MỤC LỤC

NGUYỄN NGỌC CỪ - LÊ HUY ĐẠM
TRỊNH DANH ĐẰNG - TRẦN THANH SƠN

GIẢI TÍCH I

Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật

Chương 1

Số thực và dãy số thực

1.1 Lân cận, tập đóng, tập mở và tập bị chặn

Giáo trình này trình bày các nội dung cơ bản, các kết quả cơ bản của giải tích toán học nhằm cung cấp các kiến thức cần thiết cho học sinh sinh viên các ngành kĩ thuật học tiếp các môn khác. Do vậy nó không đi sâu vào nghiên cứu các khái niệm gốc ban đầu của giải tích như bản chất số thực, hệ tiên đề cũng như cách xây dựng số thực.

Trước hết chúng ta nhắc lại các tính chất quan trọng nhất của tập các số thực đã được biết đến trong chương trình toán ở phổ thông, đồng thời bổ sung thêm các khái niệm sâu hơn làm cơ sở cho việc trình bày các vấn đề cơ bản của giải tích.

Kí hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ là tập các số tự nhiên dương
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ là tập các số nguyên
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$ là tập các số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là tập các số thực.
Các tập hợp $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ là các tập số gồm vô hạn phần tử. Chúng có cùng lực lượng đếm được. Tập các số thực $\mathbb{R}$ không đếm được, ta gọi lực lượng của $\mathbb{R}$ là continuum. Người ta đồng nhất tập các số thực $\mathbb{R}$ với các điểm trên trục số và nói tập các số thực lấp đầy trục số.
Như đã nói ở trên, trong giáo trình này chúng ta không tìm cách xây dựng tập số thực. Các phương pháp xây dựng tập số thực có giá trị lớn về mặt lôgic cũng như về mặt lịch sử, nhưng không có mối liên hệ trực tiếp với giải tích. Tuy nhiên một trong số các tiên đề về số thực được giới thiệu trong giáo trình này là *tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên*. Chỉ thông qua hệ các các tiên

đề về số thực chúng ta mới có khái niệm đầy đủ về các số *vô tỉ*, chúng là các số thực không thuộc tập các số hữu tỉ.

Trị tuyệt đối và các tính chất của trị tuyệt đối.

Trị tuyệt đối của một số thực a được kí hiệu là $|a|$ và được định nghĩa như sau:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Nhận xét rằng $|a| \geq 0$ với mọi số thực a. Các tính chất sau đây là hiển nhiên:
- $-|a| \leq a \leq |a|$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.
- Nếu c là số thực thoả mãn điều kiện $-|a| \leq c \leq |a|$, khi đó $|c| \leq |a|$.
- Với a, b là hai số thực tuỳ ý:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \text{và} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ (b \neq 0)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{và} \quad |a - b| \geq \Big||a| - |b|\Big|.$$

Cho 2 số thực $a < b$, người ta gọi khoảng (a, b) là tập các số thực lớn hơn a và nhỏ thua b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Ta gọi khoảng đóng hoặc đoạn thẳng $[a, b]$ là tập các số thực:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Về ý nghĩa hình học, $|a - b|$ là độ dài đoạn thẳng $[a, b]$ (hoặc nói là độ dài khoảng (a, b). Nó chính là khoảng cách giữa 2 điểm a, b trên trục số. Người ta còn kí hiệu

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Với hai số thực bất kì $\alpha < \beta$ luôn tồn tại vô số số hữu tỉ $x \in \mathbb{Q}$ sao cho $\alpha < x < \beta$.

Về mặt hình học tính chất trên khẳng định xen giữa hai số thực bất kì tồn tại vô số số hữu tỉ. Ta nói *tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.*

Ta đưa vào khái niệm *lân cận* của một điểm thuộc tập các số thực $\mathbb{R}$. Lân cận là khái niệm cơ bản để xây dựng nên các khái niệm quan trọng khác như giới hạn, liên tục, đạo hàm... của giải tích.

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử x_0 là điểm thuộc $\mathbb{R}$, $\delta > 0$ là số thực dương tuỳ ý. Người ta gọi khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kí hiệu:*

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

là lân cận (hoặc lân cận mở) bán kính δ của điểm (hoặc số thực) $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nếu $V \subset \mathbb{R}$ và V chứa một lân cận bán kính $\delta > 0$ nào đó thì V được gọi là lân cận của x_0.

Từ định nghĩa lân cận của một điểm ta có các nhận xét
- Nếu V là lân cận của x_0 thì $x_0 \in V$.
- Nếu V là lân cận của x_0 và $V \subset U$ thì U cũng là lân cận của x_0.
- Nếu V_1, V_2 là hai lân cận của x_0 thì $V_1 \cap V_2$ cũng là lân cận của x_0.

Ta bổ sung thêm vào $\mathbb{R}$ hai phần tử đặc biệt $-\infty$ và $+\infty$ và kí hiệu

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Tập hợp $\overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *tập các số thực mở rộng*, chúng được sắp thứ tự như đã biết trong $\mathbb{R}$, ngoài ra với các phần tử mới được bổ sung, ta có:
- $-\infty < a$ với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$
- $a < +\infty$ với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$
- $-\infty < +\infty$.

Bây giờ chúng ta có thể mở rộng khái niệm lân cận của $+\infty, -\infty$
- Lân cận của $-\infty$ là tập hợp:

$$U_K(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < K\}, \quad \text{trong đó} \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{là số thực tuỳ ý.}$$

- Lân cận của $+\infty$ là tập hợp:

$$U_K(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > K\}, \quad \text{trong đó} \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{là số thực tuỳ ý.}$$

Định nghĩa 1.1.2 *Điểm $a \in \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là điểm tụ của tập $H \subset \mathbb{R}$ nếu mọi lân cận của a chứa vô hạn các phần tử của H.*

Cần lưu ý với a là điểm tụ của tập H, a không nhất thiết phải thuộc H. Tuy nhiên, điểm tụ của một tập hợp có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Định lí 1.1.1 *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ là điểm tụ của tập $H \subset \mathbb{R}$ khi và chỉ khi mọi lân cận của a chứa ít nhất một phần tử khác a thuộc H.*

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Xét một lân cận bất kì $U_\delta(a)$ của a ($\delta > 0$), ta phải chứng minh $U_\delta(a)$ chứa vô hạn các phần tử của H.

Theo giả thiết của điều kiện đủ, lân cận bán kính δ của a, $U_\delta(a)$ chứa ít nhất một phần tử a_1 khác a thuộc H, gọi δ_1 là khoảng cách từ a_1 tới a: $\delta_1 = |a_1 - a| > 0$. Lân cận bán kính δ_1 của a, $U_{\delta_1}(a)$ chứa ít nhất một phần tử a_2 khác a thuộc H, gọi δ_2 là khoảng cách từ a_2 tới a: $\delta_2 = |a_2 - a| > 0$.

Lân cận bán kính δ_2 của a, $U_{\delta_2}(a)$ chứa ít nhất một phần tử a_3 khác a thuộc H, gọi δ_3 là khoảng cách từ a_3 tới a: $\delta_3 = |a_3 - a| > 0$...

Cứ lập luận tiếp như vậy, các phần tử $a_1, a_2, a_3, ... \in H$ đôi một khác nhau và đều thuộc lân cận $U_\delta(a)$ đã xét ban đầu của a. Ta đã chứng minh $U_\delta(a)$ chứa vô hạn phần tử thuộc H. ■

Ví dụ 1.1.1

1. Mọi điểm thuộc đoạn $[a, b]$ là điểm tụ của khoảng (a, b). Như vậy điểm tụ của tập H có thể thuộc H, cũng có thể không thuộc H.

2. Với tập $H = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$, $a = 0$ là điểm tụ của H. Tuy nhiên các phần tử $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ không là điểm tụ của H.

3. Tập các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ không có điểm tụ trong $\mathbb{R}$. Tuy nhiên phù hợp với định nghĩa về lân cận của $-\infty$ và $+\infty$, ta có thể thấy $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ là điểm tụ của tập các số tự nhiên.

4. H là tập các số hữu tỉ trong khoảng $(0, 1)$. Khi đó mọi số thực thuộc đoạn $[0, 1]$ là điểm tụ của tập H.

Định nghĩa 1.1.3 *$H \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập đóng nếu nó chứa mọi điểm tụ (nếu có) của H.*

Người ta quy ước tập $\emptyset$ là tập đóng. Nhận xét sau là hiển nhiên

1. Mọi tập hữu hạn đều là tập đóng.
2. Tập các số thực $\mathbb{R}$ là tập đóng.
3. Đoạn thẳng $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là tập đóng.

Từ định nghĩa về tập đóng, dễ dàng chứng minh khẳng định sau

Định lí 1.1.2
• *Hợp của hữu hạn các tập đóng cũng là tập đóng:*
Giả sử $H_1, H_2, ..., H_n$ *là các tập đóng, khi đó* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i$ *cũng là tập đóng.*
• *Giao của hữu hạn hoặc vô hạn các tập đóng luôn luôn là tập đóng:*
Giả sử $H_i, i \in I$ *là các tập đóng (*I *là tập các chỉ số có thể hữu hạn hoặc vô hạn), khi đó* $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ *cũng là tập đóng.*

Bài tập **Hãy cho một ví dụ trên $\mathbb{R}$ về vô hạn các tập đóng mà hợp của chúng không phải là tập đóng.**
(*Trong chương này, ngay sau một vài khái niệm cơ bản chúng tôi đưa ra một số bài tập để độc giả tự giải nhằm củng cố kĩ thêm các khái niệm đó và giúp độc giả nắm bắt nhanh các phần lí thuyết tiếp theo.*)

Ngược lại với khái niệm điểm tụ, chúng ta có định nghĩa sau đây về điểm cô lập:

Định nghĩa 1.1.4 *Điểm* $x_0 \in H$ *được gọi là điểm cô lập của tập* $H \subset \mathbb{R}$ *nếu tồn tại một lân cận* $U_\delta(x_0)$ *của* x_0 *sao cho trừ* x_0*, lân cận* $U_\delta(x_0)$ *không chứa một điểm nào khác của* H *(nói cách khác* $U_\delta(x_0) \cap H = \{x_0\}$*).*

Ví dụ mọi số nguyên đều là điểm cô lập của tập các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, 1, 0, 1, 2, ...\}$$

Nhận xét rằng nếu $H \subset \mathbb{R}$ là tập đóng, khi đó do H chứa mọi điểm tụ của nó nên *mọi phần tử của* H *hoặc là điểm tụ hoặc là điểm cô lập.*

Định nghĩa 1.1.5 *Điểm* $x_0 \in A$ *được gọi là điểm trong của tập* A *nếu tồn tại một lân cận* $U_\delta(x_0)$ *của* x_0 *sao cho lân cận* $U_\delta(x_0)$ *được chứa trong tập* A *(*$U_\delta(x_0) \subset A$*).*

Ví dụ 1.1.2

1. Kí hiệu A là tập các số thực trong khoảng $(0,1)$, khi đó mọi điểm thuộc A đều là điểm trong của A.

2. Kí hiệu B là tập các số hữu tỉ trong khoảng $(0,1)$

$$B = \{x \mid 0 < x < 1,\ x \text{ là số hữu tỉ } \}$$

   B không có điểm trong.

Định nghĩa 1.1.6 *$A \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập mở nếu mọi phần tử của A đều là điểm trong của A. Nói cách khác với mỗi $x_0 \in A$ tồn tại một lân cận $U_\delta(x_0)$ sao cho $U_\delta(x_0) \subset A$.*

Người ta quy ước tập $\emptyset$ là tập mở. Nhận xét sau là hiển nhiên

1. Tập các số thực $\mathbb{R}$ là tập mở.
2. Mọi khoảng $(a,b) \subset \mathbb{R}$ đều là tập mở.

Từ định nghĩa về tập mở, dễ dàng chứng minh khẳng định sau

Định lí 1.1.3
• *Giao của hữu hạn các tập mở cũng là tập mở:*
Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập mở, khi đó $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ cũng là tập mở.
• *Hợp của hữu hạn hoặc vô hạn các tập mở luôn luôn là tập mở:*
Giả sử $A_i, i \in I$ là các tập mở (I là tập các chỉ số có thể hữu hạn hoặc vô hạn), khi đó $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ cũng là tập mở.

Bài tập **Hãy cho một ví dụ trên $\mathbb{R}$ về vô hạn các tập mở mà giao của chúng không phải là tập mở.**

Nhận xét rằng tập các số hữu tỉ trong khoảng $(0,1)$ trong ví dụ trước không là tập đóng cũng chẳng là tập mở. Ta có định lí sau

Định lí 1.1.4 *Phần bù (trong $\mathbb{R}$) của tập mở là tập đóng và phần bù của tập đóng là tập mở.*

Chứng minh
Giả sử $A \subset \mathbb{R}$ là tập mở. Kí hiệu $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$ là phần bù (trong $\mathbb{R}$) của A. Ta sẽ chứng minh $\overline{A}$ là tập đóng hay mọi điểm tụ x_0 của $\overline{A}$ đều thuộc nó

$$x_0 \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; x_0 \notin A.$$

Thật vậy, nếu x_0 là điểm tụ của $\overline{A}$, suy ra mọi lân cận V của x_0 đều chứa ít nhất một phần tử thuộc $\overline{A}$ tức là V chứa ít nhất một phần tử không thuộc A. Do A tập mở nên $x_0 \notin A$.

Ngược lại giả sử $B \subset \mathbb{R}$ là tập đóng. Ta phải chứng minh $\overline{B}$ là tập mở. Chọn $x_0 \in \overline{B}$ tùy ý, suy ra $x_0 \notin B$. Do B đóng nên x_0 không là điểm tụ của B. Vì vậy tồn tại một lân cận V của x_0 mà V không chứa một phần tử nào của B. Nói cách khác V được chứa trong $\overline{B}$, suy ra $\overline{B}$ là tập mở (đ.p.c.m.) ■

1.2 Tập bị chặn, tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên

Định nghĩa 1.2.1
• *Tập $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập bị chặn trên nếu tồn tại $K \in \mathbb{R}$ sao cho $x \leq K$ với mọi $x \in A$. Số K như vậy được gọi là số chặn trên của tập A và hiển nhiên khi đó mọi số thực lớn hơn K cũng là các số chặn trên của tập A.*
• *Tập $B \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập bị chặn dưới nếu tồn tại $K' \in \mathbb{R}$ sao cho $x \geq K'$ với mọi $x \in A$. Số K' được gọi là số chặn dưới của tập B.*
• *Tập $C \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập bị chặn (hay còn gọi là tập giới nội) nếu C là tập bị chặn trên, đồng thời cũng là tập bị chặn dưới. Như vậy tập $C \subset \mathbb{R}$ là tập bị chặn khi và chỉ khi tồn tại $K \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| \leq K$ với mọi $x \in C$.*

Chú ý rằng một tập bị chặn trên có thể không có số lớn nhất, cũng như một tập bị chặn dưới có thể không có số nhỏ nhất.

Bây giờ ta đưa vào một tính chất đặc biệt quan trọng của tập các số thực, nó là cơ sở cần thiết cho việc chứng minh nhiều kết quả quan trọng trong giải tích sau này.

<u>Tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên:</u>
Tập hợp tất cả các số chặn trên của một tập bị chặn trên luôn luôn có phần tử nhỏ nhất.

Giả sử A là tập bị chặn trên và kí hiệu M là tập hợp tất cả các số chặn trên của A.

$$M = \{K \mid K \in \mathbb{R}, K \geq x \text{ với mọi } x \in A\}.$$

Khi đó $M \neq \emptyset$ và theo tiên đề trên tập M có phần tử nhỏ nhất. Phần tử nhỏ nhất đó được gọi là *cận trên đúng* (hay *supremum*) của tập A, kí hiệu $\sup A$. Vậy một tập A bị chặn trên luôn luôn có một cận trên nhỏ nhất (cận trên đúng) và

$$\sup A = \min\{K \mid K \in M\}.$$

Định lí sau là hiển nhiên

Định lí 1.2.1 *Cho A là tập bị chặn trên. Số thực $\alpha = \sup A$ là cận trên đúng của A khi và chỉ khi*

- *Với mọi $x \in A$, $\quad x \leq \alpha$.*
- *Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại ít nhất một phần tử $y \in A$ sao cho $y > \alpha - \epsilon$.*

Ví dụ 1.2.1

Cho $A = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tập A không có phần tử lớn nhất, tuy nhiên A có cận trên đúng và dễ dàng nhận thấy cận trên đúng của A: $\sup A = 1$.

Ta có các nhận xét sau

- Nếu một tập hợp A có phần tử lớn nhất khi đó cận trên đúng của nó cũng chính là phần tử lớn nhất của tập đó:

$$\max A = \sup A.$$

- Cận trên đúng $\sup A$ của tập A nói chung không thuộc tập hợp A và

$$\sup A \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ có phần tử lớn nhất } \max A.$$

Cho $B \subset \mathbb{R}$ là tập bị chặn dưới và xét tập hợp gồm các phần tử đối của các phần tử thuộc B:

$$B^* = \{-b \mid b \in B\}.$$

Khi đó B^* là tập bị chặn trên và do vậy tồn tại cận trên đúng của B^*

$$\alpha = \sup B^*$$

Bằng cách xét tập B^* dễ dàng nhận thấy tập hợp tất cả các số chặn dưới của tập hợp B có phần tử lớn nhất. Phần tử đó được gọi là *cận dưới đúng* (hay còn gọi *infimum*) của B, kí hiệu $\inf B$ và

$$\inf B = -\sup B^* = -\alpha.$$

Vậy mọi tập bị chặn dưới đều có cận dưới đúng. Nó được suy ra từ tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên.

Tương tự như định lí 1.2.1 ta có

Định lí 1.2.2 *Cho B là tập bị chặn dưới. Số thực $\beta = \inf B$ là cận dưới đúng của B khi và chỉ khi*

- *Với mọi $x \in B, \quad x \geq \beta$.*
- *Với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại ít nhất một phần tử $y \in B$ sao cho $y < \beta + \epsilon$.*

Ví dụ 1.2.2

1. Gọi A là tập các số vô tỉ trên đoạn $[0, 1]$. Hiển nhiên A không có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất. Mặt khác dễ dàng suy ra từ định nghĩa cận trên đúng, cận dưới đúng
$$\sup A = 1, \ \inf A = 0.$$
2. Cho
$$B = \{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ..., \frac{n+1}{n}, ...\}$$
$\max B = 2$ và do đó cận trên đúng của B, $\sup B = \max B = 2$.
Dễ dàng nhận thấy B không có phần tử nhỏ nhất, tuy nhiên cận dưới đúng của B, $\inf B = 1$.

Phần đọc thêm **Tương đương với tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên là nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau.**

Định nghĩa 1.2.2 *Dãy các đoạn thẳng* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ *được gọi là dãy các đoạn thẳng lồng nhau. Hiển nhiên với dãy nêu trên*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \cdots \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b_2 \leq b_1.$$

Nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau:
Mọi dãy các đoạn thẳng lồng nhau luôn có ít nhất một điểm chung.

Ta trình bày vắn tắt sự tương đương giữa tiên đề về cận trên đúng của tập bị chặn trên và nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau.
• **Giả sử** $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$**, từ tiên đề về cận trên đúng ta suy ra ngay** $\alpha = \sup\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \in [a_n, b_n] \ \ \forall n.$
• **Ngược lại sử dụng nguyên lí dãy các đoạn thẳng lồng nhau ta phải chứng minh tập** $H \subset \mathbb{R}$ **bị chặn trên luôn có** $\sup H$**.**
Giả sử $a_1 \in H$ **và** b_1 **là một số chặn trên của** H**. Chia đoạn** $[a_1, b_1]$ **thành 2 đoạn bằng nhau và chọn** $[a_2, b_2]$ **là một trong 2 nửa đó thỏa mãn tính chất: trong** $[a_2, b_2]$ **vừa có điểm thuộc** H **vừa có một số chặn trên của** H **(luôn luôn tồn tại đoạn như vậy!). Chia tiếp** $[a_2, b_2]$ **thành 2 đoạn bằng nhau và chọn một trong 2 đoạn đó, kí hiệu** $[a_3, b_3]$ **sao cho trong đó vừa có điểm thuộc** H **vừa có một số chặn trên của** H**...**
Cứ tiếp tục, ta được dãy các đoạn thẳng lồng nhau và phần tử chung của dãy đó chính là $\sup H$**.**

Định lí 1.2.3 *Gọi* $H \subset \mathbb{R}$ *là tập đóng, bị chặn và* $H \neq \emptyset$*. Khi đó* H *có phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, đồng thời*

$$\sup H = \max H, \quad \inf H = \min H.$$

Chứng minh. Giả sử $\alpha = \sup H$ là cận trên đúng của H.
• Nếu α là điểm cô lập của H, khi đó hiển nhiên α cũng là phần tử lớn nhất của H.
• Trường hợp α không là điểm cô lập của H, khi đó α là điểm tụ của H. Theo giả thiết H là tập đóng, H chứa mọi điểm tụ của nó, vậy $\alpha = \sup H \in H$ suy ra

$$\sup H = \max H.$$

Phần thứ hai của định lí được chứng minh tương tự. ■

Một tập vừa bị chặn vừa là tập đóng được gọi là *tập compắc*. Theo định lí trên tập compắc luôn luôn có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất.

Định lí sau nêu lên tính chất cơ bản của tập bị chặn.

Định lí 1.2.4 (Bolzano) *Mọi tập bị chặn và chứa vô hạn phần tử đều có ít nhất một điểm tụ.*

Chứng minh. Gọi H là tập bị chặn và chứa vô hạn phần tử. Kí hiệu B là tập các số thực mà chỉ hữu hạn các phần tử thuộc H lớn hơn số thực đó. Nói cách khác

$$x \in B \quad \text{khi và chỉ khi tập } \{y \in H \mid y > x\} \text{ là tập hữu hạn.}$$

Do $B \neq \emptyset$ (mọi số chặn trên tập H đều thuộc B) và B là tập bị chặn dưới (H chứa vô hạn phần tử) nên tồn tại cận dưới đúng $\alpha = \inf B$ của tập B.

Ta sẽ chứng minh α là điểm tụ của H. Thật vậy xét một lân cận $U_\delta(\alpha)$ bán kính $\delta > 0$ tuỳ ý của α:

$$U_\delta(\alpha) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta).$$

Từ định nghĩa của B suy ra $\alpha - \delta \notin B$ và $\alpha + \delta \in B$. Như vậy trong lân cận $U_\delta(\alpha) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ có vô hạn các phần tử thuộc H. Do $\delta > 0$ tuỳ ý suy ra α là điểm tụ của H (đ.p.c.m.) ■

Bài tập

1. **Tìm tất cả các điểm tụ và điểm cô lập của tập**

$$H = \{m + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$$

2. **Tìm tất cả các điểm tụ của tập**

$$H_1 = \{\frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}; m = 1, 2, ..., 2^n\}, \quad H_2 = \{\frac{n}{1 + mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

3. **Chứng minh rằng với một tập $H \subset \mathbb{R}$ bất kì, tập tất cả các điểm cô lập của H là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.**

4. **Cho $f, g : H \to \mathbb{R}$ là các hàm bị chặn trên tập $H \subset \mathbb{R}$. Chứng minh rằng**

$$\sup_{x \in H}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in H} f(x) + \sup_{x \in H} g(x)$$

$$\inf_{x \in H}(f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in H} f(x) + \inf_{x \in H} g(x).$$

1.3 Dãy số thực và giới hạn dãy số thực

1.3.1 Khái niệm về dãy số và giới hạn của dãy

Định nghĩa 1.3.1 *Một ánh xạ từ tập các số tự nhiên $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., n, ...\}$ vào $\mathbb{R}$:*

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

được gọi là dãy số thực vô hạn. Kí hiệu $u_n = u(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, u_n được gọi là số hạng thứ n của dãy số. Dãy số u thường được kí hiệu dưới một trong các dạng sau:

$$u_n,\ n = 1, 2, 3, ... \quad \textit{hoặc} \quad u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

$$\{u_n\}_{n=1,2,...} \quad \textit{hoặc} \quad \{u_n\}_1^\infty \quad \textit{hoặc} \quad \{u_n\}$$

• Một dãy số được gọi là *dãy dừng* nếu tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho từ số hạng đó trở đi mọi phần tử của dãy đều bằng nhau.
• Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ được gọi là *dãy đơn điệu tăng* (*tăng thực sự*) nếu

$$u_n \le u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (u_n < u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*).$$

• Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ được gọi là *dãy đơn điệu giảm* (*giảm thực sự*) nếu

$$u_n \ge u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (u_n > u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Định nghĩa 1.3.2 *Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ (hay ánh xạ $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$) được gọi là bị chặn trên nếu*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad u_n \le M\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$được gọi là bị chặn dưới nếu

$$\exists M' \in \mathbb{R} : \quad u_n \ge M'\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới được gọi là bị chặn, nói cách khác dãy $\{u_n\}_1^\infty$ bị chặn nếu tồn tại số K sao cho

$$|u_n| = |u(n)| \le K \quad \text{với mọi} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 1.3.1

1. Dãy $u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}^*$ là dãy tăng thực sự.
   Ngoài ra $\frac{3}{2} \leq u_n < 2 \quad$ với mọi $\quad n \in \mathbb{N}^*$ nên $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy bị chặn.

2. Cho số thực $a > 0$ và $a \neq 1$. Dãy $\{u_n\}_1^\infty$ được xác định như sau

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \text{ với mọi } \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

   Bằng quy nạp ta có thể chứng minh $u_n > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, dãy $\{u_n\}_1^\infty$ bị chặn dưới.
   Mặt khác do $u_n > 1$ suy ra $\frac{1}{u_n} < u_n$, do đó

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) < \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

   dãy $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy đơn điệu giảm thực sự.

Định nghĩa 1.3.3 *Cho dãy số $\{u_n\}_1^\infty$, ta nói dãy hội tụ và có giới hạn bằng $L \in \mathbb{R}$, kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \textit{hoặc} \quad u_n \to L,$$

nếu cho trước $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(\epsilon)$ (n_0 phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có:

$$|u_n - L| < \epsilon.$$

Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ không hội tụ được gọi là dãy phân kì.

Ví dụ 1.3.2

1. Cho dãy dừng $\{u_n\}_1^\infty$ (các số hạng của dãy từ số hạng thứ n_0 nào đó trở đi đều bằng nhau và bằng a). Khi đó dãy $\{u_n\}_1^\infty$ hội tụ đến a.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

   Thật vậy với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, ta chọn số tự nhiên $n_0(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$ (có vô số số tự nhiên như vậy). Khi đó $\frac{1}{n_0(\epsilon)} < \epsilon$ và với mỗi $n > n_0(\epsilon)$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{n_0(\epsilon)} < \epsilon.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

   Tương tự như ví dụ trước với $\epsilon > 0$ tuỳ ý, ta chọn số tự nhiên $n_0(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$. Khi đó với mỗi $n > n_0(\epsilon)$

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0(\epsilon)} < \epsilon.$$

Nhận xét rằng trong định nghĩa trên bất đẳng thức $|u_n - L| < \epsilon$ cũng có nghĩa là $u_n \in U_\epsilon(L)$ (thuộc lận cận bán kính ϵ của L). Do vậy ta có thể phát biểu định nghĩa trên dưới dạng tương đương như sau

Định nghĩa 1.3.4 *Cho dãy số $\{u_n\}_1^\infty$, ta nói dãy hội tụ và có giới hạn bằng $L \in \mathbb{R}$, nếu cho trước một lận cận $U_\epsilon(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại một số tự nhiên N sao cho với mỗi $n \geq N$ ta có $u_n \in U_\epsilon(L)$.*

Như vậy nếu dãy $\{u_n\}_1^\infty$ hội tụ và có giới hạn bằng L, khi đó mọi khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ đều chứa tất cả các số hạng của dãy, có thể trừ ra một số hữu hạn các số hạng. Định lí sau là hệ quả của nhận xét này.

Định lí 1.3.1 *Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.*

Định lí 1.3.2 *Nếu dãy số $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ, khi đó giới hạn của dãy là duy nhất.*

Chứng minh Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, trong đó $a \neq b$. Chọn $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$.
Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nên tồn tại số tự nhiên N_1 để với mọi $n > N_1: \ |a_n - a| < \epsilon$.
Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, tồn tại số tự nhiên N_2 để với mỗi $n > N_2: \ |a_n - b| < \epsilon$.
Chọn $n_0 = \max(N_1, N_2)$, khi đó với $n > n_0$:

$$|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon < 2\epsilon = |a-b|.$$

Điều đó vô lí. Vậy $a = b$. ■

Định nghĩa 1.3.5 *Ta nói dãy $\{u_n\}_1^\infty$ có giới hạn bằng $+\infty$ và kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty,$$

nếu cho trước một số thực $K > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(K)$ (n_0 phụ thuộc vào K) sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có:

$$u_n > K.$$

Tương tự dãy $\{u_n\}_1^\infty$ *có giới hạn bằng* $-\infty$ *và kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty,$$

nếu cho trước một số thực $K > 0$ *tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên* $n_0 = n_0(K)$ *(*n_0 *phụ thuộc vào* K*) sao cho với mọi* $n \geq n_0$ *ta có:*

$$u_n < -K.$$

Chú ý rằng khi giới hạn của dãy bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ cũng như khi dãy không có giới hạn, ta nói dãy đó phân kì.

Ví dụ 1.3.3

Các giới hạn sau được trực tiếp suy ra từ định nghĩa

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n) = -\infty.$

Nhận xét rằng với các khái niệm mở rộng về lân cận của $+\infty$ cũng như $-\infty$, tương tự như định nghĩa 1.3.4, định nghĩa trên có thể phát biểu như sau

Định nghĩa 1.3.6 *Ta nói dãy* $\{u_n\}_1^\infty$ *có giới hạn bằng* $+\infty$ *và kí hiệu:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty,$$

nếu cho trước một lận cận $U(+\infty)$ *tuỳ ý của* $+\infty$*, tồn tại một số tự nhiên* n_0 *sao cho với mọi* $n \geq n_0$ *ta có* $u_n \in U(+\infty)$*.*

Tương tự $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ *nếu cho trước một lận cận* $U(-\infty)$ *tuỳ ý của* $-\infty$*, tồn tại một số tự nhiên* n_0 *sao cho với mọi* $n \geq n_0$ *ta có* $u_n \in U(-\infty)$*.*

Định lí sau là hiển nhiên

Định lí 1.3.3 *Nếu dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *hội tụ, các số hạng của dãy là các số dương* $a_n > 0$ *với mọi* $n = 1, 2, \ldots$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Tương tự nếu các số hạng của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ *là các số âm và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty.$$

Đảo lại nếu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$$

1.3.2 Dãy con và lim sup, lim inf của dãy số

Định nghĩa 1.3.7 *Cho dãy* $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$. *Giả sử*

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

là một dãy tăng thực sự các số tự nhiên nào đó, khi đó dãy số

$$u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}, ..., u_{n_k}, ...$$

được gọi là dãy con của dãy đã cho và kí hiệu là $\{u_{n_k}\}$ *hoặc* $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$.

Từ định nghĩa trên về dãy con dễ dàng chứng minh được

Định lí 1.3.4 *Nếu dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *khi đó mọi dãy con* $\{a_{n_k}\}$ *cũng hội tụ và có chung giới hạn*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Người ta thường sử dụng định lí này để chứng minh một dãy số phân kì: nếu dãy $\{a_n\}_1^\infty$ tồn tại hai dãy con hội tụ tới hai giới hạn khác nhau khi đó dãy $\{a_n\}_1^\infty$ phân kì.

Ví dụ 1.3.4

Cho dãy $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+n+1}, n = 1, 2, ...$
Dãy con $u_n = a_{2n} = \dfrac{4n^2}{8n^2 + 2n + 1}, n = 1, 2, ...$ hội tụ tới $\frac{1}{2}$.
Dãy con $v_n = a_{2n-1} = -\dfrac{4n^2 - 4n + 1}{8n^2 - 6n + 2}, n = 1, 2, ...$ hội tụ tới $-\frac{1}{2}$.
Vậy dãy đã cho phân kì.

Định nghĩa 1.3.8 *Cho dãy số $\{u_n\}_1^\infty$. Ta nói $a \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}_1^\infty$, nếu tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.*
Giới hạn riêng lớn nhất của dãy $\{u_n\}_1^\infty$ được kí hiệu là $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ hoặc $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.
Giới hạn riêng nhỏ nhất của dãy $\{u_n\}_1^\infty$ được kí hiệu là $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ hoặc $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.

Tương tự như khái niệm điểm tụ, ta có thể chứng minh tập các giới hạn riêng của dãy là một tập đóng và do vậy nếu $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy bị chặn, khi đó nó có giới hạn riêng lớn nhất, giới hạn riêng nhỏ nhất. Đối với dãy không bị chặn trên (chặn dưới), ta quy nước $+\infty(-\infty)$ là giới hạn riêng lớn nhất (nhỏ nhất) của dãy. Hiển nhiên điều kiện cần và đủ để dãy có giới hạn là giới hạn riêng lớn nhất bằng giới hạn riêng nhỏ nhất

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n = a.$$

Tương tự như cận trên đúng, cận dưới đúng, ta dễ dàng chứng minh được kết quả sau

Định lí 1.3.5 *Cho $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy bị chặn, $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi*
• *Tồn tại tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.*
• *Với bất kì $\varepsilon > 0$, chỉ tồn tại hữu hạn (hoặc không tồn tại) các số hạng của dãy lớn hơn $a + \varepsilon$.*
Tương tự, $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = b$ khi và chỉ khi
• *Tồn tại tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.*
• *Với bất kì $\varepsilon > 0$, chỉ tồn tại hữu hạn (hoặc không tồn tại) các số hạng của dãy bé hơn $a - \varepsilon$.*

Ví dụ 1.3.5

1. Cho dãy số $a_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, khi đó $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{1}{2}$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\frac{1}{2}$.

   Thật vậy dãy con $a_{2n} = \frac{2n}{4n+1}$ có giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{2}$. Mặt khác $\left|a_n\right| = \left|\frac{n}{2n+1}\right| < \frac{1}{2}$, theo định lí vừa phát biểu trên đây suy ra $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{1}{2}$. Tương tự, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\frac{1}{2}$.

2. Đối với dãy số $a_n = \sin n\frac{\pi}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n\frac{\pi}{2} = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n\frac{\pi}{2} = -1$.

   Thật vậy dãy con a_{4n+1} có giới hạn bằng 1, dãy con a_{4n-1} có giới hạn bằng -1 và $|a_n| \leq 1$. Suy ra 1 là giới hạn riêng lớn nhất, -1 là giới hạn riêng nhỏ nhất của dãy đã cho.

1.3.3 Tính chất và các phép toán về giới hạn dãy số

Cho dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Từ định nghĩa dãy hội tụ ta suy ra các tính chất sau

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$.
- Nếu $a_n > 0$ với mọi $n > n_0$ nào đó, khi đó giới hạn $a \geq 0$.
- Nếu $a > 0$, khi đó tồn tại số tự nhiên n_0, sao cho với mọi $n > n_0$, $a_n > 0$.

Ta có định lí sau về các phép toán giữa các dãy hội tụ

Định lí 1.3.6 *Giả sử dãy $\{a_n\}_1^\infty$ và dãy $\{b_n\}_1^\infty$ hội tụ*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Khi đó các dãy $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Hơn nữa nếu $b \neq 0$ khi đó dãy $\frac{a_n}{b_n}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Chú ý rằng định lí vẫn đúng (bạn đọc tự chứng minh) nếu ta quy ước như sau:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty; (-\infty) + (-\infty) = -\infty; (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty; (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty; (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Các dạng còn lại

$$(+\infty) - (+\infty); \quad \frac{+\infty}{+\infty}; \quad \frac{-\infty}{+\infty}; \quad 0 \cdot (+\infty); \quad \frac{0}{0}$$

thường được gọi là các dạng vô định.
Chứng minh Ta sẽ chứng minh nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Khi đó $\{a_n \cdot b_n\}$ cũng hội và $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. Các khẳng định khác được chứng minh tương tự.
Thật vậy cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Theo giả thiết dãy $\{b_n\}$ hội tụ nên nó bị chặn, suy ra tồn tại số M sao cho $|a| \leq M$ và $|b_n| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq$$

$$\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \leq M \cdot |a_n - a| + M \cdot |b_n - b|.$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n > n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Do đó

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq M \cdot |a_n - a| + M \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \ \forall n > n_0. \ \blacksquare$$

Định lí 1.3.7 *Giả thiết rằng dãy $\{a_n\}_1^\infty$ có giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Khi đó dãy $\{|a_n|\}_1^\infty$ cũng có giới hạn và*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Chứng minh

Ta hạn chế chỉ chứng minh định lí trong trường hợp a hữu hạn. (Trường hợp $a = \pm\infty$ bạn đọc tự chứng minh). Khi đó định lí được suy ra từ bất đẳng thức

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|. \quad \blacksquare$$

Định lí sau là hiển nhiên (bạn đọc tự chứng minh) và nó được sử dụng không ít lần trong suốt giáo trình này

Định lí 1.3.8 *Cho hai dãy số* $\{a_n\}_1^\infty$ *và* $\{b_n\}_1^\infty$*. Giả sử dãy* $\{a_n\}_1^\infty$ *bị chặn và*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Khi đó dãy $\{a_n \cdot b_n\}_1^\infty$ *cũng hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

<u>Bài tập</u>

1. Hãy cho một ví dụ về dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho dãy trị tuyệt đối $\{|a_n|\}_1^\infty$ có giới hạn, song dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không có giới hạn.

2. Chứng minh rằng hoán vị các số hạng của một dãy hội tụ ta thu được một dãy cũng hội tụ và có cùng giới hạn.

Định lí 1.3.9 (Nguyên lí kẹp) *Cho 3 dãy số* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *và* $\{c_n\}$ *thoả mãn các điều kiện*

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \text{với mọi} \quad n \ge n_0,$$

n_0 *là một số tự nhiên nào đó. Giả thiết tiếp rằng*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Khi đó dãy $\{c_n\}_1^\infty$ *cũng tồn tại giới hạn và*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Chứng minh

Cho $\epsilon > 0$ tuỳ ý. Từ nhận xét sau định nghĩa 1.3.4, tồn tại N_1 và N_2 sao cho với mọi $n > \max(N_1, N_2)$, các số hạng a_n và b_n của 2 dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ đều thuộc lân cận $U_\epsilon(a)$ của a. Mặt khác theo giả thiết $a_n \le c_n \le b_n$ với mọi $n \ge n_0$, suy ra nếu chọn $N_\epsilon = \max(n_0, N_1, N_2)$ và khi $n > N_\epsilon$ các số hạng c_n của dãy $\{c_n\}$ cũng thuộc lân cận $U_\epsilon(a)$. Nói cách khác với $n > N_\epsilon$:

$$|c_n - a| < \epsilon.$$

Suy ra điều phải chứng minh: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a.$ ■

Nhận xét rằng định lí 1.3.8 được suy ra từ nguyên lí kẹp nói trên. Dãy $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn, suy ra

$$|a_n \cdot b_n| \le M|b_n| \quad \text{hay} \quad -M|b_n| \le a_n \cdot b_n \le M|b_n|,$$

trong đó $|a_n| \le M \ \forall n$ và theo định lí 1.3.7, $\lim\limits_{n\to\infty} M|b_n| = 0$. Áp dụng nguyên lí kẹp, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$

Ví dụ 1.3.6

1. Với $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Thật vậy, xét trường hợp $a > 1$

$$a = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \to 0.$$

   Áp dụng nguyên lí kẹp, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
   Trường hợp $0 < a < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \quad \text{hay} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

2. Tương tự như ví dụ trước, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ được suy ra từ nguyên lí kẹp và các bất đẳng thức

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \quad \text{hay} \quad 0 < (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1}.$$

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, với

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^3+n+1} + \frac{n^2+2}{n^3+n+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n+n}.$$

   Dễ dàng chứng minh các bất đẳng thức sau

$$\frac{n(n^2+1)}{n^3+n+n} < u_n < \frac{n(n^2+n)}{n^3+n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

   Áp dụng nguyên lí kẹp, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Định lí 1.3.10 (Dãy đơn điệu)

1. *Nếu dãy $\{u_n\}_1^\infty$ đơn điệu tăng và bị chặn trên, khi đó dãy hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup_n u_n.$$

2. *Nếu dãy $\{u_n\}_1^\infty$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới, khi đó dãy hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf_n u_n.$$

Chú ý $\sup\limits_n u_n$ được hiểu là cận trên đúng, $\inf\limits_n u_n$ được hiểu là cận dưới đúng của tập hợp gồm các phần tử $\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$.

Chứng minh

Từ định nghĩa về cận trên đúng (supremum), bất kì một lân cận nào của $L = \sup\limits_n u_n$ cũng chứa một phần tử u_{n_0} nào đó. Theo giả thiết dãy $\{u_n\}_1^\infty$ đơn điệu tăng

$$u_{n_0} \le u_{n_0+1} \le u_{n_0+2} \le \ldots$$

nên với mọi $n > n_0$, các số hạng u_n cũng thuộc lân cận nói trên. Vậy dãy $\{u_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L = \sup\limits_n u_n$. Trường hợp dãy đơn điệu giảm được chứng minh tương tự. ■

Ví dụ 1.3.7

1. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau

   $$a > 0, u_1 = \sqrt{a}, u_n = \sqrt{a + u_{n-1}} \quad \forall n > 1.$$

   Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh $u_{n+1} > u_n$ $\forall n \ge 1$, nói cách khác dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng. Mặt khác

   $$u_n = \sqrt{a + u_{n-1}} < \sqrt{a + u_n} \;\Rightarrow u_n^2 < a + u_n \quad \text{hay} \quad u_n < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2},$$

   dãy số $\{u_n\}$ bị chặn trên. Áp dụng định lí vừa chứng minh, suy ra tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$. Từ đẳng thức $u_n = \sqrt{a + u_{n-1}}$ cho $n \to \infty$ ta được

   $$x = \sqrt{a + x} \quad \text{suy ra dãy có giới hạn} \quad x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

2. Ta sẽ chứng minh dãy

   $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   đơn điệu tăng và bị chặn. Khi đó dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và ta kí hiệu giới hạn của dãy là số e:

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy với tích của $n+1$ số dương, ta thấy dãy a_n đơn điệu tăng:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1 <$$

$$< \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

hay $a_n < a_{n+1},\ \forall n > 1$. Để chứng minh dãy a_n bị chặn, xét

$$\frac{1}{4}a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) <$$

$$< \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

Suy ra $a_n < 4$ với mọi n. Vậy dãy a_n bị chặn kéo theo dãy đó hội tụ tới số e. Người ta chứng minh được rằng e là số vô tỉ (thậm chí là số siêu việt) và

$$e \approx 2,71828182845...$$

Định lí 1.3.11 (Bolzano) *Một dãy số bất kì đều chứa một dãy con mà dãy con đó có giới hạn (giới hạn đó có thể bằng $-\infty$ hoặc $+\infty$).*

Mọi dãy số bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh

I. Xét trường hợp dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không bị chặn trên. Khi đó dễ dàng chọn ra được một dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

Hoàn toàn tương tự đối với dãy không bị chặn dưới.

II. Bây giờ ta giả thiết dãy $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn. Nếu dãy đó chứa một dãy con dừng (một dãy con mà mọi phần tử của dãy đều bằng nhau), trong trường hợp đó dãy con dừng chính là dãy con hội tụ. Do vậy ta sẽ hạn chế việc chứng minh định lí trong trường hợp dãy đã cho không chứa một dãy con dừng nào cả. Điều đó cũng có nghĩa là dãy $\{a_n\}_1^\infty$ xét về mặt tập hợp là tập vô hạn. Khi đó theo định lí 1.2.4 (cũng mang tên Bolzano), tập $\{a_n\}_1^\infty$ có điểm tụ α nào đó. Hiển nhiên α là số hữu hạn do dãy $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn. Bây giờ ta sẽ xây dựng cách chọn ra một dãy con hội tụ tới α.

Xét một lân cận bán kính bằng 1 của α: $U_1(\alpha) = (\alpha - 1, \alpha + 1)$, do α là điểm tụ nên tồn tại ít nhất một phần tử a_{n_1} nào đó của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho $a_{n_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$.

Xét tiếp một lân cận bán kính bằng $\frac{1}{2}$ của α: $U_{\frac{1}{2}}(\alpha) = (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2})$, do α là điểm tụ nên tồn tại ít nhất một phần tử a_{n_2} nào đó của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho $a_{n_2} \in (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2})$ và $n_1 < n_2$.

Bằng quy nạp giả sử $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_{k-1}}$ đã được chọn từ dãy $\{a_n\}_1^\infty$ và $n_1 < n_2 < ... < n_{k-1}$. Xét lân cận bán kính bằng $\frac{1}{k}$ của α: $U_{\frac{1}{k}}(\alpha) = (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k})$, do α là điểm tụ nên tồn tại ít nhất một phần tử a_{n_k} nào đó của dãy $\{a_n\}_1^\infty$ sao cho $a_{n_k} \in (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k})$ và $n_{k-1} < n_k$.

....

Cứ tiếp tục mãi như vậy, ta thu được một dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ có tính chất

$$a_{n_k} \in (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k}) \quad \text{hay} \quad |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \quad k = 1, 2, ...$$

Suy ra dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ và $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. ■

Định nghĩa 1.3.9 *Dãy số $\{u_n\}_1^\infty$ được gọi là dãy Cauchy nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ (n_0 phụ thuộc vào ϵ) sao cho*

$$|u_n - u_m| < \epsilon \quad \textit{với tất cả} \quad m, n > n_0.$$

Ý nghĩa hình học của dãy Cauchy là khoảng cách giữa hai số hạng u_n và u_m của dãy Cauchy nhỏ tùy ý khi m, n đủ lớn.

Định lí 1.3.12 (Cauchy) *Dãy số $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Chứng minh Điều kiện cần. Giả thiết rằng dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Cho $\epsilon > 0$ tuỳ ý, khi đó tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $k > n_0$ ta luôn có

$$|a_k - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Như vậy với mọi $m, n > n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \alpha) + (\alpha - a_m)| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Điều đó chứng minh dãy $\{a_n\}_1^\infty$ là dãy Cauchy.
Điều kiện đủ. Giả thiết dãy $\{a_n\}_1^\infty$ là dãy Cauchy. Trước hết ta chứng minh dãy đó bị chặn. Sử dụng định nghĩa dãy Cauchy với $\epsilon = 1$, tồn tại số tự nhiên N_1 để với mọi $n > N_1$

$$|a_n - a_{N_1}| < 1 \quad \text{hay} \quad a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1.$$

Điều đó có nghĩa là dãy $a_{N_1+1}, a_{N_1+2}, a_{N_1+3}, ...$ bị chặn. Do vậy cùng với hữu hạn số hạng

$$a_1, a_2, ..., a_{N_1}$$

dãy đã cho $\{a_n\}_1^\infty$ bị chặn.

Theo định lí Bolzano nói trên, dãy bị chặn $\{a_n\}_1^\infty$ chứa một dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Ta sẽ chỉ ra dãy ban đầu $\{a_n\}_1^\infty$ cũng hội tụ và có giới hạn đúng bằng α (giới hạn của dãy con).

Thật vậy cho $\epsilon > 0$ tuỳ ý, khi đó tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $m, n > n_0$ ta luôn có

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mặt khác do dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ nên tồn tại số tự nhiên n_{k_0} nào đó sao cho $n_{k_0} > n_0$ và

$$|a_{n_{k_0}} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Khi đó với mọi $n > n_0$

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Vậy dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha.$ ■

Từ định lí Cauchy ta có nhận xét, để khẳng định một dãy số hội tụ, người ta không nhất thiết phải biết giới hạn của dãy mà chỉ cần biết mối quan hệ giữa các số hạng của dãy với nhau.

Ví dụ 1.3.8

Xét dãy

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, ...$$

Trước hết ta chứng minh dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không hội tụ. Để chứng minh điều đó ta khẳng định rằng dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không là dãy Cauchy. Thật vậy xét

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Điều đó đúng với mọi số tự nhiên n, suy ra dãy $\{a_n\}_1^\infty$ không là dãy Cauchy. Theo định lí trên dãy không hội tụ.

