BỘ MÔN TOÁN **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** **ĐỀ SỐ 1 K56**

TRƯỜNG ĐHXD *Thời gian làm bài 90 phút* *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,5 đ)

a) Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+y}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } x=y=0. \end{cases}$

Hàm $f(x,y)$ có liên tục tại $(0,0)$ không? Tính các đạo hàm riêng (nếu tồn tại) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Tìm cực trị hàm số $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$.

Câu 2 (2,0 đ) Tính tích phân kép $\displaystyle\iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)-1}\,dxdy$, với $D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 1, 2x \geq 1\}$.

Câu 3 (2,5 đ) Gọi C là đường elip giao của mặt phẳng $y+z=0$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$, được định hướng ngược chiều kim đồng hồ, nhìn từ trên xuống.

a) Tìm một biểu diễn tham số của C.

b) Tính tích phân đường loại hai $\displaystyle\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$.

Câu 4 (1,5 đ) Giải phương trình vi phân $x^2y'' - xy' + y = x^2$, biết hai nghiệm riêng của phương trình $y = x^2$ và $y = x^2 - x$.

Câu 5 (1,5 đ) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n2^n} + \frac{(-1)^n}{n}\right)x^n$.

BỘ MÔN TOÁN **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** **ĐỀ SỐ 2 K56**

TRƯỜNG ĐHXD *Thời gian làm bài 90 phút* *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,5 đ)

a) Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } x=y=0. \end{cases}$

Hàm $f(x,y)$ có liên tục tại $(0,0)$ không? Tính các đạo hàm riêng (nếu tồn tại) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Tìm cực trị hàm số $f(x,y) = 16x^2 + 16y^2 - (x+y)^4$.

Câu 2 (2,0 đ) Tính tích phân kép $\displaystyle\iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)-1}\,dxdy$, với $D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 1, 2y \geq 1\}$.

Câu 3 (2,5 đ) Gọi C là đường elip giao của mặt phẳng $x+z=0$ với mặt trụ $x^2+y^2=1$, được định hướng ngược chiều kim đồng hồ, nhìn từ trên xuống.

a) Tìm một biểu diễn tham số của C.

b) Tính tích phân đường loại hai $\displaystyle\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$.

Câu 4 (1,5 đ) Giải phương trình vi phân $x^2y'' + xy' - y = 3x^2$, biết hai nghiệm riêng của phương trình $y = x^2$ và $y = x^2 + x$.

Câu 5 (1,5 đ) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n + (-1)^n)\,x^n}{n}$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 1 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (2,5 đ)

(1,0 đ) a) $f(x,y)$ không liên tục tại $(0,0)$ vì khi $x,y>0, f(x,y)\geq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1,\quad f'_x(0,0)=0$ và $\nexists f'_y(0,0)$.

(1,5 đ) b) Hàm có 3 điểm dừng $M_1(1,1),\ M_2(-1,-1),\ M_3(0,0)$.

Hàm đạt cực tiểu tại $M_1(1,1),\ M_2(-1,-1),\ f(M_1)=f(M_2)=-2$ và không đạt cực trị tại $M_3(0,0)$.

Câu 2 (2,0 đ) Tính tích phân $I=\iint\limits_D \sqrt{4(x^2+y^2)-1}\,dxdy$, với $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1, 2x\geq 1\}$.

Chuyển sang tọa độ cực: $-\frac{\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2\cos\varphi}\leq r\leq 1$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1}\sqrt{4r^2-1}\cdot r\,dr.$ *(1,0 đ)*

$$I=\frac{1}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3\sqrt{3}-\tan^3\varphi\right)d\varphi=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{6} \qquad \textit{(1,0 đ)}$$

Câu 3 (2,5 đ)

(1,0 đ) a) Biểu diễn tham số của $C:\ x=\cos t, y=\sin t, z=-\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi$.

(1,5 đ) b) Tính tích phân: $\oint\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\int_0^{2\pi}dt=-4\pi$.

Câu 4 (1,5 đ) Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng $y_1=x$, suy ra nghiệm độc lập với $x,\ y_2=x\ln x$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho: $y=C_1x+C_2x\ln x+x^2$.

Câu 5 (1,5 đ) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n2^n}+\frac{(-1)^n}{n}\right)x^n$.

