\dim E = 2$, cho hai véc tơ đơn vị $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ hợp với nhau một góc 120^0. Khi đó tồn tại duy nhất véc tơ đơn vị hợp với cả hai véc tơ $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ các góc 120^0.
Thật vậy, trước hết ta thấy $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ là véc tơ đơn vị do đẳng thức sau
$$|\mathbf{a}|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 + 1 - 2\cos 120^0 = 1.$$
Gọi góc giữa véc tơ $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ với hai véc tơ $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ lần lượt bằng φ_1, φ_2.
$$\cos\varphi_1 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{u}|} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = 60^0.$$
Tương tự
$$\cos\varphi_2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{v}|} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 60^0.$$
Véc tơ $\mathbf{a}$ hợp với $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ các góc 60^0, suy ra véc tơ $-\mathbf{a} = -\mathbf{u} - \mathbf{v}$ hợp với $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ các góc 120^0.
Phần còn lại, chứng minh đó là véc tơ đơn vị duy nhất dành cho bạn đọc.

4.1.2 Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Smidt

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu một quy trình xây dựng hệ cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide E từ một cơ sở bất kì của E. Quy trình này mang tên *quá trình trực chuẩn hóa Gram-Smidt*.

Giả sử $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ là một hệ cơ sở bất kì của E. Ta sẽ kiến thiết hệ cơ sở trực chuẩn $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ của không gian E như sau. Trước hết xây dựng hệ cơ sở trực giao $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ của E

1. Đặt $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$

2. Tìm $\mathbf{v}_2$ dưới dạng

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \alpha \mathbf{v}_1$$

   sao cho $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$. Số thực α tìm được từ hệ thức

$$0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle - \alpha \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{|\mathbf{v}_1|^2}$$

   Từ cách xây dựng $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$, dễ dàng suy ra $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, đồng thời $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ do $\{\mathbf{u}_i\}$ là hệ cơ sở.

3. Với $k < n$ giả sử ta đã xây dựng được hệ trực giao $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}, \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ $\forall i = 1, 2, ..., k$. Ta sẽ tìm $\mathbf{v}_{k+1}$ dưới dạng

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \mathbf{v}_2 - \cdots - \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

   trong đó các số $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., k$ cần được xác định sao cho

$$\mathbf{v}_{k+1} \perp \mathbf{v}_i \text{ hay } \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \text{ với } \quad \forall i = 1, 2, ..., k \quad \text{và} \quad \mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}.$$

   Véc tơ $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$ là hiển nhiên. Hệ thức $\langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ kéo theo các giá trị cần tìm α_i

$$\langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_i \rangle - \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{\langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_i \rangle}{|\mathbf{v}_i|^2} \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

   Bằng quy nạp như trên ta xây dựng được hệ cơ sở trực giao $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ của E và dễ dàng nhận thấy

$$\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m) = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m) \quad \forall m = 1, 2, ..., n.$$

4. Cuối cùng hệ cơ sở trực chuẩn $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ của không gian E nhận được từ hệ trực giao $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ bằng cách chuẩn hóa các véc tơ $\mathbf{v}_i$ theo công thức

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Nhận xét rằng nếu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ là một hệ véc tơ bất kì (có thể phụ thuộc tuyến tính), phương pháp Gram-Smidt nêu trên vẫn có thể áp dụng để xây dựng hệ trực giao $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ $(k \leq n)$ không chứa véc tơ $\mathbf{0}$ thỏa mãn tính chất

$$\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k) = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k).$$

(Các véc tơ $\mathbf{v}_i$ có thể là véc tơ $\mathbf{0}$ trong quá trình kiến thiết, ta cần loại các véc tơ bằng $\mathbf{0}$ đó.)

Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Smidt nêu trên được gọi là *phương pháp Gram-Smidt*, nó được thu gọn trong định lí sau

Định lí 4.1.4 *Giả sử $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ là một hệ cơ sở bất kì của không gian Euclide E. Trong E tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ được xây dựng bởi quá trình trực chuẩn hóa Gram-Smidt, hệ cơ sở đó có tính chất*

$$\mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_m) = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m) \quad \forall m = 1, 2, ..., n.$$

Ví dụ 4.1.5

1. Không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$ là không gian Euclide. Dễ dàng chỉ ra hệ các véc tơ

   $$B = \{\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{a}_3 = (1, 1, 3)\}$$

   là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Bằng phương pháp Gram-Smidt, hãy trực chuẩn hoá hệ véc tơ B.

   Ta có nhận xét rằng 2 véc tơ $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1)$ trực giao nhau theo tích vô hướng đã cho

   $$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0.$$

   Theo phương pháp Gram-Smidt, ta tìm véc tơ thứ ba

   $$\mathbf{v} = \mathbf{a}_3 - \alpha_1 \mathbf{a}_1 - \alpha_2 \mathbf{a}_2$$

   sao cho $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}_2$. Các hệ số α_1, α_2 được xác định bởi công thức

   $$\alpha_1 = \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \rangle}{|\mathbf{a}_1|^2} = \frac{-2}{2} = -1, \; \alpha_2 = \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 \rangle}{|\mathbf{a}_2|^2} = \frac{4}{3}.$$

Suy ra

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1 - \frac{4}{3}\mathbf{a}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Kí hiệu véc tơ đồng phương với $\mathbf{v}$ là $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$. Như vậy hệ 3 véc tơ

$$\{\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{u} = (2, -1, 2)\}$$

là hệ trực giao theo tích vô hướng đã cho trong $\mathbb{R}^3$. Trực chuẩn hóa hệ véc tơ trên ta được hệ cơ sở trực chuẩn

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1), \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(2, -1, 2).$$

Ta dễ dàng kiểm tra tính chất phát biểu trong định lí 4.1.4

$$\mathscr{L}(\mathbf{e}_1) = \mathscr{L}(\mathbf{a}_1),\ \mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),\ \mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3).$$

2. Trong không gian các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá hai $E = \mathscr{P}_2[x]$ với tích vô hướng

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Hãy trực chuẩn hóa hệ cơ sở $B = \{1, x, x^2\}$ của E.

Theo phương pháp Gram-Smidt, trước hết ta trực giao hóa hệ véc tơ B.

- $\star$) Đặt $\mathbf{f}_1 = 1$ là véc tơ đầu tiên của hệ B.
- $\star$) Đặt $\mathbf{f}_2 = x - \alpha \cdot 1 = x - \alpha$. Ta xác định α để $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\rangle = 0$ hay

$$\langle 1, x\rangle - \alpha\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{\langle 1, x\rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} = 0.$$

Do đó $\mathbf{f}_2 = x - \alpha = x$.

$\star$) Đặt $\mathbf{f}_3 = x^2 - \alpha_1\mathbf{f}_1 - \alpha_2\mathbf{f}_2$. Khi đó

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{f}_1, x^2\rangle - \alpha_1\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1\rangle + 0 = 0 \;\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\int\limits_{-1}^{1} 1\cdot x^2 dx}{\int\limits_{-1}^{1} 1\cdot 1\, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{f}_2, x^2\rangle - \alpha_2\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2\rangle = 0 \;\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\int\limits_{-1}^{1} x\cdot x^2 dx}{\int\limits_{-1}^{1} x\cdot x\, dx} = 0.$$

Do đó $\mathbf{f}_3 = x^2 - \alpha_1\mathbf{f}_1 - \alpha_2\mathbf{f}_2 = x^2 - \frac{1}{3}$.

Như vậy $\mathbf{f}_1 = 1, \mathbf{f}_2 = x, \mathbf{f}_3 = x^2 - \frac{1}{3}$ là một cơ sở trực giao của E. Chuẩn hoá chúng, ta được hệ cơ sở trực chuẩn của E.

3. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$, mặt phẳng $x - 2y + z = 0$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

   Véc tơ vuông góc, theo tích vô hướng đã cho, với mọi véc tơ trong mặt phẳng $x - 2y + z = 0$ cũng được gọi là véc tơ pháp của mặt phẳng. Việc tìm véc tơ pháp của mặt phẳng có thể đưa về việc trực giao hoá hệ cơ sở gồm 3 véc tơ $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\}$ trong $\mathbb{R}^3$, với $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b}\}$ thuộc mặt phẳng đã cho.

   Chẳng hạn $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$ là 2 véc tơ độc lập tuyến tính thuộc mặt phẳng $x - 2y + z = 0$. Bằng phương pháp trực giao hoá Gram-Smidt trình bày trên, ta dễ dàng tìm được véc tơ vuông góc với mặt phẳng đó, $\perp\mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, có dạng $C(2, -2, 1)$, $C \in \mathbb{R}$.

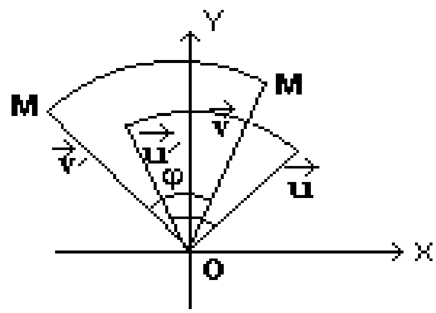
4.2 Phép biến đổi trực giao, phép biến đổi đối xứng

Định nghĩa 4.2.1 *Phép biến đổi tuyến tính f trong không gian Euclide E được gọi là phép biến đổi trực giao nếu nó bảo toàn tích vô hướng:*

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \quad \textit{với mọi} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

Ví dụ 4.2.1

1. Phép quay tâm O trong mặt phẳng xOy với góc quay φ là phép biến đổi trực ... ứng $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle$:



Hình 4.1: Phép quay

Thật vậy, kí hiệu phép quay đó là T, nó quay một góc φ quanh tâm O biến $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ thành $\overrightarrow{\mathbf{u}'}$ và $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ thành $\overrightarrow{\mathbf{v}'}$

$$T\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}'}, T\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}'}$$

Khi đó $|\overrightarrow{\mathbf{u}}| = |\overrightarrow{\mathbf{u}'}|, |\overrightarrow{\mathbf{v}}| = |\overrightarrow{\mathbf{v}'}|$ và góc giữa hai véc tơ $(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$ cũng bằng góc giữa hai véc tơ ảnh $(\overrightarrow{\mathbf{u}'}, \overrightarrow{\mathbf{v}'})$. Do vậy

$$\begin{aligned}\langle T\overrightarrow{\mathbf{u}}, T\overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \overrightarrow{\mathbf{u}'}, \overrightarrow{\mathbf{v}'} \rangle = |\overrightarrow{\mathbf{u}'}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{v}'}| \cos(\overrightarrow{\mathbf{u}'}, \overrightarrow{\mathbf{v}'}) \\ &= |\overrightarrow{\mathbf{u}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{v}}| \cos(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle.\end{aligned}$$

2. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ (có gắn hệ trục tọa độ Đề các xOy và xét tích vô hướng Euclide), phép lấy đối xứng qua đường thẳng, chẳng hạn đối xứng qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y = x$ là phép biến đổi trực giao. Kí hiệu h là phép biến đổi tuyến tính đó

$$h(x, y) = (y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tương tự như trên, từ ý nghĩa hình học ta thấy phép lấy đối xứng bảo toàn tích vô hướng. Do vậy nó là phép biến đổi trực giao. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ cũng là cơ sở trực chuẩn

$$E = \{ \overrightarrow{\mathbf{i}} = (1, 0), \overrightarrow{\mathbf{j}} = (0, 1)\}$$

Ma trận của h trong cơ sở chính tắc đó bằng

$$[h]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định lí 4.2.1 *Điều kiện cần và đủ để phép biến đổi tuyến tính $f : E \to E$ trong trong không gian Euclide là phép biến đổi trực giao, là f bảo toàn độ dài. Nói cách khác*

$$|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}| \quad \textit{với mọi} \quad \mathbf{u} \in E.$$

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên

$$|f(\mathbf{u})|^2 = \big\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{u})\big\rangle = \big\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\big\rangle = |\mathbf{u}|^2.$$

Để chứng minh điều kiện đủ, xét

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{u}+\mathbf{v})|^2 &= \big\langle f(\mathbf{u}+\mathbf{v}), f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\big\rangle = \big\langle f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}), f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})\big\rangle = \\ &= \big\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{u})\big\rangle + 2\big\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\big\rangle + \big\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v})\big\rangle = \\ &= |f(\mathbf{u})|^2 + 2\big\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\big\rangle + |f(\mathbf{v})|^2. \end{aligned}$$

Theo giả thiết của điều kiện đủ $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$, suy ra

$$|f(\mathbf{u}+\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\big\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\big\rangle + |\mathbf{u}|^2$$

Mặt khác cũng từ giả thiết của điều kiện đủ

$$|f(\mathbf{u}+\mathbf{v})|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\big\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\big\rangle + |\mathbf{u}|^2.$$

So sánh 2 đẳng thức trên ta được

$$\big\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\big\rangle = \big\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\big\rangle \quad \text{với mọi} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E.$$

Nói cách khác f là phép biến đổi trực giao. ■

Nhận xét

1. Do $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ với mọi $\mathbf{u} \in E$ suy ra $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, nói cách khác f là phép biến đổi không suy biến, tồn tại f^{-1}. Ánh xạ ngược f^{-1} bảo toàn độ dài, do vậy nó cũng là phép biến đổi trực giao.

2. Theo định lí trên phép biến đổi trực giao bảo toàn tích vô hướng và độ dài, do vậy nó đưa hệ cơ sở trực chuẩn thành hệ cơ sở trực chuẩn. Cụ thể hơn nếu $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của E, khi đó
$$\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_n)\}$$
cũng là hệ cơ sở trực chuẩn.

3. Điều ngược lại cũng đúng, nếu f chuyển hệ cơ sở trực chuẩn thành hệ cơ sở trực chuẩn thì f là phép biến đổi trực giao.
Thật vậy khi đó, giả sử $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$, suy ra $|\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$. Mặt khác
$$|f(\mathbf{u})|^2 = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{u}_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$
Do đó $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ với mọi $\mathbf{u} \in E$, theo định lí vừa chứng minh, f là phép biến đổi trực giao.

Về ma trận của phép biến đổi trực giao, ta có định lí sau

Định lí 4.2.2 *Giả sử f là phép biến đổi trực giao trong E và ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ có dạng*
$$[f]_B = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
Khi đó ma trận của ánh xạ ngược f^{-1} trong cơ sở B chính là ma trận chuyển vị A^T của A
$$[f^{-1}]_B = A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chứng minh. Việc chứng minh $A^{-1} = A^T$ tương đương với việc chứng minh

$$A^T A = I_n \quad (I_n \text{ là ma trận đơn vị cấp } n).$$

Thật vậy các cột của A lần lượt là các cột tọa độ của các véc tơ $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), ..., f(\mathbf{e}_n)$

$$f(\mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_k,\ \ f(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\mathbf{e}_k\ \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Suy ra $\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j)\rangle = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}$. Mặt khác theo nhận xét ở trên $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), ..., f(\mathbf{e}_n)\}$ cũng là hệ cơ sở trực chuẩn của E

$$\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j)\rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Do vậy

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \text{ hay } A^T A = I_n. \blacksquare$$

Ma trận vuông A có tính chất $A^T A = I_n$ được gọi là *ma trận trực giao*. Chi tiết hơn người ta thường nói ma trận trực giao là ma trận có tính chất

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

hoặc

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

với mọi $i, j = 1, 2, ..., n$.

Ta lưu ý tới nhận xét sau: nếu f là phép biến đổi tuyến tính trong không gian Euclide E và f có các véc tơ riêng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ lập thành hệ cơ sở trực chuẩn của E, thì ma trận A của f trong cơ sở trực chuẩn B bất kì, theo công thức (3.2) trong chương trước, có dạng

$$A = T\Lambda T^T \quad \text{hay} \quad \Lambda = T^T A T.$$

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ là ma trận chéo, các phần tử trên đường chéo là các trị riêng của f, T là ma trận trực giao (chuyển cơ sở trực chuẩn B thành cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$).

Ví dụ 4.2.2

1. Trong ví dụ 3.4.5 cũng như ví dụ 4.2.1 về phép quay, ma trận của phép quay tâm O, góc quay φ trong cơ sở chính tắc của mặt phẳng xOy

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

   Ma trận của phép quay là ma trận trực giao, ta dễ dàng kiểm tra hệ thức

$$A^{-1} = A^T \text{ hay } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Cũng trong ví dụ 4.2.1, ma trận của phép lấy đối xứng qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y = x$ là ma trận trực giao

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{hiển nhiên} \quad B = B^T = B^{-1}.$$

3. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

   hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}_1 = (2, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, -2), \mathbf{a}_3 = (-1, 5, 2)\}$ là hệ cơ sở trực giao. Chuẩn hoá các véc tơ đó, ta được hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right) \right\}.$$

   Kí hiệu $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ lần lượt là các véc tơ trong cơ sở trực chuẩn B, gọi $E = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ là hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, khi đó phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_1, \ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}_2, \ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{b}_3$$

chuyển cơ sở trực chuẩn E vào cơ sở trực chuẩn B. Do vậy f là phép biến đổi trực giao. Ma trận của f trong cơ sở chính tắc

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Dễ dàng kiểm tra tính chất $AA^T = I_3$ hay $A^{-1} = A^T$ của ma trận trực giao A.