Tuy nhiên do dãy $\{a_n\}_1^\infty$ đơn điệu tăng, vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Sử dụng định nghĩa hãy chứng minh các giới hạn sau

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \quad$ (với $\alpha > 0$)

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0 \quad$ (với $\alpha < 0$)

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad$ (với $|q| < 1$)

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0 \quad$ (với $|q| < 1$)

2. Chứng minh rằng

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad$ (với $q > 1$)

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty \quad$ (với $\alpha > 0, q > 1$)

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0.$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty.$

3. Cho dãy $\{u_n\}$ hội tụ và dãy $\{v_n\}$ phân kì. Hỏi các dãy $\{u_n + v_n\}$ và $\{u_n \cdot v_n\}$ hội tụ hay phân kì?

4. Cho dãy số $\{a_n\}_1^\infty$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tồn tại và bằng L.

5. Cho dãy số dương $\{a_n\}_1^\infty$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

6. Cho dãy $\{a_n\}_1^\infty$ hội tụ, các số hạng của dãy là các số dương $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

7. Tính các giới hạn dưới đây

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cos n\pi$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} n\cos\frac{1}{n}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^n$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{2}{n})^n$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{n}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{2n})^n$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n^2})^n$

8. Với $0 < a < b$, tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$.

9. Hãy tìm các giới hạn sau

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\big(a+\frac{1}{n}\big)^4 - a^4\Big)$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2-n})$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+k^2})$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

10. Cho dãy số $\{a_n\}$, biết $a_1 = 2$, $\quad a_1+a_2+\cdots+a_n = n^2a_n$. Hãy tính
$$\lim_{n\to\infty} n^2a_n$$

11. Cho dãy số $\{a_n\}$, biết $a_1 = 0, a_2 = 1$ và $\quad a_{n+1}-2a_n+a_{n-1} = 2$ với $n \geq 2$. Tìm số hạng thứ n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

12. Cho dãy số $x_n = \operatorname{arctg} x_{n-1}$, $\quad x_0 = a > 0$. Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

13. Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $0 < x_0 < 1$ tùy ý, $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

14. Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_0 > 0$ tùy ý, $x_n = \ln(1 + x_{n-1})$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

15. Tìm giới hạn của dãy số

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}^{n \text{ lớp căn}} \quad (\text{với} \quad a > 0).$$

16. Cho $0 < a < b$ và các dãy số

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \quad \text{với} \quad x_0 = a, y_0 = b$$

Chứng tỏ rằng hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

17. Cho dãy số $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$ với $x_0 > 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

18. Cho dãy số $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$ với $x_0 > 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

19. Chứng minh rằng dãy các khoảng đóng $[a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots$ lồng nhau ($[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots$) và thắt lại ($b_n - a_n \to 0$ khi $n \to \infty$) có duy nhất một phần tử chung.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. (d) Sử dụng định nghĩa, chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0 \quad$ (với $|q| < 1$).

   Bài toán tương đương với việc chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n} = +\infty$ với $a > 1$.

   Với $a > 1$, sử dụng bất đẳng thức $a^n = (1+\alpha)^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$ ta được đ.p.c.m.

2. (b) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty \quad$ (với $\alpha > 0, q > 1$)

   Hướng dẫn: Viết $\dfrac{q^n}{n^\alpha} = \left(\dfrac{a^n}{n}\right)^\alpha$, với $a = q^{\frac{1}{\alpha}}$ và sử dụng bài tập 1. (d).

   (e) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

   Hướng dẫn: Đặt $\sqrt[n]{n} = 1+x, \quad n = (1+x)^n > \frac{n(n-1)}{2}x^2 \Rightarrow (\sqrt[n]{n}-1)^2 < \frac{2}{n-1}$.

   (f) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$.

   Hướng dẫn: $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}} > \frac{\ln n}{n} + 1 \Rightarrow n(\sqrt[n]{n} - 1) > \ln n$.

6. Giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

   Hướng dẫn: Sử dụng định nghĩa chứng minh $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$, xét trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$. Phần còn lại hãy sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{n}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

7. (a) Không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} n\cos n\pi$ và $\lim\limits_{n\to\infty} n\cos\frac{1}{n} = \infty$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n})^n = \dfrac{1}{e^2}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{n} = 0$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2n})^n = \sqrt{e}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n = 0$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$ nếu $0 < a < b$.

9. (a) $4a^3$
   (b) $\frac{3}{2}$
   (c) $\frac{1}{2}$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = 1.$
   Hướng dẫn: $\sqrt{n^2+n} - n \to \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{n^2+n} = n + \frac{1}{2} + \alpha_n$, trong đó $\alpha_n \to 0$
   (e) 0
   (f) 0
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 4$
   Hướng dẫn: Sử dụng $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 4$
    Hướng dẫn: $a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} = \cdots = \frac{4}{n(n+1)}$

11. Cho dãy số $\{a_n\}$, biết $a_1 = 0, a_2 = 1$ và $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ với $n \geq 2$. Tìm số hạng thứ n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
    Hướng dẫn: $(a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1}) = 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2n - 1$, suy ra $a_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) = (n-1)^2 \to \infty$

12. Với $x_0 = a > 0$, dãy số $x_n = \mathrm{arctg} x_{n-1}$ đơn điệu giảm. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

13. Với $0 < x_0 < 1$, dãy số $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

    Hướng dẫn: dãy số $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14. 0

15. $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.
    Hướng dẫn: dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên, chẳng hạn bởi số dương $K = \max(2, a)$

16. ***Hướng dẫn***: Dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và dãy $\{y_n\}$ đơn điệu giảm.

17. ***Hướng dẫn***: dãy đơn điệu tăng và chứng minh nó không bị chặn.

18. ***Hướng dẫn***: dãy đơn điệu giảm.

Chương 2

Hàm số, giới hạn hàm số và hàm liên tục

2.1 Hàm số sơ cấp

2.1.1 Hàm thực một biến số

Định nghĩa 2.1.1 *Ánh xạ* $f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ *được gọi là hàm số thực một biến số thực và gọi tắt là hàm một biến số.* X *được gọi là tập xác định của hàm số* f*, kí hiệu* $D_f = X$*. Tập ảnh* $f(X) \in \mathbb{R}$ *được gọi là tập giá trị của hàm số* f*, kí hiệu* $R_f = f(X)$*.*
$x \in D_f$ *được gọi là biến độc lập hay đối số của hàm* f*, ảnh* $f(x) \in R_f$ *được gọi là biến phụ thuộc hay hàm số. Để minh họa hàm* f *ứng mỗi* $x \in D_f$ *với phần tử xác định* $f(x) \in R_f$*, ta thường viết* $y = f(x)$ *hay*

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x).$$

Ví dụ 2.1.1

1. **Á**nh xạ đồng nhất $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$ hoặc kí hiệu $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   f còn được gọi là hàm đồng nhất trên $\mathbb{R}$.

2. $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \qquad \Big(\operatorname{sign}(x) \text{ được gọi là hàm dấu}\Big).$
   Hiển nhiên $|x| = x \operatorname{sign}(x)$.

3. Hàm $E(x) = [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $[x]$ kí hiệu phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

• Trong mặt phẳng dựng hai trục số thực $x'Ox, y'Oy$ vuông góc nhau tại O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ là các véc tơ đơn vị của các trục $x'Ox, y'Oy$. Nếu quay véc tơ $\overrightarrow{i}$ theo chiều dương (chiều ngược với chiều kim đồng hồ) góc 90^0 mà chiều của $\overrightarrow{i}$ trùng với chiều của $\overrightarrow{j}$, ta nói $x'Ox, y'Oy$ lập thành hệ trục tọa độ Đề các thuận. Trong giáo trình này ta chỉ xét hệ trục tọa độ Đề các thuận và thường gọi ngắn gọn xOy là hệ trục tọa độ Đề các.

Đồ thị của hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ trong hệ trục tọa độ Đề các là tập các điểm $M(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ với mọi $x \in X$. Ta thường minh họa đồ thị hàm f là một đường cong vẽ trong hệ trục tọa độ Đề các.

• Cho ba tập hợp $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}, Z \subset \mathbb{R}$ và các hàm số

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z.$$

Khi đó ánh xạ $X \to Z$

$$x \mapsto g(f(x))$$

được gọi là *hàm số hợp* của g và f, kí hiệu hàm hợp đó là $g \circ f$. (Chú ý đến thứ tự của các hàm f và g).

Ví dụ 2.1.2

Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ và $g(x) = 3x + 2$. Khi đó

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = 3f(x) + 2 = 3(x^3 + x + 1) + 2 = 3x^3 + 3x + 5$$

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = g^3(x) + g(x) + 1 = (3x + 2)^3 + 3x + 2 + 1$$

• Cho hai tập hợp $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ và một song ánh $f : X \to Y$. Khi đó tồn tại ánh xạ ngược của f, ta thường gọi là *hàm ngược* của hàm số f và kí hiệu

$$f^{-1} : Y \to X$$

Như đã biết từ học phần trước, hàm ngược của hàm số f cũng là một song ánh từ Y lên X, hệ thức cơ bản của hàm ngược

$$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x \ \forall x \in X, \quad \big(f \circ f^{-1}\big)(y) = y \ \forall y \in Y.$$

Từ đây ta suy ra nếu điểm $M(x, y)$ thuộc đồ thị hàm số f thì điểm $M'(y, x)$ thuộc đồ thị hàm ngược f^{-1}. Trong hệ tọa độ Đề các, điểm $M(x, y)$ và điểm $M'(y, x)$ đối xứng nhau qua đường phân giác $y = x$, suy ra đồ thị hàm số f và đồ thị hàm ngược f^{-1} đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

2.1.2 Các hàm sơ cấp cơ bản và hàm sơ cấp

Chúng ta đã làm quen với một số hàm sơ cấp cơ bản trong chương trình toán bậc phổ thông

• Hàm không đổi: $f(x) = C \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
• *Hàm lũy thừa* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ là số thực khacs 0 cố định).
Hàm lũy thừa $f(x) = x^\alpha$ là một song ánh từ $\mathbb{R}^+$ lên $\mathbb{R}^+$, do vậy nó có hàm ngược

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}},$$

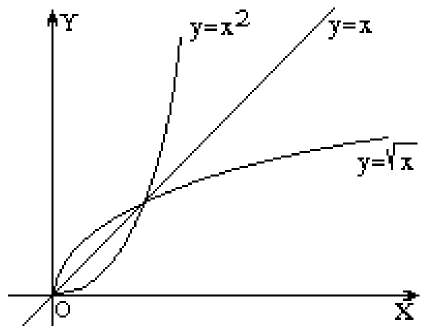
hàm ngược f^{-1} cũng là hàm lũy thừa.
Chú ý rằng người ta thường quy ước

Nếu $\alpha \in \mathbb{N}$ là số tự nhiên, miền xác định của hàm là toàn bộ $\mathbb{R}$, chẳng hạn $f(x) = x^3$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Nếu $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ là số nguyên âm, miền xác định của hàm là tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ví dụ hàm $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ xác định với mọi $x \neq 0$.

Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ là số vô tỉ, miền xác định của hàm là tập $\mathbb{R}^+$.

Người ta cũng quy ước, khi hàm lũy thừa được viết dưới dạng $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ (m, n là các số nguyên), miền xác định của hàm tùy thuộc vào tính chẵn, lẻ của m, n. Chẳng hạn khi $m \geq 0$ và n là số tự nhiên chẵn khi đó miền xác định của hàm là $\mathbb{R}^+$, tuy nhiên nếu n là số tự nhiên lẻ, miền xác định của hàm là toàn bộ $\mathbb{R}$.

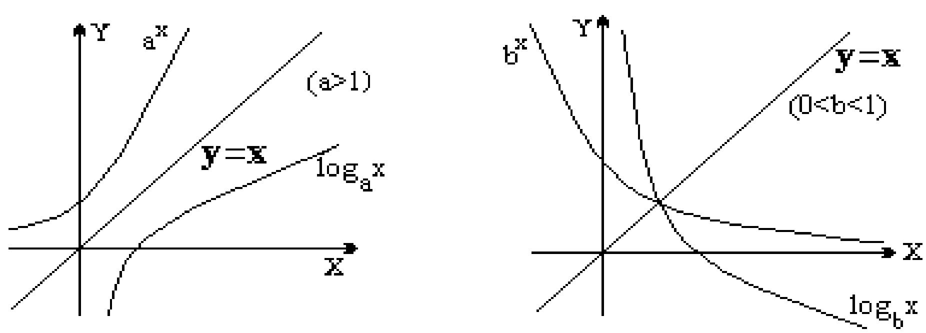


Hình 2.1: Hàm lũy thừa

• *Hàm số mũ* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$. Hàm số mũ là một song ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}^+$, do vậy nó tồn tại hàm ngược $f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, kí hiệu $f^{-1}(x)=\log_a x$. Người ta gọi hàm ngược của hàm số mũ là *hàm logarit*. Nó thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\big(f^{-1}\circ f\big)(x)=x \ \ \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{hay} \quad \log_a a^x = x \ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\big(f\circ f^{-1}\big)(x)=x \ \ \forall x\in\mathbb{R}^+ \quad \text{hay} \quad a^{\log_a x}=x \ \ \forall x\in\mathbb{R}^+.$$



Hình 2.2: Hàm mũ, hàm logarit

• *Các hàm lượng giác* $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ chúng ta đã biết trong chương trình phổ thông.

Bây giờ chúng ta sẽ lần lượt làm quen với các hàm lượng giác ngược

• Xét hạn chế của hàm $\sin x$ lên đoạn $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1] \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó có hàm ngược, kí hiệu arcsin

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Hàm arcsin thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\arcsin(\sin\ x) = x \ \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{và} \quad \sin(\arcsin x) = x \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

• Xét hạn chế của hàm $\cos x$ lên đoạn $[0, \pi]$

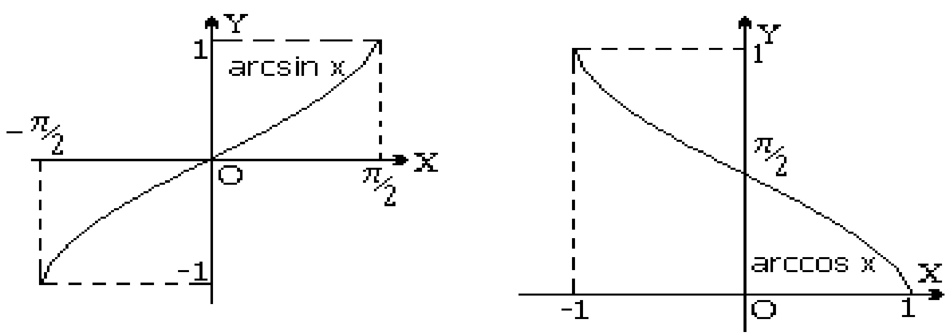
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó có hàm ngược, kí hiệu arccos

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Hàm arccos thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\arccos(\cos\ x) = x \ \ \forall x \in [0, \pi] \quad \text{và} \quad \cos(\arccos x) = x \ \ \forall x \in [-1, 1].$$



Hình 2.3: Đồ thị hàm ngược $y = \arcsin x$ và $y = \arccos x$

• Xét hạn chế của hàm $\operatorname{tg} x$ lên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\operatorname{tg} : \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \mathbb{R} \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó có hàm ngược, kí hiệu arctg

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \to \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$$

Hàm arctg thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

• Xét hạn chế của hàm $\operatorname{cotg} x$ lên khoảng $(0, \pi)$

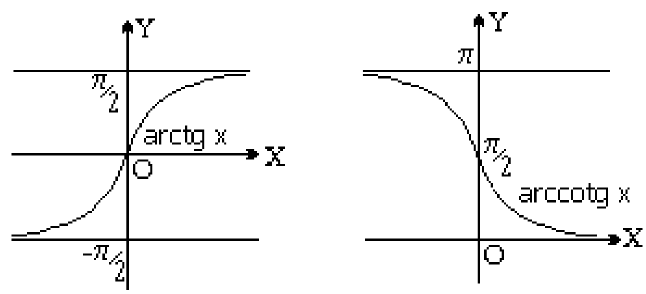
$$\operatorname{cotg} : (0, \pi) \to \mathbb{R} \quad \text{là song ánh.}$$

Do vậy nó có hàm ngược, kí hiệu arccotg

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Hàm arccotg thỏa mãn các hệ thức về hàm ngược

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \quad \forall x \in (0, \pi).$$



Hình 2.4: Đồ thị hàm ngược $y = \operatorname{arctg} x$ và $y = \operatorname{arccotg} x$

• Các hàm nhận được từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và phép hợp các hàm được gọi là *hàm số sơ cấp*.

Ví dụ 2.1.3 *(Về các hàm số sơ cấp)*

- $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R} \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$
- $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m} \quad m, n \in \mathbb{N}, a_k, b_i \in \mathbb{R} \ \ \forall i, k \in \mathbb{N}$
- $f(x) = a^{\sqrt{x^2 - x + 1}} \quad (a > 0), \qquad f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}\right)$

• Các hàm hyperbolic là các hàm số sơ cấp được sử dụng khá rộng rãi trong giải tích. Chúng được định nghĩa như sau

Hàm *cosin hyperbol* $\quad \text{ch } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Hàm *sin hyperbol* $\quad \text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Hàm *tang hyperbol* $\quad \text{th } x = \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Hàm *cotang hyperbol* $\quad \text{coth } x = \dfrac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Các hàm hyperbolic có tính chất gần giống như các hàm lượng giác (bạn đọc tự chứng minh)

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y$$

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$$

$$\text{sh}(x-y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y - \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y$$

$$\text{ch}(x-y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y - \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \quad \text{sh} 2x = 2\text{sh}\, x\, \text{ch}\, x, \quad \text{ch} 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$$

Bài tập **Chứng tỏ rằng hàm ngược của hàm $f(x) = \text{sh}\, x$ bằng**

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và hàm ngược của hàm $h(x) = \text{ch}\, x$

$$h^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty), \quad h^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

2.2 Giới hạn hàm số

2.2.1 Các khái niệm về giới hạn hàm số

Định nghĩa 2.2.1 *Cho hàm số từ tập $D \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$:*

$$f : D \to \mathbb{R},$$

x_0 là một điểm tụ của D. Ta nói $L \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn của hàm f khi $x \to x_0$ và kí hiệu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

nếu cho trước một lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho với mọi $x \in U(x_0) \cap D$ và $x \neq x_0$

$$f(x) \in U(L).$$

Định nghĩa trên cũng có thể diễn đạt (dưới dạng "ngôn ngữ $\delta - \epsilon$") như sau:

- Trường hợp L hữu hạn:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$
nếu cho trước một số $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (δ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có
$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

- Trường hợp $L = +\infty$:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$
nếu cho trước một số $K > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có
$$f(x) > K.$$

- Trường hợp $L = -\infty$:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$
nếu cho trước một số $K > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(K) > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có
$$f(x) < -K.$$

Chú ý rằng trong định nghĩa giới hạn, ta không quan tâm tới giá trị hàm số tại x_0, chỉ xét các giá trị hàm $f(x)$ tại các điểm $x \neq x_0$. Do vậy hàm $f(x)$ có thể không xác định tại chính điểm x_0 đó.

Ví dụ 2.2.1

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, xét
$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| \quad \text{với mọi} \quad x \neq 1.$$
Nếu chọn $\delta = \varepsilon$ và $0 < |x-1| < \delta$, khi đó
$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| < \varepsilon$$
thỏa mãn định nghĩa giới hạn hàm số bằng 2.

2. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, xét
$$|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{với mọi} \quad x \neq 0.$$
Do đó nếu chọn $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, mọi yêu cầu trong định nghĩa giới hạn hàm số đều thỏa mãn. (Trong ví dụ này, giá trị hàm số tại $x = 0$ không ảnh hưởng gì tới giới hạn hàm số).

Người ta còn đưa vào khái niệm giới hạn một phía của hàm $f : D \to \mathbb{R}$ và kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-)$

Định nghĩa 2.2.2 *Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của D. Ta nói $L \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn phải của hàm f*
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = L,$$
nếu cho trước một lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $x_0 < x < x_0 + \delta$ ta có
$$f(x) \in U(L).$$
Tương tự $L \in \overline{\mathbb{R}}$ là giới hạn trái của hàm f
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = L,$$
nếu cho trước một lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thoả mãn $x \in D$ và $x_0 - \delta < x < x_0$ ta có
$$f(x) \in U(L).$$

Từ hai định nghĩa trên ta có ngay định lí sau

Định lí 2.2.1 *Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, *là tồn tại các giới hạn một phía*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

và chúng cùng bằng L.

Trường hợp tập D không bị chặn trên (dưới), khi đó ta coi $+\infty(-\infty)$ là điểm tụ của D, do vậy ta cũng dẫn vào khái niệm

Định nghĩa 2.2.3

$L \in \overline{\mathbb{R}}$ *là giới hạn của hàm* f *khi* $x \to +\infty$ *và kí hiệu* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, *nếu cho trước một lân cận* $U(L)$ *tuỳ ý của* L, *tồn tại số* $K > 0$ *sao cho với mọi* x *thoả mãn* $x \in D$ *và* $x > K$ *ta có*

$$f(x) \in U(L).$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, *nếu cho trước một lân cận* $U(L)$ *tuỳ ý của* L, *tồn tại số* $K > 0$ *sao cho với mọi* x *thoả mãn* $x \in D$ *và* $x < -K$ *ta có*

$$f(x) \in U(L).$$

Ví dụ 2.2.2

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Thật vậy cho trước một lân cận bán kính $\epsilon > 0$ tuỳ ý $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, +\epsilon)$ của 0, chọn số $K = \frac{1}{\epsilon}$, khi đó với mọi $x > K$ ta có

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{K} = \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in U_\epsilon(0).$$

2. Hoàn toàn tương tự $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. Thật vậy cho trước một lân cận bán kính $\epsilon > 0$ tuỳ ý $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, +\epsilon)$ của 0, chọn số $K = \frac{1}{\epsilon}$, khi đó với mọi $x > K$ ta có

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{K} = \epsilon \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} \in U_\epsilon(0).$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Thật vậy cho trước một lân cận bán kính $\epsilon > 0$ tuỳ ý $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, +\epsilon)$ của 0, chọn số $\delta = \epsilon$, khi đó với mọi $x \in U_\delta(0), x \neq 0$ hay $0 < |x| < \epsilon$ ta có

$$|\sin x - 0| < |x| < \epsilon \Leftrightarrow \sin x \in U_\epsilon(0).$$

4. Tuy nhiên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$. Thật vậy giả sử

$$\lim_{x\to +\infty}\sin x = L,$$

Khi đó theo định nghĩa giới với hạn, với $\epsilon = \frac{1}{4}$ tồn tại một số K nào đó sao cho với mọi $x > K$ nào đó

$$|\sin x - L| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow\ L - \frac{1}{4} < \sin x < L + \frac{1}{4}.$$

Điều này cũng có nghĩa là khi $x > K$, giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm $\sin x$ nằm trong khoảng $(L - \frac{1}{4}, L + \frac{1}{4})$, nói cách khác biên độ dao động của hàm sin bé hơn $(L + \frac{1}{4}) - (L - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.
Mặt khác ta biết rằng hàm sin tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ do vậy trong khoảng $(K, +\infty)$ biên độ dao động của nó phải bằng 2 (từ -1 đến +1). Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$ không tồn tại.

5. Bạn đọc dễ dàng chứng minh $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ không tồn tại, song tồn tại giới hạn một phía

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Các giới hạn một phía đó bằng $+\infty, -\infty$.

Định lí 2.2.2 *Nếu hàm $f : D \to \mathbb{R}$, khi $x \to x_0$ có giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, khi đó giới hạn của hàm là duy nhất.*

Chứng minh. Thật vậy bằng phản chứng giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L'$, với $L \neq L'$. Chọn $\epsilon > 0$ sao cho $U_\epsilon(L) \cap U_\epsilon(L') = \emptyset$ (chẳng hạn $\epsilon = \frac{|L-L'|}{2}$). Khi đó tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, sao cho với mọi $x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0$ hay $0 < |x - x_0| < \epsilon$ ta có

$$f(x) \in U_\epsilon(L) \quad \text{và} \quad f(x) \in U_\epsilon(L') \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset.$$

Điều đó vô lí với giả thiết phản chứng. ■

Định lí 2.2.3 (Nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy)

Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 là điểm tụ của D (x_0 có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

là với mọi dãy số $\{x_n\}_1^\infty$, $\quad (x_n \in D, x_n \neq x_0)$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, dãy tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ cũng tồn tại giới hạn.

Lưu ý rằng định lí chỉ yêu cầu các dãy $\{f(x_n)\}_1^\infty$ tồn tại giới hạn, *không đòi hỏi chúng có cùng giới hạn bằng nhau và bằng L*. Điều đó sẽ được chứng minh trong phần chứng minh điều kiện đủ.

Chứng minh *Điều kiện cần.* Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $\{x_n\}_1^\infty$ là một dãy bất kì ($x_n \in D$, $x_n \neq x_0$) và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ta phải chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Thật vậy với mỗi lân cận $U(L)$ tuỳ ý của L, tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0, sao cho khi $x \in U(x_0) \cap D$ và $x \neq x_0$

$$f(x) \in U(L).$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 để với $n > n_0$, $x_n \in U(x_0)$. Suy ra khi đó $f(x_n) \in U(L)$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Điều kiện đủ. Giả sử với bất kì dãy số $x_n \to x_0$, $\quad (x_n \in D, x_n \neq x_0)$, dãy các giá trị hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ cũng tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Trước hết ta chứng minh với bất kì một dãy $x_n \to x_0$, $\quad (x_n \in D, x_n \neq x_0)$, giới hạn của dãy hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ đều là một số L như nhau. Chính xác hơn giả sử ta có 2 dãy $x_n^{'} \to x_0$ và $x_n^{''} \to x_0$. Ta sẽ chứng minh 2 dãy $\{f(x_n^{'})\}_1^\infty$ và $\{f(x_n^{''})\}_1^\infty$ có cùng giới hạn. Lập một dãy mới

$$x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3^{'}, x_3^{''}, \ldots$$

(ta kí hiệu dãy này là $\{x_n\}_1^\infty$). Dễ dàng nhận thấy dãy $\{x_n\}_1^\infty$ cũng có giới hạn là x_0. Theo giả thiết khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ cũng tồn tại (giới hạn bằng L). Hai dãy $\{f(x_n^{'})\}_1^\infty$ và $\{f(x_n^{''})\}_1^\infty$ thực chất là hai dãy con của dãy $\{f(x_n)\}_1^\infty$ nên cả ba dãy có cùng giới hạn như nhau (cùng bằng L).

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ bằng phản chứng. (Giả thiết cả x_0 và L đều hữu hạn. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự.) Giả sử rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc tồn tại song không bằng L. Khi đó có ít nhất một số $\epsilon > 0$ sao cho với mọi lân cận bán kính $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ của x_0, tồn tại một số $x_n \in D$ và x_n thuộc lân cận đó: $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ để

$$|f(x_n) - L| \geq \epsilon.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thu được một dãy $\{x_n\}_1^\infty$, theo bất đẳng thức trên dãy hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ không có giới hạn hoặc tồn tại giới hạn khác L. Mặt khác do $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, dãy $\{x_n\}_1^\infty$ hội tụ tới x_0, suy ra dãy hàm tương ứng $\{f(x_n)\}_1^\infty$ hội tụ. Mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. ■

Nhận xét rằng sử dụng định lí này, nhiều tính chất về giới hạn hàm số có thể suy ra ngay từ giới hạn dãy số. Ngoài ra người ta còn sử dụng định lí 2.2.3 để chứng minh sự *không tồn tại giới hạn* của một số hàm.

Chẳng hạn trong ví dụ thứ 4 của ví dụ 2.2.2, để chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, xét hai dãy số cùng tiến tới $+\infty$

$$x_n^{'} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty \quad \text{và} \quad x_n^{''} = n\pi \to +\infty.$$

Hiển nhiên 2 dãy hàm tương ứng

$$f(x_n^{'}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1 \quad \text{và} \quad f(x_n^{''}) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$$

tiến tới 2 giới hạn khác nhau.

2.2.2 Tính chất và các phép toán về giới hạn hàm số

Các tính chất sau là hiển nhiên, bạn đọc tự chứng minh:

• *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

thì $f(x)$ bị chặn trong một lân cận nào đó của x_0.
• *Cho hai hàm $f, g : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in D$. Giả sử x_0 là điểm tụ của D và tồn tại các giới hạn*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2.$$

Khi đó $L_1 \leq L_2$.

Đặc biệt nếu hàm f bị chặn trên D $(\exists M\ |f(x)| \leq M\ \forall x \in D)$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, khi đó $|L| \leq M$.

Từ nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy và định lí 1.3.6 về các phép toán giữa các dãy có giới hạn, ta có định lí sau

Định lí 2.2.4 *Giả sử tồn tại các giới hạn trong cùng một quá trình $x \to x_0$*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \beta.$$

Khi đó

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta; \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta; \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

với điều kiện $\alpha \pm \beta; \alpha \cdot \beta$ và $\frac{\alpha}{\beta}$ có nghĩa như các quy ước đã nhắc tới trong nhận xét sau định lí 1.3.6.

Chẳng hạn nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, khi đó $\pm\infty \cdot 0$ thuộc dạng vô định, do vậy ta không có kết luận gì về giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x))$.

Tương tự nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

ta cũng không có kết luận gì về giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cũng từ nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy và định lí 1.3.9, 1.3.10 ta có hai định lí sau. Tương tự như giới hạn dãy số, chúng cũng mang tên tiêu chuẩn kẹp và tiêu chuẩn hàm đơn điệu về giới hạn hàm số.

Định lí 2.2.5 (Tiêu chuẩn kẹp) *Cho các hàm số $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ (D là tập con của $\mathbb{R}$), x_0 là một điểm tụ của D. Giả thiết rằng tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho với mọi $x \neq x_0$ trong lân cận đó*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

khi đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, đồng thời

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Định lí 2.2.6 (Giới hạn hàm đơn điệu) *Cho hàm đơn điệu tăng $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, x_0 là một điểm bất kì thuộc khoảng (a, b). Khi đó tồn tại các giới hạn một phía*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x).$$

Người ta thường kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0-)$ và $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+)$. Hiển nhiên

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+).$$

Trường hợp hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đơn điệu giảm

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \inf_{x \in (a, x_0)} f(x), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

và $f(x_0-) \geq f(x_0) \geq f(x_0+)$.

Tương tự như định lí Cauchy về dãy số trong mục trước, ta có định lí về giới hạn hàm số

Định lí 2.2.7 (Cauchy) *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là điểm tụ của D. Giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại và hữu hạn trong quá trình $x \to x_0$ khi và chỉ khi cho trước $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ và*

$$0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - x_0| < \delta \quad (x, y \neq x_0 \text{ và thuộc lân cận } U_\delta(x_0))$$

ta có

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(Điều kiện đó còn được gọi là điều kiện Cauchy).

Chứng minh
Điều kiện cần. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Khi đó theo định nghĩa giới hạn với $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ và $0 < |x - x_0| < \delta$ (cũng như mọi $y \in D$ và $0 < |y - x_0| < \delta$)

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, |f(y) - L| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f(x) - L| + |L - f(y)| < \epsilon.$$

Điều kiện đủ. Giả sử điều kiện Cauchy trong định lí được thoả mãn. Xét một dãy số bất kì trong D hội tụ tới $x_0 : x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$. Khi đó tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n, m > n_0$

$$x_n \in U_\delta(x_0), x_m \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon.$$

Nói cách khác dãy $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy. Theo định lí Cauchy 1.3.12, dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ. Lưu ý rằng $\{x_n\}$ là dãy tuỳ ý hội tụ tới x_0, theo nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy (định lí 2.2.3), giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tồn tại và hữu hạn. Định lí đã được chứng minh. ■

Ví dụ 2.2.3

1. Biết rằng với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$: $|\sin x| < |x| < |\mathrm{tg} x|$, suy ra

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\mathrm{tg} x} = \cos x \quad \forall x \neq 0.$$

Trong quá trình $x \to 0$, $\cos x \to 1$. Sử dụng định lí 2.2.5 ta được

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$. Thật vậy trong quá trình $x \to a$

$$0 \leq |\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq |x-a| \to 0.$$

3. Với $x \in \mathbb{R}$ bất kì, tìm giới hạn của dãy số

$$a = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}} x.$$

Đặt $a_n = \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}} x$. Do $|\sin x| \leq 1$ nên ta có thể giả thiết $|x| \leq 1$.

Xét trường hợp $x > 0$, khi đó từ bất đẳng thức $\sin x < x$ suy ra $a_n \geq 0$ và dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Vậy tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty} \sin a_n = \sin a$. Mặt khác $a_{n+1} = \sin a_n$ suy ra

$$\sin a = a \quad \text{hay} \quad a = 0.$$

Trường hợp $-1 \leq x \leq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}} x = -\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n \text{ lần}}(-x) = 0.$$

4. Ta sẽ chứng minh các giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Trước hết ta xét trường hợp $x \to +\infty$. Kí hiệu $n_x = [x]$ là phần nguyên của số thực x. Ta có các bất đẳng thức sau với mọi $x > 1$

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Sử dụng giới hạn đã biết trong mục trước $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, do đó

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} = \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-1} \to e\cdot 1 = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\cdot\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{1} \to e\cdot 1 = e \quad \text{khi } x\to+\infty$$

Áp dụng định lí 2.2.5 suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Tương tự

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot 1 = e.$$

Sử dụng cả hai kết quả này, đặt $t = \frac{1}{x}$ ta được

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

2.2.3 Vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 2.2.4 *Cho hàm $\alpha : D \to \mathbb{R}$, x_0 là điểm tụ của D (x_0 có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Ta nói $\alpha : D \to \mathbb{R}$ là vô cùng bé (VCB) trong quá trình $x \to x_0$ nếu*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Hàm $A : D \to \mathbb{R}$ là vô cùng lớn (VCL) trong quá trình $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} |A(x)| = +\infty.$$

Nhận xét rằng nếu hàm $f(x)$ có giới hạn hữu hạn L trong quá trình $x \to x_0$, khi đó $\alpha(x) = f(x) - L$ là vô cùng bé trong quá trình đó

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0.$$

Từ nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy và định lí 1.3.8 ta có định lí sau

Định lí 2.2.8 *Cho hai hàm $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$, trong đó $\alpha(x)$ là vô cùng bé (VCB) trong quá trình $x \to x_0$, $\beta(x)$ là hàm bị chặn trên D. Khi đó tích $\alpha \cdot \beta$ cũng là VCB trong quá trình $x \to x_0$.*

Định nghĩa 2.2.5 *Hai VCB α, β trong cùng một quá trình $x \to x_0$ được gọi là tương đương, kí hiệu $\alpha \sim \beta$, nếu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

VCB α được gọi là VCB cấp cao hơn VCB β trong quá trình $x \to x_0$, kí hiệu $\alpha = o(\beta)$, nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Định lí 2.2.9

1. Cho $\alpha : D \to \mathbb{R}$ là VCB trong quá trình $x \to x_0$ và $\alpha(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$. Khi đó

$$\frac{1}{\alpha(x)} \quad \text{là VCL trong quá trình} \quad x \to x_0.$$

Ngược lại nếu $A(x)$ là VCL trong quá trình $x \to x_0$, khi đó

$$\frac{1}{A(x)} \quad \text{là VCB trong quá trình đó.}$$

2. Nếu α là VCB và β là VCB cấp cao hơn α trong quá trình $x \to x_0$. Khi đó $\alpha + \beta$ là VCB tương đương với VCB α trong quá trình $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

3. α, β là hai VCB trong quá trình $x \to x_0$. Giả thiết rằng cũng trong quá trình đó α tương đương với $\overline{\alpha}$ và β tương đương với $\overline{\beta}$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Chứng minh.
1. và 2. được suy ngay từ định nghĩa về VCB và VCL. Đẳng thức

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\overline{\alpha}(x)} \cdot \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)} \cdot \frac{\overline{\beta}(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$$

chứng minh phần 3. còn lại của định lí. ■

Ví dụ 2.2.4

1. Ta đã biết một trong các giới hạn quan trọng vừa chứng minh ở trên

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

   Điều này cũng có nghĩa là trong quá trình $x \to 0$ hai VCB x và $\sin x$ tương đương: $x \sim \sin x$.

2. Một giới hạn quan trọng khác đã biết ở cuối mục trước

   $$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

   Logarit cơ số e cả hai vế ta được

   $$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1.$$

   Vậy $\ln(1 + t)$ và t cũng là hai VCB tương đương trong quá trình $t \to 0$.

3. Từ giới hạn $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, đặt $x = \ln(1+t)$ suy ra
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$
Nói cách khác trong quá trình $x \to 0$ hai VCB $e^x - 1$ và x tương đương.

4. Chúng ta có các VCB sau tương đương trong quá trình $x \to 0$
$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1.$$

5. Ứng dụng các VCB tương đương, ta dễ dàng tính các giới hạn sau

$$\bullet \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2 - 3x + 3)}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln\big(1 + (x-1)(x-2)\big)}{e^{x-1} - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1.$$
$$\bullet \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2 + 2x^3)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + 2x^3}{2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + 2x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

2.3 Hàm liên tục

2.3.1 Khái niệm về hàm liên tục

Định nghĩa 2.3.1 *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó $D \subset \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một số $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (δ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $x \in D$ và $|x - x_0| < \delta$ ta có*
$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$
Trường hợp f không liên tục tại x_0, ta nói hàm gián đoạn tại đó. Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in D$, ta nói hàm f liên tục trên tập D.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau

Định nghĩa 2.3.2 *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó $D \subset \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một lân cận bất kì $V_\epsilon(f(x_0))$ của $f(x_0)$, tồn tại một lân cận $U_\delta(x_0)$ sao cho với mọi $x \in D \cap U_\delta(x_0)$ ta có*
$$f(x) \in V_\epsilon(f(x_0)) \quad \text{hay} \quad f(D \cap U_\delta(x_0)) \subset V_\epsilon(f(x_0)).$$

Khi $x_0 \in D$ là điểm cô lập của tập D hiển nhiên f liên tục tại x_0. Trường hợp $x_0 \in D$ là điểm tụ của D, định nghĩa trên cũng có nghĩa là giới hạn bằng giá trị thay thế của hàm tại x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Định nghĩa 2.3.3 (Hàm liên tục trái, liên tục phải)

Hàm f liên tục trái tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một lân cận bất kì V của $f(x_0)$, tồn tại một lân cận trái $U = (x_0 - \delta, x_0]$ của x_0 sao cho với mọi $x \in D \cap U$ ta có $f(x) \in V$ hay $f(D \cap U) \subset V$.

Hàm f liên tục phải tại $x_0 \in D$ nếu cho trước một lân cận bất kì V của $f(x_0)$, tồn tại một lân cận phải $U = [x_0, x_0 + \delta)$ của x_0 sao cho với mọi $x \in D \cap U$ ta có $f(x) \in V$ hay $f(D \cap U) \subset V$.

Chú ý hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu hàm xác định trên đó, liên tục tại mọi điểm trong khoảng mở (a, b) và hàm f liên tục phải tại đầu mút $x = a$, liên tục trái tại đầu mút $x = b$ của đoạn đó.

Nhờ khái niệm giới hạn phải, giới hạn trái ta có kết quả sau

Định lí 2.3.1 *Nếu $x_0 \in D$ là điểm tụ của D, điều kiện cần và đủ để f liên tục tại x_0 là tồn tại giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0, các giới hạn đó bằng nhau và cùng bằng $f(x_0)$*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Nói một cách ngắn gọn điều kiện cần và đủ để f liên tục tại x_0 là nó liên tục trái, liên tục phải tại $x_0 \in D$.

Định nghĩa 2.3.4 *Ta nói hàm f gián đoạn loại một tại $x_0 \in D$ nếu f gián đoạn (không liên tục) tại x_0, tồn tại các giới hạn trái, giới hạn phải*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0-), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+)$$

và các giới hạn đó hữu hạn. Khi đó $f(x_0+) - f(x_0-)$ được gọi là bước nhảy của f tại điểm x_0.

Trường hợp f gián đoạn tại x_0 và không gián đoạn loại một tại đó, ta nói f gián đoạn loại hai tại x_0.

Định lí 2.3.2 *Hàm đơn điệu trên khoảng (a, b) chỉ có thể có điểm gián đoạn loại một.*

Chứng minh

Giả thiết f là hàm đơn điệu trên khoảng (a, b). Suy ra tồn tại các giới hạn trái, giới hạn phải $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ và các giới hạn đó hữu hạn. Vậy các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu chỉ có thể là gián đoạn loại một. ■

Nhận xét rằng cũng từ chứng minh của định lí trên suy ra hàm đơn điệu trên một khoảng có không quá đếm được các điểm gián đoạn.

Ví dụ 2.3.1

1. Trong chương trước chúng ta đã chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Vậy hàm $\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm $f(x) = [x]$ (phần nguyên của x) gián đoạn loại một tại tất cả các điểm là các số nguyên và liên tục trên tập $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3. Hàm
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad \text{gián đoạn loại hai tại } x = 0.$$

4. Hàm
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad \text{gián đoạn loại hai tại } x = 0.$$

2.3.2 Các tính chất của hàm liên tục

Định lí 2.3.3 *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a, b]$. Nói cách khác tồn tại $u, v \in [a, b]$ sao cho*

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = f(u) \quad \text{và} \quad \min_{x \in [a,b]} f(x) = f(v).$$

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh hàm f bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Ta sẽ chứng minh khẳng định này bằng phản chứng. Thật vậy giả sử ngược lại, hàm f không bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$ (hay $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$). Dãy $\{x_n\}_1^\infty \subset [a, b]$ là dãy bị chặn, theo định lí Bolzano 1.3.11 tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ tới $x_0 \in [a, b]$ ($\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$). Mặt khác f là hàm liên tục trên $[a, b]$ nên cũng liên tục tại $x_0 \in [a, b]$. Vậy

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

mâu thuẫn với giả thiết phản chứng $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$.

Kí hiệu $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Do hàm f bị chặn trên đoạn $[a, b]$ nên $m, M \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên $[a, b]$. Thật vậy từ định nghĩa về cận trên đúng, tồn tại một dãy số $\{x_n\}_1^\infty \subset [a, b]$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

Cũng theo định lí Bolzano 1.3.11, dãy đó chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ hội tụ tới $u \in [a, b]$. Khi đó do f liên tục tại $u \in [a, b]$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(u) = M.$$

Hoàn toàn tương tự, hàm đạt giá trị nhỏ nhất tại $v \in [a, b],\ f(v) = m.$ ■

Nhận xét rằng, bằng cách lập luận tương tự, ta có thể mở rộng định lí cho trường hợp hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập đóng và bị chặn D. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Định lí 2.3.4 *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Giả thiết giá trị hàm f tại các đầu mút $x = a$ và $x = b$ trái dấu nhau*

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Chứng minh

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < 0$. Kí hiệu H là tập

$$H = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Hiển nhiên $H \neq \emptyset$ (do $a \in H$). Gọi $c = \sup H,\ c \in [a, b]$, ta sẽ chứng minh $f(c) = 0$. Thật vậy, do f liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in H$ suy ra $f(c) \leq 0$.

Mặt khác ta thấy $f(c) < 0$ không thể xảy ra. Giả sử ngược lại $f(c) < 0$, khi đó tồn tại một lân cận $U(c)$ của c sao cho với mọi $x \in U(c)$

$$f(x) < 0,$$

điều đó mâu thuẫn với định nghĩa $c = \sup H$. Vậy $f(c) = 0$, đ.p.c.m. ■

Một cách chứng minh khác định lí trên: chia đôi đoạn $[a, b]$ thành 2 đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau, gọi $[a_1, b_1]$ là một trong hai đoạn nhỏ đó sao cho giá trị hàm f tại các đầu mút $x = a_1$ và $x = b_1$ trái dấu nhau.
Sau đó tiếp tục chia đôi đoạn $[a_1, b_1]$ thành 2 đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau, gọi $[a_2, b_2]$ là một trong hai đoạn nhỏ đó sao cho giá trị hàm f tại các đầu mút $x = a_2$ và $x = b_2$ trái dấu nhau.
Cứ tiếp tục quá trình chia đôi đó, ta được một dãy các đoạn thẳng lồng nhau và thắt lại $\{[a_n, b_n]\}$. Gọi c là điểm chung duy nhất của dãy các đoạn thẳng đó. Hiển nhiên $f(c) = 0$.

Cách chứng minh này chỉ ra một thuật toán đơn giản hữu hiệu để tìm điểm c thỏa mãn yêu cầu $f(c) = 0$ của định lí.

Hệ quả 2.3.1 *Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Kí hiệu*

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad \text{và} \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Gọi L là giá trị trung gian bất kì thuộc khoảng (m, M). Khi đó tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = L.$$

Chứng minh
Giả sử hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x_1, x_2 \in [a, b]$ (không làm mất tính tổng quát giả thiết $x_1 < x_2$)

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1), \quad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Xét hàm $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - L$. Hiển nhiên hàm g thoả mãn định lí 2.3.4

$$g(x_1) \cdot g(x_2) < 0,$$

suy ra tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $g(c) = 0$ hay $f(c) = L$ đ.p.c.m. ■

Hệ quả trên khẳng định tập ảnh của hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ lấp đầy đoạn $[m, M]$. Từ hệ quả này ta có thể dễ dàng chứng minh nếu f là hàm liên tục trên khoảng mở (a, b), kí hiệu

$$\alpha = \inf_{x \in (a,b)} f(x), \ \beta = \sup_{x \in (a,b)} f(x),$$

khi đó tập ảnh của f chỉ có thể là một trong 4 dạng (*ta gọi chúng là các tập liên thông trên* $\mathbb{R}$)

$$(\alpha, \beta), \ (\alpha, \beta], \ [\alpha, \beta), \ [\alpha, \beta].$$

2.3.3 Các phép toán trên các hàm liên tục

Từ định lí 2.2.4 về các phép toán giữa các hàm có giới hạn ta có định lí sau

Định lí 2.3.5 *Cho $f, g : D \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục tại cùng một điểm $x_0 \in D$. Khi đó các hàm $f + g, f - g, \alpha f, f.g$ cũng liên tục tại x_0. Ngoài ra nếu $g(x_0) \neq 0$, khi đó $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại x_0.*

Định lí sau liên quan tới phép tính hợp thành giữa hai hàm

Định lí 2.3.6 *Nếu $f : A \to B$ liên tục tại $x_0 \in A$ và $g : B \to \mathbb{R}$ liên tục tại $f(x_0) \in B \ \ (A, B \subset \mathbb{R})$, khi đó hợp của hai hàm $g \circ f$ cũng liên tục tại x_0.*

Chứng minh

Ta phải chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. Áp dụng định lí 2.2.3 (nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy) nếu $\{x_n\}_1^\infty$ là một dãy bất kì trong A hội tụ tới x_0, khi đó do tính liên tục $f(x_n) \to f(x_0)$ khi $n \to \infty$ và $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ khi $n \to \infty$, suy ra điều phải chứng minh. ■

Định lí 2.3.7 *Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng mở (a, b), điều kiện cần và đủ để tồn tại hàm số ngược f^{-1} là hàm f đơn điệu thực sự trên (a, b). Khi đó miền giá trị của f là một khoảng (α, β) nào đó, đồng thời hàm ngược f^{-1} cũng liên tục trên khoảng đó.*

Ta có nhận xét rằng định lí vẫn đúng trong trường hợp (a, b) là khoảng vô hạn.
Chứng minh

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng thực sự trên (a, b). Kí hiệu

$$\alpha = \inf_{x\in(a,b)} f(x), \ \beta = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$

Do tính liên tục của hàm f, hiển nhiên miền giá trị (hay tập ảnh) $R(f)$ là khoảng (α, β). Áp dụng định lí 2.2.3 về nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm và dãy, suy ra f^{-1} liên tục trên (α, β). (*Lập luận tương tự cho trường hợp f là hàm đơn điệu giảm thực sự trên* (a, b)).

Ngược lại giả thiết hàm f liên tục trên khoảng mở (a, b) và tồn tại hàm ngược f^{-1} (f là song ánh). Ta sẽ chứng minh hàm f đơn điệu thực sự trên (a, b).