Miền hội tụ $-1<x\leq 1$ và tổng của chuỗi $S(x)=-\ln[(1+x)(1-\frac{x}{2})]$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 2 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (2,5 đ)

(1,0 đ) a) $f(x,y)$ không liên tục tại $(0,0)$ vì khi $x,y>0, f(x,y)\geq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1,\quad f'_x(0,0)=0$ và $\nexists f'_y(0,0)$.

(1,5 đ) b) Hàm có 3 điểm dừng $M(0,0),\ M_1(1,1),\ M_2(-1,-1)$.

Hàm đạt cực tiểu tại $M_(0,0),\ f(M)=0$ và không đạt cực trị tại $M_1(1,1),\ M_2(-1,-1)$.

Câu 2 (2,0 đ) Tính tích phân $I=\iint\limits_D \sqrt{4(x^2+y^2)-1}\,dxdy$, với $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1, 2y\geq 1\}$.

Chuyển sang tọa độ cực: $\frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{5\pi}{6},\ \frac{1}{2\sin\varphi}\leq r\leq 1$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1}\sqrt{4r^2-1}\cdot r\,dr.$ *(1,0 đ)*

$$I=\frac{1}{6}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sqrt{3}-\cot^3\varphi\right)d\varphi=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{6} \qquad \textit{(1,0 đ)}$$

Câu 3 (2,5 đ)

(1,0 đ) a) Biểu diễn tham số của $C:\ x=\cos t, y=\sin t, z=-\cos t,\ 0\leq t\leq 2\pi$.

(1,5 đ) b) Tính tích phân: $\oint\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\int_0^{2\pi}dt=-4\pi$. (*như câu 3 đề số 1*).

Câu 4 (1,5 đ) Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng $y_1=x$, suy ra nghiệm độc lập với $x,\ y_2=\frac{1}{x}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho: $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+x^2$.

Câu 5 (1,5 đ) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+(-1)^n)\,x^n}{n}$.

Miền hội tụ $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$ và tổng của chuỗi $S(x)=-\ln[(1+x)(1-2x)]$.

BỘ MÔN TOÁN **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** **ĐỀ SỐ 3 K56**

TRƯỜNG ĐHXD *Thời gian làm bài 90 phút* *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 đ) Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x + y + z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1$.

Câu 2 (3,0 đ) Gọi V là miền không gian hữu hạn giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt parabôlôit $x^2 + y^2 = 3z$, S là phần mặt parabôlôit nằm ngoài hình nón, mặt S được định hướng xuống phía dưới.

a) Tính thể tích miền V.

b) Tính tích phân mặt loại hai $\displaystyle\iint_S dydz + 2\,dxdz - 2\,dxdy$.

Câu 3 (3,0 đ)

a) Giải phương trình $(xe^y + y^3)y' = ye^y$.

b) Tìm nghiệm của phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$ thỏa mãn điều kiện $y'(0) = 0, y(0) = -1$.

Câu 4 (2,0 đ)

a) Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n(n+1)}$ hội tụ hay phân kì? Tại sao?

b) Khai triển hàm $f(x) = x\ln(2 + x^2)$ thành chuỗi MacLaurin.

BỘ MÔN TOÁN **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** **ĐỀ SỐ 4 K56**

TRƯỜNG ĐHXD *Thời gian làm bài 90 phút* *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 (2,0 đ) Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x + y - z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1$.

Câu 2 (3,0 đ) Gọi V là miền không gian hữu hạn giới hạn bởi mặt trụ $x^2+y^2 = 2x$, mặt parabôlôit $x^2+y^2 = 2z$ và mặt phẳng xOy, S là phần mặt parabôlôit nằm trong hình trụ, mặt S được định hướng xuống phía dưới.

a) Tính thể tích miền V.

b) Tính tích phân mặt loại hai $\displaystyle\iint_S dydz + dxdz + 2\,dxdy$.

Câu 3 (3,0 đ)

a) Giải phương trình $(x^2 + y^3)y' = xy$.

b) Tìm nghiệm của phương trình $y'' - y' - 2y = 4xe^x$ thỏa mãn điều kiện $y'(0) = 0, y(0) = 2$.

Câu 4 (2,0 đ)

a) Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$ hội tụ hay phân kì? Tại sao?

b) Khai triển hàm $f(x) = x\ln(3 - x^2)$ thành chuỗi MacLaurin.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 3 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (2,0 đ) Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x+y+z$ với điều kiện $x^2+y^2+\frac{z^2}{2} = 1$.