Định nghĩa 4.2.2 *Phép biến đổi tuyến tính f trong không gian Euclide E được gọi là phép biến đổi đối xứng nếu*

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y})\rangle \quad \textit{với mọi} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$$

Định lí 4.2.3 *Gọi $A = (a_{ij})$ là ma trận của phép biến đổi đối xứng f trong một cơ sở trực chuẩn nào đó. Khi đó*

$$A^T = A, \quad (\textit{nói cách khác } A \textit{ là ma trận đối xứng}).$$

Chứng minh. Giả sử $A = (a_{ij})$ là ma trận của phép biến đổi đối xứng f trong cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. Khi đó

$$a_{ij} = \langle f(\mathbf{e}_j), \mathbf{e}_i\rangle \quad \text{và} \quad a_{ji} = \langle \mathbf{e}_j, f(\mathbf{e}_i)\rangle$$

Do f là phép biến đổi đối xứng: $\langle f(\mathbf{e}_j), \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{e}_j, f(\mathbf{e}_i)\rangle$, suy ra điều phải chứng minh $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j. ∎

Phép biến đổi đối xứng có các tính chất đặc biệt được trình bày trong các định lí sau

Định lí 4.2.4 *Nếu λ và μ là hai giá trị riêng khác nhau của phép biến đổi đối xứng f thì hai véc tơ riêng tương ứng với λ và μ trực giao nhau.*

Chứng minh. Gọi $\mathbf{e}_1$ và $\mathbf{e}_2$ là hai véc tơ riêng tương ứng với λ và μ. Xét

$$\lambda\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = \langle \lambda\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = \langle f(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2\rangle =$$

$$= \langle \mathbf{e}_1, f(\mathbf{e}_2)\rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mu\mathbf{e}_2\rangle = \mu\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$$

Do $\lambda \neq \mu$ suy ra $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0$ hay $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. ∎

Định lí 4.2.5 *Phép biến đổi đối xứng trong không gian Euclide có ít nhất một véc tơ riêng.*

Chứng minh. Gọi A là ma trận của phép biến đổi đối xứng f trong cơ sở trực chuẩn bất kì $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. Trước tiên ta chứng minh đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ của f chỉ có nghiệm thực.
Gọi λ là nghiệm bất kì (trong trường số phức) của đa thức đặc trưng. Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Do λ là nghiệm của đa thức đặc trưng nên hệ có nghiệm không tầm thường $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$. (Các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ có thể là các số phức không thực). Kí hiệu $\overline{\lambda}$ là số phức liên hợp của λ và $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ .. \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$. Do các phần tử của A là các số thực

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \overline{A\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}} \Rightarrow A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \lambda\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} &= \overline{\mathbf{x}}^T(A\mathbf{x}) = (\overline{\mathbf{x}}^T(A\mathbf{x}))^T = (A\mathbf{x})^T\overline{\mathbf{x}} = \\ &= \mathbf{x}^T A^T\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\mathbf{x}^T\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Suy ra $\lambda = \overline{\lambda}$ do $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Như vậy mọi trị riêng λ của phép biến đổi đối xứng luôn là các số thực. Ứng với giá trị riêng λ đó là véc tơ riêng được tính từ hệ phương trình $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ■

Định lí 4.2.6 *Phép biến đổi đối xứng trong không gian Euclide n chiều E có n véc tơ riêng và các véc tơ riêng đó lập thành một hệ cơ sở trực chuẩn của E.*

Từ định lí này ta có ngay nhận xét

1. Nếu hệ cơ sở B gồm n véc tơ riêng của phép biến đổi đối xứng f, khi đó ma trận của f trong cơ sở B có dạng chéo.

2. Các phần tử nằm trên đường chéo chính trong ma trận kể trên là các giá trị riêng của f.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lí theo số chiều của E.
Định lí hiển nhiên với $n = 1$. Giả sử định lí đúng với mọi phép biến đổi đối xứng trong không gian có số chiều bé hơn n.

Xét phép biến đổi đối xứng trong không gian Euclide n chiều E. Định lí vừa chứng minh trên khẳng định f có một véc tơ riêng $\mathbf{e}_1$ (chọn $\mathbf{e}_1$ sao cho $|\mathbf{e}_1| = 1$)

$$f(\mathbf{e}_1) = \lambda\mathbf{e}_1.$$

Kí hiệu

$$E' = \{\mathbf{x} \in E \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0\}$$

Dễ dàng chứng minh được E' là không gian con của E, $\dim E' = n - 1$ (bạn đọc tự chứng minh!) và $f : E' \to E'$. Thật vậy với $\mathbf{x} \in E'$

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{e}_1) \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{e}_1 \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \quad \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in E'.$$

Như vậy f là phép biến đổi đối xứng trong không gian con E' với số chiều bằng $n - 1$. Theo giả thiết quy nạp tồn tại trong không gian con E' một cơ sở trực chuẩn gồm $n - 1$ véc tơ riêng của f

$$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, ..., \mathbf{e}_n.$$

Từ đó suy ra n véc tơ riêng $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, ..., \mathbf{e}_n$ là hệ cơ sở trực chuẩn của không gian E. Ma trận của f trong cơ sở đó có dạng chéo. ∎

Ví dụ 4.2.3

1. Trong $\mathbb{R}^3$ cho phép biến đổi tuyến tính

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2, 6x_3)$$

$\mathbb{R}^3$ là không gian Euclide với tích vô hướng của 2 véc tơ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn chính tắc là ma trận đối xứng

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vậy f là phép biến đổi đối xứng. Đa thức đặc trưng của f

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 6\lambda + 8)(6-\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)(6-\lambda).$$

Do vậy các trị riêng của $f:\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6.$

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 0 \\ -1 & 3-2 & 0 \\ 0 & 0 & 6-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ với $C \in \mathbb{R}$ tùy ý. Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 4$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 & 0 \\ -1 & 3-4 & 0 \\ 0 & 0 & 6-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tương tự ứng với trị riêng $\lambda_3 = 6$, véc tơ riêng có tọa độ

$$\begin{pmatrix} 3-6 & -1 & 0 \\ -1 & 3-6 & 0 \\ 0 & 0 & 6-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 véc tơ riêng $\mathbf{u}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (1,-1,0),\ \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ ứng với 3 giá trị riêng $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$ đôi một trực giao nhau. Chuẩn hoá các véc tơ $\mathbf{u}_1$ và $\mathbf{u}_2$ ta được hệ cơ sở trực chuẩn.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$$

Các véc tơ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ cũng là các véc tơ riêng

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1, f(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_2, f(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_3$$

Ma trận của f trong cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ có dạng chéo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Xét phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ (nếu không nói gì khác, ta hiểu $\mathbb{R}^3$ là không gian Euclide với tích vô hướng $<\mathbf{a}, \mathbf{b}>= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$)

$$f(x, y, z) = (5x - y - z, -x + 5y - z, -x - y + 5z)$$

f là phép biến đổi đối xứng với ma trận trong cơ sở chính tắc

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của f

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2(3 - \lambda)$$

có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 6$.
Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -1 & -1 \\ -1 & 5-3 & -1 \\ -1 & -1 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tương tự ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 5-6 & -1 & -1 \\ -1 & 5-6 & -1 \\ -1 & -1 & 5-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Như vậy mọi véc tơ khác 0 trong mặt phẳng $x + y + z = 0$ là véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 6$. Chọn hai véc tơ riêng tùy ý trực giao nhau trong mặt phẳng này, chẳng hạn

$$\mathbf{u}_2 = (1, -2, 1), \ \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

Cùng với véc tơ riêng $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$, ba véc tơ

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \ \mathbf{u}_2 = (1, -2, 1), \ \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

lập thành hệ cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$. Chuẩn hoá các véc tơ $\mathbf{u}_i$ ta được hệ cơ sở trực chuẩn

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

Do chúng là các véc tơ riêng $f(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1, f(\mathbf{e}_2) = 6\mathbf{e}_2, f(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_3$, ma trận của f trong cơ sở $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ có dạng chéo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ta có nhận xét sau về *cách đưa một ma trận đối xứng về ma trận chéo*:
Giả sử A là ma trận đối xứng cấp n, khi đó có thể xem A đồng thời là phép biến đổi tuyến tính đối xứng trong $\mathbb{R}^n$. Theo định lí 4.2.6 tồn tại một cơ sở trực chuẩn B để ma trận của phép biến đổi tuyến tính có dạng chéo, kí hiệu Λ, trong cơ sở đó.
Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trực chuẩn B, theo định lí 3.2.8 về ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

$$A = P\Lambda P^{-1} \text{ hay } P^{-1}AP = \Lambda.$$

Chú ý rằng các cột của ma trận P là các tọa độ của các véc tơ trong cơ sở trực chuẩn B, do đó P là ma trận trực giao, $P^{-1} = P^T$. Suy ra

$$A = P\Lambda P^T \text{ hay } P^TAP = \Lambda.$$

Cách xác định ma trận trực giao P và ma trận chéo Λ thỏa mãn đẳng thức trên được gọi là *phương pháp chéo hoá trực giao ma trận đối xứng*.

Trong ví dụ trên với ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, ta đã đưa ma trận A về dạng chéo

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

bởi ma trận trực giao $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Các cột của P là các véc tơ riêng đã được chuẩn hóa (chúng lập thành hệ cơ sở trực chuẩn) với các trị riêng $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 6$ tương ứng.

Ví dụ 4.2.4

Tìm ma trận trực giao P làm chéo hóa ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A bằng

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 2^2] = (5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda).$$

Vậy A có các giá trị riêng

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

$\star$) Với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, không gian con riêng tương ứng với λ_1 là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Lấy $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$ và chuẩn hóa nó ta được

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$\star$) Với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$, không gian con riêng tương ứng với λ_2 là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Chọn $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)$ trong mặt phẳng $x + y = 0$ và chuẩn hóa $\mathbf{u}_2$ ta được

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1).$$

Ta tìm một vectơ riêng

$$\mathbf{u}_3 = (x, y, z)$$

ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ và trực giao với $\mathbf{u}_2$, khi đó, x, y, z là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \end{cases}$$

Chọn $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0)$ là nghiệm của hệ phương trình và chuẩn hóa $\mathbf{u}_3$ ta được vectơ

$$\mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

Như vậy ma trận trực giao với các cột là các véc tơ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

làm chéo hóa ma trận A. Ta có đẳng thức

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng từ hệ thức trên suy ra ta có thể biểu diễn ma trận A đã cho theo ma trận chéo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

4.3.1 Dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ

Định nghĩa 4.3.1 *Cho V là không gian véc tơ thực. Ánh xạ $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ được gọi là dạng song tuyến tính trên V nếu*

- $\varphi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}', \mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta\varphi(\mathbf{u}', \mathbf{v}) \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\; \forall \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v} \in V.$
- $\varphi(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}') = \alpha\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V.$

Ngoài ra nếu

- $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

thì φ được gọi là dạng song tuyến tính đối xứng trên V.

Ví dụ 4.3.1

1. Hai ánh xạ $u, v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\begin{aligned} u\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ v\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 \end{aligned}$$

   là hai dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$. Thật vậy

   $u\big(\alpha(x_1, x_2)+\beta(x_1', x_2'), (y_1, y_2)\big) = u\big((\alpha x_1+\beta x_1', \alpha x_2+\beta x_2'), (y_1, y_2)\big)$

   $= (\alpha x_1 + \beta x_1')y_2 - (\alpha x_2 + \beta x_2')y_1 = \alpha(x_1y_2 - x_2y_1) + \beta(x_1'y_2 - x_2'y_1)$

   $= \alpha u\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big)+\beta u\big((x_1', x_2'), (y_1, y_2)\big).$

   Chứng minh tương tự cho $v\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$

   $v\big(\alpha(x_1, x_2)+\beta(x_1', x_2'), (y_1, y_2)\big)$

   $= \alpha v\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big)+\beta v\big((x_1', x_2'), (y_1, y_2)\big).$

   Suy ra v cũng là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

2. Dạng song tuyến tính $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1$, với $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, không là dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^2$ vì $u(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \neq u(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = u\big((1, 0), (0, 1)\big) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \\ u(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = u\big((0, 1), (1, 0)\big) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

3. Dạng song tuyến tính $u(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$ là dạng song tuyến tính đối xứng vì

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y},\mathbf{x}) &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 \\ &= x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 \\ &= u(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

4. Tích vô hướng trên không gian Euclide E là một dạng song tuyến tính đối xứng trên E. Thật vậy, nó có các tính chất

   i) tuyến tính: $\forall \mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{y},\mathbf{y}' \in E, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned} \big\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}',\mathbf{y}\big\rangle &= \alpha\big\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\big\rangle + \beta\big\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}\big\rangle \\ \big\langle \mathbf{x},\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}'\big\rangle &= \alpha\big\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\big\rangle + \beta\big\langle\mathbf{x},\mathbf{y}'\big\rangle \end{aligned}$$

   ii) đối xứng:

   $\big\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\big\rangle = \big\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\big\rangle \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E.$

Nhận xét

Nếu φ là dạng song tuyến tính trên V thì với mỗi vec tơ $\mathbf{y}$ của V, ánh xạ $\varphi(\cdot\,,\mathbf{y}) : V \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ là ánh xạ tuyến tính, nên $\varphi(\mathbf{0},\mathbf{y}) = 0,\ \forall \mathbf{y} \in V$. Tương tự, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{0}) = 0,\ \forall \mathbf{x} \in V$.
Ta thường nói dạng song tuyến tính là ánh xạ tuyến tính (hoặc dạng tuyến tính) theo từng biến.

Gọi $B = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$ là một cơ sở của V, φ là dạng song tuyến tính trên V. Các véc tơ $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ có tọa độ

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots u_n\mathbf{e}_n,\ \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots v_n\mathbf{e}_n$$

Do tính tuyến tính theo từng biến của φ

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{v}) \tag{4.1}$$

và

$$\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} v_j\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) \tag{4.2}$$

suy ra

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_iv_j\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) \tag{4.3}$$

Kí hiệu $a_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, hệ thức (4.3) trở thành

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j \tag{4.4}$$

Gọi $A = (a_{ij})$ ma trận vuông cấp n, ta viết các hệ thức (4.1) và (4.2) dưới dạng tích các ma trận

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1\ u_2\ \ldots\ u_n) \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) \\ \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) \\ \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ thức (4.4) có thể viết dưới dạng

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]^T \cdot A \cdot [\mathbf{v}] \tag{4.5}$$

hoặc chi tiết hơn

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ma trận

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \cdots & \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \cdots & \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ .. & .. & \cdots & .. \\ \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \cdots & \varphi(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận liên kết với dạng song tuyến tính* φ *trong cơ sở* B hoặc nói tắt là ma trận của φ trong cơ sở B. Các ma trận $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$ trong hệ thức (4.5) là các ma trận cột tọa độ của $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ trong cơ sở B.

Ví dụ 4.3.2

1. Xét các dạng song tuyến tính trong ví dụ 4.3.1

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ v(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 \end{aligned}$$

   Trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$, tọa độ của $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2.$$

   Ma trận của dạng song tuyến tính u trong cơ sở chính tắc

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & u(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \\ u(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & u(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Ma trận của v trong cơ sở chính tắc bằng

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & u(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \\ u(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & u(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Như vậy u và v có thể viết dưới dạng ma trận

$$u(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2. Cho dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$

$$u(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2, \quad \mathbf{x} = (x_1,x_2), \mathbf{y} = (y_1,y_2).$$

   Dễ dàng nhận thấy ma trận của dạng song tuyến tính u trong cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Xét một cơ sở khác $F = \{\mathbf{f}_1 = (1,1), \mathbf{f}_2 = (1,-1)\}$ của $\mathbb{R}^2$, ma trận của u trong cơ sở F

$$B = \begin{pmatrix} u(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1) & u(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2) \\ u(\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_1) & u(\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nếu x_1, x_2 và y_1, y_2 là các tọa độ của $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ trong cơ sở F

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2,\ \ \mathbf{y} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$$

thì dạng song tuyến tính

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6x_1y_1 - 4x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

Như vậy ma trận của dạng song tuyến tính trong các sơ sở khác nhau có thể khác nhau và do đó biểu thức biểu diễn dạng song tuyến tính trong các sơ sở khác nhau cũng không giống nhau.