Thật vậy giả sử $f(x_1) < f(x_2)$ và $f(x_2) > f(x_3)$ với $x_1 < x_2 < x_3$. Chọn $L \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big)$, áp dụng hệ quả 2.3.1, khi đó tồn tại $c_1 \in (x_1, x_2)$ và $c_2 \in (x_2, x_3)$ sao cho $f(c_1) = f(c_2) = L$, vô lí với giả thiết f là song ánh. ■

Trong các ví dụ đã trình bày ở mục giới hạn hàm số cũng như trong phần hàm liên tục, ta đã biết các hàm sơ cấp cơ bản: hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm logarit, hàm lượng giác, hàm hyperbolic và các hàm ngược là các hàm liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định. Áp dụng các định lí 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 vừa nêu trong mục này ta có định lí sau

Định lí 2.3.8 *Các hàm sơ cấp liên tục tại tất cả các điểm thuộc miền xác định của nó.*

Lưu ý rằng người ta thường nói các hàm sơ cấp là các hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm lượng giác và các hàm ngược của chúng. Chúng thường xuyên được sử dụng trong các ví dụ, bài tập của giáo trình giải tích.

Những hàm không phải là hàm sơ cấp cũng rất hay được nhắc tới, như hàm $f(x) = |x|$. Tuy nhiên chúng thường được biểu diễn dưới dạng phức tạp hơn. Chẳng hạn hàm Riemann $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q} \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ,} \end{cases}$ trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản (p, q là các số tự nhiên).

2.3.4 Hàm số liên tục đều

Định nghĩa 2.3.5 *Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó $D \subset \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục đều trên tập D nếu cho trước một số $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (δ phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $x, y \in D$ và $|x - y| < \delta$ ta có*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Theo định nghĩa trên hiển nhiên nếu f liên tục đều trên D, khi đó f liên tục tại mọi điểm $x \in D$.

Ví dụ 2.3.2

1. Các hàm
$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin x$$
liên tục đều trên toàn bộ trục số (trên $\mathbb{R}$). Thật vậy với mọi $\epsilon > 0$ và mọi cặp $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $|x - y| < \epsilon$ ta có
$$|g(x) - g(y)| = |\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x - y| < \epsilon.$$

2. Hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $I = (0, 1)$, tuy nhiên nó không liên tục đều trên I.

   Thật vậy khi x và y "rất gần" với 0, chẳng hạn chọn
$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2n}$$
khi n là số tự nhiên đủ lớn, $x_n - y_n$ nhỏ tuỳ ý, song
$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 2n| = n$$
không nhỏ theo ý muốn mà ngược lại $|f(x_n) - f(y_n)|$ lớn một cách tuỳ ý.

Định lí 2.3.9 *$f : D \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục đều trên tập bị chặn D, khi đó f cũng bị chặn trên D.*

Chứng minh Từ giả thiết hàm f liên tục đều trên D, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D$ và $|x - y| < \delta$ ta có $|f(x) - f(y)| < 1$. Như vậy *hàm f bị chặn trên một đoạn bất kì có độ dài không vượt quá δ.*

Do D là tập bị chặn, tập D được chứa trong một đoạn $[a, b]$ nào đó. Mặt khác đoạn $[a, b]$ luôn luôn có thể được chia thành hợp của hữu hạn các đoạn nhỏ I_k, mỗi đoạn có độ dài không vượt quá δ. Hàm f bị chặn trên từng đoạn nhỏ I_k, suy ra nó cũng bị chặn trên toàn bộ tập D. ■

Nhận xét rằng một hàm liên tục đều trên một tập không bị chặn cũng có thể là hàm không bị chặn trên đó. Chẳng hạn hàm $f(x) = x$ là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}$ và cũng không bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Định lí 2.3.10 *Cho $D \subset \mathbb{R}$ là tập đóng và bị chặn, $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên D, khi đó f liên tục đều trên D.*

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy giả sử tồn tại một số $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta_n = \frac{1}{n}$ (n là số tự nhiên) luôn tồn tại một cặp số $x_n, y_n \in D : |x_n - y_n| < \delta_n$ để

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Do D đóng và bị chặn nên từ dãy $\{x_n\}_1^\infty$, theo định lí Bolzano 1.3.11 tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ tới $a \in D$ ($\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$). Đồng thời từ giả thiết phản chứng

$$|x_n - y_n| < \delta_n \to 0,$$

dãy con tương ứng $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ cũng hội tụ tới a. Mặt khác f là hàm liên tục trên D nên cũng liên tục tại $a \in D$. Vậy

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(a) - f(a) = 0,$$

mâu thuẫn với bất đẳng thức trên $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ với mọi n. ■

Từ định lí trên suy ra *nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khi đó f liên tục đều trên đó*.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Dùng định nghĩa giới hạn chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

2. Chứng minh khi $x\to+\infty$ hàm lũy thừa tiến ra vô cùng chậm hơn nhiều so với tốc độ tăng của hàm mũ, chính xác hơn, chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0, \quad (a>1).$$

3. Chứng minh rằng không tồn tại các giới hạn

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\sin x$$

4. Tìm các giới hạn

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)-1}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

5. Tìm các giới hạn

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$

6. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$$

7. Tìm giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

8. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\log_2(2+x)}{\log_2(2+x)-\log_3(3+x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{(x-x^3)^2}$

9. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[x]{\cos\sqrt[x]{x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}x^k\sin\dfrac{1}{x}\quad(k>0)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}x^k\cos\dfrac{1}{x}\quad(k>0)$

10. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(x-\ln^2 x\cdot\sin x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$

11. Khi $x \to 0+$ các VCB sau có tương đương không?

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

12. Hãy xác định a để các hàm sau liên tục trên $\mathbb{R}$

(a) $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ a\cos x + b\sin x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

(c) $$h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \leq \frac{\pi}{2} \\ ax & \text{nếu } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

13. Hãy xác định α để hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$.

14. Trong các hàm sau $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy

(a) $$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

(b) $$v(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

15. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} & \text{nếu } x \notin \{0, \pm 1\} \\ -1 & \text{nếu } x = 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 0 & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$$

16. Tìm tập xác định của hàm

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

và tìm tập hợp các điểm mà tại đó hàm liên tục.

17. Xét tính liên tục của hàm sau trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

18. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục thì $|f(x)|$ cũng là hàm liên tục.

19. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì các hàm

$$m(x) = \min_{a\le t\le x} f(t) \quad \text{và} \quad M(x) = \max_{a\le t\le x} f(t)$$

cũng liên tục trên đoạn $[a, b]$.

20. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ thì hàm $f(x)$ bị chặn trên khoảng đó.

21. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ xác định và bị chặn trên đoạn $[a, b]$ thì các hàm

$$m(x) = \inf_{a\le t<x} f(t) \quad \text{và} \quad M(x) = \sup_{a\le t<x} f(t)$$

liên tục trái trên đoạn $[a, b]$.

22. Chứng minh rằng các điểm gián đoạn của một hàm đơn điệu và bị chặn là các điểm gián đoạn loại một.

23. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ thì hàm $f(x)$ liên tục đều trên khoảng $[a, +\infty)$.

24. Chứng minh rằng các hàm sau liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \sin^2 x$

(b) $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

25. Tìm hàm liên tục đều trên tập $(0, +\infty)$ trong số các hàm sau

    (a) $f(x) = \sqrt{x}$

    (b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

    (c) $h(x) = \sin(x^2)$

    (d) $u(x) = x\sin(x)$

26. Cho 2 số thực $a < b$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục đều trên (a, b), khi đó hàm f tồn tại các giới hạn một phía tại $x = a$ và $x = b$.

27. Cho hàm Riemann $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q} \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản (p, q là các số tự nhiên). Chứng tỏ rằng f liên tục tại các điểm vô tỉ và liên tục phải tại $x = 0$, gián đoạn tại các điểm còn lại trên đoạn [0,1].

28. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Giả sử f liên tục tại $x = 0$. Chứng tỏ rằng tồn tại $a \in \mathbb{R}$ để $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

29. Hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, giả thiết rằng tồn tại hai số $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_1)f(x_2) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại a, b, c sao cho $a < b < c$, $2b = a + c$ đồng thời

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0.$$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG II

2. ***Hướng dẫn***: Đưa về bài toán chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x}=+\infty$ với $a=1+\alpha>1$. Kí hiệu $n_x=[x]$, sử dụng bất đẳng thức $(1+\alpha)^n\geq\frac{n(n-1)\alpha^2}{2}$, ta được

$$\frac{a^x}{x}\geq\frac{n_x(n_x-1)\alpha^2}{2(n_x+1)}\ \to+\infty \text{ khi } x\to+\infty.$$

4. (a) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Hướng dẫn: Nhân tung ra và viết lại thành đa thức biến x

$$(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)=1+(x+2x+\cdots+nx)+o(x)$$

(b) $\dfrac{3^{20}}{6^{10}}$

(c) $\dfrac{49}{24}$

(d) $\dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$

(e) 1.

5. (a) $\dfrac{1}{3}$

(b) $\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$

(c) $-\dfrac{1}{12}$

(d) 14

(f) $\dfrac{\ln 3-\ln 2}{\ln 4-\ln 3}$

Hướng dẫn: Viết bài toán dưới dạng $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-3^x}{3^x-4^x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x-3^x}{x}\cdot\dfrac{x}{3^x-4^x}\right)$.

6. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

Hướng dẫn: Viết bài toán dưới dạng sau rồi làm như bài 4.(a)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})(1-2\sin^2\frac{x}{2})2\cdots(1-2\sin^2\frac{nx}{2})}{x^2}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2}$$

7. (a) 8 $\quad$ (b) $\dfrac{2}{3}$

   (c) $\dfrac{2}{\pi}$ $\quad$ (d) $\dfrac{1}{4}$

   (e) 1 $\quad$ (f) $\dfrac{1}{e^2}$

8. (a) 0 $\quad$ (b) $\dfrac{-3\ln 3}{3\ln 3 - 2\ln 2}$

   (c) 0 $\quad$ (d) e^3

   (e) $\sqrt{e}$ $\quad$ (f) 15

9. (a) 1 $\quad$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   (c) 1

   Hướng dẫn: Hướng dẫn: $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[x]{\cos\sqrt[x]{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} (\cos(x^{\frac{1}{x}}))^{\frac{1}{x}} = A$

   $$\ln A = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x^{\frac{1}{x}}) - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2\sin^2(\frac{x^{\frac{1}{x}}}{2})}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{2}{x}}}{-2x} = 0$$

   (d) 1 $\quad$ (e) 0.

10. (a) 0 $\quad$ (b) $\frac{1}{2}$

    Hướng dẫn: $\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right) \sim \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1}{2x+1}$

    (c) $\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ (d) 0

11. $\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \sim x^{\frac{1}{4}}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x \sim x$ khi $x \to 0+$

12. (a) $a = 1$

    (b) $a = 0$

    (c) $a = \dfrac{2}{\pi}$

13. $\alpha > 0$

14. (a) $x = 0$ là điểm gián đoạn loại hai
    (b) $x = 0$ là điểm gián đoạn loại một.

15. $x = -1$ là điểm gián đoạn.

16. Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, hàm f liên tục tại mọi $x \neq \pm 1$

17. Hàm f liên tục tại điểm $x = 0$ và gián đoạn tại mọi điểm $x \neq 0$.

25. Hàm $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ liên tục đều trên $(0, +\infty)$

    Hướng dẫn: Hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ có giới hạn hữu hạn (=0) khi $x \to +\infty$, do vậy khi x_1, x_2 đủ lớn $|f(x_1) - f(x_2)|$ đủ nhỏ, mặt khác trên đoạn $[0, K]$ (khoảng đóng) hàm liên tục đều.

    Hàm $h(x) = \sin(x^2)$ không liên tục đều trên tập $(0, +\infty)$ vì khi chọn 2 dãy $x_n = \sqrt{n\pi}$ và $y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, ta có $\lim(x_n - y_n) = 0$ và $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ với mọi n.

    Hàm $u(x) = x \sin x$ không liên tục đều trên $(0, +\infty)$ vì khi chọn 2 dãy số $x_n = 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = 2n\pi$, ta có $x_n - y_n \to 0$, tuy nhiên

    $$u(x_n) - u(y_n) = (2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \to +\infty$$

26. Tồn tại các giới hạn hữu hạn một phía tại $x = a$ và $x = b$ vì nó thỏa mãn điều kiện Cauchy.

28. ***Hướng dẫn***: Kí hiệu $a = f(1)$. Khi đó $f(x) = ax$ với mọi số hữu tỉ $x \in \mathbb{R}$. Mặt khác do f liên tục tại $x = 0$, suy ra f liên tục trên $\mathbb{R}$. (Thật vậy với dãy số bất kì $\{y_n\} \to y \ \Rightarrow f(y_n - y) = f(y_n) - f(y) \to f(0) = 0$). Suy ra $f(x) = ax$ với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$.

29. ***Hướng dẫn***: Giả sử $x_1 < x_2$ và $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. Xét hàm liên tục $g(h) = f(x_1) + f(x_1 + h) + f(x_1 + 2h),\ h \in [0, \frac{x_2 - x_1}{2}]$. Nếu tại 2 đầu mút x_1 và $\frac{x_2 - x_1}{2}$, hàm g trái dấu, khi đó tồn tại h^* để $g(h^*) = 0$, suy ra điều phải chứng minh.
    Ngược lại, xét hàm số $u(h) = f(x_2) + f(x_2 - h) + f(x_2 - 2h),\ h \in [0, \frac{x_2 - x_1}{2}]$. Khi đó u tại 2 mút trái dấu, suy ra tồn tại h^* để $u(h^*) = 0$, (đ.p.c.m.)

Chương 3

Đạo hàm và vi phân

3.1 Đạo hàm hàm số

3.1.1 Hàm khả vi và đạo hàm hàm số

Nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau đòi hỏi phải tìm tiếp tuyến với đường cong hay tính vận tốc chuyển động của vật thể. Các bài toán đó dẫn đến khái niệm hàm khả vi cũng như đạo hàm hàm số.

Cho $X \subset \mathbb{R}$ là tập mở trong tập các số thực, $x_0 \in X$ và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm xác định trên X.

Định nghĩa 3.1.1 *Hàm f được gọi là khả vi tại x_0 nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ta gọi giới hạn đó là đạo hàm hàm f tại x_0, kí hiệu

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1}$$

Người ta thường sử dụng các kí hiệu sau trong các sách viết về hàm khả vi: số gia biến độc lập $\Delta x = x - x_0$, số gia hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx của biến độc lập

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Như vậy f khả vi tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{3.2}$$

Nhận xét

1. Nếu hàm f khả vi tại x_0, khi đó do đẳng thức (3.1), tồn tại vô cùng bé (VCB) $\alpha(x)$ trong quá trình $x \to x_0$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x) \quad \text{hoặc dạng tương đương}$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0) \tag{3.3}$$

2. Biểu thức $\alpha(x) \cdot (x - x_0)$ trong đẳng thức (3.3) ở trên là VCB cấp cao hơn $x - x_0$ trong quá trình $x \to x_0$. Vì vậy nếu f khả vi tại x_0, ta có

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{hay}$$

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \tag{3.4}$$

Định nghĩa 3.1.2 *Ta gọi đại lượng $f'(x_0)\Delta x$ trong đẳng thức (3.4) là vi phân của hàm f tại x_0 và kí hiệu*

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Nhận xét rằng hàm đồng nhất $g(x) = x$ khả vi tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ và

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Suy ra biểu thức vi phân của hàm đồng nhất $dx = \Delta x$. Do vậy đối với hàm khả vi bất kì f tại x_0, người ta viết biểu thức vi phân của f tại x_0

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Một chất điểm chuyển động thẳng. Quan hệ giữa thời gian t và quãng đường đi được trong khoảng thời gian t được cho bởi hàm $s(t)$. Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian giữa 2 thời điểm t_0 và t bằng

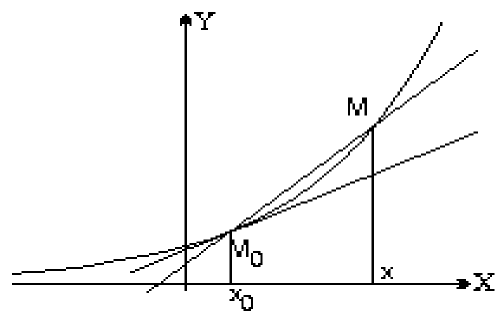
$$v_{tb} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Vậy vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 bằng $\lim\limits_{t\to t_0} v_{tb} = s'(t_0)$.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giả sử $M_0(x_0, f(x_0))$ và $M(x, f(x))$ là hai điểm thuộc đồ thị. Đường thẳng M_0M có hệ số góc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Hình 3.1: Tiếp tuyến

Khi x tiến dần đến x_0, vị trí M dần đến M_0 và đường thẳng M_0M dần đến tiếp tuyến (nếu có) của đồ thị đường cong tại M_0. Do đó người ta coi $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại M_0. Phương trình của tiếp tuyến khi đó là

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Định lí sau cho ta mối liên hệ giữa tính khả vi và liên tục của hàm số

Định lí 3.1.1 *Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \in X$ thì f liên tục tại x_0.*

Chứng minh. Do f khả vi tại x_0, theo (3.3)

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0),$$

trong đó $\alpha(x)$ là VCB trong quá trình $x \to x_0$. Suy ra

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Vậy f liên tục tại x_0. ■

Nhận xét rằng điều ngược lại của định lí trên không đúng: nếu f liên tục tại x_0, hàm f có thể không khả vi tại đó. Chẳng hạn hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$, tuy nhiên dễ dàng chứng minh được giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}.$$

Định nghĩa 3.1.3 *$X \subset \mathbb{R}$ là tập mở, hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi trên tập X nếu f khả vi tại mọi điểm thuộc X.*
Ngoài ra nếu $f' : X \to R,\ x \mapsto f'(x)$ liên tục trên X, ta nói hàm f khả vi liên tục trên tập X.

Ví dụ 3.1.1

1. f là hàm hằng $f \equiv C$, khi đó hiển nhiên $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Tính đạo hàm hàm số $f(x) = x^3$ tại $x = x_0$ bất kì. Kí hiệu $\Delta x = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + (\Delta x)^2 + 3x_0\Delta x) = 3x_0^2.$$

   Như vậy hàm $f(x) = x^3$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$ và hàm đạo hàm

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \quad \text{với} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Xét sự khả vi của hàm $f(x) = \sin x$ tại $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(0 + \Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

   Đạo hàm hàm $f(x) = \sin x$ tại $x = x_0$ bất kì bằng

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

   Nói cách khác $(\sin x)' = \cos x$.
   Chứng minh tương tự ta có $(\cos x)' = -\sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

4. Nếu $f(x) = e^x$, khi đó $f'(x) = e^x$ với mọi x. Thật vậy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

5. Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{với mọi} \quad x > 0.$$

3.1.2 Đạo hàm trái, đạo hàm phải, đạo hàm vô hạn

Định nghĩa 3.1.4 *Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ và giả thiết X chứa một lân cận phải của $a \in X$. Nếu tồn tại giới hạn phải trong quá trình $x \to a$*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

và giới hạn đó hữu hạn, ta nói hàm f có đạo hàm phải tại a và kí hiệu $f'_+(a)$ bằng giới hạn đó.
Tương tự f có đạo hàm trái tại a, kí hiệu

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nếu tồn tại giới hạn trái ở trên và giới hạn đó hữu hạn.

Ví dụ. Hàm $f(x) = |x|$ có đạo hàm phải, đạo hàm trái tại $x = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - 0}{x} = 1 \quad \text{và} \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - 0}{x} = -1.$$

Từ tính chất của giới hạn phải, giới hạn trái ta suy ra rằng hàm $f(x)$ khả vi tại $x = a$ khi và chỉ khi f có đạo hàm phải $f'_+(a)$, đạo hàm trái $f'_-(a)$, các đạo hàm một phía đó bằng nhau và cùng bằng

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a).$$

Về mặt hình học ta nói đạo hàm phải $f'_+(a)$ là hệ số góc của tiếp tuyến phải với đồ thị hàm số tại điểm $(a, f(a))$ và tương tự $f'_-(a)$ là hệ số góc của tiếp tuyến trái.

Định nghĩa 3.1.5 *Nếu tồn tại các giới hạn*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \quad \textit{hoặc} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

ta nói $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại $x=a$.

Về mặt hình học nếu $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại $x=a$ khi đó tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $(a,f(a))$ có phương thẳng đứng (song song với trục tung). Bạn đọc tự suy ra các khái niệm đạo hàm vô hạn một phía.

Ví dụ. Xét hàm $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ với đồ thị là nửa đường tròn nằm trên trục hoành. Hàm f có đạo hàm vô hạn tại các điểm $x=\pm1$. Thật vậy

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-1}=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-(-1)}=+\infty$$

3.1.3 Các quy tắc tính đạo hàm

Định lí sau đưa ra các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

Định lí 3.1.2 *Giả thiết $f,g:X\to\mathbb{R}$ là 2 hàm khả vi tại $x_0\in X$, khi đó các hàm $f+g,\ \alpha f(\alpha\in\mathbb{R}),\ f\cdot g$ và $\dfrac{f}{g}$ (với $g(x_0)\neq0$) cũng khả vi tại x_0 đồng thời*

- $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
- $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy tắc đạo hàm của thương, các quy tắc còn lại được chứng minh tương tự. Đặt $u=\frac{f}{g}$, xét số gia hàm u tại x_0

$$\Delta u=\frac{f(\Delta x+x_0)}{g(\Delta x+x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{\Delta f+f(x_0)}{\Delta g+g(x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{g(x_0)\Delta f-f(x_0)\Delta g}{g(x_0)(\Delta g+g(x_0))}$$

Chia cả 2 vế cho Δx và chuyển qua giới hạn $\Delta x \to 0$, ta được điều phải chứng minh

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x_0)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0)(\Delta g + g(x_0))} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng từ 2 kết luận đầu của định lí: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ và $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ suy ra đạo hàm của hiệu bằng hiệu các đạo hàm.

$$(f-g)'(x_0) = (f + (-g))'(x_0) = f'(x_0) + (-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

Ví dụ 3.1.2

1. Hàm $f(x) = \cos x + \sin x - xe^x$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$f'(x) = (\cos x + \sin x - xe^x)' = -\sin x + \cos x - e^x - xe^x.$$

2. Hàm $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ khả vi tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. Hàm $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ khả vi tại mọi $x \neq k\pi$ và

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

4. Hàm $\log_a x$ khả vi với mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Định lí 3.1.3 (Đạo hàm hàm hợp) *Giả sử $U, V \subset \mathbb{R}$ là hai tập mở trong $\mathbb{R}$. Hàm $f : U \to V$ khả vi tại $x_0 \in U$ và hàm $g : V \to \mathbb{R}$ khả vi tại $f(x_0) \in V$. Khi đó hàm hợp $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại x_0, đồng thời*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Chứng minh. Sử dụng các kí hiệu $\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, lập số gia hàm số $h = g \circ f$ tại x_0

$$\Delta h = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(f(x_0) + \Delta f) - g(f(x_0))$$

Do g khả vi tại $y_0 = f(x_0)$, theo (3.4)

$$g(y_0 + t) - g(y_0) = g'(y_0)t + o(t).$$

Suy ra

$$\Delta h = g'(f(x_0))\Delta f + o(\Delta f) = g'(f(x_0))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(\Delta f)$$

Chia cả 2 vế cho Δx và chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$, sử dụng kết quả

$$\frac{o(\Delta f)}{\Delta x} = \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to 0$$

Ta được

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = g'(f(x_0))f'(x_0) + g'(f(x_0)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta f)}{\Delta x} = g'(f(x_0))f'(x_0), \text{ (đ.p.c.m.)} \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng vi phân hàm $f(x)$ thường được viết dưới dạng

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Từ công thức tính đạo hàm hàm hợp $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ suy ra vi phân của $g \circ f$

$$d(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g'(f(x))df(x).$$

Như vậy về mặt hình thức, vi phân của hàm số không phụ thuộc vào biến của nó là biến độc lập hay biến đó là biến phụ thuộc vào hàm khác. Ta nói tính chất đó là tính *bất biến của vi phân.*

Ví dụ 3.1.3 *(Về đạo hàm hàm hợp)*

1. Hàm lũy thừa $f(x) = x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$, khả vi với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

2. Hàm $f(x) = \ln|x|$ khả vi với mọi $x \neq 0$ và

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot (|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{nếu } \ x > 0 \\ \frac{-1}{|x|} & \text{nếu } \ x < 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

3. Hàm mũ $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$, khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Định lí 3.1.4 (Đạo hàm hàm ngược) *Hàm $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên khoảng mở (a,b) và giả thiết $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Kí hiệu $T = Imf$ (tập ảnh hay còn gọi là tập giá trị của f). Khi đó tồn tại hàm ngược $f^{-1} : T \to (a,b)$, hàm ngược $f^{-1}(x)$ khả vi tại mọi $x \in T$, đồng thời*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \forall x \in T.$$

Chứng minh. Do $f'(x)$ liên tục trên (a,b) và theo giả thiết $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$, suy ra $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a,b)$. Suy ra f đơn điệu thực sự trên (a,b), do vậy theo định lí 2.3.7, tồn tại hàm ngược $f^{-1} : T \to (a,b)$ liên tục trên khoảng T. Để chứng minh $f^{-1}(x)$ khả vi tại điểm tùy ý $x_0 \in T$, kí hiệu $x = f(u), x_0 = f(u_0)$, ta có

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{u\to u_0} \frac{u - u_0}{f(u) - f(u_0)} = \lim_{u\to u_0} \frac{1}{\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}} = \frac{1}{f'(u_0)}.$$

Điều này chứng tỏ $f^{-1}(x)$ khả vi tại x_0 và

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(u_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \quad \forall x_0 \in T. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 3.1.4 *(Về đạo hàm hàm ngược)*

1. Hàm $\arcsin x$ là hàm ngược của $\sin x$, áp dụng công thức đạo hàm hàm ngược, với mọi $x \in T = (-1,1)$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Tương tự, với mọi $x \in (-1, 1)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Hàm $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ khả vi với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Chú ý rằng để thuận tiện cho việc tính toán, trong nhiều tài liệu, người ta sử dụng kí hiệu $x = x(y)$ làm hàm ngược của hàm $y = y(x)$. Khi đó với các điều kiện của định lí đạo hàm hàm ngược, hàm $x = x(y)$ khả vi và

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Ta xét một trường hợp riêng khi hàm f cho dưới dạng tham số (ta sẽ trình bày kĩ hơn dạng tham số của đường cong trong phần cuối của chương, mục ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số). Giả sử dạng tham số của hàm f là

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Nếu tại lân cận $t = t_0$, hàm $x = x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$, hàm ngược $t = t(x)$ khả vi tại lân cận $x_0 = x(t_0)$, khi đó tại lân cận điểm x_0 hàm f có thể viết chi tiết dưới dạng hàm hợp $f(x) = y(t(x))$ và do vậy

$$f'(x) = y'(t)\Big|_{t=t(x)} \cdot t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}\Big|_{t=t(x)}$$

Đẳng thức trên được sử dụng để tính hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong cho dưới dạng tham số.

BẢNG ĐẠO HÀM MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP

$(C)' = 0$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = (a^x)\ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

Từ định nghĩa của vi phân

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

và theo công thức (3.4) $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ ta có

$$\Delta f = df(x_0) + o(\Delta x).$$

Như vậy với Δx đủ nhỏ ta có thể xấp xỉ số gia hàm số Δf tại x_0 với vi phân $df(x_0)$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0)$$

hay

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Ta sử dụng công thức này để tính gần đúng $f(x_0 + \Delta x)$ khi Δx đủ bé.

Ví dụ 3.1.5

1. Để tính gần đúng $\sin 31^0$, xét hàm $f(x) = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$

   $$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin(x_0) + \cos x_0 \cdot \Delta x$$

   Số đo góc được tính theo radian

   $$\sin 31^0 = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,0174533$$

   Suy ra $\sin 31^0 \approx 0,515115$.

2. Tính gần đúng $\sqrt{170}$, xét hàm $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 169$

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$$

   Với $\Delta x = 1$ (khá bé so với $x_0 = 169$)

   $$\sqrt{170} = \sqrt{169 + 1} \approx \sqrt{169} + \frac{1}{2\sqrt{169}} \cdot 1 = 13 + \frac{1}{26} \approx 13,0385$$

3.1.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao. Công thức Leibnitz

Cho hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi trên tập mở $X \subset \mathbb{R}$, khi đó hàm f' được xác định trên X

$$f' : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x).$$

Định nghĩa 3.1.6 *Nếu tại $x_0 \in X$ hàm $f' : X \to \mathbb{R}$ khả vi, ta nói hàm f khả vi cấp 2 tại x_0 và đạo hàm của hàm f' tại x_0 được gọi là đạo hàm cấp 2 của f tại x_0. Kí hiệu đạo hàm cấp 2 đó là $f''(x_0)$*

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Một cách tổng quát, giả sử tồn tại đạo hàm cấp $n-1$ của f trên X

$$f^{(n-1)} : X \to \mathbb{R}$$

Nếu hàm $f^{(n-1)}$ khả vi tại $x_0 \in X$ thì đạo hàm của hàm $f^{(n-1)}$ tại x_0 được gọi là đạo hàm cấp n của f tại x_0, kí hiệu $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Hàm có đạo hàm cấp n tại x_0 được gọi là hàm khả vi cấp n tại đó.

Người ta còn sử dụng các thuật ngữ khác liên quan tới đạo hàm cấp cao, ví dụ ta nói f *khả vi liên tục cấp n trên tập X* nếu hàm $f^{(n)} : X \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập X.
Hàm f *khả vi vô hạn tại x_0* nếu f có đạo hàm mọi cấp tại x_0.

Định nghĩa 3.1.7 *$X \subset \mathbb{R}$ là tập mở và hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi cấp n tại x_0, khi đó vi phân cấp n của f tại x_0 ứng với số gia Δx (cố định) của đối số được xác định*

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n \quad \textit{hoặc viết} \quad d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Từ định nghĩa trên suy ra

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = f''(x)dx^2$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f^{(3)}(x)dx^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Nhận xét rằng vi phân cấp cao không có tính bất biến như vi phân cấp một. Chẳng hạn khi $x = x(t)$ là hàm của biến độc lập t, vi phân cấp một, cấp hai

$$df(x) = f'(x)dx \quad \text{hay} \quad df(x(t)) = f'(x(t))x'(t)dt$$

$$d^2 f(x(t)) = (f''(x(t))x'^2(t) + f'(x(t))x''(t))dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

Ví dụ 3.1.6

1. Hàm $f(x) = x^n$ (n là số tự nhiên)
$$\begin{aligned}
&f'(x) = nx^{n-1}\\
&f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n)}(x) = n!\\
&f^{(n+1)}(x) = 0 \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. Cho hàm $f(x) = \operatorname{sh} x$, ta đã biết
$$\begin{aligned}
&(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x\\
&(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x
\end{aligned}$$
Vậy
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \operatorname{sh} x & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

3. Hàm $f(x) = \sin x$
$$\begin{aligned}
&f'(x) = \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2})\\
&f''(x) = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2})\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Đối với đạo hàm cấp cao, hiển nhiên ta có quy tắc tính đạo hàm sau

- $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
- $(\alpha f)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)$

với giả thiết $f, g : X \to \mathbb{R}$ khả vi cấp n tại x_0.

Định lí 3.1.5 (Công thức Leibnitz) *Cho tập mở $X \subset \mathbb{R}$ và giả thiết các hàm $u, v : X \to \mathbb{R}$ khả vi cấp n trên X. Khi đó hàm tích $u \cdot v : X \to \mathbb{R}$ cũng khả vi cấp n trên X, đồng thời*
$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x).$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lí bằng quy nạp theo n. Định lí đúng với $n = 1$

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Giả sử định lí đúng với số tự nhiên n nào đó

$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$

Khi đó

$$(u \cdot v)^{(n+1)}(x) = ((u \cdot v)^{(n)})'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)\big)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [u^{(n-k+1)}(x)v^{(k)}(x) + u^{(n-k)}(x)v^{(k+1)}(x)] =$$

$$= u^{(n+1)}(x)v(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [C_n^k + C_n^{k-1}] u^{(n-k+1)}(x)v^{(k)}(x) + u(x)v^{(n+1)}(x)$$

$$\Rightarrow \quad (u \cdot v)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}(x)v^{(k)}(x). \text{ (đ.p.c.m.)} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 3.1.7

1. Cho $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)e^x$. Tính $f^{(5)}(x)$

$$f^{(5)}(x) = C_5^0 (e^x)^{(5)}(2x^2 + 3x + 1) + C_5^1 (e^x)^{(4)}(2x^2 + 3x + 1)' +$$
$$+ C_5^2 (e^x)^{(3)}(2x^2 + 3x + 1)'' + 0 = e^x(2x^2 + 23x + 56)$$

2. Hãy tính đạo hàm cấp n hàm $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$ với $x < 1$.
   Viết hàm $f(x)$ dưới dạng tích $f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(x+1)$ và áp dụng công thức Leibnitz

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n)}(x+1) + C_n^1 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n-1)} + 0 =$$
$$= \frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-1)}(x+1) + n[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n-1)} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}[(1-x)^{-\frac{5}{2}}]^{(n-2)}(x+1) + n\frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{3}{2}}]^{(n-2)} =$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}(x+1) + n\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

3.2 Các định lí hàm khả vi

3.2.1 Các định lí trung bình

Định nghĩa 3.2.1 *Cho $X \subset \mathbb{R}$ là tập mở và hàm $f : X \to \mathbb{R}$. Ta nói f đạt cực đại (cực tiểu) tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại một lân cận $V \subset X$ của x_0 sao cho*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \quad \text{với mọi} \quad x \in V.$$

Ta nói f đạt cực trị tại x_0 nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại đó.

Khái niệm cực trị định nghĩa ở trên còn được gọi là cực trị địa phương. Định lí sau cho ta điều kiện cần để hàm đạt cực trị.

Định lí 3.2.1 (Fermat) *Cho tập mở $X \subset \mathbb{R}$ và hàm $f : X \to \mathbb{R}$. Nếu f đạt cực trị tại $x_0 \in X$ và f khả vi tại x_0, khi đó $f'(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Giả sử f đạt cực đại tại x_0, khi đó tồn tại một lân cận $V \subset X$ của x_0 sao cho $f(x) - f(x_0) \leq 0 \ \forall x \in V$. Suy ra

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x > x_0 \text{ và } x \in V \ \Rightarrow \ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x < x_0 \text{ và } x \in V \ \Rightarrow \ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Vậy $f'(x_0) = 0$. Chứng minh tương tự trong trường hợp f đạt cực tiểu tại x_0. ∎

Giá trị $f'(x_0)$ đo tốc độ biến thiên của hàm f tại x_0. Do định lí trên $f'(x_0) = 0$ khi f đạt cực trị nên người ta thường gọi x_0 là *điểm dừng* của hàm f.

Định lí 3.2.2 (Rolle) *Giả sử hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b). Giả thiết tiếp $f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Hai trường hợp có thể xảy ra
• f là hàm hằng trên đoạn $[a, b]$, khi đó kết luận của định lí là hiển nhiên.
• f không là hàm hằng trên $[a, b]$. Do f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, hàm f đạt max và min trên $[a, b]$. Mặt khác từ giả thiết $f(a) = f(b)$ suy ra ít nhất hoặc max hoặc min của f phải đạt được tại điểm c nào đó trong khoảng mở (a, b). Theo định lí Fermat tại đó $f'(c) = 0$. ∎

Định lí 3.2.3 (Cauchy) *Giả thiết 2 hàm $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b). Khi đó tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Ngoài ra nếu giả thiết thêm $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$, khi đó công thức trên có thể viết dưới dạng

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3.5}$$

Chứng minh. Xét hàm $h : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Hiển nhiên h thỏa mãn các điều kiện của định lí Rolle liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, khả vi trong khoảng mở (a, b) và $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$. Suy ra tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

hay

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Nếu $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$ suy ra (cũng theo định lí Rolle) $g(a) \neq g(b)$. Chia cả 2 vế đẳng thức trên cho $(g(b) - g(a))g'(c)$ ta được điều phải chứng minh. ■

Định lí sau là trường hợp riêng của định lí Cauchy, chọn $g(x) = x$

Định lí 3.2.4 (Lagrange) *Nếu$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b) thì tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ví dụ 3.2.1

1. Cho $f(x)$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$. Khi đó giữa 2 nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình

   $$f'(x) = 0.$$

   Thật vậy gọi $x = a$ và $x = b$ là 2 nghiệm khác nhau của của phương trình $f(x) = 0$. Áp dụng định lí Rolle, tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

2. Chứng minh bất đẳng thức

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Áp dụng định lí Lagrange trên đoạn $[x, y]$, tồn tại điểm $c \in (x, y)$ sao cho

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c \cdot (x - y)| \leq |x - y|.$$

3. Tương tự như ví dụ trên, xét hàm $f(t) = \sqrt{t}$ và áp dụng định lí Lagrange cho đoạn $[x, y]$ với $x, y \geq 1$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{với} \quad c \in (x, y).$$

Do $c \in (x, y) \Rightarrow c > 1$, ta có bất đẳng thức

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \ \forall x, y \geq 1.$$

3.2.2 Công thức Taylor

Cho hàm $f(x)$ xác định tại lân cận nào đó của a. Giả sử f khả vi đến cấp n tại điểm a. Kí hiệu $P_n(x)$ là đa thức (theo biến x)

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$P_n(x)$ có các tính chất sau

$$P_n(a) = f(a)$$

$$P_n'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} \Rightarrow P_n'(a) = f'(a)$$

$$P_n''(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x - a)^{n-2} \Rightarrow P_n''(a) = f''(a)$$

Cứ tiếp tục như vậy dễ dàng chứng minh được $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Như vậy hàm $f(x)$ và đa thức $P_n(x)$ có giá trị tại điểm a cũng như đạo hàm các cấp từ đạo hàm cấp một tới đạo hàm cấp n tại a đều bằng nhau. Các định lí sau (mang tên Taylor) sẽ cho ta mối quan hệ giữa hàm $f(x)$ và đa thức $P_n(x)$ tại lân cận của điểm a đó.

Định lí 3.2.5 (Công thức Taylor dạng Peano) *Cho $X \subset \mathbb{R}$ là tập mở và nếu hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp n tại $a \in X$ thì*

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{3.6}$$

trong đó $o(x^n)$ là VCB cấp cao hơn x^n trong quá trình $x \to 0$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh công thức (3.6) bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ (3.6) có dạng

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + o(x).$$

Điều này được suy ra từ công thức (3.4) ngay sau định nghĩa đạo hàm.

Giả sử (3.6) đúng với $n-1$. Xét hàm

$$g(x) = f(a+x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n\right)$$

$$g'(x) = f'(a+x) - \left(f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}x + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1}\right)$$

Theo giả thiết quy nạp (áp dụng cho hàm $f'(a+x)$ và các đạo hàm của nó đến cấp $n-1$), $g'(x) = o(x^{n-1})$, nói cách khác với $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x| < \delta$

$$|g'(x)| < \varepsilon |x|^{n-1}.$$

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm g trong khoảng $[0, x]$ (với các giá trị x thỏa mãn $|x| < \delta$)

$$|g(x) - g(0)| = |g(x) - 0| = |g'(c)| \cdot |x - 0| < \varepsilon |x|^{n-1} \cdot |x| = \varepsilon |x|^n.$$

Suy ra $g(x) = o(x^n)$. Ta đã chứng minh xong giả thiết quy nạp. ■

Với giả thiết mạnh hơn về tính khả vi của hàm f so với định lí trên, ta có định lí sau

Định lí 3.2.6 (Công thức Taylor với số dư dạng Lagrange)
Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp $n+1$ trong lân cận nào đó của điểm $x = a$. Với mọi x thuộc lân cận đó kí hiệu $h = x - a$, khi đó tồn tại c nằm giữa a và x sao cho

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{3.7}$$

Chứng minh. Đặt

$$F(t) = f(a+t) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n] \quad \forall t \in [0, h]$$

Dễ dàng chứng minh được

$$F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(n)}(0) = 0$$

Áp dụng định lí Cauchy cho hai hàm $F(t)$ và $G(t) = t^{n+1}$ trên đoạn $[0, h]$ (công thức (3.5))

$$\frac{F(h)}{h^{n+1}} = \frac{F(h) - F(0)}{h^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{F'(c_1)}{(n+1)c_1^n} = \frac{F'(c_1) - F'(0)}{(n+1)(c_1^n - 0^n)} = \frac{F''(c_2)}{(n+1)nc_2^{n-1}} =$$

$$= \frac{F''(c_2) - F''(0)}{(n+1)n(c_2^{n-1} - 0^{n-1})} = \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(0)}{(n+1)!(c_n - 0)} = \frac{F^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

Nhận xét rằng các số c_i theo định lí Cauchy đều thuộc khoảng $(0, h)$ đồng thời $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(a+t)$ suy ra

$$F(h) = \frac{f^{(n+1)}(a + c_{n+1})}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Đặt $c = a + c_{n+1}$ và thay lại F theo f ta được điều phải chứng minh

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad \blacksquare$$

Kí hiệu $R_n(a, h)$ là số hạng cuối cùng trong công thức (3.7)

$$R_n(a, h) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$R_n(a, h)$ được gọi là *phần dư thứ n của công thức Taylor dạng Lagrange.*

Nhận xét

- Các công thức Taylor (3.6), (3.7) còn được viết dưới dạng

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\Big((x-a)^n\Big)$$

  với x là điểm thuộc lân cận nào đó của a, hoặc tồn tại c nằm giữa a và x

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

  Ta nói chúng là các *khai triển Taylor* hàm f tại lân cận điểm a. Trường hợp $a = 0$, khai triển Taylor còn được gọi là *khai triển Mac Laurin*.

- Phần dư $R_n(a, h)$ chính là sai số khi xấp xỉ hàm f với một đa thức bậc n. Sai số đó khá nhỏ khi n tương đối lớn, vì vậy nhiều ước lượng quan trọng liên quan tới hàm f sẽ được tính toán thông qua đa thức xấp xỉ đó.

- Các công thức (3.3), (3.4) là trường hợp riêng của công thức Taylor dạng Peano (3.6) với $n = 1$

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + o(x).$$

- Công thức Lagrange là trường hợp riêng của công thức Taylor số dư dạng Lagrange (3.7) với $n = 0$

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

- Khai triển Taylor của một hàm là duy nhất. Nói cách khác nếu f khả vi cấp n tại a và

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

  khi đó

$$a_0 = f(a), a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

  Thật vậy, không làm mất tính tổng quát ta sẽ chứng minh khai triển Mac Laurin hàm f tại lân cận điểm $x = 0$ là duy nhất. Giả sử hàm f có hai dạng khai triển sau

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$$

Chuyển qua giới hạn cả 2 vế trong quá trình $x \to 0$ ta được $a_0 = b_0$. Rút gọn a_0 ở cả hai vế sau đó chia cả 2 vế cho x

$$a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} + o(x^{n-1}) = b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Chuyển qua giới hạn trong quá trình $x \to 0$, ta được $a_1 = b_1$. Rút gọn a_1 ở cả hai vế rồi chia 2 vế cho x... Tiếp tục quá trình đó, sau $n+1$ bước ta được $a_n = b_n$.

Bằng lập luận trên ta đã chứng minh các hệ số trong khai triển Taylor của một hàm là duy nhất.

Áp dụng nhận xét này ta có thể tính đạo hàm cấp cao một số hàm nếu biết các khai triển Taylor của các hàm đó (xem phần *một số ứng dụng của khai triển Taylor* ở ngay dưới đây).

Khai triển Mac Laurin một số hàm sơ cấp cơ bản

1. Hàm $f(x) = e^x$ khả vi vô hạn lần tại mọi điểm và $f^{(n)}(x) = e^x$ với mọi số tự nhiên n. Tại $x = 0$ ta luôn có $f^{(n)}(0) = 1$, do vậy theo (3.7)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

trong đó $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, c nằm giữa 0 và x. Ta cũng thường sử dụng khai triển hàm $f(x) = e^x$ theo dạng Peano

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Hàm $f(x) = \sin x$ khả vi mọi cấp và $f^{(2n)}(0) = 0, f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Do đó

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

3. Tương tự, khai triển Mac Laurin của hàm $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

4. Khai triển Mac Laurin hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$ với α là số thực tùy ý. Bằng quy nạp ta có thể chứng minh đạo hàm cấp n của f tại lân cận điểm $x = 0$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$
Vậy
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

5. Trong một số các tính toán sau này, ta thường sử dụng các khai triển Taylor của các hàm sơ cấp cơ bản đến cấp 3, cấp 4 hoặc cấp 5. Để thuận tiện cho công việc đó, chúng ta liệt kê một vài khai triển Taylor thường gặp

   (a) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$

   (b) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

   (c) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

   (d) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$

   (e) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$

   (f) $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)$

   (g) $\ln\cos x = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$

   (h) $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$

   (i) $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + o(x^4)$

   (j) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + \dfrac{5x^6}{16} + o(x^7)$

   Chẳng hạn để có khai triển Mac Laurin cấp 4 hàm $\ln\cos x$, ta sử dụng khai triển (b) và (c)
$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

Một số ứng dụng của khai triển Taylor

1. Tính đạo hàm cấp n hàm $f(x)=x^3e^x$ tại $x=0$. Ta đã biết

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}+o(x^{n-3})$$

Suy ra

$$f(x)=x^3e^x=x^3+\frac{x^4}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-3)!}+o(x^n)$$

Mặt khác trong công thức khai triển Taylor (3.6), hệ số của x^n bằng

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{(n-3)!}\quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(0)=\frac{n!}{(n-3)!}=n(n-1)(n-2).$$

2. Cho hàm $f(x)=\frac{x}{1+x^3}$. Hãy tính $f^{(7)}(0)$.

Sử dụng khai triển Mac Laurin hàm $f(t)=(1+t)^\alpha$ với $\alpha=-1$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+o(t^2),\quad\text{thay}\quad t=x^3\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6+o(x^6).$$

Suy ra

$$f(x)=\frac{x}{1+x^3}=x-x^4+x^7+o(x^7)\quad\Rightarrow\quad f^{(7)}(0)=7!=5040.$$

3. Khai triển Mac Laurin hàm $f(x)=\sin(\sin x)$ đến số hạng x^4, rồi áp dụng để tính $f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$. Từ khai triển $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ ta có

$$\sin(\sin x)=\sin(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))=x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{6}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^3+o(x^4)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{6}x^3+o(x^4))=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

Vậy $f^{(3)}(0)=-\frac{1}{3}\cdot 3!=-2,\quad f^{(4)}(0)=0.$

4. Xét hàm
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x = 0 \end{cases}$$
Dễ dàng chứng minh f có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(x) = o(x^n)$ là VCB cấp cao hơn x^n trong quá trình $x \to 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0.$$
Đẳng thức $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ chứng tỏ các hệ số trong khai triển Taylor hàm f đều bằng 0, vậy $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi số tự nhiên n.

5. Sử dụng khai triển $\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ để tính giới hạn
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

6. Sử dụng khai triển
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$
để tính gần đúng số e với sai số bé hơn 0,001.
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1$$
Chọn n sao cho phần dư $R_n = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0,001$. Dễ dàng nhận thấy với $n = 6$ số dư trong phép xấp xỉ trên bé hơn 0,001. Vậy
$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,71806.$$

3.2.3 Quy tắc LHospital và ứng dụng để khử dạng vô định

Ta nói giới hạn
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (hoặc có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$). Một cách tương tự các dạng

$$+\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

cũng được gọi là các dạng vô định. Giới hạn của hàm tương ứng với các dạng vô định có thể tồn tại hoặc không tồn tại. Trong mục này ta sẽ nêu ra một phương pháp, quy tắc L'Hospital, khá hiệu quả để tìm giới hạn của hàm ứng với các dạng vô định kể trên.

Định lí 3.2.7 (Quy tắc LHospital 1) *Giả sử f và g là các hàm khả vi tại lân cận điểm x_0, thỏa mãn điều kiện $f(x_0) = g(x_0) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ x_0).*

$$\textit{Nếu} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \textit{khi đó} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Chứng minh. Áp dụng định lí Cauchy cho các hàm f và g (sử dụng giả thiết $f(x_0) = g(x_0) = 0$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

trong đó c nằm giữa x và x_0. Chuyển qua giới hạn $x \to x_0$ kéo theo $c \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A. \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng định lí vẫn đúng nếu ta thay điều kiện $f(x_0) = g(x_0) = 0$ bởi điều kiện $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Định lí cũng đúng nếu thay cho các giới hạn đã xét trong định lí bằng các giới hạn một phía.

Ta có quy tắc L'Hospital cho trường hợp $x \to \infty$ thể hiện trong định lí sau

Định lí 3.2.8 (Quy tắc LHospital 2) *Giả sử f và g là các hàm khả vi trong lân cận của $+\infty$, thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó.*

$$\textit{Nếu} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \textit{khi đó} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Chứng minh. Đặt $x = \frac{1}{t}$ và nhận xét $x \to +\infty$ khi $t \to 0+$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = A. \blacksquare$$

Hiển nhiên định lí vẫn đúng nếu thay cho giới hạn $x \to +\infty$ đã xét trong định lí là giới hạn $x \to -\infty$.