Lập hàm $\Phi(x,y,z)$và giải hệ phương trình $\begin{cases} \Phi'_x = 1+2x\lambda = 0 \\ \Phi'_y = 1+2y\lambda = 0 \\ \Phi'_z = 1+\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+\frac{z^2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1, \; M_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \\ \lambda_2 = 1, \quad M_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1) \end{cases}$ $\boxed{\textbf{(1,0 đ)}}$

• Tại điểm M_1, hàm đạt cực đại có điều kiện $\boxed{\textbf{(0,5 đ)}}$. • Tại điểm M_2, hàm đạt cực tiểu $\boxed{\textbf{(0,5 đ)}}$

Câu 2 (3,0 đ)

(1,5 đ) a) Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt parabôlôit $x^2+y^2 = 3z$. Kí hiệu $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 3\sqrt{x^2+y^2}\} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 3^2\} \subset \mathbb{R}^2$ rồi chuyển sang hệ tọa độ cực

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{3}\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(r - \frac{r^2}{3}\right) r\, dr = \frac{9\pi}{2}$$

(1,5 đ) b) Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S dydz + 2dxdz - 2\,dxdy$. Biểu diễn tham số của mặt S :

$\mathbf{g}(r,\varphi) = \big(x(r,\varphi), y(r,\varphi), z(r,\varphi)\big)$, với $\begin{cases} x(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi \\ z(r,\varphi) = \frac{r^2}{3} \end{cases}$ trong đó $(r,\varphi) \in D = [0,3]\times[0,2\pi] \;\Rightarrow$

Véc tơ pháp $\mathbf{n} = (r^2\cos\varphi, r^2\sin\varphi, -r)$. $\boxed{\textbf{(1,0 đ)}}$

$$I = \iint\limits_D \vec{F}(\mathbf{g}(r,\varphi))\cdot\mathbf{n}\, drd\varphi = \iint\limits_D (1,2,-2)\cdot(r^2\cos\varphi, r^2\sin\varphi, -r)drd\varphi = \iint\limits_D (2r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi + 2r)drd\varphi$$

Suy ra $I = \iint\limits_D (2r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi)drd\varphi + \iint\limits_D 2r\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 2r\, dr = 18\pi.$ $\boxed{\textbf{(0,5 đ)}}$

Câu 3 (3,0 đ) Giải phương trình $(xe^y + y^3)y' = ye^y dx$

(1,5 đ) a) Tìm nghiệm dưới dạng $x = x(y)$. Đây là phương trình tuyến tính

$x' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y^2}{e^y} \Rightarrow x = Cy - y(y+1)e^{-y}$

(1,5 đ) b) Phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x(3-4x) \Rightarrow y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^x x(2x+1)$.
Với điều kiện đầu $y'(0) = 0, y(0) = -1 \Rightarrow \; y = e^x(2x^2+x-1)$.

Câu 4 (2,0 đ)

(1,0 đ) a) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{n(n+1)}$, ta được

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{\sqrt{e}} < 1, \text{ suy ra chuỗi hội tụ.}$$

(1,0 đ) b) $f(x) = x\ln(2+x^2) = x\left(\ln 2 + \ln(1+\dfrac{x^2}{2})\right) = x\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{2^n n}$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 4 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (2,0 đ) Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x + y - z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1$.

Như đề trước, hàm đạt cực đại có điều kiện tại $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ và đạt cực tiểu có điều kiện tại $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

Câu 2 (3,0 đ)

(1,5 đ) a) Kí hiệu $D = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ rồi chuyển sang hệ tọa độ cực

$$V = \iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{2} dxdy = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{r^3 dr}{2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

(1,5 đ) b) Biểu diễn tham số của mặt $S:\ \mathbf{g}(r,\varphi) = \big(x(r,\varphi), y(r,\varphi), z(r,\varphi)\big)$, với $\begin{cases} x(r,\varphi) = 1 + r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi \\ z(r,\varphi) = \frac{r^2+2r\cos\varphi+1}{2} \end{cases}$

trong đó $(r,\varphi) \in D = [0,1] \times [0,2\pi] \ \Rightarrow$ véc tơ pháp $\mathbf{n} = (r + r^2\cos\varphi, r^2\sin\varphi, -r)$ **(1,0 đ)**

$I = \iint\limits_D (1,1,2)\cdot\mathbf{n}\, drd\varphi = \iint\limits_D (r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi - r) drd\varphi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\, dr = -\pi.$ **(0,5 đ)**

Câu 3 (3,0 đ) Giải phương trình $(x^2 + y^3)y' = xy$

(1,5 đ) a) $y \equiv 0$ hoặc $x^2 = 2y^3 + Cy^2$

(1,5 đ) b) Phương trình $y'' - y' - 2y = 4xe^x \Rightarrow y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - (2x+1)e^x$.