Định lí 4.3.1 *Dạng song tuyến tính φ là đối xứng khi và chỉ khi ma trận liên kết với φ trong cơ sở bất kì là ma trận đối xứng.*

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên do tính đối xứng của φ.
Điều kiện đủ được suy ra từ giả thiết A là ma trận đối xứng

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= [\mathbf{u}]^T \cdot A \cdot [\mathbf{v}] \\ &= \big([\mathbf{u}]^T \cdot A \cdot [\mathbf{v}]\big)^T \\ &= [\mathbf{v}]^T \cdot A \cdot [\mathbf{u}] \\ &= \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 4.3.3

Kí hiệu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Xét các dạng song tuyến tính dưới đây trong $\mathbb{R}^3$.

1. Trong ví dụ 4.3.1, ta đã nhắc đến tích vô hướng $\big\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \big\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^3$. Ma trận của φ trong cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 1),\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ hiển nhiên là ma trận đơn vị
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 - 2u_2v_2 - 3u_3v_3$ là dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^3$. Ma trận của φ trong cơ sở chính tắc cũng là ma trận chéo
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_3 + 2u_3v_1 + 4u_2v_3 + 4u_3v_2 - 2u_2v_2 - 3u_3v_3$ cũng là dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^3$. Ma trận của ϕ trong cơ sở chính tắc
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

4. $\psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_3v_1 + u_2v_2 - 2u_2v_1 - 3u_3v_3$ là dạng song tuyến tính không đối xứng. Ma trận liên kết với nó không là ma trận đối xứng
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Định lí sau cho ta biết sự biến đổi của ma trận dạng song tuyến tính khi chuyển sang cơ sở mới.

Định lí 4.3.2 *$E = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ và $F = \{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, ..., \mathbf{f_m}\}$ là hai hệ cơ sở trong không gian véc tơ V. Cho dạng song tuyến tính φ trên V và A, B là hai ma trận của dạng song tuyến tính φ trong các cơ sở E, F tương ứng. Khi đó*
$$B = T^T A T$$
trong đó T là ma trận chuyển cơ sở từ E sang F.

Chứng minh. Kí hiệu $[\mathbf{u}], [\mathbf{u}']$ là các ma trận cột tọa độ của $\mathbf{u}$ trong các cơ sở E, F tương ứng và $[\mathbf{v}], [\mathbf{v}']$ là các ma trận cột tọa độ của $\mathbf{v}$ cũng trong các cơ sở E, F đó. Khi đó theo công thức đổi cơ sở trong định lí 3.3.2
$$[\mathbf{u}] = T[\mathbf{u}'] \quad \text{và} \quad [\mathbf{v}] = T[\mathbf{v}'] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{u}]^T = [\mathbf{u}']^T T^T$$
Suy ra
$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]^T A[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}']^T T^T A T[\mathbf{v}']$$
Mặt khác $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [\mathbf{u}']^T B[\mathbf{v}']$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Vậy $B = T^T A T$ (đ.p.c.m). ■

Ví dụ 4.3.4

Trở lại ví dụ 4.3.2 với dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2.$$

Ma trận của u trong cơ sở chính tắc $E = \{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ bằng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Xét một cơ sở khác $F = \{\mathbf{f}_1 = (1,1), \mathbf{f}_2 = (1,-1)\}$ của $\mathbb{R}^2$. Ma trận chuyển cơ sở từ E sang F

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ma trận chuyển vị } \; T^T = T.$$

Vậy ma trận của u trong cơ sở F

$$B = T^TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.3.2 Dạng toàn phương

Định nghĩa 4.3.2 *Cho $\varphi : V \times V \to R$ là dạng song tuyến tính đối xứng trên không gian véc tơ V. Khi đó*

$$\begin{aligned} \omega : V &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto u(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

được gọi là dạng toàn phương liên kết với φ (hoặc dạng toàn phương tương ứng với φ) trên V.

Ví dụ 4.3.5

1. Dạng toàn phương liên kết với dạng song tuyến tính đối xứng cho ở ví dụ 4.3.1, $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$ là ánh xạ $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2) = v(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 = x_1^2 + 4x_1x_2.$$

2. Dạng toàn phương tương ứng với tích vô hướng Euclide trong $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Nhận xét rằng mỗi dạng toàn phương chỉ liên kết với một dạng song tuyến tính đối xứng. Thật vậy, giả sử $\omega(\mathbf{x})$ là dạng toàn phương liên kết với φ, ta có thể viết

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \omega(\mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \omega(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Suy ra φ được xác định duy nhất bởi hệ thức

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{\omega(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x}) - \omega(\mathbf{y})\}$$

Kí hiệu $A = (a_{ij})$ là ma trận của φ trong cơ sở nào đó, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của véc tơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở đó, dạng toàn phương $\omega(\mathbf{x})$, theo công thức (4.4) có dạng

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Chú ý rằng trong biểu thức biểu diễn dạng toàn phương ở trên

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{với mọi} \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

do $A = (a_{ij})$ là ma trận đối xứng. Dạng toàn phương có thể biểu diễn dưới dạng

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_i x_j \tag{4.6}$$

hoặc dưới dạng ma trận

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = [\mathbf{x}]^T A [\mathbf{x}].$$

Ma trận A của dạng song tuyến tính đối xứng φ trong cơ sở nào đó cũng được gọi là *ma trận của dạng toàn phương* liên kết với φ trong cơ sở đó.

Tất nhiên trong các cơ sở khác nhau biểu thức biểu diễn dạng toàn phương cũng như biểu thức dưới dạng ma trận của dạng toàn phương có thể khác nhau. Sự biến đổi của ma trận dạng toàn phương khi chuyển sang cơ sở mới được tính theo định lí 4.3.2. Cụ thể, nếu A là ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở E và B là ma trận của ω trong cơ sở F. Kí hiệu T là ma trận chuyển cơ sở từ E sang F, khi đó

$$B = T^T AT.$$

Lưu ý rằng theo định lí 4.3.2, mỗi phép đổi cơ sở, với T là ma trận chuyển cơ sở, tương ứng với phép đổi biến

$$[\mathbf{x}] = T[\mathbf{y}] \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó dạng toàn phương ω theo biến mới $y_1, y_2, ..., y_n$ là

$$\omega = [\mathbf{x}]^T A[\mathbf{x}] = (T[\mathbf{y}])^T AT[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^T (T^T AT)[\mathbf{y}].$$

Ví dụ 4.3.6

1. Ma trận của dạng toàn phương

$$\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2 - 3x_2x_3, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

theo cơ sở chính tắc được xác định như sau. Viết dạng toàn phương theo công thức (4.6)

$$\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2 \cdot \frac{3}{2}x_2x_3.$$

Vậy ma trận của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

2. Xét dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng với nó (kí hiệu $\mathbf{a} = (x, y, z)$, $\mathbf{b} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$)

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 5xx' + 5yy' + 5zz' - xy' - x'y - xz' - x'z - yz' - y'z.$$

Dạng ma trận của dạng song tuyến tính trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

$$\varphi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Suy ra dạng toàn phương tương ứng

$$\omega(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bây giờ ta biểu diễn dạng toàn phương này trong một cơ sở khác

$$F = \left\{ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1),\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \right\}$$

Theo định lí 4.3.2, ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở F

$$B = T^T A T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

với T là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Tính tích các ma trận trên ta được B là ma trận chéo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vậy dạng toàn phương ω nói trên trong cơ sở $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ có dạng

$$\omega = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 + 6y^2 + 6z^2.$$

Lưu ý rằng $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ *là hệ cơ sở trực chuẩn trong* $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 4.3.3 *Trong một cơ sở B nào đó của không gian véc tơ V nếu dạng toàn phương $\omega : V \to \mathbb{R}$ có dạng*

$$\omega(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \tag{4.7}$$

trong đó $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của véc tơ $\mathbf{x}$ trong cơ sở B, thì ta nói dạng toàn phương $\omega(\mathbf{x})$ có dạng chính tắc trong cơ sở B đó.

Nhận xét rằng trong cơ sở B dạng toàn phương ω có dạng chính tắc khi và chỉ khi ma trận của ω trong cơ sở đó là ma trận chéo. Dạng chính tắc (4.7) của dạng toàn phương ω có thể viết

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Bài toán *đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc* là bài toán có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Trong giáo trình này ta sẽ đưa ra hai phương pháp để rút gọn dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Phương pháp biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Xét dạng toàn phương trong không gian n chiều V

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = [\mathbf{x}]^T A[\mathbf{x}]$$

trong đó $A = (a_{ij})$ là ma trận đối xứng. Giả sử dạng toàn phương trên đây được xét trong cơ sở $E = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ nào đó của V. Xét tích vô hướng sau trên không gian véc tơ V

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{với} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i.$$

V trở thành không gian Ơclit và $E = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của V, ma trận đối xứng $A = (a_{ij})$ của dạng toàn phương là ma trận của phép biến đổi đối xứng f nào đó trên V. Theo định lí 4.2.6, tồn tại một hệ cơ sở trực chuẩn gồm n véc tơ riêng của f : $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$

$$f(\mathbf{u}_1) = \lambda_1\mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2) = \lambda_2\mathbf{u}_2, ..., f(\mathbf{u}_n) = \lambda_n\mathbf{u}_n$$

Trong hệ cơ sở này, ma trận của f có dạng chéo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gọi T là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở trực chuẩn E sang cơ sở trực chuẩn U, khi đó T là ma trận trực giao $T^T = T^{-1}$ và theo định lí 3.4.7 trong mục ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

$$\Lambda = T^{-1}AT = T^TAT$$

Áp dụng định lí 4.3.2, dạng toàn phương ω trong cơ sở mới (cơ sở U) có dạng chính tắc

$$\omega = [\mathbf{y}]^T\Lambda[\mathbf{y}] = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Như vậy phép đổi biến $[\mathbf{x}] = T[\mathbf{y}]$ đưa $\omega(\mathbf{x})$ về dạng chính tắc

$$\omega(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Ví dụ 4.3.7

1. Đưa dạng toàn phương

$$\omega = 3x^2 + 10xy + 3y^2$$

trên không gian $\mathbb{R}^2$ về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi trực giao. Ma trận của ω theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Xét phép biến đổi đối xứng f trong $\mathbb{R}^2$ với ma trận của f trong cơ sở chính tắc là ma trận A của dạng toàn phương ω. Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 5^2 = (-2-\lambda)(8-\lambda),$$

nên A có hai giá trị riêng

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8.$$

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -2$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta chọn véc tơ dơn vị của véc tơ $(-1, 1)$ làm một véc tơ riêng của f

$$\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 8$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Chọn vectơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 8$ là $(1, 1)$ và chuẩn hóa véc tơ đó, ta được

$$\mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Như vậy 2 véc tơ riêng của f, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$, ma trận của f trong cơ sở đó có dạng chéo. Phép biến đổi trực giao với ma trận (có 2 cột là 2 véc tơ trực giao $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$)

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

làm chéo hoá ma trận A

$$P^T A T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Dạng toàn phương ω trong cơ sở $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ có dạng chính tắc

$$\omega = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 = -2{x'}^2 + 8{y'}^2.$$

Nói cách khác, phép đổi biến $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ hay

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

đưa $\omega(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2$ về dạng chính tắc

$$\omega(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2 = -2x'^2 + 8y'^2.$$

2. Xét dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Để đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi trực giao, xét phép biến đổi đối xứng f trong $\mathbb{R}^3$ với ma trận của f trong cơ sở chính tắc là ma trận của dạng toàn phương ω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)^2(2 - \lambda)$$

có các giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = -1$. Ta tìm một cơ sở trực chuẩn U trong $\mathbb{R}^3$ gồm các véc tơ riêng của f.
Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta chọn véc tơ dơn vị của véc tơ $(1, 1, 1)$ làm một véc tơ riêng của f

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1$, véc tơ riêng có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Như vậy mọi véc tơ khác 0 trong mặt phẳng $x + y + z = 0$ là véc tơ riêng của f ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1$. Chọn hai véc tơ đơn vị tùy ý trực giao nhau trong mặt phẳng này, chẳng hạn

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

Cùng với véc tơ riêng $\mathbf{u}_1$ ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$, ba véc tơ riêng $\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2, \ \mathbf{u}_3$ đôi một trực giao nhau, chúng lập thành hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$. Do chúng là các véc tơ riêng

$$f(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_2, f(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_3$$

ma trận của f trong cơ sở $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ có dạng chéo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dạng toàn phương đã cho trong cơ sở $\{\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2, \ \mathbf{u}_3\}$ có dạng chính tắc

$$\omega = 2x^2 - y^2 - z^2.$$

Nhận xét rằng ma trận chuyển cơ sở là các cột tọa độ của các véc tơ riêng $\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2, \ \mathbf{u}_3$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Như vậy sử dụng phép biến đổi trực giao T, công thức đổi biến để đưa dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc trình bày ở trên là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \omega(x, y, z) = 2x'^2 - y'^2 - z'^2.$$

Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Xét dạng toàn phương trong không gian n chiều

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, ..., n$.

• Nếu trong số các hệ số $a_{ii},\ i = 1, 2, ..., n$ có số khác 0, bằng cách sắp xếp lại các chỉ số ta có quyền giả thiết $a_{11} \neq 0$. Khi đó

$$\omega(\mathbf{x}) = a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

Mặt khác

$$x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_1x_i = \left(x_1 + \sum_{n=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2.$$

Đặt

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,$$

ta có

$$\omega(\mathbf{x}) = a_{11}y_1^2 + \omega_1,$$

trong đó ω_1 là dạng toàn phương $n-1$ biến: $\omega_1 = \omega_1(x_2, x_3, ..., x_n)$.

Như vậy phép đổi tọa độ

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}}{a_{11}}x_i \\ y_i = x_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \end{cases}$$

đưa ω về dạng $\omega(\mathbf{x}) = a_{11}y_1^2 + \omega_1(y_2, y_3, ..., y_n)$.

• Nếu tất cả các hệ số $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$, tồn tại một hệ số $a_{ij} \neq 0$ nào đó $(i \neq j)$. Ta đặt

$$y_i = \frac{x_i + x_j}{2}, \quad y_j = \frac{x_i - x_j}{2} \quad \text{hay} \quad x_i = y_i + y_j \quad \text{và} \quad x_j = y_i - y_j$$

khi đó

$$2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}(y_i^2 - y_j^2) \quad \text{trong đó} \quad a_{ij} \neq 0.$$

Trong trường hợp này phép đổi tọa độ

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \ \forall k \neq i, j \end{cases}$$

đưa dạng toàn phương ω về trường hợp đầu. Như vậy bằng các phép đổi biến thích hợp ta luôn có thể đưa ω về dạng

$$\omega(\mathbf{x}) = a_{11}y_1^2 + \omega_1,$$

trong đó ω_1 là dạng toàn phương $n-1$ biến.

Lặp lại quá trình nêu trên cho ω_1, sau hữu hạn bước ta rút gọn dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc.

Chú ý rằng mỗi lần đổi biến là một lần đổi cơ sở, ma trận T trong phép đổi biến $[\mathbf{x}] = T[\mathbf{y}]$ là ma trận chuyển cơ sở và biểu thức dạng toàn phương theo các biến mới là biểu thức dạng toàn phương trong cơ sở mới đó.

Ví dụ 4.3.8

1. Đưa dạng toàn phương đã xét trong ví dụ trước về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$\omega(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

Do các hệ số $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, đổi biến $\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \\ z = z' \end{cases}$ suy ra

$$\omega = 2(x' + y')(x' - y') + 2(x' + y')z' + 2(x' - y')z' = 2x'^2 - 2y'^2 + 4x'z'$$

$$\omega = 2(x' + z')^2 - 2y'^2 - 2z'^2$$

Đổi biến tiếp $x' + z' = x''$ ta được dạng toàn phương dạng chính tắc

$$\omega = 2x''^2 - 2y'^2 - 2z'^2 \qquad (4.8)$$

Gộp các phép biến đổi trên lại, phép đổi biến sau đã đưa ω về dạng chính tắc

$$\begin{cases} x = x'' + y' - z' \\ y = x'' - y' - z' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Vậy trong cơ sở gồm các véc tơ cột của ma trận phép biến đổi trên

$$\{\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{b}_3 = (-1, -1, 1)\}$$

dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc (4.8).

2. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$\omega(x, y, z) = 5x^2 + 8y^2 + 10z^2 + 8xy - 16xz - 8yz$$

Biến đổi dạng toàn phương như sau

$$\omega(x, y, z) = 5\left(x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}z\right)^2 + \frac{24}{5}y^2 - \frac{14}{5}z^2 + \frac{24}{5}yz$$

$$\omega(x, y, z) = 5\left(x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}z\right)^2 + \frac{24}{5}(y + \frac{1}{2}z)^2 - 4z^2$$

Đổi biến

$$\begin{cases} x' = x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}z \\ y' = y + \frac{1}{2}z \\ z' = z \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

dạng toàn phương trên có dạng chính tắc

$$\omega(x, y, z) = 5x'^2 + \frac{24}{5}y'^2 - 4z'^2. \tag{4.9}$$

Phép đổi biến trên có dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{5} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Nói cách khác, trong cơ sở $\{\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{b}_2 = (\frac{-4}{5}, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (2, \frac{-1}{2}, 1)\}$ dạng toàn phương ω có dạng chính tắc (4.9).

