MỤC LỤC

GIẢI TÍCH II

Sách dùng cho sinh viên trường Đại học xây dựng
và sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng kĩ thuật

Chương 1

Hàm số nhiều biến số, hàm véc tơ nhiều biến số

1.1 Không gian $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Chuẩn và khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$

Phù hợp với kí hiệu trong giáo trình Đại số và Giải tích I, trong sách này ta kí hiệu $\mathbb{R}$ là tập các số thực, $\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ với các phép toán

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, ..., u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n)$$

với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. Các véc tơ thuộc $\mathbb{R}^n$, trong giáo trình này còn được gọi là các điểm trong không gian $\mathbb{R}^n$ và ngoài các kí hiệu ta thường sử dụng là các chữ in đậm như $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, ...$ ta còn kí hiệu chúng bằng các chữ in hoa như $M, N, A, B, ...$

Không gian $\mathbb{R}^n$ là không gian Ơclit với tích vô hướng

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Độ dài của véc tơ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, kí hiệu $|\mathbf{u}|$, được gọi là chuẩn trong không gian $\mathbb{R}^n$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Chuẩn của véc tơ $\mathbf{u}$ tính theo công thức trên còn được gọi là chuẩn Oclit trong $\mathbb{R}^n$. Thực chất chuẩn của véc tơ là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, nó có các tính chất

- Với mọi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{u}| \geqslant 0$, đồng thời $|\mathbf{u}| = 0$ khi và chỉ khi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- $|\lambda \mathbf{u}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{u}|$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ mọi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.
- $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (bất đẳng thức tam giác).

Chú ý rằng ánh xạ $|\mathbf{x}| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định

$$|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \qquad \big(\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\big)$$

cũng thoả mãn các tính chất trên như chuẩn Oclit, nó còn được gọi là *chuẩn max* trong $\mathbb{R}^n$. Lưu ý rằng ta có thể có nhiều chuẩn khác nhau trên không gian $\mathbb{R}^n$, trong giáo trình này ta hạn chế chỉ xét chuẩn Oclit.

Để xây dựng khái niệm giới hạn, khái niệm cơ bản của giải tích trên $\mathbb{R}^n$, cũng như trong giải tích I, ta cần khái niệm về *khoảng cách* giữa hai điểm bất kì trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Khoảng cách giữa hai điểm $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ được xác định

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Từ các tính chất của chuẩn, ta suy ra các tính chất của khoảng cách

- Với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$ và $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ khi và chỉ khi $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (bất đẳng thức tam giác).

Chú ý khoảng cách giữa hai điểm $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ có thể được xác định thông qua chuẩn max

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

Khoảng cách d' cũng thoả mãn các tính chất trên.

1.1.2 Lân cận, tập đóng, tập mở và tập bị chặn

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử* $\mathbf{a}$ *là điểm thuộc* $\mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ *là số thực dương tuỳ ý. Người ta gọi tập hợp*

$$U_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\} \quad \textit{hoặc} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta\}$$

là lân cận bán kính $\delta > 0$ *của điểm* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *(hoặc còn gọi là hình cầu mở tâm* $\mathbf{a}$ *bán kính* δ*).*

Nếu $V \subset \mathbb{R}^n$ *và* V *chứa một lân cận bán kính* $\delta > 0$ *nào đó của điểm* $\mathbf{a}$ *thì* V *được gọi là lân cận của* $\mathbf{a}$.

Chú ý rằng lân cận của một điểm trong $\mathbb{R}^n$ cũng có thể được định nghĩa thông qua chuẩn max. Ta dễ dàng chứng minh được hệ thống các lân cận của một điểm luôn như nhau cho dù nó được xác định theo chuẩn nào (chuẩn Ơclit hay chuẩn max) trong $\mathbb{R}^n$.

Hiển nhiên hợp hoặc giao của hai lân cận của điểm $\mathbf{a}$ cũng là lân cận của $\mathbf{a}$.

Hoàn toàn giống như các khái niệm tôpô trong $\mathbb{R}$, ta có thể nói đến điểm tụ, điểm cô lập, tập đóng, tập mở trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Giả sử $H \subset \mathbb{R}^n$ là tập con trong $\mathbb{R}^n$. Điểm $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *điểm tụ* của tập H nếu mọi lân cận của $\mathbf{a}$ chứa vô hạn các phần tử của H (điểm tụ của tập H có thể thuộc H cũng có thể không thuộc tập H). Dễ dàng chứng minh $\mathbf{a}$ là *điểm tụ của tập* H *khi và chỉ khi mọi lân cận của* $\mathbf{a}$ *chứa ít nhất một phần tử khác* $\mathbf{a}$ *thuộc* H.

Chẳng hạn $U_\delta(\mathbf{a})$ là hình cầu mở tâm $\mathbf{a}$ bán kính δ. Mọi điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn tính chất $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \delta$ (hay $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \delta$) là điểm tụ của hình cầu đó.

$H \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập đóng* trong $\mathbb{R}^n$ nếu nó chứa mọi điểm tụ (nếu có) của H. (Ta quy ước tập $\emptyset$ là tập đóng).

Tập hợp chỉ gồm hữu hạn phần tử là tập đóng, đặc biệt tập

$$B_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leqslant \delta\} \quad (\text{hay} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leqslant \delta\})$$

là tập đóng. $B_\delta(\mathbf{a})$ còn được gọi là *hình cầu đóng tâm* $\mathbf{a}$ *bán kính* δ.

Ta dễ dàng chứng minh được

- Hợp của hữu hạn các tập đóng là tập đóng.

• Giao của hữu hạn hoặc vô hạn các tập đóng cũng là tập đóng.

Điểm $\mathbf{a} \in H$ được gọi là *điểm cô lập* của tập $H \subset \mathbb{R}^n$ nếu tồn tại một lân cận $U_\delta(\mathbf{a})$ của $\mathbf{a}$ sao cho $U_\delta(\mathbf{a}) \cap H = \{\mathbf{a}\}$.

Điểm $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *điểm biên* của tập H nếu một lân cận bất kì của $\mathbf{a}$ đều chứa ít nhất một điểm thuộc H và một điểm không thuộc H. Điểm $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *điểm ngoài* của tập H nếu tồn tại một lân cận $U_\delta(\mathbf{b})$ của $\mathbf{b}$ sao cho $U_\delta(\mathbf{b}) \cap H = \emptyset$.

Điểm $\mathbf{a} \in A$ được gọi là *điểm trong* của tập $A \subset \mathbb{R}^n$ nếu tồn tại một lân cận $U_\delta(\mathbf{a})$ của $\mathbf{a}$ sao cho lân cận $U_\delta(\mathbf{a})$ được chứa trong tập A ($U_\delta(\mathbf{a}) \subset A$).

Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập mở* nếu mọi phần tử của A đều là điểm trong của A. Nói cách khác với mỗi $\mathbf{a} \in A$ tồn tại một lân cận $U_\delta(\mathbf{a})$ sao cho $U_\delta(\mathbf{a}) \subset A$.
Ta quy ước tập $\emptyset$ là tập mở.

Hình cầu mở

$$U_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\} \quad (\text{hay} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta\})$$

là tập mở.
Như vậy hình cầu mở là tập mở và ở ví dụ trên ta đã biết hình cầu đóng là tập đóng.
Tập hợp sau trong $\mathbb{R}^n$ viết dưới dạng tích Đề các của n khoảng

$$H = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \quad a_i < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, ..., n$$

là tập mở và H được gọi là *hình hộp* trong $\mathbb{R}^n$.
Tương tự tích Đề các của n đoạn thẳng

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad a_i < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, ..., n$$

là tập đóng và được gọi là *hình hộp đóng* trong $\mathbb{R}^n$.
Ta cũng dễ dàng chứng minh được
• Giao của hữu hạn các tập mở là tập mở.
• Hợp của hữu hạn hoặc vô hạn các tập mở cũng là tập mở.

Cuối cùng ta có định lí sau, chứng minh tương tự như trong $\mathbb{R}$

Định lí 1.1.1 *Phần bù (trong $\mathbb{R}^n$) của tập mở là tập đóng và phần bù của tập đóng là tập mở.*

Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *bị chặn* (hay *tập giới nội*) trong $\mathbb{R}^n$ nếu tập đó được chứa trong một hình cầu nào đó $\Leftrightarrow$ A được chứa trong một hình cầu tâm $\mathbf{0}$ bán kính $K > 0$, $\big(A \subset U_K(\mathbf{0})\big)$. Nói cách khác tồn tại số $K > 0$ sao cho $|\mathbf{a}| \leqslant K$ với mọi $\mathbf{a} \in A$.

1.1.3 Giới hạn của dãy điểm trong R^n

Cũng như trong giải tích hàm một biến, giới hạn là khái niệm cơ sở ban đầu. Mọi vấn đề của giải tích đều dựa trên khái niệm giới hạn. Để thuận tiện trong kí hiệu và không gây nhầm lẫn, ta viết $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}, ...$ hay $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy các điểm trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.1.2 *Dãy* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ *hội tụ và có giới hạn bằng* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*, kí hiệu:*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a} \quad \textit{hoặc} \quad \mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{a},$$

nếu $\lim\limits_{k\to\infty} |\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}| = 0.$

Ta cũng có thể nói đầy đủ hơn $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{a}$ *khi* $k \to \infty$ *nếu cho trước* $\epsilon > 0$ *tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên* $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *(*n_0 *phụ thuộc vào* ϵ*) sao cho với mọi* $k \geqslant n_0$ *ta có:*

$$|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}| < \epsilon.$$

Dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_1^{\infty}$ *không hội tụ được gọi là dãy phân kì.*

Định nghĩa trên tương đương với khẳng định mọi dãy điểm (véc tơ) trong $\mathbb{R}^n$ có giới hạn bằng $\mathbf{0}$ khi và chỉ khi chuẩn của các véc tơ đó dần tới 0.
Định nghĩa giới hạn của dãy điểm nêu trên có thể diễn đạt theo ngôn ngữ lân cận như sau: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a}$ *khi và chỉ khi một lân cận bất kì của điểm* $\mathbf{a}$ *chứa mọi số hạng của dãy* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *trừ hữu hạn số hạng đầu.*

Hoàn toàn giống như trong tập các số thực $\mathbb{R}$, ta có thể chứng minh dãy điểm $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ có giới hạn duy nhất nếu dãy hội tụ. Hơn nữa định lí sau cho ta mối liên hệ giữa giới hạn của dãy điểm và giới hạn từng thành phần

Định lí 1.1.2 *Với mọi dãy* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ $\big(\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})\big)$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = (a_1, a_2, ..., a_n) \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \;\forall i = 1, 2, ..., n$$

Chứng minh. Thật vậy, kí hiệu $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ và theo định nghĩa của chuẩn

$$|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \cdots + (x_n^{(k)} - a_n)^2},$$

suy ra

$$|x_i^{(k)} - a_i| \leqslant |\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}| \leqslant |x_1^{(k)} - a_1| + \cdots + |x_n^{(k)} - a_n|.$$

Từ bất đẳng thức thứ nhất, theo nguyên lí kẹp về giới hạn dãy số nếu $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a}$ suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \ \forall i = 1, 2, ..., n.$

Ngược lại theo bất đẳng thức thứ hai, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - a_i| \to 0$ kéo theo

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a}. \quad \blacksquare$$

Định lí trên khẳng định việc tìm giới hạn của dãy điểm $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathbb{R}^n$ tương đương với việc tìm giới hạn của các thành phần tọa độ $x_i^{(k)}$ của $\mathbf{x}^{(k)}$. Do vậy ta còn nói sự hội tụ của dãy điểm $\mathbf{x}^{(k)}$ trong $\mathbb{R}^n$ là sự *hội tụ theo tọa độ*. Như vậy giới hạn của dãy điểm trong $\mathbb{R}^n$ (nếu tồn tại giới hạn) là *duy nhất* và có tính chất *tuyến tính* cũng như dãy số trong $\mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} + \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^{(k)}$$
$$\lim_{k\to\infty} \alpha \cdot \mathbf{x}^{(k)} = \alpha \cdot \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, các vấn đề tương tự như nguyên lí kẹp, giới hạn dãy số đơn điệu và bị chặn trong $\mathbb{R}$, không có ý nghĩa vì các điểm trong $\mathbb{R}^n$ không được sắp thứ tự. Tuy nhiên ta vẫn có khái niệm *dãy Cauchy*.

Định nghĩa 1.1.3 *Dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}^n$ nếu cho trước $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên $n_0 = n_0(\epsilon) \in N$ (n_0 phụ thuộc vào ϵ) sao cho với mọi $k, m \geqslant n_0$ ta có:*

$$|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(m)}| < \epsilon.$$

Rõ ràng dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi các dãy thành phần

$$\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

cũng là các dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Do vậy theo định lí 1.1.2 ta có

Định lí 1.1.3 *Dãy* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Khái niệm về dãy con của một dãy điểm trong $\mathbb{R}^n$ không có gì khác với dãy con trong $\mathbb{R}$.

Định lí 1.1.4 (Bolzano) *Mọi dãy giới nội trong* $\mathbb{R}^n$ *đều chứa một dãy con hội tụ.*

Chứng minh. Giả sử dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathbb{R}^n$ là dãy bị chặn. Dãy số $\{x_1^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ (thành phần thứ nhất của $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$) bị chặn, theo định lí Bolzano về dãy số, dãy đó chứa một dãy con $\{x_1^{(k_1)}\}_{k_1=1}^{\infty}$ hội tụ.
Xét một dãy con (với các chỉ số k_1 vừa được phát hiện) của dãy $\{\mathbf{x}^{(k_1)}\}_{k_1=1}^{\infty}$. Thành phần thứ hai của nó cũng bị chặn, áp dụng định lí Bolzano về dãy số, nó cũng chứa một dãy con $\{x_2^{(k_2)}\}_{k_2=1}^{\infty}$ hội tụ.
Cứ như vậy, sau n bước lặp lại, ta được một dãy con $\{\mathbf{x}^{(k_n)}\}_{k_n=1}^{\infty}$ của dãy đã cho ban đầu, mọi thành phần của dãy con này đều hội tụ. Theo định lí 1.1.2, dãy con đó hội tụ trong $\mathbb{R}^n$, đ.p.c.m. ■

1.2 Ánh xạ, giới hạn và liên tục của ánh xạ

1.2.1 Giới hạn của ánh xạ

Ánh xạ $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ trong đó $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *hàm véc tơ n biến.* Trường hợp riêng $m = 1$, ánh xạ $f : A \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm số n biến,* hay *hàm thực n biến số.*

Ví dụ Ánh xạ $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(x, y) = \big(\ln x + y, \sin(x^2 + y^2), x - y^2\big)$ là hàm véc tơ 2 biến nhận các giá trị trong R^3.
Ánh xạ $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\pi(x, y, z) = y$ là phép chiếu lên thành phần thứ hai (trục tung). π là hàm thực ba biến số.
Tổng quát hơn $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k$, phép chiếu lên thành phần thứ k, là hàm thực n biến số.
Với hàm véc tơ n biến $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$

$$f_k = \pi_k \circ \mathbf{f}$$

được gọi là *thành phần thứ k của f* và hiển nhiên $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$. Hàm thành phần $f_k : A \to \mathbb{R}$ là hàm thực n biến số.

Định nghĩa 1.2.1 *Cho hàm véc tơ n biến $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a}$ là một điểm tụ của A. Ta nói giới hạn của hàm $\mathbf{f}$ bằng $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ trong quá trình $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, kí hiệu $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ nếu*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho khi } \mathbf{x} \text{ thỏa mãn } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ thì } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon.$$

Nói cách khác với lân cận $U_\varepsilon(\mathbf{b})$ tuỳ ý của $\mathbf{b}$, tồn tại một lân cận $U_\delta(\mathbf{a})$ của $\mathbf{a}$ sao cho khi $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ và $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ ta luôn có $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U_\varepsilon(\mathbf{b})$.

Cũng như giới hạn hàm thực một biến số, ta dễ dàng chứng minh

Định lí 1.2.1 *Nếu hàm $\mathbf{f}$ có giới hạn trong quá trình $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ khi đó giới hạn của hàm là duy nhất.*

Chứng minh hoàn toàn như chứng minh nguyên lí chuyển đổi giới hạn giữa hàm thực một biến số và dãy số, ta có định lí tương tự

Định lí 1.2.2 *Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ là với mọi dãy điểm $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \to \mathbf{a}$, dãy giá trị tương ứng $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ cũng tồn tại giới hạn. (Suy ra các giới hạn đó phải bằng nhau và cùng bằng $\mathbf{b}$, $\lim\limits_{\mathbf{k}\to\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b}$.)*

Do hàm véc tơ n biến $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ là một bộ có thứ tự gồm m hàm thành phần, theo định lí 1.1.2

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., m$$

trong đó các số thực b_i là các thành phần tọa độ của $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)$ trong $\mathbb{R}^m$. Từ nhận xét này, trong thực hành việc tìm giới hạn hàm véc tơ sẽ đơn giản hơn nếu đưa về bài toán tìm giới hạn các hàm thành phần f_i, chúng là các hàm thực n biến số.

Chú ý rằng song song với kí hiệu $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, với $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ người ta còn sử dụng kí hiệu dưới đây về giới hạn hàm véc tơ n biến trong quá trình $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \to \mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_n\to a_n}} \mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{b}.$$

Sử dụng định lí 1.2.2, ta dễ dàng chứng minh giới hạn hàm véc tơ có tính tuyến tính

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\alpha\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \alpha\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Với hàm thực nhiều biến số, cũng sử dụng định lí 1.2.2 và các kết quả liên quan tới giới hạn dãy số thực của giải tích hàm một biến, không mấy khó khăn để chứng minh khẳng định sau

- Giả thiết f, g là các hàm thực n biến số, tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = u$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = v$. Khi đó

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})\big) = u\cdot v, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0).$$

- Nguyên lí kẹp vẫn đúng với hàm số nhiều biến số $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$u(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{x}), \ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} u(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} v(\mathbf{x}) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

- Đặc biệt tích của một VCB và hàm giới nội cũng là VCB trong cùng một quá trình. Cụ thể hơn, giả thiết $\alpha, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f là hàm bị chặn tại một lân cận nào đó của $\mathbf{a}$ và $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \alpha(\mathbf{x}) = 0$, khi đó

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\big(\alpha(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x})\big) = 0.$$

Lưu ý rằng nếu $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ta cũng nói hàm véc tơ $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ là VCB trong quá trình $\mathbf{x}\to\mathbf{a}$ và kí hiệu $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(\mathbf{x})$.

Người ta cũng đưa vào khái niệm về *dãy điểm dần ra vô cùng* cũng như khái niệm *giới hạn hàm khi biến tiến dần ra vô cùng*

Định nghĩa 1.2.2

• *Ta nói dãy điểm* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *dần ra vô cùng nếu dãy số* $\{|\mathbf{x}^{(k)}|\}_{k=1}^{\infty}$ *tiến tới vô cùng* $\lim\limits_{k\to\infty}|\mathbf{x}^{(k)}| = +\infty$.

• *Ta nói giới hạn của hàm* $\mathbf{f}$ *bằng* $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ *trong quá trình* $\mathbf{x}$ *dần ra vô cùng, kí hiệu* $\lim\limits_{|\mathbf{x}|\to\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *nếu*

$$\forall\epsilon > 0, \exists K > 0 \textit{ sao cho khi } \mathbf{x} \textit{ thỏa mãn } |\mathbf{x}| > K \textit{ thì } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon.$$

Hoặc tương đương với nó, diễn đạt theo ngôn ngữ dãy, với bất kì dãy điểm $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *dần ra vô cùng, dãy giá trị hàm tương ứng* $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\}$ *luôn dần tới* $\mathbf{b}$.

Nhận xét rằng dãy điểm $\{\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})\}$ trong $\mathbb{R}^n$ dần ra vô cùng khi và chỉ khi dãy số $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i^{(k)}|$ (hoặc $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i^{(k)}|$) có giới hạn bằng vô cùng.
Trong các ví dụ về giới hạn hàm hai biến (hoặc ba biến) quá trình $\mathbf{x} = (x, y)$ $\big($hoặc $\mathbf{x} = (x, y, z)\big)$ dần ra vô cùng thường được cho cụ thể hơn. Chẳng hạn các giới hạn dưới đây được xét trong quá trình $\mathbf{x}$ tiến ra vô cùng theo các dạng khác nhau

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y) \quad \text{hoặc} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to\infty}} f(x,y) \quad \text{hoặc} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to+\infty\\ z\to-\infty}} f(x,y,z) \ ...$$

Giới hạn thứ nhất được xét trong quá trình cả hai thành phần tọa độ x và y cùng tiến ra vô cùng: x tiến đến $+\infty$, y tiến đến $-\infty$.
Giới hạn thứ hai được xét trong quá trình y tiến ra vô cùng trong khi $x \to x_0$.
Giới hạn thứ ba được xét trong quá trình $x \to x_0$, đồng thời cả hai thành phần tọa độ y, z cùng tiến ra vô cùng.

Chẳng hạn trong giải tích hàm một biến ta đã biết $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, suy ra

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x+y)e^{-(x+y)} = 0.$$

Tuy nhiên dễ dàng chứng minh không tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x+y)e^{-x}.$$

Ví dụ 1.2.1 *(Về giới hạn hàm véc tơ, hàm số nhiều biến số)*

1. Tìm giới hạn
$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}} \frac{2x^4 + x - xy + y^4}{x^2 + y^2}$$
   Lưu ý rằng khi f là hàm thực hai biến, thay vì viết $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ người ta quen sử dụng kí hiệu $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ khi viết các biểu thức giới hạn. Điều đó đôi khi cũng xảy ra với cả các hàm thực ba biến số.
   Quay lại ví dụ trên, hàm $x^2 + y^2$ ở dưới mẫu của phân thức tiến đến

1, còn biểu thức trên tử của phân thức, $2x^4 + x - xy + y^4 \to 3$ trong quá trình $(x, y) \to (1, 0)$. Theo các nhận xét ở trên

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{2x^4 + x - xy + y^4}{x^2 + y^2} = 3.$$

2. Giới hạn

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x + y)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

khi x, y dần ra vô cùng. Thật vậy

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x + y)e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} xe^{-(x^2+y^2)} + \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} ye^{-(x^2+y^2)}$$

và mỗi số hạng có giới hạn bằng 0 khi $x \to \infty,\ y \to \infty$

$$0 < \left|xe^{-(x^2+y^2)}\right| \leqslant \frac{|x|}{e^{x^2}} \to 0, \quad 0 < \left|ye^{-(x^2+y^2)}\right| \leqslant \frac{|y|}{e^{y^2}} \to 0.$$

3. Giới hạn

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + 2y) \sin \frac{x + 2y}{x^2 + 2y^2} = 0.$$

Thật vậy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + 2y) = 0$, trong khi thừa số thứ hai là hàm bị chặn $|\sin \frac{x+2y}{x^2+2y^2}| \leqslant 1$ trên $\mathbb{R}^2$.

4. Chứng minh không tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Thật vậy, kí hiệu $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ là hàm cần tìm giới hạn. Chọn dãy $\{\mathbf{a}_n = (x^{(n)}, y^{(n)})\}$ là dãy điểm tiến tới $\mathbf{0}$ trên đường thẳng $y = x$ (chẳng hạn $x^{(n)} = y^{(n)} = \frac{1}{n}$, khi đó dãy giá trị hàm tương ứng $\{f(\mathbf{a}_n) = \frac{1}{2}\}$ là dãy hằng số dần tới $\frac{1}{2}$.
Chọn dãy điểm khác $\{\mathbf{b}_n\}$ tiến tới $\mathbf{0}$ trên đường thẳng $y = 2x$, khi đó dãy giá trị hàm tương ứng $\{f(\mathbf{b}_n) = \frac{2}{5}\}$ dần tới $\frac{2}{5}$.
Như vậy giới hạn hai dãy số $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{b}_n)$, theo định lí 1.2.2, giới hạn hàm đã cho không tồn tại.

5. Xét giới hạn hàm véc tơ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^4}{x^2+y^2}, \frac{y^4}{x^2+y^2}\right)$$

Áp dụng định lí 1.1.2, bài toán đưa về tìm các giới hạn thành phần

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| \leqslant x^2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4}{x^2+y^2}=0$$

$$\left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right| \leqslant y^2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y^4}{x^2+y^2}=0$$

Vậy giới hạn hàm véc tơ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\frac{x^4}{x^2+y^2}, \frac{y^4}{x^2+y^2}) = (0,0)$.

6. Tìm giới hạn

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$$

Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

1.2.2 Giới hạn lặp

Trong hàm số nhiều biến có một khái niệm gọi là *giới hạn lặp*. Để thuận tiện ta xét hàm thực hai biến $f(x,y)$ xác định trong lân cận điểm $M(x_0,y_0)$ (có thể trừ điểm M), giới hạn lặp của hàm được viết dưới dạng

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big), \quad \lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big)$$

Về giới hạn lặp thứ nhất $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\big)$, biểu thức trong ngoặc được hiểu như là giới hạn hàm $f(x,y)$ với x là tham số (x cố định không biến thiên) trong quá trình $y\to y_0$

$$f_1(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Giả thiết hàm $f_1(x)$ xác định tại lân cận điểm $x = x_0$ (có thể trừ điểm x_0), khi đó giới hạn lặp đang xét chính là giới hạn hàm f_1 trong quá trình $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big) = \lim_{x\to x_0} f_1(x).$$

Tương tự đối với giới hạn lặp thứ hai, nó được xác định thông qua sự tồn tại của các giới hạn

$$f_2(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y) \quad \text{và} \quad \lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to y_0} f_2(y).$$

Với hàm ba biến $f(x,y,z)$ ta có thể nhắc đến nhiều giới hạn lặp khác nhau. Chẳng hạn mỗi cách hoán vị ba biến $\{x,y,z\}$ tương ứng với một giới hạn lặp

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z), \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z), \lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y,z), \ldots$$

Ngoài ra ta cũng còn gặp các giới hạn lặp dạng

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z) \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{\substack{y\to y_0\\ z\to z_0}} f(x,y,z), \ldots$$

Một cách tổng quát, xét hàm véc tơ $n+k$ biến

$$\mathbf{f}:\ D = A\times B \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^m, \quad A\subset \mathbb{R}^n,\ B\subset\mathbb{R}^k.$$

Giả sử $M_0(\mathbf{a},\mathbf{b})$ là điểm tụ của D. Với mỗi $\mathbf{y}\in B$ cố định giả thiết rằng tồn tại giới hạn

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Nếu tồn tại tiếp giới hạn

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

trong quá trình $\mathbf{y}\to\mathbf{b}$ thì $\mathbf{u}$ được gọi là giới hạn lặp của $\mathbf{f}$ và kí hiệu

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}}\Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big) = \mathbf{u}.$$

Tương tự ta có thể nói đến giới hạn lặp

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\Big(\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big) = \mathbf{v}.$$

Các giới hạn lặp đó nói chung không bằng nhau.

Ví dụ Cho hàm $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

Giới hạn lặp thứ nhất

$$f_1(x) = \lim_{y \to 0+} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = 1 + x \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \lim_{y \to 0+} f(x,y) = \lim_{x \to 0+} (1 + x) = 1.$$

Giới hạn lặp thứ hai cho ta kết quả khác giới hạn lặp thứ nhất

$$f_2(y) = \lim_{x \to 0+} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = -1 + y \;\Rightarrow\; \lim_{y \to 0+} \big(\lim_{x \to 0+} f(x,y)\big) = -1.$$

Nhận xét rằng trong quá trình $(x,y) \to (0,0)$ *không tồn tại giới hạn hàm*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

(Để phân biệt với giới hạn lặp, giới hạn ở trên của hàm $f(x,y)$ *trong quá trình* $(x,y) \to (0,0)$ *còn được gọi là giới hạn bội). Thật vậy giá trị của hàm tại các điểm trên đường thẳng* $y = kx$

$$f(x,kx) = \frac{(1-k)x + (1+k^2)x^2}{(1+k)x} \to \frac{1-k}{1+k} \quad khi \quad x \to 0.$$

Do vậy nếu chọn dãy điểm $\{\mathbf{a}_n\}$ *tiến tới* $\mathbf{0}$ *trên đường thẳng* $y = k_1 x$ *và chọn dãy điểm khác* $\{\mathbf{b}_n\}$ *tiến tới* $\mathbf{0}$ *trên đường thẳng* $y = k_2 x, \quad k_1 \neq k_2$, *các dãy giá trị hàm tương ứng* $\{f(\mathbf{a}_n)\}$ *và* $\{f(\mathbf{b}_n)\}$ *dần tới các giới hạn khác nhau, theo định lí 1.2.2, giới hạn hàm* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ *không tồn tại.*

Mối liên hệ giữa giới hạn lặp và giới hạn bội được thể hiện trong định lí sau

Định lí 1.2.3 *Cho hàm véc tơ* $n + k$ *biến*

$$\mathbf{f} : \; D = A \times B \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^m, \quad A \subset \mathbb{R}^n, \; B \subset \mathbb{R}^k$$

Giả sử $M_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ là điểm tụ của D. Nếu tồn tại giới hạn bội

$$\lim_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{a},\mathbf{b})} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

đồng thời giả thiết rằng với mỗi $\mathbf{y} \in B$ tồn tại giới hạn

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Khi đó tồn tại giới hạn lặp và giới hạn lặp đó bằng giới hạn bội

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \Big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big) = \lim_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{a},\mathbf{b})} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh cho trường hợp hàm thực 2 biến, các trường hợp khác cũng chứng minh tương tự, tuy có khó khăn đôi chút do kí hiệu phức tạp hơn.

Giả sử tồn tại các giới hạn

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = a, \quad \lim_{y\to y_0} f(x, y) = f_1(x)$$

Ta sẽ chứng minh giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ tồn tại và bằng a.

Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại một lân cận U của (x_0, y_0) sao cho $\forall (x, y) \in U,\ (x, y) \neq (x_0, y_0)$

$$|f(x, y) - a| \leqslant \varepsilon.$$

Cho $y \to y_0$ trong bất đẳng thức trên, ta được $|f_1(x) - a| \leqslant \varepsilon$, suy ra đpcm. ■

Nhận xét rằng sự tồn tại giới hạn hàm $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ không kéo theo sự tồn tại các giới hạn lặp. Chẳng hạn xét ví dụ sau, hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & \textit{nếu} \quad y \neq 0 \\ 0 & \textit{nếu} \quad y = 0 \end{cases}$$

có giới hạn bội $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$ (tích của một VCB và hàm bị chặn), nhưng không tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$. (Do không tồn tại $\lim\limits_{y\to 0} \sin \frac{1}{y}$). Tuy nhiên phù hợp với định lí trên $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$.

1.2.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 1.2.3 *Cho hàm véc tơ* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$*, trong đó* $D \subset \mathbb{R}^n$*. Ta nói hàm* $\mathbf{f}$ *liên tục tại* $\mathbf{a} \in D$ *nếu cho trước một lân cận bất kì* $V(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$ *của* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$*, tồn tại một lân cận* $U(\mathbf{a})$ *sao cho với mọi* $\mathbf{x} \in D \cap U(\mathbf{a})$ *ta có*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \quad \textit{hay} \quad \mathbf{f}(D \cap U(\mathbf{a})) \subset V(\mathbf{f}(\mathbf{a})).$$

Ta nói hàm $\mathbf{f}$ *liên tục trên miền* D *nếu* $\mathbf{f}$ *liên tục tại mọi điểm thuộc* D*.*
Điểm $\mathbf{a} \in D$ *được gọi là điểm gián đoạn của* $\mathbf{f}$ *nếu hàm* $\mathbf{f}$ *không liên tục tại đó.*

Định nghĩa trên hoàn toàn giống như định nghĩa hàm một biến liên tục. Nếu $\mathbf{a}$ là điểm cô lập của tập D hiển nhiên $\mathbf{f}$ liên tục tại $\mathbf{a}$. Trường hợp $\mathbf{a} \in D$ là điểm tụ của D, định nghĩa trên cũng có nghĩa là giới hạn bằng giá trị thay thế của hàm tại $\mathbf{a}$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Áp dụng nhận xét ngay sau định lí 1.2.2 về sự tương đương giữa giới hạn hàm véc tơ và các giới hạn thành phần ta có kết quả

Định lí 1.2.4 *Cho hàm véc tơ* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$*.*
• *Hàm* $\mathbf{f}$ *liên tại* $\mathbf{a} \in D$ *khi và chỉ khi các hàm thành phần* f_k *liên tục tại* $\mathbf{a} \in D$ *với mọi* $k = 1, 2, ..., m$*.*
• *Hàm véc tơ* $\mathbf{f}$ *liên tục trên* D *khi và chỉ khi các hàm thành phần* f_k *liên tục trên* D *với mọi* $k = 1, 2, ..., m$*.*

Từ định nghĩa về hàm liên tục cũng như từ các tính chất giới hạn hàm véc tơ, hàm liên tục có các tính chất sau (cách chứng minh như đã chứng minh trong giải tích hàm thực một biến số)

- Các hàm $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$ liên tục tại cùng một điểm $\mathbf{a} \in D$. Khi đó các hàm $\mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g}, \alpha \cdot \mathbf{f}, \ (\alpha \in \mathbb{R})$ cũng liên tục tại $\mathbf{a}$.

- Nếu $f, g : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$ là các hàm thực n biến liên tục tại $\mathbf{a} \in D$, khi đó hàm tích $f.g$ liên tục tại $\mathbf{a}$ và hàm thương $\frac{f}{g}$ cũng liên tục tại $\mathbf{a}$ với giả thiết $g(\mathbf{a}) \neq 0$.

- Phép hợp thành $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ liên tục tại $\mathbf{a}$ nếu hàm $\mathbf{f}$ liên tục tại $\mathbf{a}$ và $\mathbf{g}$ liên tục tại $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Cũng như hàm số một biến số, một trong các tính chất rất quan trọng của hàm số nhiều biến số liên tục trên một miền đóng và giới nội là định lí sau

Định lí 1.2.5 *Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên tập D đóng và giới nội trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.*

Tập đóng và giới nội trong $\mathbb{R}^n$ cũng được gọi là tập *compắc.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh hàm f bị chặn trên D. Giả sử ngược lại, khi đó với mỗi $k \in N^*$ tồn tại $\mathbf{x}^{(k)} \in D$ sao cho $|f(\mathbf{x}^{(k)})| > k$ (hay $\lim\limits_{k\to\infty}|f(\mathbf{x}^{(k)})| = +\infty$). Dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_1^\infty \subset D$ là dãy bị chặn, theo định lí Bolzano tồn tại một dãy con $\{\mathbf{x}^{(k_i)}\}_{i=1}^\infty$ hội tụ tới $\mathbf{a} \in D$ (do D là tập đóng). Mặt khác f là hàm liên tục trên D nên cũng liên tục tại $\mathbf{a}$. Vậy

$$\lim_{i\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k_i)}) = f(\mathbf{a}),$$

mâu thuẫn với giả thiết phản chứng $\lim\limits_{k\to\infty}|f(\mathbf{x}^{(k)})| = +\infty$.

Kí hiệu $M = \sup\limits_{x\in D} f(\mathbf{x})$. Ta sẽ chứng minh M là giá trị lớn nhất của hàm f trên D. Thật vậy từ định nghĩa về cận trên đúng, tồn tại một dãy $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset D$ thỏa mãn

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = M.$$

Cũng theo định lí Bolzano, dãy đó chứa một dãy con $\{\mathbf{x}^{(k_i)}\}_{i=1}^\infty$ hội tụ tới $\mathbf{a} \in D$ và

$$\lim_{i\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k_i)}) = f(\mathbf{a}) = M.$$

Chứng minh tương tự, hàm cũng đạt giá trị nhỏ nhất trên D. ■

Định nghĩa 1.2.4 *Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập liên thông nếu với bất kì 2 điểm $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ tồn tại một hàm liên tục $f : [0, 1] \to D$ sao cho $f(0) = \mathbf{a}$ và $f(1) = \mathbf{b}$.*

Về mặt trực giác, tập ảnh của hàm liên tục $f : [0, 1] \to D$ (f chiếu đoạn $[0, 1]$ vào tập D) là một đường cong liền nét trong D. Do vậy theo định nghĩa trên ta luôn hình dung tập liên thông D là tập có tính chất: giữa 2 điểm bất kì luôn tồn tại một đường cong liền nét nằm trong D nối 2 điểm đó. Hiển nhiên tập A trên đường thẳng thực là tập liên thông khi và chỉ khi A là một khoảng đóng hoặc mở hoặc nửa đóng, nửa mở (bị chặn hoặc không bị chặn) trên $\mathbb{R}$. Nói cách khác tập liên thông trên đường thẳng thực chỉ có thể là một trong các tập sau

$$(a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b] \quad \text{hoặc} \quad (-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (b,+\infty),\ [b,+\infty).$$

Người ta chứng minh được rằng *tập ảnh của một tập liên thông qua ánh xạ liên tục cũng là tập liên thông*. Trường hợp đặc biệt nếu hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên tập liên thông $D \subset \mathbb{R}^n$, giá trị hàm f trái dấu tại 2 điểm $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ nào đó trong D: $f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) < 0$. Khi đó tồn tại $\mathbf{c} \in D$ sao cho $f(\mathbf{c}) = 0$.

1.3 Đạo hàm ánh xạ

1.3.1 Đạo hàm riêng, đạo hàm riêng cấp cao hàm số nhiều biến

Cho hàm thực n biến $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ là điểm trong của D.

Định nghĩa 1.3.1 *Hàm $F(x_k) = f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n)$ là hàm thực một biến số xác định tại lân cận điểm a_k. Nếu F khả vi tại $x_k = a_k$ ta nói f có đạo hàm riêng theo biến x_k tại $\mathbf{a}$ và đạo hàm riêng đó bằng $F'(a_k)$, kí hiệu*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \quad \textit{hoặc} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad \textit{hoặc} \quad f'_{x_k}(\mathbf{a}).$$

Theo định nghĩa trên, đạo hàm riêng hàm f theo biến x_k tại $\mathbf{a}$ bằng

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \lim_{x_k \to a_k} \frac{F(x_k) - F(a_k)}{x_k - a_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{F(a_k + \Delta x_k) - F(a_k)}{\Delta x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_k, ..., a_n)}{\Delta x_k}.$$

Nếu $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở và f có đạo hàm riêng theo biến x_k tại mọi điểm $\mathbf{x} \in D$, khi đó $f'_{x_k} : D \to \mathbb{R}$ là hàm đạo hàm riêng theo biến x_k được xác định trên D. Nó cũng là hàm thực n biến.
Các đạo hàm riêng hàm số nhiều biến số thực chất là các đạo hàm hàm số

một biến số (đạo hàm theo biến x_k, các biến khác cố định đóng vai trò như tham số của f), do vậy nó được tính theo các quy tắc đã biết trong hàm một biến.

Ví dụ 1.3.1

1. Cho hàm hai biến $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 - xy + \sin(x + y)$. Khi đó

$$f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a - b + \cos(a + b)$$

$$f'_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -a + \cos(a + b)$$

   Một cách tổng quát

$$f'_x(x, y) = 2x - y + \cos(x + y),\ f'_y(x, y) = -x + \cos(x + y)$$

2. Cho hàm $f = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$. Ta có các đạo hàm riêng tại (x, y, z) với x, y, z không đồng thời bằng 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

3. Cho hàm $f = x^y$ với $x > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Định nghĩa 1.3.2 *Cho hàm thực n biến $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Giả thiết f có đạo hàm riêng theo biến x_i tại mọi điểm $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$. Khi đó nếu ánh xạ*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$$

có đạo hàm riêng theo biến x_j tại $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$, ta nói hàm f có đạo hàm riêng cấp hai theo biến x_i và x_j tại $\mathbf{a}$, kí hiệu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a}) \quad \textit{hoặc} \quad f''_{x_i x_j}(\mathbf{a}).$$

Trường hợp $i = j$, ta viết

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a}) \quad \textit{thay cho} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai đều là các hàm n biến ánh xạ từ $D \to \mathbb{R}$, do vậy tương tự ta có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp cao hơn hai với các kí hiệu

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \quad \textit{hoặc} \quad f^{(3)}_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a}) = \left(f''_{x_i x_j}\right)'_{x_k}(\mathbf{a}).$$

Ví dụ 1.3.2

1. Cho hàm hai biến $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 - xy + \sin(x + y)$. Các đạo hàm riêng cấp một

   $$f'_x(x, y) = 2x - y + \cos(x + y),\ f'_y(x, y) = -x + \cos(x + y).$$

   Mỗi đạo hàm riêng cấp một là một hàm hai biến, chúng có các đạo hàm riêng theo biến x và y. Do vậy hàm f ban đầu có 4 đạo hàm riêng cấp hai

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 - \sin(x + y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1 - \sin(x + y)$$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -1 - \sin(x + y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x + y).$$

2. Cho hàm

   $$f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

   Các đạo hàm riêng cấp một tại (x, y, z) với x, y, z không đồng thời bằng 0

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = \frac{3xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

Trong hai ví dụ trên ta thấy $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại mọi điểm thuộc miền xác định của hàm. Định lí quan trọng dưới đây khẳng định tính đối xứng của các đạo hàm riêng cấp hai

Định lí 1.3.1 (Schwarz) *Cho* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *là hàm thực* n *biến. Giả thiết* f *có đạo hàm riêng cấp hai* $f''_{x_ix_k}, f''_{x_kx_i}$ *tại lân cận điểm* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ *và* $f''_{x_ix_k}, f''_{x_kx_i}$ *liên tục tại* $\mathbf{a}$. *Khi đó*

$$f''_{x_ix_k}(\mathbf{a}) = f''_{x_kx_i}(\mathbf{a}).$$

Chứng minh. Để đơn giản về kí hiệu, ta chỉ chứng minh định lí cho trường hợp f là hàm thực hai biến số. Trường hợp tổng quát (f là hàm n biến) được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Ta nhắc lại giả thiết f có đạo hàm riêng cấp hai f''_{xy}, f''_{yx} tại lân cận điểm $(a,b) \in D$ và f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (a,b). Kí hiệu φ, ψ là các hàm thực một biến số (phụ thuộc vào (x,y) trong lân cận nói trên)

$$\varphi(x) = f(x,y) - f(x,b).$$

$$\psi(y) = f(x,y) - f(a,y).$$

Ta có nhận xét

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \psi(y) - \psi(b). \tag{1.1}$$

Sử dụng định định lí Lagrange với cả hai vế của đẳng thức trên

$$\varphi(x)-\varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a) = \big(f'_x(\xi,y)-f'_x(\xi,b)\big)(x-a) = f''_{xy}(\xi,\eta)(x-a)(y-b)$$

$$\psi(y)-\psi(b) = \psi'(\eta^*)(y-b) = \big(f'_y(x,\eta^*)-f'_y(a,\eta^*)\big)(y-b) = f''_{yx}(\xi^*,\eta^*)(x-a)(y-b)$$

Ở hai đẳng thức trên $\xi, \xi^* \in [a,x]$ và $\eta, \eta^* \in [b,y]$. Từ đẳng thức (1.1) suy ra

$$f''_{xy}(\xi,\eta) = f''_{yx}(\xi^*,\eta^*).$$

Chuyển qua giới hạn trong quá trình $(x,y) \to (a,b)$, do f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (a,b)

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b). \quad \blacksquare$$

Nhận xét rằng định lí cũng được mở rộng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn hai

$$f^{(3)}_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a}) = f^{(3)}_{x_j x_i x_k}(\mathbf{a}) = f^{(3)}_{x_k x_i x_j}(\mathbf{a}) = ...$$

nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại $\mathbf{a}$. Tuy nhiên định lí sẽ không đúng nếu ta bỏ qua giả thiết các đạo hàm riêng liên tục.

Ví dụ 1.3.3

Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x=y=0 \end{cases}$$

f liên tục tại $(0,0)$ vì trong quá trình $(x,y) \to (0,0)$ $(x^2+y^2 \neq 0)$

$$|f(x,y)| \le |xy|\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \le |xy| \to f(0,0) = 0.$$

Từ định nghĩa về đạo hàm riêng, ta có

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \quad \text{tương tự} \quad f'_y(0,0) = 0.$$

Áp dụng các quy tắc tính đạo hàm, các đạo hàm riêng tại $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

cũng liên tục tại $(0,0)$. Tuy nhiên các đạo hàm riêng cấp hai

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y-0} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1.$$

Các đạo hàm riêng cấp hai $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$. Ta cũng dễ dàng chứng minh được

$$f''_{xy} = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

không liên tục tại $(0,0)$, không thỏa mãn định lí Svác. (Chọn (x,y) trên đường thẳng $x = ky$ và cho (x,y) tiến tới $(0,0)$, $f''_{xy} = \frac{12k-4k^3}{(1+k^2)^3}$ dần tới các giới hạn khác nhau với k khác nhau.)

1.3.2 Đạo hàm ánh xạ

Đạo hàm ánh xạ hay đạo hàm véc tơ là mở rộng khái niệm đạo hàm hàm thực một biến số. Trước hết ta ôn lại khái niệm hàm $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Ta có thể diễn đạt khái niệm hàm khả vi dưới dạng tương đương: $\exists L \in \mathbb{R}$ và một VCB $\alpha(x) = o(x - x_0)$ (VCB cấp cao hơn $x - x_0$) trong quá trình $x \to x_0$ thoả mãn

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \alpha(x) \quad \text{khi đó} \quad L = f'(x_0).$$

Định nghĩa 1.3.3
Cho $U \subset \mathbb{R}$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và hàm véc tơ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m): U \to \mathbb{R}^m$. Giả thiết tồn tại các đạo hàm riêng tại $\mathbf{a} \in U$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Kí hiệu A là ma trận kiểu $m \times n$ các đạo hàm riêng tại $\mathbf{a}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Ta cũng kí hiệu ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ *vào* $\mathbb{R}^m$ *với ma trận* A *ở trên là* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Hàm* $\mathbf{f}$ *được gọi là khả vi tại* $\mathbf{a} \in U$ *nếu trong quá trình* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|)$$

hay

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A(\mathbf{x} - \mathbf{a})| = o(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|).$$

Ánh xạ tuyến tính $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *được gọi là đạo hàm ánh xạ* $\mathbf{f}$ *tại* $\mathbf{a}$ *và kí hiệu* $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$ *hoặc* $D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = A$.
Ma trận A *được gọi là ma trận Jacobi của đạo hàm* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$.
Biểu thức $A(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ *được gọi là vi phân của* $\mathbf{f}$ *tại* $\mathbf{a}$, *kí hiệu* $\mathbf{df}(\mathbf{a})$.

Nhận xét rằng đạo hàm hàm véc tơ là một ánh xạ tuyến tính và ta thường đồng nhất ánh xạ tuyến tính với ma trận A của nó trong cơ sở chính tắc.
Do giới hạn hàm véc tơ bằng giới hạn các hàm thành phần nên hàm véc tơ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ khả vi tại $\mathbf{a}$ khi và chỉ khi các hàm thành phần $f_1, f_2, ..., f_m$ khả vi tại $\mathbf{a}$.
Trường hợp riêng khi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm thực một biến số, đạo hàm $f'(a)$ là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, ma trận của ánh xạ tuyến tính như vậy được đồng nhất với một số thực

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Nếu $f : U \to \mathbb{R}^m$ là hàm thực n biến, đạo hàm $f'(\mathbf{a})$ là ánh xạ tuyến tính với ma trận hàng

$$f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.3.4

1. Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto C$ là hàm hằng số n biến. Hiển nhiên các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ với mọi $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Ma trận hàng
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
thỏa mãn định nghĩa về hàm khả vi. Vậy $f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ tại điểm bất kì $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

2. Cho $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$. Ánh xạ tuyến tính $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ có thể viết dưới dạng $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ hoặc

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, ..., x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, ..., x_n) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

trong đó A là ma trận các hệ số (a_{ij}). Các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = a_{ij}$ với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, j = 1, 2, ..., n$. Vậy A chính là ma trận các đạo hàm riêng, ta sẽ chứng minh ánh xạ tuyến tính $\mathbf{f}$ khả vi tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^n$ và $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Thật vậy do $\mathbf{f}$ là ánh xạ tuyến tính

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

thỏa mãn định nghĩa về hàm khả vi $\Rightarrow$ $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$, với mọi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ hoặc viết dưới dạng giống như trong hàm một biến $(A\mathbf{x})' = A,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3. Cho hàm $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + xy$. Xét sự khả vi của hàm tại $M(1, 0)$ và tính đạo hàm tại M. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Suy ra ma trận các đạo hàm riêng tại $M(1, 0)$ là ma trận hàng $A = (2\ \ 1)$. Hàm $f(x, y) = x^2 + xy$ khả vi tại $M(1, 0)$ khi và chỉ khi

$$\alpha(x, y) = f(x, y) - f(1, 0) - (2\ \ 1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 + xy - 1 - \big(2(x-1) + y\big) = (x-1)(x-1+y)$$

là VCB cấp cao hơn $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ trong quá trình $(x, y) \to (1, 0)$. Thật vậy

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}} \left| \frac{(x-1)(x-1+y)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \right| \le \lim_{\substack{x\to1\\y\to0}} \frac{|(x-1)(x-1+y)|}{|x-1|} = \lim_{\substack{x\to1\\y\to0}} |x-1+y| = 0$$

Suy ra f khả vi tại $M(1, 0)$ và $f'(M) = \big(2\ \ 1\big)$.