Với điều kiện đầu $y'(0) = 0, y(0) = 2 \Rightarrow\ y = 2e^x(e^x - 2x - x^2)$.

Câu 4 (2,0 đ)

(1,0 đ) a) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2n-1}{2n+1}\Big)^{n^2}$, ta được

$$\sqrt[n]{a_n} = \Big(\frac{2n-1}{2n+1}\Big)^n = \Big(1 - \frac{2}{2n+1}\Big)^n = \Big(1 - \frac{2}{2n+1}\Big)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}} \to \frac{1}{e} < 1, \text{ suy ra chuỗi hội tụ.}$$

(1,0 đ) b) $f(x) = x\ln(3 - x^2) = x\left(\ln 3 + \ln(1 - \dfrac{x^2}{3})\right) = x\ln 3 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^n n}$

BỘ MÔN TOÁN | **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** | **ĐỀ SỐ 5 K56**

TRƯỜNG ĐHXD | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 a) Biết hàm $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ hệ thức $x + y + z = e^z$. Tính vi phân cấp hai d^2z.

b) Tìm cực trị hàm $z = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y$.

Câu 2 Tính tích phân kép $\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy}$ với D là miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi các đường cong $y = x^3$, $y = 3x^3$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$.

Câu 3 Xét phương trình vi phân $(2xe^x - y)dx + dy = 0$ (1).

Gọi $h(x) \neq 0$ là hàm khả vi liên tục sao cho $h(x)\big((2xe^x - y)dx + dy\big) = 0$ là phương trình vi phân toàn phần.

a) Tìm $h(x)$ và giải phương trình (1).

b) Tính tích phân đường loại hai $\int_L h(x)\big((2xe^x - y)dx + dy\big)$, trong đó L là cung trơn bất kì nối điểm $A(0, 0)$ với điểm $B(1, 2)$.

Câu 4 Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' - 2y' = 8xe^{2x}$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Câu 5 Biết chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Trong các chuỗi số dưới đây, chuỗi nào hội tụ? Tại sao?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + n} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2a_n).$$

BỘ MÔN TOÁN | **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** | **ĐỀ SỐ 6 K56**

TRƯỜNG ĐHXD | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1 a) Biết hàm $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ hệ thức $x + 2y - z = e^z$. Tính vi phân cấp hai d^2z.

b) Tìm cực trị hàm $z = x^3 + 3xy^2 - 12y - 15x$.

Câu 2 Tính tích phân kép $\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy}$ với D là miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi các đường cong $y = x^3$, $y = 2x^3$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$.

Câu 3 Xét phương trình vi phân $dx + (x - 2ye^{-y})dy = 0$ (1).

Gọi $h(y) \neq 0$ là hàm khả vi liên tục sao cho $h(y)\big(dx + (x - 2ye^{-y})dy\big) = 0$ là phương trình vi phân toàn phần.

a) Tìm $h(y)$ và giải phương trình (1).

b) Tính tích phân đường loại hai $\int_L h(y)\big(dx + (x - 2ye^{-y})dy\big)$, trong đó L là cung trơn bất kì nối điểm $A(0, 0)$ với điểm $B(2, 3)$.