3. Đưa dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$$

về dạng chính tắc. Đặt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ta có

$$\begin{aligned} \omega &= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 = (y_1^2 + y_1y_3) - y_2^2 - y_2y_3 \\ &= \left(y_1 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - y_2^2 - y_2y_3 \end{aligned}$$

Phép đổi tọa độ

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

đưa ω về dạng

$$\omega = z_1^2 - \frac{1}{4}z_3^2 - z_2^2 - z_2z_3$$

Do dạng toàn phương 2 biến

$$\omega_1 = -\frac{1}{4}z_3^2 - z_2^2 - z_2z_3 = -\left(z_2 + \frac{1}{2}z_3\right)^2$$

suy ra

$$\omega = z_1^2 - \left(z_2 + \frac{1}{2}z_3\right)^2.$$

Như vậy phép đổi tọa độ

$$\begin{cases} t_1 = z_1 \\ t_2 = z_2 + \frac{1}{2}z_3 \\ t_3 = z_3 \end{cases}$$

đưa dạng toàn phương ω về dạng chính tắc

$$\omega = t_1^2 - t_2^2. \tag{4.10}$$

Từ ba phép biến đổi trên ta suy ra

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - t_3 \\ x_2 = t_1 - t_2 \\ x_3 = t_3 \end{cases}$$

hay

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

là phép biến đổi đưa ω về dạng chính tắc. Vậy trong cơ sở

$$\{\mathbf{f}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{f}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{f}_3 = (-1, 0, 1)\}$$

dạng toàn phương ω có dạng chính tắc (4.10).

Giả sử trong cơ sở $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ của không gian V dạng toàn phương ω có dạng chính tắc

$$\omega(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \tag{4.11}$$

Dạng toàn phương ω có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau trong các cơ sở khác nhau. Tuy nhiên ta có định lí sau

Định lí 4.3.3 (Luật quán tính) *Số các hệ số chính tắc dương và số các hệ số chính tắc âm không phụ thuộc vào cơ sở mà dạng toàn phương có dạng chính tắc. Nói cách khác số các hệ số chính tắc dương và âm không phụ thuộc vào cách đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.*

Ta gọi số các hệ số chính tắc dương là *chỉ số quán tính dương* và số các hệ số chính tắc âm là *chỉ số quán tính âm* của dạng toàn phương ω.

Chứng minh. Giả sử ngoài dạng chính tắc (4.11) trong cơ sở B ở trên, dạng toàn phương ω có một dạng chính tắc khác trong cơ sở $B' = \{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, ..., \mathbf{f_n}\}$ của không gian V

$$\omega(\mathbf{x}) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \cdots + \beta_n x_n^2 \tag{4.12}$$

Ta sắp xếp lại các véc tơ cơ sở $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$ cũng như các véc tơ cơ sở $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, ..., \mathbf{f_n}$ sao cho trong dạng (4.11), p hệ số chính tắc đầu tiên dương, các hệ số chính tắc còn lại không dương

$$\lambda_1, ..., \lambda_p > 0,\ \ \lambda_{p+1} \leq 0, ..., \lambda_n \leq 0$$

và trong dạng (4.12) q hệ số chính tắc đầu tiên dương, các hệ số chính tắc còn lại không dương

$$\beta_1, ..., \beta_q > 0,\ \ \beta_{q+1} \leq 0, ..., \beta_n \leq 0.$$

Ta sẽ chứng minh số các hệ số chính tắc dương trong hai dạng (4.11) và (4.12) bằng nhau bằng phản chứng. Giả sử $p > q$, khi đó không gian con $\mathscr{L}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_p})$ có số chiều bằng p và không gian con $\mathscr{L}(\mathbf{f_{q+1}}, \mathbf{f_{q+1}}, ..., \mathbf{f_n})$ có số chiều bằng $n - q$. Tổng số chiều của hai không gian con đó lớn hơn chiều của không gian V : $p + (n - q) > n = \dim V$, suy ra

$$\mathscr{L}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_p}) \cap \mathscr{L}(\mathbf{f_{q+1}}, \mathbf{f_{q+1}}, ..., \mathbf{f_n}) \neq \mathbf{0}.$$

Chọn véc tơ $\mathbf{a}$ khác $\mathbf{0}$ thuộc cả hai không gian con nói trên

$$\mathbf{a} \in \mathscr{L}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_p}), \quad \mathbf{a} \in \mathscr{L}(\mathbf{f_{q+1}}, \mathbf{f_{q+1}}, ..., \mathbf{f_n}).$$

Thay tọa độ của $\mathbf{a}$ trong cơ sở B vào dạng chính tắc (4.11) ta được $\omega(\mathbf{a}) > 0$.
Thay tọa độ của $\mathbf{a}$ trong cơ sở B' vào dạng chính tắc (4.12) ta được $\omega(\mathbf{a}) \leq 0$.

Điều mâu thuẫn đó chứng minh $p = q$ (chỉ số quán tính dương trong hai dạng chính tắc bằng nhau).
Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được chỉ số quán tính âm trong hai dạng chính tắc bằng nhau. ■

Bằng cách đó ta hoàn thành việc chứng minh luật quán tính *chỉ số quán tính dương và âm bất biến* khi đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc. Điểm lại ví dụ đã xét về việc đưa dạng toàn phương $\omega(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ về dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi trực giao (ví dụ 4.3.7) và phương pháp Lagrange (ví dụ 4.3.8).

Trong cơ sở trực chuẩn gồm các véc tơ riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ của dạng toàn phương

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1),\ \ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right\}$$

$\omega(x, y, z)$ có dạng chính tắc

$$\omega = 2x^2 - y^2 - z^2$$

Trong hệ cơ sở $\{\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{b}_3 = (-1, -1, 1)\}$ tìm được bởi phương pháp biến đổi trực giao, dạng toàn phương ω có dạng chính tắc

$$\omega = 2x^2 - 2y^2 - 2z^2$$

Trong cả hai dạng chính tắc ở trên, chỉ số quán tính dương bằng 1 và chỉ số quán tính âm bằng 2. Nó là khái niệm bất biến theo luật quán tính đã chứng minh trong định lí 4.3.3.

4.3.3 Phân loại dạng toàn phương

Định nghĩa 4.3.4 *Ta nói dạng toàn phương $\omega : V \to \mathbb{R}$*

- *xác định dương nếu $\omega(\mathbf{x}) > 0$ với mọi $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*
- *bán xác định dương nếu $\omega(\mathbf{x}) \geq 0$ với mọi $\mathbf{x} \in V$ và $\exists \mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$ sao cho $\omega(\mathbf{x_0}) = 0$.*
- *xác định âm nếu $\omega(\mathbf{x}) < 0$ với mọi $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*
- *bán xác định âm nếu $\omega(\mathbf{x}) \leq 0$ với mọi $\mathbf{x} \in V$ và $\exists \mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$ sao cho $\omega(\mathbf{x_0}) = 0$.*
- *không xác định dấu nếu $\exists \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in V$ sao cho $\omega(\mathbf{x_1})\omega(\mathbf{x_2}) < 0$.*

Ví dụ 4.3.9

1. Dạng toàn phương $3x^2 + 2xy + y^2$ trên $\mathbb{R}^2$ xác định dương.
   Thật vậy, $\omega(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + (x + y)^2 > 0 \ \forall x, y$ không đồng thời bằng 0 trong $\mathbb{R}$.

2. Dạng toàn phương $3x^2 + 2xy + y^2$ trên $\mathbb{R}^3$ bán xác định dương.
   Thật vậy, dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ là dạng toàn phương 3 biến

$$\omega(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 0 \cdot z^2 = 2x^2 + (x + y)^2 \geq 0 \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác dạng toàn phương 3 biến $\omega(x, y, z)$ có thể nhận giá trị 0 tại các điểm $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Chẳng hạn, tại $\mathbf{a} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$

$$\omega(\mathbf{a}) = \omega(0, 0, 1) = 0.$$

Do đó dạng toàn phương $3x^2 + 2xy + y^2$ trên $\mathbb{R}^3$ bán xác định dương.

3. Dạng toàn phương $3x^2 - 2y^2$ trên $\mathbb{R}^2$ không xác định dấu.
Thật vậy, với $\omega(x, y) = 3x^2 - 2y^2$, ta có

$$\omega(1, 0) \cdot \omega(0, 1) = 3 \cdot (-2) < 0.$$

4. Dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^4$ cho dưới dạng chính tắc

$$\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$$

xác định dương. Thật vậy, $\omega \geq 0$ và hiển nhiên $\omega = 0$ khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Cho dạng toàn phương dưới dạng chính tắc

$$\omega(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

Từ định nghĩa về phân loại dạng toàn phương và luật quán tính, dễ dàng chứng minh được

1. $\omega(\mathbf{x})$ xác định dương khi và chỉ khi các hệ số $\lambda_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

2. $\omega(\mathbf{x})$ xác định âm khi và chỉ khi các hệ số $\lambda_i < 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

3. $\omega(\mathbf{x})$ không xác định dấu khi và chỉ khi tồn tại các hệ số trái dấu nhau trong số các λ_i.

4. $\omega(\mathbf{x})$ bán xác định dương khi và chỉ khi các hệ số λ_i không âm ($\lambda_i \geq 0$) với mọi $i = 1, 2, ..., n$ đồng thời tồn tại ít nhất một hệ số $\lambda_{i_0} = 0$ trong số các λ_i.

5. $\omega(\mathbf{x})$ xác định dương khi và chỉ khi $-\omega(\mathbf{x})$ xác định âm.

6. $\omega(\mathbf{x})$ bán xác định dương khi và chỉ khi $-\omega(\mathbf{x})$ bán xác định âm.

Định lí sau cho ta một tiêu chuẩn để nhận biết một dạng toàn phương khi nào xác định dương hoặc xác định âm.

Định lí 4.3.4 *Cho dạng toàn phương n biến*

$$\omega_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ma trận các hệ số $A = (a_{ij})$ là ma trận đối xứng. Điều kiện cần và đủ để ω_n xác định dương (xác định âm) là dãy các định thức con chính góc sau của ma trận A

$$A_0 = 1, A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

không đổi dấu (đan dấu).

Chi tiết hơn, ta cũng có thể nói điều kiện cần và đủ để ω_n xác định dương là

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, ..., A_n > 0.$$

Điều kiện cần và đủ để ω_n xác định âm là

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, A_4 > 0, ... \quad (A_i \quad \text{đan dấu})$$

Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh định lí trong trường hợp xác định dương. Thật vậy nếu ω_n xác định âm khi đó $-\omega_n$ xác định dương và các hệ số mới trong $-\omega_n$ bằng (-1) lần các hệ số tương ứng trong ω_n. Do vậy các định thức con chính góc cấp lẻ của ω_n và $-\omega_n$ đối nhau, còn các định thức con chính góc cấp chẵn không thay đổi.

Chứng minh điều kiện cần. Giả sử ω_n xác định dương. Với $m < n$, dạng ω_m (nhận được từ ω_n bằng cách cho $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$) cũng xác định dương với mọi $m = 1, 2, ..., n$. Ta sẽ chứng minh định thức của ma trận tương ứng với dạng toàn phương xác định dương luôn luôn dương. Điều kiện cần được suy ra từ mệnh đề này

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall m = 1, 2, ..., n.$$

Thật vậy trong phần trình bày phương pháp biến đổi trực giao để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc, ta đã biết

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

trong đó Λ là ma trận chéo gồm các trị riêng của A. Nếu dạng toàn phương xác định dương, các giá trị riêng của A gồm toàn các số thực dương. Suy ra $\det A = \det \Lambda$ bằng tích các số dương. (đ.p.c.m).

Chứng minh điều kiện đủ. Ta chứng minh bằng quy nạp dãy các dạng toàn phương $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ xác định dương.
$\omega_1 = a_{11}x_1^2$ xác định dương vì $a_{11} = A_1 > 0$.

Giả sử ω_m xác định dương, ta sẽ chứng minh ω_{m+1} xác định dương. Thật vậy bằng phép biến đổi trực giao, ω_{m+1} được đưa về dạng

$$\omega_{m+1} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2 + \lambda_{m+1} y_{m+1}^2, \quad A_{m+1} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{m+1} > 0,$$

theo giả thiết của điều kiện đủ. Ta sẽ chứng minh ω_{m+1} xác định dương bằng khẳng định

$$\lambda_i > 0 \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., m, m+1.$$

Giả sử ngược lại, khi đó do $A_{m+1} > 0$, tồn tại ít nhất 2 giá trị riêng, chẳng hạn $\lambda_m < 0, \lambda_{m+1} < 0$. Chú ý rằng $y_1, y_2, ..., y_{m+1}$ là các tổ hợp tuyến tính của $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$. Xét hệ phương trình sau

$$y_1 = 0, y_2 = 0, ..., y_{m-1} = 0, x_{m+1} = 0.$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình, $m+1$ ẩn $x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}$. Hệ tồn tại nghiệm không tầm thường. Giá trị của dạng toàn phương tại nghiệm đó (do $x_{m+1} = 0$)

$$\omega_m = \omega_{m+1} = \lambda_m y_m^2 \leq 0 \quad \text{vì} \quad \lambda_m < 0$$

Mặt khác theo giả thiết quy nạp ω_m là dạng toàn phương xác định dương, suy ra tại nghiệm không tầm thường nói trên $\omega_m > 0$. Điều mâu thuẫn này chứng minh khẳng định các giá trị riêng $\lambda_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., m, m+1$. Bằng cách đó ta chứng minh được ω_{m+1} xác định dương. ■

4.4 Đường bậc hai

Trên mặt phẳng xOy, tập hợp các điểm có tọa độ x, y thỏa mãn phương trình bậc hai

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 > 0) \tag{4.13}$$

được gọi là một đường bậc hai hay đường conic (nếu tập hợp đó là rỗng thì ta nói phương trình biểu diễn một đường ảo). Trong các số hạng ở vế trái của phương trình số hạng $2bxy$ được gọi là số hạng chéo.

Đường tròn, đường elip, đường hypebol và đường parabol là các đường bậc hai chúng ta đã làm quen trong chương trình toán ở bậc phổ thông trung học.

Nếu ta chọn hệ trục xOy sao cho gốc tọa độ là tâm đường tròn thì đường tròn bán kính R có phương trình chính tắc

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Chúng ta cũng đã biết phương trình bậc hai tổng quát dạng

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

hoặc viết dưới dạng $(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$ xác định một đường tròn. (Trường hợp $a^2 + b^2 - c < 0$ tập hợp các điểm thỏa mãn phương trình trên là tập rỗng, đường tròn đó là đường tròn ảo).

Điểm lại phương trình chính tắc của các đường elip, đường hypebol và đường parabol.

Nếu chọn hệ trục xOy sao cho các trục tọa độ là các trục đối xứng, gốc tọa độ là tâm đối xứng và trục Ox đi qua các tiêu điểm của elip thì đường elip có phương trình chính tắc

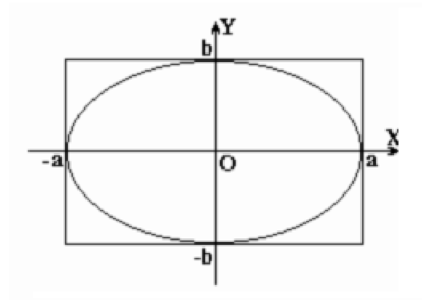
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(hình 4.2)}$$

và đường hypebol có phương trình chính tắc

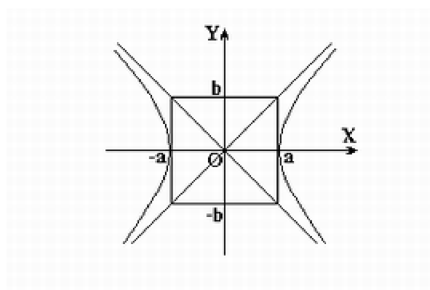
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(hình 4.3)}.$$

Nếu ta chọn hệ trục xOy sao cho trục Ox là trục đối xứng và tiêu điểm có tọa độ $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ thì đường parabol với tham số p có phương trình chính tắc

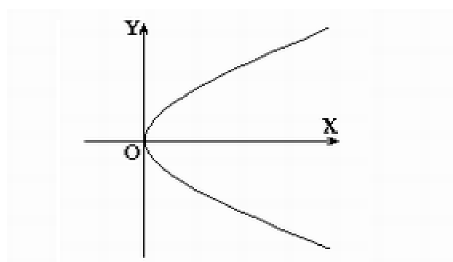
$$y^2 = 2px \quad \text{(hình 4.4)}.$$



Hình 4.2: Elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Hình 4.3: Hypebol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Hình 4.4: Parabol $y^2 = 2px$

Bây giờ ta xét bài toán: xác định biểu diễn hình học của đường cong bậc hai (4.13) trong hệ tọa độ Đề các trực chuẩn xOy. Gọi

$$\omega(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

là dạng toàn phương tương ứng với phương trình đường cong bậc hai (4.13). Ta sẽ tiến hành các bước sau

Bước 1. Sử dụng phép đổi biến $\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$, với T là phép biến đổi trực giao (phép quay trong mặt phẳng), để đưa phương trình (4.13) về dạng gọn hơn, không có số hạng chéo $2bxy$. Phép biến đổi trực giao đó là phép biến đổi đưa dạng toàn phương $\omega(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ về dạng chính tắc. Trong mục trước ta đã trình bày các bước dẫn tới phép đổi biến $\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$. Ta cụ thể hoá các bước này

1. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$ gồm hai vectơ riêng của ma trận của dạng toàn phương ω
$$\begin{aligned} \mathbf{f_1} &= (p_{11}, p_{21}) \\ \mathbf{f_2} &= (p_{12}, p_{22}) \end{aligned}$$

2. Khi đó phép đổi biến
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{4.14}$$
đưa dạng toàn phương $\omega(x, y)$ về dạng chính tắc và do vậy đưa phương trình (4.13) về dạng không có số hạng chéo
$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + 2d_1 x' + 2e_1 y' + f = 0. \tag{4.15}$$

Bước 2. Khử các số hạng bậc nhất của phương trình (4.15) bằng các phép tịnh tiến thích hợp.