Chứng minh tương tự ta có thể khẳng định $f(x, y) = x^2 + xy$ khả vi tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $f'(x, y)$ là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}$ có ma trận

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y & x \end{pmatrix}.$$

4. Ví dụ về một hàm có các đạo hàm riêng tại $\mathbf{a} = (0, 0)$ nhưng không khả vi tại đó

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } x = y = 0. \end{cases}$$

Hàm f có các đạo hàm riêng tại $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Tuy nhiên hàm f không liên tục tại $(0, 0)$. Thật vậy chọn (x, y) trên đường thẳng $y = kx$ và cho (x, y) tiến tới $(0, 0)$, $f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}$ dần tới các giới hạn khác nhau với k khác nhau.
Theo định lí 1.3.2 được chứng minh trực tiếp ngay sau ví dụ này, hàm liên tục là điều kiện cần để f khả vi. Do vậy hàm f trong ví dụ đang xét có các đạo hàm riêng tại $(0, 0)$ nhưng không khả vi tại đó.

Cũng như hàm một biến, ta có định lí sau

Định lí 1.3.2 *Nếu* $\mathbf{f}$ *khả vi tại* $\mathbf{a}$ *thì* $\mathbf{f}$ *liên tục tại* $\mathbf{a}$.

Chứng minh. Do $\mathbf{f}$ khả vi tại $\mathbf{a}$, suy ra

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \text{hay} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\big) = \mathbf{0}.$$

Vậy

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}), \quad \text{đpcm.} \quad \blacksquare$$

Cũng từ định nghĩa hàm khả vi, suy ra tính tuyến tính của đạo hàm: nếu $\mathbf{f}$ và $\mathbf{g}$ khả vi tại $\mathbf{a}$ thì $\mathbf{f} + \mathbf{g}, \alpha \cdot \mathbf{f}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ cũng khả vi tại $\mathbf{a}$, đồng thời

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) + \mathbf{g}'(\mathbf{a})$$

$$(\alpha \cdot \mathbf{f})'(\mathbf{a}) = \alpha \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{a}).$$

Định lí 1.3.3 *Nếu f là hàm thực n biến có các đạo hàm riêng f'_{x_i}, $i = 1, 2, ..., n$ liên tục tại $\mathbf{a}$ thì f khả vi tại $\mathbf{a}$.*

Chứng minh. Để đơn giản khi viết, ta chỉ chứng minh định lí với $n = 2$. Trường hợp tổng quát dành cho bạn đọc. Kí hiệu $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ và áp dụng công thức Lagrange trong Giải tích I, tồn tại c_1 nằm giữa x và a_1, c_2 nằm giữa y và a_2 sao cho

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a_1,a_2) &= \big(f(x,y) - f(a_1,y)\big) + \big(f(a_1,y) - f(a_1,a_2)\big) \\ &= f'_x(c_1,y)(x-a_1) + f'_y(a_1,c_2)(y-a_2) \\ &= \big(f'_x(a_1,a_2) + \varepsilon_1\big)(x-a_1) + \big(f'_y(a_1,a_2) + \varepsilon_2\big)(y-a_2) \end{aligned}$$

trong đó $\varepsilon_1 = f'_x(c_1,y) - f'_x(a_1,a_2) \to 0, \varepsilon_2 = f'_y(c_1,y) - f'_y(a_1,c_2) \to 0$ trong quá trình $(x,y) \to (a_1,a_2)$ do giả thiết f_x, f_y liên tục tại (a_1,a_2). Viết lại đẳng thức trên

$$f(x,y) - f(a_1,a_2) = f'_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f'_y(a_1,a_2)(y-a_2) + \varepsilon_1(x-a_1) + \varepsilon_2(y-a_2)$$

Ta sẽ chứng minh biểu thức $R = \varepsilon_1(x-a_1) + \varepsilon_2(y-a_2)$ là VCB cấp cao hơn $|(x,y) - (a_1,a_2)|$ trong quá trình $(x,y) \to (a_1,a_2)$. Thật vậy

$$0 \le \frac{|R|}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} \le \frac{|\varepsilon_1(x-a_1)|}{|x-a_1|} + \frac{|\varepsilon_2(y-a_2)|}{|y-a_2|} \to 0$$

khi $(x,y) \to (a_1,a_2)$ (do $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ đã nói ở trên). Vậy

$$f(x,y) - f(a_1,a_2) = f'_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f'_y(a_1,a_2)(y-a_2) + o(|(x,y) - (a_1,a_2)|)$$

Điều này có nghĩa là f khả vi tại $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$. ■

Với hàm số nhiều biến số ta có quy tắc tính đạo hàm của tích hai hàm số

Định lí 1.3.4 *Cho f, g là hai hàm thực n biến số khả vi tại $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Khi đó $f \cdot g$ cũng khả vi tại $\mathbf{a}$ và*

$$(f \cdot g)'(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a}).$$

Chứng minh. Như trong hàm thực một biến số, kí hiệu

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}, \quad \Delta f = f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}), \quad \Delta g = g(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})$$

Định lí được chứng minh nếu số gia hàm số của $f \cdot g$, kí hiệu

$$\Delta = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - \Big(g(\mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})\Big)\Delta\mathbf{x}$$

là VCB cấp cao hơn $|\Delta\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ trong quá trình $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
\Delta &= f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - \Big(g(\mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})\Big)\Delta\mathbf{x} \\
&= f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x})g(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - \Big(g(\mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})\Big)\Delta\mathbf{x} \\
&= \big(\Delta f + f(\mathbf{a})\big)\big(\Delta g + g(\mathbf{a})\big) - f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - \Big(g(\mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})\Big)\Delta\mathbf{x} \\
&= \Delta f \Delta g + \Big(\Delta f - f'(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}\Big) \cdot g(\mathbf{a}) + \Big(\Delta g - g'(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}\Big) \cdot f(\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

Do f, g khả vi tại $\mathbf{a}$ nên từng số hạng trong tổng này là VCB cấp cao hơn $|\Delta\mathbf{x}|$ trong quá trình $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, suy ra đpcm. ■

Quy tắc tính đạo hàm hàm hợp cho hàm véc tơ được viết dưới dạng giống như trong hàm một biến

Định lí 1.3.5 (Đạo hàm hàm hợp)
Cho các hàm véc tơ $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *với* $\mathbf{g}$ *khả vi tại* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ *và* $\mathbf{f}$ *khả vi tại* $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$. *Khi đó hàm hợp* $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *cũng khả vi tại* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ *và*

$$\boxed{\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(\mathbf{a})\big)\mathbf{g}'(\mathbf{a}) \qquad \Big(= \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{g}'(\mathbf{a})\Big) \qquad (*)}$$

Lưu ý rằng vế phải của $(*)$ là tích của 2 ma trận hay tích của 2 ánh xạ tuyến tính.
Nhận xét rằng định lí vẫn đúng nếu ta hạn chế $\mathbf{g}$ chiếu lân cận $U \subset \mathbb{R}^k$ của $\mathbf{a}$ vào lân cận $V \subset \mathbb{R}^n$ của $\mathbf{b}$, $\mathbf{g}$ khả vi tại $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ khả vi tại $\mathbf{b}$, $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Cách chứng minh dưới đây hoàn toàn được áp dụng cho các giả thiết này.
Chứng minh. Định lí là hiển nhiên nếu $\mathbf{g}$ là ánh xạ hằng trong một lân cận nào đó của $\mathbf{a}$ (khi đó $\mathbf{F}$ là ánh xạ hằng và cả 2 vế của $(*)$ đều bằng $\mathbf{0}$). Do

vậy ta hạn chế chỉ chứng minh định lí trong trường hợp $\mathbf{g}$ không là ánh xạ hằng.
Từ giả thiết $\mathbf{f}$ và $\mathbf{g}$ khả vi, suy ra tồn tại các hàm VCB $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(|\mathbf{x}-\mathbf{a}|)$, $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{o}(|\mathbf{y}-\mathbf{b}|)$ sao cho

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})(\mathbf{y}-\mathbf{b}) + \mathbf{v}(\mathbf{y}) \tag{1.3}$$

Sử dụng (1.2) và (1.3) ta có

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\Big(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\Big) + \mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) =$$

$$= \mathbf{f}'(\mathbf{b})\Big(\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{u}(\mathbf{x})\Big) + \mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

trong đó $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$. Định lí sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(|\mathbf{x}-\mathbf{a}|)$. Thật vậy

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{u}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\right) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{\mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})|} \cdot \frac{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\right) = \mathbf{0}$$

Chú ý rằng $|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})| \neq 0$ do ta giả thiết ban đầu $\mathbf{g}$ không là ánh xạ hằng, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{\mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})|} = \mathbf{0}$ do (1.3) và $\dfrac{|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$ bị chặn tại lân cận $\mathbf{a}$.
Vậy $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{o}(|\mathbf{x}-\mathbf{a}|)$, suy ra đ.p.c.m. và

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(\mathbf{a})\big)\mathbf{g}'(\mathbf{a}) \quad \blacksquare$$

Các trường hợp riêng của định lí đạo hàm hàm hợp

• Cho $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Khi đó $F = f \circ \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ là hàm 2 biến. Công thức $(*)$ trong định lí trên có thể viết dưới dạng ma trận

$$F'(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \quad \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

hoặc chi tiết hơn

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{a}) \end{cases} \tag{1.4}$$

Để đơn giản, đôi khi ta không chỉ ra các điểm mà các hàm u, v, f cũng như các đạo hàm riêng của chúng được tính tại đó

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

• Nếu $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{g}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$ và $\mathbf{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là các hàm véc tơ, khi đó đạo hàm hàm hợp $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ có dạng ma trận

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) & \frac{\partial f_1}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) & \frac{\partial f_2}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

hoặc gọn hơn cho dễ nhớ, đạo hàm $\mathbf{F}'$ bằng

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Nói cách khác nếu kí hiệu chi tiết $\mathbf{F}(x, y) = \big(F_1(x, y), F_2(x, y)\big)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a}) + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{a}) \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a}) + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{a}) \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a}) + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{a}) \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a}) + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\big(u(\mathbf{a}), v(\mathbf{a})\big) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{a}) \end{cases}$$

Ví dụ 1.3.5

1. Cho hàm $\mathbf{g}(x,y) = \big(xy, \frac{x}{y}\big)$ và $\mathbf{f}(x,y) = (\sin(xy), \ln\big(x^2+y^2)\big)$. Hợp hai hàm

$$\mathbf{F}(x,y) = (\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y) = \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) = \left(\sin(x^2), \ln\left(x^2y^2 + \frac{x^2}{y^2}\right)\right)$$

Ta có $\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) & 0 \\ \frac{2}{x} & \frac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)} \end{pmatrix}$. Dễ dàng kiểm chứng lại công thức đạo hàm hàm hợp (∗)

$$\mathbf{F}'(x,y) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(x,y)\big)\mathbf{g}'(x,y).$$

Thật vậy $\mathbf{g}'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}$ và $\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$, do đó

$$\mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \frac{x}{y}\cos(x^2) & xy\cos(x^2) \\ \frac{2y^3}{x(1+y^4)} & \frac{2y}{x(1+y^4)} \end{pmatrix}.$$

Suy ra điều phải chứng minh

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{y}\cos(x^2) & xy\cos(x^2) \\ \frac{2y^3}{x(1+y^4)} & \frac{2y}{x(1+y^4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) & 0 \\ \frac{2}{x} & \frac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)} \end{pmatrix}$$

2. Bằng phép đổi biến $u = x-2y, v = x+4y$, tìm hàm $z = z(x,y)$ thỏa mãn phương trình

$$2z'_x + z'_y = 0.$$

Phương trình $2z'_x + z'_y = 0$ được gọi là phương trình đạo hàm riêng, nó liên quan tới các đạo hàm riêng của hàm $z(x,y)$. Từ phép đổi biến $u = x-2y, v = x+4y$, suy ra

$$x = \frac{2u+v}{3}, y = \frac{v-u}{6}.$$

Kí hiệu

$$f(u,v) = z(x,y) = z\left(\frac{2u+v}{3}, \frac{v-u}{6}\right)$$

khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{-1}{6}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{6}.$$

Suy ra

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{\partial f}{\partial u} + 4\frac{\partial f}{\partial v}$$

Thay vào phương trình đạo hàm riêng $2z'_x + z'_y = 0$, ta được

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad\Rightarrow\quad f(u,v) = C(u) \quad\Rightarrow\quad z(x,y) = C(x-2y)$$

trong đó $C(u)$ là hàm một biến số chỉ phụ thuộc vào u (không phụ thuộc biến v) và khả vi.

1.3.3 Đạo hàm theo hướng và định lí đạo hàm hàm ngược, hàm ẩn

Định nghĩa 1.3.4 *Cho hàm véc tơ* $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}$ *là điểm trong của* X. *Gọi* $\mathbf{e}$ *là véc tơ đơn vị tùy ý trong* $\mathbb{R}^n$ $(|\mathbf{e}| = 1)$. *Nếu hàm* $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{e})$ *khả vi tại* $t = 0$, *ta nói* $\mathbf{f}$ *khả vi theo hướng* $\mathbf{e}$ *tại* $\mathbf{a} \in X$, *đạo hàm theo hướng đó bằng* $\mathbf{F}'(0)$, *kí hiệu*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(0) \quad \textit{hay} \quad \mathbf{f}'_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(0) \quad \textit{hoặc} \quad \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \mathbf{F}'(0).$$

Nếu $\mathbf{u}$ *là véc tơ khác* $\mathbf{0}$ *bất kì trong* $\mathbb{R}^n$. *Ta nói đạo hàm hàm* $\mathbf{f}$ *theo hướng* $\mathbf{u}$ *tại* $\mathbf{a}$, *kí hiệu* $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ *là đạo hàm hàm* $\mathbf{f}$ *theo hướng véc tơ đơn vị* $\mathbf{u}_0$ *của* $\mathbf{u}$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_0}(\mathbf{a}) \qquad \left(\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right).$$

Ta có nhận xét sau liên quan đến đạo hàm theo hướng

- Đạo hàm theo hướng $\mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ là véc tơ đơn vị) tại $\mathbf{a} \in X$ của hàm véc tơ $\mathbf{f}$ là véc tơ trong $\mathbb{R}^m$, đạo hàm đó bằng

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{e}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}.$$

- Trường hợp $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^n$ là hàm n biến, đạo hàm theo hướng $\mathbf{e}$ tại $\mathbf{a} \in X$ của hàm số nhiều biến f là một số thực

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

- Đạo hàm riêng của hàm thực nhiều biến số là trường hợp riêng của đạo hàm theo hướng. Cụ thể hơn nếu

$$\mathbf{e}_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$$

là véc tơ đơn vị chỉ hướng của trục tọa độ thứ k trong $\mathbb{R}^n$ (thành phần thứ k của véc tơ bằng 1, các thành phần khác bằng 0), khi đó $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_k}(\mathbf{a})$ chính là đạo hàm riêng theo biến thứ k của f tại $\mathbf{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$$

Định lí 1.3.6 *Giả sử* $\mathbf{f}$ *khả vi tại* $\mathbf{a}$*, khi đó tồn tại đạo hàm theo hướng bất kì* $\mathbf{e}$ *(*$\mathbf{e}$ *là véc tơ đơn vị) tại* $\mathbf{a}$ *và*

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{e}.}$$

Chú ý rằng $\mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{e}$ *là ảnh của véc tơ đơn vị* $\mathbf{e}$ *qua ánh xạ tuyến tính* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$*.*

Chứng minh. Đạo hàm theo hướng $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a})$ là đạo hàm hàm $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{e})$ tại điểm $t = 0$. Hàm $\mathbf{F}$ là hợp của 2 hàm $\mathbf{f}$ và $\mathbf{g}$, trong đó $\mathbf{g}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{e}$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(t).$$

Do $\mathbf{g}$ khả vi tại $t = 0$, $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{e}$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, áp dụng định lí đạo hàm hàm hợp, hàm $\mathbf{F}$ cũng khả vi tại $t = 0$ và

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(0) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(0)\big)\mathbf{g}'(0) = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{e}. \quad \blacksquare$$

Đặc biệt khi f là hàm n biến, $\alpha_i,\ i = 1, 2, ..., n$ là các côsin chỉ hướng của véc tơ $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \qquad \left(\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right).$$

Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Cũng như ý nghĩa đạo hàm của hàm một biến, đạo hàm theo hướng biểu diễn tốc độ biến thiên của hàm theo hướng đó. Đạo hàm theo hướng $\mathbf{u}$, theo công thức trên, được coi là *tích vô hướng của véc tơ các đạo hàm riêng* $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$ *với véc tơ đơn vị* $\mathbf{u}_0$ *của hướng* $\mathbf{u}$. Đạo hàm theo hướng đạt giá trị lớn nhất khi hướng của $\mathbf{u}$ trùng với hướng của véc tơ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$. Ta gọi *véc tơ đó là građiên của* f *tại* $\mathbf{a}$, kí hiệu

$$\overrightarrow{grad}\ f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right).$$

Ví dụ 1.3.6

1. Tìm đạo hàm theo hướng $\mathbf{u} = (1, 2)$ của hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại $M(3, 4)$. Véc tơ đơn vị chỉ hướng của $\mathbf{u} = (1, 2)$ bằng $\mathbf{u}_0 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Vậy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(2, 3) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}.$$

Véc tơ građiên của f tại $M(3, 4)$ bằng

$$\overrightarrow{grad}\ f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3, 4), \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4)\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

2. Nếu $\mathbf{u}$ là véc tơ khác $\mathbf{0}$ trong R^3 hợp với các trục tọa độ Đề các Ox, Oy, Oz các góc α, β, γ, khi đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véc tơ đơn vị của $\mathbf{u}$, ta nói $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các côsin chỉ hướng của véc tơ $\mathbf{u}$. Công thức đạo hàm theo hướng $\mathbf{u}$ của hàm $f(x, y, z)$ có dạng

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot \cos\gamma.$$

Chẳng hạn đạo hàm theo hướng $\mathbf{u}$ hàm $f(x,y,z) = xyz$ tại điểm $M(1,1,1)$ bằng

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(M) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Hàm ngược và đạo hàm hàm ngược

Trong Giải tích I, chúng ta đã phát biểu và chứng minh định lí đạo hàm hàm ngược:
Hàm $f : (a,b) \to T \subset \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên khoảng mở (a,b), giả thiết $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Khi đó tồn tại hàm ngược f^{-1} khả vi tại mọi $x \in T$, đồng thời

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \left(= \Big(f'(f^{-1}(x))\Big)^{-1} \right) \quad \forall x \in T.$$

Chúng ta sẽ mở rộng định lí này cho hàm véc tơ trong $\mathbb{R}^n$

Định lí 1.3.7 (Định lí đạo hàm hàm ngược) *Cho $U, V \subset \mathbb{R}^n$ là 2 tập mở trong $\mathbb{R}^n$, hàm véc tơ $\mathbf{f} : U \to V$ là hàm khả vi liên tục trên U. Nếu tại $\mathbf{a} \in U$, phép biến đổi tuyến tính $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (hoặc cũng có thể nói ma trận $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$) không suy biến, khi đó tồn tại tập mở $A \subset U$ chứa $\mathbf{a}$ và tập mở $B \subset V$ chứa $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ sao cho hàm véc tơ $\mathbf{f} : A \to B$ có hàm ngược $\mathbf{f}^{-1} : B \to A$ khả vi trên B, đồng thời*

$$\boxed{\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{x}) = \Big(\mathbf{f}'\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\right)\Big)^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in B.}$$

Ta thừa nhận định lí trên. Định lí đôi khi còn được viết tắt dưới dạng:
Nếu $\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \neq 0$ khi đó tồn tại hàm ngược $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ trong lân cận của $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ và với mọi $\mathbf{y}$ trong lân cận đó

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) = \Big(\mathbf{f}'\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\right)\Big)^{-1}.$$

Ví dụ 1.3.7

Ánh xạ

$$\mathbf{f} = (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

chiếu các điểm trong hình chữ nhật $D = \{(r, \varphi) \mid 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < r < 1\}$ vào hình tròn tâm $O(0, 0)$ bán kính đơn vị. Tại điểm $\mathbf{a} = (r, \varphi) \in D$ tùy ý, hàm $\mathbf{f}$ khả vi và

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

là ma trận không suy biến ($\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = r \neq 0\ \forall \mathbf{a} \in D$). Theo định lí đạo hàm hàm ngược, tồn tại ánh xạ ngược $r = r(x, y), \varphi = \varphi(x, y)$ và

$$(\mathbf{f}^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x, y) & -r(x, y)\sin\varphi(x, y) \\ \sin\varphi(x, y) & r(x, y)\cos\varphi(x, y) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{r(x, y)} \begin{pmatrix} r(x, y)\cos\varphi(x, y) & r(x, y)\sin\varphi(x, y) \\ -\sin\varphi(x, y) & \cos\varphi(x, y) \end{pmatrix}$$

Nói cách khác

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \cos\varphi(x, y), \quad \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \sin\varphi(x, y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{-\sin\varphi(x, y)}{r(x, y)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos\varphi(x, y)}{r(x, y)}$$

Chẳng hạn tại điểm $r = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\mathbf{f}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\right) \ \Rightarrow\ \mathbf{f}^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{4}\right)$$

suy ra các đạo hàm riêng của hàm ngược tại $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

$$\tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{-\sin\varphi}{r} = \frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\tfrac{\partial r}{\partial y}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sin\varphi = \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Hàm ẩn và đạo hàm hàm ẩn

Một khái niệm quan trọng trong giải tích hàm véc tơ là khái niệm *hàm ẩn*. Trong các điều kiện nhất định, với mỗi giá trị của biến $\mathbf{x}$ ta xác định được một và chỉ một giá trị $\mathbf{y}$ thỏa mãn hệ thức

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Như vậy hệ thức $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ xác định một hàm ẩn $\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ nào đó, ta thường viết $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ hoặc $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$.
Chẳng hạn hệ thức $2x - y + 3 = 0$ xác định hàm ẩn $y = 2x + 3$. Hệ thức $x^2 + y^2 = 1$ xác định hai hàm ẩn liên tục trên tập $[-1, 1]$ (với mỗi giá trị của biến $x \in (-1, 1)$ ta tìm được 2 giá trị của biến y thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$, do vậy tồn tại vô số các hàm ẩn từ hệ thức này. Tuy nhiên chỉ tồn tại hai hàm ẩn liên tục trên $[-1, 1]$ thỏa mãn hệ thức đó)

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{và} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

Một hệ thức 3 biến số $F(x, y, z) = 0$ có thể xác định các hàm ẩn

$$z = z(x, y) \quad \text{hoặc} \quad y = y(x, z) \quad \text{hoặc} \quad x = x(y, z)$$

Tương tự, một hệ thức véc tơ giữa các biến véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0 \\ Q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

xác định các hàm ẩn $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, chi tiết hơn đó là hàm véc tơ 3 biến

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \big(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x})\big) = \big(y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3)\big)$$

hay

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

Hàm ẩn trong một hệ thức không phải lúc nào cũng có thể biểu diễn một cách tường minh thành một hàm sơ cấp. Do vậy việc tính đạo hàm hàm ẩn thường được tính toán thông qua các hàm biểu diễn hệ thức chứa hàm ẩn. Xét trường hợp đơn giản hàm ẩn chứa trong hệ thức

$$F(x, y) = 0.$$

Giả thiết $F(x_0, y_0) = 0$ và hàm 2 biến $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại lân cận điểm $M(x_0, y_0)$, đồng thời tại đó $F'_y(M) \neq 0$. Khi đó tồn tại hàm ẩn khả vi $y = f(x)$ tại lân cận nào đó của x_0 và dễ dàng chứng minh được đạo hàm hàm ẩn trong lân cận đó

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\big(F'_y(x,y)\big)^{-1} F'_x(x,y).$$

Thật vậy đạo hàm theo x cả 2 vế của hệ thức $F\big(x, f(x)\big) = 0$

$$F'_x(x,y) + F'_y\big(f(x)\big) f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Mở rộng kết quả trên cho hàm véc tơ, người ta đã chứng minh được kết quả sau

Định lí 1.3.8 (Định lí đạo hàm hàm ẩn) *Cho $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, hàm véc tơ $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^m$ khả vi liên tục trên U. Giả thiết điểm $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ thỏa mãn hệ thức $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ (lưu ý $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$) và ma trận $\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ khả nghịch. Khi đó tồn tại lân cận V của $\mathbf{a}$ trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ khả vi liên tục trên V, thỏa mãn hệ thức $\mathbf{F}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V$ (hàm $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ được gọi là hàm ẩn), đồng thời*

$$\boxed{\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\Big(\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Big)^{-1} \mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).}$$

Chú ý rằng ma trận $\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ trong định lí là ma trận đạo hàm hàm $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{y})$ (hàm véc tơ m chiều, m biến) tại $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, ta cũng nói đó là đạo hàm riêng hàm $\mathbf{F}$ theo $\mathbf{y}$ tại $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

Tương tự ma trận $\mathbf{F}'_{\mathbf{x}}$ là ma trận đạo hàm riêng hàm $\mathbf{F}$ theo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, đó là ma trận kiểu $m \times n$. Định lí đưa ra công thức tính đạo hàm hàm ẩn bằng tích của hai ma trận $\big(\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)^{-1}$ và $\mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ta xét một vài trường hợp riêng của định lí

• Giả thiết các điều kiện của định lí đạo hàm hàm ẩn được thỏa mãn. Hệ thức

$$F(x, y, z) = 0$$

xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$ tại lân cận điểm (x, y) và đạo hàm hàm $z(x, y)$ (ma trận hàng) bằng

$$\begin{pmatrix} z'_x & x'_y \end{pmatrix} = -(F'_z)^{-1} \begin{pmatrix} F'_x & F'_y \end{pmatrix}$$

hay

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

• Hệ thức véc tơ $\mathbf{F}(x, y, u, v) = \mathbf{0}$, trong đó $\mathbf{F} = (P, Q)$ hay

$$\begin{cases} P(x, y, u, v) = 0 \\ Q(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

xác định hàm ẩn là hàm véc tơ $(u, v) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$ hay

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Đạo hàm hàm (u, v)

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} P'_u & P'_v \\ Q'_u & Q'_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}$$

• Hệ thức véc tơ 3 biến $\mathbf{F}(t, x, y) = \mathbf{0}$, trong đó $\mathbf{F} = (P, Q)$ hay

$$\begin{cases} P(t, x, y) = 0 \\ Q(t, x, y) = 0 \end{cases}$$

xác định hàm ẩn là một đường cong phẳng $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ hay

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Đạo hàm $\big(x'(t), y'(t)\big)$ xác định tiếp tuyến của đường cong đó

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P'_t \\ Q'_t \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.3.8

1. Hệ thức $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ xác định hàm ẩn là một đường tròn. Tại điểm (x, y) thuộc đường tròn có tung độ khác 0 (khi đó $F'_y = 2y \neq 0$), đạo hàm hàm ẩn $y = y(x)$

$$y'(x) = -\big(F'_y(x, y)\big)^{-1} F'_x(x, y) = -\frac{x}{y}.$$

   Chẳng hạn tại $M_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ thuộc đường tròn, hệ số góc của tiếp tuyến với đường tròn bằng

$$y'(x) = -\frac{y}{x} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$

   Tại điểm $M_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ thuộc đường tròn, hệ số góc của tiếp tuyến với đường tròn bằng

$$y'(x) = -\frac{y}{x} = -\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

2. Hàm ẩn xác định bởi các hệ thức

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   cũng là một đường tròn (giao của mặt phẳng với mặt cầu). Hàm véc tơ biểu diễn đường tròn đó

$$\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$$

có đạo hàm (tại các điểm $x \neq y$ thuộc đường tròn giao)

$$\begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P'_z \\ Q'_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(x-y)} \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ -2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y-z}{x-y} \\ \\ \frac{z-x}{x-y} \end{pmatrix}$$

hay

$$x'_z = \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \quad y'_z = \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

3. Cho ba hệ thức

$$x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$$

trong đó 2 hệ thức đầu $x = u + v,\ y = u^2 + v^2$ xác định hàm ẩn $\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ theo (x, y). Như vậy hệ thức thứ ba $z = u^3 + v^3$ coi z là hàm của x, y thông qua hàm ẩn $u(x,y), v(x,y)$. Hãy tính

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

2 hệ thức đầu $x = u + v,\ y = u^2 + v^2$ có thể viết gọn hơn dưới dạng véc tơ $\mathbf{F}(x, y, u, v) = \mathbf{0}$, trong đó hàm véc tơ $\mathbf{F}(x, y, u, v) = (P, Q)$

$$\begin{cases} P(x, y, u, v) = u + v - x \\ Q(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - y \end{cases}$$

Kí hiệu $\mathbf{x} = (x, y),\ \mathbf{u} = (u, v)$ khi đó $\mathbf{F}'_{\mathbf{u}}$ là ma trận vuông cấp 2

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} P'_u & P'_v \\ Q'_u & Q'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}'^{-1}_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2(v-u)} \begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng ma trận $\mathbf{F}'_{\mathbf{u}}$ khả nghịch khi và chỉ khi $u - v \neq 0$ hay

$$|u - v| = \sqrt{2(y^2 + v^2) - (u + v)^2} = \sqrt{2y - x^2} > 0.$$

Ma trận $\mathbf{F}'_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$, suy ra ma trận đạo hàm hàm ẩn

$$\mathbf{u}'_{\mathbf{x}} = -\left(\mathbf{F}'_{\mathbf{u}}\right)^{-1}\mathbf{F}'_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2(v-u)}\begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}$$

Chi tiết hơn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}$$

Các đạo hàm riêng cần tính khi đó bằng

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(u^3+v^3)}{\partial x} = 3u^2u'_x + 3v^2v'_x = 3u^2\frac{v}{v-u} + 3v^2\frac{u}{u-v} = -3uv$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(u^3+v^3)}{\partial y} = 3u^2u'_y + 3v^2v'_y = \frac{3u^2}{2(u-v)} + \frac{3v^2}{2(v-u)} = \frac{3(u+v)}{2}$$

1.4 Vi phân hàm số nhiều biến số

Cho hàm $f: U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $\mathbf{a} \in U$ (U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$). Trong định nghĩa 1.3.3 về ánh xạ khả vi, giả thiết $f'(\mathbf{a}) = A$, biểu thức tuyến tính

$$df(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

được gọi là vi phân của hàm f tại $\mathbf{a}$. Kí hiệu các thành phần tọa độ của véc tơ $\mathbf{x}-\mathbf{a}$ trong $\mathbb{R}^n$ là $\Delta x_i = x_i - a_i,\ i = 1, 2, ..., n$, khi đó vi phân của hàm f tại $\mathbf{a}$

$$df(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})\Delta x_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})\Delta x_2 + \cdots + f'_{x_n}(\mathbf{a})\Delta x_n.$$

Trong biểu thức vi phân của hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo các biến x_i (x_i là các biến độc lập), các số gia $\Delta x_i = x_i - a_i,\ i = 1, 2, ..., n$ cố định tùy ý, do đó $dx_i = \Delta x_i$ và ta viết

$$df(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})dx_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(\mathbf{a})dx_n.$$

Người ta cũng gọi biểu thức tuyến tính trên là *vi phân toàn phần* của hàm f tại $\mathbf{a}$ (để phân biệt với vi phân hàm f theo riêng một vài biến x_i nào đó). Nếu hàm $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại mọi điểm $\mathbf{x} \in U$, ta viết ngắn gọn vi phân của hàm f trên tập đó

$$df = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + \cdots + f'_{x_n} \cdot dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i.$$

Ví dụ 1.4.1

1. Vi phân toàn phần của hàm $u = x + y^2 + z^3$

$$du = dx + 2ydy + 3z^2dz,$$

vi phân của hàm u tại điểm $M(-1, 2, 1)$ bằng

$$du(-1, 2, 1) = -dx + 4dy + 3dz.$$

2. Cho hàm $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & \text{nếu } \ y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ y = 0 \end{cases}$$

Hiển nhiên tồn tại các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } \ y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2 + y^2} & \text{nếu } \ y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ y = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy các hàm $u, \ u_x, \ u_y$ được xác định trên toàn bộ $\mathbb{R}^2$. Hàm u'_x liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}^2$, trừ gốc tọa độ $O(0, 0)$.
Các hàm $u, \ u'_y$ liên tục tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $y \neq 0$, nói cách khác chúng liên tục trên $\mathbb{R}^2$, trừ các điểm thuộc trục hoành.
Theo định lí 1.3.3, hàm u khả vi tại các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $y \neq 0$. Tại đó vi phân của hàm u

$$d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)'_x dx + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)'_y dy = \frac{y \ dx - x \ dy}{x^2 + y^2}.$$

1.4.1 Tính bất biến của vi phân

Giả sử hàm $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi trên A và vi phân của hàm f

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i.$$

Nếu các biến $x_i = x_i(\mathbf{t}) = x_i(t_1, t_2, ..., t_m)$ là các hàm của các biến mới $\mathbf{t}$ và giả thiết các hàm đó khả vi tại $\mathbf{t} = \mathbf{t}^{(0)} \in \mathbb{R}^m$. Khi đó theo định lí đạo hàm hàm hợp, hàm

$$u(\mathbf{t}) = f\big(\mathbf{x}(\mathbf{t})\big) = f\big(\mathbf{x}(t_1, t_2, ..., t_m)\big)$$

khả vi tại $\mathbf{t} = \mathbf{t}^{(0)}$ đồng thời

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}(\mathbf{t}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\mathbf{x}(\mathbf{t}^{(0)})\big) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}^{(0)}) \quad \forall i = 1, ..., m$$

Vi phân hàm u do đó bằng

$$du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_i} \cdot dt_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) \cdot dt_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \cdot dt_i \right)$$

Mặt khác biểu thức trong ngoặc $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \cdot dt_i$ chính là vi phân dx_j của hàm $x_j = x_j(\mathbf{t})$, suy ra

$$du = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j = df.$$

Nói cách khác vi phân cấp một của hàm số nhiều biến số không thay đổi khi ta thay các biến độc lập bằng các hàm theo các biến mới. Ta nói đó là tính *bất biến của vi phân cấp một của hàm số nhiều biến số*.

Tính bất biến của vi phân cấp một trong giải tích hai kế thừa tính bất biến của vi phân cấp một hàm một biến. Nó đã từng là công cụ thuận lợi cho phương pháp đổi biến trong tích phân xác định và trong giải tích hai nó lại được thể hiện trong các kí hiệu truyền thống của tích phân đường loại hai hoặc trong phương pháp phân li biến số để giải một dạng phương trình vi phân.

1.4.2 Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

Từ định nghĩa của vi phân

$$df(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot dx_i$$

ta thấy, cũng như hàm số một biến số, số gia hàm số

$$\Delta f = f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}) + o(\Delta\mathbf{x}).$$

Như vậy với Δx đủ nhỏ ta có thể xấp xỉ số gia hàm số Δf tại $\mathbf{a}$ với vi phân $df(\mathbf{a})$ (sai khác một vô cùng bé cấp cao hơn $|\Delta x|$)

$$\Delta f = f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \approx df(\mathbf{a})$$

hay

$$f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a})$$

Ta sử dụng công thức này để tính gần đúng $f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x})$ khi $\Delta\mathbf{x}$ đủ bé.

Ví dụ 1.4.2

Tính gần đúng $\sqrt{4,01^2 - 2,03^2}$, xét hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ tại điểm $x_0 = 4,\ y_0 = 2$

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ f'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Sử dụng công thức tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\Delta x + \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\Delta y$$

Với $\Delta x = 0,01,\ \Delta y = 0,03$

$$\sqrt{4,01^2 - 2,02^2} \approx \sqrt{4^2 - 2^2} + \frac{4 \cdot 0,01}{\sqrt{4^2 - 2^2}} - \frac{2 \cdot 0,03}{\sqrt{4^2 - 2^2}} = 3,458.$$

1.4.3 Vi phân cấp cao hàm nhiều biến

Giả sử trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$ hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi, khi đó vi phân (toàn phần) cấp một của f

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Các vi phân $dx_1, dx_2, ..., dx_2$ là các số gia tùy ý của các biến độc lập. Cố định các số gia đó, df lại là hàm số n biến xác định trên tập D. Nếu df có các đạo hàm riêng liên tục tại mọi điểm thuộc D, khi đó df khả vi trên miền D và vi phân của nó được gọi là *vi phân cấp hai* (toàn phần) của hàm f, kí hiệu

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n.$$

Bằng quy nạp, nếu hàm f có các đạo hàm riêng cấp k liên tục tại mọi điểm thuộc D, khi đó hàm f có *vi phân cấp* k trên D và

$$d^k f = d(d^{k-1} f).$$

Xét trường hợp riêng khi $z = f(x, y)$ là hàm thực hai biến số có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại mọi điểm thuộc miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nào đó. Vi phân cấp hai của f có dạng

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng do giả thiết hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục và theo định lí Schwarz 1.3.1, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Để dễ nhớ, công thức tính vi phân cấp hai hàm số hai biến số nêu trên được viết một cách *hình thức* dưới dạng

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 \cdot f$$

Mở rộng cho vi phân cấp k hàm số hai biến số, người ta sử dụng công thức *hình thức* sau để tính vi phân

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k \cdot f$$

Chẳng hạn vi phân cấp ba

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot f = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2\frac{\partial}{\partial y}dy + 3\frac{\partial}{\partial x}dx\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right) \cdot f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Chú ý rằng các vi phân biến độc lập $dx_i,\ i = 1, 2, ..., n$ là các số gia cố định tùy ý tương ứng với các biến x_i. Biểu thức vi phân cấp một là một dạng tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Biểu thức vi phân cấp hai là một dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot dx_i dx_j.$$

Ma trận của dạng toàn phương này cũng được gọi là ma trận dạng vi phân cấp hai của hàm số nhiều biến số

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Công thức hình thức để tính vi phân cấp k hàm số n biến cũng được thiết lập tương tự

$$d^k f = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i\right)^k \cdot f$$

Ví dụ 1.4.3

1. Cho hàm $z = x^2 \sin y$. Vi phân toàn phần hàm z bằng

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = 2x \sin y dx + x^2 \cos y dy$$

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$z''_{xx} = 2\sin y,\ z''_{xy} = z''_{yx} = 2x\cos y,\ z''_{yy} = -x^2 \sin y.$$

Áp dụng công thức tính vi phân cấp hai $d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$ ta được

$$d^2z = 2\sin y dx^2 + 4x \cos y dxdy - x^2 \sin y dy^2.$$

2. Tính vi phân cấp hai hàm $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2+y^2)}$. Trước hết ta tính các đạo hàm riêng cấp một

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - x^3)e^{-(x^2+y^2)},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$$

Do đó vi phân toàn phần hàm f

$$df = e^{-(x^2+y^2)}\big(2(x-x^3)dx - 2x^2 y dy\big).$$

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(1 - 5x^2 + 2x^4)e^{-(x^2+y^2)},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2(2y^2-1)e^{-(x^2+y^2)}$$

Đạo hàm chéo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y(x^3 - x)e^{-(x^2+y^2)}$. Suy ra vi phân cấp hai

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}\Big(2(1-5x^2+2x^4)dx^2 + 8y(x^3-x)dxdy + 2x^2(2y^2-1)dy^2\Big).$$

Tại điểm $A(1,2)$, vi phân cấp một là dạng tuyến tính

$$df(A) = e^{-(x^2+y^2)}\big(2(x-x^3)dx - 2x^2 y dy\big)\Big|_{x=1,y=2} = -4e^{-5}dy.$$

Tại điểm $A(1,2)$, vi phân cấp hai là dạng toàn phương theo các biến dx, dy

$$d^2 f(A) = -4e^{-5}dx^2 + 14e^{-5}dy^2 + 0dxdy = \frac{1}{e^5}(-4dx^2 + 14dy^2).$$

1.5 Cực trị hàm số nhiều biến số

Trong mục này ta chỉ xét các hàm thực n biến $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.5.1 Cực trị tự do

Định nghĩa 1.5.1 $\mathbf{a} \in D$ *là điểm trong của* $D \subset \mathbb{R}^n$ *và xét hàm thực n biến* $f : D \to \mathbb{R}$. *Ta nói hàm* f *đạt cực đại (cực tiểu) tại* $\mathbf{a}$ *nếu tồn tại một lân cận* V *của* $\mathbf{a}$ *sao cho*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \big(f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{a})\big) \quad \text{với mọi} \quad \mathbf{x} \in V \cap D.$$

Ta nói f *đạt cực trị tại* $\mathbf{a}$ *nếu* f *đạt cực đại hoặc cực tiểu tại đó.*

Khái niệm cực trị trong định nghĩa trên có tính chất địa phương và được coi là *cực trị tự do* (để phân biệt với khái niệm cực trị vướng sẽ trình bày ở cuối mục này). Tương tự như cực trị hàm một biến, định lí sau cho ta điều kiện cần để hàm đạt cực trị.

Định lí 1.5.1 *Giả thiết hàm* $f : D \to \mathbb{R}$ *đạt cực trị tại* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ *và tồn tại các đạo hàm riêng của* f *tại đó thì*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Chứng minh. Lập hàm $F(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n)$. Theo giả thiết của định lí, hàm F xác định tại lân cận $t = 0$ và đạt cực trị tại $t = 0$. **Á**p dụng định lí Fermat cho hàm một biến F

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0.$$

Khẳng định trên đúng với mọi $i = 1, 2, ..., n$. ■

Điểm $\mathbf{a} \in D$ làm cho các đạo hàm riêng của f bằng 0 được gọi là *điểm dừng* của hàm f. Định lí chỉ cho ta điều kiện cần (nhưng chưa đủ) để hàm đạt cực trị:

Xét ví dụ hàm $f(x, y) = x^3 + y^3$ có điểm dừng duy nhất $x = 0, y = 0$. Tuy nhiên hàm không đạt cực trị tại đó (trong lân cận điểm $O(0, 0)$ hàm f dương nếu $x, y > 0$ và âm nếu $x < 0, y < 0$).

Lưu ý rằng theo định lí trên, việc tìm cực trị (tự do) hàm số trên miền D được hạn chế chỉ xét trong tập các điểm dừng nếu *hàm khả vi trên D.* Cũng như hàm số một biến số, hàm nhiều biến cũng có thể đạt cực trị tại các điểm mà hàm không khả vi tại đó. Điểm dừng của hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Trong giải tích hàm số một biến người ta đưa ra một quy tắc tìm cực trị hàm số: nếu tại điểm dừng nào đó, hàm có đạo hàm cấp hai dương hoặc âm thì hàm đạt cực trị tại điểm dừng đó. Ta mở rộng kết quả này cho hàm số nhiều biến số.

Định lí 1.5.2 (Điều kiện đủ để hàm đạt cực trị) *Giả thiết các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liên tục tại lân cận điểm $\mathbf{a}$, điểm $\mathbf{a} \in D$ là điểm dừng của hàm f. Kí hiệu A là ma trận của dạng vi phân cấp hai hàm f tại $\mathbf{a}$. Nói cách khác A là ma trận các đạo hàm riêng cấp hai tại $\mathbf{a}$*

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

• *Nếu $d^2 f(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu tại $\mathbf{a}$.*
• *Nếu $d^2 f(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại tại $\mathbf{a}$.*
• *Nếu vi phân cấp hai $d^2 f(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương không xác định dấu thì f không đạt cực trị tại $\mathbf{a}$.*

Nhận xét rằng từ giả thiết của định lí các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại lân cận điểm $\mathbf{a}$ suy ra f khả vi tại lân cận điểm $\mathbf{a}$ và ma trận A là ma trận đối xứng. Điểm $\mathbf{a} \in D$ là điểm dừng của f nên ta có thể viết $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Ta thừa nhận định lí trên và lưu ý bạn đọc một số vấn đề liên quan tới dạng toàn phương.

Trong đại số tuyến tính người ta đã chứng minh
• Dạng toàn phương ω xác định dương nếu ma trận của ω có mọi giá trị riêng dương.
• Dạng toàn phương ω xác định âm nếu mọi giá trị riêng của ma trận của ω âm.
• ω không xác định dấu nếu tồn tại hai giá trị riêng ma trận của ω trái dấu.
Kí hiệu $A = (a_{ij})$ là ma trận của dạng toàn phương ω, một điều kiện đủ đơn giản hơn để ω xác định dương (xác định âm) là lập dãy các định thức con chính góc

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ...,\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nếu $A_1 > 0,\ A_2 > 0, ..., A_n > 0$ thì ω xác định dương.
Nếu $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ A_4 > 0, ...$ (đan dấu) thì ω xác định âm.

Trường hợp đặc biệt nếu $f(x, y)$ là hàm số hai biến số. Quy tắc tìm cực trị hàm f tại các điểm hàm khả vi được xác định như sau:
• *Bước 1* Tìm điểm dừng của hàm $f(x, y)$ bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

• *Bước 2* Với mỗi nghiệm $M(x_0, y_0)$ tìm được từ hệ phương trình trên, tính các đạo hàm riêng cấp hai tại đó lập ma trận của dạng toàn phương $d^2 f(M)$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M),\quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Nếu $A > 0$ và $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, hàm đạt cực tiểu tại M.
Nếu $A < 0$ và $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, hàm đạt cực đại tại M.

Nếu $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 < 0$, dạng toàn phương $d^2f(M)$ không xác định dấu (do 2 giá trị riêng của ma trận trái dấu nhau), hàm không đạt cực trị tại M.

Quy tắc tìm cực trị các hàm số n biến ($n > 2$) cũng được tiến hành tương tự, áp dụng các kết quả trong đại số tuyến tính để xét dạng vi phân cấp hai d^2f tại các điểm dừng. Chú ý rằng nếu vi phân đó không thuộc một trong 3 dạng đã liệt kê trong định lí, ta không có khẳng định gì về cực trị của hàm.

Ví dụ 1.5.1

1. Tìm cực trị hàm $u = 3x^2y - x^3 - y^4$.
   Tìm điểm dừng hay giải hệ phương trình $\begin{cases} u'_x = 6xy - 3x^2 = 0 \\ u'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$
   Ta được 2 điểm dừng $M_1(0,0)$ và $M_2(6,3)$. (Hàm chỉ có thể đạt cực trị tại một trong hai điểm đó).
   Các đạo hàm riêng cấp hai $u''_{xx} = 6y - 6x$, $u''_{xy} = 6x$, $u''_{yy} = -12y^2$.
   • Tại $M_2(6,3)$, ma trận các đạo hàm riêng cấp hai
   $$\begin{pmatrix} 6y - 6x & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}\Big|_{x=6,y=3} = \begin{pmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{pmatrix}$$
   Do $A = -18 < 0$, $\begin{vmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{vmatrix} = 648 > 0$, hàm đạt cực đại tại $M_2(6,3)$.
   • Tại $M_1(0,0)$, ma trận đạo hàm riêng cấp hai là ma trận không, dạng toàn phương $d^2u(M_1)$ không thuộc dạng nào trong các dạng đã nêu trong định lí về điều kiện đủ để xét cực trị, do vậy ta phải tìm các phương pháp khác dựa vào đặc thù riêng của mỗi bài toán.
   Trong ví dụ này ta sẽ chứng minh hàm không đạt cực trị tại $M_1(0,0)$. Thật vậy, tại các điểm trên Ox thuộc *lân cận bất kì* điểm $M_1(0,0)$, ta thấy $u(x,0) = -x^3 < 0 = u(0,0)$ nếu $x > 0$ và $u(x,0) = -x^3 > 0 = u(0,0)$ nếu $x < 0$. Tại $M_1(0,0)$ hàm không thoả mãn định nghĩa 1.5.1.

2. Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.
   Giải hệ phương trình $\begin{cases} f'_x = 4x - y + 2z = 0 \\ f'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ f'_z = 2x + 2z = 0 \end{cases}$

ta được 2 điểm dừng $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ và $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
Các đạo hàm riêng cấp hai

$$f''_{xx} = 4,\ f''_{xy} = -1,\ f''_{xz} = -1,\ f''_{yy} = 6y,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 2$$

• Tại $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, ma trận các đạo hàm riêng cấp hai

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

xác định dương $A_1 = 4 > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, A_3 = 14 > 0,$
hàm đạt cực tiểu tại $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Giá trị cực tiểu $f(M_1) = -\frac{13}{27}$.
• Tại $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, ma trận đạo hàm riêng cấp hai

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

không xác định dấu (ma trận có hai phần tử nằm trên đường chéo chính trái dấu nhau), theo định lí về điều kiện đủ để xét cực trị, hàm f không đạt cực trị tại $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

1.5.2 Cực trị có điều kiện hay cực trị vướng

Trong mục trước ta đã đưa ra quy tắc tìm cực trị (tự do) hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$ (các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ biến thiên "tự do" trên miền D). Trong mục này ta sẽ nghiên cứu bài toán cực trị hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ khi các biến chạy trên D và chịu các sự ràng buộc nhất định. Thông thường các sự ràng buộc đó là các hệ thức $\varphi(\mathbf{x}) = 0, \psi(\mathbf{x}) = 0, ...$
Ta gọi các bài toán cực trị như vậy là *cực trị có điều kiện* hay *cực trị vướng*.

Chẳng hạn tìm cực trị hàm $f(x, y)$ trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ với điều kiện các biến x, y thỏa mãn hệ thức

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (A)$$

Hệ thức (A) xác định một đường cong phẳng trong $\mathbb{R}^2$, bài toán yêu cầu tìm cực trị hàm $f(x, y)$ trên đường cong đó (tất nhiên chỉ xét phần đường cong trong miền D).

Một bài toán khác tìm cực trị hàm $f(x,y,z)$ trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ với điều kiện các biến x,y,z thỏa mãn 2 hệ thức

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (B)$$

Hệ thức (B) xác định một đường cong trong không gian, bài toán yêu cầu tìm cực trị hàm $f(x,y,z)$ trên đường cong đó.

Bài toán tổng quát: tìm cực trị hàm $f(x_1,x_2,...,x_n)$ trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$ với điều kiện các biến $x_1,x_2,...,x_n$ thỏa mãn hệ thức $\boldsymbol{\varphi}(x_1,x_2,...,x_n) = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m)$ là hàm véc tơ m chiều n biến, $m < n$). Hệ thức $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ có thể viết chi tiết hơn dưới dạng

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_m(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \end{cases} \qquad (C)$$

Nếu điều kiện (C) xác định một hàm ẩn, chẳng hạn hàm ẩn $\mathbf{g} = (g_1,g_2,...,g_m)$ theo $n-m$ biến còn lại, ta có thể rút $\mathbf{g}$ từ điều kiện (C) để thay vào hàm f, bài toán dẫn đến tìm cực trị tự do hàm số $n-m$ biến đã xét ở mục trên.

Ví dụ tìm cực trị hàm $z = x^2 + y^2$ với điều kiện (x,y) thuộc đường thẳng $x+y+1 = 0$. Thay $y = -1-x$ từ phương trình đường thẳng vào hàm đã cho, bài toán dẫn đến tìm cực trị hàm một biến $z = 2x^2 + 2x + 1$.
Hàm $z = 2x^2+2x+1 = 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$ hiển nhiên đạt cực tiểu tại $x = -\frac{1}{2}$.
Vậy hàm 2 biến đã cho ban đầu $z = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu với điều kiện $x+y+1 = 0$ tại $M(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ trên đường thẳng đó.

Trong nhiều trường hợp việc xác định chính xác hàm ẩn từ điều kiện (C) gặp nhiều khó khăn. Người ta đưa ra một phương pháp mang tên *phương pháp nhân tử Lagrange* để giải quyết bài toán cực trị có điều kiện. Phương pháp nhân tử Lagrange dựa trên định lí sau

Định lí 1.5.3 (Điều kiện cần để hàm đạt cực trị có điều kiện) *Giả thiết hàm $f(\mathbf{x})$ khả vi liên tục trên tập mở $D \subset \mathbb{R}^n$, ánh xạ $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,...,\varphi_m) : D \to$*

$\mathbb{R}^m$ $(m < n)$ *khả vi liên tục tại lân cận điểm* $\mathbf{a} \in D$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
Giả sử hàm f *đạt cực trị với điều kiện* $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ *tại* $\mathbf{a}$ *đồng thời ma trận ánh xạ đạo hàm* $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{a})$ *có hạng bằng* m. *Khi đó tồn tại duy nhất các số* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện hàm*

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(\mathbf{x})$$

khả vi tại $\mathbf{a}$ *và* $\Phi'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Các số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ trong định lí được gọi là các *nhân tử Lagrange.* Trước mắt ta thừa nhận định lí trên và dựa vào đó để đưa ra quy tắc tìm cực trị có điều kiện. Trong phần phụ lục của chương này ta sẽ chứng minh định lí để độc giả tham khảo.
• *Bước 1.* Lập hàm $\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(\mathbf{x})$ (với các số λ_i trước mắt là các số cố định tùy ý).
Tìm các điểm để tại đó hàm có thể đạt cực trị. Theo định lí trên, điểm đó là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi'(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình để tìm nghiệm $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Lưu ý rằng nếu viết chi tiết, đây là hệ phương trình gồm $n + m$ phương trình, với các ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$ và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Các số λ_i thỏa mãn hệ phương trình là các nhân tử Lagrange nói đến trong định lí.
• *Bước 2.* Với mỗi nghiệm $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ tìm được từ hệ phương trình trên (cùng với các nhân tử Lagrange λ_i tương ứng), lập hàm

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(\mathbf{x}).$$

Giả thiết các hàm $f(\mathbf{x})$ và các hàm $\varphi_1(\mathbf{x}), ..., \varphi_m(\mathbf{x})$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Khi đó $\Phi'(\mathbf{a}) = 0$, nói cách khác $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ là điểm dừng của hàm $\Phi(\mathbf{x})$. Tính vi phân cấp hai $d^2\Phi(\mathbf{a})$. Ta cũng có kết luận tương tự như đã biết khi tìm cực trị tự do
• Nếu $d^2\Phi(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu có điều kiện tại $\mathbf{a}$.
• Nếu $d^2\Phi(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại có điều kiện tại $\mathbf{a}$.
• Nếu vi phân cấp hai $d^2\Phi(\mathbf{a})$ không là dạng toàn phương xác định dương

hoặc âm, bài toán khi nào f đạt cực trị có điều kiện tại $\mathbf{a}$ phức tạp hơn đôi chút. Trong trường hợp này, việc tìm cực trị có điều kiện của hàm f tại $\mathbf{a}$ tương đương với việc tìm cực trị tự do hàm $n-m$ biến sau khi thay hàm ẩn $\mathbf{g}$ xác định từ điều kiện (C) vào hàm f. Do vậy ta cần biểu diễn vi phân cấp hai $d^2\Phi(\mathbf{a})$ theo $n-m$ biến độc lập, chú ý rằng đạo hàm hàm ẩn $\mathbf{g}$ được xác định thông qua vi phân cấp một hệ thức (C)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i} dx_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i} dx_i = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdot \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i} dx_i = 0 \end{cases} \qquad (D)$$

Ví dụ 1.5.2

1. Tìm cực trị hàm $u = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$. Lập hàm $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ và giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ \quad x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$
Nghiệm của hệ phương trình
$M_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ứng với $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ và $M_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_2 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ Vi phân cấp hai của hàm $\Phi(x,y)$ tại $M_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$$d^2\Phi(M_1) = 2(1+\lambda_1)(dx^2 + dy^2) = (3-\sqrt{2})(dx^2 + dy^2)$$
xác định dương. Vậy hàm đã cho đạt cực tiểu với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$ tại $M_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $u(M_1) = 5 - 4\sqrt{2}$.
Tương tự vi phân cấp hai của hàm $\Phi(x,y)$ tại $M_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ xác định âm. Hàm đã cho đạt cực đại với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$ tại $M_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2. Tìm cực trị hàm $u = x + y + z$ với điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

   Lập hàm $\Phi(x,y,z) = x + y + z + \lambda(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1)$ và giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \Phi'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \Phi'_z = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{x^2} = 1 \\ x^2 = y^2 = z^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình $x = y = z = 3$, hoặc 2 trong số 3 biến nhận các giá trị đối nhau và bằng ± 1, biến còn lại bằng 1. Ta sẽ chứng minh hàm đạt cực tiểu trong trường hợp đầu và không đạt cực trị trong các trường hợp còn lại.

Vi phân cấp hai của hàm $\Phi(x, y, z)$

$$d^2\Phi(x, y, z) = \frac{2\lambda}{x^3}dx^2 + \frac{2\lambda}{y^3}dy^2 + \frac{2\lambda}{z^3}dz^2.$$

• Tại điểm $x = y = z = 3$, giá trị λ tương ứng bằng 9, vi phân cấp hai của Φ tại đó xác định dương

$$d^2\Phi = 6dx^2 + 6dy^2 + 6dz^2,$$

hàm đạt cực tiểu với giá trị cực tiểu $u = 1$.
• Tại các điểm khác, do tính đối xứng, ta chỉ cần xét cực trị tại một điểm, chẳng hạn tại $M(1, -1, 1)$. **Ứng** với các điểm này $\lambda = 1$, vi phân cấp hai của Φ tại đó

$$d^2\Phi(1, -1, 1) = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2$$

không xác định dấu. Trong trường hợp này, ta phải tính $d^2\Phi$ theo 2 biến độc lập x, y. Điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$, sử dụng (D) để tính vi phân cấp một hàm ẩn đó tại $M(1, -1, 1)$

$$dz = -dx - dy.$$

Suy ra

$$d^2\Phi(M) = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2 = 4dx^2 + 4dxdy = (2dx + dy)^2 - dy^2.$$

Đây là dạng toàn phương không xác định dấu trong $\mathbb{R}^2$. Vậy hàm không đạt cực trị tại $M(1, -1, 1)$.

Nhận xét rằng ta có thể giải bài tập trên theo cách khác không cần xét vi phân cấp hai của Φ.

• Thật vậy tại lân cận điểm $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ các điểm (x, y, z) có các thành phần đều dương. Theo bất đẳng thức Cauchy

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}}} \geq \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 9.$$

• Để chứng minh hàm số không đạt cực trị tại các điểm như $M(1, -1, 1)$, lập số gia hàm số tại $M(1, -1, 1)$

$$\Delta u = (x + y + z) - (1 - 1 + 1) = x + y + z - 1.$$

Trong lân cận điểm $M(1, -1, 1)$ xét các điểm (x, y, z) có tính chất

(a) $x = z = 1+\varepsilon$, từ điều kiện ràng buộc $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$ suy ra $y = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}$. Do đó

$$\Delta u = x + y + z - 1 = \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon - 1} < 0 \quad \text{khi} \quad \varepsilon \to 0+$$

(b) Chọn trong lân cận M các điểm khác $x = 1 + \varepsilon, z = 1 - \varepsilon$, suy ra $y = \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2+1}$. Do đó

$$\Delta u = x + y + z - 1 = \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 1} > 0 \quad \text{khi} \quad \varepsilon \to 0+$$

Vậy hàm $u = x + y + z$ không đạt cực trị vướng tại điểm $M(1, -1, 1)$.

3. Tìm cực trị hàm $u = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{1} = 1$.

Lập hàm $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{1} - 1\right)$ và giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x + \frac{2\lambda x}{9} = 0 \\ \Phi'_y = 2y + \frac{2\lambda y}{4} = 0 \\ \Phi'_z = 2z + 2\lambda z = 0 \\ \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \ M_{1,2} = (0, 0, \pm 1) \\ \lambda = -9, \ M_{3,4} = (\pm 3, 0, 0) \\ \lambda = -4, \ M_{5,6} = (0, \pm 2, 0) \end{cases}$$

Vi phân cấp hai của hàm $\Phi(x, y, z)$

$$d^2\Phi(x, y, z) = \left(2 + \frac{2\lambda}{9}\right) dx^2 + \left(2 + \frac{2\lambda}{4}\right) dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2.$$

• Tại điểm $M_{1,2}$, giá trị λ tương ứng bằng $\lambda = -1$, vi phân cấp hai của Φ tại đó bán xác định dương trong $\mathbb{R}^3$

$$d^2\Phi(0, 0, \pm 1) = \frac{16}{9}dx^2 + \frac{3}{2}dy^2.$$

Ta chưa có cơ sở để khẳng định hàm $u = x^2 + y^2 + z^2$ đạt cực tiểu có điều kiện tại $M_{1,2} = (0, 0, \pm 1)$. Tuy nhiên trong trường hợp này, sử dụng hệ thức (D) : $\dfrac{2x\,dx}{3^2} + \dfrac{2y\,dy}{2^2} + 2z\,dz = 0$, vi phân hàm ẩn tại $M_{1,2} = (0, 0, \pm 1)$ bằng $dz = 0$. Do đó dạng vi phân cấp hai hàm $\Phi(x, y, z)$ theo 2 biến x, y trong $\mathbb{R}^2$ không thay đổi, $d^2\Phi(0, 0, \pm 1) = \frac{16}{9}dx^2 + \frac{3}{2}dy^2$ xác định dương trong $\mathbb{R}^2$. Vậy hàm $u = x^2 + y^2 + z^2$ đạt cực tiểu có điều kiện tại $M_{1,2} = (0, 0, \pm 1)$. Giá trị cực tiểu $u = 1$.

• Tương tự tại điểm $M_{3,4}$, hàm đạt cực đại có điều kiện, giá trị cực đại $u = 9$.

• Tại điểm $M_{5,6} = (0, \pm 2, 0)$, giá trị λ tương ứng bằng $\lambda = -4$, vi phân cấp hai của Φ tại đó không xác định dấu

$$d^2\Phi(0, \pm 2, 0) = \frac{10}{9}dx^2 - 6dz^2.$$

Hệ thức (D) tại $M_{5,6}$, tương tự như trên, dẫn đến $dy = 0$. Như vậy điều kiện $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1} = 1$ tại lân cận các điểm $M_{5,6}$ xác định hàm ẩn $y = y(x, z)$, vi phân cấp hai hàm $\Phi(x, y(x, z), z)$ theo 2 biến độc lập x, z trong $\mathbb{R}^2$ không thay đổi, nó không xác định dấu. Vậy hàm đã cho không đạt cực trị có điều kiện tại $M_{5,6}$.

Ví dụ trên cho ta minh họa hình học: các hình cầu tâm $O(0, 0, 0)$ *chỉ có thể tiếp xúc với elipxôit* $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1} = 1$ *tại các đỉnh của nó. Tại các đỉnh* $M_{3,4} = (\pm 3, 0, 0)$, *hình cầu tiếp xúc với elipxôit sẽ nằm ngoài (chứa) elipxôit và tại* $M_{1,2} = (0, 0, \pm 1)$, *hình cầu tiếp xúc với elipxôit được chứa trong elipxôit. Hình cầu tâm* $O(0, 0, 0)$ *đi qua các đỉnh* $M_{5,6} = (0, \pm 2, 0)$ *có phần nằm ngoài và có phần nằm trong elipxôit.*

Nhận xét (Liên quan tới việc tìm *giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm liên tục trên một miền đóng và bị chặn*).
Nếu $f(\mathbf{x})$ là hàm liên tục trên một miền đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^n$, khi đó f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Nếu giả thiết tiếp hàm f khả vi trong miền D, khi đó 2 khả năng có thể xảy ra
• Giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất đạt được bên trong miền D, điểm đó phải là điểm dừng của hàm f.
• Nếu giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất đạt được trên biên miền D, ta có thể tìm được nó thông qua việc tìm cực trị trên biên. Bài toán tìm cực trị trên biên một miền nào đó cũng chính là bài toán tìm cực trị có điều kiện.

Do đó ta có quy tắc sau để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm liên tục trên một miền đóng và bị chặn D.
• *Bước 1.* Tìm tất cả các điểm dừng của f trong miền D. Tính giá hàm f tại các điểm đó cũng như tại các điểm trong miền D mà f không khả vi.
• *Bước 2.* Giải bài toán cực trị có điều kiện của hàm f khi các biến chạy trên biên miền D.
Cuối cùng ta so sánh các giá trị của hàm tại các điểm đã tiến hành trong bước 1 và bước 2 để xác định giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số đã cho.

Ví dụ 1.5.3

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm $f(x,y) = x^2+y^2-2x-2y+1$ trên miền giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=4$.
Hiển nhiên f khả vi liên tục tại mọi điểm trong hình tròn. Các điểm dừng của f là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 2x-2 = 0 \\ f'_y = 2y-2 = 0 \end{cases} \qquad \text{hay} \quad x=1, y=1$$

Điểm $M_1(1,1)$ là điểm dừng duy nhất nằm trong hình tròn nói trên.

Bây giờ ta xét cực trị của hàm f ở trên biên, hay bài toán cực trị của f với điều kiện $x^2+y^2=4$. Bài toán đã được xét trong ví dụ 1.5.2, tuy nhiên để tìm giá trị lớn nhất và bé nhất ta có thể làm gọn hơn như sau
Thay biểu diễn tham số $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ của đường tròn $x^2+y^2 = 4$ vào hàm f

$$u = f(2\cos t, 2\sin t) = 5 - 4\cos t - 4\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Hàm một biến $u(t)$ có 2 điểm dừng trên đoạn $[0, 2\pi]$, đó là $t_1 = \frac{\pi}{4}$ và $t_2 = \frac{5\pi}{4}$. Tương ứng với chúng là 2 điểm $M_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

Tính các giá trị hàm số đã cho tại các điểm $M_1(1,1)$, $M_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ và $M_3(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$f(M_1) = -1, f(M_2) = 5 - 4\sqrt{2}, f(M_3) = 5 + 4\sqrt{2}.$$

Vậy hàm đạt giá trị lớn nhất tại $M_3(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ và $\max f = 5 + 4\sqrt{2}$. Hàm đạt giá trị nhỏ nhất tại $M_1(1,1)$ và $\min f = -1$.

1.6 Phụ lục

Định lí 1.5.3 về điều kiện cần để hàm đạt cực trị có điều kiện được phát biểu lại dưới dạng sau

Định lí 1.6.1 *Giả thiết hàm $f(\mathbf{x})$ khả vi liên tục trên tập mở $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, ánh xạ $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : D \to \mathbb{R}^m$ khả vi liên tục tại lân cận điểm $\mathbf{a} \in D$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Ta đưa vào các kí hiệu*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}),\ \mathbf{y} = (x_1, x_2, ..., x_k),\ \mathbf{z} = (x_{k+1}, ..., x_n),\ \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in D.$$

Giả sử hàm f đạt cực trị với điều kiện $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tại $\mathbf{a}$ đồng thời ma trận ánh xạ đạo hàm $\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a})$ khả nghịch (do đó $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{a})$ có hạng bằng m). Khi đó tồn tại duy nhất các số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ sao cho hàm

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$$

khả vi tại $\mathbf{a}$ và $\Phi'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Chú ý rằng $\boldsymbol{\lambda}$ trong định lí là véc tơ $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ và tích $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ được hiểu là tích vô hướng giữa hai véc tơ trong $\mathbb{R}^m$.

Chứng minh.

Hàm véc tơ $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $(k = n - m)$, cùng với giả thiết ma trận đạo hàm $\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a})$ khả nghịch ($\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{a})$ có hạng bằng m), thỏa mãn các điều kiện của định lí đạo hàm hàm ẩn. Khi đó tồn tại hàm ẩn k biến $\mathbf{g} = (g_1, ..., g_m)$, khả vi liên tục tại lân cận điểm $\mathbf{a}_1$ thỏa mãn hệ thức $\mathbf{g}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_2$, $\boldsymbol{\varphi}\big(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})\big) = \mathbf{0}$.

Xét hàm $h(\mathbf{y}) = f\big(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})\big)$, hàm h đạt cực trị tại $\mathbf{a}_1$ (do giả thiết f đạt cực trị có điều kiện tại $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in D$), suy ra

$$h'(\mathbf{a}_1) = f'_{\mathbf{y}}\big(\mathbf{a}_1, \mathbf{g}(a_1)\big) + f'_{\mathbf{z}}\big(\mathbf{a}_1, \mathbf{g}(\mathbf{a}_1)\big) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}.$$

Mặt khác đạo hàm theo $\mathbf{y}$ tại lân cận điểm $\mathbf{a}_1$ hệ thức $\boldsymbol{\varphi}\big(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})\big) = \mathbf{0}$, ta có

$$\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}}\big(\mathbf{a}_1, \mathbf{g}(\mathbf{a}_1)\big) + \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}\big(\mathbf{a}_1, \mathbf{g}(\mathbf{a}_1)\big) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}.$$

Lưu ý rằng $\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}), \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}), \mathbf{g}'(\mathbf{a}_1)$ là các ma trận kiểu $m \times k, m \times m$ và $m \times k$ tương ứng. Nhân cả 2 vế của đẳng thức với ma trận hàng $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_m)$, (trước mắt λ_i là các hằng số tùy ý)

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}.$$

Cộng vế với vế đẳng thức này với đẳng thức trước đó $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) + f'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$

$$\big(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\big) + \big(f'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a})\big) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}.$$

Từ giả thiết $\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a})$ khả nghịch, suy ra tồn tại duy nhất $\boldsymbol{\lambda}$ để $f'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ và khi đó $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Với kí hiệu $\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ hoặc chi tiết hơn như trong định lí 1.5.3

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(\mathbf{x}),$$

hàm $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ có các đạo hàm theo $\mathbf{y}$ và theo $\mathbf{z}$ tại điểm $\mathbf{a}$ đều bằng $\mathbf{0}$, suy ra điều phải chứng minh $\Phi'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. ■

Về quy tắc tìm cực trị có điều kiện đã nêu sau định lí 1.5.3, ở bước 2 sau khi lập hàm Φ cùng với các nhân tử Lagrange λ_i tương ứng với mỗi điểm dừng, các khẳng định sau là hiển nhiên

• Nếu $d^2\Phi(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu có điều kiện tại $\mathbf{a}$.

• Nếu $d^2\Phi(\mathbf{a})$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại có điều kiện tại $\mathbf{a}$.

Thật vậy khi đó hàm $\Phi(\mathbf{x})$ đạt cực trị tự do tại $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Nói cách khác trong lân cận điểm $\mathbf{x} = \mathbf{a}$

$$\Phi(\mathbf{x}) \leq \Phi(\mathbf{a}) \quad \big(\text{hoặc} \;\; \Phi(\mathbf{x}) \geq \Phi(\mathbf{a})\big),$$

suy ra với điều kiện $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \big(\text{hoặc} \;\; f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})\big)$$

hay f đạt cực trị có điều kiện tại $\mathbf{a}$.

Tuy nhiên trong các trường hợp còn lại ta cần biểu diễn vi phân cấp hai $d^2\Phi(\mathbf{a})$ theo $n-m$ biến độc lập và kết luận dựa vào việc tìm cực trị tự do hàm $n-m$ biến. Để diễn giải chính xác cũng như chứng minh điều kiện đủ của cực trị tự do, người ta cần khai triển Taylor các hàm số nhiều biến số đến cấp hai. Điều đó vượt ra ngoài phạm vi giáo trình này. Do vậy chúng ta thừa nhận các quy tắc nêu trên để áp dụng giải các bài tập cực trị có điều kiện.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+xy)^{\frac{1}{x^2+xy}}$ (f) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$

(g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$ (h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3}{x^2+y^2-xy}$

2. Chứng minh rằng không tồn tại các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+y)}{y}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin y}{x^4+y^2}$

3. Cho hàm $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2-\cos y^2}{x^2+y^2}$. Xét giới hạn hàm số trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$ và xét các giới hạn lặp trong quá trình $x\to 0,\ y\to 0$ của hàm đó.

4. Cho hàm $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{y} & \text{nếu } y\neq 0\\ 0 & \text{nếu } y=0.\end{cases}$ Tìm giới hạn hàm số trong quá trình $(x,y)\to(0,0)$ và tìm các giới hạn lặp trong quá trình $x\to 0,\ y\to 0$ của hàm đó.

5. Tìm các điểm gián đoạn của hàm

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{nếu } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x+y=0 \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{x}{y} & \text{nếu } y \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } y=0 \end{cases}$$

6. Tìm A để các hàm số dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}^2$

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-yx^2}{x^3-y^3} & \text{nếu } x \neq y \\ A & \text{nếu } x=y \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ A & \text{nếu } x=y=0 \end{cases}$$

7. Tìm giới hạn $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$.

8. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

(a) $u = xy^{\frac{x}{y}}$ (b) $u = x^{yz}$

(c) $u = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$ (d) $u = x^{y^2 z}$

(e) $u = \ln\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ (f) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{xz}\right)$

9. Chứng minh rằng hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x=y=0 \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $(0,0)$ nhưng tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ tại điểm $(0,0)$ đó.

10. Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

(a) $u = (x^2 + y^2)^2$ (b) $u = \ln(x^2 + y^2)$

(c) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (d) $u = \sin(x + yz)$

(e) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ (f) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

(g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2} + \sin x$ (h) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

11. Tính $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$, trong đó $f(x, y) = e^{xy}$.

12. Chứng tỏ rằng các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 của hàm sau tại điểm $O(0, 0)$ không bằng nhau

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2 - xy^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

13. Cho hàm số $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$. Hãy tính

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{tại} \quad A(1, 2).$$

14. Chứng minh rằng hàm $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ thỏa mãn phương trình $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

15. Chứng minh rằng hàm $u(x, y) = f(xy) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, với f, g là các hàm thực một biến số, khả vi đến cấp hai, thỏa mãn phương trình

$$x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = yu'_y - xu'_x.$$

16. Chứng minh rằng hàm $u(t, x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$, với $a > 0, t > 0$ thỏa mãn phương trình $u'_t = a^2u''_{xx}$.

17. Chứng minh rằng $u = f(x - at) + g(x + at)$, với a là hằng số, f và g có đạo hàm cấp hai liên tục, là nghiệm của phương trình
$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}.$$

18. Chứng minh rằng $u = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{1-n} g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, với n là số tự nhiên, f và g có đạo hàm cấp hai liên tục, là nghiệm của phương trình
$$x^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} = n(n-1)u.$$

19. Hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ có khả vi tại $(0, 0)$ không?

20. Hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$ có khả vi tại $(0, 0)$ không?

21. Chứng minh rằng hàm $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = y = 0 \end{cases}$ có các đạo hàm riêng $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ nhưng không khả vi tại $(0, 0)$.

22. Chứng minh rằng hàm
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$
tồn tại các đạo hàm riêng tại $O(0, 0)$, song hàm không khả vi tại $O(0, 0)$.

23. Tính đạo hàm hàm $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ tại điểm $M(3, 1)$ theo hướng từ M đến $N(6, 5)$.

24. Tính đạo hàm hàm $f = x^2 + y^2$ theo hướng lập với Ox góc 120^0 tại $M(1, 0)$.

25. Tính đạo hàm hàm $f = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ theo hướng phân giác góc phần tư thứ nhất tại $M(1, 1)$.

26. Tìm $\overrightarrow{grad}\, u$ tại $M(-2, 3, 4)$ với $u = xyz$ và tính đạo hàm của u tại đó theo hướng $\overrightarrow{grad}\, u$.

27. Cho hàm véc tơ $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, xy)$. Chứng tỏ rằng $\mathbf{f}$ khả vi tại $M(1, 1)$. Tính đạo hàm $\mathbf{f}'$ và vi phân $d\mathbf{f}$ tại M.

28. Tìm đạo hàm của các hàm véc tơ sau

    (a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (xy, x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

    (b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$.

29. Cho các hàm véc tơ $\mathbf{f}(u, v) = (u-2v, uv)$ và $\mathbf{g}(x, y, z) = (x+y^2, xy-z)$. Tìm đạo hàm của hàm véc tơ $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ tại $M(1, 0, 2)$.

30. Tính các đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$, biết

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

31. Sử dụng phép đổi biến $x = \frac{1}{t}$ hãy đưa phương trình sau về phương trình của hàm theo biến t

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0.$$

32. Tìm các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm ẩn $z = z(x, y)$, biết nó được xác định bởi hệ thức

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

    (b) $x + y + z = e^z$

    (c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

33. Tìm các đạo hàm riêng cấp một của u và v, biết chúng được xác định bởi các hệ thức

$$\begin{cases} xy - z\cos u\cos v = 0 \\ yz - x\cos u\sin v = 0 \end{cases}$$

34. Tìm cực trị các hàm số dưới đây

    (a) $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

    (b) $u = x^3 + y^3 - (x + y)^2$.

    (c) $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4.$

(e) $f(x,y) = y^4 + 2y^2 + 2x^2 - 2xy^2 - 4x + 2.$

(f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

35. (a) Tìm điểm cao nhất (có tung độ y lớn nhất) thuộc elip

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

(b) Tìm điểm cao nhất (có tung độ y lớn nhất) thuộc elip

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

(c) Hàm ẩn $y = y(x)$ được xác định bởi hệ thức $4xy^2 + 4x^2y = 1$. Tính đạo hàm hàm ẩn $\dfrac{dy}{dx}$ và tìm cực trị hàm ẩn đó.

36. Tìm cực trị các hàm

(a) $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x.$ (Hệ phương trình cho điểm dừng duy nhất $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2)$. Hàm đạt cực tiểu tại M, $u(M) = -\frac{17}{4}$.)

(b) $u = xyz(1 - x - y - z).$

(c) $u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1.$

(d) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0).$

37. Tìm cực trị có điều kiện các hàm sau

(a) $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1.$

(b) $u = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

(c) $u = xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

(d) $f = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

(e) $f = 3x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = R^2$

(f) $u = x^2 + z^2 - y^2$ với điều kiện $x - y + z = 0$

(g) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

38. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm

    (a) $z = x^2 - y^2$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

    (b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

    (c) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$

    (d) $u(x, y, z) = (x^2 + 2xy + 3y^2 - 5)\sin^2 z$ trên tập đóng (không bị chặn) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z \in \mathbb{R}\}$, biết D là tam giác với các đỉnh $(-1, 1), (2, 1)$ và $(-1, -2)$.

    (e) $u = x - 2y + 3z$ trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

    (f) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

39. (a) Trong số các tam giác nội tiếp trong đường tròn, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

    (b) Trong số các tam giác ngoại tiếp đường tròn, tìm tam giác có diện tích bé nhất.

    (c) Trong số các hình lục giác ngoại tiếp đường tròn, tìm hình có diện tích bé nhất.

40. Tìm hình hộp có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

41. Một công ty vận chuyển bưu điện chỉ nhận các gói hàng hình hộp chữ nhật với tổng chiều dài và chu vi mặt cắt (chu vi thiết diện vuông góc với chiều dài gói hàng) không quá $6m$. Hãy xác định kích thước gói hàng mà công ty nhận vận chuyển sao cho nó có thể tích lớn nhất.

42. Tìm điểm thuộc mặt $xy^2z^3 = 2$ mà khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ $O(0, 0, 0)$ là ngắn nhất.

43. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong ellip $x^2+4y^2 = 4$. (Hình chữ nhật nội tiếp có các cạnh song song với các trục tọa độ).

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. (b) 1, (d) 0, (h) 0.

2. Xét các giới hạn riêng khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo các phương khác nhau.

3. Giới hạn hàm số và các giới hạn lặp trong quá trình $x \to 0,\ y \to 0$ của hàm đều bằng 0.

4. Giới hạn hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

   Không tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$.

5. (a) Hàm gián đoạn tại các điểm trên đường thẳng $y = -x$.
   (b) Hàm gián đoạn tại các điểm trên đường thẳng $y = 0$.

6. Không tồn tại A để hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

7. 0.

8. (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y^{\frac{x}{y}} + xy^{\frac{x}{y}-1}\ln y, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x^2 y^{\frac{x}{y}-2}(1 - \ln y)$.

   (b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = x^{yz}\ln x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = zx^{yz}\ln x,\ \dfrac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = yx^{yz}\ln x$.

   (c) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}$.

9. $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

10. (b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

    (d) $u''_{yz} = \Big(z\cos(x + yz)\Big)'_z = \cos(x + yz) - yz\sin(x + yz)$.

11. $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} = e^{xy}(x^4y^4 + 16x^3y^3 + 72x^2y^2 + 96xy + 24)$.

12. $f''_{xy}(0, 0) = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = 0$.

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,2) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1,2) = \dfrac{1}{9}.$

19. Hàm $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ không khả vi tại $O(0,0)$.

20. Hàm $\sqrt[3]{x^4+y^4}$ khả vi tại $O(0,0)$.

23. $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}(M) = 0.$

24. $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(M) = -1.$

27. Kí hiệu $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{f}'(M) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và
$df_1(M) = 2dx + 2dy$ và $df_2(M) = dx + dy$.

28. (b) $\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

29. $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(M) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

30. $y'(x) = -\dfrac{x}{y}$, $y''(x) = \dfrac{x^3 + xy^2}{y^4}.$

31. $u'' + a^2 u = 0.$

32. (a) $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{2x}{2z} = -\dfrac{x}{z}$, $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{y}{z}.$
Các đạo hàm riêng cấp hai

$$z''_{xx} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3},\ z''_{xy} = -\frac{xy}{z^3} \quad \text{và} \quad z''_{yy} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}.$$

33.

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{z\cos u \sin^2 v - xy\cos v}{xz\sin u}, & u'_y &= -\frac{x^2\cos v + z^2 \sin v}{xz\sin u} \\
u'_z &= -\frac{x\cos u\cos^2 v + yz\sin v}{xz\sin u}, & v'_x &= -\frac{xy\sin v + z\cos u\sin v\cos v}{xz\cos u} \\
v'_y &= \frac{z^2\cos u - x^2\sin v}{xz\cos u}, & v'_z &= \frac{yz\cos v - x\cos u\sin v\cos v}{xz\cos u}
\end{aligned}$$

34. (b) Hàm đạt cực tiểu tại $M(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Giá trị cực tiểu $u(M) = -\frac{64}{27}$.

(c) • Hàm u đạt cực tiểu tại $M_1(1, -1)$. Giá trị cực tiểu $u(M_1) = -6$.
• Hàm đạt cực đại tại $M_2(-1, 1)$. Giá trị cực đại $u(M_2) = 6$.

(e) Hàm đạt cực tiểu tại $M(1, 0)$.

(f) Hàm đạt cực tiểu tại $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ và cũng đạt cực tiểu tại $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

35. (a) Ta xem đây là bài toán tìm max hàm ẩn $y = y(x)$, xác định từ hệ thức $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.
Khi đó $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}})$ là điểm cần tìm.

(b) $(1, 2)$.

(c) Hàm đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$, giá trị cực đại bằng $y = -1$.

36. Tìm cực trị
(a) Hàm đạt cực tiểu tại $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2)$, $u(M) = -\frac{17}{4}$.
(b) Hàm đạt cực đại tại điểm $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
(c) Hướng dẫn: hàm số có 2 điểm dừng: $M_1(1, -2, \frac{1}{2})$ và $M_2(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$.
Điểm $M_1(1, -2, \frac{1}{2})$ là điểm cực tiểu, $u(M_1) = -\frac{9}{2}$.
$M_2(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$ không là điểm cực trị.
(d) Hàm đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$.

37. Tìm cực trị có điều kiện
(b) Hàm đạt cực tiểu tại điểm $M(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2})$.
(c) Hàm đạt cực đại tại $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ và đạt cực tiểu tại $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ và $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
(f) Hàm không có cực trị điều kiện.
(g) Biện luận các trường hợp sau:
• Với a, b, c đôi một khác nhau, giả sử $0 < a < b < c$,
Hàm đạt cực đại có điều kiện tại $M_{1,2} = (\pm 1, 0, 0)$
Hàm đạt cực tiểu có điều kiện tại $M_{3,4} = (0, 0, \pm 1)$.
• Với $a = b < c$ hàm đạt cực tiểu tại $M(0, 0, \pm 1)$ và hàm đạt cực đại tại các điểm thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ trên mặt phẳng $z = 0$.
• Với $a < b = c$, bài toán được giải tương tự.

38. (b) $\max f = f(0, \pm 1) = 2e^{-1}$ và $\min f = f(0, 0) = 0$.

(c) Hàm z đạt max tại $M(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ và đạt min tại $(0, 0)$.

(d) $\max f = f(-1, -2) = 12, \quad \min f = f(0, 0) = -5.$

(e) Hàm đạt giá trị nhỏ nhất tại $M_1(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{6}{\sqrt{14}}, -\frac{9}{\sqrt{14}})$ và đạt giá trị lớn nhất tại $M_2(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}})$.

39. (a) Tam giác đều có diện tích lớn nhất.

40. Hình lập phương nội tiếp trong hình cầu có thể tích lớn nhất.

42. $M_{1,2}(3^{\frac{-1}{4}}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})$, $M_{3,4}(-3^{\frac{-1}{4}}, \pm\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}})$.

43. Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có đỉnh là các điểm: $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Chương 2

Một số vấn đề về hình vi phân

2.1 Khái niệm về đường cong định hướng

Trong Giải tích I chúng ta đã làm quen với khái niệm về đường cong cho dưới dạng tham số. Chẳng hạn đường cong phẳng hoặc đường cong trong không gian được cho dưới dạng

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \text{với} \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

trong đó $T \subset \mathbb{R}$ là một khoảng hoặc một đoạn nào đó của tập các số thực $\mathbb{R}$. Như vậy đường cong là hàm véc tơ một biến số $\mathbf{g} : T \to \mathbb{R}^3$, nó đặt tương ứng mỗi điểm $t \in T$ với một điểm trong không gian (trường hợp đường cong đang xét là đường cong phẳng, hàm véc tơ biểu diễn nó là ánh xạ $\mathbf{g} : T \to \mathbb{R}^2$, tương ứng mỗi điểm $t \in T$ với một điểm trong $\mathbb{R}^2$). Nếu ánh xạ $\mathbf{g}(t) = \big((x(t), y(t), z(t)\big)$ khả vi, ta đồng nhất đạo hàm $\mathbf{g}'(t)$ với véc tơ $\big((x'(t), y'(t), z'(t)\big)$ trong $\mathbb{R}^3$. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: $\mathbf{g}'(t)$ *là véc tơ tiếp tuyến* của đường cong. Các kết quả trong chương I vẫn được áp dụng trong chương này với quy ước đó.

Trong chương này ta hạn chế chỉ xét các đường cong phẳng và đường cong trong không gian, do vậy ta cũng đưa vào các kí hiệu về tích vô hướng và tích có hướng của 2 véc tơ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

• Tích vô hướng của **a** và **b**

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

• Tích có hướng của **a** và **b**

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\right)$$

Định lí 2.1.1 *Cho* $\mathbf{f},\mathbf{g} : T \to \mathbb{R}^3$ *là hai hàm véc tơ một biến số khả vi tại* $t\in T$. *Khi đó* $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}$ *cũng khả vi tại t và*

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t)$$

$$(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(t)\wedge\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)\wedge\mathbf{g}'(t).$$

Chứng minh.
• Xét đạo hàm tích vô hướng của **f** và **g**

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t) - (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\big(\mathbf{g}(t+\Delta t) - \mathbf{g}(t)\big) + \big(\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t)\big)\cdot\mathbf{g}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\big(\mathbf{g}(t+\Delta t) - \mathbf{g}(t)\big)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\big(\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t)\big)\cdot\mathbf{g}(t)}{\Delta t}$$

Sử dụng tính liên tục của hàm khả vi suy ra điều phải chứng minh

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t) + \mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t).$$

• Phần còn lại của định lí, đạo hàm tích có hướng của **f** và **g** được chứng minh hoàn toàn tương tự, thay cho tích vô hướng là tích có hướng trong các biểu thức ở phần chứng minh trên. ■

Phần tiếp theo trong mục này, chúng ta giới thiệu khái niệm *đường cong định hướng* để xây dựng các phép tính vi phân, tích phân trên đó. Trước hết chúng ta đưa vào định nghĩa cung trơn

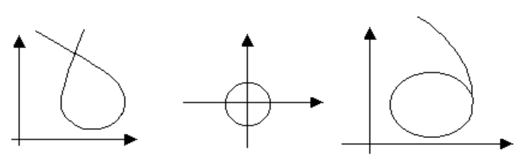
Định nghĩa 2.1.1 *Tập hợp $L \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là cung trơn nếu*
(i) Tồn tại một song ánh $\mathbf{g} : (a,b) \to L$, $\mathbf{g}$ khả vi liên tục trên (a,b) và $\mathbf{g}'(t) \neq \mathbf{0}$ với mọi $t \in (a,b)$.
(ii) Tồn tại các giới hạn

$$\mathbf{g}(a) = \lim_{t\to a+} \mathbf{g}(t),\ \mathbf{g}(b) = \lim_{t\to b-} \mathbf{g}(t) \quad \text{và} \quad \mathbf{g}(a),\ \mathbf{g}(b) \notin L.$$

Ta nói $\mathbf{g}(t)$ là biểu diễn tham số của cung trơn L.

Nhận xét
• Định nghĩa trên về cung trơn ràng buộc nhiều điều kiện chặt chẽ về hàm véc tơ $\mathbf{g}(t)$. Các đầu mút $\mathbf{g}(a), \mathbf{g}(b)$ không thuộc cung trơn, tuy nhiên $\mathbf{g}(t)$ có đạo hàm phải tại $t = a$, có đạo hàm trái tại $t = b$ (các đạo hàm đó là các tiếp tuyến tương ứng tại 2 đầu mút của cung trơn).
• Một cung trơn L có thể có nhiều biểu diễn tham số khác nhau.
• Theo định nghĩa trên, cung trơn là tập ảnh qua một song ánh của khoảng mở (a,b) vì vậy một đường "kín" như đường tròn không là một cung trơn. Cung trơn là các đường cong không "tự cắt".

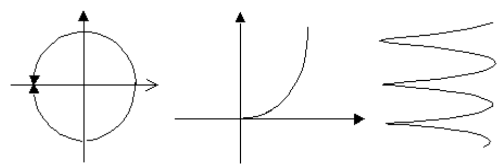
Các đường cong có đồ thị như hình vẽ dưới đây không là các cung trơn.



Hình 2.1: Đường cong không là các cung trơn

Ví dụ 2.1.1 *Các ví dụ về cung trơn*

1. Đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính $R = 1$ trừ điểm $A(-1,0)$ là cung trơn với biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t), t \in (-\pi, \pi)$. Tuy nhiên cung trơn đó có thể có các biểu diễn tham số khác nhau, ví dụ $\mathbf{h}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, trong đó $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cũng là một biểu diễn tham số khác của đường tròn nói trên.



Hình 2.2: Các cung trơn

2. Cung L nối hai điểm $A(0,0)$ và $B(1,1)$ dọc theo parabol $y = x^2$ trừ hai điểm A, B là cung trơn. L có các biểu diễn tham số khác nhau như: $\mathbf{g}(t) = (t, t^2), t \in (0,1)$ hoặc $\mathbf{h}(t) = (t^2, t^4), t \in (0,1)$.

3. Đường đinh ốc với biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t) = (a\cos t, a\sin t, t), t \in (0, 6\pi)$ là cung trơn.

Sử dụng định lí hàm ngược người ta đã chứng minh kết quả sau

Định lí 2.1.2 *Nếu* $\mathbf{g} : (a,b) \to L$ *và* $\mathbf{h} : (\alpha, \beta) \to L$ *là các biểu diễn tham số của cung trơn* L, *(*$L \subset \mathbb{R}^2$ *hoặc* $L \subset \mathbb{R}^3$*). Khi đó ánh xạ*

$$\varphi : (a,b) \xrightarrow{\mathbf{g}} L \xrightarrow{\mathbf{h^{-1}}} (\alpha, \beta) \qquad (\textit{hoặc viết} \quad \varphi = \mathbf{h^{-1}} \circ \mathbf{g})$$

khả vi liên tục trên (a,b) *và*

$$\mathbf{h}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \mathbf{g}'(t) \tag{2.1}$$

với mọi $t \in (a,b)$.

Nhận xét rằng đẳng thức (2.1) được suy ra từ hệ thức

$$\mathbf{h} \circ \varphi = \mathbf{g} \quad (\Leftrightarrow \ \varphi = \mathbf{h^{-1}} \circ \mathbf{g})$$

bằng cách đạo hàm 2 vế đẳng thức đó. Từ định lí trên ta suy ra một hệ quả quan trọng, làm cơ sở cho khái niệm *đường cong định hướng*:

Hệ quả 2.1.1 $\varphi'(t)$ *không đổi dấu trên* (a,b).

Chứng minh. Thật vậy, từ hệ thức $\mathbf{h}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \mathbf{g}'(t)$ và theo giả thiết $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ là các biểu diễn tham số của cung trơn, $\mathbf{g}'(t) \neq \mathbf{0}$ suy ra $\varphi'(t) \neq 0$ với mọi $t \in (a,b)$. Như vậy $\varphi'(t)$ không đổi dấu vì $\varphi'(t)$ liên tục trên (a,b). ■

Hệ quả trên cho phép ta phân chia các biểu diễn tham số cung trơn L thành hai lớp tương đương: Ta nói hai biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t)$ và $\mathbf{h}(t)$ của cung trơn L *cùng hướng* (hoặc kí hiệu $\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$) nếu $\varphi'(t) > 0$ và *ngược hướng* nếu $\varphi'(t) < 0$.

Ta có thể nói kĩ hơn về khái niệm *hướng của cung trơn* thông qua hàm số

$$\varphi : (a, b) \xrightarrow{\mathbf{g}} L \xrightarrow{\mathbf{h^{-1}}} (\alpha, \beta).$$

Xét trường hợp $\varphi'(t) > 0$, hàm $\varphi(t)$ đơn điệu tăng trên (a, b). Khi đó các đầu mút của cung L có thể tính theo cả hai biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t)$ và $\mathbf{h}(t)$

$$\mathbf{g}(a) = \mathbf{h}(\alpha), \quad \mathbf{g}(b) = \mathbf{h}(\beta).$$

Hơn nữa nếu điểm $M \in L$, $M = \mathbf{g}(t)$ dịch chuyển trên L từ đầu mút $\mathbf{g}(a)$ tới $\mathbf{g}(b)$ theo chiều biến thiên tăng dần của t từ a đến b thì với biểu diễn tham số thứ hai, điểm $M' = \mathbf{h}(t)$ cũng dịch chuyển trên L (khi t biến thiên tăng từ α đến β) theo cùng hướng như vậy.
Trường hợp $\varphi'(t) < 0$, hàm $\varphi(t)$ đơn điệu giảm trên (a, b). Do vậy nếu theo biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t)$ điểm M dịch chuyển từ mút này tới mút kia trên cung L thì theo biểu diễn tham số thứ hai, điểm $M' = \mathbf{h}(t)$ dịch chuyển ngược lại.

Ví dụ nửa đường tròn tâm $O(0, 0)$ bán kính bằng 1 trong mặt phẳng xOy có hai biểu diễn tham số ngược chiều nhau

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{với} \quad t \in (0, \pi)$$

$$\mathbf{h}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}) \quad \text{với} \quad t \in (-1, 1).$$

Lưu ý rằng ta có một quy ước trong suốt giáo trình này khi nói tới một đường cong nào đó, nếu không giả thiết gì thêm đường cong luôn được hiểu là một cung trơn hoặc là sự ghép liên tiếp hữu hạn các cung trơn sao cho đường cong có thể định hướng được.

2.2 Tiếp tuyến và độ dài đường cong

Giả sử P là một điểm thuộc đường cong L và Q là một điểm khác cũng thuộc đường cong đó. Khi cho Q tiến dần tới P trên đường cong, vị trí giới hạn của đường thẳng PQ được coi là *tiếp tuyến* của đường cong L tại P.

Gọi $\mathbf{g}(t), t \in (a, b)$ là biểu diễn tham số của cung L, $\mathbf{g}(t_0)$ biểu diễn vị trí của P trên đường cong đó. Khi đó $\mathbf{g}(t_0 + \Delta t)$ biểu diễn vị trí của Q trên đường cong và

$$\frac{\Delta \mathbf{g}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{g}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{g}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}$$

là véc tơ chỉ phương của đường thẳng PQ. Nếu L là cung trơn, khi đó tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{g}}{\Delta t} = \mathbf{g}'(t_0)$$

và do vậy $\mathbf{g}'(t_0)$ là véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến tại P. Ta cũng gọi $\mathbf{g}'(t_0)$ là *véc tơ tiếp tuyến* của L tại P.

Nếu $\mathbf{h}(t)$ và $\mathbf{g}(t)$ là hai biểu diễn tham số cùng hướng ($\varphi'(t) > 0$) của cung L, khi đó $\mathbf{h}'(\varphi(t))$ và $\mathbf{g}'(t)$ là các véc tơ tiếp tuyến tại cùng một điểm P nào đó trên L (ứng với tham số t) và theo (2.1), các véc tơ tiếp tuyến đó cùng hướng. Do đó đôi khi ta cũng nói cung trơn L (cùng với biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t)$ của cung) định hướng theo véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{g}'(t)$.

Mặt phẳng đi qua P và vuông góc với tiếp tuyến tại P của đường cong được gọi là *pháp diện* của đường cong L tại P. Véc tơ $\mathbf{g}'(t_0)$ đồng thời cũng là véc tơ pháp của mặt phẳng pháp diện.