Định lí 3.2.9 (Quy tắc LHospital 3) *Giả sử f và g là các hàm khả vi tại lân cận điểm x_0, $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ x_0). Ngoài ra*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Khi đó

$$\text{nếu} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{thì} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Chứng minh. Với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại một lân cận V của điểm x_0 sao cho

$$A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon, \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

Áp dụng định lí Cauchy cho các hàm f và g trên đoạn $[x_0, x_1]$ $(x_0, x_1 \in V \setminus \{x_0\})$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

trong đó c nằm giữa x và x_1. Mặt khác

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}}{\frac{f(x)-f(x_1)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ suy ra với x_1 cố định và cho $x \to x_0$ ta được $\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}} \to 1$. Vậy

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \varepsilon$$

Suy ra

$$\left|\liminf_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}-\limsup_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le 2\varepsilon.$$

Do $\varepsilon>0$ tùy ý nên $\liminf\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\limsup\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ và

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\liminf_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\limsup_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A. \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng quy tắc L'Hospital 2 (xét giới hạn trong quá trình $x\to\pm\infty$) được suy ra từ quy tắc L'Hospital 1 bằng phép đổi biến $x=\frac{1}{t}$. Hoàn toàn tương tự ta có thể khẳng định quy tắc L'Hospital 3 cũng đúng trong quá trình $x\to\pm\infty$.

Các quy tắc L'Hospital 1, 2, 3 nêu trên nhằm khử các dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Các dạng vô định khác đều có thể đưa về một trong 2 dạng vô định trên và áp dụng các quy tắc L'Hospital để tính giới hạn.

Ví dụ 3.2.2 *(Về áp dụng quy tắc LHospital)*

1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hospital

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

   Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ vẫn có dạng $\frac{0}{0}$, ta áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

2. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{6\sin 3x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{18\cos 6x}=\frac{2}{9}$$

3. Tìm giới hạn sau trong quá trình $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^2 x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^2}=0$$

4. Từ ví dụ trên ta có thể mở rộng hơn: *hàm loga (cơ số lớn hơn 1) tiến ra vô cùng chậm hơn rất nhiều so với hàm lũy thừa.* Thật vậy xét giới hạn sau (với k lớn tùy ý và $\alpha > 0$ nhỏ tùy ý)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a^k x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log_a x}{x^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^k =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)'}{(x^{\frac{\alpha}{k}})'}\right)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha}{k}\ln a \cdot x^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^k = 0.$$

5. Ta cũng có khẳng định: *hàm mũ (cơ số lớn hơn 1) tiến ra vô cùng nhanh hơn rất nhiều so với hàm lũy thừa.* ($a > 1$ và k lớn tùy ý)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{x}{k}}}{x}\right)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{x}{k}}\ln a}{1}\right)^k = +\infty$$

6. Tìm giới hạn (có dạng vô định $+\infty - \infty$)

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^4}$$

Ở đây ta thay mẫu số bằng VCB tương đương $x^2\sin^2 x \sim x^4$ để sau khi áp dụng quy tắc L'Hospital hàm cần tính giới hạn có dạng gọn hơn

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x + \sin x}{x}\right)\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right) = 2\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital cho giới hạn này

$$A = 2\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{2}{3}$$

7. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Việc tìm giới hạn trên tương đương với việc tìm giới hạn (lấy loga hai vế)

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = 0$$

Vậy giới hạn cần tìm $L = 1$.

8. Tìm giới hạn
$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos } x\right)^{\frac{1}{x}}.$$
Tương tự ví dụ trên
$$\ln A = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos } x\right) = -\frac{2}{\pi}.$$
Suy ra $A = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Khi áp dụng các quy tắc L'Hospital cần chú ý rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ có thể không tồn tại trong khi giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tồn tại hữu hạn. Chẳng hạn khi $x\to+\infty$ giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}$ thuộc dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ và
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x} = 1 \quad \text{tuy nhiên} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\cos x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}(1+\sin x)$$
không tồn tại.

3.3 Cực trị, hàm lồi lõm và ứng dụng đạo hàm khảo sát hàm số

3.3.1 Hàm đơn điệu và phương pháp tìm cực trị hàm số

Định nghĩa 3.3.1 *Hàm $f : X\to\mathbb{R}$ được gọi là đơn điệu tăng (hoặc không giảm) trên tập $X\subset\mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2\in X$ và $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1)\le f(x_2)$.*
Hàm $f : X\to\mathbb{R}$ được gọi là đơn điệu giảm (hoặc không tăng) trên tập X nếu với mọi $x_1, x_2\in X$ và $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1)\ge f(x_2)$.
Nếu với mọi $x_1, x_2\in X$ và $x_1 < x_2$ ta luôn có $f(x_1) < f(x_2)$ khi đó ta nói hàm f tăng thực sự trên X. Định nghĩa tương tự với hàm giảm thực sự.
Một hàm đơn điệu tăng (hoặc tăng thực sự), đơn điệu giảm (hoặc giảm thực sự) được gọi chung là hàm đơn điệu.

Dựa vào đạo hàm hàm số ta có các tiêu chuẩn sau để khảo sát tính đơn điệu của hàm.

Định lí 3.3.1 *Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi trên (a, b)*

- *Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f là hàm hằng số $f(x) \equiv C$ trên (a, b).*
- *Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì f là hàm tăng (giảm) thực sự trên (a, b).*
- *Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì f là hàm đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên (a, b).*

Chứng minh. Phần thứ nhất của định lí là cơ sở cho khái niệm tích phân bất định sau này. Để chứng minh f là hàm hằng số trên (a, b) ta phải chứng minh

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{với mọi} \quad x_1, x_2 \in (a, b).$$

Thật vậy áp dụng định lí Lagrange cho đoạn $[x_1, x_2]$, tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ để

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

Phần thứ thứ hai, thứ ba của định lí được chứng minh tương tự. Chẳng hạn để chứng minh f là hàm tăng thực sự trên (a, b), xét $f(x_1) - f(x_2)$ với $x_1 > x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ và chỉ tồn tại hữu hạn điểm thuộc (a, b) để $f'(x) = 0$ khi đó hàm f vẫn tăng thực sự trên (a, b).

Bây giờ ta nêu một phương pháp tìm cực trị hàm số dựa vào nhận xét sau: Nếu hàm f liên tục tại x_0 và trong lân cận trái $(x_0 - \delta, x_0]$ của x_0 hàm f đơn điệu tăng (giảm), trong lân cận phải $[x_0, x_0 + \delta)$ của x_0 hàm f đơn điệu giảm (tăng), khi đó hàm đạt cực đại (cực tiểu) tại $x = x_0$. Ta tóm tắt nhận xét đó thành quy tắc tìm cực trị hàm số

Định lí 3.3.2 *Cho hàm f liên tục tại x_0, khả vi trong một lân cận của x_0 (có thể trừ chính x_0)*

- *Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi x biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$ thì f đạt cực đại tại $x = x_0$.*
- *Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi x biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$ thì f đạt cực tiểu tại $x = x_0$.*
- *Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$ thì f không đạt cực trị tại x_0.*

Ví dụ 3.3.1

1. Tìm cực trị hàm $f(x) = xe^x$.
   Xét dấu $f'(x) = (x+1)e^x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	

   Hàm $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi x biến thiên tăng vượt qua $x = -1$. Vậy f đạt cực tiểu tại $x = -1$ và giá trị cực tiểu bằng $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

2. Tìm cực trị hàm $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
   Hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và khả vi tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$. Xét dấu
$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$
   Hàm $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi x biến thiên tăng vượt qua $x = 0$ (hàm $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$). Vậy hàm $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu bằng $f(0) = 0$.

Trường hợp hàm f khả vi tại lân cận điểm x_0, theo định lí Fermat điều kiện cần để hàm đạt cực trị tại x_0 là $f'(x_0) = 0$. Định lí sau đưa ra một phương pháp khác để tìm cực trị hàm số dựa vào đạo hàm cấp hai tại x_0.

Định lí 3.3.3 *Hàm f khả vi đến cấp hai tại x_0. Giả thiết $x = x_0$ là điểm dừng $f'(x_0) = 0$ và đạo hàm cấp hai tại đó $f''(x_0) \neq 0$. Khi đó f đạt cực trị tại x_0. Chi tiết hơn nếu*
- $f''(x_0) > 0$ *thì f đạt cực tiểu tại x_0.*
- $f''(x_0) < 0$ *thì f đạt cực đại tại x_0.*

Chứng minh. Giả sử $f''(x_0) > 0$. Từ định nghĩa của đạo hàm cấp hai
$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$
suy ra tồn tại một lân cận của x_0 để với mọi x trong lân cận đó
- $f'(x) < 0$ nếu $x < x_0$ và
- $f'(x) > 0$ nếu $x > x_0$.

Như vậy $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi x biến thiên tăng vượt qua $x = x_0$, theo định lí trên, hàm f đạt cực tiểu tại x_0.
Trường hợp $f''(x_0) < 0$ định lí được chứng minh tương tự. ■

Định lí vừa chứng minh là trường hợp riêng của định lí sau

Định lí 3.3.4 *Hàm f khả vi đến cấp $n+1$ tại x_0 và*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0, f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Nếu n là số chẵn thì hàm không đạt cực trị tại x_0. Nếu n là số lẻ và
- *$f^{(n+1)}(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.*
- *$f^{(n+1)}(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0.*

Chứng minh. Theo công thức khai triển Taylor (3.6) hàm f tại lân cận điểm x_0

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1}).$$

Do $o((x-x_0)^{n+1})$ là VCB cấp cao hơn $(x-x_0)^{n+1}$, ta đặt

$$o((x-x_0)^{n+1}) = \alpha(x)(x-x_0)^{n+1},$$

trong đó $\alpha(x)$ là VCB trong quá trình $x \to x_0$. Ta có

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \alpha(x)\right)(x-x_0)^{n+1}.$$

Vì $\lim \alpha(x) = 0$, tồn tại một lân cận của x_0 để thừa số thứ nhất của vế phải luôn khác 0 với mọi x thuộc lân cận đó. Xét trường hợp n là số chẵn, khi đó $n+1$ lẻ và thừa số thứ hai $(x-x_0)^{n+1}$ đổi dấu khi x biến thiên vượt qua $x = x_0$. Suy ra $f(x) - f(x_0)$ cũng đổi dấu khi x biến thiên vượt qua $x = x_0$, hàm không đạt cực trị tại x_0.
Trường hợp n là số lẻ, thừa số thứ hai $(x-x_0)^{n+1} \geq 0$ với mọi x trong lân cận đủ nhỏ của x_0 và do đó dấu của $f(x)-f(x_0)$ dương hoặc âm tùy theo $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ hoặc $f^{(n+1)}(x_0) < 0$. Định lí được suy ra từ khẳng định này. ■

Ví dụ 3.3.2

1. Tìm cực trị hàm $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$.
   Ta có $f'(x) = 4(x-1)^3 = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$. Tại điểm dừng duy nhất $x = 1$
   $$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 4! = 24 > 0.$$
   Suy ra f đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu $f(1) = 0$.

2. Tìm cực trị hàm
   $$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} & \text{nếu } x \geq 1 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$
   Hàm không xác định tại $x = 0$.
   Hàm liên tục tại $x = 1$ nhưng không khả vi tại đó. Ta thấy $f(x) \geq 0\ \forall x \neq 0$ và $f(1) = 0$. Vậy hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$.
   $$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}(2-x) & \text{nếu } x > 1 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^3}(x-2) & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$
   $f'(x) = 0$ tại điểm $x = 2$ và $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi x biến thiên tăng vượt qua $x = 2$, hàm f đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $f(2) = \frac{1}{4}$.

   Ta cũng có thể khẳng định hàm đạt cực đại tại $x = 2$ bằng cách xét đạo hàm cấp hai tại điểm dừng $x = 2$. Tại lân cận đó
   $$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2}{x^4}(x-3) \ \Rightarrow\ f''(2) = -\frac{1}{8} < 0.$$

3.3.2 Hàm lồi, lõm

Trước hết chúng ta đưa vào định nghĩa sau

Định nghĩa 3.3.2 *Hàm f(x) xác định trên (a,b) được gọi là lồi trên (a,b) nếu:*
$$f((1-t)x_1 + tx_2)) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{3.8}$$
với mọi $x_1, x_2 \in (a,b)$ và mọi số thực t thoả mãn $0 \leq t \leq 1$.

Nhận xét
Dễ dàng nhận thấy $x_1 \le (1-t)x_1 + tx_2 \le x_2$ khi $0 \le t \le 1$, do vậy khi t biến thiên từ 0 đến 1, vế trái của (3.8) biểu diễn một cung của đồ thị hàm $f(x)$ tương ứng với khoảng (x_1, x_2), còn vế phải của (3.8) là đoạn thẳng nối 2 điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$. (Hai điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$ là hai đầu mút của cung). Như vậy định nghĩa trên về hàm lồi có thể phát biểu dưới dạng sau:

Hàm $f(x)$ xác định trên (a,b) được gọi là lồi trên (a,b) nếu mọi cung của đồ thị đều nằm ở phía trên dây tương ứng với cung đó.

Bổ đề 3.3.1 *Giả sử hàm $f(x)$ lồi trên khoảng (a,b) và $x_0 \in (a,b)$ là điểm tuỳ ý. Đặt $F_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, khi đó hàm $F(x)$ đơn điệu giảm trên tập $(a,b) \setminus \{x_0\}$.*

Chứng minh
• Xét trường hợp $x_1 < x_0 < x_2$ khi đó

$$F_{x_0}(x_1) \ge F_{x_0}(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \ge \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \le f(x_0).$$

Bất đẳng thức cuối này đúng do định nghĩa hàm lồi (với $\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} = t$, $\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} = 1-t$ và $0 \le t \le 1$).
• Các trường hợp còn lại ($x_0 < x_1 < x_2$ và $x_1 < x_2 < x_0$) việc chứng minh $F_{x_0}(x_1) \ge F_{x_0}(x_2)$ được tiến hành tương tự. ■

Định lí 3.3.5 *Nếu hàm $f(x)$ lồi trên khoảng (a,b), khi đó hàm liên tục trên khoảng (a,b) đó.*

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh hàm lồi $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in (a,b)$ tuỳ ý. Thật vậy, chọn $x_1, x_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 < x_0 < x_2$, khi đó theo bổ đề với mọi x thuộc lân cận của x_0 và $x_1 < x < x_2$ $(x \ne x_0)$: $F_{x_0}(x_1) \ge F_{x_0}(x) \ge F_{x_0}(x_2)$, suy ra

$$F_{x_0}(x_2).(x-x_0) \le f(x) - f(x_0) \le F_{x_0}(x_1).(x-x_0)$$

nếu $x_0 < x$. Vì vậy $\lim\limits_{x \to x_0+}(f(x) - f(x_0)) = 0$ hay $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Chứng minh tương tự $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ (đpcm). ■

Định lí 3.3.6 *Cho hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng (a,b), khi đó điều kiện cần và đủ để $f(x)$ lồi trên khoảng (a,b) là hàm $f'(x)$ đơn điệu giảm trên (a,b).*

Chứng minh

Điều kiện cần Lấy $x_1 < x_2$ tuỳ ý thuộc khoảng (a,b). Giả sử $x_1 < x < x_2$, theo bổ đề 3.3.1, $F_{x_1}(x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ đơn điệu giảm, vì vậy theo tiêu chuẩn hội tụ của hàm đơn điệu và bị chặn, tồn tại các giới hạn:

$$\lim_{x\to x_1+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq \lim_{x\to x_2-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

Mặt khác theo giả thiết hàm $f(x)$ khả vi trên (a,b), suy ra $f'(x_1) \geq f'(x_2)$.

Điều kiện đủ Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy giả sử hàm $f(x)$ không lồi trên (a,b), khi đó tồn tại các điểm $x_1 < x < x_2$, kí hiệu $x = (1-t)x_1 + tx_2$, trong đó $0 \leq t \leq 1$, sao cho giá trị của hàm tại x nằm dưới dây cung nối 2 điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$: $f(x) = f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Suy ra

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Bất đẳng thức cuối này theo công thức Lagrange có thể viết dưới dạng tương đương $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, trong đó $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, điều này vô lí với giả thiết hàm $f'(x)$ đơn điệu giảm. ■

Từ định lí trên ta dễ dàng suy ra hệ quả

Hệ quả 3.3.1 *Cho hàm $f(x)$ khả vi đến cấp 2 trên khoảng (a,b), khi đó điều kiện cần và đủ để $f(x)$ lồi trên khoảng (a,b) là $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a,b)$.*

Định lí 3.3.7 *Cho hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng (a,b). Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ lồi trên khoảng (a,b) là mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số đều nằm trên đường cong biểu diễn đồ thị của hàm số đó.*

(Nói cách khác $f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \geq f(x)$ với mọi $x \in (a,b)$, trong đó $x_0 \in (a,b)$ tuỳ ý.)

Chứng minh

Điều kiện cần $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $(x_0, f(x_0))$. Ta phải chứng minh với mọi $x \in (a, b)$, $L(x) \geq f(x)$ hay $f'(x_0)(x-x_0) \geq f(x)-f(x_0) = f'(\xi_x)(x-x_0)$ (theo công thức Lagrange, trong đó ξ_x nằm giữa x_0 và x). Điều này suy ra từ từ định lí 3.3.6, theo đó $f'(x_0) - f'(\xi_x)$ và $x - x_0$ luôn cùng dấu.

Điều kiện đủ Ta chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy giả sử hàm $f(x)$ không lồi trên (a, b), khi đó tồn tại các điểm $x_1 < x_0 < x_2$, kí hiệu $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$, trong đó $0 \leq t \leq 1$, sao cho giá trị của hàm tại x_0 nằm dưới dây cung nối 2 điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$:

$$f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2)) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{3.9}$$

Xét tiếp tuyến tại $(x_0, f(x_0))$ của hàm số, gọi $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ là phương trình tiếp tuyến. Khi đó theo giả thiết của điều kiện đủ, tiếp tuyến nằm trên đồ thị hàm số tức là

$$L(x_1) \geq f(x_1), \quad \text{và} \quad L(x_2) \geq f(x_2).$$

Mặt khác do $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ suy ra

$$f(x_0) = (1-t)L(x_1) + tL(x_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

vô lí với (3.9) trong giả thiết phản chứng. ∎

Nhận xét

• Đẳng thức (3.8) trong định nghĩa hàm lồi cũng có thể viết dưới dạng sau:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) \quad \text{với mọi} \quad x_1, x_2 \in (a, b)$$

$$(0 \leq t_1, t_2, t_1 + t_2 = 1).$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng suy ra

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n) \tag{3.10}$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b), \quad 0 \leq t_1, t_2, ..., t_n, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1.$

Rất nhiều bất đẳng thức quan trọng được suy ra từ bất đẳng thức hàm lồi trên đây, chúng ta sẽ đề cập đến sau ở phần các ví dụ.

• *Hàm $f(x)$ được gọi là lõm trên (a,b)* nếu $-f(x)$ là hàm lồi trên (a,b). Nói cách khác hàm $f(x)$ lõm trên (a,b) nếu

$$f(t_1x_1+t_2x_2)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)\quad \text{với mọi}\quad x_1,x_2\in(a,b)$$

$$(0\le t_1,t_2,t_1+t_2=1).$$

hay

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n) \tag{3.11}$$

với mọi $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$, $\quad 0\le t_1,t_2,...,t_n,\quad t_1+t_2+\cdots+t_n=1$.

Sử dụng các kết quả trên bạn đọc dễ dàng suy ra các điều kiện cần và đủ để hàm lõm trên một khoảng.

• Điểm thuộc đồ thị hàm số và phân cách giữa cung lồi, cung lõm của đường cong được gọi là *điểm uốn của đường cong*. Từ hệ quả của định lí và các kết quả tương tự liên quan tới hàm lõm ta có thể khẳng định

Nếu đạo hàm cấp hai $f''(x)$ đổi dấu khi x biến thiên vượt qua $x=x_0$ thì điểm $U(x_0,f(x_0)$ thuộc đồ thị hàm số là điểm uốn của đường cong biểu diễn đồ thị hàm số đó.

Ví dụ 3.3.3

1. Hàm $f(x)=x^2$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}$ vì $f''(x)=2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2. Hàm $f(x)=x^\alpha$ với $0<\alpha<1$ là hàm lồi trên khoảng $(0,+\infty)$ vì $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0$ với mọi $x>0$.
   Đặc biệt $f(x)=\sqrt{x}$ là hàm lồi trên khoảng $(0,+\infty)$.

3. Hàm $f(x)=a^x$ với $a>0,\ a\ne1$ là hàm lõm trên cả khoảng $(-\infty,+\infty)$ vì $f''(x)=a^x(\ln a)^2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

4. Hàm $f(x)=e^{-x^2}$ có $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$.
   Đạo hàm cấp hai $f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}=0$ khi và chỉ khi $x=\pm\frac{1}{\sqrt2}$ đồng thời $f''(x)$ đổi dấu khi x biến thiên vượt qua $x=\pm\frac{1}{\sqrt2}$. Vậy hàm có hai điểm uốn
   $$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt e}\right)\quad \text{và}\quad M_2\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt e}\right)$$

5. Hàm $f(x) = \ln x$ là hàm lồi trong khoảng $(0, +\infty)$ vì $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ với mọi $x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức (3.10) với $t_i = \frac{1}{n}$, ta được bất đẳng thức Cauchy quen thuộc sau:

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Tổng quát hơn, giả sử α_i là các số dương tuỳ ý, $1 \leq i \leq n$. Áp dụng bất đẳng thức (3.10) với $t_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$, ta được bất đẳng thức Cauchy tổng quát:

$$\frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} \geq \left(\prod x_i^{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\sum \alpha_i}}.$$

6. Hàm $f(x) = x^p$ với $p > 1$ là hàm lõm trên $(0, +\infty)$. Thật vậy xét đạo hàm cấp hai $f''(x) = p(p-1)x^{p-1} > 0$ với mọi $x > 0$. Áp dụng định nghĩa hàm lõm với $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ ta được

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p}{2}$$

Tổng quát hơn áp dụng bất đẳng thức (3.11) với các hệ số t_i thích hợp, ta được bất đẳng thức Cauchy-Holder:

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.12}$$

trong đó $p, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Thật vậy với các số $u_1, u_2, ..., u_n$ dương tuỳ ý, áp dụng bất đẳng thức (3.11) ta được

$$\left(\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n}{\sum u_i}\right)^p \leq \frac{1}{\sum u_i}(u_1 x_1^p + u_2 x_2^p + \cdots + u_n x_n^p),$$

hay

$$(\sum u_i x_i)^p \leq (\sum u_i)^{p-1} \cdot \sum u_i x_i^p.$$

Thay $u_i = b_i^{\frac{p}{p-1}} (= b_i^q)$ và $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} (\Rightarrow u_i x_i^p = a_i^p)$, ta được bất đẳng thức (3.12).

Bất đẳng thức Cauchy-Bunhacốpxki

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

là trường hợp riêng của (3.12) với $p = 2$.

3.3.3 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Trước hết chúng ta đưa vào khái niệm *tiệm cận* của một đường cong.
Đường thẳng d được gọi là *tiệm cận* của đường cong nếu khoảng cách từ một điểm M thuộc đường cong tới đường thẳng d tiến dần đến 0 khi M chạy ra vô cùng trên đường cong.

Đồ thị đường cong thường được vẽ trong hệ trục tọa độ Đề các, tiệm cận với đồ thị được phân loại thành *tiệm cận đứng, tiệm cận ngang hay tiệm cận xiên* tùy theo vị trí của đường thẳng tiệm cận trong hệ trục tọa độ song song với trục tung, song song với trục hoành hay cắt cả 2 trục tọa độ.

• *Tiệm cận đứng*: đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm $f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

• *Tiệm cận ngang*: đường thẳng $y = b$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm $f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

• *Tiệm cận xiên*: đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm $f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

Chú ý rằng tiệm cận ngang là trường hợp đặc biệt của tiệm cận xiên khi hệ số góc của đường thẳng tiệm cận xiên bằng 0.

Hiển nhiên nếu $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm $f(x)$ khi đó

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{và} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax).$$

Ví dụ 3.3.4

1. Hàm $f(x) = \operatorname{tg} x$ có rất nhiều tiệm cận đứng: $x = \pm\frac{\pi}{2},\ x = \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty, \ldots$$

2. Hàm $f(x) = \operatorname{arctg} x$ có hai tiệm cận ngang $y = \frac{\pi}{2}$ và $y = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

3. Hàm $f(x) = 2x + 1 + \frac{\sin x}{x}$ có tiệm cận xiên $y = 2x + 1$ vì

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

4. Xác định các tiệm cận hàm $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Xét các giới hạn

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x\right) = -1.$$

Vậy $y = \dfrac{\pi}{2} x - 1$ là tiệm cận xiên về phía $+\infty$.

Tương tự khi điểm thuộc đồ thị có hoành độ $x \to -\infty$ đồ thị có tiệm cận xiên

$$y = -\frac{\pi}{2} x - 1.$$

Cho đến bây giờ chúng ta đã làm quen với một số khái niệm liên quan tới hàm số như tính đơn điệu, cực trị, hàm lồi lõm, tiệm cận. Nó giúp ta nắm được quy luật biến thiên của hàm. Tuy nhiên để có cái nhìn tổng quát hơn, người ta cần vẽ đồ thị hàm số.

Người ta thường tiến hành các bước sau đây trước khi vẽ đồ thị hàm số và gọi chung là **quy trình khảo sát hàm số**.
1. Tìm miền xác định (chỉ rõ các điểm gián đoạn của hàm). Nhận xét về tính chẵn, lẻ tuần hoàn nếu có.
2. Chỉ rõ chiều biến thiên (hay các khoảng mà hàm đơn điệu trên đó). Tính các cực trị hàm số, khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn của đồ thị. (Nếu đạo hàm bậc hai quá phức tạp ta có thể bỏ qua việc khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn).
3. Tìm các đường thẳng tiệm cận của đồ thị.
4. Dựa vào các kết quả trên lập bảng biến thiên ghi tóm tắt các tính chất vừa thu được.
5. Vẽ đồ thị hàm số, có thể bổ sung thêm một số điểm thuộc đồ thị để vẽ cho chính xác hơn.

Ví dụ 3.3.5

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

Hàm xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}$$

Hàm $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và $x = 2$. $f'(x) = 0$ tại $x = \frac{4}{3}$. Hàm f đơn điệu tăng trên khoảng $(0, \frac{4}{3})$ và đơn điệu giảm trong các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(\frac{4}{3}, +\infty)$.

Do vậy hàm đạt cực đại tại $x = \frac{4}{3}, f(\frac{4}{3}) = 2\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$.

Đạo hàm cấp hai

$$f''(x) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{x^2}{(2x^2 - x^3)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{không xác định tại} \quad x = 0, x = 2.$$

Như vậy $f''(x) < 0$ trong khoảng $(-\infty, 0)$ (hàm $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$) và $f''(x) < 0$ trong khoảng $(0, 2)$. Do đó hàm lồi trên các khoảng $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ và lõm trên khoảng $(2, +\infty)$.
Điểm $M(2, 0)$ thuộc đồ thị là điểm uốn duy nhất.

Bảng biến thiên của f được ghi lại dưới đây

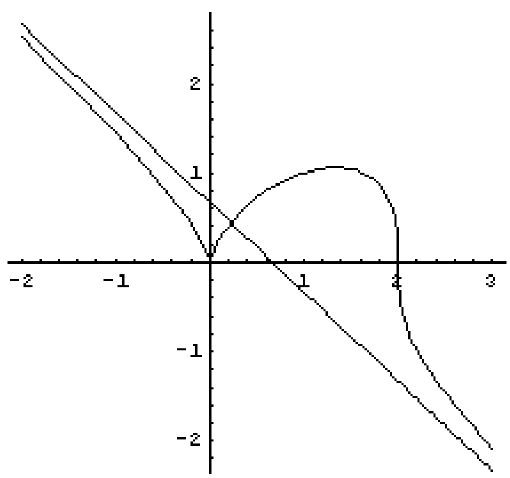
x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$\|$	$-$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tiệm cận của đồ thị

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x) = \frac{2}{3}$$

Đồ thị có tiệm cận xiên về cả 2 phía $y = -x + \frac{2}{3}$ khi $x \to \pm\infty$.
Vậy đồ thị có dạng



Hình 3.2: Đồ thị hàm $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số

Xét một hệ hai hàm

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \text{với} \qquad t \in T.$$

Tập hợp các điểm M có tọa độ $(x(t), y(t))$ trên mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Đề các, với tham số t biến thiên trong tập T được gọi là *đường cong cho dưới dạng tham số*

Ví dụ. Đường thẳng $y = x$ cũng là đường cong cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Đường thẳng $y = x$ có thể cho dưới dạng tham số khác

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Như vậy một đường cong có thể được cho bởi các dạng tham số khác nhau.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \text{ biểu diễn tia phân giác góc phần tư thứ nhất.}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1], \text{ biểu diễn một đoạn thẳng của tia phân giác } y = x$$

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi], \text{ biểu diễn đường tròn tâm O bán kính } R$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi], \quad \text{là dạng tham số của ellip } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Qũy đạo chuyển động của các vật thể thường được cho dưới dạng tham số. Trong phần này chúng ta sẽ trình bày phương pháp khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho dưới dạng tham số.

Các bước khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số được tiến hành như khảo sát hàm $f(x)$ trước đây

1. Tìm miền xác định của các hàm $x(t), y(t)$. Nhận xét về tính chẵn, lẻ tuần hoàn nếu có.
2. Khảo sát sự biến thiên của các hàm $x(t), y(t)$ thông qua việc tính các đạo hàm $x'(t), y'(t)$.
3. Tìm các đường thẳng tiệm cận của đồ thị đường cong. Lưu ý rằng nếu $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ mà x hoặc $y \to \pm\infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận. Cụ thể

- Nếu trong quá trình $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ mà

$$\lim x(t) = a, \ \lim y(t) = \pm\infty \quad \text{thì} \quad x = a \quad \text{là tiệm cận đứng.}$$

- Nếu trong quá trình $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ mà

$$\lim x(t) = \pm\infty, \ \lim y(t) = b \quad \text{thì} \quad y = b \quad \text{là tiệm cận ngang.}$$

- Nếu trong quá trình $t \to t_0$ hoặc $t \to \pm\infty$ cả hai hàm $x(t), y(t)$ đều dần tới vô cùng và

$$a = \lim \frac{y(t)}{x(t)}, \ \lim(y(t) - ax(t)) = b \ \Rightarrow \ y = ax + b \ \text{ là tiệm cận ngang.}$$

4. Lập bảng biến thiên ghép đồng thời cả hai hàm $x(t), y(t)$ vào một bảng.
5. Vẽ đồ thị hàm số, có chú ý đến tiếp tuyến tại một số điểm đặc biệt để vẽ đồ thị chính xác hơn.

Nhận xét về cách tính *hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong cho dưới dạng tham số*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Giả sử $M_0(x_0), y_0), \ x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ là một điểm thuộc đường cong và tại lân cận điểm t_0 hàm $x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$, khi đó cung đường cong xung quanh điểm M_0 là đồ thị của hàm $f(x) = y\big(t(x)\big)$ (hàm hợp của $y(t)$ và $t(x)$. Nói cách khác đồ thị của hàm $f(x)$ tại lân cận điểm $x = x_0$ biểu diễn cung đường cong cho dưới dạng tham số xung quanh M_0. Như vậy hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại M_0 bằng

$$f'(x_0) = y'(t(x_0)) \cdot t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Trong nhiều tài liệu người ta thường viết tắt

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{y'(t_0)dt}{x'(t_0)dt} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Việc khảo sát tính lồi lõm của đường cong cho dưới dạng tham số cũng được tính thông qua đạo hàm cấp hai

$$f''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot t'_x =$$

$$= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

Ví dụ 3.3.6

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho bởi $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0)$

Nhận xét rằng $x(t)$ là hàm chẵn, $y(t)$ là hàm lẻ. Như vậy điểm $M_1(x(t), y(t))$ và $M_2(x(-t), y(-t))$ thuộc đồ thị tương ứng với các tham số t và $-t$ đối xứng nhau qua trục hoành. Suy ra đồ thị nhận trục Ox làm trục đối xứng. Các hàm $x(t), y(t)$ lại tuần hoàn với chu kì 2π do đó ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong khoảng $[0, \pi]$. (Đồ thị của toàn bộ đường cong sẽ được bổ sung thêm phần lấy đối xứng qua trục hoành).

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t = 0 \quad \text{khi } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t = 0 \quad \text{khi } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

Đường cong không có tiệm cận ($x(t), y(t)$ bị chặn, không dần tới ∞).

Lập bảng biến thiên

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$-$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	0		∞		0

Hàng cuối cùng của bảng biến thiên cho ta hệ số góc của tiếp tuyến tại các điểm ứng với $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$$\lim_{t\to 0}\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\cos t} = 0, \quad \lim_{t\to \frac{\pi}{2}}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \infty, \quad \lim_{t\to \pi}\frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

Như vậy tiếp tuyến tại các điểm thuộc đồ thị ứng với $t = 0, t = \pi$ chính là trục hoành.
Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị ứng với $t = \frac{\pi}{2}$ là trục tung Oy.

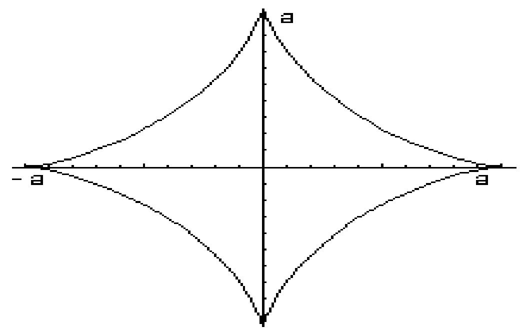
Đạo hàm cấp hai tại điểm thuộc đồ thị ứng với t

$$f''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$$

Hàm không có đạo hàm cấp hai tại điểm thuộc đồ thị ứng với $t = \frac{\pi}{2}$ và $f''(x) > 0$ tại các điểm khác. Do đó đồ thị gồm 2 cung lõm (cung thứ nhất ứng với $0 < t < \frac{\pi}{2}$ hay $0 < x < a$, cung thứ hai ứng với $0 < \frac{\pi}{2} < t < \pi$ hay $-a < x < 0$).

Đường cong mang tên *đường Axtrôit*. Người ta còn viết phương trình Axtrôit ẩn trong hệ thức

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



Hình 3.3: Đồ thị đường Axtrôit

Hệ tọa độ cực và khảo sát đường cong trong hệ tọa độ cực

Trong mặt phẳng chọn một điểm O cố định làm *gốc cực* và một tia Ox làm *trục cực*. Vị trí của mỗi điểm M trong mặt phẳng được xác định hoàn toàn bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$.
Gọi độ dài của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ (kí hiệu $r = |\overrightarrow{OM}|$) là *bán kính véc tơ* của điểm M, góc giữa trục cực và véc tơ $\overrightarrow{OM}$ (kí hiệu $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM})$) là *góc cực*.
Góc φ có thể nhận được bằng cách quay trục cực quanh gốc O cho tới khi trục cực trùng với tia chứa véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Góc φ do vậy là một góc lượng giác $-\infty < \varphi < +\infty$. Cặp số (r, φ) xác định điểm M và được gọi là *tọa độ cực* của điểm M.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng tương ứng một-một với cặp tọa độ (r, φ) của nó nếu ta hạn chế chỉ xét các cặp tọa độ (r, φ) thỏa mãn điều kiện

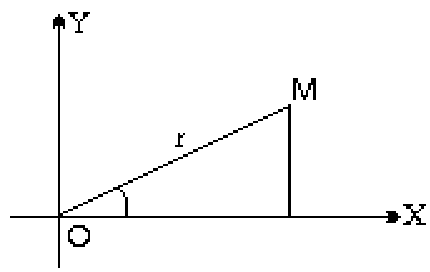
$$r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Trong phần này và các phần tiếp theo chúng ta luôn xét tọa độ cực mở rộng: mỗi cặp (r, φ) với $-\infty < \varphi < +\infty$ và $-\infty < r < +\infty$ xác định duy nhất một điểm M:
• Nếu $r > 0$, M nằm trên tia tạo với trục cực Ox góc lượng giác φ và có bán kính véc tơ bằng r.
• Nếu $r < 0$, M nằm trên tia đối của tia tạo với trục cực Ox góc lượng giác φ và có bán kính véc tơ bằng $-r$.

Ví dụ các cặp $(2, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ cùng với $(-2, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ là tọa độ cực của cùng một điểm M.

Người ta gắn hệ trục tọa độ Đề các vào hệ tọa độ cực: gốc cực trùng với gốc gốc O của hệ trục tọa độ Đề các đồng thời trục cực trùng với trục hoành Ox. Hiển nhiên ta có mối quan hệ sau giữa tọa độ cực và tọa độ Đề các của cùng một điểm

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{3.13}$$



Hình 3.4: Tọa độ cực

Thông qua mối quan hệ đó các đường cong trong mặt phẳng (là tập hợp các điểm $M(x, y)$ trong hệ trục tọa độ Đề các thoả mãn các hệ thức liên hệ giữa hoành độ x và tung độ y) đồng thời cũng có thể là tập hợp các điểm M (có tọa độ (r, φ) trong hệ tọa độ cực) thoả mãn hệ thức nào đó.

• Chẳng hạn $r = 2$ (trong hệ tọa độ cực) là tập hợp các điểm có bán kính véc tơ bằng 2, đồng thời cũng là đường tròn

$$x^2 + y^2 = 4$$

trong hệ trục tọa độ Đề các.

• Trong hệ tọa độ cực $\varphi = \frac{\pi}{4}$ là tập hợp các điểm có góc cực bằng $\frac{\pi}{4}$, đồng thời cũng là nửa đường thẳng

$$y = x \quad \text{với } x > 0.$$

• Sử dụng (3.13) ta cũng có thể thấy $r = 2\cos\varphi$ là đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$ trong hệ trục tọa độ Đề các.

Để khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình $r = r(\varphi)$ trong hệ tọa độ cực, người ta cũng tiến hành các bước như khảo sát hàm trong hệ trục tọa độ Đề các

1. Gắn hệ trục tọa độ Đề các vào hệ tọa độ cực như đã trình bày ở trên. Tìm miền xác định của hàm $r = r(\varphi)$, nhận xét về tính chẵn, lẻ tuần hoàn nếu có.

- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm tuần hoàn chu kì T $(r(\varphi) = r(T + \varphi),\ \forall\varphi)$, ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm ứng với φ biến thiên trong một khoảng có độ dài bằng chu kì (chẳng hạn xét trong khoảng $0 \le \varphi < T$). Trong khoảng có độ dài bằng chu kì tiếp theo $T \le \varphi < 2T$, đồ thị nhận được từ cung vừa vẽ bằng cách quay theo chiều dương một góc bằng T xung quanh gốc cực, cứ mỗi lần quay như vậy ta đều được một phần đồ thị của hàm. Ta chỉ dừng lại khi quá trình quay không xuất hiện thêm các cung mới.
- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm chẵn $r(\varphi) = r(-\varphi),\ \forall\varphi$, các điểm $M(r, \varphi)$ và $M'(r, -\varphi)$ cùng thuộc đồ thị luôn luôn đối xứng nhau qua trục hoành (trục cực). Do vậy đồ thị hàm số nhận trục hoành làm trục đối xứng.
- Tương tự nếu $r = r(\varphi)$ là hàm lẻ $-r(\varphi) = r(-\varphi),\ \forall\varphi$, các điểm $M(r, \varphi)$ và $M'(-r, -\varphi)$ cùng thuộc đồ thị luôn luôn đối xứng nhau qua trục tung. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm $r = r(\varphi)$.

3. Tìm các đường thẳng tiệm cận của đồ thị đường cong nếu có. Lưu ý rằng, sử dụng (3.13), cách tìm tiệm cận như đã xét trong phần khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số.

4. Lập bảng biến thiên và có thể tính hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại một số điểm nào đó.

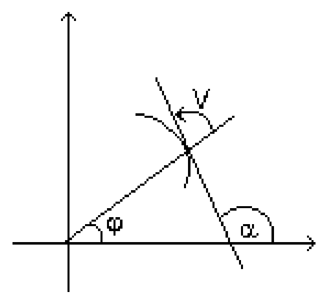
5. Vẽ đồ thị hàm số, bổ sung thêm một số điểm đặc biệt nếu cần để vẽ đồ thị chính xác hơn.

Điểm M thuộc đường cong ứng với góc cực φ và tọa độ của M trong hệ trục tọa độ Đề các

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại điểm M

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$$



Hình 3.5: $\operatorname{tg} V = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$

Nhận xét rằng công thức này dài và khó nhớ. Ta sẽ đưa ra một công thức khác gọn hơn để xác định phương của tiếp tuyến. Kí hiệu V là góc hợp bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến. Khi đó

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}.$$

Nếu $\operatorname{tg} V = 0$ khi đó góc hợp bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến bằng 0, nói cách khác tiếp tuyến tại M và tia OM trùng nhau.
Nếu $\lim_{\varphi} \operatorname{tg} V = \infty$ khi đó góc hợp bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và tiếp tuyến là góc vuông, tiếp tuyến tại M vuông góc với tia OM.

Ví dụ 3.3.7 *(Về các đường cong trong hệ tọa độ cực)*

1. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong $r = a\sin 2\varphi \quad (a > 0)$.
   $r(\varphi) = a\sin 2\varphi$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \pi$ do vậy ta chỉ cần khảo sát hàm số với $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

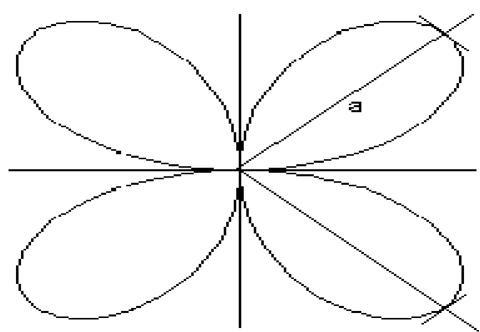
$r(\varphi)$ là hàm lẻ, đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Vậy ta chỉ khảo sát hàm số với $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$r'(\varphi) = 2a\cos 2\varphi,\ r'(\varphi) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Bảng biến thiên

φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\varphi)$	$2a$	$+$	0	$-$	$-2a$
$r(\varphi)$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\mathrm{tg}\, V$	0		∞		0

Vẽ đồ thị đường cong trong góc phần tư thứ nhất rồi lấy đối xứng qua Oy. Quay cung đồ thị vừa vẽ xung quanh O theo chiều dương một góc bằng π ta được toàn bộ đồ thị hàm số. (Xem hình 3.6)



Hình 3.6: Đồ thị $r = a\sin 2\varphi$

2. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong $r = \frac{1}{\varphi}$ với $\varphi > 0$.
   Đạo hàm hàm số $r' = -\frac{1}{\varphi^2} < 0$ với mọi $\varphi > 0$, hàm đơn điệu giảm hay bán kính véc tơ của các điểm trên đường cong luôn giảm khi góc cực φ tăng. Đặc biệt khi φ giảm dần đến 0

$$r(\varphi) = \lim_{\varphi \to 0+} \frac{1}{\varphi} = +\infty,$$

các điểm trên đồ thị dần ra vô cực, hàm có thể có tiệm cận. Biểu diễn đường cong trên theo tham số φ

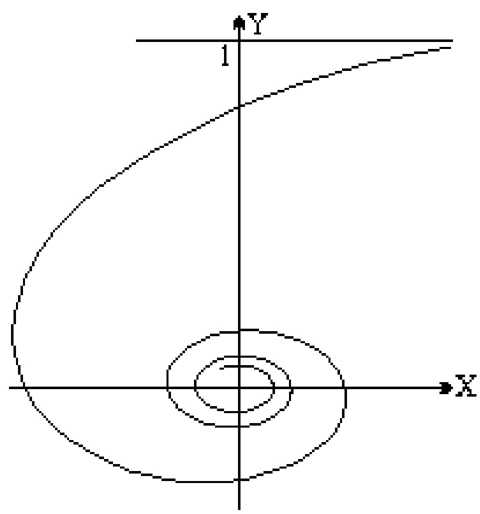
$$\begin{cases} x(\varphi) = r\cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{\varphi} \to +\infty \\ y(\varphi) = r\cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1 \end{cases} \qquad \text{khi} \quad \varphi \to 0+$$

Vậy đường cong có tiệm cận ngang $y = 1$.

Bảng biến thiên

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π		$+\infty$
$r'(\varphi)$	$+\infty$	$-$	$-\frac{4}{\pi^2}$	$-$	$-\frac{1}{\pi^2}$	$-$	$-\frac{1}{4\pi^2}$	$-$	0
$r(\varphi)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{1}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{1}{2\pi}$	$\searrow$	0
$\operatorname{tg} V$	0		$-\frac{\pi}{2}$		$-\pi$		-2π		$-\infty$

Nhận xét rằng từ hàng cuối của bảng biến thiên, $\operatorname{tg} V \to -\infty$ khi $\varphi \to +\infty$, suy ra đồ thị đường cong cuộn tròn xung quanh gốc cực theo một hình gần hình tròn và tiến dần tới gốc cực.



Hình 3.7: Đồ thị đường cong $r = \frac{1}{\varphi}$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Chứng minh rằng các hàm $u(x) = x\sqrt[3]{x},\ v(x) = |x|\sin x$ khả vi tại $x = 0$ và tính các đạo hàm $u'(0), v'(0)$.

2. Cho hàm số $f(x) = (1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)$. Tính $f'(0)$.

3. Cho hàm số $f(x) = x|x-1|$. Tính $f'(0), f'_+(1), f'_-(1)$.

4. Hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ khả vi tại các điểm nào và tính đạo hàm hàm số tại các điểm đó.

5. Chứng minh rằng hàm

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{nếu } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$ nhưng không khả vi tại đó. Thậm chí hàm f không có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại $x = 0$.

6. Tính các đạo hàm một phía các hàm $|\ln(1+x)|,\ \sqrt{1-\cos x}$ tại điểm $x = 0$. Từ đó suy ra chúng có khả vi tại $x = 0$ không?

7. Xác định a, b để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + a & \text{nếu } \ x < 0 \\ bx & \text{nếu } \ x \geq 0 \end{cases}$$

khả vi tại tại $x = 0$.

8. Chứng minh rằng hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{nếu } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x = 0 \end{cases}$$

khả vi với $\forall x \in \mathbb{R}$, tuy nhiên $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

9. Áp dụng các quy tắc tính đạo hàm để tính đạo hàm các hàm số sau

   (a) $y = x\ln x - x \quad (x > 0)$ (b) $y = \ln^2(1 + x^2)$

   (c) $y = x^{\cos x} \quad (x > 0)$ (d) $y = 2^{x^x}$

   (e) $y = e^{x^2}(\cos x + \sin x)$ (f) $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$

10. Tính đạo hàm các hàm số

    (a) $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$ (b) $y = (\arcsin x)^2$

    (c) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x}$ (d) $y = \dfrac{\arccos x}{1 - x^2}$

    (e) $y = \ln\sqrt{1 + x + x^2}$ (f) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

11. Chứng minh rằng đoạn tiếp tuyến của hyperbol $xy = 1$ chắn bởi các trục tọa độ bị tiếp điểm chia thành hai phần bằng nhau.

12. Tính đạo hàm cấp n các hàm sau:

    (a) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ (b) $f(x) = \sin 3x\cos 2x$

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ (d) $f(x) = \sin^2 x$

    (e) $f(x) = (x^2 + 4)e^{2x}$ (f) $f(x) = x^2\sin 2x$

13. Tính đạo hàm cấp n các hàm

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ (b) $g(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$

    (c) $u(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 4}$ (d) $v(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

14. Sử dụng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ để tính gần đúng

$$\operatorname{tg} 46^0; \quad \operatorname{arctg} 1,02; \quad \sqrt{64,5}.$$

15. Hàm $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f'(x)$ là hàm chẵn nếu $f(x)$ là hàm lẻ và $f'(x)$ là hàm lẻ nếu $f(x)$ là hàm chẵn.

16. Hãy tính các hệ số góc của tiếp tuyến của các đường cong cho dưới dạng tham số sau đây tại các điểm thuộc đường cong, tương ứng với tham số t

(a) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = sin^3 t \end{cases}$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $y'(x)$.