Câu 4 Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' - y' - 2y = 6e^{-x}$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Câu 5 Biết chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. Trong các chuỗi số dưới đây, chuỗi nào hội tụ? Tại sao?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + n^2} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n).$$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 5 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (2,5 đ)

(**1đ**) a) $z'_x = -\dfrac{1}{1-e^z},\ z'_y = -\dfrac{1}{1-e^z} \ \Rightarrow\ z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = -\dfrac{e^z}{(e^z-1)^3} \ \Rightarrow\ d^2z = -\dfrac{(x+y+z)(dx+dy)^2}{(x+y+z-1)^3}.$

(**1,5đ**) b) Tìm cực trị hàm $z = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y$. Điểm dừng là các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y^2 = 15 \\ 24xy - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ M_1(2, \tfrac{1}{2}),\ M_2((-2, \tfrac{-1}{2}),\ M_3(1,1),\ M_4(-1,-1). \qquad \boxed{\textbf{(0,5 đ)}}$$

Hàm đạt cực tiểu tại $M_1, z(M_1) = -28$, đạt cực đại tại $M_2, z(M_2) = 28$, và không đạt cực trị tại M_3, M_4 $\boxed{\textbf{(1,0 đ)}}$

Câu 2 (2,0 đ) Tính $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{xy}$ với D là miền phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3,\ y = 3x^3,\ y^2 = 2x,\ y^2 = 3x$. Đổi biến $u = \dfrac{y}{x^3}, v = \dfrac{y^2}{x},\ (u,v) \in M = [1,3] \times [2,3]$ hay $x = u^{-2/5}v^{1/5},\ y = u^{-1/5}v^{3/5}\ \Rightarrow$

$$I = \iint\limits_M u^{3/5}v^{-4/5} \cdot J(u,v)dudv \text{ trong đó } J(u,v) = \tfrac{1}{5u^{8/5}v^{1/5}} \Rightarrow I = \tfrac{1}{5}\int\limits_1^3 \tfrac{du}{u}\int\limits_2^3 \tfrac{dv}{v} = \tfrac{1}{5}\ln 3 \cdot \ln\tfrac{3}{2}$$

(*Có thể tính* $J(x,y) = \frac{5y^2}{x^5} \Rightarrow I = \iint\limits_M \frac{1}{xy}\cdot\frac{1}{J(x,y)}dudv = \iint\limits_M \frac{x^4}{5y^3}dudv = \iint\limits_M \frac{dudv}{5uv}dudv$)

Câu 3 (2,5 đ)

(**1,5đ**) a) Hàm số $h(x)$ thỏa mãn tính chất $h'(x) = -h(x)$, ta chọn $h(x) = e^{-x}$.

Khi đó ta có $u(x,y) = \displaystyle\int_0^x 2x\,dx + \int_0^y e^{-x}dy = x^2 + ye^{-x}$. Vậy nghiệm của (1) : $x^2 + ye^{-x} = C$.

(**1,0đ**) b) $\displaystyle\int\limits_L h(x)\big((2xe^x - y)dx + dy\big) = \int\limits_L (2x - ye^{-x})dx + e^{-x}\,dy = \Big(x^2 + ye^{-x}\Big)\Big|_{(0,0)}^{B(1,2)} = 1 + \frac{2}{e}.$

Câu 4 (1,5 đ) Giải phương trình $y'' - 2y' = 8xe^{2x} \Rightarrow y = C_1 + C_2e^{2x} + e^{2x}(2x^2 - 2x)$. Với $y'(0) = 0, y(0) = 1 \Rightarrow\ y = e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)$.

Câu 5 (1,5 đ)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ do $0 < a_n^2 \le a_n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+n}$ phân kì và c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2a_n)$ hội tụ do $|\sin 2a_n| \le 2a_n$.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 6 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (2,5 đ) (**1đ**) a) $z'_x = \dfrac{1}{1+e^z},\ z'_y = \dfrac{2}{1+e^z} \ \Rightarrow\ z''_{xx} = \dfrac{-e^z}{(1+e^z)^3}, z''_{yy} = \dfrac{-4e^z}{(1+e^z)^3}, z''_{xy} = \dfrac{-2e^z}{(e^z+1)^3} \ \Rightarrow$
$d^2z = -\dfrac{(x+2y-z)(dx+2dy)^2}{(x+2y-z+1)^3}.$

(**1,5đ**) b) Hàm $z = x^3 + 3xy^2 - 12y - 15x$. Các điểm dừng $M_1(2,1),\ M_2((-2,-1),\ M_3(1,2),\ M_4(-1,-2).$ $\boxed{\textbf{(0,5 đ)}}$

Hàm đạt cực tiểu tại $M_1, z(M_1) = -28$, đạt cực đại tại $M_2, z(M_2) = 28$, và không đạt cực trị tại M_3, M_4 $\boxed{\textbf{(1,0 đ)}}$

Câu 2 (2,0 đ) Tính $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{xy}$ với D là miền phẳng giới hạn bởi $y = x^3,\ y = 2x^3,\ y^2 = 2x,\ y^2 = 4x$.