Cách tính độ dài đường cong cho bởi biểu diễn tham số được tiến hành như chúng ta đã làm trong giải tích I phần ứng dụng tích phân. Với các kí hiệu trong định nghĩa cung trơn, giả sử $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (a, b)$ là biểu diễn tham số của cung L, khi đó độ dài cung L bằng

$$\int_a^b |\mathbf{g}'(t)| dt \quad \left(\text{hay } \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt\right)$$

trong đó biểu thức dưới dấu tích phân $|\mathbf{g}'(t)|$ là độ dài véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{g}'(t)$.

Định lí 2.2.1 *Độ dài đường cong không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn tham số cung đường cong đó.*

Chứng minh. Giả sử $\mathbf{g} : (a, b) \to L$ và $\mathbf{h} : (\alpha, \beta) \to L$ là hai biểu diễn tham số của cung trơn L. Ta phải chứng minh

$$\int_\alpha^\beta |\mathbf{h}'(t)| dt = \int_a^b |\mathbf{g}'(t)| dt.$$

Áp dụng công thức đổi biến $t = \varphi(\tau)$, với $\varphi = \mathbf{h^{-1}} \circ \mathbf{g}$ là ánh xạ đã xét trong định lí 2.1.2 và sử dụng (2.1) ta được

$$\int_\alpha^\beta |\mathbf{h}'(t)|dt = \int_a^b |\mathbf{h}'(\varphi(\tau))| \cdot |\varphi'(\tau)|d\tau = \int_a^b |\mathbf{g}'(\tau)|\, d\tau.$$

Vậy độ dài đường cong không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn tham số $\mathbf{h}(t)$ hoặc $\mathbf{g}(t)$. ■

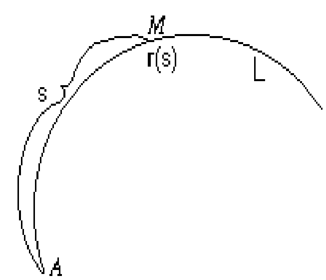
Trường hợp đặc biệt khi cung L được cho bởi phương trình $y = f(x)$ trong mặt phẳng xOy, khi đó ta thường chọn biểu diễn tham số của cung

$$\mathbf{g}(x) = (x, f(x)), \quad \text{với} \quad x \in (a, b).$$

Véc tơ tiếp tuyến của đường cong tại $(x, f(x))$ là $\mathbf{g}'(x) = (1, f'(x))$, suy ra độ dài cung L bằng

$$\int_a^b |\mathbf{g}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Biểu diễn tham số tự nhiên của đường cong



Hình 2.3: Biểu diễn tham số tự nhiên $\mathbf{r}(s)$ của cung L

Xét một kiểu biểu diễn tham số như sau của cung trơn L:

Kí hiệu A và B là 2 đầu mút của cung L, điểm M di động trên cung L theo hướng từ A đến B. Gọi s là độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$ và $\mathbf{r}(s)$ biểu diễn vị trí điểm M thuộc cung đó. Khi đó biểu diễn tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, với s là độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$

được gọi là *biểu diễn tham số tự nhiên* hay còn gọi là *phương trình tự hàm* của cung L.

Phương trình tự hàm cũng là một dạng biểu diễn tham số, do vậy theo công thức tính độ dài đường cong

$$s = \int_0^s |\mathbf{r}'(s)| ds \quad \forall s \quad (s \text{ là độ dài cung } \overset{\frown}{AM}).$$

Đạo hàm 2 vế đẳng thức trên theo s, suy ra $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ với $\forall s$.
Nói cách khác với biểu diễn tham số tự nhiên $\mathbf{r}(s)$ của cung trơn L, véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{r}'(s)$ với đường cong luôn luôn là véc tơ đơn vị.

Ví dụ 2.2.1

1. Gọi L là cung xicloit

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in (0, 2\pi) \quad (a > 0)$$

   M là điểm thuộc cung L ứng với tham số t, độ dài cung $\overset{\frown}{OM}$ (O là gốc toạ độ cũng thuộc xicloit) bằng

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^t 2a \sin\frac{t}{2} dt = 4a(1 - \cos\frac{t}{2})$$

2. Phương trình tự hàm của đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ là

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{s}{R} \\ y = R\sin\frac{s}{R} \end{cases}$$

3. Phương trình đường đinh ốc: $\mathbf{g}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$. Gọi $A(R, 0, 0)$ là điểm thuộc đường cong ứng với tham số $t = 0$, M là điểm thuộc đường cong ứng với tham số t. Độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$ bằng

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = t\sqrt{R^2 + b^2}.$$

   Thay $t = \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}$ vào phương trình đường đinh ốc, ta có phương trình tự nhiên $\mathbf{r}(s) = \left(R\cos\dfrac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, R\sin\dfrac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, \dfrac{sb}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$

$$\text{hoặc} \qquad \begin{cases} x = R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}} \\ y = R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}} \\ z = \frac{sb}{\sqrt{R^2+b^2}} \end{cases}$$

2.3 Độ cong

Định nghĩa 2.3.1 *Giả sử* $\mathbf{g}(t), t \in (a, b)$ *là biểu diễn tham số của cung* L*, hai điểm* M_0, M *thuộc* L *ứng với các tham số* t_0, t *tương ứng. Gọi* Δs *là độ dài cung* $\overset{\frown}{M_0M}$ *và* $\Delta\varphi$ *góc giữa hai véc tơ tiếp tuyến* $\mathbf{g}'(t_0), \mathbf{g}'(t)$ *của* L *tại* M_0 *và* M *tương ứng. Khi đó tỉ số*

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

được gọi là độ cong trung bình của cung $\overset{\frown}{M_0M}$*. Nếu tồn tại giới hạn và hữu hạn*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = C$$

khi đó C *được gọi là độ cong của* L *tại* M_0*, kí hiệu* $C(M_0)$*.*
Người ta gọi $\varrho = \dfrac{1}{C}$ *là bán kính cong của* L *tại* M_0*.*

Từ định nghĩa trên dễ dàng suy ra độ cong tại mọi điểm của đường thẳng luôn bằng 0 và độ cong tại điểm bất kì của đường tròn bán kính R luôn bằng $C = \frac{1}{R}$.

Định lí 2.3.1 *Nếu* $\mathbf{g}(t), t \in (a, b)$ *là biểu diễn tham số của cung* L*,* $\mathbf{g}(t)$ *khả vi đến cấp 2 tại* t_0*,* $|\mathbf{g}'(t_0)| \neq 0$*, khi đó độ cong của* L *tại điểm* $\mathbf{g}(t_0)$ *ứng với tham số* t_0 *bằng*

$$C = \frac{|\mathbf{g}'(t_0) \wedge \mathbf{g}''(t_0)|}{|\mathbf{g}'(t_0)|^3}.$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{g}'(t_0) \wedge \mathbf{g}''(t_0)|}{|\mathbf{g}'(t_0)|^2}.$$

Thật vậy, kí hiệu $\mathbf{u} = \mathbf{g}'(t_0)$ và $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{g}'(t_0 + \Delta t) - \mathbf{g}'(t_0)$. Khi đó $\Delta\varphi$ là góc giữa hai véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{g}'(t_0) = \mathbf{u}$ và $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$. Từ định nghĩa tích có hướng của hai véc tơ

$$\sin\Delta\varphi = \frac{|\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}| \cdot |(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})|} = \frac{|\mathbf{u} \wedge \Delta\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}| \cdot |(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})|}$$

Sử dụng tính chất $\Delta\varphi$ và $\sin\Delta\varphi$ là 2 VCB tương đương trong quá trình $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\mathbf{u}\wedge\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}\right|}{|\mathbf{u}|\cdot|(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})|} = \frac{|\mathbf{g}'(t_0)\wedge\mathbf{g}''(t_0)|}{|\mathbf{g}'(t_0)|^2}.$$

Bây giờ để chứng minh định lí, xét

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}:\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}:\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ta biết rằng, theo công thức tính độ dài cung $\Delta s = \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}|\mathbf{g}'(t)|dt$, suy ra

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}|\mathbf{g}'(t)|dt = |\mathbf{g}'(t_0)|.$$

Vậy độ cong

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{|\mathbf{g}'(t_0)\wedge\mathbf{g}''(t_0)|}{|\mathbf{g}'(t_0)|^2}:|\mathbf{g}'(t_0)| = \frac{|\mathbf{g}'(t_0)\wedge\mathbf{g}''(t_0)|}{|\mathbf{g}'(t_0)|^3} \quad \blacksquare$$

Hệ quả 2.3.1 *Đặc biệt khi $\mathbf{r}(s)$ là biểu diễn tham số tự nhiên của cung L, $\mathbf{r}(s)$ khả vi tới cấp hai, khi đó độ cong của L tại điểm ứng với độ dài cung s bằng*

$$C = |\mathbf{r}''(s)|.$$

Chứng minh. Thật vậy với biểu diễn tham số tự nhiên $\mathbf{r}(s)$, ta biết rằng véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{r}'(s)$ của L là véc tơ đơn vị $(|\mathbf{r}'(s)| = 1)$ hay ${\mathbf{r}'}^2(s) = 1$. Đạo hàm 2 vế đẳng thức ${\mathbf{r}'}^2(s) = 1$ theo s ta được

$$\mathbf{r}'(s)\cdot\mathbf{r}''(s) = 0 \quad \text{hay } \mathbf{r}'(s)\perp\mathbf{r}''(s)$$

Vậy

$$C = \frac{|\mathbf{r}'(s)\wedge\mathbf{r}''(s)|}{|\mathbf{r}'(s)|^3} = |\mathbf{r}'(s)\wedge\mathbf{r}''(s)| = |\mathbf{r}'(s)|\cdot|\mathbf{r}''(s)|\sin 90^0 = |\mathbf{r}''(s)|. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.3.1

1. Như trong ví dụ trước, đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ có phương trình tự hàm $\mathbf{r}(s) = \left(R\cos\dfrac{s}{R}, R\sin\dfrac{s}{R}\right)$ hoặc dưới dạng tham số tự nhiên

   $$\begin{cases} x = R\cos\frac{s}{R} \\ y = R\sin\frac{s}{R} \end{cases}$$

   Suy ra

   $$\mathbf{r}''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)$$

   Vậy độ cong tại mọi điểm thuộc đường tròn đều bằng nhau và bằng

   $$C = |\mathbf{r}''(s)| = \frac{1}{R}\sqrt{\cos^2\frac{s}{R} + \sin^2\frac{s}{R}} = \frac{1}{R}.$$

2. Tính độ cong tại điểm bất kì của đường đinh ốc $\mathbf{g}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$. Như đã biết, phương trình tự hàm của đường đinh ốc

   $$\mathbf{r}(s) = \left(R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, \frac{sb}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$$

   $$\mathbf{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}}\left(-R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, b\right)$$

   $$\mathbf{r}''(s) = \frac{-R}{R^2+b^2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, 0\right)$$

   Suy ra độ cong tại mọi điểm đều bằng nhau và bằng

   $$C = |\mathbf{r}''(s)| = \frac{R}{R^2+b^2}.$$

3. Hãy tính độ cong đường parabol $y = ax^2$ tại điểm bất kì thuộc đường cong.
   Phương trình tham số của parabol $x = t, y = at^2$ hay $\mathbf{g}(t) = (t, at^2)$, suy ra

   $$\mathbf{g}'(t) = (1, 2at),\ \mathbf{g}''(t) = (0, 2a),\ C = \frac{|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)|}{|\mathbf{g}'(t)|^3} = \frac{2|a|}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}.$$

Vậy tại điểm thuộc parabol với hoành độ $x = t$, độ cong $C = \dfrac{2|a|}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}$.
Tại đỉnh parabol, ứng với tham số $t = 0$, độ cong đạt giá trị lớn nhất $C = 2|a|$. Độ cong của parabol ứng với các điểm càng xa đỉnh, độ cong càng giảm.

Lưu ý công thức tính độ cong $C = \dfrac{|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)|}{|\mathbf{g}'(t)|^3}$ có thể viết chi tiết hơn dưới dạng tọa độ của biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t)$

1. Trường hợp $\mathbf{g}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ là biểu diễn tham số của đường cong phẳng
$$\mathbf{g}'(t) = \big(x'(t), y'(t), 0\big),\ \mathbf{g}''(t) = \big(x''(t), y''(t), 0\big)$$
Suy ra độ cong tại điểm thuộc đường cong ứng với tham số t
$$C = \frac{|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)|}{|\mathbf{g}'(t)|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\big(x'^2(t) + y'^2(t)\big)^{\frac{3}{2}}}$$

2. Trường hợp $\mathbf{g}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ là biểu diễn tham số của đường cong trong không gian
$$\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t) = \left(\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \right)$$
Khi đó công thức tính độ cong
$$\begin{aligned} C &= \frac{|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)|}{|\mathbf{g}'(t)|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}^2}}{\big(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)\big)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Nhận xét rằng từ chứng minh hệ quả 2.3.1, biểu diễn tham số tự nhiên $\mathbf{r}(s)$ của đường cong có tính chất
$$|\mathbf{r}'(s)| = 1, \quad \mathbf{r}'(s) \perp \mathbf{r}''(s) \quad \forall s.$$

Như vậy véc tơ $\mathbf{r}''(s)$ luôn vuông góc với véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{r}'(s)$ tại mọi điểm thuộc đường cong. Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta có thể thấy véc tơ $\mathbf{r}''(s)$ luôn luôn hướng về phía lõm của đường cong. Ta đưa vào kí hiệu $\mathbf{n}(s)$ là véc tơ đơn vị của véc tơ $\mathbf{r}''(s)$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}.$$

Người ta gọi véc tơ $\mathbf{n}(s)$ là *véc tơ pháp* của đường cong (tại điểm thuộc đường cong tương ứng với độ dài s).

Định nghĩa 2.3.2 *Cho cung L và điểm $M_0 \in L$. Giả thiết độ cong tại M_0 khác 0. Điểm I được gọi là tâm cong (ứng với điểm M_0) nếu véc tơ $\overrightarrow{M_0I}$ có hướng trùng với hướng của véc tơ pháp $\mathbf{n}$ tại M_0 và có độ lớn bằng bán kính cong $\dfrac{1}{C}$ tại đó.*

Đối với đường cong phẳng L, tập hợp các tâm cong của L được gọi là túc bế của nó. Ngược lại, nếu Γ là túc bế của L, khi đó L được gọi là thân khai của Γ.

Từ định nghĩa trên suy ra véc tơ nối điểm M thuộc đường cong với tâm cong I tương ứng (theo tham số tự nhiên s)

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\mathbf{n}(s)}{C(s)} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\mathbf{r}''^2(s)}$$

$\mathbf{n}(s)$, $C(s)$ là véc tơ pháp cũng như độ cong tại điểm thuộc đường cong tương ứng với tham số độ dài s. Do vậy tâm cong I là điểm được xác định bằng véc tơ

$$\mathbf{r}(s) + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{s})}{C(s)} \quad \text{hoặc dưới dạng tham số } \mathbf{g}(t) + \frac{\mathbf{n}(s(t))}{C(s(t))} \tag{2.2}$$

Ví dụ 2.3.2

1. Đường đinh ốc trụ tròn xoay có biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$. Độ cong tại điểm bất kì của nó, theo ví dụ trước bằng $C = \dfrac{R}{R^2+b^2}$. Véc tơ đơn vị của $\mathbf{r}''(s(t))$ bằng $\mathbf{n}(s(t)) = -(\cos t, \sin t, 0)$. Vậy tọa độ tâm cong của đường đinh ốc, áp dụng công thức (2.2) bằng
$$(R\cos t, R\sin t, bt) - \frac{R^2+b^2}{R}(\cos t, \sin t, 0) = \left(-\frac{b^2}{R}\cos t, -\frac{b^2}{R}\sin t, bt\right)$$

2. Hãy lập phương trình túc bế của parabol $y = ax^2, a > 0$.

   Biểu diễn tham số của parabol $\mathbf{g}(t) = (t, at^2)$, suy ra véc tơ tiếp tuyến $(\mathbf{g}'(t) = (1, 2at)$. Véc tơ vuông góc với véc tơ tiếp tuyến và hướng vào bề lõm của parabol $y = ax^2$ là véc tơ $(-2at, 1)$ suy ra
$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}}(-2at, 1).$$
   Độ cong của parabol đã được tính trong ví dụ trước
$$C(t) = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}.$$
   Vậy tọa độ tâm cong, theo công thức (2.2) bằng
$$(t, at^2) + \frac{(1+4a^2t^2)^{3/2}}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}}(-2at, 1) =$$
$$= (t, at^2) + \frac{1+4a^2t^2}{2a}(-2at, 1) = \left(-4a^2t^3, \frac{1+6a^2t^2}{2a}\right)$$
   Do đó túc bế của parabol $y = ax^2, a > 0$ có phương trình
$$\begin{cases} x = -4a^2t^3 \\ y = \dfrac{1+6a^2t^2}{2a} \end{cases}$$

3. Hãy tính độ cong và tâm cong đường xyclôit
$$\mathbf{g}(t) = \big(a(t-\sin t), a(1-\cos t)\big)$$

tại điểm bất kì $t \in (0, 2\pi)$.

$$\mathbf{g}'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t), \quad \mathbf{g}''(t) = (a\sin t, a\cos t).$$

Độ cong của xyclôit

$$C = \frac{|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)|}{|\mathbf{g}'(t)|^3} = \frac{1-\cos t}{2\sqrt{2}a(1-\cos t)^{3/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

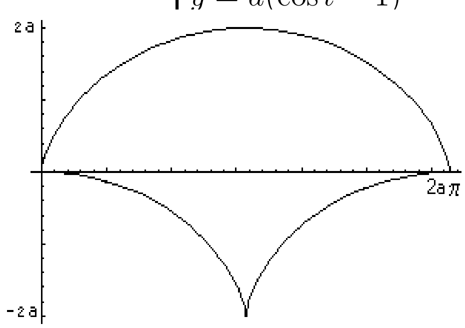
Véc tơ vuông góc với véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{g}'(t) = \big(a(1-\cos t), a\sin t\big)$ và hướng vào bề lõm của xyclôit bằng $\big(a\sin t, a(\cos t - 1)\big)$ (chú ý: theo chiều tăng của t, đi dọc theo đường cong, bề lõm của đường cong nằm về phía bên phải). Vậy tọa độ tâm cong

$$\big(a(t-\sin t), a(1-\cos t)\big) + 4a\left|\sin\frac{t}{2}\right| \cdot \frac{1}{2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\big(a\sin t, a(\cos t - 1)\big) =$$

$$= \big(a(t+\sin t), a(\cos t - 1)\big).$$

Phương trình túc bế của xyclôit

$$\begin{cases} x = a(t+\sin t) \\ y = a(\cos t - 1) \end{cases}$$

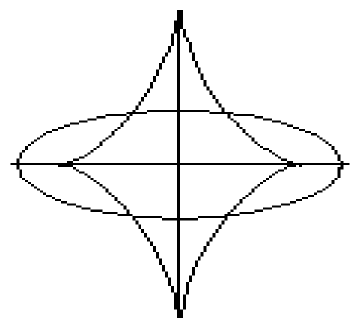


Hình 2.4: Xyclôit và tâm cong của xyclôit

4. Tương tự, phương trình túc bế của elip $x = a\cos t, y = b\sin t$ (giả thiết $a > b > 0$)

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \\ y = \dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

được tính thông qua việc tìm tọa độ tâm cong như trong các ví dụ trên.

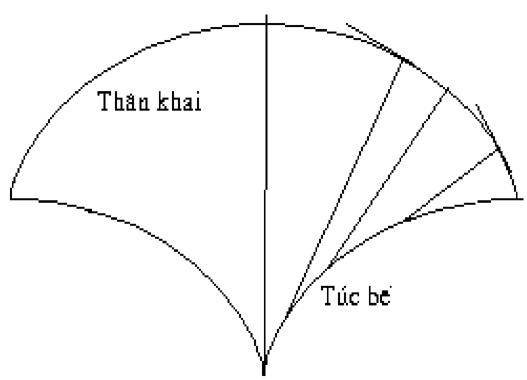


Hình 2.5: Elip và túc bế của elip

Định lí 2.3.2 *Cho đường cong phẳng $L \subset \mathbb{R}^2$, trên đó $C'(s) \neq 0$. ($C(s)$ là độ cong tại điểm tương ứng với tham số tự nhiên s). Khi đó pháp tuyến tại mọi điểm của đường cong L là tiếp tuyến của túc bế Γ của nó.*

Gọi M_1, M_2 là 2 tâm cong ($\in \Gamma$) ứng với 2 điểm bất kì thuộc L, ϱ_1, ϱ_2 là hai bán kính cong tương ứng. Kí hiệu σ là độ dài cung $\overset{\frown}{M_1M_2} \subset \Gamma$. Khi đó

$$\sigma = |\varrho_1 - \varrho_2|.$$



Hình 2.6: Túc bế và thân khai

Chứng minh. Theo công thức xác định tâm cong (2.2)

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{n}}{C} = \mathbf{r} + \varrho\mathbf{n} \quad \left(\text{kí hiệu } \varrho = \frac{1}{C}\right)$$

($\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{n}, C$ là các hàm theo tham số tự nhiên s). Trước hết ta chứng minh hệ thức $\mathbf{n}' = -C\mathbf{r}'$. Thật vậy, $\mathbf{r}'' = C\mathbf{n}$ hay $\mathbf{r}''' = C'\mathbf{n} + C\mathbf{n}'$ đạo hàm 2 vế $\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}' = 0$

$$\mathbf{r}''' \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{r}''^2 = 0 \Leftrightarrow (C'\mathbf{n} + C\mathbf{n}') \cdot \mathbf{r}' = -C^2 \Leftrightarrow \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' = -C.$$

Mặt khác $\mathbf{n}' \parallel \mathbf{r}'$, suy ra $\mathbf{n}' = -C\mathbf{r}'$.

Đạo hàm theo s hệ thức $\mathbf{u} = \mathbf{r} + \varrho\mathbf{n}$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{r}' + \varrho'\mathbf{n} + \varrho\mathbf{n}' = \mathbf{r}' + \varrho'\mathbf{n} - \varrho C\mathbf{r}' = \varrho'\mathbf{n}$$

(Ở đây ta sử dụng $\mathbf{n}' = -C\mathbf{r}'$ và $\varrho C = 1$).

Véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{u}'$ của Γ đồng phương với $\mathbf{n}$, điều này chứng minh khẳng định thứ nhất của định lí. Phần còn lại của định lí được suy ra từ các đẳng thức sau

$$\sigma = \int_{s_1}^{s_2} |\mathbf{u}'| ds = \int_{s_1}^{s_2} |\varrho'| ds = \left| \int_{s_1}^{s_2} \varrho' ds \right| = |\varrho_1 - \varrho_2|. \quad \blacksquare$$

2.4 Hình bao của họ đường cong

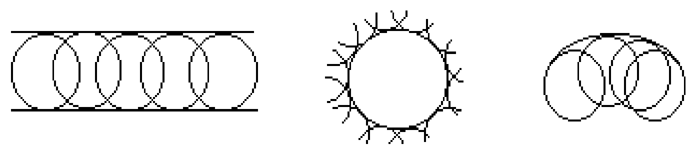
Trong mục này chúng ta chỉ nghiên cứu những họ đường cong phẳng mà phương trình biểu diễn chúng có dạng $F(x, y, c) = 0$ (c là tham số của họ đường cong: ứng với mỗi giá trị $c = c_0$ là một đường cong $F(x, y, c_0) = 0$ trong họ). Khi c biến thiên, tập hợp các đường cong khác nhau được gọi là *họ đường cong với tham số c*.

Định nghĩa 2.4.1 *L là hình bao của một họ đường cong phẳng, nếu L tiếp xúc với mọi đường cong của họ và ngược lại, qua một điểm bất kì thuộc L tồn tại một đường cong trong họ tiếp xúc với L tại điểm đó.*

Các hình vẽ dưới đây minh họa họ đường cong và các hình bao của họ đường cong

Hình bao của họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ (nếu có) là đường cong L với biểu diễn tham số được xác định như sau: đường cong trong họ ứng với mỗi tham số c tiếp xúc với hình bao tại điểm $x = x(c), y = y(c)$. Như vậy phương trình hình bao có thể viết dưới dạng véc tơ $\mathbf{g}(c) = \big(x(c), y(c)\big)$.

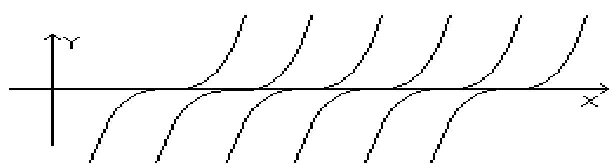
Hình vẽ thứ nhất trong hình 2.7 minh họa hình bao của họ các đường tròn $(x - c)^2 + y^2 = 1$ là 2 đường thẳng $y = \pm 1$.



Hình 2.7: Hình bao

Ví dụ 2.4.1

1. Hình bao của họ các đường cong bậc ba $y = (x - c)^3$ là trục hoành $y = 0$.



Hình 2.8: Họ đường cong $y = (x - c)^3$ và hình bao $y = 0$

2. Theo định lí 2.3.2, hình bao của họ các pháp tuyến của đường thân khai là túc bế của đường thân khai đó.

Định lí 2.4.1 *Giả sử $x = x(c), y = y(c)$ là hình bao của họ đường cong phẳng $F(x, y, c) = 0$, trong đó $F(x, y, c)$ là hàm khả vi. Khi đó*

$$F(x(c), y(c), c) = 0, \quad F'_c(x(c), y(c), c) = 0 \qquad (*)$$

với mọi c trong miền xác định của hình bao.

Chứng minh. Từ giả thiết $\mathbf{g}(c) = (x(c), y(c))$ là hình bao mà $(x(c), y(c))$ là tiếp điểm, suy ra

$$F(x(c), y(c), c) = 0 \quad \text{với mọi } c.$$

Đạo hàm theo c ta được

$$F'_x x'(c) + F'_y y'(c) + F'_c = 0. \qquad (**)$$

Với mỗi c cố định giả sử $(\varphi(t), \psi(t))$ là một biểu diễn tham số của đường cong $F(\varphi(t), \psi(t), c) = 0$. Đạo hàm theo t ta được

$$F'_x\varphi'(t) + F'_y\psi'(t) = 0.$$

Tại điểm thuộc hình bao véc tơ tiếp tuyến $(\varphi'(t), \psi'(t))$ song song với tiếp tuyến hình bao

$$\varphi'(t) = \lambda x'(c), \psi'(t) = \lambda y'(c) \Rightarrow F'_x x'(c) + F'_y y'(c) = 0.$$

Kết hợp với đẳng thức ở trên $F'_x x'(c) + F'_y y'(c) + F'_c = 0$, ta suy ra điều phải chứng minh $F'_c = 0$. ■

Nhận xét rằng hệ thức $(*)$ trong định lí trên là điều kiện cần để tồn tại hình bao. Tuy nhiên nếu ràng buộc thêm các điều kiện: F không có điểm kì dị (F'_x, F'_y không đồng thời bằng 0) và $F''_{cc} \neq 0$, khi đó với cách chứng minh như trên suy ra $\mathbf{g}(c) = (x(c), y(c))$ là hình bao của họ đường cong $F(x, y, c) = 0$.

Thật vậy, từ chứng minh điều kiện cần suy ra $(F'_x, F'_y) \perp \big(x'(c), y'(c)\big)$ và $(F'_x, F'_y) \perp \big(\varphi'(t), \psi'(t)\big)$. Nếu véc tơ $\big(x'(c), y'(c)\big) \neq \mathbf{0}$ thì nó đồng phương với véc tơ tiếp tuyến $\big(\varphi'(t), \psi'(t)\big)$ và do vậy $\mathbf{g}(c) = (x(c), y(c))$ là hình bao của họ đường cong. Giả sử ngược lại $x'(c) = y'(c) = 0$, hàm theo c 2 vế hệ thức $(**)$: $F'_c\big(x(c), y(c), c\big) = 0$ ta được $F''_{xc}x'(c) + F''_{yc}y'(c) + F''_{cc} = 0$ hay $F''_{cc} \neq 0$, vô lí với giả thiết $F''_{cc} \neq 0$.

Ví dụ 2.4.2

1. Tìm hình bao của họ đường cong $F = y - (x - c)^3 = 0$
   Khử c từ hệ phương trình $(*)$ trong định lí 2.4.1

$$\begin{cases} F = y - (x - c)^3 = 0 \\ F'_c = 3(x - c)^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = c,\ y = 0$$

   Dễ dàng kiểm tra trục hoành $y = 0$ là hình bao của họ đường cong.

2. Tìm hình bao của họ các đường thẳng mà tổng hai đoạn chắn trên các trục toạ độ bằng a không đổi $(a > 0)$. Ta chia họ đường thẳng đó vào một trong 4 họ con được liệt kê dưới đây.

• Trước hết ta xét họ đường thẳng mà phần bị chắn giữa trục hoành và trục tung nằm trong góc phần tư thứ I. Phương trình biểu diễn họ đường thẳng đó là

$$F(x,y,c) = \frac{x}{c} + \frac{y}{a-c} - 1 = 0, \quad 0 < c < a.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x,y,c) = \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{a-c} - 1 = 0 \\ F'_c(x,y,c) = -\dfrac{x}{c^2} + \dfrac{y}{(a-c)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{a-c} - 1 = 0 \\ \dfrac{x}{c^2} = \dfrac{y}{(a-c)^2} \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai, do $x > 0, y > 0$, suy ra

$$\frac{x}{c^2} = \frac{y}{(a-c)^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{c} = \frac{\sqrt{y}}{a-c} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{a}.$$

Thay vào phương trình đầu

$$\frac{\sqrt{x}}{c}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{y}}{a-c}\sqrt{y} = 1,$$

ta được

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{a}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{a}\sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

Ta có thể kiểm tra điều kiện đủ trong nhận xét sau định lí 2.4.1 thỏa mãn

$$F'_x(x,y,c) = \frac{1}{c} \neq 0,\ F''_{cc}(x,y,c) = \frac{2x}{c^3} + \frac{2y}{(a-c)^3} > 0$$

do $x, y > 0$. Vậy khi đó $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ là hình bao của họ đường cong.

• Xét họ đường thẳng mà phần bị chắn giữa trục hoành và trục tung nằm trong góc phần tư thứ II. Phương trình biểu diễn họ đường thẳng đó

$$F(x,y,c) = \frac{x}{-c} + \frac{y}{a-c} - 1 = 0, \quad 0 < c < a.$$

Giải tương tự như trên, hệ phương trình $(*)$ kéo theo $x < 0, y > 0$ và hình bao của họ đường cong này có phương trình

$$\sqrt{-x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

• Các trường hợp khác được giải hoàn toàn tương tự. Chẳng hạn khi họ đường thẳng có phần bị chắn giữa trục hoành và trục tung nằm trong góc phần tư thứ IV. Phương trình biểu diễn họ đường thẳng đó

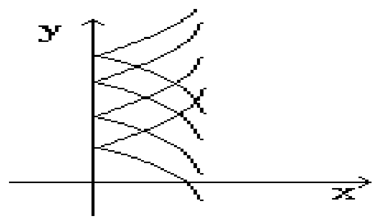
$$F(x, y, c) = \frac{x}{c} + \frac{y}{a-c} - 1 = 0, \quad a < c < 2a.$$

Trong trường hợp này, hình bao của họ đường cong có phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{-y} = \sqrt{a}.$$

Gộp các trường hợp lại, ta đi tới kết luận $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = \sqrt{a}$ là hình bao của họ đường thẳng đã cho. Chú ý rằng dựa vào tính đối xứng của họ đường thẳng qua các trục tọa độ, ta cũng đi đến kết luận trên.

3. Tìm hình bao của họ đường cong $F = (y-c)^2 - x^3 = 0$.



Hình 2.9: Họ đường cong $(y-c)^2 - x^3 = 0$

Khử c từ hệ phương trình $(*)$ trong định lí 2.4.1

$$\begin{cases} F = (y-c)^2 - x^3 = 0 \\ F'_c = -2(y-c) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = c, \ x = 0$$

Ta được trục tung $x = 0$ có thể là hình bao của họ đường cong. Tuy nhiên

$$F'_x = -3x^2 = 0, \ F'_y = 2(y-c) = 0$$

tại các điểm trên trục tung $x = 0$, nói cách khác các điểm trên trục tung là điểm kì dị của F. Ta dễ dàng nhận thấy trục tung không là hình bao của họ đường cong. Vậy họ đã cho không có hình bao.

4. Họ đường cong $(y-c)^2+(x-2)^2 = c^2+1$ hay $x^2-4x+y^2-2cy+3 = 0$ là tập các đường tròn đi qua 2 điểm cố định $A(1,0)$ và $B(3,0)$.

   Khử c từ hệ phương trình $(*)$ trong định lí 2.4.1

$$\begin{cases} F = x^2 - 4x + y^2 - 2cy + 3 = 0 \\ \qquad F'_c = -2y = 0 \end{cases}$$

   Suy ra nghiệm của hệ $y = y(c) \equiv 0,\ x = x(c) \equiv 1$ hoặc $y = y(c) \equiv 0,\ x = x(c) \equiv 3$. Đây là 2 điểm cố định $A(1,0)$ và $B(3,0)$ thuộc mọi đường tròn trong họ đã cho. Hiển nhiên đó không là hình bao của họ đường tròn. Các điểm A, B không là điểm kì dị, tại các điểm này

$$F'_x(A) = -2 \neq 0,\ F'_x(B) = 2 \neq 0.$$

   Tuy nhiên $F''_{cc} = 0$, điều kiện đủ phát biểu sau định lí 2.4.1 là cần thiết để kiểm tra nghiệm của hệ phương trình $(*)$ có là hình bao hay không.

5. Tìm hình bao của họ các đường thẳng mà tích hai đoạn chắn trên các trục toạ độ bằng 1.

   Cũng như ví dụ thứ hai trong ví dụ 2.4.2, phương trình biểu diễn họ các đường thẳng mà tích hai đoạn chắn trên các trục toạ độ bằng 1 được viết thành các dạng khác nhau tùy theo phần đường thẳng bị chắn giữa các trục toạ độ nằm trong góc phần tư nào

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{\frac{1}{c}} = 1, \quad c > 0 \qquad \text{(I)}$$

   hoặc

$$\frac{x}{-c} + \frac{y}{\frac{1}{c}} = 1, \quad c > 0 \qquad \text{(II)}$$

   hoặc

$$\frac{x}{c} - \frac{y}{\frac{1}{c}} = 1, \quad c > 0 \qquad \text{(III)}$$

hoặc

$$\frac{x}{-c} - \frac{y}{\frac{1}{c}} = 1, \quad c > 0. \qquad \text{(IV)}$$

Xét trường hợp họ đường thẳng có dạng (I)

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{\frac{1}{c}} = 1 \quad \text{hay} \quad x + c^2y - c = 0.$$

Khử c từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F = x + c^2y - c = 0 \\ F'_c = 2cy - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; c = \frac{1}{2y}$$

Thay vào phương trình đầu $x + c^2y - c = 0$ ta được

$$x + \frac{1}{4y} - \frac{1}{2y} = 0 \;\Leftrightarrow\; xy = \frac{1}{4}.$$

Tại các điểm thuộc hypecbol này

$$F'_x = 1 \neq 0, \; F''_{cc} = 2y \neq 0,$$

do đó $xy = \frac{1}{4}$ là hình bao của họ các đường (I).

Tiến hành tương tự cho các họ (II), (III) và (IV), ta đi tới kết luận

$$|xy| = \frac{1}{4}$$

là hình bao của họ đường thẳng đã cho trong bài.

2.5 Khái niệm về mặt cong định hướng

Chúng ta không định nghĩa mặt cong. Trong phạm vi giáo trình này chúng ta chỉ đề cập tới các mặt cong thường gặp, phương pháp biểu diễn mặt cong dưới dạng hệ thức cũng như dạng tham số và khái niệm mặt cong định hướng.
Các phương pháp thông dụng dùng để biểu diễn mặt cong:

1. Mặt cong được cho dưới dạng hàm hai biến

$$f : D \to \mathbb{R},$$

trong đó D là một miền phẳng nào đó trong $\mathbb{R}^2$. Người ta còn viết ánh xạ trên dưới dạng

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Trong nhiều trường hợp hàm biểu diễn mặt cong không được cho dưới dạng tường mà ẩn trong hệ thức

$$F(x, y, z) = 0.$$

Chẳng hạn mặt cầu tâm O bán kính a thường được cho dưới dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

2. Cách thứ hai, mặt cong được cho dưới dạng hàm véc tơ hai biến

$$\mathbf{g} : M \to \mathbb{R}^3,$$

trong đó $M \subset \mathbb{R}^2$ là một miền phẳng nào đó trong $\mathbb{R}^2$. Người ta còn viết ánh xạ đó dưới dạng

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(u, v), \quad (u, v) \in M \subset \mathbb{R}^2.$$

Hàm véc tơ này thường được viết chi tiết hơn dưới dạng

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

trong đó (x, y, z) là tọa độ của véc tơ $\mathbf{g}$. Tập hợp (hay quỹ tích) những điểm $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ trong $\mathbb{R}^3$ khi (u, v) thay đổi trong miền phẳng $M \subset \mathbb{R}^2$ là một mặt cong nào đó. Chúng ta nói mặt cong đó được cho bởi hàm véc tơ $\mathbf{g}(u, v)$.

Chẳng hạn ánh xạ

$$\mathbf{g}(u, v) = (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v)$$

hoặc viết dưới dạng

$$\begin{cases} x = R\sin v\cos u \\ y = R\sin v\sin u \\ z = R\cos v \end{cases}$$

khi (u, v) biến thiên trong hình chữ nhật $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$, biểu diễn mặt cầu tâm O bán kính R. Cách biểu diễn mặt cong như vậy được gọi là phương pháp cho mặt cong dưới dạng *tham số* hay còn gọi là phương pháp cho mặt cong kiểu Gauss.

Nhận xét rằng cách biểu diễn mặt cong bằng phương pháp thứ nhất là trường hợp đặc biệt của phương pháp này. Cụ thể nếu mặt cong S được cho bởi hàm số

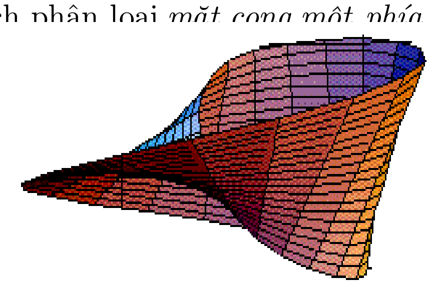
$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

khi đó S cũng được cho dưới dạng tham số sau

$$\mathbf{g}(u, v) = \big(u, v, f(u, v)\big) \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

với (u, v) biến thiên trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Phần tiếp theo trong mục này ta sẽ đưa vào khái niệm *mặt cong định hướng*. Để có thể hiểu rõ hơn khái niệm về mặt cong định hướng, chúng ta tham khảo cách phân loại *mặt cong một phía* và *mặt cong hai phía*.



Hình 2.10: Mặt cong một phía

Mặt cong một phía được minh hoạ một cách sơ bộ như sau: từ một điểm bất kì của mặt cong nếu đi dọc theo một đường cong nào đó bám vào mặt cong chúng ta có thể tới một điểm bất kì khác ở mặt bên kia mà không xuyên thủng qua mặt cong cũng như không cắt biên của mặt cong đó. Mặt cong như vậy *không thể định hướng* được. Ví dụ như dải băng Moebius. Nó được tạo thành một cách đơn giản bằng cách lấy một băng giấy hình chữ nhật rồi xoắn một đầu băng giấy 180^0, sau đó sử dụng hồ dán để gắn đầu này của băng với đầu đối diện (xem hình vẽ trên).

Ta gọi các mặt cong có thể định hướng được là các *mặt cong hai phía*. Từ nay về sau chúng ta chỉ nghiên cứu các mặt cong hai phía. Trước hết chúng ta dẫn vào định nghĩa mặt cong trơn

Định nghĩa 2.5.1 *Tập hợp $S \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là mặt cong trơn nếu tồn tại tập mở, đơn liên, giới nội D của $\mathbb{R}^2$ và một ánh xạ $\mathbf{g} : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ ($\overline{D}$ là bao đóng của D trong $\mathbb{R}^3$) thoả mãn:*
(i) Hạn chế của ánh xạ $\mathbf{g}$ trên D là một song ánh khả vi liên tục của D lên S ($\mathbf{g}(D) = S$), đồng thời $\mathbf{g}'(\mathbf{u})$ có hạng bằng 2 với mọi $\mathbf{u} \in D$.
(ii) Ánh xạ $\mathbf{g}$ liên tục trên $\overline{D}$ và $\mathbf{g}(\delta(D)) \cap S = \emptyset$, với $\delta(D)$ là biên của D.
Hàm véc tơ $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ được gọi là biểu diễn tham số của mặt cong S.

Chú ý Ta nhớ lại rằng bao đóng của D, kí hiệu $\overline{D} = D \cup \delta(D)$, là hợp của tập D và tập biên $\delta(D)$ của nó.
Giả sử $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))$ trong đó $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D$, khi đó

$$\mathbf{g}'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

có hạng bằng 2, tức là hai véc tơ cột của ma trận $\mathbf{g}'(\mathbf{u})$ độc lập tuyến tính.

Tương tự như cung trơn định hướng chúng ta công nhận kết quả sau để làm cơ sở cho khái niệm mặt cong định hướng

Định lí 2.5.1 *Gọi $\mathbf{g} : D \to S$ và $\mathbf{h} : T \to S$ $(D, T \subset \mathbb{R}^2)$ là các biểu diễn tham số của mặt cong trơn S. Khi đó ánh xạ*

$$\boldsymbol{\varphi} : D \xrightarrow{\mathbf{g}} S \xrightarrow{\mathbf{h}^{-1}} T \qquad (\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g})$$

là song ánh, $\boldsymbol{\varphi}$ và $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ là các ánh xạ khả vi liên tục trên D và T tương ứng.

Chú ý Từ định lí trên ta suy ra $\mathbf{h} \circ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g}$ và theo quy tắc đạo hàm hàm hợp $(\mathbf{h}' \circ \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{g}'$. Ma trận $\mathbf{g}'$ có hạng bằng 2 trên tập D, suy ra $\boldsymbol{\varphi}'$ cũng có hạng bằng 2 và $\det(\boldsymbol{\varphi}') \neq 0$ trên D. Mặt khác do D liên thông, suy ra $\det(\boldsymbol{\varphi}')$ không đổi dấu trên D. Vì vậy ta có thể định nghĩa hướng của mặt cong trơn S:

Định nghĩa 2.5.2 *Hai biểu diễn tham số của mặt cong trơn* $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ *và* $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ *được gọi là cùng hướng nếu* $\det\big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})\big)$ *mang dấu dương và ngược hướng nếu* $\det\big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})\big)$ *âm với mọi* $\mathbf{u} \in D$.

Định nghĩa trên thực chất là sự phân lớp tương đương của các biểu diễn tham số mặt cong S:

$\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$ khi và chỉ khi $\det\big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})\big) > 0$. Nếu ta quy ước một biểu diễn tham số $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ nào đó định hướng dương cho mặt cong S, khi đó tất cả các biểu diễn tham số $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ cùng lớp tương đương với $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ cũng định hướng S theo chiều dương và ngược lại.

Như vậy hướng của mặt cong trơn gắn liền với biểu diễn tham số mặt cong đó. Ý nghĩa hình học của việc định hướng mặt cong: mặt cong định hướng theo véc tơ pháp, véc tơ pháp của mặt cong sẽ được nói đến trong mục kế tiếp.

2.6 Pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong trơn $S \subset \mathbb{R}^3$ với $\mathbf{g}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in D \subset \mathbb{R}^2$ là biểu diễn tham số của S. Gọi $M_0 = \mathbf{g}(\mathbf{a})$, $(\mathbf{a} \in D)$ là một điểm thuộc S. Ta đã làm quen với đạo hàm hàm véc tơ theo hướng, đặc biệt đối với hàm véc tơ 2 biến $\mathbf{g}(u_1, u_2)$ đạo hàm theo hướng $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ chính là đạo hàm riêng theo biến u_1 và đạo hàm theo hướng $\mathbf{e_2} = (0, 1)$ chính là đạo hàm riêng theo biến u_2

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{e_1}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a}) = \Big(\mathbf{g}(\mathbf{a} + t\mathbf{e_1})\Big)'\Big|_{t=0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{e_2}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a}) = \Big(\mathbf{g}(\mathbf{a} + t\mathbf{e_2})\Big)'\Big|_{t=0}$$

Mặt khác $\mathbf{g}(\mathbf{a} + t\mathbf{e})$, với t biến thiên trong lân cận $t = 0$, xác định một đường cong thuộc mặt S và đi qua $M_0 = \mathbf{g}(\mathbf{a})$. Vậy các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a})$, $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a})$ là các véc tơ tiếp tuyến với các đường cong đó tại M_0.

Kí hiệu $\mathbf{n} = \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a}) \wedge \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a})$ là tích có hướng của 2 véc tơ đạo hàm riêng $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a})$ và $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a})$, ta có kết quả quan trọng được trình bày trong định lí sau:

Định lí 2.6.1 *Véc tơ* $\mathbf{n} = \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a}) \wedge \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a})$ *vuông góc với véc tơ tiếp tuyến tại* M_0 *của cung trơn bất kì thuộc mặt* S *và đi qua* M_0.

Chứng minh. Thật vậy giả sử $\mathbf{g}(\mathbf{u}(t))$ là biểu diễn tham số của một đường cong L bất kì thuộc mặt S và đi qua M_0, $(\mathbf{g}(\mathbf{u}(t_0)) = \mathbf{g}(\mathbf{a}) = M_0)$. Theo công thức đạo hàm hàm hợp, véc tơ tiếp tuyến tại M_0 bằng đạo hàm hàm $\mathbf{g}(\mathbf{u}(t))$ tại điểm t_0

$$\mathbf{g}'(\mathbf{u}(t_0))\mathbf{u}'(t_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{a})\mathbf{u}'(t_0),$$

thực chất là một tổ hợp tuyến tính của 2 véc tơ cột của ma trận đạo hàm $\mathbf{g}'(\mathbf{a})$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial x}{\partial u_2}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial y}{\partial u_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial y}{\partial u_2}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial z}{\partial u_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial z}{\partial u_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Nói cách khác véc tơ tiếp tuyến với L tại M_0

$$\mathbf{g}'(\mathbf{a})\mathbf{u}'(t_0) = \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a}) + \beta \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a}).$$

Do $\mathbf{n} = \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a}) \wedge \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a}) \Rightarrow\ \mathbf{n}\perp \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a})$ và $\mathbf{n} \perp \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a})$. Vậy $\mathbf{n}$ vuông góc với mọi tổ hợp tuyến tính của 2 véc tơ đó, nói cách khác $\mathbf{n}$ vuông góc với véc tơ tiếp tuyến tại M_0 của đường cong L. ■

Từ định lí trên suy ra tập hợp toàn bộ các tiếp tuyến tại M_0 với mọi đường cong thuộc mặt S là một mặt phẳng, véc tơ $\mathbf{n} = \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{a}) \wedge \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{a})$ là véc tơ pháp của mặt phẳng. Ta gọi mặt phẳng đó là *mặt phẳng tiếp diện* của mặt cong S tại M_0 và đường thẳng đi qua M_0 nhận véc tơ $\mathbf{n}$ làm véc tơ pháp được gọi là *pháp tuyến* của mặt cong.

Ví dụ 2.6.1

1. Viết phương trình tiếp diện tại điểm $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 3)$ với mặt trụ
$$\mathbf{g}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)\,.$$
Điểm M thuộc mặt trụ ứng với $u = \dfrac{\pi}{4}, v = 3$. Các đạo hàm riêng tại đó
$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0)\big|_{u=\frac{\pi}{4}, v=3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (0,0,1)$$
Véc tơ pháp tại điểm M thuộc mặt trụ tương ứng với $u = \frac{\pi}{4}, v = 3$
$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, 3) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(\frac{\pi}{4}, 3) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \wedge (0,0,1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$
Vậy mặt phẳng tiếp diện tại điểm $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 3)$ với mặt trụ là
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \quad \text{hay} \quad x + y - \sqrt{2} = 0.$$

2. Viết phương trình tiếp diện tại điểm $M(1, 1, \sqrt{2})$ với mặt nón
$$\mathbf{g}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)\,.$$
Các đạo hàm riêng
$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = (-v\sin u, v\cos u, 0)\,,\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (\cos u, \sin u, 1)$$
Điểm M thuộc mặt nón ứng với $u = \frac{\pi}{4}, v = \sqrt{2}$. Các đạo hàm riêng tại đó
$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = (-1, 1, 0),\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$$
Véc tơ pháp tại điểm M thuộc mặt nón tương ứng với $u = \frac{\pi}{4}, v = \sqrt{2}$ bằng
$$\mathbf{n} = (-1, 1, 0) \wedge (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1) = (1, 1, -\sqrt{2})$$
Suy ra mặt phẳng tiếp diện với mặt nón đã cho tại điểm M
$$(x-1) + (y-1) - \sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0 \quad \text{hay} \quad x + y - \sqrt{2}z = 0.$$

Trường hợp hàm biểu diễn mặt cong S được cho bởi hệ thức $F(x, y, z) = 0$

Giả thiết hàm F khả vi và F'_x, F'_y, F'_z không đồng thời bằng 0 tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc mặt S. Ta sẽ chứng minh $\mathbf{n} = \big(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\big)$ là véc tơ pháp của mặt cong S tại M_0.

