Dãy số Fibonacci và các tính chất

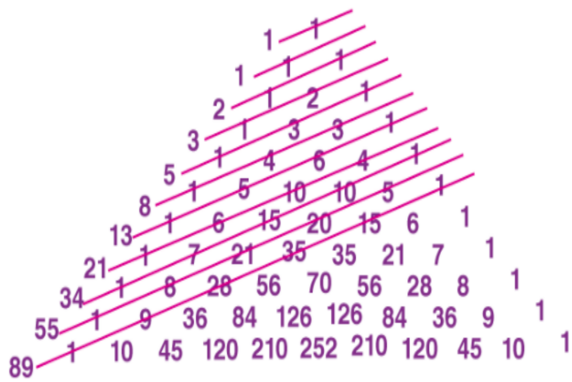
Định nghĩa *Dãy Fibonacci là dãy các số tự nhiên, kí hiệu* $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ *thỏa mãn*

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, \cdots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \;\; \textit{với mọi} \;\; n \geq 2.$$

Ta có thể liệt kê một loạt các số hạng đầu của dãy Fibonacci, chú ý đến tính chất tổng 2 số hạng liên tiếp nhau bằng số hạng đứng liền kề ngay sau 2 số hạng đó

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

1. Hoàn toàn tương tự như việc sử dụng tam giác Pascal để tính các hệ số khi khai triển *nhị thức Newton*, các số hạng của dãy Fibonacci cũng được tính bằng việc *cộng các số nằm dọc theo các đoạn thẳng chéo xiên* song song (màu đỏ) trong tam giác Pascal, xem hình vẽ bên dưới



Chú ý đến tính chất của các số tổ hợp $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, ta có thể kiểm tra tổng các số nằm trên đoạn thẳng kẻ xiên cuối cùng bằng tổng các số nằm trên 2 đoạn thẳng kề trên nó.

$$1 + 8 = 9, 7 + 21 = 28, 15 + 20 = 35, 10 + 15 = 25.$$

Tính chất này của dãy Fibonacci có thể viết dưới dạng $F_{n+1} = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-i}^i$.

2. Bây giờ chúng ta sẽ tính số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci. Kí hiệu véc tơ $\{\mathbf{a}_n = (F_{n-1}, F_n)\}$ và ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Hiển nhiên $\mathbf{a}_2 = A\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 = A\mathbf{a}_2 = A^2\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n = A^{n-1}\mathbf{a}_1$. Để tính A^{n-1} ta chéo hóa ma trận A, $A = P \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ (trong đó $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ là 2 giá trị riêng của A). Vậy

$$A^n = P \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đẳng thức $\mathbf{a}_n = A^{n-1}\mathbf{a}_1$, suy ra $F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Thay $n = 0$ và $n = 1$ vào đây ta tính được C_1, C_2. Vậy số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (*)$$

3. Sử dụng $(*)$ hoặc bằng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh nhiều hệ thức khác của các số Fibonacci. Chẳng hạn

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \;\; \text{hay} \quad F_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_i.$$

4. Chuỗi lũy thừa $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$ được gọi là *hàm sinh* của dãy Fibonacci. Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $F_n < 2^n$ suy ra chuỗi hội tụ tuyệt đối với mọi $|x| < \frac{1}{2}$. Tổng của chuỗi được tính như sau

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k \\ &= x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1}x^k + F_{k-2}x^k) \\ &= x + x\sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}x^{k-2} \\ &= x + (x + x^2)F(x) \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

5. Khai triển hàm sinh thành chuỗi Maclaurin $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} &= \frac{x}{(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big] x^n. \end{aligned}$$

Đây là một cách khác sử dụng khai triển hàm sinh để tính số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci như đã chỉ ra trong $(*)$.

6. Gọi $x = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x}$ hay $x^2 - x - 1 = 0, x > 0$.
Suy ra $x = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Người ta còn gọi giới hạn này là *tỉ số vàng*. Nó xấp xỉ $1,618034...$

Tam giác cân ABC trích từ ngũ giác đều như hình dưới đây có tỉ số các độ dài giữa cạnh bên và đáy $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là tỉ số vàng.