Đổi biến $u = \dfrac{y}{x^3}, v = \dfrac{y^2}{x},\ (u,v) \in M = [1,2] \times [2,4]\ \Rightarrow\ I = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{du}{u}\int\limits_2^4 \frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\ln^2 2.$

Câu 3 (2,5 đ)

(**1,5đ**) a) Hàm $h(y)$ thỏa mãn tính chất $h'(y) = h(y)$, chọn $h(y) = e^y$.Ta có nghiệm của (1) : $xe^y - y^2 = C$.

(**1,0đ**) b) $\displaystyle\int\limits_L h(y)\big(dx + (x - 2ye^{-y})dy\big) = \int\limits_L e^y dx + (xe^y - 2y)dy = \Big(xe^y - y^2\Big)\Big|_{(0,0)}^{B(2,3)} = 2e^3 - 9.$

Câu 4 (1,5 đ) Giải phương trình $y'' - y' - 2y = 6e^{-x} \Rightarrow y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2xe^{-x}$. Với $y'(0) = 0, y(0) = 1 \Rightarrow\ y = e^{2x} - 2xe^{-x}$.

Câu 5 (1,5 đ) Chuỗi a) và chuỗi c) phân kì. Chuỗi b) hội tụ.

BỘ MÔN TOÁN | **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** | **ĐỀ SỐ 7 K56**

TRƯỜNG ĐHXD | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1

a) Tính các đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^2 - y + \arctan y = 0$.

b) Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^3 + z^2$ với điều kiện $2x + 3y^2 - 2z + 1 = 0$.

Câu 2 Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz$, trong đó V là phần hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ thỏa mãn các bất đẳng thức $x^2 + y^2 - 3z^2 \leq 0, z \geq 0$.

Câu 3 Tính tích phân đường loại hai $\oint_L ydx + zdy + xdz$, với L là giao của mặt elipxôit $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $x + y = 0$. Biết rằng nếu đứng dọc theo trục Oy nhìn xuống, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4

a) Giải phương trình vi phân $y'x + y - y^2x = 0$.

b) Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = -3x$, biết một nghiệm của nó có dạng tam thức bậc hai $y = ax^2 + bx + c$.

Câu 5

a) Chứng minh chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln^4 n + 1}$ hội tụ.

b) Khai triển hàm $f(x) = \dfrac{x}{2 + x}$ thành chuỗi MacLaurin.

BỘ MÔN TOÁN | **ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2** | **ĐỀ SỐ 8 K56**

TRƯỜNG ĐHXD | *Thời gian làm bài 90 phút* | *Không sử dụng tài liệu trong phòng thi*

Câu 1

a) Tính các đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^3 + y - \arctan y = 0$.

b) Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 2x^3 + y^2 + z^2$ với điều kiện $3x^2 + 2y - 2z + 1 = 0$.

Câu 2 Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz$, trong đó V là phần hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ thỏa mãn các bất đẳng thức $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, z \geq 0$.

Câu 3 Tính tích phân đường loại hai $\oint_L ydx + zdy + xdz$, với L là giao của mặt elipxôit $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 9$ và mặt phẳng $x + z = 0$. Biết rằng nếu đứng dọc theo trục Oz nhìn xuống, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4

a) Giải phương trình vi phân $(1 + x^2)dy + (xy + y^2)dx = 0$.

b) Giải phương trình $x^2y'' - 3xy' + 4y = 2x$, biết một nghiệm của nó có dạng tam thức bậc hai $y = ax^2 + bx + c$.

Câu 5

a) Chứng minh chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln^3 n + 1}$ hội tụ.

b) Khai triển hàm $f(x) = \dfrac{x}{3 - x}$ thành chuỗi MacLaurin.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 7 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (3,0 đ)

(1,0 đ) a) Tính các đạo hàm $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x, y) = x^2 - y + \arctan y = 0$. Ta có $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x(1+y^2)}{y^2}$. Suy ra $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(1+y^2)(y^3+4x)}{y^5}$.