Thật vậy gọi L là đường cong bất kì thuộc mặt S, đi qua M_0 có biểu diễn tham số

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad \Big(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)\Big).$$

Do L thuộc mặt cong

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0.$$

Đạo hàm 2 vế hệ thức trên theo t tại $t = t_0$

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(M_0)z'(t_0) = 0$$

Hệ thức trên chứng tỏ véc tơ $\mathbf{n} = \big(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\big)$ vuông góc với véc tơ tiếp tuyến $\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big)$ của L. Do L được chọn bất kì, mọi véc tơ tiếp tuyến với các đường cong thuộc mặt S đi qua M_0 cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng đó là mặt phẳng tiếp diện tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$, nhận véc tơ

$$\mathbf{n} = \big(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\big)$$

làm véc tơ pháp.

Ví dụ 2.6.2

Cho mặt nón với phương trình chính tắc

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Mặt nón được cho dưới dạng ẩn $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
Trong ví dụ trước ta đã xét biểu diễn tham số của chính mặt nón này

$$\mathbf{g}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)\,.$$

Ta có

$$F'_x(x, y, z) = 2x, F'_y(x, y, z) = 2y, F'_z(x, y, z) = -2z.$$

Véc tơ pháp tại điểm $M(1, 1, \sqrt{2})$ thuộc mặt nón bằng

$$\mathbf{n} = \big(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\big) = (2, 2, -2\sqrt{2}).$$

Mặt phẳng tiếp diện với mặt nón tại điểm M có phương trình

$$2(x-1) + 2(y-1) - 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0 \quad \text{hay} \quad x + y - \sqrt{2}z = 0.$$

Ý nghĩa hình học của mặt cong định hướng

Quay trở lại với việc định hướng mặt cong đã trình bày trong định nghĩa 2.5.2: Hai biểu diễn tham số của mặt cong trơn $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ và $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ được gọi là cùng hướng nếu $\det\big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})\big) > 0$ và ngược hướng nếu $\det\big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})\big) < 0$ $(\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{h^{-1}} \circ \mathbf{g})$. Tương tự như hệ thức (2.1) về mối quan hệ giữa các véc tơ tiếp tuyến của cung trơn, ta có định lí

Định lí 2.6.2 *Các véc tơ pháp tại cùng một điểm trên mặt S tương ứng với 2 biểu diễn tham số $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ và $\mathbf{h}(\mathbf{u})$*

$$\mathbf{n_g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \quad \text{và} \quad \mathbf{n_h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \wedge \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2}(\mathbf{u})$$

thỏa mãn tính chất

$$\mathbf{n_g}(\mathbf{u}) = \mathbf{n_h}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})) \cdot \det\big(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})\big). \tag{2.3}$$

Như vậy các véc tơ pháp tuyến tại mỗi điểm trên mặt cong trơn theo các biểu diễn tham số khác nhau hoặc luôn luôn cùng hướng hoặc luôn luôn ngược hướng. Về phương diện hình học ta có thể quy ước hướng của mặt cong xác định theo véc tơ pháp tuyến.

Chứng minh. Thật vậy, với các kí hiệu $\mathbf{h} = (m, n, p)$, $\mathbf{g} = (x, y, z)$ ta viết hệ thức đạo hàm hàm hợp $(\mathbf{h}' \circ \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{g}'$ dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial u_1} & \frac{\partial m}{\partial u_2} \\ \frac{\partial n}{\partial u_1} & \frac{\partial n}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p}{\partial u_1} & \frac{\partial p}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{pmatrix}, \quad \text{trong đó} \quad \boldsymbol{\varphi}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ta có $\mathbf{n_g}$ bằng tích có hướng của 2 véc tơ $a\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1} + c\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2}$ và $b\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1} + d\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2}$

$$\mathbf{n_g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) = \left(a\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1} + c\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2}\right) \wedge \left(b\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1} + d\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2}\right) =$$

$$= ad\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2}\right) + bc\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u_1}\right) = ad\mathbf{n_h} - bc\mathbf{n_h} = \det(\boldsymbol{\varphi}^{'})\mathbf{n_h}. \blacksquare$$

Người ta còn dùng thuật ngữ mặt cong được định hướng lên phía trên hoặc xuống phía dưới nếu véc tơ pháp của mặt hướng lên trên hay xuống dưới. (Đối với mặt cong kín, ta nói mặt cong được định hướng vào trong hoặc ra phía ngoài.)

Trường hợp đặc biệt, khi mặt cong trơn S được cho bởi phương trình $z = f(x, y), (x, y) \in D$, khi đó biểu diễn tham số của mặt cong S có thể viết dưới dạng $\mathbf{g}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Véc tơ pháp tuyến của mặt là

$$\mathbf{n}(x, y) = (1, 0, f_x^{'}) \wedge (0, 1, f_y^{'}) = (-f_x^{'}, -f_y^{'}, 1).$$

Mặt cong $z = f(x, y)$ định hướng theo véc tơ pháp tuyến đó *hướng lên trên.*

Một vài ví dụ về biểu diễn tham số của đường cong

Trong các chương sau, khi trình bày các vấn đề về tích phân bội, chẳng hạn xét tích phân kép trên một miền D nào đó, chúng ta thường phải biểu diễn miền D đó thông qua các đường cong phẳng. Các bài toán tính tích phân kép đòi hỏi chúng ta phải viết các biểu diễn tham số của các đường cong đó. Tương tự tích phân bội ba được xét trên các miền không gian giới hạn bởi các mặt phẳng cũng như các mặt bậc hai. Để tính các tích phân bội ba, việc viết các phương trình xác định mặt cong hoặc tìm các biểu diễn tham số của các mặt đó là cần thiết. Trong chương IV, khi nghiên cứu về tích phân đường, chúng ta cũng phải biểu diễn các đường cong phẳng và các đường cong trong không gian dưới dạng tham số. Công việc đôi khi sẽ trở nên phức tạp hơn nếu các đường cong là giao của các mặt bậc hai. Dưới đây chúng ta sẽ xét một số các ví dụ về biểu diễn tham số của các đường cong thuộc dạng đó.

Ví dụ 2.6.3

1. Biểu diễn tham số của axtrôit $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

2. Tìm một biểu diễn tham số của đường cong cong phẳng $x^3+y^3 = 3xy$.
Thay $y = tx$ vào hệ thức xác định đường cong ta được

$$x^3(1+t^3) = 3tx^2 \quad \text{suy ra} \quad x = \frac{3t}{1+t^3}.$$

Vậy biểu diễn tham số của đường cong $x^3 + y^3 = 3xy$ là

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty,\ t \ne 1.$$

Bằng việc khảo sát đường cong dưới dạng tham số, ta có thể vẽ đồ thị đường cong đã cho. Hơn nữa có thể chỉ ra đường cong có tiệm cận xiên $x + y = -1$ (khi t tiến dần tới -1).

Chú ý rằng nếu ta chỉ xét phần mặt phẳng hữu hạn giới hạn bởi đường cong nói trên, khi đó biên của miền hữu hạn này chỉ là một phần của đường cong, ứng với tham số $t \in (0, \infty)$

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad 0 \le t < \infty.$$

Ta cũng có thể tìm một biểu diễn tham số khác của đường cong biên nói trên.

Đổi biến (gần giống như chuyển sang tọa độ cực)

$$\begin{cases} x = r\cos^{\frac{2}{3}} t \\ y = r\sin^{\frac{2}{3}} t \end{cases}$$

trong đó $r = r(t)$ là hàm theo biến t. Từ hệ thức đã cho $x^3+y^3 = 3xy$, hiển nhiên $r = 3\cos^{\frac{2}{3}} t \sin^{\frac{2}{3}} t$, suy ra biểu diễn tham số của đường cong

$$\begin{cases} x = 3\cos^{\frac{4}{3}} t \sin^{\frac{2}{3}} t \\ y = 3\cos^{\frac{2}{3}} t \sin^{\frac{4}{3}} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

3. Giao của mặt parabôlôit hypebôlic $x^2-y^2=z$ với mặt phẳng $y-2x=0$ là đường cong parabôl

$$\begin{cases} x^2-y^2=z \\ y-2x=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-3t^2 \end{cases}$$

4. Tìm một biểu diễn tham số của giao giữa mặt nón $x^2+y^2-z^2=0$ với mặt phẳng $x+y+2z-2=0$.

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x+y+2z-2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2+3y^2-2xy+4x+4y-4=0 \\ x+y+2z-2=0 \end{cases}$$

Hình chiếu của giao giữa mặt nón và mặt phẳng xuống mặt phẳng xOy là đường bậc hai $3x^2+3y^2-2xy+4x+4y-4=0$. Dạng toàn phương $\omega=3x^2+3y^2-2xy$ có 2 trị riêng $\lambda_1=2, \lambda_2=4$. Sử dụng phép biến đổi

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

dạng toàn phương đưa về dạng chính tắc $\omega=2x'^2+4y'^2$. Vậy đường bậc hai trong mặt phẳng xOy là elip có phương trình

$$2(x'+\sqrt{2})^2+4y'^2=8 \quad \text{hay} \quad \frac{(x'+\sqrt{2})^2}{4}+\frac{y'^2}{2}=1.$$

Phương trình của giao giữa mặt nón và mặt phẳng

$$\begin{cases} x+y+2z-2=0 \\ \frac{(x'+\sqrt{2})^2}{4}+\frac{y'^2}{2}=1 \end{cases}$$

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $x'Oy'$, phương trình $\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{4}+\frac{y'^2}{2}=1$ xác định một elip với biểu diễn tham số

$$\begin{cases} x'=-\sqrt{2}+2\cos t \\ y'=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$$

Thay trả lại các biến $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y',\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, ta tìm được biểu diễn tham số của giao giữa mặt nón và mặt phẳng đã cho

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2}\cos t - \sin t \\ y = -1 + \sqrt{2}\cos t + \sin t \\ z = 2 - \sqrt{2}\cos t \end{cases}$$

với $0 \leq t \leq 2\pi$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Viết biểu diễn tham số của đường tròn
$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

2. Viết biểu diễn tham số của đường tròn
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

3. Viết biểu diễn tham số của elip
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. Tính độ dài cung parabol $y^2 = 4x$ từ đỉnh tới điểm $M(1,2)$.

5. Tính độ dài cung $y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

6. Tính độ dài đường cong axtroid
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

7. Tính độ dài các cung

   (a) $x = t, y = t^2, z = \dfrac{2t^3}{3},\ 0 \leq t \leq 2$

   (b) $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = \dfrac{3t}{\pi},\ 0 \leq t \leq \pi$

   (c) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t,\ 0 \leq t \leq s$.

8. Chứng minh nếu đường cong có độ cong bằng 0 tại mọi điểm thì nó là đường thẳng.

9. Tính độ cong của

   (a) $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y^2 - 2x + z = 0$ tại $(1,1,1)$.

   (b) $x = \cos t, y = \sin t, z = \operatorname{ch} t$ tại $t = 0$.

   (c) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ tại điểm bất kì.

10. Tìm bán kính cong của $r = ae^{k\varphi}$ tại điểm bất kì.

11. Tìm tọa độ tâm cong của các đường cong

    (a) $xy = 1$ tại $(1, 1)$.

    (b) $ay^2 = x^3$ tại (a, a).

    (c) $y = e^x$ tại điểm $(0, 1)$.

12. Tìm hình bao của họ các đường cong $(x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}$.

13. Tìm hình bao của họ các đoạn thẳng có độ dài a không đổi bị chắn bởi 2 trục tọa độ.

14. Tìm hình bao của họ các đoạn thẳng sao cho tam giác tạo thành chắn bởi 2 trục tọa độ có diện tích không đổi S.

15. Viết phương trình các mặt tiếp diện với mặt cong

    (a) $z = x^2 + y^2$ tại điểm $(1, -2, 5)$.

    (b) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ tại điểm $(4, 3, 4)$.

16. Chứng minh rằng các mặt tiếp diện với mặt cong $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ tạo với các trục tọa độ các đoạn chắn có tổng không đổi.

17. Chứng tỏ rằng mặt cong với biểu diễn tham số

$$\begin{cases} x = 2\cos u \cos u \\ y = 2\cos u \sin u \\ z = v \end{cases} \qquad \text{với } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 1$$

    là mặt trụ. Xác định mặt trụ đó.

18. Hãy viết biểu diễn tham số phần mặt cầu tâm $O(0, 0, 0)$ bán kính $R = 3$ trong góc phần tám thứ nhất của hệ trục tọa độ Đề các $Oxyz$.

19. Hãy viết biểu diễn tham số nửa mặt cầu

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2, \ z \geq 0.$$

    Tìm tọa độ véc tơ pháp tại điểm $M(1, 0, 1)$ của mặt đó và viết phương trình tiếp diện của mặt cong tại M.

20. Chứng tỏ rằng mặt cong với biểu diễn tham số

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v \end{cases}$$

là mặt nón. Hãy viết phương trình chính tắc mặt nón đó.

21. Viết một biểu diễn tham số của elip

$$x^2 + y^2 = 1,\ \ x + z = 1.$$

22. Tìm một biểu diễn tham số của đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

23. Tìm một biểu diễn tham số của giao hai mặt trụ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

trong góc phần tám thứ nhất $x > 0, y > 0, z > 0$.

24. Hãy tìm một biểu diễn tham số của giao giữa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2$ và mặt trụ $x^2 - Rx + y^2 = 0$.

25. Chứng tỏ rằng quỹ đạo chuyển động của điểm A cố định nằm trên đường tròn bán kính $a > 0$, khi cho đường tròn đó lăn trên trục Ox là xyclôit

$$\begin{cases} x = at - a\sin t \\ y = a - a\cos t \end{cases}$$

26. Chứng tỏ rằng quỹ đạo chuyển động của điểm A cố định (A nằm trong đường tròn bán kính $a > 0$ và cách tâm đường tròn một khoảng bằng h), khi cho đường tròn đó lăn trên trục Ox là xyclôit

$$\begin{cases} x = at - h\sin t \\ y = a - h\cos t. \end{cases}$$

(Người ta gọi biểu diễn tham số trên là biểu diễn tham số của xyclôit duỗi, trường hợp $h > a$, đó là biểu diễn tham số của xyclôit co).

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. $x = 1 + \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$
2. $x = 1 + \sqrt{2}\cos t,\ y = 1 + \sqrt{2}\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$
3. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$
4. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
5. $\ln 3 - \frac{1}{2}$
6. $6a$
7. (a) $\frac{22}{3}$, (b) $\sqrt{9 + 4\pi^2}$, (c) $\sqrt{3}(e^s - 1)$
9. (a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$, (b) $\sqrt{2}$, (c) $\frac{\sqrt{2}}{3e^t}$
10. $ae^{k\varphi}\sqrt{1 + k^2}$
11. (a) $(2, 2)$, (b) $(-\frac{11}{2}a, \frac{16}{3}a)$, (c) $(-2, 3)$
12. $y = \pm x$
13. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
14. $4x^2y^2 = S$
15. (a) $2x - 4y - z - 5 = 0$, (b) $3x + 4y - 6z = 0$
16. Các đoạn chắn có tổng không đổi bằng a.
17. $(x - 1)^2 + y^2 = 1,\ z \in [0, 1]$
18. $\begin{cases} x = 3\sin\theta\cos\varphi \\ y = 3\sin\theta\sin\varphi \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ z = 3\cos\theta \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ z = \sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$

    Phương trình tiếp diện $y - z + 1 = 0$.

20. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

21. $x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

22. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\varphi + \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{6}} \\ y = -\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{6}} \\ z = -\frac{4}{\sqrt{6}}\sin\varphi \end{cases} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

23. $x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t, \ 0 < t < \frac{\pi}{2}$

24. $\begin{cases} x = R\cos^2\frac{t}{2} \\ y = \frac{R}{2}R\sin t \\ z = R\sin\frac{t}{2} \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi.$

Chương 3

Tích phân bội

Trong chương này chúng ta sẽ xây dựng khái niệm và cách tính tích phân cho hàm thực nhiều biến số. Trước hết chúng ta nhắc lại khái niệm "hình hộp" đã biết đến ở chương trước.

Hình hộp trong $\mathbb{R}$ là khoảng đóng

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Người ta thường nói hình hộp trong $\mathbb{R}$ là hình hộp 1 chiều.

Hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ là tích Đề các của n khoảng đóng trong $\mathbb{R}$:

$$H = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

hay

$$H = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}, \quad \text{với mọi} \quad i = 1, .., n.$$

Ta gọi hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ là hình hộp n chiều.

Thể tích của hình hộp n chiều

$$H = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

kí hiệu $\lambda(H)$ là tích của các độ dài các đoạn thẳng $[a_i, b_i]$:

$$\lambda(H) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$$

Đặc biệt khi $H_1 = [a, b]$ là hình hộp 1 chiều, thể tích của H_1 là độ dài của đoạn $[a, b]$:

$$\lambda(H_1) = \lambda[a, b] = b - a.$$

Nếu H_2 là hình hộp 2 chiều $H_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, khi đó thể tích của H_2

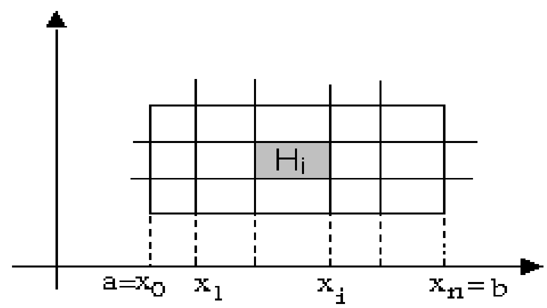
$$\lambda(H_2) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

chính là diện tích hình chữ nhật H.

Khi xây dựng khái niệm tích phân hàm một biến chúng ta đã nói tới phép chia khoảng $[a, b]$ thành n khoảng nhỏ bởi các điểm chia x_i thuộc $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Bây giờ, tổng quát hơn chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm phép chia (theo kiểu lưới) hình hộp n chiều H nói trên thành các hình hộp n chiều nhỏ hơn trong H.



Hình 3.1: Phép chia lưới hình hộp

Gọi T_1 là một khoảng con nào đó ($T_1 = [x_i, x_{i+1}]$) trong phép chia $[a_1, b_1]$ thành m_1 khoảng nhỏ, T_2 cũng là một khoảng con nào đó ($T_2 = [y_j, y_{j+1}]$) trong phép chia $[a_2, b_2]$ thành m_2 khoảng nhỏ... Tương tự đối với T_n. Khi đó hình hộp n chiều H được chia thành

$$N = m_1 m_2 \cdots m_n$$

hình hộp (n chiều) nhỏ hơn và

$$H_i = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$$

là một trong các hình hộp nhỏ đó. Hiển nhiên

$$H = \bigcup_{i=1}^{N} H_i.$$

Trong chương này khi nói về phép chia F một hình hộp nào đó, chúng ta luôn hiểu là phép chia kiểu lưới nói trên. Hiển nhiên thể tích của H bằng tổng các thể tích của tất cả các hình hộp nhỏ

$$\lambda(H) = \sum_{i=1}^{N} \lambda(H_i).$$

Chú ý rằng cũng như trong hàm một biến, người ta kí hiệu $d(F)$ là đường kính của phép chia F. Đường kính đó là đường kính lớn nhất trong số tất cả các đường kính của hình hộp nhỏ $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ của phép chia F nói trên

$$d(F) = \max\{d(H_1), d(H_2), ..., d(H_N)\}.$$

(*Đường kính hình hộp là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm của hình hộp đó*).

3.1 Định nghĩa tích phân trên hình hộp

Định nghĩa 3.1.1 *Cho hình hộp n chiều $H \subset \mathbb{R}^n$ và hàm*

$$f : H \to \mathbb{R}$$

xác định trên H. Gọi F là một phép chia lưới bất kì hình hộp H:

$$H = \bigcup_{i=1}^{N} H_i,$$

chọn điểm $\mathbf{t_i} \in H_i$ tùy ý thuộc H_i với mọi $i = 1, 2, ..., N$. Khi đó kí hiệu

$$S(F) = \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{t_i})\lambda(H_i)$$

là tổng tích phân của hàm f tương ứng với phép chia F. Nếu tổng tích phân $S(F)$ tồn tại giới hạn L và giới hạn đó hữu hạn khi đường kính của phép chia $d(F)$ tiến tới 0:

$$\lim S(F) = \lim \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{t_i})\lambda(H_i) = L,$$

ta nói hàm f khả tích trên H và kí hiệu

$$\lim_{d(F)\to 0} S(F) = L = \int_H f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

hoặc

$$\lim S(F) = L = \iint\limits_H \ldots \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\,dx_1dx_2...dx_n.$$

Chú ý rằng giới hạn $\lim\limits_{d(F)\to 0} S(F) = L$ *được hiểu như sau:*

Với $\varepsilon > 0$ tùy ý luôn tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi phép chia hình hộp H có đường kính $d(F) < \delta$ và mọi cách chọn các điểm $\mathbf{t_i} \in H_i$, ta có

$$|S(F) - L| = |\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{t_i})\lambda(H_i) - L| < \varepsilon.$$

(Chú ý rằng sự tồn tại giới hạn của tổng tích phân $S(F)$ không phụ thuộc vào việc chọn các điểm $\mathbf{t_i}$ tùy ý trong H_i).

Ví dụ Xét tích phân hàm hằng số $f(\mathbf{x}) \equiv C$ với $\forall \mathbf{x} \in H$. Khi đó với mọi phép chia $F: \quad H = \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$, tổng tích phân

$$S(F) = \sum_{i=1}^{m} f(\mathbf{t_i})\lambda(H_i) = \sum_{i=1}^{m} C\lambda(H_i) = C\lambda(H)$$

không phụ thuộc vào F. Vậy $\lim S(F) = C\lambda(H)$, hay

$$\int\limits_H C d\mathbf{x} = \iint\limits_H \ldots \int C\,dx_1dx_2...dx_n = C\lambda(H).$$

Định nghĩa 3.1.2 *Cùng với các kí hiệu trong định nghĩa trên, ta đặt*

$$M_i = \sup_{\mathbf{x}\in H_i} f(\mathbf{x}) \quad m_i = \inf_{\mathbf{x}\in H_i} f(\mathbf{x}).$$

Khi đó

$$S^*(F) = \sum_{i=1}^{N} M_i\lambda(H_i)$$

$$S_*(F) = \sum_{i=1}^{N} m_i \lambda(H_i)$$

được gọi là tổng Darboux trên và tổng Darboux dưới của hàm f tương ứng với phép chia F.

Rõ ràng với mọi phép chia F

$$S_*(F) \le S^*(F).$$

Định lí sau là hiển nhiên (được chứng minh tương tự như trong tích phân hàm một biến)

Định lí 3.1.1 (Điều kiện cần để hàm khả tích) *Nếu f khả tích trên hình hộp H, khi đó hàm f bị chặn trên H (tồn tại số $K \in \mathbb{R}$ để $|f(\mathbf{x})| \le K$ với mọi $\mathbf{x} \in H$).*

Do định lí trên, trong chương này từ nay về sau khi nói về các hàm khả tích, ta chỉ xét những hàm bị chặn.

3.2 Điều kiện đủ để hàm khả tích

Chúng ta cần đến khái niệm sau về các phép chia.

Định nghĩa 3.2.1 *Giả sử F và F' là hai phép chia một hình hộp H. Ta nói phép chia F mịn hơn phép chia F' nếu mọi hình hộp con của H ứng với phép chia F đều nằm trong một hình hộp con nào đấy ứng với phép chia F'. Điều này tương đương với khẳng định mọi hình hộp con ứng với phép chia F' là hợp của các hình hộp con nào đó ứng với phép chia F*

$$H'_i = \bigcup_{k: H_k \subset H'_i} H_k.$$

Từ định nghĩa trên, suy ra rằng nếu phép chia F mịn hơn phép chia F', khi đó

$$S_*(F') \le S_*(F) \quad \text{và} \quad S^*(F) \le S^*(F').$$

Khẳng định trên suy ra từ nhận xét: nếu $A \subset B$, khi đó

$$\inf_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) \le \inf_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) \quad \text{và} \quad \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) \le \sup_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}).$$

Định nghĩa 3.2.2 *Gọi*

$$F_1: \quad H = \bigcup_{i=1}^{N_1} H_i^{(1)}$$

$$F_2: \quad H = \bigcup_{j=1}^{N_2} H_j^{(2)}$$

là hai phép chia hình hộp H. Hợp của hai phép chia F_1 và F_2 là phép chia mới hình hộp H, kí hiệu $F_1 \cup F_2$ mà mỗi hình hộp con của phép chia mới bằng giao của hai hình hộp con nào đó ứng với hai phép chia F_1, F_2:

$$H_i^{(1)} \cap H_j^{(2)}.$$

$H_i^{(1)}$ là hình hộp con ứng với phép chia F_1 và $H_j^{(2)}$ là hình hộp con ứng với phép chia F_2.

$$F_1 \cup F_2: \quad H = \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} (H_i^{(1)} \cap H_j^{(2)}).$$

Tính đúng đắn của định nghĩa trên suy ra từ nhận xét: giao của hai hình hộp hoặc là tập $\emptyset$ (tập $\emptyset$ cũng được coi là hình hộp) hoặc cũng là hình hộp. Đồng thời dễ dàng suy ra rằng hợp của hai phép chia F_1 và F_2 là phép chia mịn hơn cả F_1 và F_2.

Định lí 3.2.1 *Với F_1 và F_2 là hai phép chia bất kì hình hộp H, duy trì các kí hiệu như trong Định nghĩa 2, khi đó*

$$S_*(F_1) \le S^*(F_2).$$

Chứng minh Xét phép chia T là hợp của hai phép chia F_1 và F_2, theo nhận xét trên phép chia T mịn hơn cả F_1 và F_2, suy ra điều phải chứng minh

$$S_*(F_1) \le S_*(T) \le S^*(T) \le S^*(F_2). \quad \blacksquare$$

Ta dẫn vào các kí hiệu

$$I_* = \sup S_*(F)$$

$$I^* = \inf S^*(F)$$

là các cận trên đúng và cận dưới đúng của các tổng tích phân hàm f với mọi phép chia F có thể có của hình hộp H. (Người ta còn gọi I^* và I_* là *tích phân trên, tích phân dưới* của hàm f). Ta thừa nhận định lí sau

Định lí 3.2.2 (Định lí Darboux) $I_* = \lim S_*(F)$ *và* $I^* = \lim S^*(F)$ *khi đường kính của phép chia* $d(F)$ *tiến tới 0.*

Từ định lí trên, ta có hệ quả

Hệ quả 3.2.1 *Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn* $f : H \to \mathbb{R}$ *khả tích trên hình hộp* H *là* $I_* = I^*$ *hoặc diễn đạt dưới dạng khác tương đương:*

Với $\varepsilon > 0$ *tùy ý luôn tồn tại một phép chia* F *sao cho*

$$S^*(F) - S_*(F) < \varepsilon.$$

Chứng minh *Điều kiện cần* là hiển nhiên.

Để chứng minh *điều kiện đủ*, ta gọi $I = I_* = I^*$ là giá trị chung của tích phân trên, tích phân dưới hàm f. Theo Định lí Darboux, với $\varepsilon > 0$ tùy ý luôn tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi phép chia hình hộp H có đường kính $d(F) < \delta$, ta có

$$|S_*(F) - I| < \varepsilon \quad \text{và} \quad |S^*(F) - I| < \varepsilon.$$

Với phép chia F như vậy và chọn các điểm $\mathbf{t_i} \in H_i$ tùy ý, do tổng tích phân $S(F)$ thoả mãn bất đẳng thức $S_*(F) \leq S(F) \leq S^*(F)$, suy ra

$$|S(F) - I| < \varepsilon.$$

Điều đó chứng minh f khả tích trên hình hộp H đồng thời

$$\int_H f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = I \ (= I_* = I^*). \quad \blacksquare$$

Định lí trên trình bày tư tưởng xây dựng khái niệm tích phân hàm nhiều biến bất kì. Tuy định lí phát biểu điều kiện cần và đủ để hàm khả tích song trong thực tế điều kiện đủ đó rất khó kiểm tra. Định lí sau đưa ra điều kiện đủ đơn giản và dễ kiểm tra hơn (cách chứng minh như trong giải tích hàm một biến).

Định lí 3.2.3 *Nếu hàm* f *bị chặn và liên tục trên hình hộp* $H \subset \mathbb{R}^n$*, khi đó* f *khả tích. Hơn nữa nếu tập hợp các điểm gián đoạn của* f *là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được, thì* f *cũng khả tích trên hình hộp* H*.*

Nhận xét rằng nếu f là hàm thực một biến ($n = 1$) đơn điệu (tăng hoặc giảm) trên đoạn $[a, b]$, khi đó tập các điểm gián đoạn của f không quá đếm được, suy ra f khả tích trên $[a, b]$. Lớp các hàm khả tích khá rộng. Hầu hết các hàm bị chặn ta thường gặp là các hàm khả tích.

3.3 Tích phân bội trên tập giới nội

Bây giờ chúng ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân trên một miền giới nội (bị chặn) bất kì. Chính xác hơn ta chỉ xây dựng khái niệm tích phân trên một miền đo được dạng Jordan.

Xét tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là tập hợp bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, khi đó tồn tại một hình hộp H chứa tập M. Giả sử

$$I_1, I_2, ..., I_k, ..., I_N \quad I_k \subset H \quad k = 1, 2, ..., N$$

là các hình hộp đôi một không có điểm chung trong và

$$\bigcup_{k=1}^{N} I_k \subset M$$

Lập tổng các thể tích các hình hộp I_k và kí hiệu $\lambda_*(M)$ là cận trên đúng của tất cả các tổng đó

$$\lambda_*(M) = \sup_{\cup_{k=1}^{N} I_k \subset M} \sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k)$$

Tương tự giả sử $I_k, I_k \subset H \quad k = 1, 2, ..., K$ là các hình hộp đôi một không có điểm chung trong và

$$\bigcup_{k=1}^{K} I_k \supset M.$$

Kí hiệu

$$\lambda^*(M) = \inf_{\cup_{k=1}^{K} I_k \supset M} \sum_{k=1}^{K} \lambda(I_k).$$

Chú ý rằng trường hợp không tồn tại một hình hộp nào được chứa trong M, khi đó theo quy ước $\lambda_*(M) = 0$. Hiển nhiên $\lambda_*(M) \leq \lambda^*(M)$. Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 3.3.1 *Một tập M bị chặn được gọi là đo được dạng Jordan nếu $\lambda_*(M) = \lambda^*(M)$. Khi đó giá trị chung của chúng*

$$\lambda_*(M) = \lambda^*(M)$$

được gọi là độ đo Jordan của tập M (người ta còn gọi tắt là thể tích của M), kí hiệu

$$\lambda(M) = \lambda_*(M) = \lambda^*(M).$$

Nhận xét rằng nếu M là hình hộp khi đó độ đo Jordan của M chính là thể tích của hình hộp đó. Ta có thể chứng minh rằng (dành cho độc giả) các đa giác, hình tròn, hình elip, hình cầu, ... là các tập đo được dạng Jordan. Nói chung các tập hợp "thông thường" (các tập hợp thường gặp) là các tập đo được dạng Jordan.

Tuy nhiên ta xét một ví dụ về tập hợp không đo được dạng Jordan. Kí hiệu A là tập các số hữu tỉ trên đoạn [0, 1] (xét trong tập các số thực $\mathbb{R}$). Hiển nhiên không tồn tại một hình hộp (đoạn thẳng) nào được chứa trong A, suy ra $\lambda_*(A) = 0$. Trong khi đoạn thẳng (hình hộp một chiều) bé nhất chứa A là đoạn [0, 1], nói cách khác $\lambda^*(A) = 1$. Vậy tập các số hữu tỉ trên đoạn $[0, 1]$ không đo được dạng Jordan.

Gọi H là hình hộp chứa tập M và xét phép chia F hình hộp đó:

$$F: \quad H = \bigcup_{i=1}^{N} H_i$$

Dễ dàng nhận thấy $\lambda_*(M) = \sup \sigma_*(F)$, trong đó

$$\sigma_*(F) = \sum_{k: H_k \subset M} \lambda(H_k)$$

và $\lambda^*(M) = \inf \sigma^*(F)$, trong đó

$$\sigma^*(F) = \sum_{k: \bigcup\limits_k H_k \supset M} \lambda(H_k).$$

Tương tự như định lí Darboux, người ta chứng minh được rằng

$$\lambda_*(M) = \lim \sigma_*(F) \quad \text{và} \quad \lambda^*(M) = \lim \sigma^*(F).$$

Ta dẫn vào kí hiệu

$$\chi_{_M}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{nếu } \mathbf{x} \notin M \end{cases}$$

Hàm $\chi_{_M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ định nghĩa ở trên được gọi là *hàm đặc trưng* của M.

Bây giờ ta xét tích phân hàm đặc trưng $\chi_{_M}(\mathbf{x})$ trên hình hộp H. Dễ dàng chứng minh được $\lambda^*(M)$ và $\lambda_*(M)$ bằng tích phân trên và tích phân dưới tương ứng của hàm đặc trưng $\chi_{_M}(\mathbf{x})$. Vì vậy định lí sau là hiển nhiên

Định lí 3.3.1 *Tập bị chặn $M \subset \mathbb{R}^n$ đo được dạng Jordan khi và chỉ khi hàm đặc trưng $\chi_M : H \to \mathbb{R}$ khả tích trên hình hộp H nào đó chứa M. Khi đó thể tích (độ đo Jordan) của M bằng:*

$$\lambda(M) = \int_H \chi_M(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Nhận xét rằng tích phân trên không phụ thuộc vào việc chọn hình hộp H chứa M. Từ định lí này suy ra hợp (giao) của hữu hạn tập hợp đo được dạng Jordan cũng là tập hợp đo được dạng Jordan. Ngoài ra nếu A, B là hai tập hợp rời nhau $A \cap B = \emptyset$ trong $\mathbb{R}^n$, hiển nhiên

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Ta có kết quả sau

Định lí 3.3.2 *Nếu $M_1, M_2, ..., M_k$ là các tập hợp đo được và đôi một rời nhau, khi đó $\bigcup_{i=1}^{k} M_i$ cũng đo được dạng Jordan, đồng thời*

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{k} M_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(M_i).$$

Tích phân trên tập hợp đo được dạng Jordan

Bây giờ chúng ta có thể dẫn vào khái niệm tích phân trên tập hợp đo được dạng Jordan.

Cho hàm $f : M \to \mathbb{R}$ xác định trên tập bị chặn và đo được dạng Jordan. Gọi H là hình hộp nào đó chứa M. Ta mở rộng ánh xạ f lên hình hộp H bằng ánh xạ $f^* : H \to \mathbb{R}$

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{nếu } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{nếu } \mathbf{x} \in H \backslash M \end{cases}$$

Như vậy f chính là thu hẹp ánh xạ f^* lên tập M và

$$f^* = \begin{cases} f & \text{trên } M \\ 0 & \text{trên } H \backslash M \end{cases}$$

Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 3.3.2 *Ta nói f khả tích trên tập bị chặn và đo được M, nếu hàm f^* khả tích trên H. Khi đó*

$$\int_M f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_H f^*(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_H f(\mathbf{x})\chi_{_M}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Chú ý rằng tích phân hàm f trong định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn hình hộp H chứa M.

Tính chất của tích phân bội

Tích phân trên tập bị chặn có các tính chất đơn giản sau đây (tương tự tích phân hàm một biến, bạn đọc tự chứng minh)

1. Tập M là tập đo được dạng Jordan trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử f và g là các hàm khả tích trên đó, khi đó

   (a) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, αf cũng khả tích trên M và

   $$\int_M \alpha f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \alpha \int_M f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

   (b) $f + g$ cũng khả tích trên M và

   $$\int_M (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_M f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_M g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

2. Nếu $M = M_1 \cup M_2$ là hợp của hai tập đo được rời nhau, khi đó

   $$\int_M f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{M_1} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{M_2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

3. Thể tích của tập M bằng

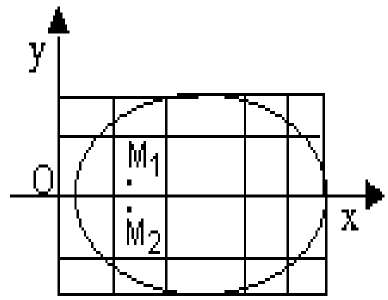
   $$\lambda(M) = \int_M 1\, d\mathbf{x}.$$

4. Nếu $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x} \in M$, khi đó
$$\int_M f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \le \int_M g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$
5. Với f khả tích trên M, $\left|\int_M f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| \le \int_M |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}.$
6. Ta công nhận kết quả sau (còn được gọi là định lí về giá trị trung bình)
   Giả sử f liên tục trên tập liên thông $D \subset \mathbb{R}^n$ và D đo được dạng Jordan, khi đó tồn tại một điểm $\mathbf{c} \in D$ sao cho
$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lambda(D)f(\mathbf{c}).$$

Chú ý rằng tích phân hàm nhiều biến thường được gọi là tích phân bội, tích phân hàm hai biến được gọi là tích phân kép, tích phân hàm ba biến được gọi là tích phân bội ba.

Tích phân các hàm chẵn, lẻ trên miền đối xứng

Ta có nhận xét quan trọng sau đây về tích phân các hàm chẵn, lẻ trên miền đối xứng.
1. *Giả thiết tập $M \subset \mathbb{R}^2$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm trục đối xứng, hàm dưới dấu tích phân $f(x, y)$ khả tích trên M và nhận các giá trị đối nhau tại các điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = 0$*
$$f(x, y) = -f(x, -y) \quad \text{với mọi} \quad (x, y) \in M.$$
(Ta còn nói f là hàm lẻ theo biến y). Khi đó
$$I = \iint_M f(x, y)\, dxdy = 0.$$
Thật vậy tập M có thể phân tích thành hợp của hai tập rời nhau $M = M_1 \cup M_2$, trong đó M_1 thuộc nửa trên của mặt phẳng xOy $(y \ge 0)$ và M_2 thuộc nửa dưới của mặt phẳng đó. (Xem hình vẽ dưới đây).



Hình 3.2: Miền đối xứng

Theo tính chất của tích phân bội nêu trên

$$\iint\limits_{M} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{M_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{M_2} f(x,y)dxdy.$$

Từ định nghĩa tích phân bội lập các tổng tích phân của hai tích phân nói trên, nếu ta sử dụng các phép chia đối xứng và chọn các các điểm $\mathbf{t_i} = (\xi_i, \eta_i)$ cũng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = 0$, suy ra các tổng tích phân tương ứng là các số đối nhau

$$S(F_1) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\lambda(H_i^{(1)}) = -\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, -\eta_i)\lambda(H_i^{(1)}) = -S(F_2).$$

Do vậy khi chuyển qua giới hạn, giá trị của các tích phân cũng đối nhau

$$\iint\limits_{M_1} f(x,y)dxdy = -\iint\limits_{M_2} f(x,y)dxdy.$$

Suy ra tích phân cần tính bằng 0

$$I = \iint\limits_{M} f(x,y)dxdy = 0.$$

Lập luận tương tự *nếu tập $M \subset \mathbb{R}^2$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm trục đối xứng, hàm $f(x,y)$ khả tích trên M và $f(x,y)$ là hàm chẵn theo biến y, khi đó*

$$\iint\limits_{M} f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{M_1} f(x,y)dxdy \qquad (*)$$

(M là hợp của 2 tập đối xứng nhau qua trục hoành $M = M_1 \cup M_2$, hàm f là hàm chẵn theo biến y: $f(x,y) = f(x,-y) \quad \forall (x,y) \in M$.)

2. Ta cũng nhận được kết quả tương tự *nếu tập M nhận đường thẳng $x = 0$ (trục tung) làm trục đối xứng (hoặc gốc tọa độ O làm tâm đối xứng), hàm dưới dấu tích phân $f(x,y)$ là hàm lẻ theo x, khả tích trên M*

$$f(x,y) = -f(-x,y) \quad \forall (x,y) \in M.$$

(hoặc $f(x,y) = -f(-x,-y) \quad \forall (x,y) \in M$). Khi đó

$$I = \iint_M f(x,y)dxdy = 0.$$

Trường hợp $f(x,y)$ là hàm chẵn theo biến x, bạn đọc tự rút ra các kết quả tương tự như trong đẳng thức $(*)$.

3. Các kết quả trên cũng có thể mở rộng sang tích phân bội ba.
Chẳng hạn ta xét *tập $M \subset \mathbb{R}^3$ nhận mặt phẳng $z = 0$ (mặt phẳng xOy) làm mặt phẳng đối xứng, hàm dưới dấu tích phân $f(x,y,z)$ là hàm lẻ theo z, khả tích trên M*. Khi đó

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz = 0.$$

Ví dụ 3.3.1

1. Tính tích phân

$$I_1 = \iint\limits_D xy\left(\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a}\right)dxdy,$$

   trong đó miền D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 2a^2$.

   Ta nhận xét rằng D nhận đường thẳng $x = 0$ (trục tung trong mặt phẳng xOy) làm trục đối xứng, hàm dưới dấu tích phân

$$f(x,y) = xy\left(\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a}\right)$$

khả tích trên hình tròn D và là hàm lẻ đối với biến x (nhận các giá trị đối nhau tại các điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $x = 0$)

$$f(x,y) = -f(-x,y) \quad \text{với mọi} \quad (x,y) \in D.$$

Suy ra $I_1 = 0$.

2. Tính tích phân $I = \iint\limits_D dxdy$, với D là miền phẳng giới hạn bởi elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

   Miền D nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng, theo tính chất của tích phân kép

$$I = \iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_{D_1} dxdy = 4S(D_1),$$

   $S(D_1)$ bằng một phần tư diện tích của elip. Trong chương tích phân xác định ta đã tính

$$S(D_1) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{\pi ab}{4} \quad \Rightarrow \quad I = \pi ab.$$

3. Tính tích phân

$$I_2 = \iiint\limits_V x^2yz^3dxdydz,$$

   trong đó V là elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

   Để tính tích phân $I_2 = \iiint\limits_V x^2yz^3dxdydz$, ta có nhận xét rằng elipxôit V nhận mặt phẳng xOy làm mặt phẳng đối xứng, $V = V_1 \cup V_2$, trong đó V_1 là nửa trên mặt phẳng xOy và V_2 là phần còn lại, nửa dưới. Hàm dưới dấu tích phân ($f(x,y,z) = x^2yz^3$) nhận các giá trị đối nhau tại các điểm đối xứng nhau qua mặt phẳng xOy (hàm lẻ theo z)

$$f(x,y,z) = -f(x,y,-z) \quad \forall (x,y,z) \in V.$$

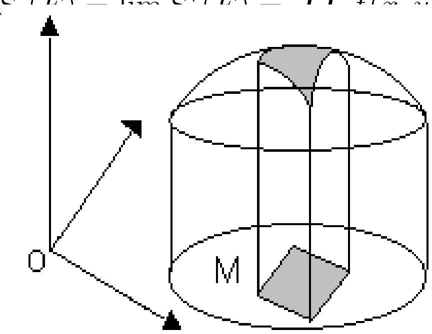
Từ tính chất tích phân bội suy ra tích phân hàm f trên V_1 và V_2 cũng đối nhau. Vậy

$$\iiint\limits_V x^2yz^3dxdydz = \iiint\limits_{V_1} x^2yz^3dxdydz + \iiint\limits_{V_2} x^2yz^3dxdydz = 0.$$

Ý nghĩa hình học của tích phân bội

Giả sử $f : M \to \mathbb{R}$ là hàm không âm khả tích trên $M \subset \mathbb{R}^2$. Đồ thị của f thường được biểu diễn như một mặt cong trong không gian $\mathbb{R}^3$. Phần không gian giới hạn bởi mặt cong đó, mặt phẳng tọa độ $z = 0$ và mặt trụ với M là đáy, được gọi là *hình trụ cong* ứng với hàm không âm f. Do các tổng Darboux dưới $S_*(F)$ là tổng các thể tích của các phần không gian nằm trong hình trụ cong và tổng Darboux trên $S^*(F)$ là tổng các thể tích của các phần không gian chứa hình trụ cong, đồng thời f khả tích trên M hay $\lim S_*(F) = \lim S^*(F)$, suy ra hình trụ cong có thể tích và thể tích hình trụ cong, kí hiệu V, bằng giá trị tích phân hàm f trên M

$$V = \lim S_*(F) = \lim S^*(F) = \iint f(x,y)\,dxdy.$$



Hình 3.3: Ý nghĩa hình học của tích phân

3.4 Cách tính tích phân bội

Trong thực hành ta thường xuyên phải sử dụng định lí cực kì quan trọng sau đây. Để đơn giản, trước hết ta phát biểu và chứng minh cho trường hợp $n = 2$, việc chứng minh trong trường hợp tổng quát hoàn toàn tương tự dành cho bạn đọc.

Định lí 3.4.1 (Fubini) *Cho hình chữ nhật $H = [a, b] \times [c, d]$ và hàm $f : H \to \mathbb{R}$ khả tích trên đó. Giả sử với mọi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân xác định*

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

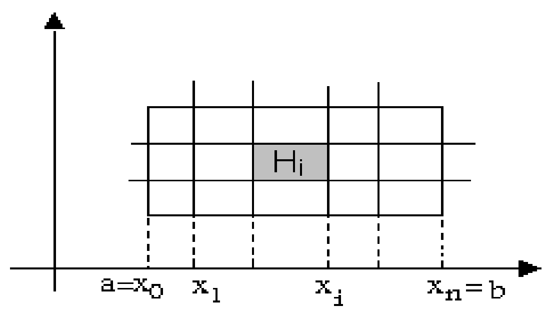
Khi đó $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ đồng thời

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \iint\limits_H f(x, y)\, dxdy.$$

Tích phân hàm $f(x, y)$ trên hình chữ nhật $H = [a, b] \times [c, d]$ là *tích phân kép* và kí hiệu

$$\iint\limits_H f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dxdy.$$

Chứng minh Xét phép chia F bất kì hình chữ nhật H.



