

Chuỗi điều hòa và hằng số Euler

Ta đã biết chuỗi điều hòa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ phân kì, các tổng riêng $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n = 1, 2, \dots$ tăng dần ra vô cùng. Euler đã chỉ ra tốc độ tăng của nó bằng tốc độ tăng của $\ln n$. Chính xác hơn

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + \alpha_n, \quad (*)$$

trong đó $C \approx 0,577\dots$ được gọi là hằng số Euler và α_n là vô cùng bé (VCB), $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Thật vậy, xét chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right)$. Nó là chuỗi hội tụ. Gọi C là tổng của chuỗi, người ta tính được $C \approx 0,577215665$.

Mặt khác $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Từ đây suy ra (*).

Phần tiếp theo ta sẽ ứng dụng hệ thức (*) ở trên để tính tổng một số chuỗi đặc biệt.

1. *Chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$ (1)

Chuỗi đan dấu (1) bán hội tụ, sử dụng (*) ta tính tổng của nó như sau. Tổng riêng thứ $2k$ của chuỗi (1) bằng

$$S_{2k} = \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} \right) = \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} \right) = (\ln 2k + C) - (\ln k + C) + \alpha_k$$

Suy ra

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln 2k - \ln k + \alpha_k = \ln 2.$$

2. *Chuỗi hoán vị của chuỗi đan dấu* (1) theo chu kì, lần lượt hai số hạng âm tiếp theo một số hạng dương

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) + \dots$$
 (2)

Tổng riêng thứ $3k$ của chuỗi (2) (không tính dấu ngoặc trong chuỗi (2) ở trên) bằng

$$S_{3k} = \sum_{n=1}^{3k} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \sum_{n=1}^{3k} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3k} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Đây là nửa tổng riêng (thứ $6k$) của chuỗi đan dấu (1), suy ra chuỗi (2) có tổng bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

3. *Chuỗi hoán vị nửa của chuỗi đan dấu* (1) theo chu kì, lần lượt hai số hạng âm tiếp theo ba số hạng dương

$$\begin{aligned} s &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2(3n-2)-1} + \frac{1}{2(3n-1)-1} + \frac{1}{2(3n)-1} \right) - \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n)} \right) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{6k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2(3n-2)} + \frac{1}{2(3n-1)} + \frac{1}{2(3n)} \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{6k} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} \right) \right] - \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (\ln 2k + C + o(1)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(\ln 6k + C + o(1)) - \frac{1}{2} (\ln 3k + C + o(1)) \right] - \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (\ln 2k + C + o(1)) = \frac{1}{2} \ln 6 \end{aligned}$$

4. Tổng quát hơn nếu hoán vị theo chu kì: tiếp theo p số dương là q số hạng âm, bằng cách làm tương tự, tổng của chuỗi hoán vị bằng $\ln \left(2 \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \right)$.

Chẳng hạn với $p = 4, q = 3$ chuỗi sau có tổng bằng $\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2(4n-3)-1} + \frac{1}{2(4n-2)-1} + \frac{1}{2(4n-1)-1} + \frac{1}{2(4n)-1} \right) - \left(\frac{1}{2(3n-2)} + \frac{1}{2(3n-1)} + \frac{1}{2(3n)} \right) \right]$$

Nhận xét rằng các kết quả trên gắn liền với một định lí về chuỗi bán hội tụ: *luôn tồn tại một cách hoán vị các số hạng của chuỗi bán hội tụ để chuỗi có tổng là một số thực bất kì cho trước.*