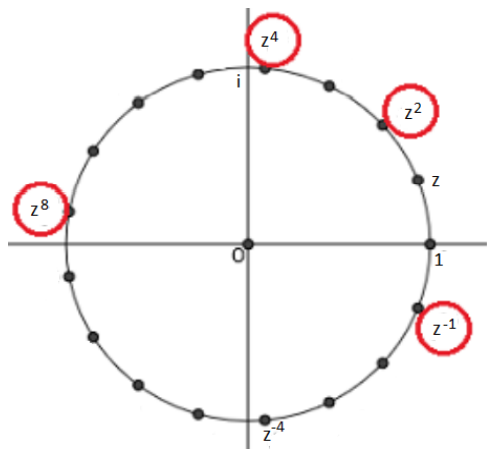


# Đa giác đều 17 cạnh và cách dựng

## I. Tính chất

Để trình bày cách dựng đa giác đều 17 cạnh, ta sẽ giới thiệu một số tính chất của nó. Trước tiên ta gắn các đỉnh của giác đều 17 cạnh với các số phức  $1, z, z^2, z^3, \dots, z^{15} = z^{-2}, z^{16} = z^{-1}$ , trong đó



$$z = \cos \frac{2\pi}{17} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{17}$$

Ta đưa vào các kí hiệu

$$\alpha = z + z^{-1} \quad (1)$$

$$\beta = z + z^4 + z^{-1} + z^{-4} \quad (2)$$

$$\gamma = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + z^{-8} \quad (3)$$

$$\gamma' = z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{-3} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} \quad (4)$$

Hiển nhiên  $\gamma + \gamma' = -1$ .

Mặt khác nếu nhân bưng (3) và (4), dễ dàng nhận thấy

$$\gamma \cdot \gamma' = 4 \cdot \sum_{i=1}^{16} z^i = -4.$$

Vậy  $\gamma$  và  $\gamma'$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $x^2 + x - 4 = 0$ . Từ hình vẽ trên suy ra

$$\gamma = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{17} + \cos \frac{4\pi}{17} + \cos \frac{8\pi}{17} + \cos \frac{16\pi}{17} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{17} - 1).$$

Tương tự ta có thể tính  $\beta$  theo  $\gamma$ . Kí hiệu  $\beta' = \gamma - \beta = z^2 + z^8 + z^{-2} + z^{-8}$  và làm tương tự như trên ta được  $\beta \cdot \beta' = -1$ . Vậy  $\beta$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $x^2 - \gamma x - 1 = 0$ . Suy ra

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4} \right) = \frac{1}{4} \left( -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right). \quad (5)$$

Cuối cùng ta tính  $\alpha$  theo  $\beta$ . Kí hiệu  $\alpha' = \beta - \alpha = z^4 + z^{-4}$ , khi đó

$$\alpha \cdot \alpha' = (z + z^{-1})(z^4 + z^{-4}) = z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5}.$$

Giả sử  $\alpha \cdot \alpha' = u$ , ta chọn  $v$  sao cho  $u + v = \gamma'$  hay  $v = z^6 + z^7 + z^{-6} + z^{-7}$ . Khi đó

$$u \cdot v = (z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5})(z^6 + z^7 + z^{-6} + z^{-7}) = -1.$$

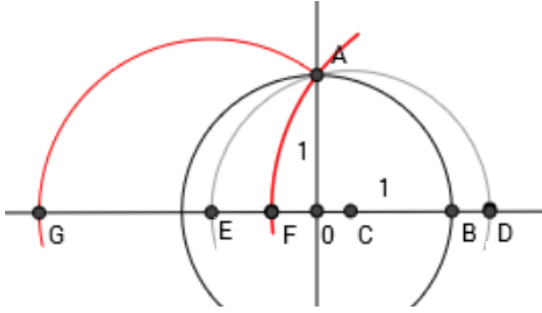
Vậy  $u, v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - \gamma' x - 1 = 0$ . Dựa vào hình vẽ trên  $u > 0$ , suy ra

$$u = \frac{1}{2} \left( \gamma' + \sqrt{\gamma'^2 + 4} \right) = \frac{1}{4} \left( -1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right). \quad (6)$$