1. Trường hợp $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, ta đưa phương trình (4.15) về dạng
$$\lambda_1(x' - h)^2 + \lambda_2(y' - h) = s \quad \text{và gọn hơn} \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = s$$
bằng các phép tịnh tiến thích hợp. Từ phương trình cuối này ta suy ra

   Nếu $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ thì phương trình (4.13) biểu diễn một đường elip (hoặc đường tròn). Elip đó là elip thực hoặc ảo tùy theo dấu của s.

   Nếu $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ thì phương trình (4.13) biểu diễn một đường hypebol (hoặc suy biến thành một cặp đường thẳng khi $s = 0$).

2. Trường hợp $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, giả sử $\lambda_2 = 0$, ta đưa phương trình (4.15) về dạng
$$\lambda_1(x' - h)^2 + 2e_1 y' = s \quad \text{và gọn hơn} \quad \lambda_1 X^2 + 2e_1 Y = s$$
cũng bằng các phép tịnh tiến thích hợp. Phương trình cuối này là phương trình của một đường parabol (hoặc suy biến thành một cặp đường thẳng).

Để vẽ đường bậc hai (4.13) ta lưu ý tới nhận xét sau
Phép đổi tọa độ (4.14) tương ứng với phép quay hệ trục tọa độ xOy. Chọn chiều các vectơ $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ (các véc tơ đơn vị của hệ trục mới $x'Oy'$) sao cho véc tơ $\mathbf{f_2}$ nhận được từ $\mathbf{f_1}$ bằng cách quay $\mathbf{f_1}$ một góc $+90^0$. Ta có thể nhận thấy điều đó xảy ra khi $\det T = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0$. ($\det T$ chỉ nhận các giá trị $+1$ hoặc -1).

Ví dụ 4.4.1

1. Vẽ đường biểu diễn của phương trình

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0. \tag{4.16}$$

Dạng toàn phương $5x^2 + 4xy + 2y^2$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$. Từ đó tính được 2 véc tơ riêng $\mathbf{f_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ và $\mathbf{f_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ứng với các giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 6$. Hai vectơ riêng đó là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$ và thỏa mãn điều kiện

$$\det \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} > 0$$

Phép đổi biến

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

đưa phương trình đường bậc hai (4.16) về dạng

$$x'^2 + 6y'^2 - \frac{24}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - \frac{12}{\sqrt{5}}(-2x' + y') + 18 = 0.$$

Rút gọn phương trình trên ta được

$$x'^2 + 6y'^2 - \frac{60}{\sqrt{5}}y' + 18 = 0$$

hay

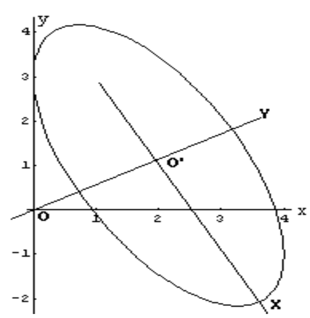
$$x'^2 + 6(y' - \sqrt{5})^2 - 12 = 0.$$

Đây là phương trình của đường bậc hai đã cho trong hệ trục mới $x'Oy'$, hệ trục có 2 véc tơ cơ sở $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$, nhận được bằng cách quay hệ trục tọa độ xOy. Đổi biến tiếp $x' = X, y' - \sqrt{5} = Y$, thực chất là tịnh tiến hệ trục $x'Oy'$ tới hệ trục $XO'Y$ sao cho gốc O tới điểm O' có tọa độ $O'(0, \sqrt{5})$ trong hệ trục $x'Oy'$.

Khi đó, đường bậc hai đã cho trong hệ trục $XO'Y$ có phương trình

$$X^2 + 6Y^2 - 12 = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Đây là phương trình chính tắc của elip với các bán trục $\sqrt{12}$ và $\sqrt{2}$, có tâm đối xứng là điểm O' (xem hình 4.5).



Hình 4.5: Elip với phương trình (4.16)

2. Nhận dạng và đưa phương trình của đường bậc hai sau về dạng chính tắc

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0. \tag{4.17}$$

Xét dạng toàn phương $5x^2 + 8xy + 5y^2$ trong phương trình (4.17). Ma trận của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$. Hai vectơ riêng tương ứng với nó là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$ và là 2 cột trong phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

Phép biến đổi trên đưa phương trình đường bậc hai (4.17) về dạng

$$9x'^2 + y'^2 - \frac{18}{\sqrt{2}}(x' - y') - \frac{18}{\sqrt{2}}(x' + y') + 9 = 0$$

hay $9(x' - \sqrt{2})^2 + y'^2 = 9$. Đổi biến tiếp

$$\begin{cases} X = x' - \sqrt{2} \\ Y = y' \end{cases}$$

ta thấy đường bậc hai (4.17) là elip, dạng chính tắc của nó

$$X^2 + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

4.4.1 Mặt bậc hai

Trong không gian $Oxyz$, tập hợp các điểm có tọa độ x, y, z thỏa mãn phương trình bậc hai

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2my + 2nz + l = 0 \qquad (4.18)$$

được gọi là một mặt bậc hai. Ta kí hiệu mặt bậc hai đó là S.

Các số hạng $2dxy + 2exz + 2fyz$ ở vế phải của phương trình (4.18) được gọi là các số hạng chéo.

Các mặt bậc hai được chia thành tám loại mặt được trình bày dưới đây

Mặt cầu

Ta biết rằng trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(x_0, y_0, z_0)$ bán kính R có phương trình

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Đây là một phương trình bậc hai nên mặt cầu là một mặt bậc hai. Trong trường hợp tâm I của mặt cầu là gốc tọa độ, phương trình trên trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{4.19}$$

Ngược lại mọi phương trình bậc hai (4.18) khuyết các số hạng chéo và có $a = b = c$ đều có thể đưa về dạng

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = h.$$

$\star$) Nếu $h > 0$ thì phương trình này biểu diễn mặt cầu tâm $I(x_0, y_0, z_0)$ bán kính $R = \sqrt{h}$.

$\star$) Nếu $h = 0$ ta nói mặt cầu suy biến thành một điểm.

$\star$) Nếu $h < 0$ ta nói phương trình biểu diễn một mặt cầu ảo.

Chẳng hạn phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z - 2 = 0$$

có thể viết như sau

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + (z^2 - 2z + 1) - 1 - 2 = 0$$

hay là

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 16$$

Như vậy, phương trình đã cho biểu diễn mặt cầu tâm $I(-2, 3, 1)$, bán kính $R = 4$.

Khác với mặt cầu, đối với những mặt còn lại ta sẽ dùng phương trình để định nghĩa mặt. Để vẽ các mặt này, ta sử dụng nhận xét sau:

Nhận xét 1 *Kí hiệu vế trái của phương trình* (4.18) *là* $f(x, y, z)$. *Khi đó*

$\star$) *Nếu* $f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$ *thì mặt* S *nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.*

$\star$) *Nếu hàm* f *là chẵn đối với* z *(tương ứng với* y, x*) thì mặt* S *nhận mặt phẳng tọa độ* xOy *(tương ứng* xOz, yOz*) là các mặt phẳng đối xứng.*

Mặt elipxôit

Trong không gian $Oxyz$, phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.20}$$

(a, b, c là những hằng số dương) biểu diễn một mặt gọi là mặt elipxôit. Các số a, b, c được gọi là các bán trục của mặt elipxôit.

Từ nhận xét trên, ta suy ra mặt elipxôit (4.20) nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng, nhận các mặt phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng.

Giao tuyến của mặt elipxôit (4.20) với các mặt phẳng tọa độ xOy, yOz, zOx lần lượt là các elip

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{và} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Giao tuyến của mặt phẳng $z = h$ (song song với mặt phẳng xOy) với mặt elipxôit là đường elip

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h. \end{cases} \tag{4.21}$$

Tương tự, giao tuyến của mặt phẳng $y = h$ với mặt elipxôit là đường elip

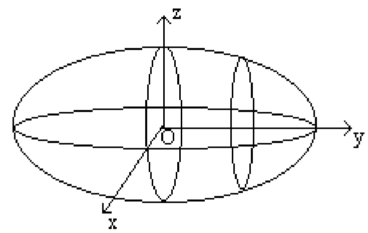
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \\ y = h. \end{cases}$$

Đây là một elip thực với các bán trục $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$ và $c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$ nếu $|h| < b$, suy biến thành một điểm nếu $h = \pm b$ và ảo nếu $|h| > b$ (xem hình 4.6).

Trong trường hợp hai bán trục của mặt elipxôit bằng nhau, chẳng hạn $a = b$ thì giao tuyến (4.21) là một đường tròn và có thể nhận được mặt elipxôit bằng cách cho đường elip

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

quay tròn xung quanh trục Oz. Trong trường hợp này ta nói elipxôit là một mặt tròn xoay.



Hình 4.6: Elipxôit

Mặt hypebôlôit một tầng

Trong không gian $Oxyz$, phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.22}$$

(a, b, c là những hằng số dương) biểu diễn một mặt gọi là mặt hypebôlôit một tầng.

Mặt (4.22) nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng và nhận các mặt phẳng tọa độ làm mặt đối xứng.

Giao tuyến của mặt hypebôlôit một tầng với mặt phẳng xOy là đường elip

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Giao tuyến của mặt hypebôlôit một tầng với các mặt phẳng tọa độ yOz và zOx lần lượt là các hypebol

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{và} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Giao tuyến của mặt hypebôlôit một tầng với mặt phẳng $z = h$ song song với mặt phẳng xOy là đường elip

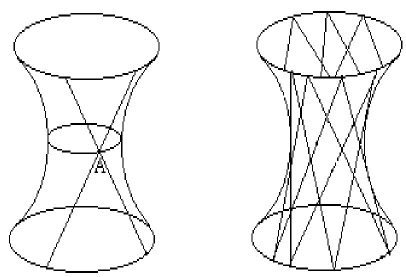
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \tag{4.23}$$

với các bán trục $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ và $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

Trường hợp $a = b$, giao tuyến (4.23) là một đường tròn, và khi đó mặt (4.22) có thể nhận được bằng cách cho hypebol

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

quay tròn xung quanh trục Oy. Trong trường hợp này mặt (4.22) là mặt tròn xoay, (xem hình 4.7).



Hình 4.7: Hypebôlôit một tầng

Xét mặt hypebôlôit một tầng tròn xoay với phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.24}$$

Giao tuyến của (4.24) với mặt phẳng xOy là đường tròn có bán kính nhỏ nhất trong số các giao tuyến của nó với các mặt phẳng $z = h$. Giao tuyến đó, về ý nghĩa hình học, là cổ của hypebôlôit một tầng tròn xoay. Xét điểm $A(a, 0, 0)$ thuộc giao tuyến đó. Ta sẽ chứng minh tồn tại 2 đường thẳng đi qua $A(a, 0, 0)$ và nằm trọn trong mặt (4.24).

Thật vậy xét giao của mặt (4.24) với mặt phẳng $x = a$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = a \end{cases} \qquad \text{hay} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{y}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Đây là phương trình của 2 đường thẳng (giao của 2 mặt phẳng là đường thẳng)

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = a \end{cases} \qquad \text{và} \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = a. \end{cases} \tag{4.25}$$

Hai đường thẳng đó cùng đi qua $A(a, 0, 0)$ và nằm trọn trong mặt tròn xoay (4.24). Điều đó cũng có nghĩa rằng mặt tròn xoay (4.24) có thể nhận được bằng cách quay tròn 2 đường thẳng (4.25) quanh trục Oz.

Bằng cách lập luận như trên ta suy ra qua một điểm P bất kì trên hypebôlôit một tầng tròn xoay, luôn tồn tại 2 đường thẳng đi qua P và nằm trọn trong mặt đó. (Xem hình vẽ 4.7). Do tính chất này người ta gọi mặt hypebôlôit một tầng là *mặt kẻ được*. (Ta có thể chứng minh mặt (4.22) cũng là mặt kẻ được).

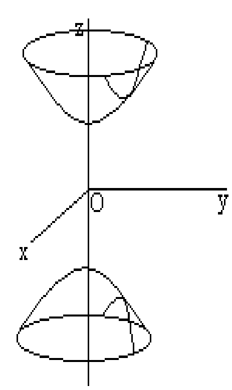
Mặt hypebôlôit hai tầng

Trong không gian $Oxyz$, phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{4.26}$$

(a, b, c là các hằng số dương) biểu diễn một mặt gọi là mặt hypebôlôit hai tầng.

Mặt (4.26) nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng và nhận các mặt phẳng tọa độ làm các mặt đối xứng.



Hình 4.8: Hypebôlôit hai tầng

Mặt phẳng xOy không cắt mặt (4.26), các mặt phẳng xOz và yOz cắt mặt (4.26) theo các đường hypebol

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{và} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Mặt phẳng $z = h$ song song với mặt phẳng xOy cắt mặt hypebôlôit hai tầng theo giao tuyến

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h \end{cases} \tag{4.27}$$

đây là đường elip thực với các bán trục $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ và $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ nếu $|h| > c$, suy biến thành một điểm nếu $h = \pm c$, elip ảo khi $|h| < c$ (xem hình 4.8).

Trong trường hợp $a = b$, giao tuyến (4.27) là một đường tròn và có thể nhận được mặt (4.26) bằng cách cho đường hypebol

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

quay tròn xung quanh trục Oz, vì vậy trong trường hợp này mặt (4.26) là một mặt tròn xoay.

Chú ý rằng trong hệ trục tọa độ Đề các $Oxyz$, phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a, b, c là các hằng số dương) cũng xác định mặt hypebôlôit hai tầng. Thật vậy, nhân cả hai vế phương trình trên với (-1), khi đó phương trình

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

có dạng (4.26) như đã cho. Tất nhiên giao với các mặt phẳng tọa độ sẽ phải thay đổi lại do vai trò của x, y, z đã đổi chỗ cho nhau.

Mặt parabôlôit eliptic

Trong không gian $Oxyz$, phương trình

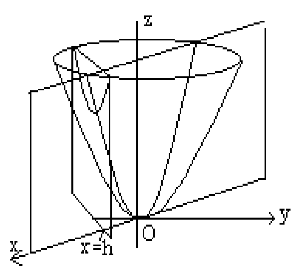
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \tag{4.28}$$

trong đó p, q là các hằng số dương, biểu diễn một mặt gọi là mặt parabôlôit eliptic.

Mặt (4.28) nhận các mặt phẳng tọa độ yOz và zOx làm các mặt đối xứng.

Mặt phẳng xOy và mặt (4.28) có gốc tọa độ là điểm chung duy nhất, mặt phẳng zOx và cắt mặt (4.28) theo parabol

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$



Hình 4.9: Parabôlôit eliptic

Các mặt phẳng $x = h$ cắt mặt (4.28) theo các đường parabol

$$\begin{cases} C + y^2 = 2qz \\ x = h \end{cases} \qquad \text{trong đó} \quad C = \frac{qh^2}{p}. \tag{4.30}$$

Các trục đối xứng của các parabol này luôn luôn cùng phương với trục Oz. (Xem hình 4.9).

Các parabol (4.30) cùng bằng nhau (có chung tham số q) và tập hợp các đỉnh của chúng nằm trên parabol (4.29).

Thật vậy, từ phương trình (4.30), ta thấy tọa độ đỉnh của chúng

$$M\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$$

thỏa mãn (4.29). Từ tính chất này suy ra tính chất đặc trưng sau của mặt parabôlôit eliptic.
Mặt parabôlôit eliptic được sinh ra bằng cách cho một đường parabol mà đỉnh của nó trượt trên một parabol khác sao cho 2 parabol này có các trục cùng hướng và 2 mặt phẳng chứa 2 parabol này luôn vuông góc với nhau (hình 4.9).