Hình 3.4: Phép chia lưới hình hộp

Giả sử

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

là các phép chia đoạn $[a, b]$ và $[c, d]$ tương ứng của F. Chọn điểm

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, 2, ..., n$$

tùy ý, khi đó

$$g(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = \sum_{k=1}^m \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y)\,dy.$$

Gọi m_{ik} và M_{ik} là các cận trên đúng (sup) và cận dưới đúng (inf) của f trên các hình chữ nhật

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k] \quad i = 1, 2, ...n; k = 1, 2, ..., m.$$

Khi đó

$$m_{ik}(y_k - y_{k-1}) \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y)\,dy \leq M_{ik}(y_k - y_{k-1}).$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^m m_{ik}(y_k - y_{k-1}) \leq g(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{ik}(y_k - y_{k-1}).$$

Nhân các vế của bất đẳng thức này với $(x_i - x_{i-1})$ rồi cộng chúng lại theo i ta được

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m m_{ik}(y_k - y_{k-1})(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ik}(y_k - y_{k-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Trong bất đẳng thức kép này

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m m_{ik}(y_k - y_{k-1})(x_i - x_{i-1}) = S_*(F)$$

là tổng Darboux dưới và

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ik}(y_k - y_{k-1})(x_i - x_{i-1}) = S^*(F)$$

là tổng Darboux trên của hàm f tương ứng với phép chia F. Theo giả thiết hàm f khả tích trên hình chữ nhật $H = [a, b] \times [c, d]$, suy ra

$$\lim S_*(F) = \lim S^*(F) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dxdy$$

khi đường kính của phép chia $d(F) \to 0$. Vì vậy tồn tại $\lim \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ và bằng

$$\lim \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$$

điều này cũng có nghĩa là $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$, đồng thời

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$$

hay

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy.$$

đây là điều phải chứng minh. ■

Nhận xét rằng giá trị tích phân

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

trong định lí cũng chính là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua x, vuông góc với trục Ox và "hình hộp cong". Vì vậy người ta còn kí hiệu tích phân đó bằng $S(x)$. (Xem hình vẽ dưới).

$$S(x) = g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

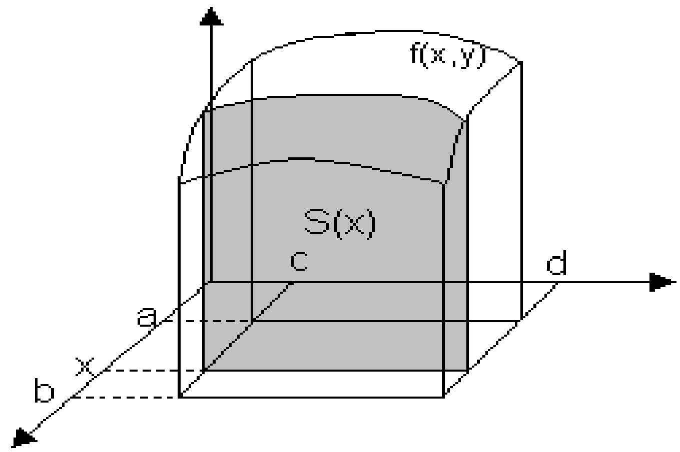
Hoàn toàn tương tự ta có kết quả sau

Định lí 3.4.2 *Cho hình chữ nhật $H = [a,b] \times [c,d]$ và hàm $f : H \to \mathbb{R}$ khả tích trên đó. Giả sử với mọi $y \in [c,d]$, tồn tại tích phân xác định*

$$h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Khi đó $h(y)$ khả tích trên $[c,d]$ đồng thời

$$\int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \iint\limits_H f(x,y)\,dxdy.$$



Hình 3.5: Thiết diện $S(x)$

Từ hai định lí trên ta suy ra hệ quả sau

Hệ quả 3.4.1 *Nếu các điều kiện của hai định lí trên được thoả mãn, khi đó*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

và cùng bằng tích phân kép

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy.$$

Đặc biệt khi $f(x,y)$ liên tục trên $H = [a,b] \times [c,d]$, các điều kiện của hai định lí trên luôn thoả mãn.

Trường hợp tổng quát, định lí Fubini được phát biểu như sau

Định lí 3.4.3 *Cho hàm $f : H \to \mathbb{R}$ khả tích trên hình hộp $H \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử $H = H' \times H$" là tích Đề các hai hình hộp: H' là hình hộp k chiều và H" $n-k$ chiều. Giả sử tiếp rằng với mọi $\mathbf{y} \in H$", tồn tại tích phân*

$$h(\mathbf{y}) = \int_{H'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}.$$

Khi đó $h(\mathbf{y})$ khả tích trên hình hộp H", đồng thời

$$\iint\limits_{H'\times H"} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{H"} h(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{H"} \left(\int_{H'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Tương tự nếu với mọi $\mathbf{x} \in H'$, tồn tại tích phân

$$g(\mathbf{x}) = \int_{H"} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Khi đó $g(\mathbf{x})$ khả tích trên hình hộp H' và

$$\iint\limits_{H' \times H"} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{H'} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{H'} \left(\int_{H"} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Ví dụ 3.4.1

1. Tính tích phân
$$I_1 = \int_2^5 \int_1^3 (5x^2y - 2y^3)\, dxdy.$$
Do hàm $f(x, y) = 5x^2y - 2y^3$ liên tục trên hình chữ nhật $D = [2, 5] \times [1, 3]$ suy ra f khả tích trên D. Mặt khác với mọi $y \in [1, 3]$ tồn tại tích phân xác định
$$g(y) = \int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\, dx = 195y - 6y^3$$
Vì vậy theo định lí Fubini
$$I_1 = \int_1^3 g(y)\, dy = \int_1^3 (195y - 6y^3)\, dy = 660.$$
Chú ý rằng tích phân I có thể tính theo biến y trước, biến x sau
$$I_1 = \int_2^5 \left(\int_1^3 5x^2y - 2y^3\, dy \right) dx = \int_2^5 (20x^2 - 40)\, dx = 660.$$

2. Tính tích phân
$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}}\, dxdy.$$

Tương tự như ví dụ trên, hàm $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$ liên tục trên hình chữ nhật $D = [0,1] \times [0,1]$ nên f khả tích trên D. Áp dụng định lí Fubini

$$g(x) = \int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}},$$

như vậy

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

3. Tính tích phân bội ba

$$I_3 = \iiint\limits_H (zy^2 + 2yx^2)\,dxdydz,$$

trong đó $H = [2,3] \times [0,2] \times [0,1]$ là hình hộp trong $\mathbb{R}^3$. Hình hộp H thường được viết dưới dạng

$$H = \{(x,y,z) \mid 2 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Áp dụng định lí Fubini

$$I_3 = \int_2^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (zy^2 + 2yx^2)dz = \int_2^3 dx \int_0^2 (2yx^2 + \frac{y^2}{2})dy =$$

$$= \int_2^3 (4x^2 + \frac{4}{3})dx = \frac{80}{3}.$$

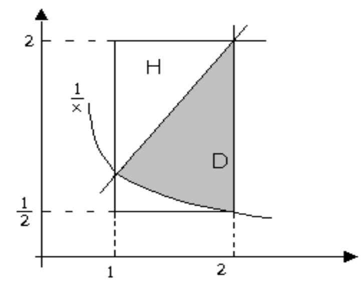
4. Tính tích phân

$$I_4 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,$$

trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 2, y = x$ và hypecbol $xy = 1$.

Dễ dàng nhận thấy

$$D = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}.$$



Hình 3.6: Ví dụ 3.4.1.4

Do miền D không là hình chữ nhật, nên để sử dụng được công thức Fubini đưa tích phân trên về các tích phân xác định, ta lồng miền D vào trong hình chữ nhật

$$H = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq 2\}.$$

(H là hình chữ nhật nhỏ nhất chứa miền D). Nhắc lại rằng

$$I_4 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \iint\limits_H \frac{x^2}{y^2} \chi_D(x, y)\, dxdy,$$

trong đó

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \notin D \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Vậy theo định lí Fubini

$$I_4 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 (x^3 - x)\, dx = \frac{9}{4}.$$

Các nhận xét liên quan tới định lí Fubini

1. Chú ý rằng khi tính tích phân bội trên miền bị chặn, để có thể áp dụng công thức Fubini người ta thường sử dụng phương pháp trên, tức là lồng miền lấy tích phân vào một hình hộp H nào đó

$$\int_M f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_H f(\mathbf{x}) \chi_M(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

rồi áp dụng công thức Fubini đưa về các tích phân xác định đơn giản hơn. (Đối với tích phân bội ba cách làm cũng tương tự như ví dụ trên).

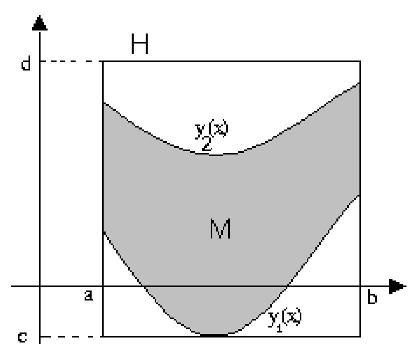
Chẳng hạn khi $M \subset \mathbb{R}^2$ là miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức

$$M = \{(x, y) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm liên tục xác định trên $[a, b]$. Bạn đọc có thể tự chứng minh M là tập đo được dạng Jordan. Giả thiết rằng $f : M \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên M. Để tính tích phân

$$\iint_M f(x, y)\, dxdy,$$

ta lồng miền M vào hình chữ nhật $H = [a, b] \times [c, d]$ (xem hình vẽ).



Hình 3.7: Tích phân kép trên tập M

Khi đó

$$\boxed{\iint_M f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\chi_M(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.}$$

Trong ví dụ 4, miền D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$D = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}.$$

Áp dụng công thức trên

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 (x^3 - x)\, dx = \frac{9}{4}.$$

Tương tự nếu $M \subset \mathbb{R}^2$ là miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức

$$M = \{(x, y) \mid c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\},$$

trong đó $x_1(y)$ và $x_2(y)$ là các hàm liên tục xác định trên $[c, d]$. Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_M f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.}$$

2. Tương tự nếu $V \subset \mathbb{R}^3$ là miền được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\},$$

khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.}$$

3. Từ nhận xét trên nếu miền $V \subset \mathbb{R}^3$ xác định bởi các bất đẳng thức

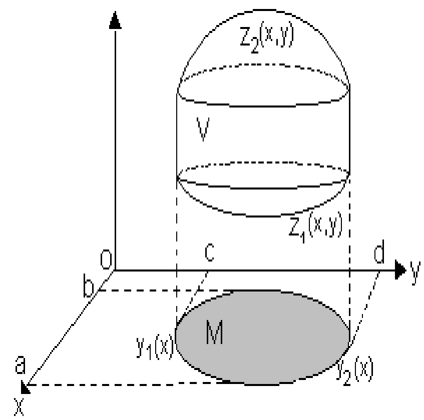
$$V = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\},$$

khi đó

$$M = \{(x, y) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

là hình chiếu của V lên mặt phẳng xOy. Vì vậy tích phân cũng có thể viết dưới dạng

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_M \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.}$$



Hình 3.8: Tích phân bội ba trên miền V

Ngoài ra nếu kí hiệu $S(x)$ là thiết diện tạo bởi V với mặt phẳng đi qua x, vuông góc với trục Ox, khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)\,dydz.}$$

Ví dụ 3.4.2

1. Tính tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V (x-2y)dxdydz,$$

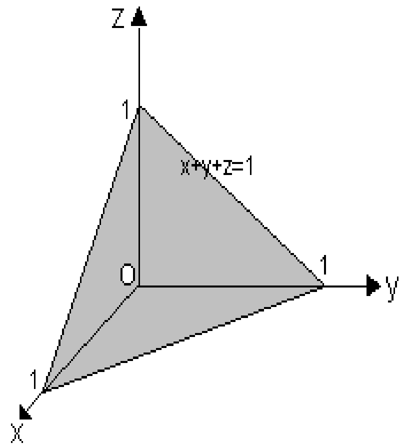
trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x+y+z=1$. Miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

(Xem hình vẽ bên dưới).

Áp dụng công thức trong nhận xét trên

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (x-2y)dz \right) dy \right) dx =$$



Hình 3.9: Ví dụ 3.4.2

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - 2y + xy + 2y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} + \frac{3x}{2} - 2x^2 + \frac{5x^3}{6}\right) dx = -\frac{1}{24}.$$

2. Tính tích phân

$$T = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + 2z)dxdydz,$$

trong đó V là elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Biểu diễn tích phân cần tính thành tổng của ba tích phân

$$T = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + 2z)dxdydz = \iiint\limits_V x^2 dxdydz +$$

$$+ \iiint\limits_V y^2 dxdydz + \iiint\limits_V 2z dxdydz.$$

Trước hết ta tính T_1

$$T_1 = \iiint\limits_V x^2\,dxdydz.$$

Kí hiệu $S(x)$ là thiết diện tạo bởi V và mặt phẳng đi qua x, vuông góc với trục Ox. Khi đó với mỗi x cố định $S(x)$ là một elip

$$S(x) = \{(y,z) \mid \frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})} \le 1\}.$$

Áp dụng công thức

$$\iiint\limits_V x^2\,dxdydz = \int_{-a}^{a} dx \iint\limits_{S(x)} x^2\,dydz = \int_{-a}^{a} x^2\,dx \iint\limits_{S(x)} dydz.$$

Do diện tích thiết diện $S(x)$ (để thuận tiện ta cũng kí hiệu diện tích đó là $S(x)$) bằng tích π với các bán trục của elip

$$S(x) = \iint\limits_{S(x)} dydz = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Suy ra

$$T_1 = \iiint\limits_V x^2\,dxdydz = \int_{-a}^{a} \pi bc x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi bc\int_0^a \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)dx = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

Do vai trò của x và y đối xứng với nhau, tương tự

$$T_2 = \iiint\limits_V y^2 dxdydz = \frac{4}{15}\pi a b^3 c.$$

Để tính tích phân $T_3 = \iiint\limits_V zdxdydz$, ta có nhận xét rằng elipxôit V nhận mặt phẳng xOy làm mặt phẳng đối xứng, do vậy $V = V_1 \cup V_2$, trong đó V_1 là nửa trên mặt phẳng xOy và V_2 là phần còn lại, nửa dưới. Hàm dưới dấu tích phân (z) nhận các giá trị đối nhau tại các điểm đối xứng nhau qua mặt phẳng xOy. Từ định nghĩa tích phân bội suy ra tích phân hàm z trên V_1 và V_2 cũng đối nhau. Vậy

$$T_3 = \iiint\limits_V zdxdydz = \iiint\limits_{V_1} zdxdydz + \iiint\limits_{V_2} zdxdydz = 0.$$

Suy ra giá trị tích phân cần tìm

$$T = \frac{4}{15}\pi a^3bc + \frac{4}{15}\pi ab^3c = \frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2).$$

Cuối cùng ta phát biểu định lí đổi biến của tích phân bội. Định lí được diễn đạt giống như trong trường hợp hàm một biến, chúng ta thừa nhận không chứng minh định lí này.

Định lí 3.4.4 *Cho hàm $f : M \to \mathbb{R}$ khả tích trên tập giới nội $M \subset \mathbb{R}^n$. Gọi $\mathbf{g} : M' \to M$ là song ánh từ $M' \subset \mathbb{R}^n$ lên M, khả vi liên tục trên tập M'. Kí hiệu $\mathbf{g}'(\mathbf{y})$ là Jacobien của ánh xạ $\mathbf{g}$ tại $\mathbf{y} \in M'$, $|\mathbf{g}'(\mathbf{y})| = |\det \mathbf{g}'(\mathbf{y})|$, khi đó*

$$\boxed{\int\limits_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))|\mathbf{g}'(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}.}$$

Như vậy bằng phép đổi biến $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, ta đưa tích phân bội hàm $f(\mathbf{x})$ trên tập M về tích phân bội trên tập M'. Ánh xạ $\mathbf{g}$ được viết một cách chi tiết hơn

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), ..., g_n(\mathbf{y}))$$

trong đó $g_i : M' \to \mathbb{R} \quad$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Jacobien của ánh xạ $\mathbf{g}$ là định thức

$$\det \mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Xét trường hợp đặc biệt khi sử dụng phép đổi biến

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{hay} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x},$$

trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính không suy biến, $\mathbf{A^{-1}}$ là ma trận nghịch đảo của $\mathbf{A}$. Ánh xạ $\mathbf{Ay}$ đóng vai trò của $\mathbf{g} : M' \to M$ trong định lí trên. Mặt khác đạo hàm của ánh xạ tuyến tính bằng chính nó

$$|\det \mathbf{g}'(\mathbf{y})| = |\det \mathbf{A}| \quad \text{với mọi} \quad \mathbf{y}.$$

Vậy

$$\boxed{\int\limits_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{Ay}) \cdot |\det \mathbf{A}|\,d\mathbf{y}.}$$

Lưu ý rằng nếu ta sử dụng phép đổi biến $\mathbf{y} = \mathbf{Bx}$ hay $\mathbf{x} = \mathbf{B^{-1}y}$, trong đó $\mathbf{B}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính không suy biến, chiếu tập $M \subset \mathbb{R}^n$ lên tập $M' \subset \mathbb{R}^n$, khi đó

$$\boxed{\int\limits_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{B^{-1}y}) \cdot |\det \mathbf{B^{-1}}|\,d\mathbf{y} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{B^{-1}y}) \cdot \frac{1}{|\det \mathbf{B}|} d\mathbf{y}.}$$

Một cách tổng quát, nếu ánh xạ $\mathbf{h} : M \to M'$ là song ánh khả vi liên tục trên tập M, thoả mãn các điều kiện của định lí đạo hàm hàm ngược 1.3.7 thì phép đổi biến $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ hay $\mathbf{x} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})$ dẫn đến công thức

$$\begin{aligned}\int\limits_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int\limits_{M'} f(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \left|\det \left(\mathbf{h}^{-1}\right)'(\mathbf{y})\right| d\mathbf{y} \\ &= \int\limits_{M'} f(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \frac{1}{\left|\det \mathbf{h}'\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right)\right|} d\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ví dụ 3.4.3

1. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_M (x + 2y + 3)(3x + 5y)^2 dxdy,$$

trong đó M là hình bình hành với các đỉnh

$$A(-3, 2); B(-1, 1); C(-11, 7); D(-13, 8).$$

Dễ dàng nhận thấy các cạnh của hình bình hành là các đường thẳng

$$x + 2y - 1 = 0, x + 2y - 3 = 0, 3x + 5y - 1 = 0, 3x + 5y - 2 = 0$$

Sử dụng phép đổi biến $u = 3x + 5y, v = x + 2y$ hay dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{B^{-1}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$x = 2u - 5v, y = -u + 3v.$$

Jacobien của ánh xạ bằng

$$\det \mathbf{B^{-1}} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Mặt khác từ phương trình các cạnh của hình bình hành ta dễ dàng nhận thấy ánh xạ $\mathbf{B}$ biến đổi hình bình hành M thành hình chữ nhật

$$M' = \{(u, v) = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3\}.$$

(Ngược lại $\mathbf{B^{-1}}$ là song ánh từ hình chữ nhật M' lên M). Áp dụng định lí đổi biến

$$I = \iint\limits_{M} (x + 2y + 3)(3x + 5y)^2 dxdy = \iint\limits_{M'} (v + 3)u^2 \cdot 1\, dudv$$
$$= \int_1^3 dv \int_1^2 (v + 3)u^2 du = \int_1^3 \frac{7(v + 3)}{3} dv = \frac{70}{3}$$

2. Tính tích phân

$$\iint\limits_{D} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^3 dxdy$$

trong đó D là miền giới hạn bởi các trục tọa độ và các đường cong

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \quad (a > 0, b > 0).$$

Sử dụng phép đổi biến $\mathbf{g} = (x, y)$:

$$\begin{cases} x = au\cos^4 t \\ y = bu\sin^4 t \end{cases}$$

Gọi D^* là hình chữ nhật

$$D^* = \{(u,t) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Hiển nhiên $\mathbf{g}$ là song ánh từ D^* lên D. Jacobien của ánh xạ g bằng

$$J(u,t) = \begin{vmatrix} a\cos^4 t & -4au\cos^3 t\sin t \\ b\sin^4 t & 4bu\sin^3 t\cos t \end{vmatrix} = 4abu\sin^3 t\cos^3 t$$

Vậy

$$\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dxdy = \iint\limits_{D^*} u^{\frac{3}{2}} |4abu\sin^3 t\cos^3 t| dudt =$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\frac{3}{2}} 4abu\sin^3 t\cos^3 t\, dt =$$

$$= 4ab \int_0^1 u^{\frac{5}{2}} du \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\, dt = \frac{2}{21}ab.$$

3. Tìm thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt trụ

$$xy = 1; \quad xy = 4; \quad y = 3x; \quad y = 6x,$$

mặt cong $z = \frac{y}{x} + 5$ và mặt phẳng $z = 0$.

Ta biết rằng thể tích vật thể

$$V = \iint\limits_D \left(\frac{y}{x} + 5\right) dxdy,$$

trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi các đường cong

$$xy = 1; \quad xy = 4; \quad y = 3x; \quad y = 6x,$$

trong mặt phẳng $z = 0$. Sử dụng phép đổi biến $u = xy, v = \frac{y}{x}$ hay

$$x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}; \quad y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}.$$

Ma trận Jacobien của ánh xạ bằng

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Vậy định thức Jacobien của ánh xạ bằng

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Mặt khác dễ dàng nhận thấy ánh xạ (x, y) là song ánh từ hình chữ nhật

$$D^* = \{(u, v) \mid 1 \le u \le 4, 3 \le v \le 6\}$$

lên D. Áp dụng định lí đổi biến

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left(\frac{y}{x} + 5\right) dxdy = \iint\limits_{D^*} (v + 5)\frac{1}{2v} dudv \\ &= \int_1^4 du \int_3^6 \frac{v + 5}{2v} dv = \frac{3}{2}(5 \ln 2 + 3). \end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu sử dụng công thức (3.1), ta có thể tính tích phân thông qua ma trận Jacobien

$$\mathbf{h}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{h}'\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right) = \left.\frac{2y}{x}\right|_{\frac{y}{x} \to v} = 2v.$$

Theo (3.1),

$$\iint\limits_D \left(\frac{y}{x} + 5\right) dxdy = \int\limits_{D^*} \frac{f(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y}}{|\det \mathbf{h}'(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}))|} = \iint\limits_{D^*} \frac{v + 5}{2v} dudv = \frac{3}{2}(5 \ln 2 + 3).$$

4. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_M (x + y + z)^2 dxdydz,$$

trong đó M là hình hộp xiên giới hạn bởi các mặt phẳng

$x+y+z=\pm 2, x+3y+z=0, x+3y+z=3, x-2y+2z=1, x-2y+2z=2.$

Sử dụng phép đổi biến

$$u=x+y+z, v=x+3y+z, t=x-2y+2z$$

hay dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Jacobien của ánh xạ đổi biến (ánh xạ tuyến tính) bằng

$$|\det \mathbf{A^{-1}}| = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} = \frac{1}{2} \quad \text{với mọi} \quad (u,v,t) \in M'.$$

Dễ dàng nhận thấy ánh xạ $\mathbf{A}$ biến đổi hình hộp xiên M thành hình hộp chữ nhật

$$M' = \{(u,v,t) = \{-2 \le u \le 2, 0 \le v \le 3, 1 \le t \le 2\}.$$

(Ngược lại $\mathbf{A^{-1}}$ là song ánh từ M' lên M). Áp dụng định lí đổi biến

$$I = \iiint\limits_M (x+y+z)^2 dxdydz = \iiint\limits_{M'} u^2 \cdot \frac{1}{2} dudvdt = 8.$$

3.5 Các kiểu đổi biến thường gặp

3.5.1 Đổi biến trong hệ toạ độ cực

Cho hàm $f: M \to \mathbb{R}$ khả tích trên tập $M \subset \mathbb{R}^2$ và xét tích phân $\iint\limits_M f(x,y)dxdy$.

Sử dụng phép đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ (công thức đổi hệ tọa độ Đề các sang tọa độ cực) để tính tích phân trên. Ma trận Jacobien của ánh xạ bằng

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Suy ra Jacobien của phép đổi biến

$$\det\begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r.$$

Giả sử ánh xạ đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

là song ánh từ tập D lên tập M. Áp dụng định lí đổi biến ta có

$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|-r|\,d\varphi dr.$$

Hay

$$\boxed{\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi dr.}$$

Như vậy miền phẳng D cần được xác định để tính tích phân trên. Chẳng hạn khi M là hình tròn tâm O bán kính a

$$M = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\},$$

khi đó D là hình chữ nhật

$$D = \{(\varphi, r) \mid 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le a\}.$$

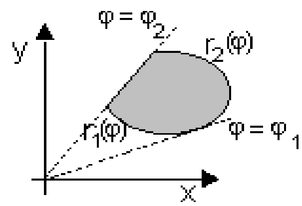
Suy ra

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|-r|\,d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr,$$

hay

$$\iint\limits_M f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr.$$

Cần lưu ý rằng khi chuyển sang hệ tọa độ cực, việc xác định chính xác miền D là cần thiết. Do vậy người ta thường sử dụng hình vẽ dưới đây để giúp ta xác định đúng miền D, miền cần lấy tích phân.



Hình 3.10: Miền D trong hệ tọa độ cực

Miền D nằm giữa hai tia $\varphi = \varphi_1$ và $\varphi = \varphi_2$ (hai tia đó có thể là tiếp tuyến kẻ từ O tới miền D), đồng thời miền D nằm giữa hai hàm xác định biên của nó $r = r_1(\varphi)$ và $r = r_2(\varphi)$ (xem hình vẽ).

Khi đó D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$D = \{(\varphi, r) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

Theo nhận xét 2 sau định lí Fubini (mục 3.4)

$$\boxed{\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr.}$$

Ví dụ 3.5.1

1. Tính tích phân
$$I = \iint\limits_D \sqrt{3 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$
trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$. Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cực
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Áp dụng định lí đổi biến, tích phân cần tính bằng

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{3-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\,r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{3-r^2}\,r\,dr$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{2\pi}{3}(3-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}).$$

2. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit $z = 1 - 9x^2 - 4y^2$ và mặt phẳng tọa độ $z = 0$.

   Thể tích vật thể bằng

$$V = \iint_D (1-9x^2-4y^2)dxdy,$$

   trong đó D là miền phẳng (trong mặt phẳng xOy) giới hạn bởi elip

$$9x^2+4y^2=1.$$

   Sử dụng phép đổi biến $\mathbf{g} = (x, y)$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}u\cos v \\ y = \frac{1}{2}u\sin v \end{cases}$$

   Gọi D^* là hình chữ nhật

$$D^* = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi\}.$$

   Hiển nhiên $\mathbf{g}$ là song ánh từ D^* lên D. Jacobien của ánh xạ g bằng

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cos v & -\frac{1}{3}u\sin v \\ \frac{1}{2}\sin v & \frac{1}{2}u\cos v \end{vmatrix} = \frac{1}{6}u$$

   Vậy

$$V = \iint_D (1-9x^2-4y^2)dxdy = \frac{1}{6}\iint_{D^*}(1-u^2)u\,dudv$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (u-u^3)dudv = \frac{1}{6}2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\pi.$$

3. Hãy tìm thể tích vật thể là giao của hình cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

và hình trụ

$$x^2 - Rx + y^2 \leq 0.$$

Do tính đối xứng của vật thể qua mặt phẳng xOy cũng như qua mặt phẳng xOz, thể tích cần tìm bằng

$$V = 4 \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$

trong đó D là nửa hình tròn (trong mặt phẳng xOy)

$$x^2 - Rx + y^2 \leq 0, x > 0, y > 0.$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, khi đó

$$D^* = \{(\varphi, r) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq R\cos\varphi\}.$$

Vậy

$$\frac{V}{4} = \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r\, drd\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3(\sin^3\varphi - 1)d\varphi = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Hay

$$V = \frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

4. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_{D} (x + y + x^2 + y^2)\, dxdy,$$

trong đó D là miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức

$$D = \{(x, y) \mid x + y + x^2 + y^2 \leq 0, x - y \leq 0\}.$$

Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cực

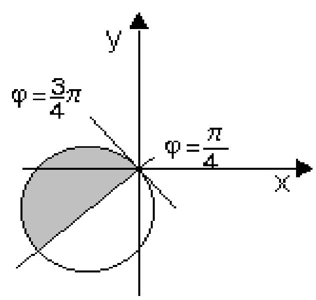
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Ánh xạ đó chiếu miền D^* lên miền D, trong đó D^* được xác định bởi các bất đẳng thức

$$D^* = \{(\varphi, r) \mid 3\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}, 0 \le r \le -(\sin\varphi + \cos\varphi)\}$$

(D là nửa hình tròn). Áp dụng định lí đổi biến

$$I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{-(\sin\varphi+\cos\varphi)} r^2(r + \sin\varphi + \cos\varphi)\, dr = -\frac{\pi}{16}$$



Hình 3.11: Miền D trong ví dụ 3.5.1.4

Nhận xét rằng ta có thể tính tích phân bằng phép đổi biến khác

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi - \frac{1}{2} \\ y = r\sin\varphi - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó miền D^* tương ứng là hình chữ nhật

$$D^* = \{(\varphi, r) \mid \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{\sqrt{2}}{2}\},$$

định thức Jacobien của phép biến đổi vẫn như cũ. Vậy

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(r^2 - \frac{1}{2}\right) r\, dr = -\frac{\pi}{16}.$$

5. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D e^{2x^2-2xy+2y^2}\, dxdy,$$

trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 2xy + 2y^2 \leq 1\}$.

Biểu thức có mặt trong hàm dưới dấu tích phân $\omega = 2x^2 - 2xy + 2y^2$ là dạng toàn phương 2 biến. Sử dụng phép biến đổi trực giao (phép quay hệ trục tọa độ) để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc, ta đổi biến

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases}$$

Khi đó ω có dạng chính tắc $\omega = u^2 + 3v^2$. Phép biến đổi này là song ánh từ miền elip $D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + 3v^2 \leq 1\}$ lên miền D. Mặt khác ta đã biết Jacôbiên của phép biến đổi trực giao $J = 1$, tích phân cần tính đưa về tích phân kép

$$I = \iint\limits_{D^*} e^{u^2+3v^2}\, dudv.$$

Đổi biến tiếp

$$\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = \frac{r}{\sqrt{3}}\sin\varphi \end{cases}$$

Ánh xạ (u, v) chuyển miền D' lên miền D^*, trong đó D' là miền hình chữ nhật

$$D' = \{(\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Jacôbiên của ánh xạ (u, v)

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi & \frac{r}{\sqrt{3}}\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra tích phân cần tìm

$$I = \iint\limits_{D^*} e^{u^2+3v^2}\, dudv = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^2} r\, dr = \frac{\pi(e-1)}{\sqrt{3}}.$$

Nhận xét rằng ta cũng có thể tính tích phân đã cho ban đầu bằng cách sử dụng phép biến đổi không suy biến (phương pháp Lagrange) đưa dạng toàn phương $\omega = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 2(x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{2}y^2$ về dạng chính tắc

$$\begin{cases} u = \sqrt{2}(x - \frac{1}{2}y) \\ v = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y \end{cases} \qquad \text{hay} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}v \\ y = \qquad\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v \end{cases}$$

Phép biến đổi chuyển miền D thành hình tròn $\overline{D} = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$, Jacôbiên của phép biến đổi $J(u, v) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, áp dụng định lí đổi biến

$$I = \iint\limits_{\overline{D}} e^{u^2+v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\, dudv = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^2} r\, dr = \frac{\pi(e-1)}{\sqrt{3}}.$$

6. Hãy tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz,$$

V là miền không gian giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 \leq 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \quad (a > 0).$$

Giao của hai mặt $x^2 + y^2 = 2az$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 2a^2$ trong mặt phẳng $z = a$. Do đó

$$I = \iiint\limits_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz + \iiint\limits_{V_2} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

trong đó V_1 là miền giới hạn bởi mặt parabôlôit eliptic $x^2 + y^2 = 2az$ và mặt phẳng $z = a$, V_2 là miền không gian nằm trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$ và phía trên mặt phẳng $z = a$.

$$\iiint\limits_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz = \int_0^a \left(\iint\limits_{S(z)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdy \right) dz =$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az}} (r^2 + z^2) r dr d\varphi \right) dz = \int_0^a 2\pi(a^2 z^2 + a z^3) dz = \frac{7\pi a^5}{6}.$$

$$\iiint\limits_{V_2} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz = \int_a^{a\sqrt{3}} \left(\iint\limits_{S(z)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdy \right) dz =$$

$$= \int_a^{a\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} (r^2 + z^2) r dr d\varphi \right) dz = \frac{(18\sqrt{3} - 22)\pi a^5}{5}.$$

Vậy

$$I = \frac{7\pi a^5}{6} + \frac{(18\sqrt{3} - 22)\pi a^5}{5} = \frac{\pi a^5}{5} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right).$$

3.5.2 Đổi biến trong hệ toạ độ trụ

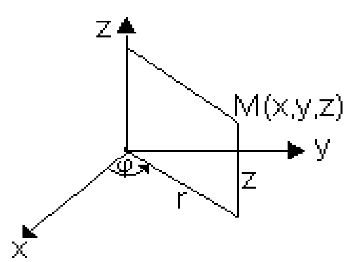
Xét tích phân bội ba

$$\iiint\limits_{M} f(x, y, z) dxdydz.$$

Phép biến đổi

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

được gọi là công thức liên hệ giữa tọa độ Đề các và tọa độ trụ.



Hình 3.12: Tọa độ trụ

Giả sử phép biến đổi đó là song ánh từ tập V lên tập M. Ma trận Jacobien của ánh xạ bằng

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra Jacobien của ánh xạ (định thức của ma trận trên) bằng

$$\begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -r.$$

Áp dụng định lí đổi biến ta được

$$\boxed{\iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\, d\varphi dr.}$$

Đặc biệt khi M là hình trụ giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$M = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le h\},$$

khi đó V là hình hộp

$$V = \{(\varphi, r, z) \mid 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le a, 0 \le z \le h\}.$$

Suy ra

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\, dr \int_0^h f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, dz.$$

Tương tự như trong tích phân kép khi chuyển sang tọa độ cực, nếu miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(\varphi, r, z) \mid \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), z_1(\varphi, r) \le z \le z_2(\varphi, r)\},$$

Áp dụng định lí Fubini ta được

$$\boxed{\iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int_{z_1(\varphi,r)}^{z_2(\varphi,r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.}$$

Chú ý rằng khi chuyển hệ tọa độ Đề các sang hệ tọa độ trụ, mối quan hệ giữa các biến r, φ với các biến x, y như mối quan hệ giữa tọa độ Đề các và tọa độ cực.

Ví dụ 3.5.2

1. Tính tích phân
$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} z^2 \, dxdydz,$$
trong đó V là một phần hình trụ $x^2 + y^2 \leq 4$ giới hạn bởi các mặt $z = 1$ và các mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0, z = 0$:
$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 < x, 0 < y, 0 \leq z \leq 1\}.$$
Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ trụ
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$$
khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức
$$V^* = \{(\varphi, r, z) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}.$$
Do vậy tích phân cần tính bằng
$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} z^2 \, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 rdr \int_0^1 \sqrt{r^2} z^2 dz =$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^2 r^2 dr \int_0^1 z^2 dz = \frac{4\pi}{9}.$$

2. Tính tích phân
$$I = \iiint\limits_V |xyz| \, dxdydz,$$

trong đó V giới hạn bởi các bất đẳng thức $x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq a$:

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq a\}.$$

Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$$

khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V^* = \{(\varphi, r, z) \mid 0 \leq z \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2z}\}.$$

Do vậy tích phân cần tính bằng

$$I = \iiint\limits_V |xyz|\,dxdydz = \int_0^a zdz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2z}} r^3|\cos\varphi\sin\varphi|dr =$$

$$= \int\limits_0^a \frac{z^3dz}{2} \int\limits_0^{2\pi} |\sin 2\varphi|d\varphi = 4\int\limits_0^a \frac{z^3dz}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2\varphi|d\varphi = \int\limits_0^a 2z^3dz = \frac{a^4}{2}.$$

3. Nhận xét rằng việc tính các tích phân đơn liên tiếp đôi khi đưa về tính tích phân bội. Chẳng hạn xét các tích phân đơn liên tiếp

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a f(x, y, z)dz.$$

Tích phân đó bằng tích phân hàm $f(x, y, z)$ trên hình trụ

$$V = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq a\}.$$

Do vậy để tính I, đôi khi ta đưa về tính tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$$

và tùy theo hàm f ta có thể chuyển sang tọa độ trụ để tính tích phân này.

3.5.3 Đổi biến trong hệ toạ độ cầu

Xét tích phân bội ba

$$\iiint\limits_{M} f(x,y,z)dxdydz.$$

Phép biến đổi

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

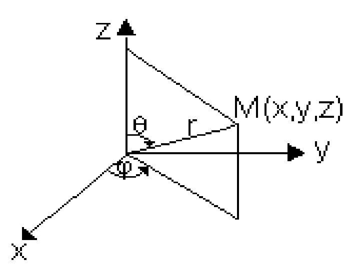
được gọi là công thức liên hệ giữa tọa độ đề các và tọa độ cầu.

Giả sử phép biến đổi đó là song ánh từ tập V lên tập M. Ma trận Jacobien của ánh xạ bằng

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Suy ra Jacobien của ánh xạ (định thức của ma trận trên) bằng

$$\begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$



Hình 3.13: Tọa độ cầu

Áp dụng định lí đổi biến ta được $\iiint\limits_M f(x, y, z)dxdydz =$

$$\boxed{= \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, d\varphi dr d\theta.}$$

Đặc biệt khi M là hình cầu

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\},$$

khi đó V là hình hộp

$$V = \{(\varphi, r, \theta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Suy ra

$$\iiint\limits_M f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\, dr \int_0^\pi f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Một cách tổng quát, nếu miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(\varphi, r, \theta) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi), \theta_1(\varphi, r) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi, r)\},$$

Áp dụng định lí Fubini ta được $\iiint\limits_M f(x, y, z)dxdydz =$

$$\boxed{= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 dr \int\limits_{\theta_1(\varphi,r)}^{\theta_2(\varphi,r)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.}$$

Ví dụ 3.5.3

1. Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ trên nửa hình cầu V:

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z\}.$$

   Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

   khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V^* = \{(\varphi, r, \theta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

   Suy ra

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

2. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V (xy + yz + zx)\, dxdydz,$$

   với V là hình cầu được xác định bởi mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V^* = \{(\varphi, r, \theta) \mid 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Jacobien của ánh xạ bằng $r^2 \sin\theta$.

Suy ra

$$\iiint\limits_V (xy + yz + zx)\, dxdydz = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^4(\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi +$$

$$+\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi + \sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi)d\varphi = 0.$$

Ta nhận xét rằng tích phân trên có thể tách ra 3 tích phân, mỗi tích phân đều bằng 0 do tính đối xứng. Chẳng hạn yz là hàm lẻ đối với y và V là miền đối xứng qua mặt phẳng xOz.

3. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V x^2y^2z^2\, dxdydz,$$

với V là miền không gian được xác định bởi elipxôit

$$V = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}.$$

Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta, \end{cases}$

khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V^* = \{(\varphi, r, \theta) \mid 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}.$$

Jacobien của ánh xạ bằng $abcr^2\sin\theta$.

Suy ra

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \frac{(abc)^3}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\pi} r^8 \sin^5\theta \cos^2\theta \sin^2 2\varphi d\theta =$$

$$= \frac{4(abc)^3}{105} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^8 \sin^2 2\varphi dr = \frac{4(abc)^3}{945} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{4\pi(abc)^3}{945}.$$

3.6 Ứng dụng của tích phân bội

3.6.1 Diện tích mặt cong

Trong chương II, khi trình bày một số vấn đề về hình vi phân, chúng ta đã làm quen với biểu diễn tham số mặt cong trơn. Cũng như khái niệm độ dài đường cong, nói chung chúng ta không định nghĩa chính xác khái niệm diện tích mặt cong. Nếu độ dài đường cong trình bày trong các chương trước được coi như giới hạn của chu vi các đa giác (các đường gấp khúc) nội tiếp đường cong, thì diện tích mặt cong cũng được hiểu tương tự như là giới hạn của diện tích các đa diện nội tiếp mặt cong. Người ta còn ràng buộc các điều kiện liên quan tới các đa diện nội tiếp đó (điều kiện về hạn chế góc dạng Schwars), tuy nhiên trong phạm vi giáo trình này chúng ta bỏ qua, chỉ phát biểu định lí và nêu các ví dụ ứng dụng định lí trong việc tính diện tích mặt cong.

Giả sử $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ là biểu diễn tham số mặt cong trơn S nào đó, trong đó (u, v) biến thiên trong miền phẳng $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta có định lí sau

Định lí 3.6.1 *Giả thiết rằng $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền đóng, liên thông, đơn liên, bị chặn và đo được dạng Jordan. $\mathbf{r}$ là song ánh từ D lên mặt $S \subset \mathbb{R}^3$ thoả mãn điều kiện các đạo hàm riêng $\mathbf{r}'_u(u, v), \mathbf{r}'_v(u, v)$ liên tục và tích có hướng của chúng $\mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v) \neq \mathbf{0}$ với mọi $(u, v) \in D$. Khi đó mặt S có diện tích đồng thời diện tích mặt cong S bằng*

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)| \, dudv.}$$

Nhận xét

1. Nhận xét rằng với các điều kiện nêu trên tích phân trong định lí luôn tồn tại. Thậm chí định lí vẫn đúng nếu miền D không thoả mãn các điều kiện nêu trong định lí, song D phân tích thành hợp của các miền

$$D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i,$$

trong đó mỗi miền $D_i (i = 1, 2, ..., N)$ đều thoả mãn các điều kiện của định lí: miền đóng, liên thông, đơn liên, bị chặn và đo được dạng Jordan.

2. Véc tơ $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)$ trong định lí chính là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện tại $\mathbf{r}(u, v) \in S$ như đã biết trong hình vi phân. Vậy biểu thức dưới dấu tích phân là độ dài véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}(u, v)$. Suy ra ta có thể viết gọn và dễ nhớ hơn công thức tính diện tích mặt cong trong định lí trên

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)|\, dudv = \iint\limits_D |\mathbf{n}(u, v)|\, dudv.}$$

Ta nhớ lại rằng công thức tính độ dài đường cong $\mathbf{g}'(t),\ t \in (a, b)$ *được viết dưới dạng tích phân độ dài véc tơ tiếp tuyến* $s = \int\limits_a^b |\mathbf{g}'(t)| dt.$

3. Chú ý rằng diện tích mặt cong không phụ thuộc vào biểu diễn tham số mặt cong đó.

Xét trường hợp đặc biệt khi mặt cong S được cho bởi phương trình

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

khi đó biểu diễn tham số của mặt cong sẽ là $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v = (1, 0, f'_u) \wedge (0, 1, f'_v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} = (-f'_u, -f'_v, 1)$$

Suy ra diện tích của mặt cong, theo công thức trên chính là công thức quen thuộc đã biết

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v)|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}\, dudv.}$$

Trong trường hợp tổng quát khi biểu diễn tham số của mặt cong S có dạng $\mathbf{r} = (x, y, z)$, trong đó

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

khi đó diện tích của mặt cong bằng

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r'}_u \wedge \mathbf{r'}_v|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\, dudv.}$$

Công thức tính diện tích mặt cong như trên khá dài. Nhằm mục đích dễ nhớ và sử dụng thuận tiện hơn, người ta dẫn vào các kí hiệu

$$E = \mathbf{r'}^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u,$$

$$F = \mathbf{r'}_u \mathbf{r'}_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

$$G = \mathbf{r'}^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v.$$

Ta có định lí sau

Định lí 3.6.2 *Với các điều kiện của định lí 3.6.1, mặt cong S có diện tích và diện tích bằng*

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v)|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.}$$

Chứng minh. Ta cần phải chứng minh

$$(\mathbf{r'}_u \wedge \mathbf{r'}_v)^2 = EG - F^2.$$

Thật vậy, sử dụng định lí khai triển tích kép trong hình giải tích

$$(\mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v)^2 = [\mathbf{r}'_v \wedge (\mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_u)]\mathbf{r}'_u = [\mathbf{r}'^2_v\mathbf{r}'_u - (\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v)\mathbf{r}'_v]\mathbf{r}'_u = EG - F^2.$$

Chú ý rằng ta cũng có thể sử dụng định nghĩa tích có hướng của hai véc tơ để chứng minh định lí:

$$(\mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v)^2 = \mathbf{r}'^2_u\mathbf{r}'^2_v \sin^2(\mathbf{r}'_u; \mathbf{r}'_v) = \mathbf{r}'^2_u\mathbf{r}'^2_v(1 - \cos^2(\mathbf{r}'_u; \mathbf{r}'_v)) =$$

$$= \mathbf{r}'^2_u\mathbf{r}'^2_v - \mathbf{r}'^2_u\mathbf{r}'^2_v \cos^2\big(\mathbf{r}'_u; \mathbf{r}'_v)\big) = \mathbf{r}'^2_u\mathbf{r}'^2_v - (\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v)^2 = EG - F^2. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 3.6.1

1. Tính diện tích phần mặt cong parabôlôit hypecbôlic $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \leq 4$.

   Do $f(x, y) = xy$ nên
   $$f'_x = y, \quad f'_y = x,$$
   Vì vậy diện tích mặt cong được tính theo công thức
   $$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$
   trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$. Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cực
   $$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$
   khi đó
   $$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{1 + r^2}dr = \frac{2\pi}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^2 = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

2. Tính diện tích phần mặt cầu
   $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

nằm trong hình trụ

$$x^2 - Rx + y^2 \leq 0.$$

Do tính đối xứng của vật thể qua mặt phẳng xOy cũng như qua mặt phẳng xOz, ta cần tính diện tích phần mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

nằm trong góc phần tám thứ nhất $x > 0, y > 0, z > 0$. Từ phương trình mặt cầu

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

ta có

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Vì vậy diện tích phần mặt cầu nói trên bằng

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'}_x^2 + {f'}_y^2}\, dxdy = \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

trong đó D là nửa hình tròn (trong mặt phẳng xOy)

$$x^2 - Rx + y^2 \leq 0, x > 0, y > 0.$$

Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

khi đó

$$D^* = \{(\varphi, r) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq R\cos\varphi\}.$$

Vậy

$$S = \iint\limits_{D^*} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} drd\varphi = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi} 2r(R^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} drd\varphi$$

$$S = -R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - 1)d\varphi = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

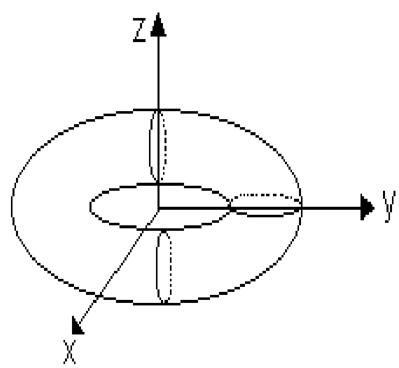
Như đã nói trên do tính đối xứng, diện tích cần tìm bằng

$$4S = 2R^2(\pi - 2).$$

3. Gọi S là mặt cong (hình vòng xuyến) có biểu diễn tham số

$$\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v, \\ y = (a + b\cos u)\sin v, \\ z = b\sin u \end{cases} \qquad (a > b)$$

trong đó $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$.



Hình 3.14: Hình vòng xuyến

Hãy tính diện tích của mặt cong đó. Trước tiên ta tính các đại lượng

$$E = \mathbf{r}'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u =$$

$$= (-b\sin u\cos v)^2 + (-b\sin u\sin v)^2 + (b\cos u)^2 = b^2,$$

$$F = \mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v =$$

$$= b(a + b\cos u)\sin u\cos v\sin v - b(a + b\cos u)\sin u\cos v\sin v = 0$$

$$G = \mathbf{r}'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = (a + b\cos u)^2.$$

Áp dụng định lí 3.6.2, ta có diện tích hình vòng xuyến bằng

$$\iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(ab + b^2\cos u)\, dudv = 4\pi^2 ab.$$

3.6.2 Các ứng dụng khác

Cũng như tích phân xác định, tích phân bội có nhiều ứng dụng trong mọi lĩnh vực khác nhau. Nó được ứng dụng để tính diện tích các mặt cong, tính thể tích các miền bất kì như một vài ví dụ đã minh họa trong chương này. Nó còn được ứng dụng rộng rãi trong các ngành khoa học, kĩ thuật, kinh tế... Trong mục này chúng ta nhắc lại công thức ứng dụng tích phân để tính diện tích, tính thể tích và giới thiệu một vài ứng dụng tích phân trong cơ học.