(2,0 đ) b) Tìm cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^3 + z^2$ với điều kiện $2x + 3y^2 - 2z + 1 = 0$. Điểm dừng của hàm $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^3 + z^2 + \lambda(2x + 3y^2 - 2z + 1)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 6y^2 + 6\lambda y = 0 \\ 2z - 2\lambda = 0 \\ 2x + 3y^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad M_1(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}), \lambda = \frac{1}{4}; M_2(-1, -1, 1), \lambda = 1; M_3(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \lambda = \frac{1}{3}$ **(0,5đ)**

Tại M_1 vi phân cấp 2 của Φ là $d^2\Phi(M_1) = 2dx^2 + \frac{6}{4}dy^2 + 2dz^2$, xác định dương. Vậy hàm đạt cực tiểu $f_{CT} = f(M_1) = \frac{1}{8}$, **(0,5đ)**

Tại M_2 vi phân cấp 2 của Φ là $d^2\Phi(M_2) = 2dx^2 - 6dy^2 + 2dz^2$, không xác định dấu. Từ điều kiện, lấy vi phân 2 vế được $2dx - 6dy - 2dz = 0$. Rút dz thay vào được $d^2\Phi(M_2) = 4(dx - \frac{3}{2}dy)^2 + 3dy^2$. Đây là dạng toàn phương xác định dương. Vậy hàm đạt cực tiểu $f_{CT} = f(M_2) = 0$, **(0,5đ)**

Tại M_3 vi phân cấp 2 của Φ là $d^2\Phi(M_2) = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2$, không xác định dấu. Từ điều kiện, lấy vi phân 2 vế được $2dx - 2dy - 2dz = 0$. Rút dy thay vào được $d^2\Phi(M_2) = 4dxdz)$. Đây là dạng toàn phương không xác định dấu. Vậy hàm không đạt cực trị tại M_3. **(0,5đ)**

Chú ý: *Ta có thể rút z từ điều kiện thay vào hàm f để tìm cực trị tự do cho hàm 2 biến số.*

Câu 2 (2,0 đ) Giao của mặt cầu và mặt nón là đường tròn $(C):\ x^2 + y^2 = 3$ thuộc mặt phẳng $z = 1$. Bằng cách đổi biến sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ miền V có các biến mới $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 2$ và $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$.

Jacôbiên của phép biến đổi $J = r^2\sin\theta$. Do vậy tích phân cần tính

$$I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{7}{24}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^4\, dr = \frac{56\pi}{15}.$$

Câu 3 (1,5 đ) Tính tích phân đường $\oint_L ydx + zdy + xdz$, với L là giao của mặt elipxoit $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $x + y = 0$. Tham số hóa đường cong $L: x = \frac{3}{2}\cos t, y = -\frac{3}{2}\cos t, z = 3\sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Tính trực tiếp tích phân đường, chú ý tới hướng đường cong ngược với chiều tăng của t

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = -\int_0^{2\pi}(...)dt = -9\pi.$$

Câu 4 (2,0 đ)

(1,0 đ) a) $y'x + y - y^2x = 0$ có dạng Bernoulli. Đặt $z = y^{-1}$, ta có $z' - \dfrac{z}{x} = -1, \ \Rightarrow\ 1 = Cxy - xy\ln x$

(1,0 đ) b) Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = -3x$, biết một nghiệm của nó có dạng tam thức bậc hai $y = ax^2 + bx + c$.

Thay vào phương trình ta được $-3bx - 4c = -3x, \forall x \Leftrightarrow b = 1, c = 0$. Suy ra $y = ax^2 + x$ là nghiệm với mọi hằng a. Có nghĩa là $y_1 = x, y_2 = x^2 + x$ là các nghiệm riêng. Do đó $y = y_2 - y_1 = x^2$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng. Ta tìm được nghiệm thứ 2 của phương trình thuần nhất là $y = x^{-2}$. Vậy nghiệm tổng quát của pt đầu là: $y = x + C_1x^2 + C_2x^{-2}$.

Câu 5 (1,5 đ)

(0,5 đ) a) Chứng minh chuỗi sau hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln^4 n + 1}$. Ta có $u_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln^4 n + 1} \sim \dfrac{1}{(\ln^4 n + 1)n}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln^4 n + 1)n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân. Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

(1,0 đ) b) $f(x) = \dfrac{x}{2+x} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}}$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ SỐ 8 GIẢI TÍCH 2

Câu 1 (3,0 đ)

(1,0 đ) a) Tính các đạo hàm $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^3 + y - \arctan y = 0$. Ta có $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2(1+y^2)}{y^2}$. Suy ra $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6x(1+y^2)(y^3+3x^3)}{y^5}$.