Mặt phẳng $z = h$ song song với mặt phẳng xOy cắt mặt parabôlôit eliptic theo đường elip

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h. \end{cases} \tag{4.31}$$

Đây là đường elip thực với các bán trục $\sqrt{2ph}$ và $\sqrt{2qh}$ nếu $h > 0$, suy biến thành một điểm nếu $h = 0$ và là elip ảo khi $h < 0$.

Trong trường hợp $p = q$ thì giao tuyến (4.31) là một đường tròn và có thể nhận được mặt (4.28) bằng cách cho đường parabol

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

quay tròn xung quanh trục Oz. Trong trường hợp này mặt bậc hai (4.28) là mặt tròn xoay.

Mặt parabôlôit hypebôlic

Trong không gian $Oxyz$, phương trình

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \tag{4.32}$$

trong đó p, q là các hằng số dương, biểu diễn một mặt gọi là mặt parabôlôit hypebôlic.

Mặt (4.32) nhận các mặt phẳng tọa độ yOz và zOx làm các mặt đối xứng.

Giao tuyến của các mặt phẳng zOx và yOz với mặt (4.32) là hai đường parabol

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases} \tag{4.33}$$

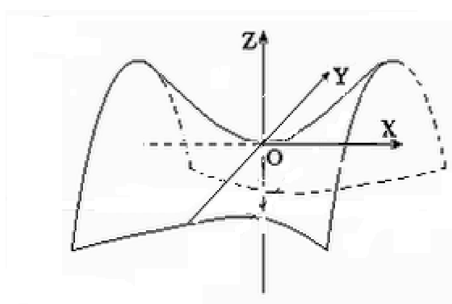
Hai parabol này có các trục đối xứng luôn cùng phương với trục Oz nhưng ngược chiều nhau.

Giao tuyến của mặt phẳng $x = h$ (song song với mặt phẳng yOz) với mặt (4.32) là đường parabol

$$\begin{cases} y^2 = -2qz - C \\ x = h \end{cases} \qquad \text{trong đó} \quad C = \frac{qh^2}{p},$$

có đỉnh nằm trên đường parabol $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ trong hệ thức (4.33).

Hoàn toàn tương tự như parabôlôit eliptic, *mặt parabôlôit hypebôlic được sinh ra bằng cách cho một đường parabol mà đỉnh của nó trượt trên một parabol khác sao cho 2 parabol này có các trục ngược hướng với nhau và 2 mặt phẳng chứa 2 parabol này luôn vuông góc với nhau* (hình 4.10).



Hình 4.10: Parabôlôit hypebôlic

Do tính chất trên, đồ thị mặt parabôlôit hypebôlic có hình yên ngựa, vì vậy nó còn mang tên là *mặt yên ngựa*.

Giao tuyến của mặt phẳng $z = h$ với mặt (4.32) là đường hypebol

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$$

(Giao tuyến sẽ suy biến thành một cặp đường thẳng đi qua gốc tọa độ khi $h = 0$). Cũng như mặt hypebôlôit một tầng, mặt yên ngựa là *mặt kẻ được*, nó có tính chất qua một điểm P bất kì thuộc mặt yên ngựa, luôn tồn tại 2 đường thẳng đi qua P và nằm trọn trong mặt đó.

Thật vậy, giả sử điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ thỏa mãn phương trình mặt parabôlôit hypebôlic, ta viết phương trình (4.32) dưới dạng

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)\left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right) = 2z. \tag{4.34}$$

Kí hiệu $C_1 = \dfrac{x_0}{p} + \dfrac{y_0}{q}$ và $C_2 = \dfrac{x_0}{p} - \dfrac{y_0}{q}$. Dựa vào hệ thức (4.34), ta thấy ngay cặp 2 đường thẳng

$$\begin{cases} \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = C_1 \\ C_1\left(\dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q}\right) = 2z \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} \dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q} = C_2 \\ C_2\left(\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}\right) = 2z \end{cases}$$

đi qua $P(x_0, y_0, z_0)$ và thỏa mãn phương trình (4.34), tức là chúng thuộc mặt parabôlôit hypebôlic (4.32). Ta đã chứng minh xong mặt yên ngựa là mặt kẻ được.

4.4.2 Mặt trụ bậc hai

Mặt trụ là mặt được tạo thành khi một đường thẳng di động luôn song song với một phương cố định và tựa vào một đường cong L cho trước nào đó. Các đường thẳng thuộc mặt trụ song song với một phương cố định đó được gọi là *đường sinh*, đường cong L được gọi là *đường chuẩn* của mặt trụ.

Tập hợp các điểm (x, y, z) trong không gian có gắn hệ trục tọa độ Đề các trực chuẩn $Oxyz$ thỏa mãn phương trình

$$f(x, y) = 0 \tag{4.35}$$

là mặt trụ với đường chuẩn là đường

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

trong mặt phẳng xOy và các đường sinh song song với trục Oz.

Trong trường hợp (4.35) là một phương trình bậc hai thì mặt trụ này được gọi là *mặt trụ bậc hai*.

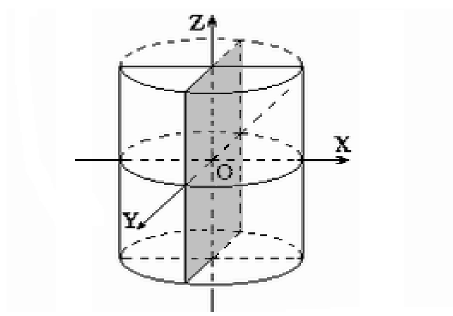
Chẳng hạn, trong không gian $Oxyz$, phương trình bậc hai

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.36}$$

biểu diễn mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường elip (hình 4.11)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ta gọi là mặt trụ này mặt trụ eliptic. (Nếu $b = a$ thì mặt trụ 4.36 là mặt tròn xoay với đường chuẩn là đường tròn).



Hình 4.11: Mặt trụ eliptic

Tương tự, trong không gian $Oxyz$, phương trình

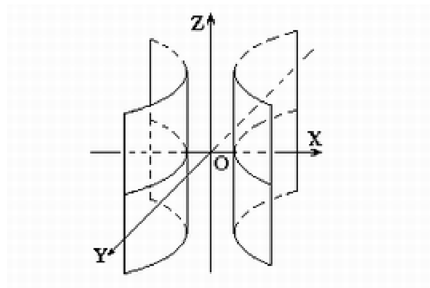
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.37}$$

biểu diễn một mặt trụ bậc hai, gọi là mặt trụ hypebôlic (hình 4.12)

Phương trình, trong hệ trục tọa độ Đề các $Oxyz$

$$y^2 = 2px \tag{4.38}$$

biểu diễn một mặt trụ parabol, đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là parabol (4.38) trong mặt phẳng xOy.



Hình 4.12: Mặt trụ hypebôlic

Mặt nón bậc hai

Mặt nón là mặt được tạo thành khi một đường thẳng di động luôn đi qua một điểm I cố định và tựa vào một đường cong L cho trước nào đó. Các đường thẳng thuộc mặt nón và đi qua I được gọi là *đường sinh*, đường cong L là *đường chuẩn* của mặt nón.

Tập hợp các điểm (x, y, z) trong không gian có gắn hệ trục tọa độ Đề các trực chuẩn $Oxyz$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{4.39}$$

trong đó a, b, c là các hằng số dương, là mặt nón có đỉnh là gốc tọa độ và đường chuẩn là elip trong mặt phẳng $z = 1$. Oz được gọi là trục của hình nón (hình 4.13).

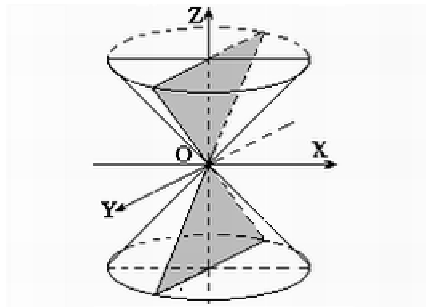
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{1}{c^2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Giao tuyến của các mặt phẳng yOz và xOz với mặt nón là các cặp đường thẳng đi qua gốc tọa độ

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Hình 4.13: Mặt nón $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

Giao tuyến của mặt phẳng $z = h$ với mặt nón (4.39) là đường elip

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \\ \qquad z = h. \end{cases} \tag{4.40}$$

(Giao tuyến sẽ suy biến thành một điểm khi $h = 0$).

Trường hợp $a = b$ thì giao tuyến (4.40) là một đường tròn và do vậy có thể nhận được mặt nón (4.39) bằng cách quay các đường thẳng

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} = \pm\dfrac{z}{c} \\ x = 0 \end{cases}$$

xung quanh trục Oz. Trong trường hợp này (4.39) là mặt tròn xoay.

Mặt nón tròn xoay

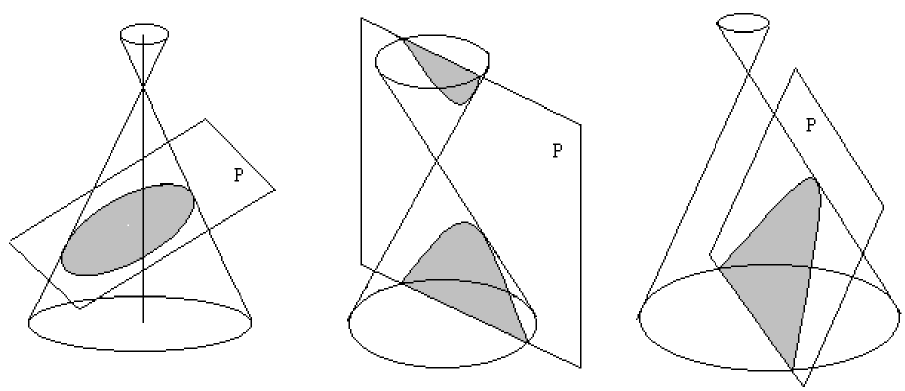
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{4.41}$$

có một tính chất khá lí thú. Giả thiết P là mặt phẳng không đi qua đỉnh hình nón, giao của mặt phẳng P với mặt nón (4.41) là

- Đường tròn, nếu mặt phẳng P vuông với trục Oz của hình nón.
- Elip, nếu mặt phẳng P cắt tất cả các đường sinh và không vuông với trục Oz của hình nón.
- Hypecbol, nếu mặt phẳng P song song với trục Oz của hình nón. (Hoặc cũng có thể nói mặt phẳng P song song với hai đường sinh của hình nón.)

- Parabol, nếu mặt phẳng P song song với chỉ một đường sinh duy nhất nào đó của hình nón. (Nói cách khác mặt phẳng P tạo với trục Oz của hình nón một góc bằng góc giữa đường sinh với trục hình nón.)

Nói cách khác, các đường cônic có thể tạo thành bởi giao của mặt nón tròn xoay với một mặt phẳng thích hợp (hình 4.14).



Hình 4.14: Các đường cônic

Các phương trình của các mặt bậc hai liệt kê ở trên (4.19), (4.20), (4.22), (4.26), (4.28), (4.32), (4.36), (4.37), (4.38), (4.39) được gọi là các *phương trình chính tắc* của mặt bậc hai.

Cách đưa một phương trình tổng quát của mặt bậc hai

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2my + 2nz + l = 0$$

về dạng chính tắc và nhận dạng nó được thực hiện hoàn toàn tương tự như đối với phương trình của một đường bậc hai. Ta tóm tắt quy trình đó vào 2 bước.

Bước 1. Sử dụng phép biến đổi trực giao trong $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$, để đưa phương trình tổng quát của mặt về dạng gọn hơn, không có số hạng chéo.

Để xác định phép biến đổi trực giao nói trên, ta xét dạng toàn phương tương ứng với phương trình tổng quát của mặt bậc hai

$$\omega(x, y) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz.$$

Sử dụng phương pháp biến đổi trực giao để đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc. Phép đổi tọa độ $T(x, yz) = (x', y', z')$ với T là phép biến đổi trực giao trong phương pháp trên đưa phương trình mặt bậc hai về dạng

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2 + 2tx' + 2uy' + 2vz' = 0.$$

Bước 2. Khử các số hạng bậc nhất trong phương trình trên bằng các phép tịnh tiến hệ trục tọa độ mới $Ox'y'z'$ tới điểm phù hợp. Cũng như đã làm với phương trình tổng quát của đường bậc hai, người ta thường ghép các số hạng bậc nhất vào các số hạng bậc hai (nếu có) của phương trình trên. Từ các bài tập cụ thể ta sẽ đưa phương trình tổng quát của mặt bậc hai ban đầu về một trong các phương trình chính tắc của mặt bậc hai đã liệt kê trong mục này.

Ví dụ 4.4.2

1. Đưa phương trình của mặt bậc hai

$$2xy + 2xz + x + \sqrt{2}y - 1 = 0 \tag{4.42}$$

về dạng chính tắc và nhận dạng nó.

Bước 1. Tìm phép biến đổi trực giao trong $\mathbb{R}^3$ để phép biến đổi đưa phương trình (4.42) về dạng khuyết số hạng chéo.
Xét dạng toàn phương $\omega = 2xy + 2xz$ tương ứng với phương trình (4.42).
Ma trận của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$.

Các vectơ riêng

$$\mathbf{g_1} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ứng với giá trị riêng } \lambda_1$$

$$\mathbf{g_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ứng với giá trị riêng } \lambda_2$$

$$\mathbf{g_3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ứng với giá trị riêng } \lambda_3$$

lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.
Phép đổi tọa độ với ma trận có các cột là các véc tơ riêng $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \mathbf{g_3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

đưa phương trình (4.42) về dạng khuyết số hạng chéo

$$\sqrt{2}y'^2 - \sqrt{2}z'^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{y'}{2} + \frac{z'}{2}\right) - 1 = 0$$

hay

$$\sqrt{2}y'^2 - \sqrt{2}z'^2 - x' + \sqrt{2}y' - 1 = 0.$$

Bước 2. Khử các số hạng bậc nhất trong phương trình trên bằng cách ghép số hạng $\sqrt{2}y'$ vào số hạng bậc hai tương ứng

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}y'^2 - \sqrt{2}z'^2 - x' + \sqrt{2}y' - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{2}\left(y'^2 + y'\right) - \sqrt{2}z'^2 - x' - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{2}\left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{2}\frac{1}{4} - \sqrt{2}z'^2 - x' - 1 = 0. \end{aligned}$$

Phép đổi tọa độ

$$\begin{cases} X = x' + 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ Y = y' + \dfrac{1}{2} \\ Z = z' \end{cases}$$

đưa tiếp phương trình về dạng

$$\sqrt{2}Y^2 - \sqrt{2}Z^2 = X$$

hay

$$2\sqrt{2}Y^2 - 2\sqrt{2}Z^2 = 2X.$$

Phương trình cuối là phương trình thuộc dạng (4.32)

$$\frac{Y^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2X.$$

Vậy, trong không gian $Oxyz$, phương trình đã cho biểu diễn mặt parabôlôit hypebôlic.

2. Đưa phương trình của mặt bậc hai

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 + 10xy - 8xz + 10yz + 2\sqrt{6}y - 12 = 0 \tag{4.43}$$

về dạng chính tắc và nhận dạng nó.

Tìm phép biến đổi trực giao trong $\mathbb{R}^3$ để phép biến đổi đưa phương trình (4.43) về dạng khuyết số hạng chéo.
Xét dạng toàn phương $\omega = 2x^2 - 7y^2 + 2z^2 + 10xy - 8xz + 10yz$ tương ứng với phương trình (4.43). Ma trận của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 5 & -7 & 5 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -4 \\ 5 & -7-\lambda & 5 \\ -4 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda + 12).$$

Ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -12$.

Các vectơ riêng tương ứng với các trị riêng đó

$$\mathbf{g_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ứng với giá trị riêng } \lambda_1$$
$$\mathbf{g_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{ứng với giá trị riêng } \lambda_2$$
$$\mathbf{g_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{ứng với giá trị riêng } \lambda_3$$

lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.
Phép đổi tọa độ với ma trận có các cột là các véc tơ riêng $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \mathbf{g_3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

hoặc viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

đưa phương trình (4.43) về dạng khuyết số hạng chéo

$$6{x'}^2 + 3{y'}^2 - 12{z'}^2 + 2\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{2}{\sqrt{6}}z'\right) - 12 = 0$$

hay

$$6{x'}^2 + 3{y'}^2 - 12{z'}^2 + 2\sqrt{2}y' - 4z' - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 6{x'}^2 + 3\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 12\left(z' + \frac{1}{6}\right)^2 = 12 + \frac{1}{3}.$$

Khử các số hạng bậc nhất bằng phép tịnh tiến

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ Z = z' + \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Phương trình mặt bậc hai (4.43) được đưa về dạng

$$6X^2 + 3Y^2 - 12Z^2 = \frac{37}{3}$$

hay

$$\frac{X^2}{\frac{37}{16}} + \frac{Y^2}{\frac{37}{9}} - \frac{Z^2}{\frac{37}{36}} = 1.$$

Đó là phương trình chính tắc của mặt hypbôlôit một tầng.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

(Các bài tập có đánh dấu sao trước số thứ tự là các bài tập khó hơn. Các bài tập có dấu sao sau số thứ tự là các đề thi học phần đã thi.)