(b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ Tính $y'(x)$ tại $t = \frac{\pi}{2}$

(c) $\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$ Tính $y'(x)$ tại $t = 1$

(d) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ Tính $y'(x), y''(x), y'''(x)$.

17. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ có không quá 2 nghiệm thực nếu n là số tự nhiên chẵn, có không quá 3 nghiệm thực nếu n là số tự nhiên lẻ.

18. Cho $f(x)$ là hàm khả vi trên đoạn $[0, 1]$ đồng thời $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

19. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và khả vi trên khoảng $(a, +\infty)$. Giả thiết $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, +\infty)$ sao cho $f'(c) = 0$.

20. Sử dụng các định lí trung bình để chứng minh các bất đẳng thức sau

(a) $x - \dfrac{x^3}{3!} \le \sin x \le x, \quad \forall x \ge 0.$

(b) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \dfrac{1}{2}|x - y|, \quad \forall x, y \ge 1.$

(c) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

(d) $\dfrac{x}{x+1} \le \ln(x+1) \le x, \quad \forall x \ge 0.$

21. Viết công thức trong định lí Cauchy 3.2.3 cho các hàm $f(x) = e^{2x}$ và $g(x) = 1 + e^x$ trên đoạn $[a, b]$.

22. Tìm cực trị các hàm

(a) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$

(b) $f(x) = x + \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}$

23. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất hàm

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \quad \text{trên đoạn} \quad [0, 1].$$

24. Chứng minh

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq x^n + (1-x)^n \leq 1 \quad \text{với} \quad 0 \leq x \leq 1, n > 1.$$

25. Chứng minh rằng

$$x^n(1-x) \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad \text{với} \quad 0 \leq x \leq 1, n > 1.$$

26. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + 1} \quad \text{với} \quad x > 0, n > 1.$$

27. Khai triển Maclaurin các hàm số sau

(a) $f(x) = e^{x^2}$ (b) $f(x) = \operatorname{sh} x$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

28. Viết các khai triển Maclaurin với phần dư dạng Peano cho các hàm

(a) $f(x) = \operatorname{tg} x$ đến x^3.

(b) $f(x) = \sin(\sin x)$ đến x^5.

29. Viết các đa thức sau theo lũy thừa của $x-2$

(a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 9$

(b) $f(x) = -2x^4 + 11x^3 - 18x^2 + 8x - 1$

30. Chứng minh rằng nếu hàm f có đạo hàm cấp hai tại a thì

$$f''(a) = \lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) + f(a-x) - 2f(a)}{x^2}$$

31. Dùng quy tắc L'Hospital để tính

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \sin x}{\ln(1-\cos x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} \right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right)$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

32. Sử dụng khai triển Taylor để tính các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{1-\cos x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x}{tgx - \sin x}$

33. Trong các công thức sau, công thức nào đúng

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

34. Sử dụng công thức Taylor để tính các đạo hàm cấp n tại $x = 0$ của các hàm

$$y = x^3 e^x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \arcsin x.$$

35. Sử dụng các công thức tính gần đúng

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

hãy tính $\cos 0,05$ và $\ln 1,5$ và đánh giá sai số.

36. Chứng minh rằng công thức tính gần đúng

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

có sai số không vượt quá 0,001 với các giá trị $x \in [-1, 1]$.

37. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số

(a) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$ (b) $y = e^{-\frac{2x}{1-x^2}}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$ $(a > 0)$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

38. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho dưới dạng tham số

(a) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

39. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho trong hệ tọa độ cực

(a) $r = a\sin 3\varphi$

(b) $r = a\cos 3\varphi$

(c) $r = 1 + 2\cos\varphi$

(d) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

(e) $r = a(1 + \cos\varphi)$

(f) $r = a\sin 2\varphi$

(g) $r = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$

(h) $r = a(1 + tg\varphi)$

(i) $r = \dfrac{1}{\varphi - \frac{\pi}{4}}$

(k) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi - \frac{\pi}{4}} \quad (\varphi > \dfrac{\pi}{4})$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. $u'(0) = 0, \quad v'(0) = 0$

2. $f'(0) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. $f'(0) = 1, f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$

4. $f = \sqrt[3]{x}$ khả vi tại mọi $x \neq 0$ và $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

6. Kí hiệu $f(x) = |\ln(1+x)|,\ g(x) = \sqrt{1-\cos x}$. Khi đó

$$f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1, \quad g'_+(0) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ f'_-(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

7. $a = 0,\ b = 1$

9. Đạo hàm

(a) $y' = \ln x$ (b) $y' = \dfrac{4x\ln(1+x^2)}{1+x^2}$

(c) $y' = x^{\cos x - 1}(\cos x - x\sin x \cdot \ln x)$ (d) $y' = 2^{x^x} x^x \ln 2 \cdot (1 + \ln x)$

(e) $e^{x^2}\Big((1+2x)\cos x + (2x-1)\sin x\Big)$ (f) $\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$

10.

(a) $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ (b) $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\dfrac{\cos x - \sin x - 1}{(1-\cos x)^2}$ (d) $\dfrac{2x\arccos x}{(1-x^2)^2} - \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(e) $\dfrac{1+2x}{2(1+x+x^2)}$ (f) $\dfrac{2x}{1-x^4}$

12. Đạo hàm cấp n

(a) $\big(x^2+(2n+1)x+n^2+1\big)e^x$ (b) $\dfrac{1}{2}\Big(5^n\sin(5x+n\dfrac{\pi}{2})+\sin(x+n\dfrac{\pi}{2})\Big)$

(c) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ (d) $2^{n-1}\sin\big(2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\big)$

(e) $(4x^2+4nx+n^2-n+8)2^{n-2}e^{2x}$

(f) $2^nx^2\sin(2x+n\dfrac{\pi}{2})+n2^nx\sin(2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2})+n(n-1)2^{n-2}\sin(2x+(n-2)\dfrac{\pi}{2})$

13. Đạo hàm cấp n

(a) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\right)$ (b) $\dfrac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$ với $(n\geq 2)$

(c) $\dfrac{20(-1)^n n!}{(x+4)^{n+1}}$ với $(n\geq 2)$

(d) $v^{(n)}(x)=\dfrac{(1+x)(2n-1)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}+\dfrac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$ với $(n\geq 2)$

16. Hệ số góc tại điểm ứng với tham số t

(a) $-\operatorname{tg} t$ (b) 1 (c) 0

(d) $y'(x)=\dfrac{3(1+t)}{2},\ y''(x)=\dfrac{3}{4(1-t)^2},\ y'''(x)=\dfrac{3}{4(1-t)^4}$

21. Tồn tại $c\in(a,b)$ để $e^b+e^a=2e^c$.

22. (a) Hàm đạt cực đại tại $x=\frac{-8}{27}$ và đạt cực tiểu tại $x=0$

(b) Hàm đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=0$

23. $\max f=2,\quad \min f=\sqrt[3]{2}$

24. ***Hướng dẫn***: Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất hàm $f=x^n+(1-x)^n$ trên $[0,1]$

26. ***Hướng dẫn***: Xét cực trị hàm

$$f(x)=x^n+1-\frac{(x+1)^n}{2^{n-1}}$$

trên $(0,+\infty)$.

27. (a) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n+1})$

(b) $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

(c) $\dfrac{1}{3x-1} = -1 - x - 3^2x^2 - \cdots - 3^nx^n + o(x^n)$

(d) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = -\dfrac{1}{6}\left(3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \cdots + \left(2^{-n} + 2(-1)^n\right)x^n\right) + o(x^n)$

28. (a) $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

(b) $\sin(\sin x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{10} + o(x^5)$

29. (a) $(x-2)^4 + 3(x-2)^3 - 5(x-2) + 7$

(b) $-2(x-2)^4 - 5(x-2)^3 + 4(x-2) - 1$

31. (a) $-\dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{1}{3}$

(e) e (f) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$

32. (a) $\dfrac{1}{6}$ (b) 2

(c) $-\dfrac{e}{2}$ (d) $-\dfrac{2}{3}$

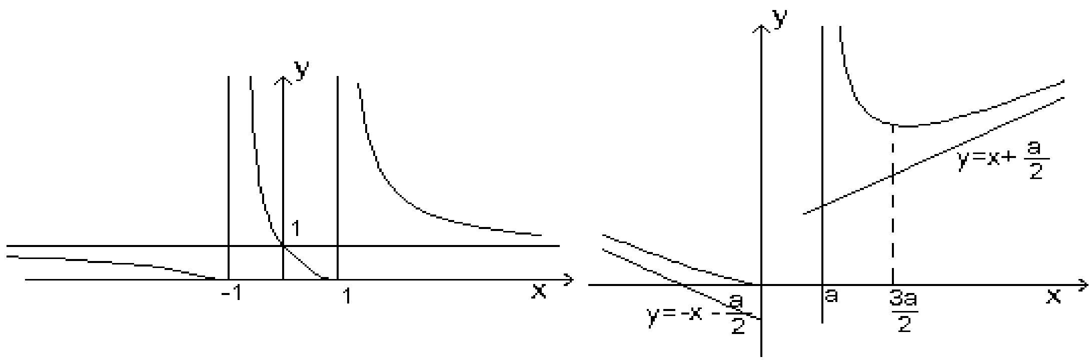
33. Cả hai đều đúng.

34. Kí hiệu $f(x) = x^3e^x, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x, \quad h(x) = \arcsin x.$

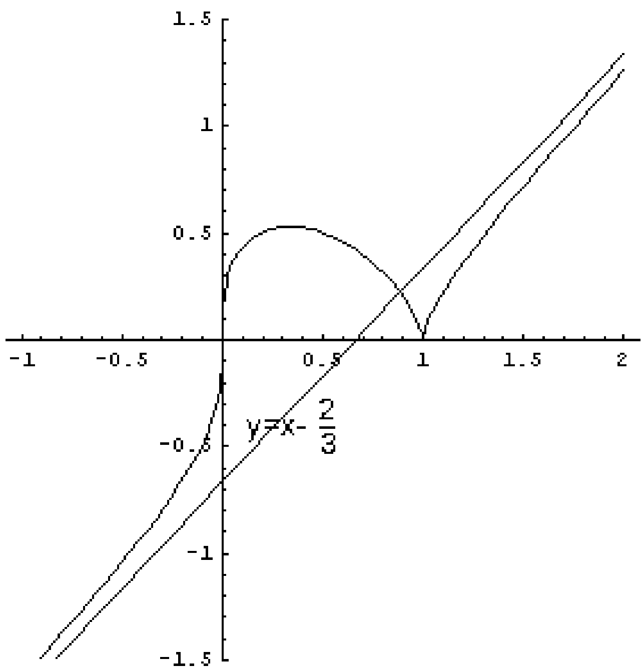
$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2), \quad g^{(n)}(0) = \begin{cases} (n-1)!(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$h^{(n)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(2k)! \cdot (2k-1)!!}{2^k \cdot k!} & \text{nếu } n = 2k+1 \\ 0 & \text{nếu } n = 2k \end{cases}$$

37. Đồ thị

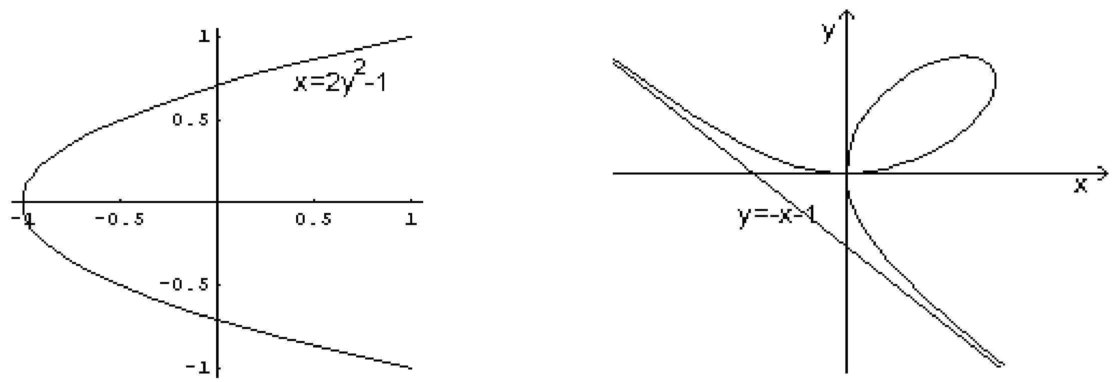


Hình 3.8: Đồ thị câu (b) và (c)

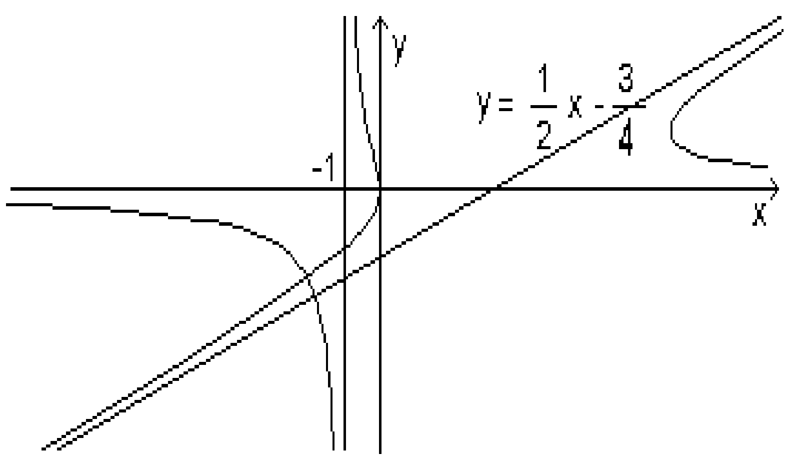


Hình 3.9: Đồ thị câu (d)

38. Đồ thị

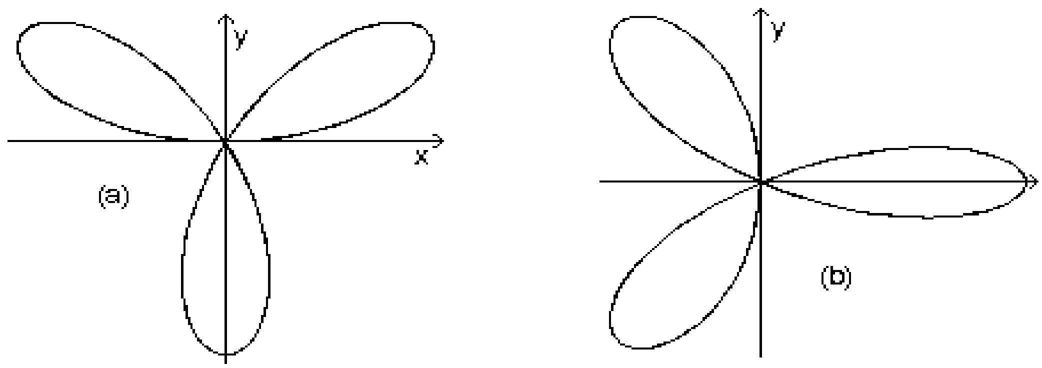


Hình 3.10: Đồ thị câu (a) và câu (c)

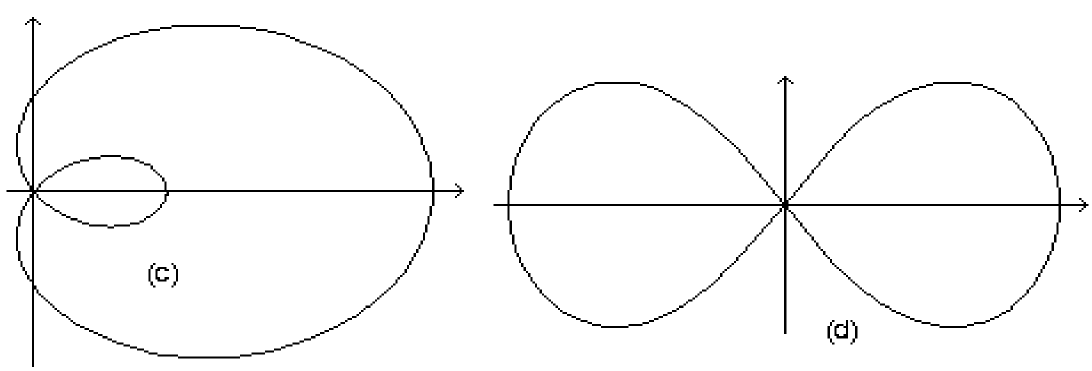


Hình 3.11: Đồ thị câu (b)

39. Đồ thị

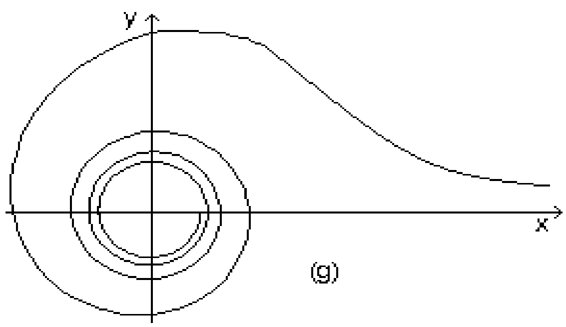


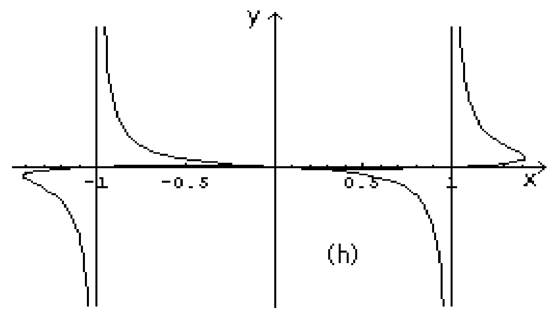
Hình 3.12: Đồ thị câu (a) và câu (b)



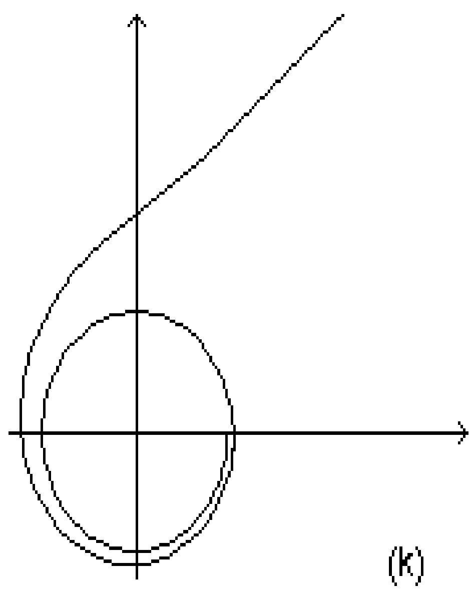
Hình 3.13: Đồ thị câu (c) và câu (d)

39. Đồ thị (tiếp)





Hình 3.14: Đồ thị câu (g) và câu (h)



Hình 3.15: Đồ thị câu (k)

Chương 4

Tích phân

4.1 Tích phân bất định

4.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 4.1.1 *Cho hàm* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*. Ta nói* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ *là nguyên hàm của* f *trên khoảng* (a,b) *nếu* $F(x)$ *khả vi trên* (a,b) *và* $F'(x) = f(x)$ *với mọi* $x \in (a,b)$*.*

Ta sẽ chứng minh sau trong chương này: *mọi hàm liên tục trên* (a,b) *đều tồn tại nguyên hàm trên đó.*

Định lí 4.1.1 *Giả sử* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ *là nguyên hàm của* f *trên khoảng* (a,b) *khi đó*

- $F(x) + C$ *với* C *là hằng số tùy ý, cũng là nguyên hàm của* f *trên* (a,b)*.*
- *Mọi nguyên hàm của* f *trên* (a,b) *đều có dạng* $F(x) + C$*, với* C *là hằng số nào đó.*

Chứng minh. Giả sử $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ là nguyên hàm của f trên khoảng (a,b).
• $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a,b)$. Vậy $F(x) + C$ là nguyên hàm của f.
• Gọi $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ là nguyên hàm bất kì của f trên (a,b). Khi đó

$$((G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{với mọi} \quad x \in (a,b).$$

Theo định lí 3.3.1 trong chương trước, $(G(x) - F(x) \equiv C$ (C là hằng số nào đó). Suy ra điều phải chứng minh

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in (a, b). \quad \blacksquare$$

Định nghĩa 4.1.2 *Cho $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ là một nguyên hàm của f trên khoảng (a, b). Ta nói tích phân bất định của f trên (a, b) là một họ các hàm $F(x) + C$, với C là hằng số tùy ý. Người ta kí hiệu tích phân*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

và nói f là hàm dưới dấu tích phân, x là biến tích phân được viết một cách hình thức trong kí hiệu trên cùng với dx.

Chú ý rằng do biểu thức vi phân $dF(x) = F'(x)dx$, tích phân trên còn được viết dưới dạng

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Ví dụ 4.1.1

1. Một trong số các nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, của $\operatorname{sh} x$ là $\operatorname{ch} x$ trên toàn bộ $\mathbb{R}$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \qquad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$$

2. Do $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ với mọi x khác 0, suy ra $\ln |x|$ chỉ là nguyên hàm của $\frac{1}{x}$ trên khoảng $(-\infty, 0)$ hoặc trên khoảng $(0, +\infty)$. *Không được coi $\ln |x|$ là nguyên hàm của $\frac{1}{x}$ trên $\mathbb{R}$ hoặc trên một khoảng nào đó chứa 0.* Khi viết
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C,$$
ta ngầm hiểu chỉ xét tích phân bất định trên khoảng $(0, +\infty)$ hoặc khoảng $(-\infty, 0)$.

3. Dễ dàng nhận thấy hàm $|x|$ có một nguyên hàm trên $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$$F(x) = \frac{x|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{nếu } \ x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{nếu } \ x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int |x|\, dx = \frac{x|x|}{2} + C.$$
(Ta phải chứng minh $F(x)$ khả vi tại $x = 0$ và $F'(0) = 0$).

4. Tương tự như ví dụ trên hàm $|\sin x|$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ có một nguyên hàm
$$G(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu} \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ 2 - \cos x & \text{nếu} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
($G(x)$ khả vi tại $x = 0$ và $G'(0) = 0$). Toàn bộ nguyên hàm của $|\sin x|$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$$\int |\sin x| dx = G(x) + C.$$

Từ định nghĩa của nguyên hàm dễ dàng suy ra
$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \quad \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

Tích phân một số hàm sơ cấp được suy ra ngay từ bảng đạo hàm (một vài kết quả được tính trong các ví dụ sau). Chúng ta tập hợp lại trong bảng dưới đây.

BẢNG TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP

$\int a\,dx = ax + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + C$	$\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$

BẢNG TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP (tiếp theo)

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$	$\int \mathrm{tg} x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\|x+\sqrt{x^2+m}\| + C$

4.1.2 Các phương pháp tính tích phân bất định

Phương pháp đổi biến

Các phương pháp đổi biến để tính tích phân bất định dựa trên các kết quả sau.

• Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng (a,b) và giả thiết $u:(c,d)\to(a,b)$ là hàm khả vi trên (c,d). Khi đó theo định lí đạo hàm hàm hợp

$$(F(u(t)))' = F'(u(t))\cdot u'(t) = f(u(t))\cdot u'(t) \quad \forall t\in(c,d)$$

Nói cách khác hàm hợp $F\circ u$ là nguyên hàm của $f(u(t))\cdot u'(t)$ trên (c,d). Ta diễn đạt khẳng định đó dưới dạng tích phân bất định

$$\left(\int f(x)dx\right)_{x=u(t)} = \int f(u(t))\cdot u'(t)dt.$$

• Cho hàm $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Nếu $u:(c,d)\to(a,b)$ là song ánh khả vi và tồn tại tích phân bất định $\int f(u(t))\cdot u'(t)dt$ trên (c,d). Khi đó

$$\int f(x)dx = \left(\int f(u(t))\cdot u'(t)dt\right)_{t=u^{-1}(x)}$$

(Sự tồn tại hàm ngược $u^{-1}:(a,b)\to(c,d)$ được suy ra từ giả thiết: $x=u(t)$ là song ánh khả vi trên (c,d).)

Để chứng minh các khẳng định trên ta chỉ cần áp dụng các quy tắc đạo hàm hàm hợp, hàm ngược. Bây giờ ta xét các ví dụ ứng dụng chúng để tính tích phân bất định. Trong các ví dụ dưới đây, chúng ta quy ước không chỉ ra các khoảng mà tích phân chỉ được xét trong đó. Việc xác định chính xác các khoảng đó phụ thuộc vào mỗi hàm trong các ví dụ cụ thể. Bạn đọc tự xác định các khoảng lấy tích phân để hoàn thiện bài toán trong mỗi ví dụ.

Ví dụ 4.1.2

1. Tính $I=\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^x\,dx}{e^x(1+e^x)}=\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)d(e^x)$

   $\Rightarrow\quad I=x-\ln(1+e^x)+C.$

2. Tính $I=\displaystyle\int x(1-x)^{10}\,dx=\int(1-x)^{10}\,dx-\int(1-x)^{11}\,dx=$

   $$=-\int(1-x)^{10}\,d(1-x)+\int(1-x)^{11}\,d(1-x)=\frac{(1-x)^{12}}{12}-\frac{(1-x)^{11}}{11}+C.$$

3. Tính tích phân $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$.

   Trên khoảng $(0,+\infty)$
   $$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$$
   Trên khoảng $(-\infty,-1)$
   $$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=-2\int\frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}}=-2\ln(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x})+C.$$

4. $$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x)^{10}} = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{10}} dx = \int \frac{dx}{(1-x)^8} +$$

$$- \int \frac{2dx}{(1-x)^9} + \int \frac{dx}{(1-x)^{10}} = \frac{-1}{7(1-x)^7} + \frac{2}{8(1-x)^8} - \frac{1}{9(1-x)^9} + C$$

5. Tính $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Đổi biến $x = a\sin t$ (xét trong khoảng $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos t \cdot \cos t\,dx = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})$$

Thay $t = \arcsin\frac{x}{a}$ vào kết quả vừa tính

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

6. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a > 0)$.

Đặt $x = a\operatorname{sh} t$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\operatorname{ch} t\,dt}{a\operatorname{ch} t} = t + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

Tương tự để tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a > 0)$, đặt $x = a\operatorname{ch} t$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

7. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1 + e^{-2x}}} = -\ln|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1}| + C$$

8. Tính $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$. Đặt $x = a\,\mathrm{sh}\, t \quad (\Rightarrow t = \mathrm{sh}^{-1} \frac{x}{a})$

$$I = \int \sqrt{a^2\mathrm{sh}^2\, t + a^2}\, a\mathrm{ch}\, t\, dt = a^2 \int \mathrm{ch}^2\, t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (\mathrm{ch} 2t + 1) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\mathrm{sh} 2t}{2} + t \right) = \frac{a^2}{2} \left(\mathrm{sh}\, t \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\, t} + t \right) \Big|_{t = \mathrm{sh}^{-1} \frac{x}{a}} =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Tương tự

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

9. $$\int \frac{3x + 1}{(x + 1)^3} dx = \int \left(\frac{-2}{(x + 1)^3} + \frac{3}{(x + 1)^2} \right) dx = \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{3}{(x + 1)}$$

10. Các công thức thường được sử dụng để tính tích phân

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln |f(x)| + C \quad \text{và} \quad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)^\alpha} = \frac{1}{(1 - \alpha) f(x)^{\alpha - 1}} + C$$

Phương pháp tích phân từng phần

Phương pháp tích phân từng phần dựa trên công thức đạo hàm của tích hai hàm số

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{hay} \quad d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Suy ra

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Ví dụ 4.1.3

1. $\displaystyle\int x\text{arctg}x\,dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\text{arctg}x + C$

2. Tính tích phân $I = \int e^x \sin x\,dx$

$$\int e^x \sin x\,dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần tiếp $\int e^x \cos x\,dx = \int e^x\,d\sin x$

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

3. Tính $I = \int x \ln^3 x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \ln^3 x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{2}\int x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^3 x +$$

$$-\frac{3}{4}\int \ln^2 x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{4}x^2\ln^2 x + \frac{3}{2}\int x\ln x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{4}x^2\ln^2 x + \frac{3}{4}x^2\ln x - \frac{3}{8}x^2 + C$$

4. Tính tích phân

$$I = \int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

5. Tích phân sau được tính bằng phương pháp tích phân từng phần sau đó đổi biến (đã tính ở phần các ví dụ về phương pháp đổi biến)

$$I = \int \sqrt{x^2+m}\,dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} +$$

$$-\int \frac{(x^2+m-m)dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} - \left(\int \sqrt{x^2+m}\,dx - m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2I = x\sqrt{x^2+m} + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+m}| + C. \end{aligned}$$

6. Tính tích phân $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.
Đặt $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{2nx^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$$

ta được công thức truy hồi

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right)$$

Dễ dàng tính được I_1 và sử dụng công thức truy hồi trên

$$I_1 = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

4.1.3 Tích phân hàm hữu tỉ

Hàm hữu tỉ là hàm viết được dưới dạng thương của hai đa thức

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Nếu đa thức $Q(x)$ được phân tích thành tích của các thừa số bất khả quy

$$Q(x) = a_0(x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdots (x^2+p_jx+q_j)^{n_j}$$

trong đó thừa số bất khả quy bậc hai có dạng

$$x^2+p_ix+q_i = (x+p)^2+q^2,$$

khi đó hàm hữu tỉ $f(x)$ phân tích thành tổng của một đa thức và các phân thức đơn giản

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_i \sum_{m=1}^{k_i} \frac{A_{i,m}}{(x-a_i)^m} + \sum_i \sum_{m=1}^{n_i} \frac{B_{i,m}x + C_{i,m}}{(x^2+p_ix+q_i)^m}$$

Người ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để phân tích một hàm hữu tỉ bất kì thành tổng của một đa thức và các phân thức đơn giản.

Xét ví dụ

$$f(x) = \frac{2x^7+x^5-10x^4+6x^3-4x^2+17x+6}{x^5-4x^2+3x} =$$

$$\frac{2x^7+x^5-10x^4+6x^3-4x^2+17x+6}{x(x-1)^2((x+1)^2+2)} =$$

$$= 2x^2+1+\frac{-2x^4+14x+6}{x(x-1)^2((x+1)^2+2)}$$

Phương pháp hệ số bất định biểu diễn phân thức dưới dạng

$$\frac{-2x^4+14x+6}{x(x-1)^2((x+1)^2+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+3}$$

Quy đồng mẫu số vế phải và đồng nhất các tử số ở 2 vế với nhau, ta được hệ phương trình tuyến tính. Giải hệ phương trình tuyến tính đó ta được các nghiệm

$$A = 3, B = -4, C = 2, D = 1, E = 0$$

Bằng cách đó, hàm hữu tỉ $f(x)$ phân tích thành

$$f(x) = 2x^2 + 1 + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+2x+3}.$$

Do vậy việc tính tích phân hàm hữu tỉ dẫn đến tính tích phân các phân thức đơn giản

$$\int f(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x + \int \frac{3dx}{(x-1)^2} - \int \frac{4dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x + 2\ln|x| - 4\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x + 2\ln|x| - 4\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Ví dụ 4.1.4

1. Tính $\quad I = \displaystyle\int \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)}\,dx$

   Gọi $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân

   $$f(x) = \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

   Bằng phương pháp hệ số bất định, suy ra $A = 1, B = 2, C = -3$

   $$I = \int \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x+1} - \int \frac{3dx}{x-3} =$$

   $$\int \frac{6-10x}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - 3\ln|x-3| + C$$

2. Tích phân hàm hữu tỉ dưới đây không nên sử dụng phương pháp hệ số bất định, mà sử dụng đổi biến để tính toán gọn hơn

   $$\int \frac{xdx}{(x-1)^5} = \int \frac{(x-1+1)dx}{(x-1)^5} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^4} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^5}$$

   $$\int \frac{xdx}{(x-1)^5} = -\frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C.$$

4.1.4 Tích phân các hàm lượng giác

Để tính tích phân một lớp hàm lượng giác có dạng $R(\cos x, \sin x)$, trong đó $R(u, v)$ là hàm hữu tỉ, ta dùng phương pháp đổi biến $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Khi đó

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \ x = 2\operatorname{arctg} t, \ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Tích phân $\int R(\cos x, \sin x)dx$ đưa về dạng tích phân một hàm hữu tỉ theo biến t

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ví dụ 4.1.5

1. Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. Đặt $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

2. Tính $I = \int \frac{(1+\cos x)dx}{\sin x+\cos x}$.

$$I = \int \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4dt}{1+2t+2t^3-t^4} = \int \frac{(t-1)dt}{1+t^2} +$$

$$+\int \frac{(3-t)dt}{t^2-2t-1} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \operatorname{arctg} t - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\ln(\sqrt{2}-1+t) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln(\sqrt{2}-1-t) + C, \quad \text{thay lại} \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\ln(\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln(\sqrt{2}-1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C$$

Chú ý phép đổi biến $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ có thể dẫn đến tích phân hàm hữu tỉ phức tạp. Trong một số trường hợp sau tích phân $\int R(\cos x, \sin x)dx$ có thể được tính đơn giản hơn

- Nếu $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, đặt $t = \cos x$.

- Nếu $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, đặt $t = \sin x$.

- Nếu $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$, đặt $t = \operatorname{tg} x$

Ví dụ 4.1.6

1. Đổi biến $t = \sin x$

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}dx = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2+t^4}dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right)dt$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C$$

2. Tính tích phân $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. Đặt $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$$

3. Tích phân

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad \text{với } m, n \in Z$$

được tính tùy theo m, n chẵn hay lẻ. Chẳng hạn

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)d\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$$

4.1.5 Tích phân một số hàm vô tỉ

• Để tính tích phân các hàm vô tỉ có dạng

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots\right)$$

trong đó $\mathbb{R}$ là hàm hữu tỉ, p_i, q_i là các số nguyên, ta đặt

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

k là bội số chung nhỏ nhất của các số $q_1, q_2, ...$

• Tích phân các hàm vô tỉ có dạng

$$R\big(x, \sqrt{1+x^2}\big) \quad \text{hoặc} \quad R\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)$$

có thể tính bằng một trong các phép đổi biến sao cho hàm dưới dấu tích phân không chứa căn thức

$$t = \operatorname{tg} x \quad \text{hoặc} \quad t = \sin x ...$$

Ví dụ 4.1.7

1. Tính tích phân

$$I = \int \frac{4-x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx =$$

$$= \int \left(\frac{4-2x}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} + \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\right)dx =$$

$$= \int \frac{d(-x^2+4x-3)}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} + \int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx =$$

$$= \sqrt{-x^2+4x-3} + \int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}d(x-2)$$

Tích phân $\int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}d(x-2)$ được tính bằng phép đổi biến

$$x - 2 = \sin t \quad \text{hay} \quad t = \operatorname{arsin}(x-2),$$

ta có

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}} d(x-2) = \int \frac{2\cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = 2t.$$

Vậy

$$I = \sqrt{-x^2+4x-3} + 2\text{arcsin}(x-2) + C.$$

2. Tính

$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx$$

Đặt $t^2 = \frac{x+1}{x-2}$, khi đó

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \Rightarrow dx = -\frac{6t\, dt}{(t^2-1)^2}$$

$$I = \int -\frac{6t^2\, dt}{(t^2-1)^2} = \frac{6t}{2(t^2-1)} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$$

Thay

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

vào kết quả trên ta được tích phân cần tính.

4.2 Tích phân xác định

Trong mục này chúng ta sẽ xây dựng khái niệm và cách tính tích phân xác định hàm số thực. Tư tưởng của tích phân xác định được sử dụng vào nhiều lĩnh vực khác nhau. Cùng với phép tính vi phân, tích phân xác định là nền tảng của giải tích toán học và được ứng dụng rộng rãi trong các ngành khoa học, kĩ thuật khác.

4.2.1 Định nghĩa tích phân xác định

Khi xây dựng khái niệm tích phân xác định chúng ta cần một khái niệm gọi là phép chia đoạn $[a, b]$ hay còn gọi là phân hoạch đoạn $[a, b]$.

Định nghĩa 4.2.1 *Cho đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Người ta gọi F là phép chia đoạn $[a,b]$ nếu ta chia đoạn $[a,b]$ thành các đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Kí hiệu $d(F)$ là độ dài lớn nhất trong số tất cả các đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ nói trên:*

$$F : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \quad d(F) = \max_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\},$$

$d(F)$ được gọi là đường kính của phép chia F.

Gọi F và F' là hai phép chia đoạn $[a,b]$, ta nói F mịn hơn F' nếu tập hợp mọi điểm chia của F chứa tập hợp các điểm chia của F' (hay nói cách khác mọi điểm chia của F' cũng là điểm chia của F).

Ví dụ phép chia F đoạn $[0,5]$ bởi các điểm chia $0 < 1 < 2 < 4 < 5$ mịn hơn phép chia F' đoạn $[0,5]$ bởi các điểm chia $0 < 2 < 4 < 5$, nhưng phép chia F không mịn hơn phép chia $F^* : 0 < 3 < 5$.

Hợp của hai phép chia F và F' là phép chia, kí hiệu $F \cup F'$ mà các điểm chia là tập hợp các điểm chia của cả F và F'. Hiển nhiên phép chia $F \cup F'$ mịn hơn F và cũng mịn hơn F'.

Cho đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$, hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ xác định trên $[a,b]$. Gọi F là một phép chia đoạn $[a,b]$ $\quad F : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ là điểm tuỳ ý với $\forall\ 1 \le i \le n$. Khi đó

$$S(F) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

được gọi là *tổng tích phân* của hàm f ứng với phép chia F và các điểm chọn $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Định nghĩa 4.2.2 *Ta nói hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả tích Riemann (hay đơn giản là khả tích) trên $[a,b]$, nếu tổng tích phân $S(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ có giới hạn $I \in \mathbb{R}$ khi $d(F) \to 0$, tức là: với $\forall\ \varepsilon > 0$ tuỳ ý $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi phép chia F mà $d(F) < \delta$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\Big| \le \varepsilon \quad (\textit{viết là:} \quad \lim_{d(F) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = I).$$

Khi đó ta nói I là tích phân xác định của hàm f trên [a, b] và được viết như sau:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad hay \qquad I = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

f được gọi là hàm khả tích trên $[a, b]$, b và a là các cận trên và cận dưới của tích phân, x là biến tích phân và hiển nhiên tích phân I không phụ thuộc vào việc kí hiệu biến tích phân là t hay x.

Ví dụ xét tích phân hàm hằng số $f(x) \equiv C$ trên $[a, b]$. Khi đó với mọi phép chia F đoạn $[a, b]$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý

$$S(F) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C\,dx = \lim S(F) = C(b-a).$$

Định lí 4.2.1 (Điều kiện cần để hàm khả tích) *Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó hàm bị chặn trên đoạn đó.*

Chứng minh Giả sử hàm không bị chặn trên $[a, b]$. Theo giả thiết hàm khả tích, suy ra $\exists I$, một phép chia $F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| \leq 1 \tag{4.1}$$

Theo giả thiết phản chứng hàm không bị chặn trên $[a, b] \Rightarrow \exists$ một khoảng $[x_{k-1}, x_k]$ nào đó của phép chia F mà f không bị chặn trên trên đó. Từ (4.1) suy ra

$$|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \leq |\sum_{i=1, i\neq k}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + 1$$

Cho ξ_k biến thiên trong đoạn $[x_{k-1}, x_k]$, còn cố định các biến khác, khi đó vế phải của bất đẳng thức trên là một số cố định, trong khi vế trái không bị chặn, vô lí do giả thiết phản chứng. Định lí được chứng minh. ■

Do định lí trên, trong mục này ta chỉ xét những hàm bị chặn.

4.2.2 Tổng Darboux

Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ xác định và bị chặn trên $[a, b]$. Gọi F là một phép chia đoạn $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Đặt

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$S_*(F) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S^*(F) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Khi đó $S_*(F)$ và $S^*(F)$ được gọi là tổng Darboux dưới và tổng Darboux trên ứng với phép chia F. Rõ ràng với mọi phép chia $F: \quad S_*(F) \leq S^*(F)$.

Định lí 4.2.2 *Cho F và F' là hai phép chia đoạn $[a, b]$, F mịn hơn F'. Khi đó*

$$S_*(F') \leq S_*(F) \leq S^*(F) \leq S^*(F').$$

Chứng minh Giả sử tập các điểm chia của F nhiều hơn tập các điểm chia của F' một phần tử:

$$F': \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b$$

$$F: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < c < x_k < ... < x_n = b$$

Khi đó hiển nhiên

$$S_*(F) - S_*(F') = m_k^{(1)}(x_k - c) + m_k^{(2)}(c - x_{k-1}) - m_k(x_k - x_{k-1})$$

trong đó

$$m_k^{(1)} = \inf_{x \in [c, x_k]} f(x), \quad m_k^{(2)} = \inf_{x \in [x_{k-1}, c]} f(x).$$

Do

$$m_k^{(1)} = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq \inf_{x \in [c, x_k]} f(x) = m_k, \quad m_k^{(2)} = \inf_{x \in [x_{k-1}, c]} f(x) \geq m_k$$

suy ra

$$S_*(F) - S_*(F') = m_k^{(1)}(x_k - c) + m_k^{(2)}(c - x_{k-1}) - m_k(x_k - x_{k-1}) \geq 0$$

hay $S_*(F') \leq S_*(F)$. Lập luận tương tự với $\sup f$ trên các đoạn nhỏ $[x_{k-1}, c]$, $[c, x_k]$, ta được

$$S^*(F) \leq S^*(F').$$

Hiển nhiên sử dụng kết quả này ta sẽ chứng minh được định lí trong trường hợp tập các điểm chia của F nhiều hơn tập các điểm chia của F' hữu hạn phần tử.■

Hệ quả 4.2.1 *Cho F_1 và F_2 là hai phép chia tuỳ ý đoạn $[a, b]$, khi đó*

$$S_*(F_1) \leq S^*(F_2).$$

Điều này suy ra từ định lí trên khi xét phép chia $F_1 \cup F_2$ mịn hơn F_1 và cũng mịn hơn F_2

$$S_*(F_1) \leq S_*(F_1 \cup F_2) \leq S^*(F_1 \cup F_2) \leq S^*(F_2).$$

Định nghĩa 4.2.3 *Người ta gọi*

$$I^* = \sup_F \{S_*(F) \mid \textit{với mọi phép chia } F \textit{ đoạn } [a,b]\}$$

$$I_* = \inf_F \{S^*(F) \mid \textit{với mọi phép chia } F \textit{ đoạn } [a,b]\}$$

lần lượt là tích phân trên và tích phân dưới của hàm f trên $[a, b]$. Kí hiệu các tích phân đó

$$I^* = \int^* f(x)dx, \quad I_* = \int_* f(x)dx$$

Từ hệ quả trên ta luôn luôn có $I_* \leq I^*$.

<u>*Ví dụ hàm Dirichlet*</u> Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

Khi đó với mọi phép chia F:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0, \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$$

$$S_*(F) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0, \quad S^*(F) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (b - a) = b - a$$

Tích phân dưới, tích phân trên của hàm f

$$I_* = \int_* f(x)dx = 0, \quad I^* = \int^* f(x)dx = b - a$$

Định lí 4.2.3 *Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ xác định và bị chặn trên $[a, b]$. Điều kiện cần và đủ để tích phân dưới bằng tích phân trên $I_* = I^*$ là với mọi $\varepsilon > 0$ tuỳ ý tồn tại một phép chia F đoạn $[a, b]$ sao cho*

$$0 \leq S^*(F) - S_*(F) \leq \varepsilon.$$

Chứng minh điều kiện cần Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý, từ định nghĩa của I_*, I^* tồn tại các phép chia F_1 và F_2 sao cho:

$$I_* - S_*(F_1) \leq \varepsilon/2, \quad I^* - S^*(F_2) \leq \varepsilon/2$$

Xét $F = F_1 \cup F_2$, theo hệ quả trên $I_* - S_*(F) \leq \varepsilon/2, \quad I^* - S^*(F) \leq \varepsilon/2$. Vậy

$$0 \leq S^*(F) - S_*(F) \leq |I_* - S_*(F)| + |I^* - S^*(F_2)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Điều kiện đủ là hiển nhiên. ■

4.2.3 Điều kiện khả tích

Định lí 4.2.4 *Hàm bị chặn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $I_* = I^*$, đồng thời*

$$\int_a^b f(x)dx = I_* = I^*.$$

Chứng minh điều kiện cần Giả sử f khả tích trên $[a, b]$, khi đó với mọi $\varepsilon > 0, \exists$ phép chia F , số I và các điểm chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| \leq \varepsilon/2$$

Do $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tuỳ ý suy ra

$$|\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) - I| \leq \varepsilon/2 \quad \text{và} \quad |\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - I| \leq \varepsilon/2$$

hay $|S_*(F) - I| \leq \varepsilon/2, |S^*(F) - I| \leq \varepsilon/2$. Mặt khác hiển nhiên

$$S_*(F) - S_*(F) = |S_*(F) - I + I - S_*(F)| \leq |S^*(F) - I| + |S_*(F) - I| \leq \varepsilon.$$

Theo định lí 4.2.3 ở trên, $I_* = I^*$.

Điều kiện đủ. Giả sử $I = I_* = I^*$, với mọi $\varepsilon > 0, \exists$ phép chia F đoạn $[a, b]$

$$F : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

sao cho $S^*(F) - S_*(F) \leq \varepsilon/2$. Gọi L là giá trị mà $|f(x)| \leq L$ với $\forall\ x \in [a, b]$. Đặt

$$\Delta = \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad \delta = \min\{\Delta, \frac{\varepsilon}{4nL}\}$$

Giả sử P là phép chia tuỳ ý đoạn $[a, b]$: $a = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_m = b$ có đường kính $d(P) < \delta$. Khi đó

$$S^*(P) - S_*(P) = \sum_{i=1}^{m}(M_i^{(P)} - m_i^{(P)})(y_i - y_{i-1})$$

tách thành hai tổng: tổng thứ nhất chỉ cộng các số hạng $(M_i^{(P)} - m_i^{(P)})(y_i - y_{i-1})$ mà các đoạn nhỏ $[y_{i-1}, y_i]$ của P không chứa một điểm chia x_j nào của F và tổng thứ hai gồm đúng n số hạng còn lại. (Do $\delta = \min\{\Delta, \frac{\varepsilon}{4nL}\}$, nên mỗi đoạn nhỏ $[y_{i-1}, y_i]$ của P chứa nhiều nhất một điểm chia x_j nào của F). Ta ước lượng hai tổng đó:

$$S^*(P) - S_*(P) = \sum_{i=1}^{m}(M_i^{(P)} - m_i^{(P)})(y_i - y_{i-1}) \leq$$

$$\leq (S^*(F) - S_*(F)) + 2L \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{4nL} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mặt khác một tổng tích phân bất kì của hàm f tương ứng với phép chia P luôn thoả mãn

$$|S(P) - I| \leq S^*(P) - S_*(P).$$

Vậy với các phép chia đoạn $[a, b]$ có đường kính $d(P) < \delta$

$$|S(P) - I| \leq S^*(P) - S_*(P) \leq \varepsilon.$$

Điều này có nghĩa f khả tích trên $[a, b]$. ■

Ví dụ hàm Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$ đã nói đến ở trên không khả tích trên $[a, b]$ (vì $0 = I_* < I^* = b - a$).

Định lí 4.2.5 *Hàm liên tục $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ trên $[a, b]$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ đó.*

Chứng minh. Theo định lí 2.3.10, hàm f liên tục đều trên đoạn $[a, b]$, do đó với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Xét phép chia F đoạn $[a, b]$ với đường kính $d(F) < \delta$

$$M_i - m_i \leq \varepsilon \Rightarrow S^*(F) - S_*(F) \leq \varepsilon(b - a) \quad \text{nhỏ tùy ý.}$$

Từ định lí 4.2.3 suy ra f khả tích trên $[a, b]$ ■.

Định lí 4.2.6 *Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bị chặn và gián đoạn tại hữu hạn điểm trên $[a, b]$, khi đó f khả tích trên đoạn $[a, b]$ đó.*

Định lí dễ dàng được chứng minh nếu f chỉ gián đoạn tại một điểm và từ đó suy ra toàn bộ định lí trường hợp hàm gián đoạn tại hữu hạn điểm.