Lặp lại cách làm như trên do  $\alpha + \alpha' = \beta, \alpha \cdot \alpha' = u$  ta được  $\alpha$  và  $\alpha'$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 - \beta x + u = 0$  hay

$$\alpha = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4u}}{2} \quad \text{và} \quad \alpha' = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4u}}{2}. \quad (7)$$

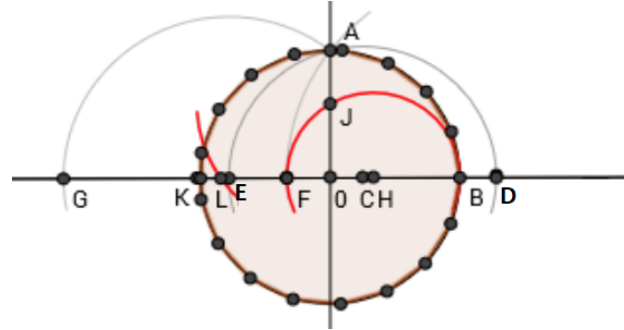
## II. Cách dựng đa giác đều 17 cạnh



Các bước tiếp theo:

5. Đường tròn đường kính  $FB$  cắt trục tung tại  $J$
6. Đặt trung điểm  $K$  của  $OG$ .
7. Đặt đường tròn tâm  $J$  bán kính  $OK$ , nó cắt trục hoành tại  $L$ .

Khi đó độ dài đoạn  $KL$  bằng cạnh của đa giác đều 34 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị.  
 Từ đó ta dễ dàng dựng được các đỉnh của đa giác đều 17 cạnh.



Trong hệ trục tọa độ Descartes vẽ đường tròn đơn vị, tâm là gốc tọa độ  $O$ . Đường tròn tâm  $O$  cắt các trục tọa độ tại  $A$  và  $B$ . (Hình bên).

1. Đặt điểm  $C$  trên trục hoành sao cho  $OC = \frac{1}{4}OB$ .
2. Đặt đường tròn tâm  $C$  bán kính  $CA$ , nó cắt trục hoành tại  $D$  và  $E$ .
3. Đặt đường tròn tâm  $D$  bán kính  $DA$ , nó cắt trục hoành tại  $F$ .
4. Đặt đường tròn tâm  $E$  bán kính  $EA$ , nó cắt trục hoành tại  $G$ .

### III. Chứng minh sự đúng đắn của cách dựng đa giác đều 17 cạnh

Dựa theo cách dựng ở trên, ta sẽ tính độ dài đoạn  $KL$  và chứng minh độ dài đó bằng cạnh của đa giác đều 34 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị.

1. Ta có  $OE = OA - OC = \sqrt{1 + (\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$
2. Dễ dàng tính được

$$OG = OE + EA = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}). \text{ Vậy } OG = \beta \text{ theo công thức (5).}$$

3. Tương tự  $OF = DA - OD = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}) = u$  theo (6).

3. Tính  $KL = OK - LJ = \frac{OG}{2} - \sqrt{JL^2 - JO^2} = \frac{OG}{2} - \sqrt{JL^2 - JH^2 + OH^2}$ , trong đó  $H$  là tâm đường tròn đường kính  $FB$  (hình trên). Vậy  $KL = \frac{OG}{2} - \sqrt{\left(\frac{OG}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+OF}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-OF}{2}\right)^2} = \frac{OG}{2} - \sqrt{\left(\frac{OG}{2}\right)^2 - OF}$  hay  $KL = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - u} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4u}}{2}$ . Như vậy  $KL = \alpha'$  theo công thức (7) cuối mục I. trong đó  $\alpha'$  được định nghĩa  $\alpha' = z^4 + z^{-4}$ .

Hình vẽ bên chỉ ra  $\alpha' = z^4 + z^{-4}$  là độ dài cạnh đáy tam giác cân có đỉnh là  $z^4$ , cạnh bên bằng đơn vị và góc ở đỉnh bằng  $\frac{\pi}{17}$ . Đó chính là độ dài cạnh của đa giác đều 34 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị.