1. (a) Trong không gian $\mathbb{R}^n$ chứng minh rằng

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \cdots + \alpha_n x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$$

là tích vô hướng, với $\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n$ là các số thực dương cố định, các véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Hãy viết biểu thức độ dài véc tơ theo tích vô hướng trên và bất đẳng thức Schwarz cũng như bất đẳng thức tam giác.

(b) Chứng minh rằng trong không gian các ma trận vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, biểu thức $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$ là tích vô hướng, trong đó

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

(c) Chứng minh rằng trong không gian các hàm liên tục $C_{[a,b]}$ biểu thức

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p f(x) g(x) dx, \quad (p > 0 \text{ cố định})$$

là tích vô hướng.

(d) Trong không gian $\mathscr{P}_n[x]$ với $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ ta định nghĩa

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i.$$

Chứng tỏ rằng $\langle p, q \rangle$ là tích vô hướng trên $\mathscr{P}_n[x]$.

(e) Ta biết rằng $(\mathbb{R}^+)^n$ là không gian véc tơ với các phép toán

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n), \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha).$$

Chứng minh rằng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ln y_i$ là tích vô hướng trên $(\mathbb{R}^+)^n$.

2. Trực giao hoá các hệ véc tơ sau

   (a) $\{\mathbf{u}_1 = (1,1,1);\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,0);\ \mathbf{u}_3 = (1,2,1)\}$ theo tích vô hướng
   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \text{trong} \quad \mathbb{R}^3.$$

   (b) $\{\mathbf{u}_1 = (1,1,1);\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,0);\ \mathbf{u}_3 = (1,2,1)\}$ theo tích vô hướng
   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 \quad \text{trong} \quad \mathbb{R}^3.$$

   (c) $\{p(x) \equiv 1,\ q(x) = x,\ r(x) = x^2\}$ theo tích vô hướng
   $$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
   trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá hai $\mathscr{P}_2[x]$.

3* Chứng minh $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$. Bằng phương pháp Gram - Smidt hãy trực chuẩn hoá hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$
$$\{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}$$
theo tích vô hướng đó.

4* E là không gian Euclide n chiều ($n \geq 3$), các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ có tính chất
$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1,\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = m.$$

   (a) Chứng minh rằng với $m = -\dfrac{1}{3}$, các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ độc lập tuyến tính.

   (b) Chứng minh rằng với $m = -\dfrac{1}{2}$, các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ phụ thuộc tuyến tính.

5. Xét cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ của không gian Ơclit $\mathbb{R}^3$. Kí hiệu
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_3$$
và $\mathbf{u}_3 = \beta\mathbf{e}_1 + \dfrac{\alpha}{3}\mathbf{e}_2 + \dfrac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_3$. Xác định α, β để hệ các véc tơ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

6. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ cho mặt phẳng $P: \ x + y + z = 0$ (P là không gian con).

   (a) Xác định véc tơ pháp $\mathbf{n}$ của mặt phẳng đó. ($\mathbf{n}$ vuông góc, theo tích vô hướng đã cho, với mọi véc tơ trong mặt phẳng P.

   (b) Tính khoảng cách ngắn nhất từ $A(5, 2, 3)$ tới mặt phẳng P.

7* Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$, cho 2 véc tơ $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ và $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$.
a) Hãy tìm một hệ cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t}\}$ trong không gian **Ơ**clit $\mathbb{R}^3$ (với tích vô hướng đã cho) sao cho $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \mathscr{L}(\mathbf{a})$, $\mathscr{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
b) Tính khoảng cách d từ véc tơ $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ đến không gian $\mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ theo tích vô hướng đã cho $\left(d = \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} |\mathbf{e} - \mathbf{x}|\right)$.

8. Cho phép biến đổi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + x_2 + x_3).$$

   (a) Tìm $\dim \ker(f)$.

   (b) Tìm một hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$, sao cho trong hệ cơ sở đó ma trận của f có dạng chéo.

9* Cho φ là phép biến đổi trực giao trên không gian **Ơ**clit E. Chứng minh rằng

$$< \mathbf{a}, \varphi(\mathbf{b}) > = < \varphi^{-1}(\mathbf{a}), \mathbf{b} > \quad \text{với mọi } \ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E.$$

10* Cho φ, ψ là các phép biến đổi đối xứng trên không gian **Ơ**clit E. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phép biến đổi $\varphi \circ \psi$ cũng đối xứng là $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

11. Viết các dạng toàn phương (trong $\mathbb{R}^4$) sau đây dưới dạng ma trận

   (a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3x_4$.

   (b) $\omega(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

   (c) $\omega(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

   (d) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

12. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ là ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở trực chuẩn.

    (a) Viết dạng song tuyến tính tương ứng. Đưa ω về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao. Tìm phép biến đổi trực giao đó.

    (b) Tìm trị riêng của ma trận $B = A^2 + A + I_3$.

13. Bằng phương pháp Lagrange hãy đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

    (a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ (xét trong $\mathbb{R}^3$).

    (b) $\omega(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_3x_1$ (xét trong $\mathbb{R}^3$).

    (c) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4$ (xét trong $\mathbb{R}^4$).

14. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

    (a) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận $B = \varphi(A)$, trong đó $\varphi(x) = x^2 + x - 2$. Chứng minh $\det B = 0$.

    (b) Coi A là ma trận của dạng toàn phương ω. Hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

15. Xác định một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ sao cho trong cơ sở đó dạng toàn phương $\omega(\mathbf{x})$ dưới đây có dạng chính tắc. Tìm dạng chính tắc đó

    (a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

    (b) $\omega(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

16. Xác định một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^4$ sao cho trong cơ sở đó dạng toàn phương $\omega = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$ có dạng chính tắc.

17. Trong số các dạng toàn phương sau, dạng nào xác định dương, xác định âm, không xác định dấu

    (a) $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

    (b) $\omega(\mathbf{x}) = -11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(c) $\omega(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

18* $\mathbb{R}^2$ là không gian Ơclit với tích vô hướng $\big\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \big\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$. Phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở chính tắc $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ của $\mathbb{R}^2$ có ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(a) Hãy cho một cơ sở trực chuẩn bất kì của không gian Ơclit đã cho và viết ma trận của f trong cơ sở đó.
(b) Phép biến đổi f có là phép biến đổi trực giao không?

19* Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(a) Ma trận A có là ma trận trực giao không?
(b) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

20. Cho dạng toàn phương $\omega = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

(a) Tìm λ để ω xác định dương.

(b) Với $\lambda = 2$, hãy đưa dạng trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

21. Đưa các đường bậc hai sau về dạng chính tắc. Vẽ các đường bậc hai đó trong hệ trục tọa độ Đề các xOy

(a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$

(b) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

(c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

22. Chứng minh rằng phép biến đổi

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x, \alpha y),$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một số cố định khác 0, chuyển đường thẳng thành đường thẳng, đường tròn thành elip.
Phép biến đổi đó có là phép biến đổi tuyến tính không? Tìm trị riêng véc tơ riêng nếu T là phép biến đổi tuyến tính.

23. Viết phương trình các đường thẳng

    (a) đi qua $A(0,1,0)$ và nằm trọn trong mặt hypebôlôit một tầng

    $$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

    (b) đi qua gốc tọa độ $O(0,0,0)$ và nằm trọn trong mặt yên ngựa

    $$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z.$$

24. Bằng cách chuyển sang hệ trục tọa độ mới, chứng tỏ rằng đường cong trong không gian được cho bởi hệ thức

    $$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

    (giao của hình trụ và mặt phẳng) là elip. Xác định các bán trục của elip đó.

25. Đưa các mặt bậc hai sau về dạng chính tắc và nhận dạng chúng

    (a) $7x^2 + 7y^2 - 10xy + 8xz + 8yz - 2z^2 + 24x - 24y + 24 = 0$

    (b) $6x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz + 6yz + 4y - 4z - 12 = 0.$

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

2. (b) Với tích vô hướng $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$, bằng phương pháp Gram - Smidt, ta được hệ trực giao

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{1}{6}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{6}(-7,5,-1),\ \mathbf{v}_3 = \frac{1}{17}(6,3,-4)$$

3. Với tích vô hướng $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$

$$\{\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3\}.$$

Bằng phương pháp Gram - Smidt, trực chuẩn hoá hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ ta được hệ cơ sở trực chuẩn

$$\{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1)\}$$

5. $\alpha = -1,\ \beta = 0$ hoặc $\alpha = 2,\ \beta = \frac{2}{3}$

6. (a) Véc tơ $C(2,1,2) \mid C \in \mathbb{R}$ vuông với mọi véc tơ trong P.
   (b) Khoảng cách ngắn nhất từ A tới P là $d = 2$.

7. (a) $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0),\ \mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1),\ \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$
   (b) $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. (b) $\{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$, ma trận của f có dạng chéo trong đó.

11. (a) Ma trận của $\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3x_4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \omega(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]^T AT.$$

12. (a) Với phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \omega(x,y,z) = 6x'^2 + 3y'^2 + 2z'^2.$$

(b) Các trị riêng của B là $\lambda_1 = 43,\ \lambda_2 = 13, \lambda_3 = 7$.

14. (a) Với trị riêng $\lambda_1 = 54$, các véc tơ riêng tương ứng có dạng $C_1(2,0,1) + C_2(2,1,0)$.
Với trị riêng $\lambda_2 = 0$, các véc tơ riêng tương ứng $C(-1,2,2)$. Do đó $\det B = 0$.

15. (a) Trong cơ sở trực chuẩn $\{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\}$

$$\omega = 6x^2 + 3y^2 - 2z^2.$$

(b) Dạng chính tắc $\omega = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2$.

16. $\omega = 4y_1^2 - 4y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2$.

17. (a) Không xác định dấu.
(b) Xác định âm.
(c) Xác định dương.

18. (b) f không là phép biến đổi trực giao vì f không bảo toàn độ dài

$$\mathbf{e_1} = (1,0), |\mathbf{e_1}| = 1, \quad \text{trong khi} \quad f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} = (0,1), |\mathbf{e_2}| = \sqrt{2}$$

19. (a) Ma trận A không là ma trận trực giao.
(b) Do $\frac{1}{2}A$ là ma trận trực giao và cũng là ma trận đối xứng, suy ra $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

20. (a) $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$.

21. (a) Với phép biến đổi trực giao (phép quay) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ đường cong đã cho là elip $\frac{u^2}{2} + \left(v - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$.

(b) Đường bậc hai là parabol.
(c) Đường bậc hai đã cho là 2 đường thẳng

$$-2x + y = 1 \quad \text{và} \quad -2x + y = -4.$$

22. T là phép biến đổi tuyến tính có 2 giá trị riêng 1 và α.

23. (a) Đường thẳng $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ và đường thẳng $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$
(b) Đường thẳng $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ và đường thẳng $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

24. Hai bán trục của elip bằng a và $\sqrt{2}$.

25. (a) Mặt nón, trong hệ trục thích hợp $O'x'y'z'$: $2(x' + \sqrt{2})^2 - y'^2 + z'^2 = 0$.
(b) Mặt parabôlôit $2x'^2 + y'^2 - 2z' - 3 = 0$.

PHỤ LỤC: CÁC ĐỀ THI ĐẠI SỐ

ĐỀ SỐ 1

Câu 1 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 2 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_2[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 2, cho tập

$$V = \{p(x) \in \mathscr{P}_2[x] \mid p'(1) = p(2)\}$$

(p' là đạo hàm của p).
a) Chứng minh rằng V là không gian con của $\mathscr{P}_2[x]$ và tìm một cơ sở của V.
b) Tìm một không gian con U của $\mathscr{P}_2[x]$ sao cho $U \oplus V = \mathscr{P}_2[x]$.

Câu 3 Kí hiệu $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho trong không gian $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ các ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Xét ánh xạ $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX - XB$.
a) Chứng minh f là phép biến đổi tuyến tính. Với $\alpha = 2$ tìm không gian nhân của phép biến đổi tuyến tính f.
b) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

của $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Tìm α trong ma trận B để phép biến đổi tuyến tính f không suy biến.

Câu 4 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$
a) Tính đa thức đặc trưng của A.
b) Đa thức đặc trưng của A có 2 nghiệm thực $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = m$. Tính $\det A$ theo m.
c) Xác định a, b trong trường hợp các giá trị riêng của A bằng 1 và -1.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 2 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_2[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 2, cho tập

$$V = \{p(x) \in \mathscr{P}_2[x] \mid p'(1) = p(0)\}$$

(p' là đạo hàm của p).
a) Chứng minh rằng V là không gian con của $\mathscr{P}_2[x]$ và tìm một cơ sở của V.
b) Tìm một không gian con U của $\mathscr{P}_2[x]$ sao cho $U \oplus V = \mathscr{P}_2[x]$.

Câu 3 Kí hiệu $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho trong không gian $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ các ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Xét ánh xạ $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\quad f(X) = XA - BX$.
a) Chứng minh f là phép biến đổi tuyến tính. Với $\alpha = 1$ tìm không gian nhân của phép biến đổi tuyến tính f.
b) Viết ma trận của f trong cơ sở chính tắc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

của $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Tìm α trong ma trận B để phép biến đổi tuyến tính f không suy biến.

Câu 4 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$
a) Tính đa thức đặc trưng của A.
b) Đa thức đặc trưng của A có 2 nghiệm thực $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = m$. Tính $\det A$ theo m.
c) Xác định a, b trong trường hợp các giá trị riêng của A bằng 1 và -1.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Tính các ma trận B^2, B^3.

b) Sử dụng kết quả của câu a) hãy tính A^n.

Câu 2 Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Gọi A là tập hợp các nghiệm $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ của hệ phương trình.

a) Xác định tập A. Tập A có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

b) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng **Ơ**clit, tìm tập hợp B gồm các véc tơ trực giao với A. Chứng minh B là không gian con của $\mathbb{R}^3$, tìm chiều và một cơ sở của không gian con đó.

Câu 3 Kí hiệu $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho trong không gian $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kí hiệu $\mathscr{N}$ là không gian con sinh bởi A, B, C.

a) Tìm số chiều và một cơ sở của $\mathscr{N}$.

b) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$, biết $f(A) = B, f(B) = C$. Tính $f(C)$. Chứng minh f là song ánh.

Câu 4 Cho dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$, $\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

a) Xác định một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ (với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$) sao cho trong cơ sở đó ω có dạng chính tắc. Viết dạng chính tắc đó.

b) Chứng tỏ rằng dạng song tuyến tính đối xứng liên kết với ω là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$. Kí hiệu dạng song tuyến tính đối xứng đó là φ. Hãy tính $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ với $\mathbf{a} = (1, 2, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 2)$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Tính các ma trận B^2, B^3.

b) Sử dụng kết quả của câu a) hãy tính A^n.

Câu 2 Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Gọi A là tập hợp các nghiệm $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ của hệ phương trình.

a) Xác định tập A. Tập A có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

b) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng **Ơ**clit, tìm tập hợp B gồm các véc tơ trực giao với A. Chứng minh B là không gian con của $\mathbb{R}^3$, tìm chiều và một cơ sở của không gian con đó.

Câu 3 Kí hiệu $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 2. Cho trong không gian $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kí hiệu $\mathscr{N}$ là không gian con sinh bởi A, B, C.

a) Tìm số chiều và một cơ sở của $\mathscr{N}$.

b) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$, biết $f(A) = B, f(B) = C$. Tính $f(C)$. Chứng minh f là song ánh.

Câu 4 Cho dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$, $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3$

a) Xác định một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ (với tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$) sao cho trong cơ sở đó ω có dạng chính tắc. Viết dạng chính tắc đó.
b) Chứng tỏ rằng dạng song tuyến tính đối xứng liên kết với ω là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$. Kí hiệu dạng song tuyến tính đối xứng đó là φ. Hãy tính $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ với $\mathbf{a} = (1, 2, 0), \mathbf{b} = (1, 0, 2)$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 2 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_3[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 3, cho hệ cơ sở

$$B = \{1, x-1, x^2-2x+1, x^3-3x^2+3x-1\}.$$

Xét ánh xạ đạo hàm cấp hai

$$D : \mathscr{P}_3[x] \to \mathscr{P}_3[x],\ q(x) \mapsto q''(x).$$

a) Chứng minh D là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{P}_3[x]$ và tìm ma trận của D trong cơ sở B.
b) Xác định chiều của $KerD, ImD$. Đẳng thức $KerD = ImD$ đúng hay sai? Tại sao?