• *Tính diện tích, thể tích.*

Theo tính chất của tích phân bội: diện tích miền phẳng $D \subset \mathbb{R}^2$ bằng

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

Nếu $V \subset \mathbb{R}^3$, thể tích miền V được tính thông qua tích phân bội ba

$$\lambda(V) = \iiint\limits_V dxdydz.$$

• *Tính khối lượng vật thể.*

Nếu vật thể V có khối lượng riêng là hàm $\varrho(x, y, z)$ liên tục trên V. (Giả thiết vật thể V được đặt trong hệ trục tọa độ Đề các $Oxyz$ và V là miền đo được dạng Jordan). Tư tưởng của việc tính khối lượng của V (cũng giống như việc tính thể tích hình trụ cong) dựa trên nhận xét sau đây:
Nếu ta chia miền V thành hợp của nhiều hình hộp nhỏ hơn đôi một không có điểm trong chung

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i \subset V,$$

khối lượng của mỗi hình hộp H_i, tương tự cách tính thể tích hình trụ cong, bằng $\iiint\limits_{H_i} \varrho(x, y, z)dxdydz$. Kí hiệu $m = m(V)$ là khối lượng của V, theo tính chất tích phân bội ba

$$\iiint\limits_{\cup H_i} \varrho(x, y, z)dxdydz \leq m(V).$$

Tương tự xét các hình hộp đôi một không có điểm trong chung thỏa mãn

$$\bigcup_{k=1}^{m} H'_k \supset V,$$

khi đó

$$m(V) \leq \iiint\limits_{\cup H'_k} \varrho(x, y, z)dxdydz.$$

Do V là miền đo được dạng Jordan

$$\sup \sum_{\cup H_i \subset V} \lambda(H_i) = \inf \sum_{\cup H'_k \supset V} \lambda(H'_k) = \lambda(V).$$

Suy ra

$$\sup_{\cup H_i \subset V} \iiint\limits_{\cup H_i} \varrho(x, y, z)dxdydz = \inf_{\cup H'_k \supset V} \iiint\limits_{\cup H'_k} \varrho(x, y, z)dxdydz$$

và cùng bằng $\iiint\limits_{V} \varrho(x, y, z)dxdydz$. Vậy khối lượng vật thể V, với $\varrho(x, y, z)$ là hàm khối lượng riêng, được tính theo công thức

$$\boxed{m(V) = \iiint\limits_{V} \varrho(x, y, z)dxdydz.}$$

Tương tự khối lượng của một bản phẳng D với $\varrho(x, y)$ là hàm khối lượng riêng

$$\boxed{m(D) = \iint\limits_{D} \varrho(x, y)dxdy.}$$

• *Tính trọng tâm vật thể.*

Trong cơ học ta biết rằng tọa độ trọng tâm của một hệ thống gồm n điểm $M_1, M_2, ..., M_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1, m_2, ..., m_n$ đặt tại các điểm đó chính là tọa độ của véc tơ

$$\frac{m_1\mathbf{a_1} + m_2\mathbf{a_2} + \cdots + m_n\mathbf{a_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

trong đó $\mathbf{a_i}$ là véc tơ nối gốc tọa độ O với điểm M_i. Nói cách khác tọa độ trọng tâm của hệ thống trên bằng

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \overline{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

$\big((x_{M_i}, y_{M_i}, z_{M_i})$ là tọa độ của điểm $M_i\big)$

Tổng quát hơn, trọng tâm của vật thể V, biết $\varrho(x, y, z)$ là hàm khối lượng riêng của vật thể tại (x, y, z), được tính theo công thức

$$\boxed{\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint\limits_V x\varrho(x, y, z)dxdydz \\ \overline{y} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint\limits_V y\varrho(x, y, z)dxdydz \\ \overline{z} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\iiint\limits_V z\varrho(x, y, z)dxdydz \end{cases}}$$

trong đó m là khối lượng của vật thể

$$\boxed{m = \iiint\limits_V \varrho(x, y, z)dxdydz.}$$

Trường hợp vật thể V đồng chất, hàm khối lượng riêng là hàm hằng, suy ra tọa độ trọng tâm của V

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{V} \iiint\limits_V xdxdydz, \ \overline{y} = \frac{1}{V} \iiint\limits_V ydxdydz, \ \overline{z} = \frac{1}{V} \iiint\limits_V zdxdydz}$$

với kí hiệu V là thể tích của chính nó.

Ví dụ 3.6.2

1. Biết hình lập phương $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq x \leq a$ với $a > 0$, có khối lượng riêng tại (x, y, z) bằng $\varrho(x, y, z) = x + y + z$. Khối lượng hình lập phương là
$$m = \iiint\limits_V \varrho(x, y, z) dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = \frac{3}{2} a^4.$$

2. Biết khối lượng riêng của nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ z \geq 0$ tại điểm bất kì tỉ lệ với khoảng cách từ đó tới tâm O. Hãy tính tọa độ trọng tâm của nửa hình cầu.

   Hàm khối lượng riêng: $\varrho(x, y, z) = C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kí hiệu V là nửa hình cầu nói trên. Khối lượng của nửa hình cầu đó bằng
$$m = \iiint\limits_V C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz.$$
   Chuyển sang tọa độ cầu
$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$
   khi đó miền V^* tương ứng với V được xác định bởi các bất đẳng thức
$$V^* = \{(\varphi, r, \theta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$
   Suy ra
$$\begin{aligned} m &= C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta\, d\theta \\ &= 2C\pi \int_0^a r^3\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = \frac{Ca^4\pi}{2}. \end{aligned}$$
   Do tính đối xứng, hoành độ và tung độ của trọng tâm
$$\overline{x} = \frac{1}{m} \iiint\limits_V xC\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V yC\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = 0$$

Cao độ của trọng tâm

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V zC\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$
$$= \frac{C}{m}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^4\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{2}{5}a.$$

3.7 Tóm tắt các công thức cần nhớ trong chương tích phân bội

Tích phân kép và tích phân bội trên hình hộp

Giả sử $f : H \to R$ khả tích trên hình chữ nhật $H = [a, b] \times [c, d]$. Giả thiết rằng với mọi $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân xác định

$$\int_a^b f(x, y)\,dx,$$

cũng như với mọi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân xác định

$$\int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Khi đó định lí Fubini khẳng định

$$\boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy = \int\int_H f(x, y)\,dxdy.}$$

Một cách tương tự, ta có công thức để tính tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật

$$V = \{(x, y, z) \in R^3 / a \le x \le b, c \le y \le d, u \le z \le v\}$$

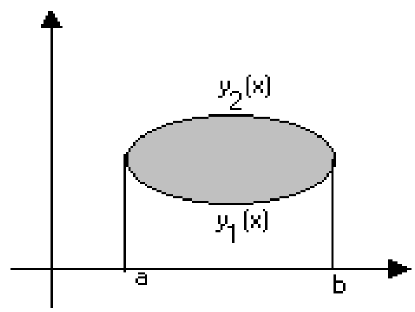
$$\boxed{\int\int\int_V f(x, y, x)\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_u^v f(x, y, z)\,dz\right) dy\right) dx.}$$

Tích phân kép trên miền phẳng

Giả sử $M \subset R^2$ là miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức

$$M = \{(x, y)/a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm liên tục xác định trên $[a, b]$, $f : M \to R$ là hàm khả tích trên M.



Hình 3.15: Tích phân kép

Khi đó

$$\boxed{\int\int_M f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.}$$

Tương tự, nếu $M \subset R^2$ được xác định bởi các bất đẳng thức

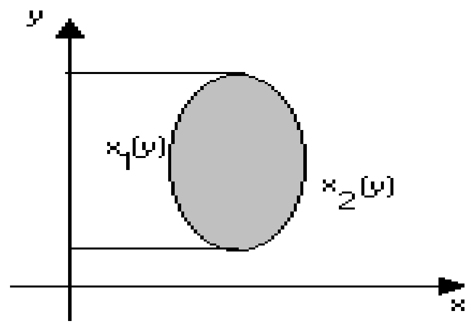
$$M = \{(x, y)/c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

trong đó $x_1(y)$ và $x_2(y)$ là các hàm liên tục xác định trên $[c, d]$.

Khi đó

$$\boxed{\int\int_M f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.}$$

Tích phân bội ba trên miền không gian V



Hình 3.16: Tích phân kép

Giả sử $V \subset R^3$ là miền được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(x, y, z)/a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx.}$$

Nếu kí hiệu

$$M = \{(x, y)/a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

là hình chiếu của V lên mặt phẳng xOy. Ta có

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_M \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy.}$$

Ngoài ra nếu kí hiệu $S(x)$ là thiết diện tạo bởi V với mặt phẳng đi qua x, vuông góc với trục Ox, khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y)\, dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)\, dydz.}$$

Công thức đổi biến để tích phân bội

Cho hàm $f : M \to R$ khả tích trên tập giới nội $M \subset R^n$. Gọi $\mathbf{g} : M' \to M$ là song ánh từ $M' \subset R^n$ lên M, khả vi liên tục trên tập M'. Kí hiệu $\mathbf{g}'(\mathbf{y})$ là Jacobien của ánh xạ $\mathbf{g}$ tại $\mathbf{y} \in M'$:

$$|\mathbf{g}'(\mathbf{y})| = |\det \mathbf{g}'(\mathbf{y})|, \quad \text{khi đó}$$

$$\boxed{\int\limits_{M} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))|\mathbf{g}'(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}.}$$

Xét trường hợp đặc biệt khi sử dụng phép đổi biến $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính không suy biến. Khi đó

$$\boxed{\int\limits_{M} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{A}\mathbf{y})|\det \mathbf{A}|\, d\mathbf{y}.}$$

Nếu sử dụng phép đổi biến

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x},$$

trong đó $\mathbf{B}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính không suy biến, $\mathbf{B}$ chiếu tập $M \subset R^n$ lên $M' \subset R^n$. Khi đó

$$\boxed{\int\limits_{M} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y})|\det \mathbf{B}^{-1}|\, d\mathbf{y} = \int\limits_{M'} f(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y})\frac{1}{|\det \mathbf{B}|} d\mathbf{y}.}$$

a. Đổi biến sang hệ tọa độ cực

Sử dụng phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

(sang tọa độ cực) để tính tích phân $\int\int_M f(x,y)dxdy$. Giả sử ánh xạ đổi biến trên là song ánh từ tập D lên tập M. Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_{M} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi dr.}$$

Nếu D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$D = \{(\varphi, r)/\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.}$$

b. Đổi biến sang hệ tọa độ trụ

Sử dụng phép biến đổi

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Giả sử phép biến đổi đó là song ánh từ tập V lên tập M. Áp dụng định lí đổi biến ta được

$$\boxed{\iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,d\varphi dr.}$$

Đặc biệt khi miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(\varphi, r, z)/\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), z_1(\varphi, r) \le z_2(\varphi, r)\},$$

áp dụng định lí Fubini ta được

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int_{z_1(\varphi,r)}^{z_2(\varphi,r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.}$$

c. Đổi biến sang hệ tọa độ cầu

Sử dụng phép biến đổi

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

để tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_M f(x,y,z)dxdydz.$$

Giả sử phép biến đổi đó là song ánh từ tập V lên tập M. Khi đó

$$\boxed{I = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, d\varphi dr d\theta.}$$

Đặc biệt khi miền V được xác định bởi các bất đẳng thức

$$V = \{(\varphi, r, \theta)/\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), \theta_1(\varphi, r) \le \theta \le \theta_2(\varphi, r)\},$$

áp dụng định lí Fubini ta được

$$\boxed{I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 dr \int_{\theta_1(\varphi,r)}^{\theta_2(\varphi,r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.}$$

Công thức tính diện tích mặt cong

Giả sử $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ là biểu diễn tham số mặt cong S nào đó, trong đó (u,v) biến thiên trong miền phẳng $D \subset R^2$. Giả thiết rằng $D \subset R^2$ là miền đóng, liên thông, đơn liên, bị chặn và đo được dạng Jordan. $\mathbf{r}$ là song ánh từ D lên mặt $S \subset R^3$ thoả mãn điều kiện các đạo hàm riêng $\mathbf{r'}_u(u,v), \mathbf{r'}_v(u,v)$ liên tục và tích có hướng của chúng $\mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$ với mọi $(u,v) \in D$. Khi đó mặt S có diện tích đồng thời diện tích mặt cong S bằng

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v)|\, dudv.}$$

Véc tơ $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện tại $\mathbf{r}(u,v) \in S$. Vậy biểu thức dưới dấu tích phân là độ dài véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}(u,v)$. Suy ra

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r'}_u(u,v) \wedge \mathbf{r'}_v(u,v)|\, dudv = \iint\limits_D |\mathbf{n}(u,v)|\, dudv.}$$

Xét trường hợp đặc biệt khi mặt cong S được cho bởi phương trình

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Khi đó diện tích của mặt cong, theo công thức trên chính là

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, dudv.}$$

Trong trường hợp tổng quát khi biểu diễn tham số của mặt cong S có dạng $\mathbf{r} = (x, y, z)$, trong đó

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

diện tích của mặt cong bằng

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\, dudv.}$$

Ta dẫn vào các kí hiệu

$$E = \mathbf{r}'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

$$G = \mathbf{r}'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v.$$

Khi đó công thức tính diện tích mặt cong như trên có thể viết dưới dạng

$$\boxed{\iint\limits_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \wedge \mathbf{r}'_v(u, v)|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.}$$

Công thức tính khối lượng, trọng tâm vật thể

Khối lượng của V được tính theo công thức

$$\boxed{m = \iiint\limits_V \varrho(x,y,z)dxdydz,}$$

trong đó $\varrho(x,y,z)$ là hàm khối lượng riêng tại $(x,y,z) \in V$.

Trọng tâm của V được tính theo công thức

$$\boxed{\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{m} \iiint\limits_V x\varrho(x,y,z)dxdydz \\ \overline{y} = \dfrac{1}{m} \iiint\limits_V y\varrho(x,y,z)dxdydz \\ \overline{z} = \dfrac{1}{m} \iiint\limits_V z\varrho(x,y,z)dxdydz \end{cases}}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\, dxdy$, D là tam giác nối các đỉnh $O(0,0)$, $A(10,1)$, $B(1,1)$.

2. Tính tích phân $\iint\limits_D |x+y|\, dxdy$ với $D = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

3. Tính tích phân $\iint\limits_D x\sqrt{4-y^2}\, dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2+y^2 = 4, x > 0$.

4. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{|x+y^2|}\, dxdy$, trong đó $D = [-4,0] \times [0,2]$.

5. Tính diện tích các miền phẳng dưới đây

   (a) Giới hạn bởi $xy = 2,\ xy = 4$ và $y = x,\ y = 4x$.

   (b) Giới hạn bởi $xy = a,\ xy = 3a$ và $y^2 = ax,\ y^2 = 2ax \quad (a > 0)$.

   (c) Giới hạn bởi $x + y = 3,\ x + y = 5$ và $y = 2x,\ y = 4x$.

   (d) Giới hạn bởi $x + y = 3,\ x + y = 2$ và $y = 2x,\ y = -2x$.

   (e) Giới hạn bởi các đường $y^2 = px,\ y^2 = qx \quad (0 < p < q)$ và các đường $x^2 = ay, x^2 = by \quad (0 < a < b)$.

6. Tính tích phân
$$\iint\limits_D (2x+y)(x-2y)\, dxdy,$$
   D là hình vuông, biết tọa độ các đỉnh $A(1,0);\ B(3,1);\ C(2,3);\ D(0,2)$.

7. Tính tích phân $\iint\limits_D e^{x+y}\sqrt[3]{2x-y}\, dxdy$, với D là miền hữu hạn giới hạn bởi các đường thẳng $x+y=0, x+y=1, 2x-y=0, 2x-y=2$.

8. Sử dụng phép đổi biến để tính tích phân $\iint\limits_D xy\,dxdy$, với D là hình vuông nối các đỉnh $(0,0),(1,1),(2,0)$ và $(1,-1)$.

9. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt trụ
$$xy=1,\ xy=4,\ y=3x,\ y=6x,$$
mặt phẳng xOy và mặt cong $z=xy^3+4$.

10. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt
$$\frac{x}{3}+\left(\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\right)^2=1 \quad \text{và} \quad x=0.$$

11. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $z=x^2+y^2$ và $z^2=xy$.

12. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt
$$2x=y^2+z^2,\ (y^2+z^2)^2=4(y^2-z^2) \quad \text{và} \quad x=0.$$

13. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt
$$y=1-z^2,\ x+z=1$$
và các mặt phẳng tọa độ.

14. Tính $I=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$, với D là miền giới hạn bởi đường cong
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \quad (x>0).$$

15. Tính tích phân $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, trong đó miền $D\subset\mathbb{R}^2$ được xác định bởi các bất đẳng thức
$$x^2+y^2\geq 1 \quad \text{và} \quad x^2+(y-1)^2\leq 1.$$

16. Tính các tích phân sau

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2+y^2=2y$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy$ với D giới hạn bởi $x^2+y^2=2x$

(c) $\displaystyle I=\iint\limits_D \left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}\right)dxdy$ với D giới hạn bởi

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1\ (*)$$

(d) Tính thể tích miền không gian giới hạn bởi các mặt $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ và $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+z=1.$

17. Tính tích phân

$$I=\iint\limits_D e^{4x^2+y^2}\,dxdy$$

trong đó miền $D\subset\mathbb{R}^2$ được xác định bởi bất đẳng thức

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2\le 4\}.$$

18. Tính tích phân

$$I=\iint\limits_D \sqrt{2x^2+2xy+2y^2}\,dxdy.$$

trong đó $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2+2xy+2y^2\le 1\}$.

19. Tính tích phân

$$I(R)=\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

với D_R là hình tròn tâm $O(0,0)$ bán kính R. Từ kết quả đó hãy suy ra giá trị của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

20. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2}$, V là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 \leq z \leq 4$.

21. Tính $I = \iiint\limits_V \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$z \geq 0, \; x^2+y^2 \leq z^2 \leq 1.$$

22. Hãy sử dụng phép đổi biến thích hợp để tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$$

và các mặt phẳng tọa độ $x=0, \; y=0, \; z=0$.

23. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_M z^2 dxdydz,$$

trong đó M là giao của hai hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \; x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz$.

24. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_M (x+y+z)^2 dxdydz,$$

trong đó M giới hạn bởi các miền $2az \geq x^2+y^2, \; x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$.

25. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt nón và mặt cầu:

$$x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=2z.$$

26. Tính tích phân $I = \iiint\limits_V xyz\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các bất đẳng thức

$$x^2+y^2 \leq 2z, \; 0 \leq z \leq 2.$$

27. Tính tích phân $I = \iiint\limits_V \dfrac{(3x^4+1)dxdydz}{x^4+y^4+z^4+1}$, trong đó V là miền giới hạn bởi bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

28. Tính tích phân
$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$
trong đó $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le x\}$.

29. Tính tích phân
$$I = \iiint\limits_V \sqrt{2x^2-2xy+3y^2-2yz+2z^2}\, dxdydz.$$
trong đó miền V được xác định bởi bất đẳng thức
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2-2xy+3y^2-2yz+2z^2 \le 1\}.$$

30. Tính tích phân
$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$$

31. Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong mặt trụ $2x = x^2+y^2$.

32. Tính diện tích phần mặt cầu
$$x^2+y^2+z^2 = 4, \quad (z \ge 0)$$
nằm trong hình trụ $(x-1)^2+y^2 \le 1$.

33. Tính diện tích phần mặt cong $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2 \le 4$.

34. Tính diện tích phần mặt cong $z = x^2+y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 25$.

35. Tính diện tích mặt tròn xoay nhận được khi quay cung đường cong $f(x)$, với $a \le x \le b$ $\big(f'(x) \ge 0\big)$ xung quanh trục Ox. Giả thiết $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$.

36. Tính thể tích phần hình trụ $x^2+y^2 = 2ax$ nằm giữa 2 mặt $x^2+y^2 = 2az$ và $z = 0$.

37. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt cong

    (a) $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

    (b) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz$.

    (c) $y = (x^2 + y^2)^2 + z^4$.

38. Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất D

    (a) Giới hạn bởi các đường $y = px^2$ và $y = b$, biết $p > 0, b > 0$.

    (b) Giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0,\ y = -\dfrac{1}{2}x+1$ và $y = \dfrac{1}{2}x-1$.

    (c) D là tứ giác lồi với các đỉnh $(4, 4),\ (5, 7),\ (10, 10),\ (12, 4)$.

39. Xác định trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 4,\ z = 2 - \frac{1}{2}x,\ z = 0.$$

40. Xác định trọng tâm của nửa hình cầu đồng chất bán kính R.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\, dxdy = 6.$

2. $\iint\limits_D |x + y|\, dxdy = \dfrac{8}{3}$

3. $\iint\limits_D x\sqrt{4 - y^2}\, dxdy = 3\pi$

4. $\iint\limits_D \sqrt{|x + y^2|}\, dxdy = 2\pi + \dfrac{8}{3}$

5. Tính diện tích các miền phẳng
   (a) $4\ln 2$, (b) $\frac{2a\ln 2}{3}$
   (c) $\frac{16}{5}$,
   (d) $\frac{10}{3}$, (e) $\frac{1}{3}(p-q)(a-b)$

6. $\iint\limits_D (2x + y)(x - 2y)\, dxdy = -\frac{135}{4}$

7. $\frac{1}{2}(e-1)\sqrt[3]{2}.$

8. 0.

9. $\frac{63}{2} + 6\ln 2.$

10. 12π

11. $\frac{\pi}{96}$

12. π

13. $\frac{5}{12}$

14. $\frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5-4\sqrt{2}}{3}\right)$

15. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

16. (a) $\frac{8}{9}(3\pi - 4)$, (b) $\frac{2\pi}{3}$
    (c) $\frac{27\pi}{2}$, (d) $\frac{27\pi}{4}$

17. $2\pi(e-1)$

18. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

19. $I(R) = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

20. $\pi(5\ln 5 - 4)$

21. $\frac{8}{\pi^2}$

22. $\frac{1}{90}$

23. $\frac{59}{480}\pi R^5$

24. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$

25. π

26. 0

27. $\frac{4\pi}{3}$

28. $\frac{\pi}{10}$

29. $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

30. $\frac{4}{15}\pi R^5$

31. $\pi\sqrt{2}$

32. $4(\pi - 2)$

33. $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$

34. $\frac{\pi}{6}(101\sqrt{101} - 1)$

35. $S = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

36. $\frac{3}{4}\pi a^3$

37. (a) $\frac{\pi}{3}$, (b) $\frac{1}{6}$, (c) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

38. (a) $\overline{x} = 0, \overline{y} = \frac{3b}{5}$, (b) $\overline{x} = \frac{4}{3}, \overline{y} = 0$, (c) $\overline{x} = \frac{41}{5},\ \overline{y} = \frac{41}{10}$

39. $\overline{x} = -\frac{1}{4},\ \overline{y} = 0,\ \overline{z} = \frac{17}{16}$

40. Gắn hệ trục tọa độ thích hợp $\overline{x} = 0,\ \overline{y} = 0,\ \overline{z} = \frac{3R}{8}$

Chương 4

Tích đường, tích phân mặt

4.1 Tích phân đường loại một

Trong giải tích hàm một biến chúng ta đã xây dựng khái niệm tích phân Riemann trên đoạn $[a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$) và mở rộng một cách tự nhiên sang khái niệm tích phân bội trong $\mathbb{R}^n$. Trong chương này chúng ta sẽ tiếp tục mở rộng khái niệm tích phân trên các đối tượng hình học tổng quát hơn: đường cong trong $\mathbb{R}^n$. Để việc trình bày đơn giản về mặt kí hiệu, chúng ta chỉ giới hạn việc xây dựng tích phân trên các đường cong phẳng và đường cong trong không gian.

Định nghĩa 4.1.1 *Cho cung trơn L trong $\mathbb{R}^3$ với $\mathbf{g}(t), t \in (a, b)$ là biểu diễn tham số và hàm f xác định trên L:*

$$f : L \to \mathbb{R}$$

Gọi $A_0, A_1, \cdots, A_n$ là các điểm chia cung L theo hướng $\mathbf{g}$ (điều đó có nghĩa là tồn tại một phép chia $F : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ đoạn $[a, b]$ và $A_i = \mathbf{g}(t_i)$ với $\forall i$). Gọi M_i là một điểm tuỳ ý thuộc cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ của L và kí hiệu Δs_i là độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

Nếu $\lim S_n = I$ *tồn tại và hữu hạn khi* $d(F) \to 0$, *khi đó* I *được gọi là tích phân đường (loại một) của hàm* f *trên* L *và kí hiệu*

$$I = \int_L f(x,y,z)\,ds \quad \Big(\textit{hoặc} \quad \int_L f(\mathbf{x})\,ds \quad \textit{hoặc} \quad \int_L f\,ds\Big).$$

Từ định nghĩa của tích phân đường loại một, suy ra khối lượng của một dây dẫn (tiết diện nhỏ đến mức có thể bỏ qua) có thể tính thông qua tích phân đường loại một $\int_L \varrho(\mathbf{x})\,ds$, trong đó $\varrho(\mathbf{x})$ là khối lượng riêng của dây tại điểm $\mathbf{x}$.

Định lí 4.1.1 *Giả sử hàm* f *liên tục trên* $\overline{L} = L \cup \{\mathbf{g}(a), \mathbf{g}(b)\}$, *khi đó tồn tại tích phân đường loại một* $\int_L f\,ds$ *và*

$$\boxed{\int_L f(\mathbf{x})\,ds = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)| dt}$$

trong đó $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in (a,b)$ *là biểu diễn tham số của* L *và kí hiệu* $|\mathbf{g}'(t)|$ *là độ dài véc tơ* $\mathbf{g}'(t)$.

Công thức trên cũng có thể viết chi tiết hơn dưới dạng các hàm thành phần $x(t), y(t), z(t)$ của biểu diễn tham số $\mathbf{g}(t)$

$$\boxed{\int_L f(\mathbf{x})\,ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt}$$

Chứng minh.

Chúng ta nhớ lại rằng độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ được tính theo công thức

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt =$$

$$= \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i) + z'^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i = |\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i$$

Suy ra

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)|\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{g}(\delta_i))|\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{g}(\xi_i))|\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} \{f(\mathbf{g}(\delta_i)) - f(\mathbf{g}(\xi_i))\} \cdot |\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i$$

trong đó số hạng thứ hai

$$|\sum_{i=1}^{n} \{f(\mathbf{g}(\delta_i)) - f(\mathbf{g}(\xi_i))\} \cdot |\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i < \varepsilon K(b-a)$$

nhỏ tuỳ ý do giả thiết $f, \mathbf{g}, \mathbf{g}'$ liên tục đều trên $[a, b]$, còn số hạng đầu

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{g}(\xi_i))|\mathbf{g}'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i \to \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)| dt.$$

Vậy tổng tích phân S_n tồn tại giới hạn hữu hạn khi $d(F) \to 0$, suy ra điều phải chứng minh

$$\int\limits_L f(\mathbf{x})\, ds = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)| dt. \quad \blacksquare$$

Nhận xét

1. Định nghĩa tích phân đường loại một như trên cũng giống như định nghĩa tích phân xác định, thay cho đoạn thẳng cần lấy tích phân trên đó là cung $\overline{L}$ và các độ dài đoạn thẳng là các độ dài cung Δs_i. Như vậy nó có mọi tính chất của tích phân xác định chúng ta đã quen thuộc.

2. Nếu L là cung trơn phẳng, $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t)), t \in (a, b)$ là biểu diễn tham số, khi đó

$$\int\limits_L f(x, y)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)| dt =$$

$$= \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Định lí 4.1.2 *Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn tham số.*

Chứng minh.
Giả sử $\mathbf{g} : (a, b) \to L$ và $\mathbf{h} : (\alpha, \beta) \to L$ là hai biểu diễn tham số của cung trơn L, khi đó $\int\limits_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{h}(t)) \cdot |\mathbf{h}'(t)| dt$.

Áp dụng công thức đổi biến $t = \varphi(\tau)$, trong đó $\varphi = \mathbf{h^{-1}} \circ \mathbf{g}$ là ánh xạ đã xét trong định lí 2.1.2 và đẳng thức $\mathbf{h}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \mathbf{g}'(t)$ trong định lí đó

$$\int\limits_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{h} \circ \varphi(\tau)) \cdot |\mathbf{h}'(\varphi(\tau))| \cdot |\varphi'(\tau)| d\tau = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)| dt.$$

Vậy giá trị của tích phân không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn tham số $\mathbf{h}(t)$ hoặc $\mathbf{g}(t)$ của cung trơn L. ■

Nhận xét

1. Qua chứng minh trên ta nhận thấy giá trị của $\int\limits_L f\,ds$ không phụ thuộc cả vào cách chọn hướng của cung L (biểu diễn $\mathbf{g}$ và $\mathbf{h}$ của cung L có thể ngược hướng nhau, giá trị của tích phân không thay đổi).

2. Khái niệm về tích phân đường nói trên có thể mở rộng cho tích phân trên *đường cong trơn từng khúc*: L được gọi là đường cong trơn từng khúc nếu L được phân hoạch thành các cung trơn, $L = \bigcup\limits_i L_i$, trong đó L_i là các cung trơn. Hàm $f : \overline{L} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục xác định trên $\overline{L}$, khi đó:

$$\int\limits_L f\,ds = \sum_i \int\limits_{L_i} f\,ds.$$

Ví dụ 4.1.1

1. Hãy tính tích phân $\int\limits_L y^2\,ds$, L là đoạn thẳng nối hai điểm $A(2, 0), B(0, 1)$.

Phương trình đường thẳng AB : $\quad y = 1 - \frac{x}{2}$.

$$\int_L y^2\,ds = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\,dx$$

$$\int_L y^2\,ds = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dt = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2. Hãy tính tích phân $\int_L y^2\,ds$, L là một nhịp của cung xiclôit

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \int_L y^2\,ds &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}dt \\ &= \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}}dt \\ &= 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2}dt = \frac{256}{15}a^3. \end{aligned}$$

3. Hãy tính diện tích phần mặt trụ $y = x^2$ trong góc phần tám thứ nhất, phần mặt trụ này nằm giữa 2 mặt phẳng xOy và mặt phẳng $z = x$ đồng thời cũng nằm giữa các mặt phẳng $y = 0, y = 1$.

   Từ định nghĩa của tích phân đường loại một, dễ dàng nhận thấy diện tích mặt trụ bằng $\int_L f\,ds$, trong đó L là cung parabol $y = x^2$ trong mặt phẳng xOy, với $0 \le x \le 1$, còn $f(x, y)$ là chiều cao của phần mặt trụ tại (x, y) thuộc cung parabol $y = x^2$. Chiều cao đó bằng $f(x, y) = x$. Vậy diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} \int_L x\,ds &= \int_0^1 x\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

4. Hãy tính tích phân $I = \int\limits_L xy\, ds$, trong đó L là cung elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất $x > 0, y > 0$.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^1 abu\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)u^2}\, du \\ &= \int_0^1 \frac{ab}{2(a^2 - b^2)}(b^2 + (a^2 - b^2)u^2)^{\frac{1}{2}}\, d(b^2 + (a^2 - b^2)u^2) = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}. \end{aligned}$$

5. Hãy tính tích phân $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

Biểu diễn tham số của đường tròn

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(1 + \cos t) \\ y = \frac{a}{2}\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\text{Vậy} \quad \int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 + \cos t)} \cdot \frac{a}{2} dt = 2a^2.$$

6. Hãy tính tích phân đường loại một $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, trong đó L là một cung đường đinh ốc với biểu diễn tham số

$$\mathbf{g}(t) = \big(\cos t, \sin t, 2t\big),\ \ t \in (0,\ 2\pi).$$

Ta thường viết phương trình đường đinh ốc dưới dạng

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}(1 + 4t^2) dt = 2\sqrt{5}\pi + \frac{32\sqrt{5}\pi^3}{3}.$$

7. Hãy tính tích phân $\int\limits_L x^2\,ds$, trong đó L là đường tròn

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Trước hết ta nhận xét rằng

$$\int\limits_L x^2\,ds = \int\limits_L y^2\,ds = \int\limits_L z^2\,ds.$$

Thật vậy nếu $\mathbf{g}(t)=(p(t),q(t),r(t)), t\in(0,2\pi)$ là biểu diễn tham số của đường tròn, khi đó $\mathbf{h}(t)=(q(t),p(t),r(t)), t\in(0,2\pi)$ cũng là biểu diễn tham số của đường tròn đó do vai trò đối xứng của x và y. Suy ra

$$\int_{L_\mathbf{g}} x^2\,ds = \int_0^{2\pi} p^2(t)\sqrt{p'^2(t)+q'^2(t)+r'^2(t)}\,dt = \int_{L_\mathbf{h}} y^2\,ds.$$

Mặt khác chu vi của đường tròn bằng $2a\pi$. Vậy

$$\int\limits_L x^2\,ds = \frac{1}{3}\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{1}{3}\int\limits_L a^2\,ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

(*Chú ý rằng ta có thể tính tích phân trên thông qua việc tìm một biểu diễn tham số của đường tròn L - Xem bài tập chương II.*)

4.2 Tích phân đường loại hai

Định nghĩa 4.2.1 *Cho cung trơn L với $\mathbf{g}(t), t\in(a,b)$ là biểu diễn tham số và hàm véc tơ $\mathbf{F}=(P,Q,R)$ liên tục, xác định trên $\overline{L}$:*

$$\mathbf{F}:\overline{L}\to\mathbb{R}^3.$$

Người ta còn viết $\mathbf{F}$ dưới dạng $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ hay

$$\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}.$$

Gọi $A_0, A_1, \cdots, A_n$ *là các điểm chia cung* L *theo hướng* $\mathbf{g}$ *(điều đó có nghĩa là tồn tại một phép chia* $F : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *đoạn* $[a, b]$ *và* $A_i = \mathbf{g}(t_i)$ *với* $\forall i$*). Gọi* M_i *là một điểm tuỳ ý thuộc cung* $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *của* L *và kí hiệu* $\Delta\mathbf{x_i}$ *là véc tơ* $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ $\big(\Delta\mathbf{x_i} = \mathbf{g}(t_i) - \mathbf{g}(t_{i-1})\big),\ i = 1, 2, ..., n$*. Lập tổng tích phân*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta\mathbf{x}_i$$

với các số hạng trong tổng là tích vô hướng của hai véc tơ $\mathbf{F}(M_i)$ *và* $\Delta\mathbf{x}_i$*.*

Nếu tồn tại giới hạn $\lim S_n = I$ *và giới hạn đó hữu hạn khi* $d(F) \to 0$*, khi đó* I *được gọi là tích phân đường (loại hai) của hàm* $\mathbf{F}$ *trên* $\overline{L}$ *và kí hiệu*

$$I = \int\limits_{L} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \textit{hay} \quad I = \int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Theo cách viết truyền thống, người ta còn kí hiệu tích phân đường loại hai là

$$\int_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Đặc biệt khi cung trơn L có tính chất $\mathbf{g}(a) = \mathbf{g}(b)$, tức là $\overline{L}$ là đường cong kín, tích phân đường loại hai trên L được viết

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \quad \text{hay} \quad \oint_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Nhận xét

1. Theo định nghĩa trên ta cần lưu ý tới các kí hiệu của tích phân đường loại hai để hiểu đúng bản chất của nó

$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx$ là tích phân của hàm véc tơ $\mathbf{F} = (P(x, y, z), 0, 0)$ trên $\overline{L}$.

$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx + R(x, y, z)\,dz$ là tích phân của hàm véc tơ

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), 0, R(x, y, z))$$

trên cung $\overline{L}$.

2. Khi $L \subset \mathbb{R}^2$ là cung trơn phẳng, hàm véc tơ $\mathbf{F} = (P, Q) : \overline{L} \to \mathbb{R}^2$ gồm hai thành phần, suy ra tích phân $\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ còn được kí hiệu

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Đặc biệt khi $L \subset \mathbb{R}$ là một khoảng (a, b) nào đó trên $\mathbb{R}$, hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tích phân đường loại hai hàm f trên L trở thành tích phân xác định (tích phân Riemann).

Ý nghĩa cơ học của tích phân đường loại hai

Giả sử cung trơn L là quỹ đạo chuyển động của một chất điểm dưới tác dụng của một lực $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (lực $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ phụ thuộc vào vị trí của $\mathbf{x}$ trên quỹ đạo L). Để tính công sinh ra khi chất điểm chuyển động từ điểm đầu đến điểm cuối dọc theo quỹ đạo, ta chia cung L bởi các điểm chia A_i như trong định nghĩa trên. Phép chia cung L mịn đến mức ta có thể coi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ như đoạn thẳng, lực tác dụng vào chất điểm trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ không đổi và bằng $\mathbf{F}(M_i)$. Khi đó công sản ra trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ với tích vô hướng

$$\mathbf{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta\mathbf{x}_i.$$

Vậy tổng tích phân $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta\mathbf{x}_i$ xấp xỉ với công sinh ra trên cung L. Như vậy giá trị của tích phân đường loại hai, tức là giới hạn của dãy tổng tích phân S_n khi đường kính của phép chia cung L tiến tới 0

$$\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim S_n$$

chính là *công sản sinh khi chất điểm chuyển động dọc theo quỹ đạo L dưới tác dụng của lực* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Tính chất của tích phân đường loại hai

Các tính chất sau đây của tích phân đường loại hai được chứng minh như tích phân xác định:

1. Tích phân của tổng các hàm bằng tổng các tích phân

$$\int_L (\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_L \mathbf{G}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

2. $\displaystyle\int_L \alpha\mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \alpha\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}.$

3. Khái niệm về tích phân đường loại hai có thể mở rộng trên các đường cong trơn từng khúc: Giả sử $L = \bigcup_i L_i$, trong đó L_i là các cung trơn, chúng được "gắn" liên tiếp điểm cuối của cung trước trùng với điểm đầu của cung sau để ta có thể định hướng một cách hợp lí đường cong L. Cho $\mathbf{F} : \overline{L} \to \mathbb{R}^3$ là hàm véc tơ liên tục xác định trên $\overline{L}$. Khi đó tích phân hàm $\mathbf{F}$ trên L bằng tổng các tích phân trên L_i. Chẳng hạn nếu $L = L_1 \cup L_2$, khi đó

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{L_1} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{L_2} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

4. Do các tính chất đã nêu trên, ta có thể viết biểu thức tích phân đường trong định nghĩa dưới dạng tổng của các tích phân:

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_L P(x,y,z)\,dx + \int_L Q(x,y,z)\,dy + \int_L R(x,y,z)\,dz.$$

Định lí sau đưa ra phương pháp tính tích phân đường loại hai của hàm véc tơ liên tục trên cung trơn L

Định lí 4.2.1 *Tích phân đường loại hai của hàm liên tục*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$$

trên cung $\overline{L}$ *với* $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (a,b)$ *là biểu diễn tham số, luôn tồn tại và bằng*

$$\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b \Big(P(\mathbf{g}(t))\cdot x'(t) + Q(\mathbf{g}(t))\cdot y'(t) + R(\mathbf{g}(t))\cdot z'(t)\Big)dt$$

hoặc viết dưới dạng véc tơ $\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t))\cdot \mathbf{g}'(t)\,dt,$ *trong đó biểu thức dưới dấu tích phân là tích vô hướng của* $\mathbf{F}(\mathbf{g}(t)$ *và* $\mathbf{g}'(t)$*.*

Chứng minh.
Từ định nghĩa tích phân đường loại hai, tổng tích phân của hàm $\mathbf{F}$ trên L bằng

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i)\cdot \Delta\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \Big(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n P(M_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n Q(M_i)\Delta y_i + \sum_{i=1}^n R(M_i)\Delta z_i. \end{aligned}$$

Theo định lí Lagrange $\Delta x_i = x'(\tau_i)\Delta t_i$ với τ_i nào đó trong khoảng (t_{i-1}, t_i). Xét $\sum_{i=1}^n P(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(\mathbf{g}(\xi_i))x'(\tau_i)\Delta t_i$ và chứng minh tương tự như trong định lí tồn tại tích phân đường loại một ta được

$$\sum_{i=1}^n P(\mathbf{g}(\xi_i))x'(\tau_i)\Delta t_i \to \int_a^b P(\mathbf{g}(t))\cdot x'(t)\,dt.$$

Lập luận tương tự với các số hạng còn lại trong tổng tích phân, ta nhận được điều phải chứng minh:

$$S_n \to \int_a^b P(\mathbf{g}(t))\cdot x'(t)\,dt + \int_a^b Q(\mathbf{g}(t))\cdot y'(t)\,dt + \int_a^b R(\mathbf{g}(t))\cdot z'(t)\,dt. \ \blacksquare$$

Nhận xét

1. Nếu L là cung trơn phẳng, $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ là biểu diễn tham số của L, khi đó tích phân hàm $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ trên L bằng

$$\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b \Big(P(\mathbf{g}(t)) \cdot x'(t) + Q(\mathbf{g}(t)) \cdot y'(t)\Big)\, dt$$

2. Giá trị của $\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ không phụ thuộc vào cách chọn các tham số cùng hướng của L. Cụ thể là nếu hai hàm $\mathbf{h}(t) = (p(t), q(t), r(t)), t \in (\alpha, \beta)$ và $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (a, b)$ là các biểu diễn tham số khác nhau nhưng cùng hướng của L, khi đó theo định lí 2.1.2, $\mathbf{h} \circ \varphi = \mathbf{g}$, $\varphi'(t) > 0$ và $(\mathbf{h}' \circ \varphi) \cdot \varphi' = \mathbf{g}'$ hay

$$p'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = x'(t), q'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = y'(t), r'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = z'(t).$$

Vậy

$$\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\alpha^\beta \Big(P(\mathbf{h}(t)) \cdot p'(t) + Q(\mathbf{h}(t)) \cdot q'(t) + R(\mathbf{h}(t)) \cdot r'(t)\Big)\, dt.$$

Áp dụng công thức đổi biến $t = \varphi(\tau)$

$$\begin{aligned}\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_a^b \Big(P(\mathbf{h} \circ \varphi(\tau)) \cdot p'(\varphi(\tau)) \cdot |\varphi(\tau)| \\ &\quad + Q(\mathbf{h} \circ \varphi(\tau)) \cdot q'(\varphi(\tau)) \cdot |\varphi(\tau)| \\ &\quad + R(\mathbf{h} \circ \varphi(\tau)) \cdot r'(\varphi(\tau)) \cdot |\varphi(\tau)|\Big)\, d\tau \\ &= \int_a^b \Big(P(\mathbf{g}(t)) \cdot x'(t) + Q(\mathbf{g}(t)) \cdot y'(t) + R(\mathbf{g}(t)) \cdot z'(t)\Big) dt.\end{aligned}$$

3. Khác với tích phân đường loại một, nếu $\mathbf{h}(t) = (p(t), q(t), r(t)), t \in (\alpha\beta)$ và $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (a, b)$ là các biểu diễn tham số khác hướng của L, khi đó $\varphi'(t) < 0$ và cũng chứng minh như trên (hoặc sử dụng định

nghĩa) ta được giá trị của các tích phân theo hướng $\mathbf{h}$ (kí hiệu $\int_{L_h} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$) và tích phân theo hướng $\mathbf{g}$ (kí hiệu $\int_{L_g} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$) đối nhau:

$$\int_{L_h} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\int_{L_g} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Thật vậy, áp dụng công thức đổi biến $t = \varphi(\tau)$

$$\begin{aligned}\int_{L_h} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{h}(t))\mathbf{h}'(t)dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{h}(\varphi(\tau)))\mathbf{h}'(\varphi(\tau))|\varphi'(\tau)|d\tau \\ &= -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t))\mathbf{g}'(t)dt = -\int_{L_g} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (\text{do } \varphi'(t) < 0).\end{aligned}$$

4. *Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.* Ta dẫn vào kí hiệu $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ là véc tơ đơn vị của véc tơ tiếp tuyến với đường cong L tại $\mathbf{x} \in L$. Nói cách khác $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{v}^0(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)| = \mathbf{v}^0(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)|$ và

$$\begin{aligned}\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{v}^0(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{v}^0(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)|\, dt = \int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^0(\mathbf{x})\, ds.\end{aligned}$$

Đây chính là mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai của $\mathbf{F}$ và tích phân đường loại một của hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ trên L.

Ví dụ 4.2.1

1. Tính tích phân $\int\limits_L 2xy\, dx + x^2\, dy$, L là cung parabol nối $O(0,0)$ với $A(1,1)$.

   Biểu diễn tham số của cung L : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in (0,1)$. Vậy

   $$\int\limits_L 2xy\, dx + x^2\, dy = \int_0^1 (2t \cdot t^2 + t^2 \cdot 2t)dt = 1.$$

Cũng tích phân đó $\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy$ trên đoạn thẳng nối $O(0,0)$ với $A(1,1)$

$$\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 (2x^2 + x^2)dx = 1.$$

2. Tính tích phân $\int\limits_L (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy - y^2)\,dy$, L là cung $x = y^3$ đi từ $A(0,0)$ đến $B(1,1)$.

   Cung L có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = y^3 \\ y = y \end{cases}$ $y \in (0,1)$. Vậy

$$\int\limits_L (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy - y^2)\,dy = \int_0^1 (-y^2 + 2y^4 - 6y^6 + 3y^8)dy = -\frac{16}{35}.$$

3. Hãy tính tích phân $\int\limits_L y^2\,dx + x^2\,dy$, L là nửa trên của elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ theo hướng cùng chiều kim đồng hồ.

   Biểu diễn tham số của cung L : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in (0,\pi)$. Do cung L được định hướng cùng chiều quay của kim đồng hồ, tức là cung L được định hướng ngược với chiều tăng của tham số t trong biểu diễn tham số nói trên. Vậy

$$\begin{aligned} \int\limits_L y^2\,dx + x^2\,dy &= \int\limits_{\pi}^{0} \big(b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t(b\cos t)\big)dt \\ &= \int\limits_{0}^{\pi} \big(ab^2\sin^3 t - a^2 b\cos^3 t\big)dt = \frac{4ab^2}{3}. \end{aligned}$$

4. Hãy tính tích phân $\int\limits_L y\sqrt{R^2 - y^2}\,dx$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

$$\int\limits_L y\sqrt{R^2-y^2}\,dx = \int_0^{2\pi} R\sin t\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}(-R\sin t)dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} R^3\sin^2 t|\cos t|dt = -\frac{4}{3}R^3.$$

5. Tính tích phân $\oint_L (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, L là elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

$$I = \int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t - \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)dt = 0.$$

6. Hãy tính tích phân $\int\limits_L y\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, L là đường tròn $x^2+y^2=R^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

$$\int\limits_L y\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \int_0^{2\pi} R\sin t\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}(-R\sin t)dt = -\frac{8}{3}R^3.$$

7. Tính tích phân $I = \int\limits_L y(x+y)\,dx - x(x-y)\,dy$, L là cung ngắn trên elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nối điểm $A(-a,0)$ với $B(0,b)$.
Biểu diễn tham số của cung elip $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Do cung L được định hướng từ $A(-a,0)$ đến $B(0,b)$, ngược với chiều tăng của tham số t trong biểu diễn tham số nói trên, vậy tích phân I bằng

$$I = \int\limits_L y(x+y)\,dx - x(x-y)\,dy$$
$$= \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\Big(b\sin t(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t - b\sin t)b\cos t\Big)dt$$
$$= \frac{ab^2}{3} - a^2 b.$$

8. Tính tích phân $I = \int\limits_L \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, L là đường tròn $x^2+y^2=1$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

   Biểu diễn tham số của elip $x=\cos t, y=\sin t$ với t tăng từ 0 đến 2π

$$I = \int_0^{2\pi} \{(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t\}dt = -2\pi.$$

9. Tính tích phân $I = \int\limits_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó L là biên hình vuông theo hướng nối bốn đỉnh (theo thứ tự) $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$.

$$I = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0-2+0+2=0$$

10. Hãy tính tích phân $I = \int\limits_L ydx+zdy+xdz$, trong đó L là đường đinh ốc

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi \quad \text{theo chiều tăng của } t. \\ z = bt \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t)dt = -\pi a^2.$$

4.3 Định lí Green. Tích phân không phụ thuộc đường đi

Trước hết ta phát biểu và chứng minh định lí sau

Định lí 4.3.1 (Green) *$D \subset \mathbb{R}^2$ là tập liên thông, đo được dạng Jordan, có biên (kí hiệu L) là đường cong kín, trơn từng khúc được định hướng như sau: hướng của L được gọi là hướng dương nếu ta đi dọc theo hướng đó trên đường cong, miền D luôn nằm về phía bên trái. Hướng ngược với hướng dương được gọi là hướng âm. Giả sử hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ khả vi liên tục trong miền D và liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó*

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$$

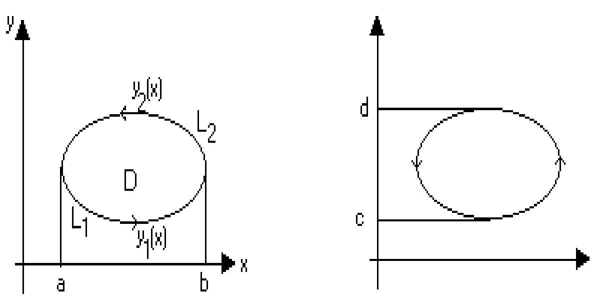
Vế trái là tích phân kép trên miền D, vế phải là tích phân đường loại hai trên đường cong kín L, hướng của L là hướng dương.

Chứng minh.
1. Trước hết ta chứng minh định lí trong trường hợp miền D là miền khá đơn giản có thể biểu diễn dưới dạng:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}.$$

(Miền D giới hạn bởi 2 cung đồ thị, $y = y_1(x)$ và $y = y_2(x), x \in (a, b)$, ta kí hiệu 2 cung đó là L_1 và L_2. Xem hình vẽ bên dưới). Đồng thời D cũng có thể biểu diễn dưới dạng:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}.$$



Hình 4.1: Hai cách biểu diễn miền D

Với cách biểu diễn thứ nhất của miền D, sử dụng định lí Fubini:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b \{P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\} dx \\ &= -\int_{L_1} P(x, y)dx - \int_{L_2} P(x, y)dx = -\oint_L P(x, y)dx.\end{aligned}$$

Tương tự, sử dụng cách biểu diễn thứ hai của miền D

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d \{Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)\} dy =$$

$$= \int_{C_1} P(x, y)dx + \int_{C_2} P(x, y)dx = \oint_L Q(x, y)dx.$$

Trừ hai đẳng thức, ta được

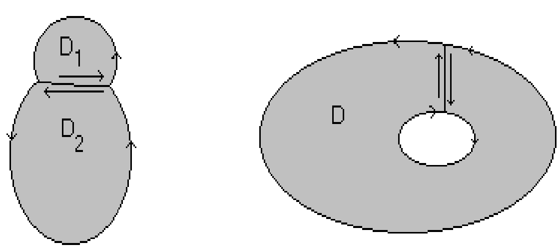
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

2. Trường hợp tổng quát chia miền D thành hữu hạn các miền nhỏ được biểu diễn trong bước 1. Khi đó định lí được chứng minh dựa vào minh hoạ hình học và nhận xét sau

Trong hình vẽ minh họa dưới đây, miền phẳng D được chia thành 2 miền nhỏ

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Tổng các tích phân đường hàm véc tơ (P, Q) trên biên của các miền nhỏ đó bằng tích phân kép của hàm $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ trên miền D. Mặt khác trên cung tiếp giáp giữa 2 miền D_1 và D_2, tích phân đường đi theo các hướng ngược chiều nhau, tổng các tích phân đường trên cung đó bằng 0.