Định lí 4.2.7 *Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bị chặn và đơn điệu, khi đó f khả tích trên đoạn $[a, b]$.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lí trong trường hợp f đơn điệu tăng trên $[a, b]$. (Trường hợp f đơn điệu giảm được chứng minh tương tự).
Đặt $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Chọn $\varepsilon > 0$ tùy ý, xét phép chia F đoạn $[a, b]$ với đường kính $d(F) < \delta = \frac{\varepsilon}{M - m}$

$$S^*(F) - S_*(F) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\delta = (M - m) \cdot \delta = \varepsilon$$

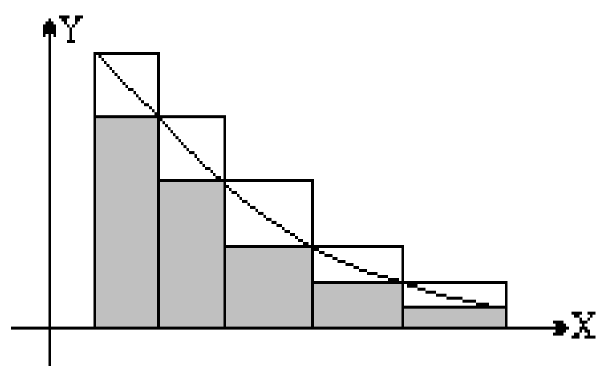
Từ định lí 4.2.3 và 4.2.4 suy ra f khả tích trên $[a, b]$. ■

4.2.4 Ý nghĩa hình học và tính chất của tích phân xác định

Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm không âm khả tích trên $[a, b]$. Đồ thị của f thường được biểu diễn như một đường cong trong $\mathbb{R}^2$. Phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành $y = 0$ và các đường thẳng $x = a, x = b$, được gọi là *hình thang cong* ứng với hàm không âm f.

Do các tổng Darboux dưới $S_*(F)$ là tổng các diện tích của các hình chữ nhật nằm trong hình thang cong (phần tô đậm trên hình 4.1) và tổng Darboux trên $S^*(F)$ là tổng các diện tích của các hình chữ nhật chứa hình thang cong, đồng thời f khả tích trên $[a, b]$ (hay $\sup\limits_F S_*(F) = \inf\limits_F S^*(F)$), suy ra hình thang cong có diện tích và diện tích hình thang cong, kí hiệu S, bằng giá trị tích phân hàm f trên $[a, b]$

$$S = \sup_F S_*(F) = \inf_F S^*(F) = \int_a^b f(x)dx.$$



Hình 4.1: Tổng Darboux $S_*(F)$ và $S^*(F)$

Với f là hàm khả tích có dấu bất kì trên $[a, b]$, phần miền phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành $y = 0$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ có diện tích và diện tích đó bằng $\int_a^b |f(x)|dx$.

Tính chất của tích phân xác định

1. Giả sử f và g là các hàm khả tích trên $[a, b]$.

   (a) Với mọi $\alpha \in R, \quad \alpha f$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và
   $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

   (b) $f + g$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và
   $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

   (c) Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$, khi đó $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Đặc biệt nếu $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$
   $$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a).$$

   (d) Nếu $f(x) = g(x) \ \forall x \in [a, b]$ có thể trừ hữu hạn điểm trong $[a, b]$, khi đó
   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

2. f khả tích trên $[a, b]$ và khả tích trên $[b, c]$, khi đó f khả tích trên $[a, c]$
   $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$
   Người ta quy ước $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$, do vậy đẳng thức trên đúng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, giả thiết rằng tích phân trên đoạn lớn nhất tồn tại.

3. Nếu f khả tích trên $[a, b]$, khi đó $|f|$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và
   $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
   Ta chỉ cần chứng minh $|f|$ cũng khả tích trên $[a, b]$. *Trước hết ta nhận xét rằng đối với 1 hàm u bất kì xác định trên $[\alpha, \beta]$*
   $$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |u(x)| - \inf_{x \in [\alpha, \beta]} |u(x)| \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} u(x) - \inf_{x \in [\alpha, \beta]} u(x).$$

Với phép chia F tùy ý đoạn $[a, b]:\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Kí hiệu

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i^* = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)|, \quad M_i^* = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$$

Theo nhận xét trên

$$M_i^* - m_i^* \le M_i - m_i \Rightarrow S^*(F; |f|) - S_*(F; |f|) \le S^*(F; f) - S_*(F; f).$$

Do định lí 4.2.3 suy ra nếu f khả tích trên $[a, b]$ thì $|f|$ cũng khả tích trên $[a, b]$.

4. Tính chất sau còn được gọi là *định lí về giá trị trung bình của tích phân*

   Giả sử f liên tục trên $[a, b]$, khi đó tồn tại một điểm $\xi \in [a, b]$ sao cho

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

   Thật vậy kết quả được suy ra từ tính chất hàm liên tục và

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \text{hay } m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Định lí 4.2.8 (Đạo hàm theo cận trên) *Cho hàm $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Kí hiệu $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, khi đó $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$.*

Ngoài ra nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in [a, b]$, khi đó $F(x)$ khả vi tại $x = x_0$ đồng thời $F'(x_0) = f(x_0)$

Chứng minh. Theo giả thiết $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$, suy ra hàm $f(x)$ bị chặn

$$|f(x)| \le K, \quad \text{với mọi} \quad x \in [a, b]$$

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = |\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt| \le \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \le K\Delta x$$

Vậy $\lim(F(x + \Delta x) - F(x)) = 0$ khi $\Delta x \to 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bây giờ giả thiết $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in [a, b]$. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại lân cận $U_\delta(x_0)$ sao khi $x \in U_\delta(x_0)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Với x như vậy

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x} (f(x_0) + f(t) - f(x_0))\,dt}{x - x_0} =$$

$$= f(x_0) + \frac{\int\limits_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt}{x - x_0} \Rightarrow \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Hay $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, đ.p.c.m. ■ Từ định lí trên ta có hệ quả:

Hệ quả 4.2.2 *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khi đó tồn tại nguyên hàm trên đó*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{với mọi} \quad x \in [a, b].$$

Định lí 4.2.9 (Newton-Leibnitz) *Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả thiết $\Phi(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$. Khi đó*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Người ta thường kí hiệu $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$.

Chứng minh Gọi $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ với mọi $x \in [a, b]$. Từ định lí đạo hàm theo cận trên, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$. Như vậy $\Phi(x)$ và $F(x)$ chỉ sai khác nhau một hằng số

$$\Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad ■$$

Định lí có thể mở rộng trong trường hợp $f(x)$ có hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a, b]$

Định lí 4.2.10 *Cho hàm $f(x)$ bị chặn trên đoạn $[a, b]$, liên tục tại mọi điểm thuộc $[a, b]$ trừ hữu hạn điểm tại đó hàm có thể gián đoạn. Giả thiết rằng $\Phi(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$, đồng thời cũng là nguyên hàm trên các khoảng liên tục của $f(x)$. Khi đó*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Chứng minh Bằng quy nạp, ta chỉ cần chứng minh định lí trong trường hợp hàm có 1 điểm gián đoạn duy nhất $x = c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Áp dụng định lí Niutơn-Lepnit cho 2 tích phân thứ nhất và thứ ba ở vế phải, rồi chuyển qua giới hạn trong quá trình $\varepsilon \to 0+$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\Phi(c-\varepsilon) - \Phi(a)) + (\Phi(b) - \Phi(c-\varepsilon)) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= (\Phi(c) - \Phi(a)) + (\Phi(b) - \Phi(c)) + 0 = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \blacksquare$$

Ví dụ 4.2.1

1. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{(x+1)^3} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} = \frac{-1}{(x+1)}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}$$

2. Kí hiệu $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ là hàm dấu của x, $\Phi(x) = |x|$ là nguyên hàm của $\operatorname{sign}(x)$ trên các khoảng $(-1, 0)$ và $(0, 3)$ đồng thời liên tục trên đoạn $[-1, 3]$. Do đó

$$\int_{-1}^{3} \operatorname{sign}(x)\,dx = \Phi(3) - \Phi(-1) = 3 - 1 = 2.$$

3. Tính các tích phân xác định sau

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\,dx}{1+\sin x} = \left(\frac{1}{4}\cos 2x + \sin x\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}} = \int_0^1 (\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x})dx = \frac{2}{9}(7-3\sqrt{3})$$

$$\int_0^\pi \cos^4 x\, dx = \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int_0^\pi \frac{1}{4}(1+\cos^2 2x+2\cos 2x)dx = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = 4.$$

4. $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx = \int\limits_0^{2\pi} |\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|dx$. Chia khoảng lấy tích phân thành các khoảng $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\int_0^{2\pi} \left|\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right| dx = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx = 4\sqrt{2}.$$

(Cũng có thể tính cách khác $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}dx = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}dx = \int\limits_0^{2\pi} |\sin\frac{x}{2}|dx$)

5. Để tính các tích phân sau người ta thường chia khoảng lấy tích phân thành các khoảng nhỏ

$$\int_0^2 |x^2-x|dx = 1, \quad \int_0^\pi |\cos x|\sqrt{\sin x}\, dx = \frac{4}{3}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 2x|\, dx = 1$$

6. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, với $ab \neq 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{a}{b}tgx\right)}{1+\left(\frac{a}{b}tgx\right)^2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{b}{a}cotgx\right)}{1+\left(\frac{b}{a}cotgx\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(arctg\frac{a}{b}+arctg\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2|ab|}.$$

7. Với $\alpha \in (0, \pi)$ hãy tính

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\int_{-1}^{1} \frac{d\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(arctg\left(tg\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

8. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

Xét tích phân

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

Do $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$, hàm khả tích trên đó. Lập tổng tích phân hàm $\sqrt{x}$, tương ứng với phép chia đoạn $[0, 1]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia $\frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, ..., n$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

Vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

4.2.5 Các phương pháp tính tích phân xác định

Định lí Newton-Leibnitz đưa ra cách tính tích phân xác định thông qua việc tìm nguyên hàm (tích phân bất định). Tuy nhiên việc tìm nguyên hàm của một số lớn các hàm số sẽ gặp nhiều khó khăn. Tương tự như cách tính tích phân bất định, chúng ta sẽ nêu lên hai phương pháp dưới đây: phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân xác định một cách hiệu quả.

Phương pháp đổi biến

Để tính $\int_a^b f(x)dx$ trong đó $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, ta đổi biến $x = \varphi(t)$ trong đó

- $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ khả vi liên tục trên $[\alpha, \beta]$.
- $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$

Khi đó
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$
Thật vậy nếu $F(x)$ là nguyên hàm của f trên $[a, b]$ thì $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ trên $[\alpha, \beta]$. Theo định lí Newton-Leibnitz
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) =$$
$$= \int_a^b f(x)dx.$$
Nhận xét rằng công thức đổi biến nêu trên không đòi hỏi hàm $x = \varphi(t)$ đơn điệu trên $[\alpha, \beta]$, chỉ cần $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$.

Chú ý rằng trong một số tài liệu người ta còn nhắc tới một phương pháp đổi biến khác $t = \varphi(x)$ để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$. Giả thiết

- Hàm $t = \varphi(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$.
- Biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, trong đó *hàm g liên tục trên một khoảng chứa tập giá trị của hàm $\varphi(x)$*. Nói cách khác $g\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

Khi đó
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$
Thật vậy gọi $G(t)$ là nguyên hàm của $g(t)$ trên một khoảng nào đó chứa miền giá trị của $\varphi(x)$. Khi đó $G\big(\varphi(x)\big)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$. Theo công thức Niutơn-Lepnit
$$\int_a^b f(x)dx = G\big(\varphi(b)\big) - G\big(\varphi(a)\big) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$

Thực chất phương pháp đổi biến này không có gì khác với phương pháp đổi biến trước, tuy nhiên chỉ nói $f(x)dx = g(t)dt$ chưa đủ mà phải khẳng định $g(t)$ *có nguyên hàm trên một khoảng nào đó chứa miền giá trị của* $\varphi(x)$. Phép đổi biến $t = \varphi(x)$ *không bắt buộc hàm* $\varphi(x)$ *phải đơn điệu trên* $[a, b]$.

Ví dụ 4.2.2

1. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$. Đổi biến $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Nhận xét rằng nếu phép đổi biến $x = \sin t$ nói trên được xét với t thuộc khoảng rộng hơn, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ (hàm $x = \sin t$ không đơn điệu trên khoảng đó) ta vẫn có kết quả

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t\, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{2} \dfrac{2x}{x^2-9}\, dx$

Ta dễ dàng nhận thấy $F(x) = \ln(9-x^2)$ là nguyên hàm của $\dfrac{2x}{x^2-9}$ trên khoảng $[-1, 2]$. Áp dụng định lí Niutơn-Lepnit ta được $I = \ln 5 - \ln 8$.

Ta cũng có thể tính tích phân $\int\limits_{-1}^{2} \dfrac{2x}{x^2-9}\, dx$ bằng phép đổi biến

$$t = \varphi(x) = x^2 - 9, \quad \text{giá trị tại các mút } \ \varphi(-1) = -8, \varphi(2) = -5.$$

Miền giá trị của hàm $\varphi(x), -1 \leq x \leq 2$ là khoảng $[-9, -5]$.

$$I = \int\limits_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2-9}\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \frac{d(x^2-9)}{x^2-9}\, dx = \int\limits_{-8}^{-5} \frac{dt}{t}$$

Hàm $g(t) = \dfrac{1}{t}$ có nguyên hàm $G(t) = \ln|t|$ trên khoảng $[-9, -5]$ (chứa miền giá trị của hàm $\varphi(x)\big)$. Vậy

$$I = \int\limits_{-8}^{-5} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{-8}^{-5} = \ln 5 - \ln 8.$$

Hàm $\varphi(x) = x^2 - 9$ trong phép đổi biến hiển nhiên không đơn điệu với $-1 \leq x \leq 2$.

Trong các ví dụ về sau, mặc dù không chỉ ra chi tiết hàm $g(t)$ có nguyên hàm trên một khoảng chứa miền giá trị của $\varphi(x)$, song trước tiên chúng ta luôn luôn phải kiểm tra điều kiện đó.

3. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn, khả tích trên $[-a, a]$, khi đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Thật vậy tích phân $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ được tách thành hai tích phân

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Đổi biến $x = -t$ để tính tích phân thứ nhất ở vế phải và sử dụng tính chất hàm chẵn $f(t) = f(-t)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Tương tự nếu $f(x)$ là hàm lẻ, khả tích trên $[-a, a]$, khi đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Chẳng hạn do hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x\,dx}{x^2 + 1} = 0$$

4. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì T, liên tục trên $\mathbb{R}$, khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$
Thật vậy
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$
Đổi biến $x = u + T$ để tính tích phân thứ hai ở vế phải và sử dụng tính chất tuần hoàn $f(u+T) = f(u)$
$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$
Suy ra
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$
• Áp dụng kết quả trên vào tích phân
$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx +$$
$$+ \int_{2\pi}^{3\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx + \cdots = 100 \int_0^{\pi} \sqrt{2}\sin x\,dx = 200\sqrt{2}.$$
• Tương tự
$$\int_0^{2\pi} \sin(3x+\sin 4x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x+\sin 4x)\,dx.$$
Hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ, vậy giá trị tích phân bằng 0.

5. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$
Đặt $x = \pi - t$
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

Suy ra

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx \Rightarrow \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

Áp dụng để tính

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x\, dx}{\cos^2 x + 1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x\, dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u, v : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, khi đó

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \big(u(x)\cdot v(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx.$$

Công thức trên được gọi là công thức tính tích phân từng phần, ta thường viết gọn hơn dưới dạng

$$\int_a^b u\, dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Thật vậy công thức tính tích phân từng phần được suy ra ngay từ hệ thức

$$\int_a^b \big(u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x)\big)dx = \int \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\, dx = \big(u(x)\cdot v(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Ví dụ 4.2.3

Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

1. $I = \int_1^e \ln x\, dx$. Đặt $u = \ln x, v = x$, ta có

$$I = \int_1^e \ln x\, dx = x\ln x\Big|_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = e - (e-1) = 1.$$

2. $I = \int_0^\pi e^t \cos t\, dt$. Đặt $u = e^t, v = \sin t$, ta có

$$I = e^t \sin t\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^t \sin t\, dt = \int_0^\pi e^t d\cos t.$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tiếp bằng cách đặt $u = e^t, v = \cos t$, ta có

$$I = e^t \cos t\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos t\, dt = e^\pi - 1 - I \;\Rightarrow\; I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

3. $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\, dx$. Trước hết ta đổi biến $x = e^t$

$$\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\, dx = \int_0^\pi e^t \cos t\, dt$$

Sử dụng kết quả của tích phân $\int_0^\pi e^t \cos t\, dt$ trong ví dụ trước

$$I = \int_0^\pi e^t \cos t\, dt = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x\, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\, dx$. Xét tổng và hiệu của hai tích phân

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \frac{\pi^2}{8}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x\, dx = \frac{x \sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{-1}{2}$$

Vậy

$$I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}, \quad J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

5. Tính $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x\, dx$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x d\mathrm{tg}\, x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$

Từ công thức truy hồi trên ta có thể tính được I_n.

6. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \quad (n \geq 2)$. Chứng minh rằng $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
   Đặt $u = \sin^{n-1} x, v = -\cos x$, ta có

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n-1}.$$

   Suy ra $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ hay $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Từ công thức truy hồi và sử dụng các kết quả

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,\ I_0 = \frac{\pi}{2}$$

   ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

   Chú ý rằng, bằng phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ ta dễ dàng chứng minh được $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

   Công thức này được sử dụng nhiều trong các bài tập tính tích phân xác định.

4.3 Tích phân suy rộng

Tích phân xác định hay còn gọi tích phân Riemann đã được xây dựng chặt chẽ và các kết quả thu được như điều kiện khả tích, các phương pháp tính tích phân vừa tiện lợi vừa đơn giản. Nó là bước ngoặt vĩ đại của toán học, tích phân Riemann được ứng dụng vào hầu hết mọi lĩnh vực. Tuy nhiên nó lại có mặt hạn chế: chẳng hạn ứng dụng của tích phân Riemann vào tính diện tích, ta chỉ tính được diện tích các miền phẳng hữu hạn. Đối với các hình thang cong kéo dài ra vô tận (như miền $(x, \frac{1}{\sqrt{x}}) \in R^2 \mid 0 < x < 1)$, mặc dù miền đó có diện tích song tích phân Riemann

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

không tồn tại. Trong mục này chúng ta sẽ khắc phục nhược điểm đó của tích phân xác định bằng việc đưa vào khái niệm tích phân suy rộng. Tích phân suy rộng là sự mở rộng của tích phân xác định cho hai trường hợp
• Khoảng lấy tích phân là khoảng vô hạn.
• Khoảng lấy tích phân hữu hạn nhưng hàm dưới dấu tích phân là hàm không bị chặn.

Nếu khoảng lấy tích phân là khoảng vô hạn, ta gọi đó là *tích phân suy rộng loại một.*

Nếu hàm dưới dấu tích phân không bị chặn và khoảng lấy tích phân hữu hạn ta nói đó là *tích phân suy rộng loại hai.* Chú ý rằng tích phân suy có thể là kết hợp 2 trường hợp nói trên: khoảng lấy tích phân là khoảng vô hạn và hàm dưới dấu tích phân là hàm không bị chặn.

4.3.1 Tích phân suy rộng loại một (khoảng lấy tích phân là khoảng vô hạn)

Định nghĩa 4.3.1 *Hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ với mọi $b \in \mathbb{R}$ và $b > a$. Nếu tồn tại giới hạn và giới hạn đó hữu hạn*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ta nói tích phân suy rộng của hàm f trên khoảng $[a, +\infty)$ hội tụ, kí hiệu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Trường hợp ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại hoặc tồn tại và bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Ví dụ Xét sự hội tụ phân kì của tích phân

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \quad (\alpha > 0)$$

• Với $\alpha = 1$, tích phân $I(1)$ phân kì

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^b = \ln b \to +\infty \quad \text{khi} \quad b \to +\infty$$

• Với $\alpha \neq 1$

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{nếu } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{nếu } \alpha < 1 \end{cases}$$

Vậy $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$. Giá trị của tích phân khi đó bằng

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \text{với } \alpha > 1.$$

Tương tự như định nghĩa trên, tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ nếu tồn tại giới hạn

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

và giới hạn đó hữu hạn.
Trường hợp khoảng lấy tích phân là toàn bộ $\mathbb{R}$, ta chia $\mathbb{R}$ thành hai khoảng $(-\infty, a]$ và $[a, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

đồng thời cùng hội tụ.

Ví dụ 4.3.1

Xét sự hội tụ phân kì của tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Tách I thành hai tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Ta có

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{dx}{1+x^2}=-\lim_{b\to-\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}$$

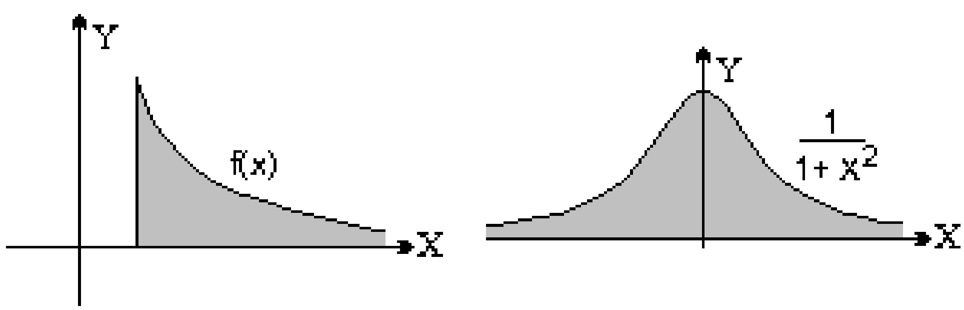
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}$$

Vậy tích phân $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Ý nghĩa hình học của tích phân suy rộng loại một

Nếu hàm $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ không âm trên $[a,+\infty)$, tích phân $I=\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ khi đó giá trị của tích phân I là diện tích hình thang cong vô hạn giới hạn bởi đồ thị hàm f, trục hoành và đường thẳng $x=a$.



Hình 4.2: Diện tích hình thang cong vô hạn

Hình vẽ thứ hai ở trên minh họa hình thang cong kéo dài vô hạn về cả hai phía $-\infty,+\infty$ giới hạn bởi đương cong $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ với trục hoành. Diện tích hình thang cong đó bằng

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

Ví dụ 4.3.2

Tính các tích phân suy rộng sau

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ là tích phân suy rộng loại một

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}$$

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{2(1+b^2)} + \frac{\operatorname{arctg} b}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. Tính $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^2}$.

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{-b^2 + 2b\operatorname{arctg} b + (1+b^2)\operatorname{arctg}^2 b}{4(1+b^2)} = \frac{\pi^2}{16}$$

3. Tính các tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2dx,\quad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^3dx$. Áp dụng công thức tích phân từng phần và chuyển qua giới hạn khi $b\to+\infty$, ta có

$$\int_0^b e^{-x}x^2dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_0^b = 2-(b^2+2b+2)e^{-b}\to 2$$

Vậy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2dx = 2. \quad \text{Tương tự} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^3dx = 6.$$

Tích phân suy rộng có các tính chất cơ bản sau đây

• Nếu các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, khi đó

$$\int_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx \quad \text{với} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

cũng hội tụ và

$$\int_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

• Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, khi đó

$$\lim_{b\to+\infty}\int_b^{+\infty} f(x)dx = 0$$

• Từ định nghĩa của tích phân suy rộng và theo nguyên lí Cauchy về sự tồn tại giới hạn
$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ khi và chỉ khi với mỗi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* $B > a$ *sao cho với mọi* $b_1, b_2 > B$

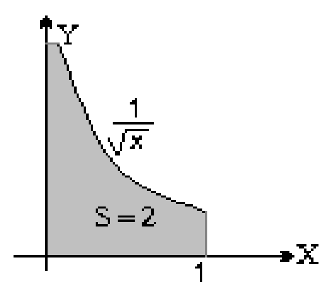
$$\left|\int_a^{b_1} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Từ tính chất này ta suy ra ngay sự hội tụ, phân kì của $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ không phụ thuộc vào giá trị của hàm f trên các khoảng hữu hạn $[a, a+h]$.

4.3.2 Tích phân suy rộng loại hai (tích phân hàm không bị chặn)

Như đã trình trong mục trước, tích phân Riemann $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ không tồn tại, song cũng như tích phân suy rộng loại một, hình thang cong vô tận giới hạn bởi đồ thị hàm $\frac{1}{\sqrt{x}}$ với trục hoành trên đoạn $[0,1]$ có diện tích. Diện tích đó có thể được tính bằng công thức Newton-Leibnitz(!)

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$



Hình 4.3: Diện tích hình thang cong vô hạn

Chúng ta sẽ giải thích hiện tượng đó bằng khái niệm tích phân suy rộng hàm không bị chặn

Định nghĩa 4.3.2 *Hàm $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ không bị chặn trên $(a, b]$, khả tích trên đoạn $[a + \varepsilon, b]$ với mọi $\varepsilon > 0$. Nếu tồn tại giới hạn và giới hạn đó hữu hạn*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

ta nói tích phân suy rộng của hàm f trên khoảng $(a, b]$ hội tụ, kí hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Trường hợp ngược lại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kì.

• Ta có thể phát biểu tương tự cho trường hợp f không bị chặn tại lân cận b và khả tích trên đoạn $[a, b - \varepsilon]$ với mọi $\varepsilon > 0$. Tích phân hàm f hội tụ trên khoảng $[a, b)$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

• Trường hợp f không bị chặn tại lân cận c, $\big(c \in (a, b)\big)$, ta định nghĩa tích phân suy rộng

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

trong đó $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ.

• Bạn đọc tự định nghĩa tích phân suy rộng cho trường hợp f không bị chặn tại lân cận hữu hạn điểm trên đoạn $[a, b]$.

Ví dụ 4.3.3

1. Xét sự hội tụ phân kì của tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad (\alpha > 0)$$

- Với $\alpha = 1$, tích phân phân kì.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon \to +\infty \quad \text{khi} \quad \varepsilon \to 0+$$

- Với $\alpha \neq 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}$$

Vậy $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$. Giá trị của tích phân khi đó bằng

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \text{với} \quad \alpha < 1.$$

2. Tương tự như ví dụ trên xét tích phân suy rộng

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}, \quad (\alpha > 0)$$

- Với $\alpha = 1$, tích phân phân kì.
- Với $\alpha \neq 1$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}$$

Vậy $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$. Nhận xét rằng khi $\alpha \leq 0$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx$ là tích phân Riemann.

3. Xét tích phân suy rộng

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn tại lân cận hai điểm $x = -1$ và $x = 1$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \text{-}\arcsin(-1+\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

Vậy tích phân I hội tụ và

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Định lí sau là mở rộng của định lí 4.2.10 cho trường hợp tích phân suy rộng

Định lí 4.3.1 *Giả sử hàm $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ không bị chặn tại lân cận $x = a$. Giả thiết rằng $\Phi(x)$ là nguyên hàm của f trên $(a, b]$ và tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x\to a+} \Phi(x) \quad \textit{đặt} \quad \Phi(a) = \lim_{x\to a+} \Phi(x)$$

Khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Chứng minh Định lí được suy ra từ định nghĩa của tích phân suy rộng

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\Phi(b) - \Phi(a+\varepsilon)\Big) = \Phi(b) - \Phi(a) \blacksquare$$

Nhận xét rằng định lí vẫn đúng đối với trường hợp hàm f không bị chặn tại lân cận hữu hạn điểm thuộc $[a, b]$ và nguyên hàm $\Phi(x)$ của f (sau khi bổ sung giá trị hàm Φ tại hữu hạn điểm đó như trong định lí) là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Ví dụ 4.3.4

1. Trở lại tích phân đã xét ở đầu mục này $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Hàm $\Phi(x) = 2\sqrt{x}$ là nguyên hàm của $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $\Phi(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, suy ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

2. $I = \int_0^1 \arcsin x\, dx$. Đặt $u = \arcsin x, v = x$, ta có

$$I = \int_0^1 \arcsin x\, dx = x \arcsin x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Tích phân suy rộng loại hai có các tính chất cơ bản giống như tích phân suy rộng loại một. Chẳng hạn
• Nếu các tích phân $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ, khi đó

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx \quad \text{với} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

cũng hội tụ và

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

• Giả sử hàm f khả tích theo Riemann trên các đoạn $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ và f không bị chặn tại lân cận điểm $x = b$. Sự hội tụ, phân kì của $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào giá trị của hàm f trên khoảng $[a, b-\varepsilon]$.

4.3.3 Các định lí so sánh

Định lí 4.3.2 *$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là các hàm không âm trên $[a, +\infty)$, khả tích trên $[a, b]$ với mọi $b > a$, đồng thời giả thiết*

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{với mọi} \quad x \ge a$$

Khi đó
• *Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*
• *Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kì.*

Chứng minh Giả sử $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ và giá trị tích phân bằng I. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le I \quad \forall b > a.$$

Mặt khác f, g là các hàm không âm nên $\int_a^b f(x)dx$ đơn điệu tăng khi b tăng. Suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Phần thứ hai của định lí được suy ra từ phần thứ nhất. ■

Định lí 4.3.3 *Giả sử $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là các hàm không âm trên $[a, +\infty)$, khả tích trên $[a, b]$ với mọi $b > a$, đồng thời giả thiết*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \ (0 < K < +\infty)$$

Khi đó các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ đồng thời cùng hội tụ hoặc phân kì.

Chứng minh Với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $A = K - \varepsilon > 0$, đặt $B = K + \varepsilon$. Khi đó theo định nghĩa giới hạn, tồn tại $u > a$ sao cho

$$A < \frac{f(x)}{g(x)} < B \text{ với mọi } x > u \quad \text{hay} \quad Ag(x) < f(x) < Bg(x).$$

• Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, từ bất đẳng thức trên và theo định lí 4.3.2

$$f(x) \le Bg(x) \ \text{ với mọi } x > u \Rightarrow \int_u^{+\infty} f(x)dx \quad \text{hội tụ.}$$

Mặt khác sự hội tụ, phân kì của tích phân không phụ thuộc vào giá trị của hàm f trên đoạn hữu hạn $[a, u]$, suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
• Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, từ bất đẳng thức $Ag(x) < f(x)$ với mọi $x > u$, lập luận tương tự suy ra $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ. ■

Chú ý, các định lí tương tự như định lí 4.3.2, 4.3.3 cũng đúng cho tích phân suy rộng loại hai. Ta có định lí sau

Định lí 4.3.4 *Giả sử $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ là các hàm không âm trên $[a, b)$, không bị chặn tại lân cận điểm $x = b$, đồng thời giả thiết*

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = K \ (0 < K < +\infty)$$

Khi đó các tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ đồng thời cùng hội tụ hoặc phân kì.

Ví dụ 4.3.5

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}}dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{(1+x)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$. Áp dụng định lí 4.3.4

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} : \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin^2 x}{(1+x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sin^2 1}{2^{\frac{1}{3}}} = K$$

   Ta đã biết

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{hội tụ, suy ra} \quad \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx \quad \text{hội tụ.}$$

2. Xét tích phân suy rộng $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha x}$.

   Áp dụng định lí so sánh 4.3.4 cho các hàm $\dfrac{1}{\sin^\alpha x}$ và $\dfrac{1}{x^\alpha}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^\alpha x} : \frac{1}{x^\alpha}\right) = 1.$$

   Vậy $I(\alpha)$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

3. Chứng minh rằng tích phân sau hội tụ với mọi $x > 0$.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

   Tách $\Gamma(x)$ thành hai tích phân

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = I_1 + I_2.$$

   Tích phân I_1 hội tụ vì khi $0 < t \le 1$ và $x < 1$, ta có $e^{-t}t^{x-1} < \frac{1}{t^{1-x}}$, biết rằng tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ hội tụ. (Với $x \ge 1$, tích phân $I_1 = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ là tích phân xác định).

Tích phân I_2 hội tụ vì $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x-1} = 0$, suy ra với t đủ lớn

$$e^{-t}t^{x-1} < \frac{1}{t^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \quad \text{hội tụ} \ \Rightarrow \ I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \quad \text{hội tụ.}$$

Vậy $\Gamma(x) = I_1 + I_2$ hội tụ với mọi $x > 0$.

Hàm $\Gamma(x)$ được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học, do vậy chúng ta sẽ giới thiệu vắn tắt một số tính chất của nó trong phần cuối của mục này.

Định nghĩa 4.3.3 *Tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (hoặc $\int_a^b f(x)dx$) được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \quad (\text{ hoặc } \quad \int_a^b |f(x)|dx) \quad \text{hội tụ.}$$

Trường hợp $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì, ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ. (Phát biểu tương tự cho $\int_a^b f(x)dx$).

Ta có định lí sau

Định lí 4.3.5 *Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.*

Chứng minh Từ giả thiết của định lí $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ, theo tính chất của tích phân hội tụ với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $B > a$ sao cho

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 > B.$$

Khi đó

$$\left|\int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Theo nguyên lí giới hạn Cauchy, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. ■

Nhận xét rằng định lí trên cũng đúng cho tích phân suy rộng loại hai (tích phân hàm không bị chặn). Khái niệm tích phân hội tụ tuyệt đối không có ý nghĩa gì mới đối với các hàm không âm.

Ví dụ 4.3.6

Xét tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

Theo định nghĩa tích phân suy rộng, trước hết ta tính tích phân trên đoạn $[1, b]$ bằng phương pháp tích phân từng phần

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Chuyển qua giới hạn $b \to +\infty$, do $\frac{\cos b}{b} \to 0$ và

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{hội tụ}$$

suy ra tích phân đã cho $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ hội tụ và

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Tuy nhiên người ta chứng minh được $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ phân kì. Vậy tích phân đã cho bán hội tụ.

Bây giờ ta phát biểu, không chứng minh hai tiêu chuẩn khá hiệu quả trong việc xác định tính hội tụ hay phân kì của tích phân.

• *Tiêu chuẩn Abel* Cho hai hàm $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

(a) Tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

(b) Hàm g đơn điệu và bị chặn: $|g(x)| \le K \ \forall x \ge a$.

Khi đó tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

• *Tiêu chuẩn Dirichlet* Cho hai hàm $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

(a) Hàm f khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ $(b > a)$ và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le K \quad \forall b > a.$$

(b) Hàm g đơn điệu và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Khi đó tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.
Ví dụ Xét các tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx,\ \alpha > 0.$$

Dựa theo tiêu chuẩn Dirichlet, xét

$$\left|\int_1^b \sin x\, dx\right| = |\cos b - \cos 1| \le 2 \quad \forall b > 1.$$

Mặt khác hàm $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ đơn điệu giảm, tiến dần đến 0. Suy ra

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \quad \text{hội tụ.}$$

Chứng minh tương tự cho các tích phân còn lại.

Một vài tính chất của hàm Gamma

Trong ví dụ 3 ngay sau các định lí so sánh, ta đã chứng minh

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

hội tụ với mọi $x > 0$. Bây giờ ta sẽ giới thiệu một số tính chất quan trọng của hàm Gamma

1. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$

   Thật vậy với $x > 0$, bằng phương pháp tích phân từng phần

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = -\int_0^{+\infty} t^x de^{-t} =$$

$$= -t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$$

3. Từ hai tính chất trên của hàm Gamma suy ra với $x - k > 0$, k là số tự nhiên bất kì

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-k)\Gamma(x-k).$$

Đặc biệt

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

4. Ta có thể chứng minh

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Suy ra

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

5. Từ các tính chất trên, trong xác suất thống kê sử dụng hàm $\Gamma(x)$ người ta biểu diễn các hàm mật độ của các phân bố xác suất như phân bố chuẩn, phân bố Student dưới dạng

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2})}e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad S(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

4.4 Ứng dụng của tích phân

Tích phân xác định cũng như tích phân suy rộng có các ứng dụng hết sức rộng rãi trong nhiều lĩnh vực. Khi mới làm quen với tích phân xác định, chúng ta đã nói tới ý nghĩa hình học của tích phân xác định là diện tích của một miền it hình thang cong $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le f(x)\}$. Nhận xét này sẽ được mở rộng ra để tính diện tích một miền phẳng bất kì và không chỉ dừng lại đó, tích phân sẽ là công cụ chủ yếu của giải tích để tính thể tích vật thể, diện tích mặt cong, độ dài đường cong cũng như ứng dụng vào rất nhiều các lĩnh vực khác nhau của toán học, các ngành khoa học và nhiều ngành kĩ thuật khác.

Các ứng dụng của tích phân để giải quyết một bài toán nào đó thường có chung các bước sau, ta gọi là *sơ đồ tổng tích phân*

- Đại lượng A cần tính là một đại lượng có *tính tuyến tính*, nói cách khác đại lượng A là một hàm phụ thuộc vào đoạn $[a, b]$, có thể chia nhỏ thành tổng của các đại lượng A_i có tính chất như tính chất của A. Hơn thế nữa, khi chia đoạn $[a, b]$ bởi phép chia

$$F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

đại lượng A_i cũng là đại lượng cần tính tương ứng với đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

(Chẳng hạn ta minh họa đại lượng cần tính A là diện tích hình thang cong tương ứng với đoạn $[a, b]$ và A_i khi đó là diện tích các hình thang cong nhỏ tương ứng với đoạn $[x_{i-1}, x_i]$).

- Tìm một hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[a, b]$ sao cho

$$A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Chính xác hơn A_i và $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ sai khác nhau một VCB cấp cao hơn $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Trong nhiều trường hợp, các đại lượng A_i thỏa mãn

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta_i \leq A_i \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta_i.$$

- Khi đó đại lượng A là tích phân của hàm f trên đoạn $[a, b]$

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ Tính áp lực nước lên một thành đập thẳng đứng hình chữ nhật có chiều dài đáy bằng 30m, chiều cao của thành đập là 10m.
Áp lực nước lên thành đập là một hàm phụ thuộc vào chiều cao của thành đập. Nếu ta chia thành đập thành các băng hình chữ nhật nhỏ hơn theo độ cao và kí hiệu A_i là áp lực nước lên băng thứ i, khi đó toàn bộ áp lực nước lên thành đập

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Chi tiết hơn, áp lực A là hàm phụ thuộc vào đoạn chiều cao thành đập $[0, 10]$. Chia $[0, 10]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 10$, A_i là áp lực nước lên băng thứ i tương ứng với đoạn chiều cao thành đập $[x_{i-1}, x_i]$.

Diện tích của băng thứ i trên thành đập bằng $30(x_i - x_{i-1}) = 30\Delta_i$ và hiển nhiên áp lực nước lên băng đó $A_i \approx 30\Delta_i \cdot h_i$, với h_i là độ cao trung bình từ mặt nước tới băng thứ i trên thành đập. Chính xác hơn

$$30\Delta_i \cdot x_{i-1} \leq A_i \leq 30\Delta_i \cdot x_i.$$

Chọn hàm $f(x) = 30x$, khi đó tích phân của hàm f trên đoạn $[0, 10]$ chính là áp lực nước lên toàn bộ thành đập

$$A = \int_0^{10} 30x dx = 1500 \quad \text{(tấn)}.$$

4.4.1 Tính diện tích miền phẳng

• Diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x), a \leq x \leq b$, các đường thẳng $x = a, x = b$ và đoạn $[a, b]$ trên trục hoành, trong đó f là hàm không âm, chính là diện tích hình thang cong đã được nhắc đến khi nói tới ý nghĩa hình học của tích phân xác định.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Một cách tổng quát công thức để tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x), a \leq x \leq b$, các đường thẳng $x = a, x = b$ và trục hoành

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx.}$$

Trường hợp miền phẳng có dạng

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

f_1 và f_2 là hai hàm khả tích trên $[a, b]$ khi đó diện tích miền D

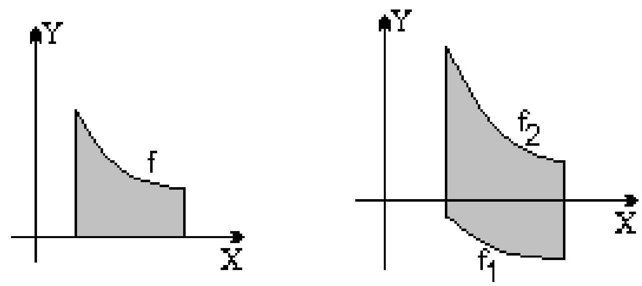
$$\boxed{S(D) = \int_a^b \Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)dx.}$$

Hoàn toàn tương tự nếu miền phẳng D có dạng

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

Khi đó

$$\boxed{S(D) = \int_c^d \Big(g_2(y) - g_1(y)\Big)dy.}$$



Hình 4.4: Diện tích miền phẳng

Xét trường hợp riêng khi đường cong $y = f(x), a \leq x \leq b$ có thể biểu diễn dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \alpha \leq t \leq \beta \qquad \Big(x(\alpha) = a, x(\beta) = b\Big)$$

Hàm $x = x(t)$ khả vi liên tục và có đạo hàm $x'(t) \geq 0$ khi t biến thiên $\alpha \leq t \leq \beta$. Hàm $y = y(t) \geq 0$ với mọi t trong khoảng $[\alpha, \beta]$. Khi đó miền hình thang cong

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

có diện tích và diện tích được tính theo công thức dưới đây, cách thiết lập công thức tương tự như đã trình bày trong phần ý nghĩa hình học của tích phân xác định

$$\boxed{S(D) = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.}$$

• Cuối cùng ta nói đến cách tính diện tích *hình quạt cong*. Miền D được giới hạn bởi hai tia $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ và đường cong $r = r(\varphi)$ trong hệ toạ độ cực. Miền D như vậy được gọi là *hình quạt cong*, diện tích được tính bởi công thức

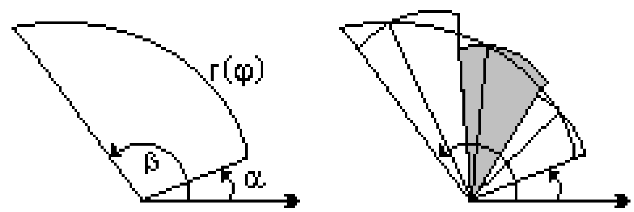
$$\boxed{S(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.}$$

Thật vậy chia hình quạt cong (miền D) thành nhiều hình quạt cong nhỏ tương ứng với phép chia đoạn $[\alpha, \beta]$, rồi chọn các điểm t_i tùy ý trong mỗi đoạn nhỏ của phép chia đó. Mỗi hình quạt cong nhỏ xấp xỉ như hình quạt tròn (với bán kính $r(t_i)$ và góc ở đỉnh bằng $\Delta\varphi_i$). Diện tích hình quạt tròn thứ i (được đánh dấu trên hình vẽ) bằng $\dfrac{1}{2}r^2(t_i)\Delta\varphi_i$.

Xét hàm $\dfrac{1}{2}r^2(\varphi)$ và lập các tổng Darboux dưới $S_*(F)$, tổng Darboux trên $S^*(F)$, tương ứng với phép chia. $S_*(F)$ là tổng diện tích của các hình quạt tròn nhỏ nằm trong hình quạt cong và $S^*(F)$ là tổng diện tích các hình quạt tròn nhỏ chứa hình quạt cong. Nếu hàm $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ khả tích

$$\sup S_*(F) = \inf S^*(F) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\varphi)d\varphi$$

Suy ra hình quạt cong có diện tích và diện tích hình quạt cong bằng giá trị tích phân trong công thức ở trên.

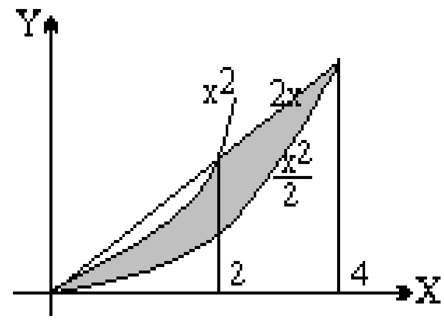


Hình 4.5: Diện tích hình quạt cong

Ví dụ 4.4.1

1. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x$. Đường thẳng $y = 2x$ cắt các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}$ tại các điểm $x_1 = 2, x_2 = 4$. Do vậy miền phẳng được chia thành 2 miền có diện tích tương ứng với hai tích phân (xem hình vẽ trang sau)

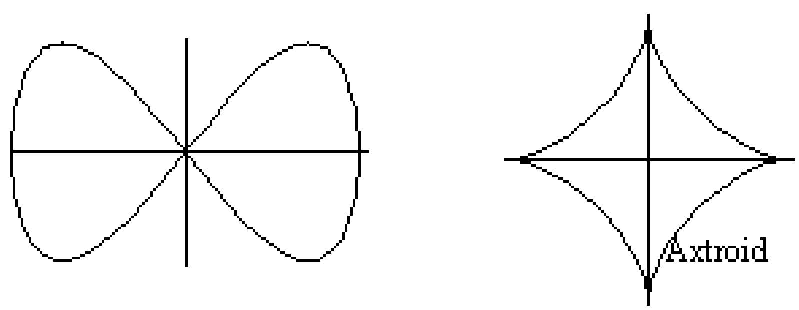
$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)dx = 4$$



Hình 4.6: Diện tích miền phẳng

2. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$. Hàm $y = y(x)$ là hàm chẵn được xác định trên đoạn $[-a, a]$. Đồ thị hàm số nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng.

$$S = 4\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{|a|}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin t \cos^2 t dt = \frac{4}{3}a^2$$



Hình 4.7: Axtroid và lemnixcat

3. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong Axtroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ Phương trình tham số biểu diễn Axtroid:

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t.$$

Đồ thị hàm số nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng. Sử dụng công thức tính diện tích hình thang cong khi đường cong biểu diễn dưới dạng tham số

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)x'(t)dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\sin^4 t\cos^2 t\, dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

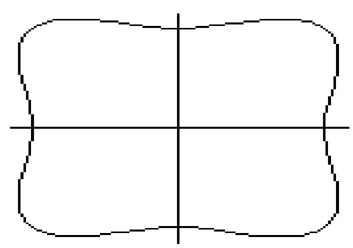
4. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi lemnixcat $r^2 = a^2\cos 2t$. Đường cong vẽ trong hệ tọa độ cực cũng nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng. Sử dụng công thức tính diện tích hình quạt cong

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2t\, dt = 4\cdot\frac{a^2}{4} = a^2.$$

5. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

   Chuyển sang hệ toạ độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, đường cong có dạng $r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = 1$ hay

$$r^2 = \frac{2}{2-\sin^2 2\varphi}.$$



Diện tích của hình phẳng bằng

$$S = 8\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{2-\sin^2 2\varphi}d\varphi = 8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\cos^2 2\varphi}d\varphi =$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2+\mathrm{tg}^2 2\varphi}d\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

4.4.2 Tính thể tích vật thể

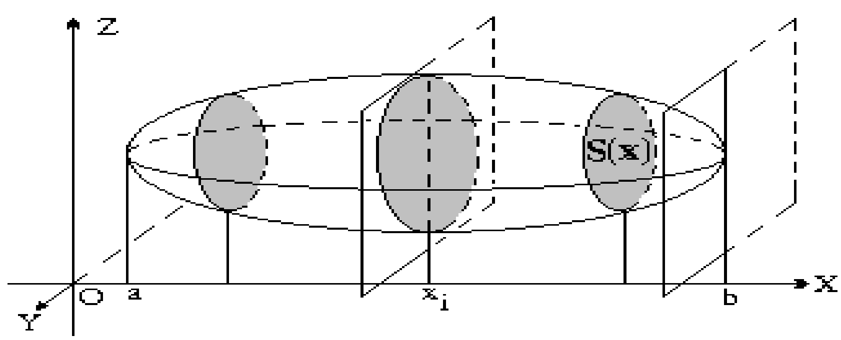
• Ta sẽ thiết lập công thức thể tích của vật thể bất kì giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$, biết diện tích thiết diện $S(x)$ tạo bởi vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm x trên trục đó. Giả thiết rằng $S(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Xét phép chia $F : a = a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ đoạn $[a, b]$. Qua mỗi điểm x_i dựng mặt phẳng vuông góc với trục hoành. Phần vật thể nằm giữa các mặt phẳng vừa dựng có thể tích V_i, khi đó

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} S(x)(x_{i+1} - x_i) \leq V_i \leq \sup_{[x_i, x_{i+1}]} S(x)(x_{i+1} - x_i)$$

Cộng vế với vế theo $i = 0, 1, ..., n - 1$ ta được

$$S_*(F) \leq V = \sum_i V_i \leq S^*(F).$$



Hình 4.8: Thể tích

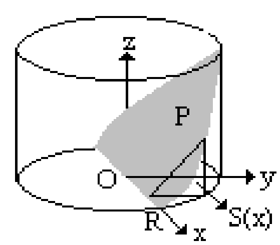
Do $S(x)$ liên tục trên $[a, b]$, suy ra $S(x)$ khả tích hay $\lim S_*(F) = \lim S^*(F)$ khi đường kính phép chia $d(F) \to 0$. Vì vậy ta có thể tích của vật thể bằng

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx.}$$

Ví dụ 4.4.2

1. Tính thể tích của Elipxôid
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Elipxôid nằm giữa hai mặt phẳng $x=-a$ và $x=a$. Thiết diện tạo bởi Elipxôid và mặt phẳng vuông góc với trục Ox có phương trình (theo các biến y,z)
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}.$$
Đây là phương trình Elip với 2 bán trục $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Diện tích của elip đó bằng
$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$
Thể tích Elipxôid do vậy bằng
$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

2. Xét hình trụ đáy là hình tròn bán kính R, chiều cao hình trụ bằng h. Mặt phẳng P đi qua tâm đáy dưới và tiếp xúc với đáy trên (P có 1 điểm chung duy nhất với đáy trên). Hãy tính thể tích miền nằm trong hình trụ và nằm dưới mặt phẳng P.