(2,0 đ) a) Tìm cực trị có điều kiện của hàm $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + z^2$ với điều kiện $3x^2 + 2y - 2z + 1 = 0$. Điểm dừng của hàm $\Phi(x,y,z) = 2x^3 + y^2 + z^2 + \lambda(3x^2 + 2y - 2z + 1)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 6x^2 + 6\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 2z - 2\lambda = 0 \\ 3x^2 + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad M_1(0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \lambda = \frac{1}{4}; M_2(-1,-1,1), \lambda = 1; M_3(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \lambda = \frac{1}{3}$ **(0,5đ)**

Tại M_1 vi phân cấp 2 của Φ là $d^2\Phi(M_1) = \frac{6}{4}dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2$, xác định dương. Vậy hàm đạt cực tiểu $f_{CT} = f(M_1) = \frac{1}{8}$, **(0,5đ)**

Tại M_2 vi phân cấp 2 của Φ là $d^2\Phi(M_2) = -6dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2$, không xác định dấu. Từ điều kiện, lấy vi phân 2 vế được $-6dx + 2dy - 2dz = 0$. Rút dz thay vào được $d^2\Phi(M_2) = 3dx^2 + 4(dy - \frac{3}{2}dx)^2$. Đây là dạng toàn phương xác định dương. Vậy hàm đạt cực tiểu $f_{CT} = f(M_2) = 0$, **(0,5đ)**

Tại M_3 vi phân cấp 2 của Φ là $d^2\Phi(M_2) = -2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2$, không xác định dấu. Từ điều kiện, lấy vi phân 2 vế được $-2dx + 2dy - 2dz = 0$. Rút dx thay vào được $d^2\Phi(M_2) = 4dydz)$. Đây là dạng toàn phương không xác định dấu. Vậy hàm không đạt cực trị tại M_3. **(0,5đ)**

Câu 2 (2,0 đ) Giao của mặt cầu và mặt nón là đường tròn $(C): \ x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ thuộc mặt phẳng $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bằng cách đổi biến sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ miền V có các biến mới $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$ và $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

Jacôbiên của phép biến đổi $J = r^2\sin\theta$. Do vậy tích phân cần tính

$$I = \iiint_V z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{4-\sqrt{2}}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4\, dr = \frac{(4-\sqrt{2})\pi}{30}.$$

Câu 3 (1,5 đ) Tính tích phân đường $\oint_L ydx + zdy + xdz$, với L là giao của mặt elipxoit $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 9$ và mặt phẳng $x + z = 0$. Tham số hóa đường cong $L: x = \frac{3}{2}\cos t, y = 3\sin t, z = -\frac{3}{2}\cos t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Tính trực tiếp tích phân đường, chú ý tới hướng đường cong phù hợp với chiều tăng của t

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} (...)dt = -9\pi.$$

Câu 4 (2,0 đ)

(1,0 đ) a) Phương trình vi phân $(1+x^2)dy + (xy + y^2)dx = 0$ có dạng Bernoulli $\dfrac{1}{y} = x + C\sqrt{1+x^2}$

(1,0 đ) b) Giải phương trình $x^2y'' - 3xy' + 4y = 2x$

Thay vào phương trình ta được $bx + 4c = 2x, \forall x \Leftrightarrow b = 2, c = 0$. Suy ra $y = ax^2 + 2x$ là nghiệm với mọi hằng a. Có nghĩa là $y_1 = 2x, y_2 = x^2 + 2x$ là các nghiệm riêng. Do đó $y = y_2 - y_1 = x^2$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng. Ta tìm được nghiệm thứ 2 của phương trình thuần nhất là $y = x^2\ln x$. Vậy nghiệm tổng quát của pt đầu là: $y = 2x + C_1x^2 + C_2x^2\ln x$.

Câu 5 (1,5 đ)

(0,5 đ) a) Chứng minh chuỗi hội tụ như đề 7.

(1,0 đ) b) $f(x) = \dfrac{x}{3-x} = \dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}$