Câu 3 Trong không gian Ơclit n chiều E cho hệ $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, hạng của A bằng 2. Kí hiệu B gồm các véc tơ trong E vuông góc với mọi véc tơ của A, $B = \{\mathbf{b} \in E \mid \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_i \rangle = \mathbf{0}\ \forall i = 1,2,3\}$.
a) Chứng minh B là không gian con của E.
b) Tìm chiều của không gian con B.

Câu 4 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_2[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 2, cho tập $V = \{p(x) \in \mathscr{P}_2[x] \mid \int_0^1 p(x)dx = 0\}$. Chứng minh rằng V là không gian véc tơ và tìm một cơ sở của V.

Câu 5 Đưa dạng toàn phương $\omega(x,y,z) = 5x^2+5y^2+8z^2-8xy-4xz-4yz$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.
Chứng minh rằng

$$5x^2+5y^2+8z^2-8xy-4xz-4yz = 9$$

là phương trình mặt trụ tròn xoay. Xác định véc tơ chỉ phương của đường sinh và bán kính đường tròn chuẩn của hình trụ đó (mặt phẳng đường tròn chuẩn vuông góc với đường sinh).

ĐỀ SỐ 6

Câu 1 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 2 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_3[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 3, cho hệ cơ sở

$$B = \{1, x+2, x^2+4x+4, x^3+6x^2+12x+8\}$$

Xét ánh xạ đạo hàm cấp hai

$$D : \mathscr{P}_3[x] \to \mathscr{P}_3[x],\ q(x) \mapsto q''(x)$$

a) Chứng minh D là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathscr{P}_3[x]$ và tìm ma trận của D trong cơ sở B.
b) Xác định chiều của $KerD, ImD$. Đẳng thức $KerD = ImD$ đúng hay sai? Tại sao?

Câu 3 Trong không gian Ơclit n chiều E cho hệ $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$, hạng của A bằng 2. Kí hiệu B gồm các véc tơ trong E vuông góc với mọi véc tơ của A, $B = \{\mathbf{b} \in E \mid \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_i \rangle = \mathbf{0}\ \forall i = 1,2,3,4\}$.
a) Chứng minh B là không gian con của E.
b) Tìm chiều của không gian con B.

Câu 4 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_2[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 2, cho tập $V = \{p(x) \in \mathscr{P}_2[x] \mid \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0\}$. Chứng minh rằng V là không gian véc tơ và tìm một cơ sở của V.

Câu 5 Đưa dạng toàn phương $\omega(x,y,z) = 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.
Chứng minh rằng

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 9$$

là phương trình mặt trụ tròn xoay. Xác định véc tơ chỉ phương của đường sinh và bán kính đường tròn chuẩn của hình trụ đó (mặt phẳng đường tròn chuẩn vuông góc với đường sinh).

ĐỀ SỐ 7

Câu 1 Xét hệ phương trình $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Xác định a để $x = y = z = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ.
b) Xác định a để hệ phương trình vô nghiệm, hệ phương trình có ít nhất hai nghiệm.

Câu 2 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_n[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá n $(n > 4)$ cho tập

$$V = \{f(x) \in \mathscr{P}_n[x] \mid f(1) = 0\}$$

(tập các đa thức trong $\mathscr{P}_n[x]$ có nghiệm $x = 1$).
a) Chứng minh rằng V là không gian con của $\mathscr{P}_n[x]$ và

$$B = \{(x-1), (x-1)^2, ..., (x-1)^n\}$$

là cơ sở của V.
b) Tìm tọa độ của $f(x) = (x-1)(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$ trong cơ sở B của V.
c) Kí hiệu $U = \{f(x) \in \mathscr{P}_n[x] \mid f(-1) = 0\}$. Đẳng thức $U + V = \mathscr{P}_n[x]$ đúng hay sai? Tại sao?

Câu 3 Cho dãy véc tơ $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2), ..., \mathbf{a}_n = (x_n, y_n), ...$ trong $\mathbb{R}^2$ biết

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = \ \ 3x_n + 4y_n \end{cases}$$

với mọi $n \geq 1$ và $x_1 = 0, y_1 = 1$. Hãy tính $\mathbf{a}_n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 4 Định nghĩa dạng toàn phương bán xác định dương. Chứng tỏ rằng dạng toàn phương $\omega = 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 4xz + 4yz$ bán xác định dương.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1 Xét hệ phương trình $\begin{pmatrix} 3 & 4 & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
a) Xác định a để $x = y = z = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ.
b) Xác định a để hệ phương trình vô nghiệm, hệ phương trình có ít nhất ba nghiệm.

Câu 2 Trong không gian tuyến tính $\mathscr{P}_n[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá n $(n > 4)$ cho tập

$$V = \{f(x) \in \mathscr{P}_n[x] \mid f(-1) = 0\}$$

(tập các đa thức trong $\mathscr{P}_n[x]$ có nghiệm $x = -1$).
a) Chứng minh rằng V là không gian con của $\mathscr{P}_n[x]$ và

$$B = \{(x+1), (x+1)^2, ..., (x+1)^n\}$$

là cơ sở của V.
b) Tìm tọa độ của $f(x) = (x+1)(x^3 - x^2 + 4x + 1)$ trong cơ sở B của V.
c) Kí hiệu $U = \{f(x) \in \mathscr{P}_n[x] \mid f(1) = 0\}$. Đẳng thức $U + V = \mathscr{P}_n[x]$ đúng hay sai? Tại sao?

Câu 3 Cho dãy véc tơ $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2), ..., \mathbf{a}_n = (x_n, y_n), ...$ trong $\mathbb{R}^2$ biết

$$\begin{cases} x_{n+1} = 7x_n + 6y_n \\ y_{n+1} = -4x_n - 3y_n \end{cases}$$

với mọi $n \geq 1$ và $x_1 = 1, y_1 = 0$. Hãy tính $\mathbf{a}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 4 Định nghĩa dạng toàn phương bán xác định âm. Chứng tỏ rằng dạng toàn phương $\omega = -3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 4xy - 4xz$ bán xác định âm.

ĐỀ SỐ 9

Câu 1

a) Tìm các số phức z thỏa mãn phương trình $z^4 + 2z^3 + 11z^2 + 2z + 10 = 0$, biết phương trình có 1 nghiệm $z = -1 + 3i$.

b) Với các phép toán thông thường trên tập số phức $\mathbb{C}$, ta nói $\mathbb{R}$ là không gian tuyến tính trên $\mathbb{C}$ và $\mathbb{C}$ cũng là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ đúng hay sai? Tìm chiều và cơ sở nếu chúng là không gian tuyến tính.

Câu 2

Cho $\mathscr{P}_2[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 2.

a) Chứng minh rằng $B = \{1 + x - x^2, -3 - 2x + x^2, 1 + 2x^2\}$ là cơ sở của $\mathscr{P}_2[x]$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathscr{P}_2[x]$.

c) Giả thiết $\mathscr{P}_2[x]$ là không gian **Ơ**clit và hệ B trong câu a) là cơ sở trực chuẩn trong $\mathscr{P}_2[x]$. Khi đó hệ $\{1, x, x^2\}$ có là cơ sở trực chuẩn không?

Câu 3 Gọi $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp hai. Xét phép biến đổi tuyến tính

$$f : V \to V, \ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 5x + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 5x + 2y \end{pmatrix}$$

a) Tìm chiều và một cơ sở của V.

b) Xác định không gian $\ker f$ và viết ma trận của f trong cơ sở vừa tìm được.

c) Tìm các véc tơ riêng và các trị riêng tương ứng của f.

Câu 4 Nhận dạng và đưa phương trình của đường bậc hai sau về dạng chính tắc

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy + 8\sqrt{2}x - 2 = 0$$

ĐỀ SỐ 10

Câu 1
a) Tìm các số phức z thỏa mãn phương trình $z^4 + 6z^3 + 11z^2 + 6z + 10 = 0$, biết phương trình có 1 nghiệm $z = -3 + i$.
b) Với các phép toán thông thường trên tập số phức $\mathbb{C}$, ta nói $\mathbb{R}$ là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ cũng là không gian tuyến tính trên $\mathbb{C}$ đúng hay sai? Tìm chiều và cơ sở nếu chúng là không gian tuyến tính.

Câu 2
Cho $\mathscr{P}_2[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 2.
a) Chứng minh rằng $B = \{2 + x + x^2, -x + 4x^2, 1 + 2x^2\}$ là cơ sở của $\mathscr{P}_2[x]$.
b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $\mathscr{P}_2[x]$.
c) Giả thiết $\mathscr{P}_2[x]$ là không gian **Ơ**clit và hệ B trong câu a) là cơ sở trực chuẩn trong $\mathscr{P}_2[x]$. Khi đó hệ $\{1, x, x^2\}$ có là cơ sở trực chuẩn không?

Câu 3 Gọi $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp hai. Xét phép biến đổi tuyến tính

$$f : V \to V,\ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x + 2y & 2x - 2y \\ 2x - 2y & -x - 2y \end{pmatrix}$$

a) Tìm chiều và một cơ sở của V.
b) Xác định không gian $\ker f$ và viết ma trận của f trong cơ sở vừa tìm được.
c) Tìm các véc tơ riêng và các trị riêng tương ứng của f.

Câu 4 Nhận dạng và đưa phương trình của đường bậc hai sau về dạng chính tắc

$$x^2 + 7y^2 - 8xy + 2\sqrt{5}y - 1 = 0$$

ĐỀ SỐ 11

Câu 1 Trong không gian **Ơ**clit E cho 2 véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Tìm $|\mathbf{a}|$ biết

$$|\mathbf{b}| = 4, |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 6, |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 4.$$

Câu 2 Trong số các ánh xạ

$$u, v : \mathscr{P}_2[x] \to \mathscr{P}_4[x], u(q(x)) = q(x^2), v(q(x)) = (x-1)^2 q(x)$$

ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính? Tìm không gian nhân nếu chúng là ánh xạ tuyến tính và viết ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $\mathscr{P}_2[x]$ và $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $\mathscr{P}_4[x]$.

Câu 3 Cho hai không gian con trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

và

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

a) Tìm một cơ sở và chiều của A.
b) Tìm một cơ sở và chiều của B.
c) Khẳng định $\mathbb{R}^4 = A + B$ đúng hay sai? Tại sao?

Câu 4 Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết

$$f(1,1) = (-5,-1),\ f(2,1) = (2,1).$$

Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Câu 5 Chứng minh rằng trong hệ trục tọa độ Đề các trực chuẩn

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz = 6$$

là phương trình của hai mặt phẳng.

ĐỀ SỐ 12

Câu 1 Trong không gian **Ơ**clit E cho 2 véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Tìm $|\mathbf{b}|$ biết

$$|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 4, |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 6.$$

Câu 2 Trong số các ánh xạ

$$u, v : \mathscr{P}_2[x] \to \mathscr{P}_4[x], u(q(x)) = q(x^2), v(q(x)) = (x+1)^2 q(x)$$

ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính? Tìm không gian nhân nếu chúng là ánh xạ tuyến tính và viết ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $\mathscr{P}_2[x]$ và $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $\mathscr{P}_4[x]$.

Câu 3 Cho hai không gian con trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

và

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$$

a) Tìm một cơ sở và chiều của A.
b) Tìm một cơ sở vả chiều của B.
c) Khẳng định $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$ đúng hay sai? Tại sao?

Câu 4 Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết

$$f(1,1) = (-8, -2),\ \ f(2,1) = (2,1).$$

Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Câu 5 Chứng minh rằng trong hệ trục tọa độ Đề các trực chuẩn

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 8yz = 9$$

là phương trình của hai mặt phẳng.

ĐỀ SỐ 13

Câu 1 a) Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$\left(\frac{1+i}{2+i\sqrt{12}}\right)^6$$

b) Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x\cos y+2, x\sin y)$. **Á**nh xạ f có là song ánh không? Tại sao?
Trong $\mathbb{R}^2$ với hệ trục tọa độ Đề các xOy cho hình vuông $A=[0,1]\times[0,\pi]$. Hãy xác định tập ảnh $f(A)$ và minh họa hình học tập ảnh $f(A)$.

Câu 2 Trong không gian các ma trận thực vuông cấp hai $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cho các ma trận

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Hãy tìm chiều của không gian con $\mathscr{L}(A,B,C,D)$ sinh bởi các ma trận A,B,C,D. Tìm trong không gian $\mathscr{L}(A,B,C,D)$ ma trận E sao cho A,B,E độc lập tuyến tính.

Câu 3 Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, biết ma trận của f trong cơ sở $\mathbf{B}=\{(2,1),\ (1,1)\}$ là $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Hãy tính véc tơ ảnh $f(4,3)$ và tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Câu 4 Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ -1 & b\end{pmatrix}$. Tìm a,b biết $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ là hai véc tơ riêng của A.

Câu 5
a) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng **Ơ**clit, cho tập

$$A=\{\mathbf{a}_1=(1,2,1),\mathbf{a}_2=(2,3,1),\mathbf{a}_3=(1,1,0)\}.$$

Tìm không gian con của $\mathbb{R}^3$ trực giao với A.
b) Ma trận A có kiểu 5×4. Chứng minh rằng định thức của ma trận tích AA^T luôn bằng 0. (A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A).

ĐỀ SỐ 14

Câu 1 Cho ánh xạ

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto z^2 + (1+i)z,$$

trong đó $\mathbb{C}$ là tập các số phức và tập A gồm 2 số phức $A = \{0, \ i-2\}$. Chứng minh f là toàn ánh và tìm tập nghịch ảnh $f^{-1}(A)$.

Câu 2 Trong không gian $\mathcal{P}_3[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá 3, cho các đa thức

$$P_1 = -2x^3+2x^2+x, \ P_2 = 2x^3-x^2+1, \ P_3 = 2x^3+x+2, \ P_4 = -4x^3+3x^2+x-1.$$

Chứng tỏ rằng chúng đôi một độc lập tuyến tính và chứng minh

$$\mathscr{L}(P_1, P_2, P_3) = \mathscr{L}(P_1, P_2).$$

. Hãy tìm chiều của không gian con $\mathscr{L}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ sinh bởi các đa thức đó.

Câu 3 Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết $\mathbf{u} = (3, 4)$ và $\mathbf{v} = (1, 2)$ là 2 véc tơ riêng với các trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ tương ứng. Tính đa thức đặc trưng và tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Câu 4 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Tìm các trị riêng và véc tơ riêng của A.
b) Xác định m để ma trận $A - mI$ không xác định dấu. (Một ma trận đối xứng được gọi là *không xác định dấu nếu dạng toàn phương ứng với ma trận đó không xác định dấu*).

Câu 5

a) Định nghĩa góc giữa 2 véc tơ trong không gian Euclide E. Giả sử các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ có tính chất $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$. Chứng minh rằng $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ hợp với nhau góc 120^0.
b) Trong không gian Euclide E, các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ đôi một hợp với nhau các góc bằng nhau và cùng bằng φ. Xác định góc φ để 3 véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ phụ thuộc tuyến tính.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1
a) Tìm các số phức $z \in \mathbb{C}$ sao cho $z^4 = (\overline{z})^4$.
b) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$. Hãy tính hạng của A (biện luận theo các tham số $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Câu 2 Trong $\mathbb{R}^3$ cho các véc tơ $\mathbf{a} = (2, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (-1, 5, 8)$ và $\mathbf{d} = (1, 0, 1)$.
a) Tìm chiều và một cơ sở của không gian con $\mathscr{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sinh bởi các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
b) Tìm hạng của hệ các véc tơ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$.

Câu 3 Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biết

$$f(1, 1) = (1, 0),\ \ f(1, 2) = (7, 2)$$

Tìm giá trị riêng và các véc tơ riêng tương ứng của f.

Câu 4 Cho dạng song tuyến tính

$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_3y_3$$

trên $\mathbb{R}^3$.
a) Chứng minh rằng φ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.
b) Chứng minh tập các véc tơ trực giao với 2 véc tơ $\mathbf{a} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = (1, -1, 2)$ theo tích vô hướng đã cho là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm chiều và một cơ sở của không gian con đó.

Câu 5 Định nghĩa phép biến đổi đối xứng trong không gian Euclide. Chứng minh rằng nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n của phép biến đổi đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn thì $A = A^T$.
Phép quay quanh $O(0, 0)$ với góc quay 90^0 trong $\mathbb{R}^2$ có là phép biến đổi đối xứng không? Tại sao?

CHỈ DẪN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN NGHỊ. Phương pháp giải bài tập toán cao cấp, tập I. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1973.

2. DOÃN TAM HOÈ. Toán học đại cương. Đại học Xây dựng, Hà Nội 2001.

3. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ. Toán cao cấp, tập I. NXB Giáo dục, Hà Nội 2000.

4. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ. Toán cao cấp, tập II. NXB Giáo dục, Hà Nội 2000.

5. PROXKURIACÔP, I.V. Tuyển tập các bài toán đại số tuyến tính. Nauka, Moxkva 1974.