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Mặt phẳng P khi đó có phương trình $z=\frac{hy}{R}$. Cắt miền cần tính thể tích bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox. Thiết diện tạo thành là các tam giác có diện tích
$$S(x)=\frac{h}{2R}(R^2-x^2),\quad -R\le x\le R$$

Do đó thể tích phần không gian nằm trong hình trụ và nằm dưới mặt phẳng P bằng

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \int_{-R}^{R} \frac{h}{2R}(R^2 - x^2)dx = \frac{2R^2h}{3}.$$

Nhận xét rằng nếu cắt miền đó bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Oy, thiết diện $S(y)$ sẽ là hình chữ nhật

$$S(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}\frac{hy}{R}, \qquad V = \int_0^R S(y)dy = \frac{2R^2h}{3}.$$

3. Tính thể tích miền nằm trong hai hình trụ

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

Hướng dẫn: Xét trong góc phần tám $x > 0, y > 0, z > 0$, miền đó gần giống như hình chóp với đỉnh $(a, 0, 0)$ đáy là hình vuông trong mặt phẳng yOz, thiết diện $S(x)$ là hình vuông.

$$S(x) = (a^2 - x^2), \qquad V_1 = \int_0^a S(x)dx = \frac{2a^3}{3}, \qquad V = 8V_1 = \frac{16a^3}{3}.$$

4. Tính thể tích chỏm cầu (hình cầu bán kính R), chiều cao của chỏm cầu bằng $h = R - a$ ($a \le x \le R$)

$$V = \int_a^R S(x)dx = \int_a^R \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(\frac{2R^3}{3} + \frac{a^3}{3} - aR^2\right).$$

• Đặc biệt để tính *thể tích của vật thể tròn xoay* khi quay quanh trục Ox miền phẳng D, D là hình thang cong tạo bởi hàm liên tục $f(x), a \le x \le b$ với trục hoành

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}.$$

Thiết diện vuông góc với trục Ox là hình tròn, có diện tích $S(x) = \pi f^2(x)$. Suy ra thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh trục Ox

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.}$$

Tương tự, thể tích của vật thể tròn xoay khi quay miền phẳng D quanh trục Oy, $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ là hình thang cong giới hạn bởi trục hoành, đồ thị hàm không âm $f(x)$ và các đường thẳng $x = a,\ x = b$

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.}$$

Ví dụ 4.4.3

1. Cho cung parabol $(x = y^2, 0 < x < 1)$.
   • Kí hiệu V_1 là thể tích của vật thể tạo thành khi quay miền phẳng $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ quanh trục Ox.
   • Kí hiệu V_2 là thể tích của vật thể tạo thành khi quay miền phẳng $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$ quanh trục Oy.
   • Kí hiệu V_3 là thể tích của vật thể tạo thành khi quay miền phẳng $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ quanh trục Oy.
   Áp dụng các công thức tính thể tích cho từng vật thể ta được

$$V_1 = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad V_2 = \pi \int_0^1 y^4\, dy = \frac{\pi}{5}$$

$$V_3 = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{4\pi}{5}.$$

2. Tính thể tích của vật thể khi quay hình thang cong (giới hạn bởi $\sin x, 0 \leq x \leq \pi$ với trục Ox) quanh 2 trục Ox và Oy.

   Áp dụng 2 công thức nêu trên:

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{2}, \qquad V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi^2.$$

3. Tính thể tích của vật thể khi quay quanh trục Ox một nhịp đường xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2(x)\, dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = 5\pi^2 a^3.$$

4. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay đường cong $x^4 + y^4 = a^2x^2$ quanh trục Ox.

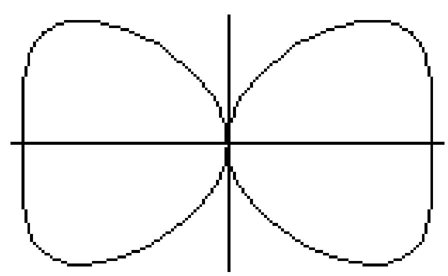
   Biểu diễn tham số một nhánh của đường cong

$$x = a\cos t, y = a\sqrt{\sin t \cos t} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

   Đồ thị đường cong có dạng gần giống hình số 8 như hình 4.9 dưới đây, nhận các trục toạ độ là trục đối xứng.

   Thể tích của vật thể khi quay đường cong $x^4 + y^4 = a^2x^2$ quanh trục Ox bằng

$$V_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 x' dt = 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{2\pi a^3}{3}.$$



Hình 4.9: Đồ thị đường cong $x^4 + y^4 = a^2x^2$

5. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi đường cong $x^4 + y^4 = x^3$ khi quay quanh trục Ox.

   Hướng dẫn: Đồ thị nhận trục Ox làm trục đối xứng.

$$x = \cos^2 t, y = \cos t\sqrt{\sin t \cos t}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 x' dt = \frac{\pi^2}{16}.$$

4.4.3 Tính độ dài đường cong

Giả sử $x = x(t), y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$ là một biểu diễn tham số của đường cong, các hàm $x = x(t), y = y(t)$ khả vi liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Ta sẽ chứng minh độ dài cung đường cong bằng

$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.}$$

Gọi $F : \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = \beta$ là phép chia đoạn $[\alpha, \beta]$, $M_i\big(x(t_i), y(t_i)\big)$ với mọi $i = 0, 1, 2, ..., n$ là các điểm thuộc đường cong. Độ dài đoạn $M_{i-1}M_i$ bằng

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}(t_i - t_{i-1})$$

trong đó $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Vậy tổng độ dài đường gấp khúc nội tiếp đường cong $M_0M_1...M_n$ bằng

$$S(F) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}(t_i - t_{i-1}).$$

Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{d(F)\to 0} S(F) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Đó chính là công thức tính độ dài đường cong.

Thật vậy xét

$$\left|\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}\right| =$$

$$= \frac{|y'^2(\xi_i) - y'^2(\eta_i)|}{\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} + \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}} =$$

$$= \frac{|y'(\xi_i) + y'(\eta_i)| \cdot |y'(\xi_i) - y'(\eta_i)|}{\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} + \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}} \leq |y'(\xi_i) - y'(\eta_i)| < \frac{\epsilon}{\beta - \alpha}$$

do tính liên tục đều của $y'(t)$ trên $[\alpha, \beta]$ khi đường kính của phép chia đủ nhỏ ta có

$$|S(F) - \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)}(t_i - t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{\beta - \alpha}(t_i - t_{i-1}) = \epsilon.$$

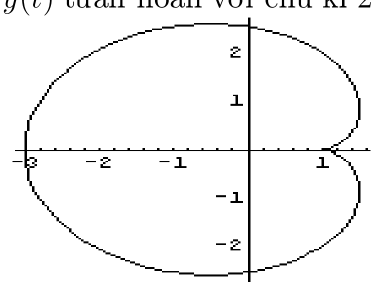
Mặt khác $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}(t_i-t_{i-1})$ chính là tổng tích phân tiến tới $\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ khi $d(F)\to 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

Đặc biệt nếu đường cong biểu diễn dưới dạng tường $y=f(x), x\in[a,b]$, trong đó hàm f khả vi liên tục trên $[a,b]$, khi đó độ dài đường cong bằng

$$\boxed{s=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx.}$$

Ví dụ 4.4.4

1. Tính độ dài cung parabol $y=2\sqrt{x}, 0\le x\le 1$.
   Áp dụng công thức tính độ dài đường cong
   $$s=\int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx.$$
   Đặt $\frac{1}{x}=u$ và sau đó đổi biến tiếp $v=\sqrt{u+1}$
   $$s=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u}}{u^2}du=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2v^2}{(v^2-1)^2}dv.$$
   $$s=\left(\frac{v}{1-v^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{v-1}{v+1}\right)\Big|_{v=\sqrt{2}}^{+\infty}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$$
2. Tính độ dài đường cong
   $$x=2\cos t-\cos 2t, y=2\sin t-\sin 2t$$
   Các hàm $x(t)$ và $y(t)$ tuần hoàn với chu kì 2π. Đồ thị đường cong có dạng



   Theo công thức tính độ dài đường cong
   $$\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=4\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{3t}{2}\right|dt=12\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin\frac{3t}{2}dt=16.$$

3. Tính độ dài cung $y = \ln(1 - x^2), 0 \le x \le \frac{1}{2}$

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = \left(\ln \frac{x + 1}{1 - x} - x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

4. Tính độ dài đường cong Axtroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

   Đạo hàm 2 vế đẳng thức $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ theo biến x ta được

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

   Áp dụng công thức tính độ dài đường cong

$$s = 4 \int_0^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = 4 \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 6a.$$

   Cũng có thể sử dụng phương trình tham số $x = a\cos^3 t, y = a \sin^3 t$ để tính độ dài đường cong Axtroid.

4.4.4 Tính diện tích mặt tròn xoay

Diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay đường cong $y = f(x), a \le x \le b$ quanh trục Ox

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.}$$

Thật vậy giả sử hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ (không làm mất tính tổng quát ta giả thiết $f(x)$ là hàm không âm). Gọi $F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ là phép chia đoạn $[a, b]$, $M_i(x_i, f(x_i))$ với mọi $i = 0, 1, 2, ..., n$ là các điểm thuộc đường cong.

Khi quay $f(x)$ xung quanh trục Ox, đường gấp khúc $M_0M_1...M_n$ quay theo một mặt tròn xoay và diện tích của mặt đó bằng tổng diện tích các hình nón cụt. Đường sinh của hình nón cụt thứ i bằng

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

suy ra diện tích xung quanh hình nón cụt thứ i bằng $S_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i-1}))l_i$. Vậy

$$S(F) = \sum_{i=1}^n S_i = \pi \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i-1})) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Sử dụng tính liên tục đều của $f'(x)$ trên $[a, b]$, ta có thể chứng minh công thức tính diện tích mặt tròn xoay

$$\lim_{d(F)\to 0} S(F) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ với $\alpha \leq t \leq \beta$, khi đó diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay đường cong quanh trục Ox bằng

$$\boxed{S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.}$$

Ví dụ 4.4.5

1. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay đường cong $9y^2 = x(3 - x)^2$ với $0 \leq x \leq 3$ xung quanh trục Ox.

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3 - x) \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2(x)} = \frac{1 + x}{2\sqrt{x}}$$

   Áp dụng công thức tính diện tích mặt tròn xoay

$$S = 2\pi \int_0^3 y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{6}(1 + x)(3 - x)dx = 3\pi.$$

2. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay đường Axtroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ xung quanh trục Ox.

   Phương trình tham số của Axtroid $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$. Áp dụng công thức tính diện tích mặt tròn xoay

$$S = 2\pi \int_0^\pi |y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 2\pi \cdot 3a^2 \int_0^\pi \sin^4 t|\cos t|dt = \frac{12}{5}\pi a^2$$

3. Tính diện tích hình vòng xuyến khi quay $x^2 + (y - b)^2 = a^2, (0 < a < b)$ quanh trục Ox.

   Hướng dẫn: Tổng diện tích do nửa trên của đường tròn và nửa dưới của đường tròn khi quay

$$S = 2\pi \int_{-a}^a +2\pi \int_{-a}^a = 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi^2 ab.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Tính các tích phân sau trên $\mathbb{R}$ và vẽ đồ thị một nguyên hàm của chúng

$$\int |x|^3\, dx, \qquad \int e^{-|x|}\, dx, \qquad \int \max\{1, x^2\}\, dx.$$

2. Tính các tích phân

(a) $\displaystyle\int (x^2 + x + 1)^2 dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

(c) $\displaystyle\int (\sin 5x - 4e^{4x} + \cos 3x + 2) dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} dx$

3. Đổi biến để tính các tích phân

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x+1)^3} dx$ (b) $\displaystyle\int (4x+1)^9 dx$

(c) $\displaystyle\int x^3 \sqrt{x^4+2}\, dx$ (d) $\displaystyle\int \cos^3 x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx$

(e) $\displaystyle\int (3\cos x + 1)^2 \sin x\, dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

4. Tính các tích phân

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 1} dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

5. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

(a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$

(c) $\displaystyle\int (x^2+1)\mathrm{arctg}\,x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\,dx$ (f) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

(g) $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \cos(\ln x)dx$

6. Tính các tích phân

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6+2x^3+3}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{(x^5+1)\,dx}{x^4-8x^2+16}$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4-16}$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ (k) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$

7. Tính tích phân các hàm lượng giác

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^6 x\,dx$

8. Tính các tích phân xác định

(a) $\displaystyle\int_0^4 |x-2|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 |x^2-2x+m|\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ (f) $\displaystyle\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$

9. Bằng phương pháp đổi biến và tích phân từng phần hãy tính các tích phân sau

(a) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ (e) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ (f) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$ (i) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

(k) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ (l) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$ (m) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx$

10. Chứng minh rằng phương trình $a\sin 2x + b\sin 3x + c\cos 4x + d\cos 5x = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c, d.

11. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $[-a, a]$, thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

12. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-a, a]$ thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$
Áp dụng để tính $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\cos x\,dx}{x^2+1}$.

13. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì
$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

14. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hãy tính
$$I = \int\limits_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx.$$

15. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và thoả mãn $f(a+b-x) = f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$, khi đó
$$\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

16. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì T, liên tục trên $\mathbb{R}$, khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$
Áp dụng để tính $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$, $\int\limits_0^{2\pi} \sin(3x + \sin 4x)\,dx$.

17. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$, khi đó với mọi $a > 0$
$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)\,dx}{a^x+1} = \int_0^b f(x)dx.$$
Áp dụng để tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+2^x}|\sin x|dx$.

18. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm bị chặn, lồi lên trên $[a, b]$, khi đó

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

19. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

Áp dụng để tính $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\cos x + \sin x}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x + \sin x}$.

20. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

21. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Áp dụng để tính $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{\cos^2 x + 1}$.

22. Cho f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. Hãy tính

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx.$$

23. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}dx}{1+e^{-x}}$$

24. Chứng minh rằng

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

25. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0,1]$ và $f(1) - f(0) = 1$. Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

26. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(1) = f(0) = 0$. Gọi $M = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$. Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 |f(x)| dx \leq \frac{M}{4}$.

27. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

(a) $\displaystyle\int_0^1 x \ln^2 x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{1+x^2}$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+6x^2+8} dx$

(e) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x} dx$ (f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}} dx$

28. Xét sự hội tụ, phân kì của các tích phân suy rộng sau

(a) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x}$ (b) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ (c) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x \, dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x) dx}{x^\alpha}$ (e) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\alpha x}$ (f) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$

(g) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ (h) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ (i) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

29. Chứng minh rằng tích phân sau (hàm Beta) hội tụ với mọi $x > 0, y > 0$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

30. Ứng dụng tích phân để tính các giới hạn

(a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$

31. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, x = y^2$.

32. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $x+2y^2 = 0, x+3y^2 = 1$.

33. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x, x^2+y^2 = 3$.

34. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi elip
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

35. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi một cung xiclôit và trục hoành
$$x = 2(t-\sin t),\ y = 2(1-\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

36. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường Cacdiôit (cho trong hệ tọa độ cực)
$$r = a(1+\cos\varphi)$$

37. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường $r = a\sin 3\varphi$ (cho trong hệ tọa độ cực).

38. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường $r = a(1-\cos\varphi)$ và đường tròn $r = a$.

39. Tính thể tích của Elipxôid
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

40. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit và mặt nón
$$2z = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \quad z^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}.$$

41. Tính thể tích miền nằm trong hình trụ và nằm dưới mặt phẳng đi qua tâm đáy, mặt phẳng đó có 1 điểm chung duy nhất với đáy trên. (Đáy có bán kính $\mathbb{R}$ và chiều cao hình trụ bằng h).

42. Tính thể tích miền nằm trong hai hình trụ
$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

43. Tính thể tích chỏm cầu, biết bán kính hình cầu là R và chiều cao của chỏm cầu bằng $h = R - a$, $(a \leq x \leq R)$

44. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay parabol $(x = y^2, 0 < x < 1)$ quay quanh 2 trục Ox và Oy.

45. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay $\sin x, 0 \leq x \leq \pi$ quanh các trục Ox và Oy.

46. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay một nhịp đường cong xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
quanh trục Ox.

47. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay một nhịp đường cong xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ xung quanh trục đối xứng của nó.

48. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi đường cong $x^4 + y^4 = a^2x^2$ khi quay quanh trục Ox.

49. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi đường cong $x^4 + y^4 = x^3$ khi quay quanh trục Ox.

50. Tính độ dài cung đường cong $y^2 = x^3$ từ điểm $A(0,0)$ đến điểm $B(1,1)$.

51. Tính độ dài cung đường cong $y = 1 - \ln\cos x$ với $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

52. Tính độ dài cung parabol $y = 2\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 1$

53. Tính độ dài cung $y = \ln(1 - x^2)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

54. Tính độ dài đường cong
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0).$$

55. Tính độ dài đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ với $a > 0$.

56. Tính độ dài đường cong cho trong hệ tọa độ cực $r = 2a(\sin\varphi + \cos\varphi)$ với $a > 0$.

57. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay $y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ xung quanh trục Ox.

58. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay đường cong

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (a > 0)$$

quanh trục Ox.

59. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay một nhịp đường cong xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq x \leq 2\pi$ xung quanh trục Ox.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. $\displaystyle\int |x|^3\,dx = \frac{|x|x^3}{4} + C$

$$\int e^{-|x|}\,dx = F(x) + C, \text{ trong đó } F(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ e^x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = G(x) + C, \text{ trong đó } G(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2}{3} & \text{nếu } x \geq 1 \\ x & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ \frac{x^3-2}{3} & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$$

2. (a) $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + x + C$ (*b*) $\operatorname{tg} x - x + C$

(d) $\ln\big(\ln(\ln x)\big) + C$

3. (a) $\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{3}{x+1}$ (*b*) $\dfrac{(4x+1)^{10}}{40} + C$

(c) $\dfrac{\sqrt{(x^4+2)^3}}{6} + C$ (*d*) $\dfrac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \dfrac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + C$

(e) $-\dfrac{(3\cos x + 1)^3}{9} + C$

(f) Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

Hướng dẫn: Với $x \in (0, +\infty)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}} = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C$$

Với $x \in (-\infty, -1)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1 + (\sqrt{-x-1})^2}} = -2\ln(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}) + C$$

Gộp lại $I = 2\operatorname{sign} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C$ trên miền $(0, +\infty) \cup (-\infty, -1)$

4. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} + C$

   (c) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + C$ (*d*) $\sqrt{4-x^2} + 2\ln x - 2\ln(2+\sqrt{4-x^2}) + C$

   Hướng dẫn: Đặt $t = 4 - x^2$

   (e) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2} + C$

   Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{x^2+4}$

   (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = \ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C$

5. Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

   (a) $x\ln x - x + C$ (b) $\dfrac{x^4}{16}(4\ln x - 1)$

   (c) $(x + \dfrac{x^3}{3})\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{6}(x^2 + 2\ln(1+x^2)$ (d) $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

   (e) $x\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \dfrac{x}{2} + \dfrac{\arcsin x}{2}$

   (f) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$

   (g) $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$

   (h) $\displaystyle\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}\big(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\big) + C$

6. (a) $\dfrac{2-x}{2(1+x^2)} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$ (*b*) $\dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$

   (c) $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x^3+1}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}} + C$

   (d) ***Hướng dẫn***:
   $$\frac{(x^5+1)}{x^4 - 8x^2 + 16} = x - \frac{31}{16(2+x)^2} + \frac{129}{32(2+x)} + \frac{33}{16(x-2)^2} + \frac{127}{32(x-2)}$$

   (e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{x} + C$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4-16} = x + \frac{1}{2}\left(2\text{arctg}\,\frac{2}{x} + \ln\frac{x-2}{x+2}\right) + C$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C$

(h) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}(\text{arctg}\,(1+\sqrt{2}x) - \text{arctg}\,(1-\sqrt{2}x)) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+1+\sqrt{2}x}{x^2+1-\sqrt{2}x} + C$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$

Hướng dẫn: Đặt $u = \frac{x+1}{x-1}$, đưa về tính $\displaystyle -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{2}{3}}\,du$

(k) $\displaystyle I = \int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C$

Hướng dẫn: $\displaystyle I = \int \frac{-3\,d(-x^2+6x-8)}{2\sqrt{-x^2+6x-8}} + \int \frac{13\,dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$

7. (a) $\displaystyle\ln\left|1+\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$ (b) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\,(\sqrt{2}\text{tg}\,x) + C$

(c) $\displaystyle\text{tg}\,x + \frac{1}{3}\text{tg}^3\,x + C$ (d) $\displaystyle -\frac{1}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+2}$

(e) $\displaystyle\cos x + \frac{2}{\cos x} + C$ (f) $\displaystyle -\frac{1}{5\text{tg}^5 x} + \frac{1}{3\text{tg}^3 x} - \frac{1}{\text{tg}\,x} - x + C$

8. (a) $\displaystyle\int_0^4 |x-2|dx = 4$

Hướng dẫn: $\displaystyle\int_0^4 |x-2|dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx$

(b) ***Hướng dẫn***: Trên đoạn $[0,1]$, hàm $f(x) = x^2-2x+m$ luôn cùng dấu nếu $m>1$ hoặc $m<0$. Trường hợp trường hợp $0 \le m \le 1$

$$f(x) \ge 0\ \forall x \in (0, 1-\sqrt{1-m}) \text{ và } f(x) \le 0\ \forall x \in (1-\sqrt{1-m}, 1)$$

(c) 2 (d) $\ln 2$

(e) $\displaystyle\frac{\pi}{8}$ (f) $\displaystyle\frac{14}{15}$

9. (a) $2 - \dfrac{\pi}{2}$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$

(c) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi\ln 2}{8}$

Hướng dẫn: Kí hiệu I là tích phân cần tính, đổi biến $x = \operatorname{tg} t$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t + \cos t)\,dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t + \cos t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})\,dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sqrt{2}\sin t)\,dt.$$

Đổi biến tiếp $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, khi đó $I_1 = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2}\cos t)\,dt$, suy ra $I = \dfrac{\pi\ln 2}{8}$.

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

(f) $\dfrac{\pi}{16}$ (g) $\pi\sqrt{2} - 4$

(h) $e - 2$ (i) $\pi - 2$

(k) $\dfrac{4\pi}{3} - 2\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (l) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{18} - \dfrac{ln3}{2}$

13. ***Hướng dẫn***: Đổi biến $a + b - x = t$.

14. $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = 6.$

Hướng dẫn: Đặt $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$ và đổi biến $x = -t$. Suy ra

$$I = I_1 + I_2 = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx.$$

16. $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = 200\sqrt{2}, \quad \int\limits_0^{2\pi} \sin(3x+\sin 4x)\, dx = 0.$

17. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+2^x}|\sin x|dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \pi - 2.$

19. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\cos x + \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos x + \sin x} = \frac{\pi - 1}{4}$

21. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{\cos^2 x + 1} = \frac{\pi^2}{4}$

22. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)dx = L$

Hướng dẫn: Đổi biến và dùng quy tắc Lôpitan $\displaystyle\int_0^1 f(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$

23. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}dx}{1+e^{-x}} = 0$

Hướng dẫn: Đặt $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}dx}{1+e^{-x}} = \frac{1-e^{1-n}}{n-1} - I_{n-1}$. Dãy $\{I_n\}$ đơn điệu giảm.

24. ***Hướng dẫn***: Đặt $\displaystyle p = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}, q = \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$

Bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ việc tích phân 2 vế bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\frac{f}{p}\cdot\frac{g}{q} \le \frac{1}{2}(\frac{f^2}{p^2} + \frac{g^2}{q^2}).$$

25. ***Hướng dẫn***: Áp dụng bất đẳng thức trong bài 24. cho 2 hàm f' và $g \equiv 1$.

26. ***Hướng dẫn***: Áp dụng công thức Lagrange cho hàm f ta có thể c.m. các bất đẳng thức $|f(x)| \leq Mx$ trên $[0, \frac{1}{2}]$, và $|f(x)| \leq M(1-x)$ trên $[\frac{1}{2}, 1]$. Suy ra

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} Mx\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 M(1-x)\,dx = \frac{M}{4}.$$

27. Các tích phân đều hội tụ và kết quả

(a) $\frac{1}{4}$ $\quad$ (b) 0

(c) $1 - \ln 2$ $\quad$ (d) $\frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{4}$

(e) $\frac{3}{2}$ $\quad$ (f) $\frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$

28. (a) Phân kì $\quad$ (b) Hội tụ $\quad$ (c) Hội tụ

(d) Hội tụ nếu $\alpha < 3$ và phân kì nếu $\alpha \geq 3$.

(e) Hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kì nếu $\alpha \geq 1$.

(f) Hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kì nếu $\alpha \leq 1$.

(g) Tích phân $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ hội tụ.

Hướng dẫn: Xét tích phân $\displaystyle\int_1^b \sin(x^2)dx = \int_1^{b^2} \frac{\sin(t)dt}{2\sqrt{t}}$ rồi tính tiếp bằng tích phân từng phần.

(h) Phân kì $\quad$ (i) Hội tụ.

30. (a) $\frac{1}{p+1}$ $\quad$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ $\quad$ (d) 1.

31. $S = \frac{1}{3}$

32. $S = 2\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)dy = \frac{4}{3}$

33. $S = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2} + 9\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

34. πab

35. 12π

36. $3a^2\pi$

37. $\dfrac{a^2\pi}{2}$

38. $\left(\dfrac{5\pi}{4} - 2\right)a^2$

39. $V = \dfrac{4\pi abc}{3}$

40. $V = \dfrac{5\pi}{2}$

41. $V = \dfrac{2R^2h}{3}$

42. $V = \dfrac{16a^3}{3}$.

43. Tính thể tích chỏm cầu, chiều cao của chỏm cầu bằng $h = R - a$ $(a \leq x \leq R)$

$$V = \pi\left(\frac{2R^3}{3} + \frac{a^3}{3} - aR^2\right) = \frac{(3R-h)h^2\pi}{3}$$

45. $V_x = \dfrac{\pi^2}{2}, \quad V_y = 2\pi^2$

47. $V = \dfrac{3a^3\pi^3}{2} - \dfrac{8a^3\pi}{3}$

48. $V = \dfrac{2\pi a^3}{3}$

49. $V = \dfrac{\pi^2}{16}$

50. $\dfrac{13\sqrt{13}-8}{27}$

51. $\dfrac{\ln 3}{2}$

52. $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$

53. $\ln 3-\dfrac{1}{2}$

54. $6a$

55. $16a$

56. $2\sqrt{2}a\pi$

    Nhận xét rằng $r=2a(\sin\varphi+\cos\varphi)$ là đường tròn đường kính $2\sqrt{2}a$

57. $S=\dfrac{\pi}{2}\left(\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+2\sqrt{2}\right)$

58. $S=\dfrac{12a^2\pi}{5}$

59. $S=\dfrac{64a^2\pi}{3}$

Chương 5

Chuỗi

5.1 Chuỗi số

5.1.1 Khái niệm về chuỗi số

Cho dãy số $\{a_n\}$ và xét tổng vô hạn tất cả các số hạng của dãy. Tổng đó được viết một cách hình thức

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

và được gọi là *chuỗi số*. a_n được gọi là *số hạng thứ n của chuỗi*.
Tổng của n số hạng đầu tiên

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Định nghĩa 5.1.1 *Nếu dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ đến S*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S$$

ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Ngược lại nếu dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ không hội tụ ta nói chuỗi phân kì. Đặc biệt khi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$) ta cũng viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad (\textit{hoặc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty)$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng S, khi đó chuỗi

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

cũng hội tụ có tổng bằng $S - S_n$ và chuỗi đó được gọi là *phần dư thứ n*, kí hiệu $R_n = S - S_n$.

Ví dụ 5.1.1

1. Xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \quad (q \in \mathbb{R})$. Các số hạng của chuỗi lập thành cấp số nhân, do vậy với $q \neq 1$ tổng riêng

   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q(q^n - 1)}{q - 1}$$

   • Với $|q| < 1$, hiển nhiên

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}$$

   Chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.

   • Trường hợp $q > 1$

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = +\infty$$

   Chuỗi đã cho phân kì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = +\infty$.

   • Trường hợp $q = 1$, tổng riêng $S_n = n \to +\infty$, chuỗi phân kì và cũng có tổng bằng $+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = +\infty$.

• Trường hợp $q \leq -1$, dễ dàng chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, chuỗi đã cho phân kì.

Các kết quả trên được tóm gọn lại như sau:

Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *hội tụ khi và chỉ khi công bội* $|q| < 1$.

2. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

Tổng riêng thứ n của chuỗi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

chuỗi đã cho hội tụ và tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

3. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (*ta gọi chuỗi đó là chuỗi điều hòa*). Ta sẽ chứng minh chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kì. Thật vậy do

$$S_{2n} - S_n = \overbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n\ \textbf{số hạng}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

dãy $S_{2n} - S_n$ không tiến tới 0 khi $n \to \infty$, suy ra dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ không hội tụ. Vậy chuỗi đang xét phân kì.

Định lí 5.1.1 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ) *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ, khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Chứng minh Thật vậy, do chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, các tổng riêng S_n có giới hạn và dần tới S, tổng của chuỗi. Hiển nhiên $u_n = S_n - S_{n-1}$, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \blacksquare$$

Người ta thường sử dụng định lí trên để chứng minh một chuỗi phân kì. Tuy nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ chỉ là điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

Ví dụ 5.1.2

1. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ phân kì do không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

2. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ phân kì do
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Từ các kết quả về dãy Cauchy đã trình bày trong chương I, ta có định lí sau

Định lí 5.1.2 (Tiêu chuẩn Cauchy) *Điều kiện cần và đủ để chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ là dãy các tổng riêng* $\{S_n\}$ *là dãy Cauchy, nói cách khác, với* $\forall \varepsilon > 0$ *tồn tại* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *sao cho khi* $n > n_0$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| = |u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 5.1.3

1. Ứng dụng định lí trên ta sẽ chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ. Thật vậy với $\varepsilon > 0$ tùy ý

$$|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2}| < \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n-1} < \varepsilon \quad \text{với} \quad n > n_0 \ \text{ nào đó và } \ \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

2. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ không thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy, suy ra chuỗi phân kì, vì

$$|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}| > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{và mọi} \quad p > n.$$

Từ định nghĩa ta có nhận xét chuỗi hội tụ hay phân kì phụ thuộc vào dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn hay không. Mặt khác sự hội tụ hay phân kì của dãy không phụ thuộc vào hữu hạn số hạng của dãy. Do vậy ta cũng có kết luận tương tự: *sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số không phụ thuộc vào hữu hạn số hạng của chuỗi.*

Các tính chất sau là hiển nhiên, bạn đọc tự chứng minh

• Nếu hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ có tổng bằng a, b tương ứng, khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ cũng hội tụ đồng thời

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = a + b \quad \text{(tương tự} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = a - b).$$

• Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ có tổng bằng a, khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ cũng hội tụ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ đồng thời

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha a.$$

Ví dụ Số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,12121212... = 2,(12)$ thực chất là tổng của chuỗi số

$$a = 2 + 12\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2n} = 2 + 12 \cdot \frac{10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{70}{33}.$$

5.1.2 Chuỗi số dương

Định nghĩa 5.1.2 *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *được gọi là chuỗi số dương nếu* $u_n > 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có nhận xét rằng đối với chuỗi số dương, dãy các tổng riêng

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ n = 1, 2, 3, ...$$

đơn điệu tăng, do vậy chuỗi hội tụ khi và chỉ khi dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên (tức là tồn tại $M \in \mathbb{R}$ sao cho $S_n \leq M\ \forall n$, khi đó tổng của chuỗi số dương cũng $\leq M$).

Bây giờ ta sẽ phát biểu và chứng minh một số tiêu chuẩn để xét sự hội tụ phân kì của chuỗi số dương.

Định lí 5.1.3 (Tiêu chuẩn so sánh)
Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

• *Giả sử* $u_n \leq v_n$ *với mọi* $n \geq n_0$ *nào đó. Khi đó nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ. Từ đó suy ra nếu chuỗi bé hơn* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *cũng phân kì.*

• *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$ *trong đó* $0 < k < +\infty$ *khi đó hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *đồng thời hội tụ hoặc phân kì.*

Chứng minh
• Không làm mất tính tổng quát, ta giả thiết $u_n \leq v_n$ với mọi $n \geq 1$. Kí hiệu S_n

là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và S'_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Khi đó

$$S_n \leq S'_n \quad \text{với mọi} \quad n \geq 1.$$

Từ giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S'$ hội tụ, suy ra dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên

$$S_n \leq S'_n < S' \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

• Giả thiết

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0.$$

Theo tính chất giới hạn dãy số, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n > n_0$

$$\frac{k}{2} < \frac{u_n}{v_n} < 2k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{2} v_n < u_n < 2k \cdot v_n.$$

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ, suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2k \cdot v_n$ hội tụ và theo kết quả phần thứ nhất của định lí, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} v_n$ hội tụ và do vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ, đ.p.c.m. ■

Ví dụ 5.1.4

1. Từ sự phân kì của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (đã chứng minh trong các ví dụ trên) suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ cũng phân kì do

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{với mọi} \quad n \geq 1.$$

2. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ phân kì. Thật vậy so sánh với chuỗi phân kì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad \text{hay} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n} : \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Định lí 5.1.4 (Tiêu chuẩn DAlembert) *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Giả sử*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D.$$

- *Nếu* $D < 1$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*
- *Nếu* $D > 1$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì.*

Chứng minh

• Giả sử $D < 1$, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $D + \varepsilon < 1$. Từ tính chất của giới hạn suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < D + \varepsilon$$

Viết bất đẳng thức này một cách chi tiết hơn

$$\begin{aligned} u_{n_0+1} &< (D+\varepsilon)u_{n_0} \\ u_{n_0+2} &< (D+\varepsilon)u_{n_0+1} < (D+\varepsilon)^2 u_{n_0} \\ u_{n_0+3} &< (D+\varepsilon)u_{n_0+2} < (D+\varepsilon)^3 u_{n_0} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Do $0 < D + \varepsilon < 1$, chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0}(D+\varepsilon)^k$ hội tụ, theo tiêu chuẩn so sánh vừa chứng minh trong định lí trên, chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k} \quad \text{hội tụ,} \quad \text{suy ra} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{cũng hội tụ}$$

• Trường hợp $D > 1$, từ giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n_0} < u_{n_0+1} < u_{n_0+2} < u_{n_0+3} < \cdots$. Dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng có giới hạn dương, do vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì vì không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ. ■

Nhận xét rằng tiêu chuẩn D'Alembert vẫn có hiệu lực nếu thay cho giả thiết liên quan tới $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ là giả thiết nhẹ hơn liên quan tới $\limsup, \liminf$.

Cụ thể nếu

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D^* < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; \textit{hội tụ}$$

và nếu

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D_* > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{phân kì.}$$

Việc chứng minh nhận xét đó được tiến hành giống như đã chứng minh trong tiêu chuẩn D'Alembert. Các lập luận khi chứng minh nhận xét đầu dựa trên khẳng định: tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < D^* + \varepsilon < 1.$$

Việc chứng minh nhận xét thứ hai hoàn toàn tương tự, $D_* > 1$ suy ra tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

Dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng (kể từ số hạng n_0 trở đi), do đó dãy $\{u_n\}$ không tiến tới 0, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì .

Ví dụ 5.1.5

1. Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$

   Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} = \frac{1}{3} < 1.$$

   Chuỗi đã cho hội tụ.

2. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^a}$ với $a > 0$.

   Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^a} \cdot \frac{n^a}{a^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^a = a.$$

• Chuỗi hội tụ nếu $a < 1$
• Chuỗi phân kì nếu $a > 1$
• Trường hợp $a = 1$, chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, đây là chuỗi phân kì đã nhiều lần nhắc tới trong các ví dụ trên.

3. Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{n!}$ $(s \in \mathbb{R})$.

   Theo tiêu chuẩn D'Alembert
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^s}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^s} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$
   Chuỗi đã cho hội tụ.

Nhận xét rằng tiêu chuẩn D'Alembert cũng như tiêu chuẩn Cauchy sẽ được trình bày ngay sau đây, khác tiêu chuẩn so sánh ở chỗ nó không cần so sánh với các chuỗi khác mà chỉ nghiên cứu mối quan hệ "nội tại" giữa các số hạng của chuỗi.

Định lí 5.1.5 (Tiêu chuẩn Cauchy) *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Kí hiệu*
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C.$$

• *Nếu* $C < 1$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*
• *Nếu* $C > 1$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì.*

Chứng minh
• Trường hợp $C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ sao cho $C + \varepsilon < 1$ đồng thời tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n \geq n_0$
$$\sqrt[n]{u_n} < C + \varepsilon < 1 \Rightarrow u_n < (C+\varepsilon)^n.$$
Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n} (C+\varepsilon)^n$ với công bội $C + \varepsilon < 1$ hội tụ, suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

• Trường hợp $C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, từ định nghĩa về lim sup suy ra tồn tại một dãy con $\{ \sqrt[n_k]{u_{n_k}} \}$ sao cho

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{u_{n_k}} > 1 \ \Rightarrow \ \exists n_0, \quad \text{sao cho} \quad \forall n_k > n_0 : \quad u_{n_k} > 1.$$

Do vậy dãy $\{u_n\}$ không tiến tới 0, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì . ■

Chú ý, cả tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy đều không có hiệu lực khi D, D^*, D_* hoặc C bằng 1. Nói cách khác trong các trường hợp đó chuỗi có thể hội tụ mà cũng có thể phân kì. Chẳng hạn ta đã xét hai ví dụ trong mục trước (áp dụng tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ để chuỗi hội tụ):

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ. Với các chuỗi này

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad \text{và} \quad C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Ví dụ 5.1.6

1. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

   Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1.$$

   Chuỗi đang xét hội tụ.

2. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}$

   Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

chuỗi đã cho hội tụ.

Nhận xét rằng trong ví dụ này, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ không tồn tại, trong khi limsup của một dãy bất kì luôn tồn tại.

Định lí 5.1.6 (Tiêu chuẩn tích phân) *Cho hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dương và liên tục trên $[1, +\infty)$. Giả thiết rằng hàm f đơn điệu giảm và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Kí hiệu $u_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, khi đó*

$$\text{Chuỗi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ \text{và tích phân suy rộng} \quad \int_1^{\infty} f(x)dx$$

đồng thời cùng hội tụ hoặc phân kì.

Chứng minh Theo giả thiết f đơn điệu giảm, suy ra

$$u_k = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k-1) = u_{k-1} \quad \forall k \ge 2.$$

Cộng vế với vế theo k ta được

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_n \le \int_1^n f(x)dx \le u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

hay

$$S_n - u_1 \le \int_1^n f(x)dx \le S_n - u_n.$$

Do đó nếu tích phân $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, các tổng riêng S_n của chuỗi số dương bị chặn trên, suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Tương tự, từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ và do đó tích phân $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, đ.p.c.m. ■

Ví dụ 5.1.7

1. Trong chương trước ta đã biết tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta được

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ \ \text{hội tụ khi và chỉ khi} \ \ \alpha > 1.$$

   Chẳng hạn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ hội tụ vì $\alpha = \frac{4}{3} > 1$.

2. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Dễ dàng chứng minh tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ phân kì, do đó theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đang xét là chuỗi phân kì.

5.1.3 Chuỗi đan dấu, chuỗi hội tụ tuyệt đối

Định nghĩa 5.1.3 *Chuỗi số có dạng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots \tag{5.1}$$

hoặc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{n} u_n + \cdots$$

trong đó $u_n > 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *được gọi là chuỗi đan dấu.*

Hiển nhiên ta chỉ cần xét chuỗi (5.1)

Định lí 5.1.7 (Leibnitz) *Giả thiết dãy* $\{u_n\}$ *trong chuỗi đan dấu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ *đơn điệu giảm và* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, *khi đó chuỗi hội tụ đồng thời tổng của chuỗi không vượt quá số hạng đầu tiên*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots \leq u_1.$$

Chứng minh Xét tổng riêng thứ $2m$, do $u_n \geq u_{n+1} \quad \forall n$

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \geq 0.$$

Mặt khác

$$S_{2m} = u_1 - \Big((u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m} \Big) \leq u_1.$$

Dãy các tổng riêng $\{S_{2m}\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên ($\leq u_1$), suy ra

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S \leq u_1 \quad \text{và} \quad \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + u_{2m+1}) = S.$$

Vậy dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq u_1$. ■

Nhận xét rằng nếu chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ thỏa mãn điều kiện của định lí Leibnitz, khi đó phần dư thứ n của chuỗi $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k$ cũng hội tụ và có tổng

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k\right| \leq u_{n+1}.$$

Do vậy ta có thể xấp xỉ tổng của chuỗi $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ với tổng riêng S_n và sai số phạm phải là phần dư thứ n của chuỗi R_n không vượt quá u_{n+1}.

Ví dụ 5.1.8

1. Chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

hiển nhiên thỏa mãn điều kiện của định lí Leibnitz, do vậy chuỗi hội tụ.

2. Xét chuỗi đan dấu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

Ta sẽ chứng minh hàm $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ đơn điệu giảm trên khoảng $[3, +\infty)$. Thật vậy

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \quad \forall x \geq 3.$$

Mặt khác áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thấy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Do vậy dãy $u_n = \frac{\ln n}{n} = f(n)$ thỏa mãn điều kiện định lí Leibnitz, suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Định nghĩa 5.1.4 *Xét chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *trong đó* $u_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Ta nói chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ.*

Ta chứng minh định lí sau

Định lí 5.1.8 *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.*

Chứng minh Ta sẽ chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ để chuỗi hội tụ. Thật vậy với $\varepsilon > 0$ tùy ý, do giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n > n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}^*$

$$|\sum_{k=n}^{n+p} u_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon, \text{ đ.p.c.m. } \blacksquare$$

Chú ý rằng chiều ngược lại của định lí trên nói chung không đúng: nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, nói chung không kéo theo chuỗi đó hội tụ tuyệt đối. Chẳng hạn chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ theo định lí Leibnitz, tuy nhiên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa phân kì.

Định nghĩa 5.1.5 *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *phân kì, khi đó ta nói chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *bán hội tụ.*

Ví dụ 5.1.9

1. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo định lí Leibnitz và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì theo tiêu chuẩn tích phân. Vậy chuỗi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   bán hội tụ.

2. Tương tự như ví dụ trên, chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n\ln n}$$

là chuỗi bán hội tụ.

5.2 Chuỗi hàm và chuỗi lũy thừa

5.2.1 Khái niệm về dãy hàm

Chúng ta đã làm quen với khái niệm về dãy số $\{u_n\}$. Thay cho mỗi số hạng u_n của dãy số là hàm số, ta cũng kí hiệu

$$u_n : A \to \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

(các hàm u_n có cùng miền xác định A), khi đó ta nói về *dãy hàm* $\{u_n(x)\}$ trên tập A và với mỗi $x \in A$ ta có dãy số $\{u_n(x)\}$.

Dãy số $\{u_n(x)\}$ có thể hội tụ hoặc phân kì. Tập hợp

$$X = \{x \in A \ / \text{ dãy số } \ \{u_n(x)\} \ \text{ hội tụ}\}$$

được gọi là *miền hội tụ của dãy hàm*. Giả thiết tập $X \neq \emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \ \ \forall x \in X.$$

Sự hội tụ đó được gọi là *hội tụ theo từng điểm* của dãy hàm $\{u_n(x)\}$ tới $u(x)$ trên tập X.

Nếu với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon, \ \ \forall n > n_0, \ \forall x \in X$$

ta nói *dãy hàm* $\{u_n(x)\}$ *hội tụ đều tới* $u(x)$ *trên tập* X. Chú ý $n_0 = n_0(\varepsilon)$ không phụ thuộc $x \in X$ mà chỉ phụ thuộc vào ε. Hiển nhiên nếu $\{u_n(x)\}$ hội tụ đều tới $u(x)$ trên tập X, khi đó dãy hàm hội tụ theo từng điểm tới $u(x)$ trên tập X. Định lí sau được suy ra ngay từ khái niệm hội tụ đều

Định lí 5.2.1 *Điều kiện cần và đủ để dãy hàm* $\{u_n(x)\}$ *hội tụ đều tới* $u(x)$ *trên tập* X *là*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Ví dụ 5.2.1

1. Dãy hàm $\{x^n\}$ hội tụ từng điểm tới hàm hằng $f(x) \equiv 0$ trên khoảng $X = (0,1)$. Tuy nhiên sự hội tụ đó không là hội tụ đều trên khoảng $X = (0,1)$.

   Thật vậy $\sup_{x\in(0,1)} |x^n - 0| = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, không thỏa mãn điều kiện của định lí trên.
   Tuy nhiên dãy hàm $\{x^n\}$ hội tụ đều tới 0 trên tập $Y = (0, 1-\delta)$ với mọi $0 < \delta < 1$
   $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in Y} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} (1-\delta)^n = 0.$$

2. Lập luận tương tự (bạn đọc tự kiểm tra), dãy hàm $\{e^{-nx}\}$ hội tụ từng điểm tới hàm hằng $f(x) \equiv 0$ trên khoảng $(0, +\infty)$.
   Dãy hàm $\{e^{-nx}\}$ không hội tụ đều tới 0 trên tập $(0, +\infty)$.
   Dãy hàm $\{e^{-nx}\}$ hội tụ đều tới 0 trên tập $(\varepsilon, +\infty)$.

Cũng như đối với dãy số ta có

Định lí 5.2.2 (Tiêu chuẩn Cauchy) *Điều kiện cần và đủ để dãy hàm $\{u_n(x)\}$ hội tụ đều trên tập X là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ (không phụ thuộc $x \in X$) sao cho*

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0, \ \forall x \in X.$$

Chứng minh Từ tiêu chuẩn Cauchy đối với dãy số, suy ra tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ với mọi $x \in X$. Ta sẽ chứng minh hội tụ đó là hội tụ đều. Thật vậy, từ giả thiết về điều kiện Cauchy $|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon, \ \ \forall n, m > n_0$ cho $m \to \infty$ ta được

$$|u_n(x) - u(x)| \le \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \ \forall x \in X. \quad \text{đ.p.c.m.} \ \blacksquare$$

Dãy hàm hội tụ đều có các tính chất quan trọng sau đây

• *Giả sử $\{u_n(x)\}$ hội tụ đều trên tập X và với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, giả thiết $u_n(x)$ liên tục trên tập X. Khi đó $u(x)$ cũng liên tục trên X.*

Thật vậy gọi $x_0 \in X$ và $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước. Tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ sao cho
$$|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > n_0, \ \forall x \in X.$$

Với một $m > n_0$ cố định, do $u_m(x)$ liên tục tại $x_0 \in X$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|u_m(x) - u_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall |x - x_0| < \delta.$$

Khi đó

$$|u(x) - u(x_0)| = |u(x) - u_m(x) + u_m(x) - u_m(x_0) + u_m(x_0) - u(x_0)| \leq$$

$$\leq |u(x) - u_m(x)| + |u_m(x) - u_m(x_0)| + |u_m(x_0) - u(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$, hàm $u(x)$ liên tục tại x_0.

Nhận xét rằng từ tính chất này ta suy ra nếu các hàm $u_n(x)$ liên tục trên tập X, hàm giới hạn $u(x)$ không liên tục trên X, khi đó $\{u_n(x)\}$ không hội tụ đều trên X.

Chẳng hạn xét ví dụ dãy hàm $\{x^n\}$ hội tụ từng điểm trên tập $X = [0, 1]$ tới hàm

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \;\; 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{nếu} \;\; x = 1 \end{cases}$$

Hàm giới hạn $f(x)$ không liên tục tại $x_0 = 1$, sự hội tụ đó không là hội tụ đều trên khoảng $X = [0, 1]$.

• *Giả sử* $\{u_n(x)\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *và hội tụ đều tới* $u(x)$ *trên đó. Suy ra với mọi* $x_0, x \in [a, b]$

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt \;\; \textit{hội tụ đều tới} \;\; \int_{x_0}^{x} u(t)dt \;\; \textit{trên} \;\; [a, b].$$

Đặc biệt

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

Chứng minh Với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \forall n > n_0, \; \forall x \in [a, b]$$

Kí hiệu $F(x) = \int_{x_0}^{x} u(t)dt$, suy ra

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} u(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |u_n(t) - u(t)|dt$$

$$\Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon, \quad \forall n > n_0,\ \forall x \in [a,b],\ \text{đ.p.c.m.}$$

• *Giả sử* $\{u_n(x)\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ *có đạo hàm liên tục trên đoạn* $[a,b]$, *dãy* $\{u_n'(x)\}$ *hội tụ đều tới* $v(x)$ *trên* $[a,b]$. *Nếu* $\{u_n(x)\}$ *hội tụ tới* $u(x)$ *trên* $[a,b]$, *khi đó sự hội tụ của* $\{u_n(x)\}$ *trên* $[a,b]$ *là hội tụ đều và* $u'(x) = v(x), \forall x \in [a,b]$.

Áp dụng tính chất vừa chứng minh cho dãy hàm $\{u_n'(t)\}$ với $t \in [x_0, x]$ trên đoạn $[a,b]$

$$\int_{x_0}^{x} u_n'(t)dt = u_n(x) - u_n(x_0) \ \text{ hội tụ đều tới } \int_{x_0}^{x} v(t)dt \ \text{ trên } \ [a,b].$$

Theo giả thiết dãy số $\{u_n(x_0)\}$ có giới hạn bằng $u(x_0)$, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} v(t)dt, \ \text{ hội tụ đều trên } \ [a,b].$$

Như vậy $u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} v(x)dx$ và $u'(x) = v(x)\ \ \forall x \in [a,b]$, đ.p.c.m.

5.2.2 Khái niệm về chuỗi hàm

Định nghĩa 5.2.1 *Cho dãy hàm* $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *xác định trên tập* A, *chuỗi hình thức sau được gọi là chuỗi hàm*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{5.2}$$

Tập hợp

$$X = \{x \in A \ / \ \textit{chuỗi}\ \ (5.2)\ \ \textit{hội tụ}\}$$

được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *với mọi* $x \in X$ *được gọi là tổng của chuỗi trên tập* X.
Nếu dãy các tổng riêng

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),\ n = 1, 2, 3, ...$$

hội tụ đều tới hàm $S(x)$ *trên tập* X, *ta nói chuỗi (5.2) hội tụ đều trên* X.

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho dãy các tổng riêng $S_n(x)$ của chuỗi (5.2) ta được định lí sau

Định lí 5.2.3 (Tiêu chuẩn Cauchy) *Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập* X *là với mọi* $\varepsilon > 0$*, tồn tại* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *(không phụ thuộc* $x \in X$*) sao cho* $\forall n > n_0$ *và mọi* $p \in \mathbb{N}^*$

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Ví dụ 5.2.2

Xét chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$
Hiển nhiên miền hội tụ của chuỗi $X = (-1, 1)$ và chuỗi có tổng $S(x) = \frac{x}{1-x}$. Ta sẽ chứng minh chuỗi hội tụ đều trên khoảng $D = (-a, a)$ với mọi $0 < a < 1$, nhưng không hội tụ đều trên khoảng $(0, 1)$.

Thật vậy với $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, do $0 < a < 1$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ hội tụ, suy ra tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n > n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a^k\right| < \varepsilon$$

Mặt khác khi đó mọi $x \in (-a, a)$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} x^k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |x^k| < \sum_{k=n}^{n+p} a^k < \varepsilon.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ đều trên khoảng $(-a, a)$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ không hội tụ đều trên khoảng $(0, 1)$. Thật vậy xét dãy các tổng riêng

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \to \frac{x}{1-x} \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Dãy các tổng riêng không hội tụ đều trên khoảng $(0,1)$ do không thỏa mãn định lí 5.2.1

$$\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{x(1-x^n)}{1-x}-\frac{x}{1-x}\right| = \sup_{x\in(0,1)}\frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty \not\to 0, \text{ khi } n\to\infty.$$

Định lí 5.2.4 (Tiêu chuẩn Weierstrass) *Cho chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. *Nếu tồn tại chuỗi số dương hội tụ* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sao cho với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$ *và mọi* $x\in X$

$$|u_n(x)| \le a_n$$

thì chuỗi đã cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập* X.

Chứng minh Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi số dương hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, với $\varepsilon>0$ cho trước tùy ý, tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n > n_0$ và mọi $p\in\mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

suy ra

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon, \quad \forall x\in X.$$

Như vậy chuỗi hàm cũng thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện hội tụ đều trên tập X. ■

Nhận xét rằng cũng như chuỗi số, sự hội tụ đều của chuỗi hàm không phụ thuộc vào hữu hạn số hạng của chuỗi. Do đó tiêu chuẩn Weierstrass cho chuỗi hàm hội tụ đều trên tập X vẫn có hiệu lực nếu thay cho giả thiết $|u_n(x)|\le a_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ trong định lí là điều kiện $|u_n(x)|\le a_n$ với mọi $n>n_0$ nào đó và mọi $x\in X$.

Ví dụ 5.2.3

1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ đều trên khoảng $(-a, a)$ với $0 < a < 1$ vì theo tiêu chuẩn Weierstrass
$$|x^n| < a^n \quad \forall x \in (-a, a),\ \forall n = 1, 2, ... \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \ \text{hội tụ.}$$

2. Áp dụng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + x^2)}$$
hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ vì
$$|\frac{1}{n(n + x^2)}| < \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n = 1, 2, ... \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{hội tụ.}$$

Từ định nghĩa, chuỗi hội tụ đều khi và chỉ khi dãy các tổng riêng hội tụ đều, suy ra chuỗi hội tụ đều có các tính chất giống như các tính chất của dãy hội tụ đều: các phép toán tìm giới hạn, đạo hàm, tích phân tổng của một chuỗi hội tụ đều có thể chuyển qua các số hạng của chuỗi

• *Giả sử $u_n(x)$ liên tục trên tập X, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$ hội tụ đều, khi đó tổng của chuỗi $u(x)$ cũng liên tục trên X.*

• *Nếu $u_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$ hội tụ đều trên đó thì $u(x)$ khả tích trên $[a, b]$ đồng thời*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

• *Giả sử $\{u_n(x)\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm liên tục trên (a, b), chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên (a, b). Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ và có tổng bằng $u(x)$ trên (a, b), khi đó $u(x)$ khả vi và*
$$u'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Ví dụ 5.2.4

Áp dụng tiêu chuẩn Weierstrass, các chuỗi sau hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Thật vậy

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \quad \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

đồng thời chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ với $\alpha > 1$. Khi đó

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

5.2.3 Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa 5.2.2 *Chuỗi hàm có dạng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

được gọi là chuỗi lũy thừa.

Trường hợp $c = 0$ chuỗi lũy thừa có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{5.3}$$

Bằng phép đổi biến $t = x - c$ ta luôn có thể đưa chuỗi lũy thừa bất kì về dạng (5.3). Do vậy trong mục này ta chỉ xét chuỗi (5.3). Hiển nhiên chuỗi lũy thừa luôn hội tụ tại $x = 0$.

Định lí 5.2.5 (Abel) *Nếu chuỗi (5.3) hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối trên khoảng $(-|x_0|, |x_0|)$.*

Chứng minh Từ giả thiết chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ suy ra

$$\exists M : |a_n x_0^n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với mọi $x \in (-|x_0|, |x_0|)$

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \quad \text{và} \quad |a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Do chuỗi cấp số nhân với công bội bé hơn 1 hội tụ suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối. ■

Nhận xét rằng từ định lí Abel suy ra nếu tại $x = x_1$ chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì thì chuỗi cũng phân kì tại $\forall x, |x| > |x_1|$.

Như vậy ứng với mỗi chuỗi lũy thừa luôn tồn tại một số $R \geq 0$ sao cho chuỗi hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$ và phân kì tại mọi điểm nằm ngoài khoảng đó. Số $\mathbb{R}$ như vậy được gọi là *bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa*, khoảng $(-R, R)$ được gọi là *khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa.*

Chú ý rằng miền hội tụ của chuỗi lũy thừa gồm các số thuộc khoảng hội tụ của chuỗi và bổ sung thêm một hoặc cả hai đầu mút $x = \pm R$ tùy theo tại các mút đó chuỗi hội tụ hay phân kì. Như vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là một trong 4 dạng

$$(-R, R); \ (-R, R]; \ [-R, R); \ [-R, R]$$

Ta phát biểu và chứng minh định lí sau về quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lí 5.2.6 *Cho chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Giả thiết*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \varrho \quad (\textit{hoặc} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho).$$

Khi đó bán kính hội tụ R của chuỗi được xác định

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\varrho} & \textit{nếu} \ \ 0 < \varrho < +\infty \\ 0 & \textit{nếu} \ \ \varrho = +\infty \\ +\infty & \textit{nếu} \ \ \varrho = 0 \end{cases}$$

Chứng minh Giả sử

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\varrho.$$

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x|=\varrho|x|=D.$$

• Nếu $\varrho=0$ suy ra $D<1$ với mọi x khác 0, chuỗi lũy thừa luôn hội tụ.
Hoàn toàn tương tự nếu $\varrho=+\infty$, chuỗi lũy thừa phân kì với mọi x khác 0
• Nếu $0<\varrho<+\infty$ suy ra $D<1$ khi và chỉ khi $\varrho|x|<1$ hay

$$|x|<\frac{1}{\varrho},\quad \text{suy ra bán kính hội tụ}\quad R=\frac{1}{\varrho}\quad \text{đ.p.c.m.} \ \blacksquare$$

(Trường hợp định lí giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\varrho$, quy tắc trên được chứng minh hoàn toàn tương tự bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Cauchy đối với chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ thay cho tiêu chuẩn D'Alembert.)

Ví dụ 5.2.5

1. Tìm bán kính hội tụ, khoảng hội tụ và miền hội tụ cho chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}.$$

Áp dụng định lí trên về quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\varrho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Suy ra bán kính hội tụ $R=\frac{1}{\varrho}=1$, khoảng hội tụ của chuỗi $(-1,1)$ (nói cách khác chuỗi đã cho hội tụ với mọi $|x|<1$ và phân kì với mọi $|x|>1$). Như vậy để tìm miền hội tụ của chuỗi ta chỉ cần xét chuỗi tại các đầu mút của khoảng hội tụ.

• Tại $x = 1$ chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Đây là chuỗi đan dấu thỏa mãn các điều kiện của định lí Leibnitz, chuỗi hội tụ.

• Tại $x = -1$ chuỗi đã cho là chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

chuỗi phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $(-1, 1]$, nói cách khác chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-1 < x \leq 1$.

2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(4n+1)^n(x-1)^{2n}}.$$

Chuỗi đã cho không là chuỗi lũy thừa, tuy nhiên ta có thể đổi biến để đưa về chuỗi lũy thừa. Đặt $t = \frac{1}{(x-1)^2}$, chuỗi đã cho có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n t^n.$$

Áp dụng quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4}$$

Suy ra bán kính hội tụ $R = 4$. Tại đầu mút $t = 4$ của khoảng hội tụ, chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n.$$

Số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới 0 khi $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)^n = e^{-\frac{1}{4}},$$

chuỗi phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho gồm tập hợp các điểm x thỏa mãn

$$\frac{1}{(x-1)^2} < 4 \Leftrightarrow |x-1| > \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Định lí 5.2.6 cho ta cách tìm bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa với giả thiết: tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \varrho \quad (\text{hoặc} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho).$$

Định lí sau cho ta quy tắc tổng quát tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa bất kì, không ràng buộc điều kiện gì về các hệ số của chuỗi

Định lí 5.2.7 *Cho chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Kí hiệu*

$$\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi

$$R = \frac{1}{\varrho}$$

với quy ước $R = 0$ *nếu* $\varrho = +\infty$ *và* $R = +\infty$ *nếu* $\varrho = 0$.

Chứng minh Trường hợp $\varrho = +\infty$ và $\varrho = 0$, bạn đọc tự chứng minh.
Ta sẽ chứng minh định lí trong trường hợp $0 < \varrho < +\infty$. Xét chuỗi số dương $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ và áp dụng tiêu chuẩn Cauchy (định lí 5.1.5)

$$C = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \varrho$$

Nếu $|x| < R = \frac{1}{\varrho}$, khi đó $C < 1$, theo định lí 5.1.5, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ.
Nếu $|x| > R = \frac{1}{\varrho} \Rightarrow C > 1$, như đã chứng minh trong định lí 5.1.5, dãy các số hạng tổng quát của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ không dần tới 0, do đó chuỗi đã cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì. ■

5.2.4 Tính chất của chuỗi lũy thừa

Áp dụng các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều cho chuỗi lũy thừa, ta suy ra các kết quả cơ bản được liệt kê dưới đây về chuỗi lũy thừa.

• *Kí hiệu R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nếu khoảng đóng $[-\alpha, \alpha]$ được chứa trong khoảng hội tụ $(-R, R)$ của chuỗi, khi đó chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên $[-\alpha, \alpha]$.*

Thật vậy $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|a_n x^n| \leq |a_n| \alpha^n$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$ hội tụ tuyệt đối, áp dụng tiêu chuẩn Weierstrass suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-\alpha, \alpha]$.

• *Tổng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ liên tục trên miền hội tụ của chuỗi.*

Theo tính chất trên, chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên trên mọi khoảng đóng $[-\alpha, \alpha] \subset (-R, R)$. Áp dụng tính chất chuỗi hàm hội tụ đều: các số hạng $a_n x^n$ liên tục trên $[-\alpha, \alpha]$ suy ra tổng của chuỗi cũng liên tục trên $[-\alpha, \alpha]$. Khẳng định đó đúng với mọi $0 < \alpha < R$, do đó tổng của chuỗi lũy thừa liên tục trên cả khoảng mở $(-R, R)$.

Việc chứng minh tổng của chuỗi lũy thừa liên tục trên miền hội tụ của chuỗi (tức là liên tục tại các mút $x = \pm R$ nếu chuỗi hội tụ tại đó) khó hơn, ta thừa nhận không chứng minh khẳng định này.

Các tính chất sau của chuỗi lũy thừa đều được suy ra từ tính chất đầu tiên (*chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng đóng được chứa trong khoảng hội tụ*) và áp dụng tính chất chuỗi hàm hội tụ đều đó

• *Tổng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ khả vi vô hạn lần trên khoảng hội tụ $(-R, R)$ của chuỗi, đồng thời*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \forall x \in (-R, R)$$

Chú ý rằng bán kính hội tụ của các chuỗi ở trên đều bằng nhau và cùng bằng R (bạn đọc tự chứng minh bằng cách sử dụng quy tắc tìm bán kính hội tụ).

• *Tổng của chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *khả tích trên đoạn* $[0, y]$ *với mọi* y *thuộc khoảng hội tụ của chuỗi, đồng thời*

$$\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} y^{n+1}.$$

• *Tổng của chuỗi lũy thừa xác định duy nhất các hệ số của chuỗi.*
Nói cụ thể hơn nếu hai chuỗi lũy thừa có tổng bằng nhau trên một lân cận của điểm $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Khi đó $a_n = b_n$ với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$.
Thật vậy gọi $S(x)$ là tổng của hai chuỗi nói trên, khi đó $a_0 = b_0$ và cùng bằng $S(0)$.
Xét các chuỗi đạo hàm

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

khi đó $a_1 = b_1$ và cùng bằng $S'(0)$. Cứ tiếp tục như vậy ta được $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Tất cả các tính chất vừa nêu trên về chuỗi lũy thừa có thể tóm tắt trong một câu: *giới hạn, đạo hàm, tích phân tổng của chuỗi lũy thừa có thể chuyển qua giới hạn, đạo hàm, tích phân từng số hạng của chuỗi.* Ta sẽ sử dụng các tính chất đó để tìm tổng của một số chuỗi.

Ví dụ 5.2.6

1. Tìm tổng của chuỗi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Dễ dàng chứng minh được chuỗi hội tụ với $\forall x \in (-1, 1)$ đồng thời sử dụng công thức tính tổng của chuỗi cấp số nhân ta được $f(x)$ bằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$
Dễ dàng nhận thấy bán kính hội tụ của chuỗi $R = 1$. Tại đầu mút $x = 1$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì và tại $x = -1$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ. Miền hội tụ của chuỗi $[-1, 1)$.
Để tính tổng của chuỗi, ta lấy tích phân chuỗi cấp số nhân sau trên đoạn $[0, y]$, $\forall y \in (-1, 1)$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y x^{n-1}dx = \int_0^y \frac{dx}{1-x},$$
suy ra
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \ln(1-y) \quad \text{hay} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$$
Theo tính chất của chuỗi lũy thừa, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hội tụ đều trên đoạn $[-1, 0]$, tổng của chuỗi liên tục trên miền hội tụ $[-1, 1)$. Do đó
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \to -1+} \ln(1-x) = \ln 2.$$
Vậy chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \in [-1, 1)$ và có tổng
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x).$$
(*Ta có thể chứng minh chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$ *hội tụ đều trên đoạn* $[-1, 0]$ *theo cách khác, không sử dụng tính liên tục trên miền hội tụ của chuỗi lũy thừa. Thật vậy chuỗi đan dấu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz và do đó với mọi* $-1 \le x \le 0$
$$\left|\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right| \le \frac{|x^n|}{n+1} \le \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$
khi $n > n_0$ *nào đó. Nói cách khác chuỗi hội tụ đều trên đoạn* $[-1, 0]$).

5.2.5 Chuỗi Taylor

Định nghĩa 5.2.3 *Cho hàm $f(x)$ xác định tại lân cận $x = x_0$ và khả vi vô hạn lần tại x_0. Khi đó chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{5.4}$$

được gọi là chuỗi Taylor của $f(x)$ tại x_0.
Đặc biệt khi $x_0 = 0$ chuỗi (5.4) có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

và được gọi là chuỗi Mac Laurin của hàm $f(x)$.

Nếu chuỗi Taylor của $f(x)$ tại x_0 có tổng bằng chính $f(x)$ trong lân cận của x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$$

khi đó ta nói hàm $f(x)$ *có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm* x_0.

Hiển nhiên nếu chuỗi lũy thừa sau có tổng bằng $f(x)$ tại lân cận x_0

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = f(x), \tag{5.5}$$

lần lượt đạo hàm các cấp hai vế của (5.5) và thay $x = x_0$ ta được

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, ...$$

Như vậy một hàm chỉ có thể khai triển thành chuỗi Taylor duy nhất tại lân cận điểm x_0.

Ví dụ hàm $f(x) = \frac{1}{1-x}$ khai triển thành chuỗi Mac Laurin trên $(-1, 1)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Ta nhắc lại rằng trong chương III, theo công thức Taylor với số dư dạng Lagrange, nếu hàm $f(x)$ khả vi liên tục đến cấp $n+1$ trong lân cận điểm x_0 thì tồn tại c nằm giữa x và x_0 sao cho

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

trong đó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Suy ra hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor khi và chỉ khi tại lân cận điểm x_0

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0.$$

Định lí 5.2.8 *Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp tại lân cận $U(x_0)$ của x_0 và đạo hàm mọi cấp của $f(x)$ bị chặn đều trong lân cận đó*

$$\exists M \text{ sao cho } \; |f^{(n)}(x)| \le M, \quad \forall x \in U(x_0), \; \forall n \ge 0$$

khi đó $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor trên lân cận $U(x_0)$.

Chứng minh Số dư dạng Lagrange của hàm $f(x)$ được ước lượng như sau

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \cdot |x-x_0|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \quad \forall x \in U(x_0)$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{khi} \quad n\to\infty \quad \text{với mọi} \quad t > 0.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ với mọi $x \in U(x_0)$. Nói cách khác $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor trên lân cận $U(x_0)$. ■

Ví dụ 5.2.7

1. Hàm $f(x) = e^x$ khả vi vô hạn lần tại mọi điểm và $f^{(n)}(0) = 1$ với mọi số tự nhiên n. Do vậy chuỗi Mac Laurin của $f(x) = e^x$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Áp dụng định lí 5.2.8, $f^{(n)}(x) = e^x$ bị chặn đều trên khoảng hữu hạn bất kì $(-A, A)$

$$|f^{(n)}(x)| = |e^x| < e^A \quad \text{với mọi} \quad |x| < A.$$

Suy ra $f(x) = e^x$ có thể khai triển thành chuỗi Mac Laurin trên khoảng $(-A, A)$. Mặt khác A được chọn tùy ý, ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{với mọi số thực} \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận $x_0 = 2$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2-x}{2}}$$

Sử dụng công thức tính tổng của cấp số nhân $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2-x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$$

với mọi x thỏa mãn $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$ hay $x \in (0, 4)$.

Khai triển thành chuỗi Mac Laurin một số hàm thường gặp

Cũng như cách xây dựng công thức Taylor cho một số hàm sơ cấp đã trình bày trong chương III, dưới đây ta sẽ viết các chuỗi Mac Laurin một số hàm thường gặp. Tất cả các hàm này đều có thể khai triển thành chuỗi Mac Laurin trên miền tương ứng với mỗi chuỗi.

1. Hàm $f(x) = \sin x$ hiển nhiên thỏa mãn điều kiện của định lí 5.2.8, do vậy

   $$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

   với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Tương tự, khai triển Mac Laurin của hàm $f(x) = \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3. Khai triển Mac Laurin hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$ với α là số thực tùy ý. Bằng quy nạp ta có thể chứng minh đạo hàm cấp n của f tại lân cận điểm $x = 0$

   $$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

   Người ta chứng minh được rằng với $\forall x \in (-1, 1)$ ta có khai triển

   $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

   hay

   $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad \forall x \in (-1, 1).$$

   Khai triển này còn được gọi là *khai triển nhị thức*. Trong một số tài liệu người ta sử dụng kí hiệu

   $$C_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}C_n^\alpha x^n.$$

4. Một vài khai triển thường gặp khác

   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

   $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n$$

Một vài ứng dụng của khai triển thành chuỗi Taylor

• Nếu $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận $U(x_0)$ nào đó của x_0, khi đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in U(x_0)$$

Dựa vào đẳng thức này ta có thể tính chính xác tổng của một vài chuỗi số. Chẳng hạn từ khai triển

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1]$$

suy ra tại $x = 1$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$$

Tương tự, từ khai triển

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in (-1, 1]$$

tại $x = 1$ ta cũng có kết quả

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

• Sử dụng khai triển hàm thành chuỗi Taylor, tích phân một hàm có thể đưa về bài toán tính tổng của chuỗi số. Xét ví dụ tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ (hàm $\frac{\sin x}{x}$ không có nguyên hàm dạng sơ cấp)

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n-2} dx}{(2n-1)!} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

Như vậy

$$I \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0,946111 \quad \text{với sai số nhỏ hơn} \quad \frac{1}{7 \cdot 7!} < 3 \cdot 10^{-5}.$$

• Sử dụng khai triển hàm thành chuỗi Taylor, ta có thể tính gần đúng giá trị hàm số như đã trình bày trong phần công thức Taylor trong chương III.

Ví dụ để tính gần đúng $\cos 1$, sử dụng khai triển

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} = 0,5403026.$$

Sai số phạm phải (theo định lí Leibnitz) nhỏ hơn $\frac{1}{10!} < 3 \cdot 10^{-7}$.

5.3 Chuỗi Fourier

5.3.1 Khái niệm về chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier

Định nghĩa 5.3.1 *Ta gọi chuỗi hàm*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trong đó a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, ...)$ *là các hằng số, là chuỗi lượng giác.*
Nếu chuỗi hội tụ và có tổng bằng $f(x)$ *trên tập số thực* $\mathbb{R}$*, khi đó* f *là hàm tuần hoàn chu kì* 2π *và ta nói hàm* f *khai triển được thành chuỗi lượng giác trên* $\mathbb{R}$*.*

Trước hết ta chứng minh định lí sau

Định lí 5.3.1 *Nếu f khai triển được thành chuỗi lượng giác*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5.6}$$

và giả thiết chuỗi hội tụ đều trên $[-\pi, \pi]$, khi đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad n = 1, 2, ... \tag{5.7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad n = 1, 2, ...$$

Chứng minh Nhân cả 2 vế đẳng thức (5.6) với $\cos kx$ ta được

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos kx \tag{5.8}$$

Do chuỗi (5.6) hội tụ đều trên $[-\pi, \pi]$ nên áp dụng tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm hội tụ đều, suy ra chuỗi (5.8) cũng hội tụ đều trên $[-\pi, \pi]$. Tích phân từng số hạng của chuỗi (5.8) ta được

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos kx\, dx$$

Nhận xét rằng với $n \geq 1$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(n+k)x + \sin(n-k)x\big)dx = 0$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\big)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \neq n \\ \pi & \text{nếu } k = n \end{cases}$$

Suy ra

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \begin{cases} \pi a_0 & \text{nếu} \quad k=0 \\ \pi a_n & \text{nếu} \quad k=n \end{cases}$$

Hoàn toàn tương tự $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_n \ \forall k \geq 1$. Các công thức (5.7) trong định lí được suy ra từ các đẳng thức này. ■

Các hệ số a_0, a_n, b_n với $n = 1, 2, ...$ xác định theo các công thức (5.7) trong định lí 5.3.1 được gọi là *các hệ số Fourier* của hàm f và chuỗi lượng giác (5.6) được gọi là *chuỗi Fourier* của hàm f.

Nhận xét rằng chuỗi Fourier của hàm f *hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều trên* $\mathbb{R}$ nếu các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối. Điều khẳng định đó được suy ra từ tiêu chuẩn Weierstrass về sự hội tụ đều của chuỗi hàm và các ước lượng

$$|a_n \cos nx| \leq |a_n|, \ |b_n \sin nx| \leq |b_n| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý nếu f là hàm chẵn, các hệ số $b_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và nếu f là hàm lẻ, các hệ số $a_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Trong trường hợp thứ nhất, f là hàm chẵn, chuỗi Fourier của hàm f có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$

Trong trường hợp thứ hai, f là hàm lẻ, chuỗi Fourier của hàm f có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ trình bày các điều kiện để hàm f có thể khai triển được thành chuỗi Fourier của nó.

5.3.2 Sự hội tụ của chuỗi Fourier

Định nghĩa 5.3.2 *Hàm* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *được gọi là đơn điệu từng khúc trên* $[a, b]$ *nếu tồn tại một phép chia đoạn* $[a, b]$

$$F : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

sao cho f đơn điệu trên mỗi khoảng (x_{i-1}, x_i) với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Chú ý rằng các hàm đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$ hoặc liên tục tại mọi điểm hoặc chỉ có các điểm gián đoạn loại một (không quá đếm được các điểm gián đoạn loại một). Như vậy $f(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $f(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ luôn luôn tồn tại và các giới hạn đó hữu hạn.

Ta thừa nhận định lí sau

Định lí 5.3.2 (Dirichlet) *Giả sử hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi, \pi]$. Khi đó chuỗi Fourier của hàm f hội tụ trên $\mathbb{R}$, đồng thời*

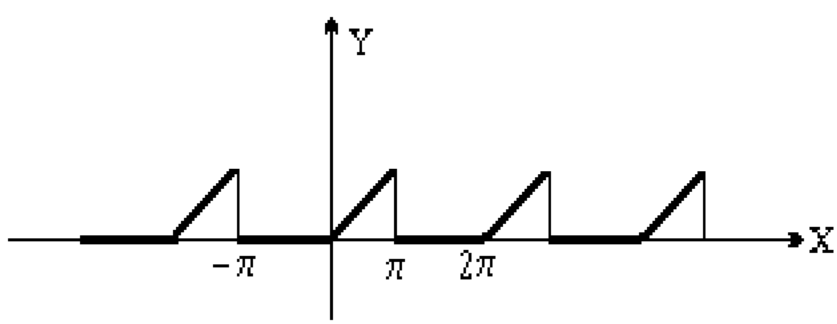
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặc biệt khi f đơn điệu từng khúc trên $[-\pi, \pi]$ và liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$, khi đó f có thể khai triển thành chuỗi Fourier (tổng của chuỗi bằng $f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Ví dụ 5.3.1

1. Cho hàm $f : R \to \mathbb{R}$ tuần hoàn với chu kì 2π và

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{khi} \quad 0 \le x < \pi \\ 0 & \text{khi} \ -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$



Hình 5.1: Đồ thị hàm tuần hoàn f

Chuỗi Fourier của hàm f theo công thức (5.7) có các hệ số

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{\cos nx}{n^2\pi}\bigg|_0^{\pi} = \begin{cases}\frac{-2}{n^2\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ}\\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn}\end{cases}$$

Tương tự

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \begin{cases}\frac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ lẻ}\\ -\frac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ chẵn}\end{cases}$$

Áp dụng định lí Dirichlet, tại các điểm $x \neq (2k+1)\pi, \quad k \in Z$ (các điểm liên tục của f)

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \cdots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots\right)$$

Tại các điểm còn lại $x = (2k+1)\pi$ (các điểm gián đoạn loại một của f), tổng của chuỗi Fourier của hàm f bằng $\frac{\pi}{2}$. Chẳng hạn tại $x = \pi$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots\right)$$

Nói cách khác chuỗi số sau hội tụ và có tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn với chu kì 2π và

$$f(x) = x^2,\ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Hàm f là hàm chẵn, $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, các hệ số Fourier $b_n = 0,\ \forall n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2}$$

Hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$, do vậy

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp riêng tại $x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{hay} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Khai triển Fourier hàm tuần hoàn chu kì $2l$

Xét hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kì $2l$, thỏa mãn các điều kiện của định lí Dirichlet trên đoạn $[-l, l]$. Khi đó hàm $g(t) = f(\frac{lt}{\pi})$ là hàm tuần hoàn chu kì 2π cũng thỏa mãn các điều kiện của định lí Dirichlet trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Do đó $g(t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) = \frac{g(t+) + g(t-)}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

hay tại các điểm liên tục của f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}).$$

Các hệ số Fourier trong khai triển này (sử dụng phép biến đổi $t = \frac{\pi x}{l}$)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Lưu ý rằng cũng như trước đây nếu f là hàm chẵn, các hệ số $b_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và nếu f là hàm lẻ, các hệ số $a_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.3.2

Khai triển Fourier hàm f tuần hoàn chu kì $T = 2$, biết $f(x) = x$ với mọi $-1 \leq x < 1$.
Do hàm số f là hàm lẻ trên khoảng $(-1, 1)$ nên các hệ số $a_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 2\int_0^l x\sin n\pi x\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Chuỗi Fourier của hàm f có tổng, theo định lí Dirichlet

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x = \begin{cases} x & \text{nếu } |x| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |x| = 1 \end{cases}$$

Nhận xét rằng với một hàm bất kì xác định trên $[a, b]$ ta có nhiều cách để mở rộng nó thành hàm tuần hoàn chu kì $2l$ $(2l \geq b - a)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mỗi cách suy rộng như thế còn được gọi là *kéo dài tuần hoàn* hàm f ban đầu. Sau đó ta có thể khai triển Fourier hàm f hoàn chu kì $2l$ với các hệ số được tính theo các công thức (5.9) nêu trên.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Chứng minh rằng các chuỗi sau hội tụ và tính tổng của chuỗi

(a) $$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

(b) $$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)(2n+2)}$$

(c) $$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

2. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+4n^2-5}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n+2}{3n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln^2 n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$

3. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin nx \quad (x\in\mathbb{R})$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+2)}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^2 n+2)}$

4. Xét sự hội tụ của các chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$

5. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots$$

6. Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ hoặc phân kì của các chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-\sqrt{n})}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})}$

7. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{1}{\sqrt{n}} - \ln\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

8. Xét sự hội tụ đều của các dãy hàm

(a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ trên $0 \le x \le 1$

(b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$ trên $-\infty < x < +\infty$

(c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ trên $0 < x < +\infty$

(d) $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ trên $-\infty < x < +\infty$

9. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 1$$

10. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên $[1,+\infty)$ nhưng không hội tụ đều trên khoảng $[0,+\infty)$

11. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\ln x$ hội tụ đều trên $(0,1)$ và chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\ln x$ không hội tụ đều trên khoảng đó.

12. Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

hội tụ đều trên khoảng $[0,+\infty)$

13. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$$

Tổng của chuỗi có liên tục, khả vi trên miền hội tụ của chuỗi không?

14. Tìm miền hội tụ của chuỗi
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}(tgx)^n$

15. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n - 3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n e^n} x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n - n^4}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n - n}$

16. Tìm miền hội tụ của các chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)^3 \quad (x > 0)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{nx} \quad (x > 0)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[3]{nx}} \quad (x > 0)$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n} x^n$

17. Chứng minh rằng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(1 + e^x)^3 = 8 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1} + 4^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

18. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)}$$

19. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n-1)}}{(n-1)!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

20. Khai triển các hàm sau thành chuỗi MacLaurin

(a) $f(x)=(x^2+x)e^x$ (b) $g(x)=e^{-x^2}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^8}{1-x}$ (d) $g(x)=\cos^2 x$

(e) $u(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (f) $v(x)=\sin^3 x$

21. Sử dụng khai triển Taylor các hàm thích hợp để tính tổng các chuỗi số

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\cdots$

22. Tính tổng của chuỗi

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{7.8.9}+\cdots$$

23. Sử dụng khai triển hàm thành chuỗi, hãy tính gần đúng

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ với độ chính xác 10^{-4}

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ với độ chính xác 10^{-4}

24. Khai triển Fourier hàm $f(x) = \pi - x$ theo các hàm sin trên đoạn $[0, \pi]$.

25. Khai triển Fourier hàm $f(x) = x^2$ theo các cosin trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

26. Khai triển Fourier hàm $f(x) = x^2$ theo cả sin và cosin trên đoạn $[0, 2\pi]$.

27. Khai triển Fourier hàm $f(x) = e^x$ theo cả sin và cosin trên đoạn $[-1, 1]$.

28. Áp dụng khai triển Fourier các hàm thích hợp để tính tổng các chuỗi số

    (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

    (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. (a) $\frac{1}{2}$

   (b) $\frac{1}{4}$

   (c) $\frac{1}{4}$

   Hướng dẫn: $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$

2. (a) Hội tụ (b) Phân kì

   (c) Hội tụ (d) Hội tụ

   (e) Phân kì (f) Hội tụ

   (g) Phân kì (h) Phân kì

   (i) Hội tụ (k) Hội tụ

3. (a) Phân kì với $x \neq k\pi$ (b) Phân kì

   (c) Hội tụ (d) Phân kì

4. (a) Hội tụ (b) Hội tụ

   (c) Hội tụ (d) Hội tụ

   (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ phân kì

   Hướng dẫn: Ta có
   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}.$$
   Áp dụng định lí Leibnitz cho chuỗi thứ nhất.

   (f) Hội tụ

5. Hội tụ.

   Hướng dẫn: Sử dụng định lí Leibnitz.

6. (a) Hội tụ tuyệt đối

   (b) Hội tụ tuyệt đối

7. Phân kì

8. (a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ hội tụ đều đến 0 trên $[0, 1]$

   (b) $f_n(x) = \frac{\mathbf{arctg}\, x^n}{n}$ hội tụ đều đến 0 trên $\mathbb{R}$

   (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ hội tụ đến x trên $\mathbb{R}$ nhưng không đều.

   (d) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ hội tụ đến e^x trên $\mathbb{R}$ nhưng không đều.

9. ***Hướng dẫn***: $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx + \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n}dx = I_1 + I_2$

   Dễ dàng chứng minh $\lim I_1 = 0$. Mặt khác $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ hội tụ đều trên $[1+\varepsilon, 2]$ tới 1. Suy ra điều phải chứng minh.

10. ***Hướng dẫn***: Sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass.

11. ***Hướng dẫn***: Tổng riêng của chuỗi thứ nhất $S_{1n} = \dfrac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} x \ln x$ hội tụ đều trên $(0, 1)$ tới $\dfrac{x \ln x}{1+x}$

    Tổng riêng của chuỗi thứ hai $S_{2n} = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} x \ln x \longrightarrow \dfrac{x \ln x}{1-x}$ không đều trên $(0, 1)$. Chẳng hạn chọn $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, khi đó $\left(S_{2n} - \dfrac{x \ln x}{1-x}\right)\Big|_{x=x_n} \not\to 0$.

13. ***Hướng dẫn***: Chuỗi hội tụ đều trên các khoảng $(-\infty, -1-\varepsilon)$ và $(1+\varepsilon, +\infty)$, suy ra tổng của chuỗi liên tục và khả vi trên $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$.

14. (a) Miền hội tụ $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

    (b) Miền hội tụ $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{tg} x \le 1\}$

15. (a) $-5 < x < 5$ (b) $-1 \le x \le 1$

    (c) $-1 \le x \le 1$ (d) $-e < x < e$

    (e) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ (f) $-2 < x < 2$

16. (a) $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| > \frac{1}{2}\right\}$ (b) $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| < \max\{a, b\}\right\}$

    (c) $\forall\, x > 0$ (d) $\forall\, x > 0$

    (e) $\forall\, x > 0$ (f) $-1 < x < 1$

18. Miền hội tụ $-1 \leq x \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)} = \begin{cases} (x+1)\ln(x+1) - x & \text{nếu} \quad -1 < x \leq 1 \\ \quad 1 & \text{nếu} \quad x = -1 \end{cases}$$

19. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad \forall\, |x| < 1$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad \forall\, |x| < 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n-1)}}{(n-1)!} = e^{-x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \forall\, |x| < 1$

20. (a) $\displaystyle(x^2+x)e^x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) x^{n+1}$

(b) $\displaystyle e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

(c) $\displaystyle\frac{x^8}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+8}$

(d) $\displaystyle\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{2n}}{2 \cdot (2n)!}$

(e) $\displaystyle\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(f) $\displaystyle\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3 - 3^{2n+1}) x^{2n+1}}{4 \cdot (2n+1)!}$

21. (a) $\ln 2$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\sqrt{e}$

22. $\displaystyle\ln 2 - \frac{1}{2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin nx}{n}$

25. $\displaystyle\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

26. $\displaystyle\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right)$

27. $\displaystyle\frac{e^2-1}{2}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n n\pi\sin n\pi x}{1+n^2\pi^2}\right)\Big]$

28. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Hướng dẫn: Khai triển Fourier hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

PHỤ LỤC: CÁC ĐỀ THI GIẢI TÍCH I

ĐỀ SỐ 1

Câu 1 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$

Tìm a, b, c để $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$.

Câu 2 Tính đạo hàm cấp n hàm số $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0+0} (e^x - 1)^{\sin x}$.

Câu 4 Tính tích phân

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn giới hạn bởi đường cong

$$x^2 - 2|xy| + 5y^2 = 1.$$

Câu 6 Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos 2a_n + \ln(e^{-1} + |a_n|) \Big)$$

cũng hội tụ tuyệt đối.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n-1}$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ ax^3 + bx^2 + c & \text{nếu } x \le 0. \end{cases}$

Tìm a, b, c để $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$.

Câu 2 Tính đạo hàm cấp n hàm số $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0+0} (e^x - 1)^{\ln(1+x)}$.

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn giới hạn bởi đường cong

$$5x^2 + 2|xy| + y^2 = 1.$$

Câu 6 Cho chuỗi số dương $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos 2a_n - \ln(e + a_n)\Big) \text{ hội tụ tuyệt đối.}$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n+1}$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1 Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_0 > 0$ tùy ý, $x_n = \ln(1 + x_{n-1})$ với mọi $n \ge 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \Big(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x}\Big)$.

Câu 3 Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x$. Hãy tính $f^{(8)}(\dfrac{\pi}{2})$.

Câu 4 Tính một nguyên hàm của $f(x) = x|x - 1|$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 5 Cho dãy số $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}, n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng tổng tích phân của hàm số thích hợp để tìm $\lim u_n$.

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{n(3^{\frac{1}{n}}-1)}{3+\operatorname{tg}\frac{1}{n}}\Big)^n$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^{-n}x^{n+1}}{n!}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1 Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_0 > 0$ tùy ý, $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}} - 1$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{x-\sin x}$.

Câu 3 Cho hàm số $f(x) = \cos^3 x$. Hãy tính $f^{(7)}(\dfrac{\pi}{2})$.

Câu 4 Tính một nguyên hàm của $f(x) = x|x^3-1|$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 5 Cho dãy $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+k^2}}, n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng tổng tích phân của hàm số thích hợp để tìm $\lim u_n$.

Câu 6 Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n}-1) \text{ hội tụ.}$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\dfrac{2}{3^{n+1}}\Big)x^n$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1 Định nghĩa đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp cao hàm số tại một điểm. **Á**p dụng để tính $f'(1), f''(1), f'''(1)$ cho hàm số $f(x) = |x-1|^3$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^3)}{x - \operatorname{tg} x}$.

Câu 3 Cho hàm $f(x) = 1 + \sin(x^2)$. Chứng minh rằng hàm số

$$g(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

đơn điệu tăng trên khoảng $(0, +\infty)$.

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

Câu 5 Tính tích phân $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6}}$.

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos\frac{1}{n}}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1 Định nghĩa hàm khả vi. Chứng minh rằng hàm $f(x) = |x-1| \sin \pi x$ khả vi tại $x = 1$ và hàm $g(x) = |x-1| \cos \pi x$ không khả vi tại $x = 1$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}\right)$.

Câu 3 Cho hàm $f(x) = 1 + \cos(x^2)$. Chứng minh rằng hàm số

$$g(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

đơn điệu tăng trên khoảng $(0, +\infty)$

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

Câu 5 Tính tích phân $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+3^n)x^n$.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1 Phát biểu định lí Lagrange. Áp dụng để chứng minh hàm số

$$f(x) = \sin^n x$$

($n \in \mathbb{N}^*$) liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Câu 2 Tìm giới hạn $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{x^2}\Big)$.

Câu 3 Cho hàm $y = x^2 \sin 2x$. Hãy tính $y^{(9)}(0)$.

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Câu 5 Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$, biết $f(a) = f(b) = 0$ và $f'(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Xét dãy số $a_n = \displaystyle\int_a^b f(x) \sin nx\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, tìm giới hạn $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Câu 6 Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}.$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) x^{2n-1}$.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1 Phát biểu định lí Lagrange. Áp dụng để chứng minh hàm số $f(x) = \cos^n x$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$

Câu 2 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Câu 3 Cho hàm $y = x^2\cos 2x$. Hãy tính $y^{(8)}(0)$.

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Câu 5 Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$, biết $f(a) = f(b) = 0$ và $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Xét dãy số $a_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\cos nx\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Câu 6 Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{4}$. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos a_n - 1}{a_n^2}$.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}x^{n+2}}{(n+1)!}$.

ĐỀ SỐ 9

Câu 1 Chứng minh một dãy số thực hội tụ thì bị chặn. Hãy cho một thí dụ về dãy số thực bị chặn nhưng không hội tụ.

Câu 2 Cho hàm $y = \cos^4 x$. Hãy tính $y^{(10)}(0)$.

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}$.

Câu 5 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;\ z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9};\ z = -1.$$

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^{n^2}}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{2^n \cdot n!}$.

ĐỀ SỐ 10

Câu 1 Phát biểu và chứng minh tính duy nhất của giới hạn dãy số. Dãy số $u_n = \dfrac{(-1)^n n + 1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ hội tụ hay phân kì? Chứng minh.

Câu 2 Cho hàm $y = \sin^4 x$. Hãy tính $y^{(10)}(0)$.

Câu 3 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$.

Câu 4 Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^3 + 8}$.

Câu 5 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1;\ z = x^2 + \frac{y^2}{4};\ z = -2.$$

Câu 6 Chứng minh chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n^2}}$ hội tụ.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$.

ĐỀ SỐ 11

Câu 1 Cho dãy số thực $u_n,\ n \in \mathbb{N}^*$ biết $u_1 = 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 Hãy xác định các khoảng đơn điệu và tìm cực trị hàm số

$$y = \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

Câu 3 Tìm giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}.$$

Câu 4 Tính tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x^3}.$$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn trong mặt phẳng xOy được giới hạn bởi các đường:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ x = 2a\ (a > 0, b > 0).$$

Câu 6 Phát biểu định lí Leibnitz về sự hội tụ của chuỗi đan dấu. Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + (-1)^{n+1}}$$

hội tụ hay phân kì? Chứng minh.

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^{-n}) x^{n+2}.$$

ĐỀ SỐ 12

Câu 1 Cho dãy số thực $u_n,\ n \in \mathbb{N}^*$ biết $u_1 = 2,\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n - 3}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 Hãy xác định các khoảng đơn điệu và tìm cực trị hàm số

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^3}.$$

Câu 3 Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Câu 4 Tính tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^3}.$$

Câu 5 Tính diện tích miền D hữu hạn trong mặt phẳng xOy được giới hạn bởi các đường:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1;\ y = 2b\ (a > 0, b > 0).$$

Câu 6 Phát biểu điều kiện cần để chuỗi hội tụ. **Á**p dụng để tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^{-n}) x^{n+1}.$$

ĐỀ SỐ 13

Câu 1 Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+3x}}{\ln(x+1)}$$

Câu 2 Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos 4x)}{x} & \text{nếu } x \in (\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}) \setminus \{0\} \\ a & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Tìm a để $f(x)$ khả vi tại $x = 0$. Tính $f'(0)$.

Câu 3 Tìm một nguyên hàm $\Phi(x)$ của hàm $f(x) = |x|\sin x$ trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $\Phi(0) = 1$.

Câu 4 Sử dụng tổng tích phân của hàm số thích hợp, tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} u_n,$$

biết

$$u_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Câu 5 Tính tích phân

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}dx.$$

Câu 6 Chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$$

hội tụ hay phân kì? Tại sao?

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)}.$$

ĐỀ SỐ 14

Câu 1 Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\Big).$$

Câu 2 Chứng minh hàm $f(x)=x^3+1+\ln(x+2)$ đơn điệu tăng trên tập xác định của hàm. Từ đó hãy suy ra phương trình $x^3+1+\ln(x+2)=0$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 3 Tìm a để $f(x)=|x-1|\cos(x+a)$ khả vi trên $\mathbb{R}$.

Câu 4 Sử dụng tổng tích phân của hàm số, hãy tìm giới hạn của dãy số

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{3n^2+k^2},\ n=1,2,...$$

Câu 5 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} \quad \text{và} \quad z=3.$$

Câu 6 Cho dãy số $\{a_n\}, n=1,2,...$ biết $\lim\limits_{x\to\infty}\Big|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big|=\dfrac{1}{3}$. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2+\cos a_n}$$

hội tụ.

Câu 7 Khai triển hàm $f(x)=x^2\ln(2+x^2)$ thành chuỗi MacLaurin.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1 Chứng minh rằng nếu dãy số thực $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì dãy hội tụ.
Áp dụng để chứng minh dãy số $u_1 = a > 0,\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, hội tụ. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 Tìm giới hạn
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \sin^3 x + 2\cos x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 3\cos^2 x}.$$

Câu 3 Viết công thức Taylor (dạng Peano) hàm $f(x) = x\sqrt{4 + x^2}$ tại lân cận điểm $x = 0$ đến cấp $n = 5$. Từ đó hãy suy ra $f^{(5)}(0)$.

Câu 4 Tính tích phân
$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Câu 5 Tính tích phân
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + |\ln x|)^4}.$$

Câu 6 Chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2n-1}{2n+1}\Big)^{n^2}$$
hội tụ hay phân kì? Tại sao?

Câu 7 Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

CHỈ DẪN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. DIEUDONN NÉ, J.: Cơ sở giải tích hiện đại, tập I. NXB Đại học và THCN, Hà nội 1973.

2. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ.: Toán cao cấp, tập I. NXB Giáo dục, Hà nội 2000.

3. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ.: Toán cao cấp, tập II. NXB Giáo dục, Hà nội 2000.

4. PHẠM NGỌC THAO.: Giáo trình giải tích. Trường Đại học Đại cương, Hà nội 1996.

5. PHIKHTENGOL, G.M.: Phép tính vi phân, tích phân. Moxkva 1960.

6. RUDIN, U.: Cơ sở giải tích toán học. Moxkva 1966.