Hình 4.2: Chia miền D thành các miền nhỏ

Bằng cách đó ta đã chứng minh xong định lí trong trường hợp tổng quát. ■

Hệ quả Với các kí hiệu quen thuộc, D là miền giới hạn bởi đường cong kín L, $S(D)$ là diện tích miền D. Áp dụng định lí Green cho các hàm khác nhau

$$\oint_L x\,dy = \iint_D \frac{\partial x}{\partial x}\,dxdy = \iint_D dxdy = S(D)$$

$$\oint_L -y\,dx = \iint_D -\frac{\partial(-y)}{\partial y}\,dxdy = \iint_D dxdy = S(D)$$

$$\oint_L x\,dy - y\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy = 2S(D)$$

Suy ra diện tích miền D có thể tính bởi một trong các công thức

$$\boxed{S(D) = \oint_L x\,dy = \oint_L -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx.}$$

Ví dụ 4.3.1

1. Tính tích phân $\oint_L (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, L là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1-1)dxdy = 0$$

2. Tính tích phân $\oint_L (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, L là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D -2dxdy = -2ab\pi$$

3. Tính tích phân $I = \oint_L (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$, L là đường tròn $x^2+y^2+2ax = 0, a > 0$ theo hướng dương. Sử dụng công thức Green $I = \iint_D (y-x)dxdy$, sau đó chuyển sang hệ toạ độ cực

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dt \int_0^{-2a\cos t} r^2(\sin t - \cos t)dr = \pi a^3.$$

4. Tính tích phân $I = \oint_L \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, L là đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

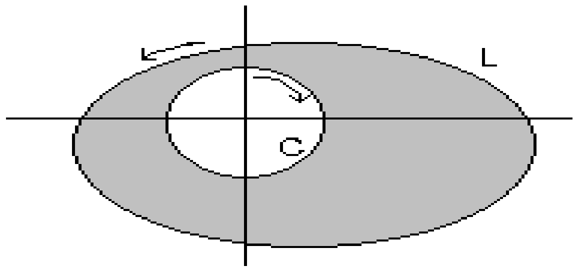
   Gọi D là miền giới hạn bởi đường tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Do $O(0,0) \notin D$, các hàm dưới dấu tích phân khả vi liên tục trên D và tại mọi điểm thuộc miền D
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
   suy ra
$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

5. Tính tích phân $I = \oint\limits_C \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, L là đường tròn $x^2+y^2 = R^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

   Trong ví dụ này, ta không được sử dụng công thức Green vì các hàm P, Q không liên tục tại $O(0,0)$. Đổi biến $x = R\cos t, y = R\sin t$
$$I = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

6. Tính tích phân $I = \oint\limits_{C_1} \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, trong đó C_1 là elip có phương trình
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$
   Biểu diễn tham số của elip $x = 2\cos t, y = \sin t$ với $0 \le t \le 2\pi$. Vậy
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2\,dt}{4\cos^2 t + \sin^2 t} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d(\text{tg}\,t)}{4+\text{tg}^2 t} = 2\pi.$$

   Nhận xét rằng nếu L là đường cong kín bất kì bao quanh gốc tọa độ, C là đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính R như đã xét trong ví dụ trước,



Hình 4.3: Ví dụ 4.3.1.6

khi đó miền D giới hạn bởi C và L (xem hình 4.3) thỏa mãn điều kiện của định lí Green

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Suy ra tích phân trên biên của miền D bằng 0 (tích phân trên C theo chiều kim đồng hồ và tích phân trên L theo chiều dương, ngược chiều kim đồng hồ). Nói cách khác

$$\oint\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} - \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Trong ví dụ trước ta đã biết tích phân trên đường tròn C bằng 2π

$$\oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

Vậy tích phân trên đường cong kín bất kì bao quanh gốc tọa độ cũng bằng 2π

$$\oint\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

Tích phân trên elip C_1 là trường hợp riêng của nhận xét này.

7. Tính tích phân $I = \oint_L x\,dy - y\,dx$, L là đường cong kín tạo bởi một nhịp đường xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, (a > 0)$ và $y = 0$ theo chiều dương.

Hướng dẫn: Tích phân trên đoạn trục hoành bằng 0, trên cung xiclôit theo chiều t giảm

$$I = \int_{2\pi}^{0} [a^2(t - \sin t)\sin t - a^2(1 - \cos t)^2]dt = 6\pi a^2.$$

Nếu sử dụng công thức Green $I = 2\iint dxdy$, bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung xiclôit và trục hoành. Diện tích đó bằng

$$S = 2\int_0^{\pi} y\,dx = 2\int_0^{\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

8. Tính tích phân $I = \int\limits_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, L là nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ theo hướng từ $A(a, 0)$ đến $O(0, 0)$.

   Do tích phân trên đoạn thẳng OA bằng 0 nên chuyển qua công thức Green:
$$I = \iint m dxdy = \frac{m\pi a^2}{8}.$$

9. Tính tích phân $I = \oint_L e^x[(1 - \cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy]$, L là đường cong kín giới hạn bởi miền $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \cos x \end{cases}$ theo chiều dương.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D -e^x y dxdy$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} -e^x y dy = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{5}.$$

10. Hãy tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$$

   Áp dụng công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (3a^2\cos^3 t \sin^2 t \cos t + 3a^2 \sin^3 t \cos^2 t \sin t)dt$$

Suy ra diện tích miền phẳng $S = \dfrac{3a^2}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt = \dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Lưu ý rằng cũng có thể tính diện tích miền phẳng trên bởi công thức

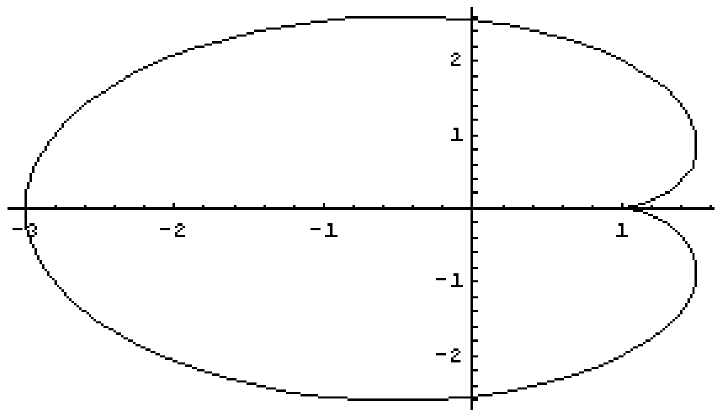
$$S = \oint_L x\,dy = \int_0^{2\pi} 3a^2\sin^2 t\cos^4 t\,dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

11. Hãy tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong Cadiôit

$$x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t$$

Áp dụng công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(6 - 6\cos t)dt = 6\pi.$$

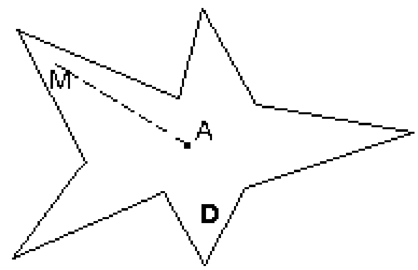


Hình 4.4: Cadiôit

Định nghĩa 4.3.1 *Tập mở $D \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là miền hình sao, nếu tồn tại một điểm $A(x_0, y_0, z_0) \in D$ sao cho với bất kì $M(x, y, z) \in D$, đoạn thẳng AM cũng là tập con của D (hay $AM \subset D$). Lưu ý rằng đoạn thẳng AM gồm các điểm $A + t\overrightarrow{AM}, 0 \leq t \leq 1$ có toạ độ bằng*

$$(x_0, y_0, z_0)+t(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = ((1-t)x_0+tx, (1-t)y_0+ty, (1-t)z_0+tz))$$

với mọi $0 \leq t \leq 1$.



Hình 4.5: Miền hình sao

Định lí 4.3.2 *Giả sử D là miền hình sao trong $\mathbb{R}^3$, hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ khả vi liên tục và ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x,y,z)$ là ma trận đối xứng tại mọi điểm thuộc miền D. Nói cách khác*

$$\frac{\partial Q(M)}{\partial x} = \frac{\partial P(M)}{\partial y}, \frac{\partial P(M)}{\partial z} = \frac{\partial R(M)}{\partial x}, \frac{\partial R(M)}{\partial y} = \frac{\partial Q(M)}{\partial z}$$

với mọi $M \in D$. Khi đó tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên một cung trơn bất kì trong miền D chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút của cung đó.

Chứng minh.
Để thuận tiện về mặt kí hiệu, giả sử D là miền hình sao đối với gốc toạ độ $O(0,0,0)$ hay đoạn thẳng $OM \subset D$ với mọi $M(x,y,z) \in D$. Trước hết ta dẫn vào hàm

$$u(M) = \int\limits_{OM} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_0^1 \Big(xP(tx,ty,tz) + yQ(tx,ty,tz) + zR(tx,ty,tz)\Big)dt$$

là tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P, Q, R)$ trên đoạn OM. Ta sẽ chứng minh vi phân toàn phần của hàm $u(x,y,z)$

$$du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \quad \text{tại mọi điểm } (x,y,z) \in D.$$

Nói cách khác đạo hàm ánh xạ: $u'(M) = (P(M), Q(M), R(M)) = \mathbf{F}(M)$ hay còn nói $u(\mathbf{x})$ *là nguyên hàm* của $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Thật vậy, sử dụng tính đối xứng của ma trận $\mathbf{F}'(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^1 \Big(P(tx,ty,tz) + xtP'_x(tx,ty,tz) + ytQ'_x(tx,ty,tz) + ztR'_x(tx,ty,tz)\Big)dt$$

$$= \int_0^1 \Big(P(tx, ty, tz) + xtP'_x(tx, ty, tz) + ytP'_y(tx, ty, tz) + ztP'_z(tx, ty, tz)\Big)dt$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial(tP(tx, ty, tz))}{\partial t}dt = \Big(tP(tx, ty, tz)\Big)\Big|_{t=0}^{t=1} = P(x, y, z).$$

Tương tự

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) \quad \text{hay } du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên một cung trơn bất kì L trong miền hình sao D chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ của cung đó, đồng thời

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}).$$

Giả sử $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (\alpha\beta)$ là biểu diễn tham số của L theo hướng từ $\mathbf{a}$ đến $\mathbf{b}$. Khi đó

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)dt = \int_\alpha^\beta u'(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)dt = \int_\alpha^\beta (u \circ \mathbf{g})'(t)\, dt =$$

$$= [u \circ \mathbf{g}(t)]\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = u(\mathbf{g}(\beta)) - u(\mathbf{g}(\alpha)) = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}). \quad \text{đ.p.c.m.} \quad \blacksquare$$

Hệ quả 4.3.1

1. Với các điều kiện của định lí trên, tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên một đường cong kín bất kì trong miền hình sao D luôn bằng 0

$$\oint_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0.$$

2. Nếu D là miền hình sao trong $\mathbb{R}^2$, hàm véc tơ $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ khả vi liên tục và ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x, y)$ là ma trận đối xứng

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

với mọi $M(x,y) \in D$. Khi đó tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên một cung trơn bất kì trong miền D chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút của cung đó. Đặc biệt tích phân hàm $\mathbf{F}(x,y)$ trên một đường cong kín bất kì trong miền D luôn bằng 0

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Nhận xét

1. Giả sử D là miền hình sao đối với $A(x_0, y_0, z_0)$, điểm $M(x,y,z) \in D$ bất kì có thể nối với A bởi một đường gấp khúc nằm trong D gồm các đoạn thẳng song song với các trục toạ độ. Khi đó nguyên hàm $u(x,y,z)$ của $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trong định lí cũng có thể xác định bằng cách lấy tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ theo đường gấp khúc kể trên, suy ra

$$\boxed{u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz.}$$

Đặc biệt khi $D \subset \mathbb{R}^2$, người ta thường dùng các công thức sau để tính nguyên hàm của $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$\boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.}$$

hoặc

$$\boxed{u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx.}$$

2. Hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ thỏa mãn điều kiện của định lí và nếu $u(x,y,z)$ là nguyên hàm bất kì của $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trong miền hình sao D, nói cách khác $u'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in D$ hay $du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \quad \forall (x,y,z) \in D$.
Khi đó tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên cung $L \subset D$ nối hai điểm $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ được xác định như công thức Newton-Leibnitz trong tích phân hàm một biến

$$\boxed{\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}).}$$

3. Định lí 4.3.2 cũng như hệ quả 4.3.1 được gọi là định lí *tích phân không phụ thuộc đường đi*. Nó sẽ không đúng nếu đường lấy tích phân không cùng nằm trong một *miền hình sao* thỏa mãn các điều kiện của định lí. Ta sẽ minh họa nhận xét này bằng ví dụ đầu tiên trong ví dụ sau

Ví dụ 4.3.2

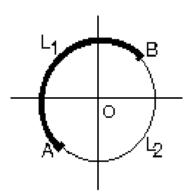
1. Tính tích phân $I = \int\limits_L \dfrac{(x+y)\,dy + (x-y)\,dx}{x^2+y^2}$, L là đường cong bất kì không đi qua gốc toạ độ, nối $A(-1,-1)$ với $B(1,1)$.

   Điều kiện $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ của định lí 4.3.2 được thỏa mãn với mọi $M(x,y) \in D = R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tuy nhiên D không là miền hình sao và trong ví dụ này khẳng định tích phân không phụ thuộc đường đi không đúng.
   Chẳng hạn hai điểm $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ chia đường tròn $x^2+y^2=2$ thành 2 cung L_1 và L_2 (L_1 là cung trên và L_2 là cung dưới, xem hình vẽ).

   Ta tính tích phân I trên 2 cung L_1 và L_2 theo hướng từ A đến B. Phương trình tham số của đường tròn $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$, ta có

$$I_1 = \int_{L_1} \frac{(x+y)\,dy + (x-y)\,dx}{x^2+y^2} = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = -\pi.$$

$$I_2 = \int_{L_2} \frac{(x+y)\,dy + (x-y)\,dx}{x^2+y^2} = \int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \pi.$$



Hình 4.6: Ví dụ 4.3.2.1

   Tích phân trên 2 cung L_1 và L_2 nối 2 điểm A, B cho các kết quả khác nhau. Tuy nhiên nếu chỉ xét các đường cong trên miền D^* (nhận được từ D bằng cách bỏ tia Ox khỏi D), khi đó D^* là miền hình sao và tích phân chỉ phụ thuộc các đầu mút của các đường cong đó.

2. Hãy tính tích phân $\int_L e^x \sin y\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$, L là cung ngắn nhất của đường tròn tâm $O(0,0)$ nối điểm $A(a,0)$ với điểm $B(0,a)$.

   Với $P(x,y) = e^x \sin y$ và $Q(x,y) = (e^x \cos y - 1)$, dễ dàng kiểm tra
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$$
   với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, suy ra nguyên hàm của hàm véc tơ $\big(P(x,y),\ Q(x,y)\big)$ được tính theo công thức dưới đây (chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$)
$$\begin{aligned} u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy &= \int_0^x 0\cdot dx + \int_0^y (e^x \cos y - 1)\,dy \\ &= e^x \sin y - y. \end{aligned}$$
   Vậy giá trị tích phân cần tính bằng
$$\int_L e^x \sin y\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy = u(0,a) - u(a,0) = \sin a - a.$$
   Chú ý rằng cũng có thể chọn $A(a,0)$ là điểm khởi đầu ($x_0 = a, y_0 = 0$) để tính tích phân ban đầu.

3. Hãy tính tích phân $\int_L [2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)]\,dx - x^2\sin(x+y)\,dy$, L là cung bất kì nối điểm $A(\pi,0)$ với điểm $B(0,\pi)$.

   Dễ dàng kiểm tra $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Thật vậy
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\big(-x^2\sin(x+y)\big)}{\partial x} = -2x\sin(x+y) - x^2\cos(x+y)$$
   và cũng cho kết quả như vậy
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial[2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)]}{\partial y} = -2x\sin(x+y) - x^2\cos(x+y)$$

Suy ra nguyên hàm bằng

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \\ &= \int_0^x (2x\cos x - x^2\sin x)dx - \int_0^y x^2\sin(x+y)\,dy \qquad (4.1) \\ &= x^2\cos(x+y). \end{aligned}$$

Vậy tích phân cần tìm bằng

$$\int_L [2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)]\,dx - x^2\sin(x+y)\,dy = u(0,\pi) - u(\pi,0) = \pi^2.$$

4. Xác định $u(x,y)$, biết

$$du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$$

Với $P(x,y) = \dfrac{x+2y}{(x+y)^2}$ và $Q(x,y) = \dfrac{y}{(x+y)^2}$, dễ dàng kiểm tra

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$

với mọi (x,y) thuộc nửa mặt phẳng $x+y>0$ hoặc $x+y<0$. Chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$ và áp dụng công thức tính nguyên hàm

$$u(x,y) = \int_1^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C.$$

5. Tính tích phân $\displaystyle\oint_C xdx + ydy - zdz$ trên đường tròn C

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\cos t \\ y = R\cos\alpha\sin t \\ z = R\sin\alpha \end{cases} \qquad (\alpha \text{ là hằng số}).$$

Hàm dưới dấu tích phân $\mathbf{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (x,y,-z)$ khả vi liên tục và ma trận của ánh xạ đạo hàm $\mathbf{F}'(x,y,z)$ là ma trận đối xứng tại mọi điểm

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Suy ra tích phân đã cho $\oint\limits_C xdx + ydy - zdz = 0$.

Tính tích phân $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx+ydy-zdz$ theo một đường cong trơn bất kì nối $A(1,0,-3)$ với $B(6,4,8)$. Nguyên hàm của $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,-z)$ là

$$u(x,y,z) = \int_0^x xdx + \int_0^y ydy - \int_0^z zdz = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}.$$

Suy ra

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy - zdz = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_A^B = -2.$$

4.4 Tích phân mặt loại một

Định nghĩa 4.4.1 *Cho mặt cong trơn S với $\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D$ là biểu diễn tham số và hàm $f(x, y, z)$ xác định trên S:*

$$f : S \to \mathbb{R}.$$

Giả sử $S_1, S_2, ..., S_n$ là các mảnh mặt cong nhỏ đôi một không có điểm chung trong và $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$. Gọi M_i là một điểm tùy ý thuộc S_i và kí hiệu ΔS_i là diện tích của $S_i, i = 1, 2, ..., n$. Lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

Nếu $\lim S_n = I$ tồn tại và hữu hạn khi $\max d(S_i) \to 0$ (giới hạn không phụ thuộc vào cách chọn $M_i \in S_i$), khi đó I được gọi là tích phân mặt loại một của hàm f trên S và kí hiệu

$$I = \iint_S f(\mathbf{x})dS \quad hay \quad I = \iint_S f\, dS.$$

Ý nghĩa cơ học

1. Từ định nghĩa tích phân mặt loại một, người ta suy ra khối lượng của một mặt cong bất kì có thể tính theo công thức:

$$\boxed{m = \iint_S \varrho(\mathbf{x})dS}$$

trong đó $\varrho(\mathbf{x}) = \varrho(x, y, z)$ là khối lượng riêng của mặt cong tại $\mathbf{x} \in S$.

Khẳng định đó dựa trên cơ sở tổng tích phân của hàm khối lượng riêng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varrho(M_i)\Delta S_i$$

xấp xỉ với khối lượng của cả mặt cong khi $\max d(S_i)$ đủ nhỏ. Do vậy khi chuyển qua giới hạn, khối lượng của mặt cong sẽ bằng tích phân hàm khối lượng riêng trên cả mặt cong đó.

2. Ta biết rằng tọa độ trọng tâm của một hệ thống gồm n điểm $M_1, M_2, ..., M_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1, m_2, ..., m_n$ đặt tại các điểm đó chính là tọa độ của véc tơ

$$\frac{m_1\mathbf{a_1} + m_2\mathbf{a_2} + \cdots + m_n\mathbf{a_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

trong đó $\mathbf{a_i}$ là véc tơ nối gốc tọa độ O với điểm M_i. Nói cách khác tọa độ trọng tâm của hệ thống trên bằng

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n y_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad z = \frac{\sum_{i=1}^n z_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

$\big((x_{M_i}, y_{M_i}, z_{M_i})$ là tọa độ của điểm $M_i\big)$

Tổng quát hơn để tính trọng tâm của mặt cong S với $\varrho(\mathbf{x})$ là hàm khối lượng riêng xác định trên đó, ta chia S thành các mảnh mặt cong nhỏ $S_1, S_2, ..., S_n$ đôi một không có điểm chung trong. Chọn các điểm M_i tùy ý thuộc S_i và gán cho mỗi điểm M_i một khối lượng m_i bằng tích giữa khối lượng riêng tại đó với diện tích mảnh mặt cong S_i

$$m_i = \varrho(M_i)\Delta S_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó trọng tâm của hệ thống $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ sẽ xấp xỉ với trọng tâm của mặt cong, khi đường kính các mảnh mặt cong $S_1, S_2, ..., S_n$ đủ nhỏ. Theo cách tính trên toạ độ trọng tâm của hệ thống, chẳng hạn hoành độ bằng

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_{M_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{M_i}\varrho(M_i)\Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \varrho(M_i)\Delta S_i}.$$

Khi chuyển qua giới hạn ta biết rằng mẫu thức dần tới khối lượng của mặt cong, tử thức tiến tới $\iint\limits_S x\varrho(\mathbf{x})dS$. Vậy ta có công thức tính toạ độ trọng tâm của mặt cong như sau:

$$\boxed{x_S = \frac{\iint\limits_S x\varrho(\mathbf{x})dS}{\iint\limits_S \varrho(\mathbf{x})dS}, \quad y_S = \frac{\iint\limits_S y\varrho(\mathbf{x})dS}{\iint\limits_S \varrho(\mathbf{x})dS}, \quad z_S = \frac{\iint\limits_S z\varrho(\mathbf{x})dS}{\iint\limits_S \varrho(\mathbf{x})dS}.}$$

Cũng như tích phân đường, ta dễ dàng chứng minh rằng nếu f liên tục trên $\overline{S}$, khi đó tồn tại tích phân mặt loại một $\iint\limits_S f(\mathbf{x})\, dS$. Ta có định lí:

Định lí 4.4.1 *Gọi S là mặt cong trơn với $\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D$ là biểu diễn tham số, hàm f xác định liên tục trên $\overline{S}$:*

$$f : \overline{S} \to \mathbb{R}.$$

Khi đó tồn tại tích phân mặt loại một trên S và

$$\boxed{\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}}$$

$\mathbf{n}(\mathbf{u})$ là véc tơ pháp tuyến của mặt S tại điểm $\mathbf{g}(\mathbf{u}) \in S$. Trong chương II ta đã biết véc tơ đó bằng $\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(\mathbf{u}) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(\mathbf{u})$.

Trường hợp riêng khi mặt cong trơn S được cho bởi phương trình $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, khi đó

$$\boxed{\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + {g'}_x^2 + {g'}_y^2}\, dxdy.}$$

Chứng minh.
Gọi D_i là các miền nhỏ của D tương ứng với S_i trong phép chia mặt cong S:

$$D = \cup_{i=1}^n D_i \quad \Delta S_i = \iint\limits_{D_i} |\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}.$$

Thay vào tổng tích phân

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \iint\limits_{D_i} |\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \iint\limits_{D_i} f(M_i)|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\
&= \sum_{i=1}^n \iint\limits_{D_i} f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + \sum_{i=1}^n \iint\limits_{D_i} (f(M_i) - f(\mathbf{g}(\mathbf{u})))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\
&= \iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} (f(M_i) - f(\mathbf{g}(\mathbf{u})))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}
\end{aligned}$$

trong đó số hạng thứ hai

$$\left| \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} (f(M_i) - f(\mathbf{g}(\mathbf{u})))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \right| < \varepsilon \iint\limits_D |\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}$$

nhỏ tùy ý do giả thiết f liên tục (suy ra f liên tục đều trên $\overline{D}$) và $\iint\limits_D |\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}$ bằng diện tích mặt cong S. Vậy

$$S_n \to \iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}$$

hay

$$\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \quad \text{đ.p.c.m.} \quad \blacksquare$$

Cũng tương tự như tích phân đường loại một, ta có định lí sau:

Định lí 4.4.2 *Tích phân mặt loại một không phụ thuộc vào các biểu diễn tham số của mặt cong.*

Chứng minh.
Giả sử $\mathbf{g} : D \to S$ và $\mathbf{h} : T \to S$ là hai biểu diễn tham số bất kì của mặt cong trơn S. Khi đó ánh xạ

$$\boldsymbol{\varphi} : D \xrightarrow{\mathbf{g}} S \xrightarrow{\mathbf{h^{-1}}} T \qquad (\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{h^{-1}} \circ \mathbf{g})$$

là song ánh, $\boldsymbol{\varphi}$ và $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{-1}}$ là các ánh xạ khả vi liên tục trên D và T tương ứng và $(\mathbf{h}' \circ \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{g}'$. Dùng công thức đổi biến $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$ và sử dụng đẳng thức quen thuộc trong hình vi phân

$$\mathbf{n_g}(\mathbf{u}) = \mathbf{n_h}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})) \cdot \det(\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u}))$$

ta được điều phải chứng minh

$$\iint\limits_T f(\mathbf{h}(\mathbf{v}))|\mathbf{n_h}(\mathbf{v})|d\mathbf{v} = \iint\limits_D f(\mathbf{h}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})))|\mathbf{n_h}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}))| \cdot |\det \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{u})|d\mathbf{u} =$$

$$= \iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n_g}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} = \iint\limits_S f(\mathbf{x})dS \quad \text{đ.p.c.m.} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 4.4.1

1. Hãy xác định toạ độ trọng tâm của nửa mặt cầu tâm O, bán kính $\mathbb{R}$. (Giả thiết rằng mặt cầu đồng chất, khối lượng riêng của mặt cầu $\varrho(x, y, z) = 1$).

   Chúng ta đã biết diện tích nửa mặt cầu bằng $2\pi R^2$. Với giả thiết khối lượng riêng của mặt cầu bằng 1, suy ra khối lượng của nửa mặt cầu cũng bằng $2\pi R^2$. Từ biểu diễn tham số của nửa mặt cầu

   $$x = R\sin u\cos v, y = R\sin u\sin v, z = R\cos u, 0 \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v \le 2\pi$$

   ta tính được tọa độ của véc tơ pháp tuyến:

   $$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = R^2(\sin^2 u\cos v, \sin^2 u\sin v, \frac{1}{2}sin2u),$$

   Suy ra $|\mathbf{n}(u, v)| = R^2\sin u$. Vậy toạ độ trọng tâm của nửa mặt cầu:

   $$z_S = \frac{\iint_S zdS}{2\pi R^2} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos uR^2\sin u\, dudv}{2\pi R^2} = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

   Ta dễ dàng tính được các toạ độ khác của trọng tâm $x_S = 0, y_S = 0$.

2. Hãy diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0$, nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.

   Tọa độ của véc tơ pháp tuyến của mặt cầu:

   $$\begin{aligned}\mathbf{n}(x, y) &= (1, 0, f_x') \wedge (0, 1, f_y') = (-f_x', -f_y', 1)\\ &= \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right),\end{aligned}$$

   suy ra

   $$|\mathbf{n}(x, y)| = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

   Diện tích phần mặt cầu bằng tích phân kép của $|\mathbf{n}(x, y)|$ trên hình tròn $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Chuyển sang hệ tọa độ cực để tính tích phân ta được

   $$\iint\limits_D |\mathbf{n}(x, y)|\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} drd\varphi = 2\pi(4 - 2\sqrt{3}).$$

4.5 Tích phân mặt loại hai

Định nghĩa 4.5.1 *Cho mặt cong trơn* S *với* $\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D$ *là biểu diễn tham số và hàm véc tơ* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *xác định trên* $\overline{S}$*:*

$$\mathbf{F} : \overline{S} \to \mathbb{R}^3.$$

Giả sử $S_1, S_2, ..., S_n$ *là các mảnh mặt cong nhỏ đôi một không có điểm chung trong và* $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$*. Gọi* M_i *là một điểm tùy ý thuộc* S_i *và kí hiệu* $\mathbf{\Delta S_i}$ *là véc tơ có hướng là véc tơ pháp tuyến của mặt* S *tại* M_i*, có độ dài bằng diện tích của* $S_i, i = 1, 2, ..., n$*. Lập tổng tích phân*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i) \cdot \mathbf{\Delta S_i}$$

trong đó $\mathbf{F}(M_i) \cdot \mathbf{\Delta S_i}$ *là tích vô hướng của hai véc tơ* $\mathbf{F}(M_i)$ *và* $\mathbf{\Delta S_i}$*.*

Nếu $\lim S_n = I$ *tồn tại và hữu hạn khi* $\max d(S_i) \to 0$ *(giới hạn không phụ thuộc vào cách chọn* $M_i \in S_i$*), khi đó* I *được gọi là tích phân mặt loại hai của hàm* $\mathbf{F}$ *trên* S *và kí hiệu*

$$I = \iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{S} \quad \textit{hay} \quad I = \iint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S}.$$

Theo cách viết truyền thống, người ta còn kí hiệu tích phân mặt loại hai là

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy.$$

Ý nghĩa cơ học

Một hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ xác định trên miền $V \subset \mathbb{R}^3$, trong vật lí thường được gọi là *trường véc tơ* trong V (ví dụ trường điện từ, trường vận tốc ...). Tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S}$ (từ định nghĩa của tích phân) chính là lưu lượng đi qua mặt S của dòng véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ và được gọi là *thông lượng* qua mặt S của trường véc tơ $\mathbf{F}$. Chẳng hạn nếu $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ là trường vận tốc của dòng chảy một chất lỏng không chịu nén nào đó, khi đó tích phân $\iint\limits_S \mathbf{v}\, d\mathbf{S}$ chính là lượng chất lỏng chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian.

Cũng như tích phân đường, ta dễ dàng chứng minh rằng nếu $\mathbf{F}$ liên tục trên $\overline{S}$, khi đó tồn tại tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S}$. Ta có định lí sau:

Định lí 4.5.1 *Gọi S là mặt cong trơn với $\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D$ là biểu diễn tham số, hàm $\mathbf{F}$ liên tục trên $\overline{S}$:*

$$\mathbf{F} : \overline{S} \to \mathbb{R}^3.$$

Khi đó tồn tại tích phân mặt loại hai trên S và

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}.}$$

Chú ý rằng biểu thức dưới dấu tích phân là tích vô hướng của hai véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))$ và $\mathbf{n}(\mathbf{u})$. Mặt khác do

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u, v),$$

nên biểu thức dưới dấu tích phân đồng thời cũng chính là tích hỗn hợp của 3 véc tơ $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}$ và $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}$:

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u, v) \right) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{g})(u, v)\, dudv.}$$

Chứng minh.

Gọi $\mathbf{n^0}(\mathbf{u})$ là véc tơ đơn vị của véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ tại $\mathbf{g}(\mathbf{u}) \in S$ của mặt cong S (ứng với $\mathbf{u} \in D$).

Xét ánh xạ $f : \overline{S} \to \mathbb{R}, f(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n^0}(\mathbf{u})$ liên tục trên $\overline{S}$. Theo định lí 4.4.1, hàm f khả tích loại một trên mặt $\overline{S}$ và

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i = \iint\limits_S f dS = \iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) |\mathbf{n}(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

Mặt khác do véc tơ $\mathbf{\Delta S_i}$ có hướng cùng hướng với véc tơ pháp tuyến của mặt S tại M_i, có độ dài bằng diện tích của S_i, ta có thể viết véc tơ $\mathbf{\Delta S_i} = \mathbf{n^0}(M_i) \cdot \Delta S_i$. Suy ra tổng tích phân của hàm véc tơ $\mathbf{F}$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i) \cdot \mathbf{\Delta S_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(M_i) \cdot \mathbf{n^0}(M_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$$

tiến dần tới giới hạn $\iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}$. Vậy tích phân đường loại hai của hàm véc tơ $\mathbf{F}$ bằng

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = \iint\limits_D f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n^0}(\mathbf{u})|\mathbf{n}(\mathbf{u})|d\mathbf{u}$$
$$= \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \quad \text{đ.p.c.m.} \quad \blacksquare$$

Từ định nghĩa tích phân mặt loại hai cũng như từ định lí trên, suy ra rằng tích phân mặt loại hai đổi dấu khi ta đổi hướng mặt cong. Chẳng hạn nếu mặt cong được định hướng theo hướng ngược lại với véc tơ pháp tuyến, khi đó

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = -\iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}.$$

Tương tự như tích phân đường loại hai, ta có định lí sau:

Định lí 4.5.2 *Tích phân mặt loại hai không phụ thuộc vào các biểu diễn tham số cùng hướng của mặt cong.*

Nhận xét 4.5.1 *Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại một và tích phân mặt loại hai.*
Ta dẫn vào kí hiệu $\mathbf{n}^0(\mathbf{x})$ *là véc tơ đơn vị của véc tơ pháp tuyến với mặt cong* S *tại* $\mathbf{x} \in S$. *Nói cách khác* $\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}^0(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot |\mathbf{n}(\mathbf{u})| = \mathbf{n}^0(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{n}(\mathbf{u})|$ *và*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot |\mathbf{n}(\mathbf{u})|\, d\mathbf{u}$$
$$= \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{n}(\mathbf{u})|\, d\mathbf{u} = \iint\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n^0}(\mathbf{x}) dS.$$

Đây chính là mối liên hệ giữa tích phân mặt loại hai của $\mathbf{F}$ và tích phân mặt loại một của hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n^0}(\mathbf{x})$ trên mặt $\overline{S}$.

Ví dụ 4.5.1

1. Hãy tính tích phân mặt loại hai của hàm véc tơ $\mathbf{F} = (xy, 2x + y, z)$ trên mặt cong cho bởi phương trình tham số (mặt cong định hướng "lên phía trên"):

$$x = u + 2v, y = -v, z = u^2 + 3v \quad \text{với} \quad 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 1.$$

Biểu diễn tham số của mặt cong

$$\mathbf{g}(u, v) = (u + 2v, -v, u^2 + 3v),$$

suy ra

$$\mathbf{g}'_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (1, 0, 2u)$$

$$\mathbf{g}'_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (2, -1, 3)$$

Với biểu diễn tham số như trên ta tính được toạ độ của véc tơ pháp tuyến của mặt cong:

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}'_u \wedge \mathbf{g}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

hay

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2u \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (2u, -3 + 4u, -1).$$

Do tọa độ thứ ba (theo $\mathbf{k}$) của $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ âm nên mặt cong cho bởi phương trình tham số nói trên định hướng "xuống phía dưới", áp dụng công thức

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = -\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$$

để tính tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F}$. Trước hết ta tính tích vô hướng của hai véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = (-(u + 2v)v, 2u + 3v, u^2 + 3v)$ và $\mathbf{n}(\mathbf{u})$

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) = u^2(7 - 2v) - 12v - 2u(3 - 6v + 2v^2).$$

Vậy

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = -\iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} =$$

$$= -\int_0^3 \int_0^1 [u^2(7-2v) - 12v - 2u(3-6v+2v^2)]dudv = -30.$$

2. Hãy tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S x^2\, dydz + y^2\, dxdz + z^2\, dxdy$$

trên mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$ định hướng ra phía ngoài.

Với biểu diễn tham số

$$x = a + \sin v \cos u, y = b + \sin v \sin u, z = c + \cos v$$

ta tính được toạ độ của véc tơ pháp tuyến:

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = (\cos u \sin^2 v, \sin u \sin^2 v, \sin v \cos v).$$

Do vậy ta đưa về tích phân kép trên hình tròn

$$I = \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} [(a^2 + \sin^2 v \cos^2 u + 2a \sin v \cos u) \cos u \sin^2 v + \cdots]du$$

Chú ý $\int_0^{2\pi} \sin u du = \int_0^{2\pi} \sin^3 u du = \int_0^{2\pi} \cos u du = \int_0^{2\pi} \cos^3 u du = 0$

$$I = \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} [2a \cos^2 u \sin^3 v + 2b \sin^2 u \sin^3 v + (c + \cos u)^2 \sin v \cos v]du$$

$$= \frac{8\pi}{3}(a+b+c)$$

3. Hãy tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z}$$

trên mặt ngoài của elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Biểu diễn tham số

$$x = a\sin v\cos u, y = b\sin v\sin u, z = c\cos v$$

Tọa độ của véc tơ pháp tuyến:

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = (bc\cos u\sin^2 v, ac\sin u\sin^2 v, ab\sin v\cos v).$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\sin v.$$

Suy ra

$$I = 4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$

4. Hãy tích phân mặt loại hai của hàm véc tơ $\mathbf{F} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ trên nửa mặt hình xuyến (nằm phía trên mặt phẳng xOy và được định hướng lên trên theo hướng của véc tơ $\mathbf{k}$) cho bởi:

$$x = (3+\cos u)\cos v, y = (3+\cos u)\sin v, z = \sin u.$$

Với biểu diễn tham số như trên của nửa mặt hình xuyến

$$0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi,$$

ta tính được toạ độ của véc tơ pháp tuyến:

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = -(3+\cos u)\cos u\cos v\cdot\mathbf{i} - (3+\cos u)\cos u\sin v\cdot\mathbf{j} - (3+\cos u)\sin u\cdot\mathbf{k}$$

Do toạ độ thứ ba (theo $\mathbf{k}$) của $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ âm (mặt cong cho bởi phương trình tham số nói trên định hướng xuống phía dưới)

$$\iint_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = -\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(3+\cos u)^2\cos u\cos^2 v + (3+\cos u)^2\cos u\sin^2 v +$$

$$+(3+\cos u)\sin^2 u]\,dudv = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(3+10\cos u+3\cos^2 v)\,dudv = 9\pi^2.$$

Chú ý

Tích phân mặt loại hai có các tính chất giống như tính chất của tích phân đường loại hai, do vậy người ta còn đưa ra một phương pháp khác để tính tích phân mặt loại hai. Dựa vào tính chất

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + \iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$$

ta phải tính các tích phân mặt loại hai đơn giản hơn, chẳng hạn xét tích phân

$$I = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy.$$

Giả sử phương trình của mặt cong S có thể biểu diễn dưới dạng tường

$$z = f(x,y), \quad \text{trong đó } (x,y) \text{ thuộc miền } D \text{ nào đó của mặt phẳng } xOy.$$

Khi đó biểu diễn tham số của mặt cong S là $\mathbf{g}(x,y) = (x,y,f(x,y))$. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện bằng

$$\mathbf{n}(x,y) = (1,0,f'_x) \wedge (0,1,f'_y) = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

và mặt cong định hướng theo véc tơ pháp tuyến đó (hướng lên trên).

Biểu thức nằm dưới dấu tích phân $R(x,y,z)$ thực chất là hàm véc tơ $\mathbf{F} = (0,0,R(x,y,z))$. Theo định lí 8, tích phân

$$I = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}.$$

Tích vô hướng của hai véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))$ và $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ bằng

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{u}) = (0,0,R(x,y,f(x,y)))\cdot(-f'_x,-f'_y,1) = R(x,y,f(x,y))$$

suy ra

$$I = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_D R(x,y,f(x,y))\,dxdy.$$

Chúng ta lưu ý rằng khi mặt cong S biểu diễn dưới dạng tường $z = f(x, y)$, do tọa độ thứ ba của véc tơ pháp tuyến dương (hay góc tạo bởi giữa trục cao Oz với véc tơ pháp tuyến là góc nhọn), ta ngầm định rằng mặt cong đó định hướng "lên phía trên". Vì vậy nếu mặt cong S định hướng xuống phía dưới (góc tạo bởi giữa trục cao Oz với véc tơ pháp tuyến là góc tù), khi đó

$$I = \iint\limits_S R(x, y, z)\,dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, f(x, y))\,dxdy.$$

Ví dụ 4.5.2

1. Hãy tính tích phân mặt loại hai của hàm véc tơ $\mathbf{F} = (x, xy, xz^2)$ trên một phần tám mặt cầu định hướng ra "phía ngoài" trong góc phần tám thứ nhất:

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

   Ta kí hiệu phần mặt cầu đó là S. Gọi I là tích phân cần tìm:

   $$I = \iint_S x\,dydz + xy\,dxdz + xz^2\,dxdy =$$

   $$= \iint_S xdydz + \iint_S xydxdz + \iint_S xz^2dxdy = I_1 + I_2 + I_3.$$

   Trước hết ta tính $I_1 = \iint_S xdydz$. Phần mặt cầu S có thể biểu diễn dưới dạng tường $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ trong đó (y, z) thuộc miền D_1 là một phần tư hình tròn trong mặt phẳng yOz. Theo giả thiết mặt cầu định hướng ra "phía ngoài" nên trong góc phần tám thứ nhất góc tạo bởi giữa véc tơ pháp tuyến với các trục tọa độ là góc nhọn. Vậy

   $$I_1 = \iint_S xdydz = \iint_{D_1} \sqrt{1 - y^2 - z^2}dydz.$$

   Chuyển sang hệ tọa độ cực để tính I_1:

   $$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r\,d\varphi dr = \frac{\pi}{6}.$$

Tương tự, mặt S có phương trình $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ trong đó (x, z) thuộc miền D_2 (một phần tư hình tròn trong mặt phẳng xOz)

$$I_2 = \iint_S xydxdz = \iint_{D_2} x\sqrt{1 - x^2 - z^2}dxdz$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\varphi\sqrt{1 - r^2} \cdot r\, d\varphi dr = \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r^2 dr.$$

Đổi biến $r = \sin t$, ta được

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{16}.$$

Cuối cùng hoàn toàn tương tự, ta có

$$I_3 = \iint_S xz^2 dxdy = \iint_{D_3} x(1 - x^2 - y^2)dxdy = \frac{2}{15}.$$

Vậy

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{16} + \frac{2}{15} = \frac{11\pi}{48} + \frac{2}{15}.$$

2. Hãy tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S x^2\, dydz + y^2\, dxdz + z^2\, dxdy$$

trên mặt cầu $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$ định hướng ra phía ngoài.

$$I = \iint_S x^2\, dydz + \iint_S y^2\, dxdz + \iint_S z^2\, dxdy = I_1 + I_2 + I_3.$$
$$I_3 = \iint_S z^2\, dxdy = \iint_{S_1} z^2\, dxdy + \iint_{S_2} z^2\, dxdy$$

trong đó S_1 là nửa mặt cầu định hướng lên phía trên, S_2 là nửa mặt cầu định hướng xuống phía dưới (so với mặt phẳng $z = c$). Gọi D là hình tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1$ trên mặt phẳng xOy và

$$z_1 = c + \sqrt{1 - (x - a)^2 - (y - b)^2} \quad z_2 = c - \sqrt{1 - (x - a)^2 - (y - b)^2},$$

khi đó

$$I_3 = \iint\limits_D z_1^2\, dxdy - \iint\limits_D z_2^2\, dxdy = \iint\limits_D (z_1^2 - z_2^2)\, dxdy =$$

$$= 4c \iint\limits_D \sqrt{1 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\, dxdy = \frac{8c\pi}{3}.$$

Tương tự

$$I_1 = \iint\limits_S x^2\, dydz = \frac{8a\pi}{3}, I_2 = \iint\limits_S y^2\, dxdz = \frac{8b\pi}{3}, I = \frac{8\pi}{3}(a+b+c).$$

Tóm tắt cách tính tích phân mặt loại hai trong trường hợp phương trình của mặt cong S có thể biểu diễn dưới dạng tường

$$z = z(x,y), \quad \text{trong đó } (x,y) \text{ thuộc miền } D_1 \text{ nào đó của mặt phẳng } xOy.$$

Khi đó

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\, dxdy = \pm \iint_{D_1} R(x,y,z(x,y))\, dxdy.}$$

Dấu trước tích phân là dấu + hoặc dấu - tùy theo góc tạo bởi giữa trục cao Oz với véc tơ pháp tuyến là góc nhọn hay góc tù.

Tương tự ta có các công thức

$$\boxed{\iint_S Q(x,y,z)\, dxdz = \pm \iint_{D_2} Q(x,y(x,z),z)\, dxdz.}$$

$$\boxed{\iint_S P(x,y,z)\, dydz = \pm \iint_{D_3} P(x(y,z),y,z)\, dydz.}$$

Suy ra tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ trên S bằng

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + \iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy.}$$

4.6 Định lí Stokes và định lí Gauss-ôxtrôgradxki

Trong mục này chúng ta sẽ giới thiệu, không chứng minh hai định lí quan trọng: Định lí Stokes và định lí Gauss-Ôxtrôgradxki. Chúng có nhiều ứng dụng không chỉ trong toán học mà còn trong các lĩnh vực khác như vật lí, cơ học,... Các mặt cong S trong hai định lí là các mặt cong gồm hữu hạn các mảnh mặt cong trơn "gắn kết" với nhau một cách "hợp lí" (theo nghĩa các véc tơ pháp tuyến của chúng biến thiên liên tục).

Định lí 4.6.1 (Định lí Stokes) *Cho hàm véc tơ $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ khả vi liên tục trên mặt cong $\overline{S}$:*

$$\mathbf{F} : \overline{S} \to \mathbb{R}^3.$$

Gọi đường cong kín L là biên của mặt S, L và S được định hướng sao cho nếu đứng dọc theo véc tơ pháp tuyến của mặt S thì hướng của L là hướng dương (ngược chiều kim đồng hồ). Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.}$$

Định lí cho ta mối liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân đường loại hai. Trường hợp đặc biệt khi S nằm trong mặt phẳng, chẳng hạn $z = z_0$, khi đó dễ dàng suy ra đẳng thức trong định lí trở thành

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

Do S là miền phẳng trong mặt phẳng $z = z_0$ nên tích phân mặt ở vế trái cũng là tích phân kép, suy ra công thức trên chính là công thức Green đã biết trong chương tích phân đường.

Trong vật lí người ta sử dụng kí hiệu $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ là véc tơ

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Khi đó mối liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân đường trong Định lí Stokes có thể viết gọn hơn dưới dạng véc tơ

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, d\mathbf{S} = \oint\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.}$$

Để tìm hiểu ý nghĩa vật lí của $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$*, ta xét trường vận tốc* $\mathbf{V}$ *của chuyển động một chất lỏng trong một miền không gian nào đó. Theo định lí Stokes*

$$\iint\limits_S \mathbf{rot}(\mathbf{V})\, d\mathbf{S} = \oint\limits_L \mathbf{V}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Vế trái là lưu lượng của dòng véc tơ $\mathbf{rot}(\mathbf{V})$ *đi qua mặt* S*. Giả sử* $S = S_\epsilon$ *là mặt tròn tâm* $M(x,y,z)$ *bán kính* ϵ *với* $\mathbf{n}$ *là véc tơ pháp* ($|\mathbf{n}| = 1$) *tại tâm* M*. Với giả thiết về tính liên tục của* $\mathbf{rot}(\mathbf{V})$*, dễ dàng chứng minh được mật độ lưu lượng*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{V})(M) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{rot}(\mathbf{V})\, d\mathbf{S}.$$

Mật độ lưu lượng sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $\mathbf{rot}(\mathbf{V})(M) \parallel \mathbf{n}$ *và khi đó*

$$|\mathbf{rot}(\mathbf{V})(M)| = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{rot}(\mathbf{V})\, d\mathbf{S}.$$

Chẳng hạn xét trường vận tốc của dòng quay quanh trục Oz với vận tốc quay ω

$$\mathbf{V} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{i}) \Rightarrow \mathbf{rot}(\mathbf{V}) = 2\omega\mathbf{k}.$$

Kí hiệu S_ϵ là mặt tròn tâm $M(x,y,z)$ bán kính ϵ với $\mathbf{k}$ là véc tơ pháp

$$|\mathbf{rot}(\mathbf{V})(O)| = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{rot}(\mathbf{V})\, d\mathbf{S} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\omega}{\pi\epsilon^2} \oint\limits_{L_\epsilon} -ydx + xdy = 2\omega.$$

Định lí 4.6.2 (Định lí Gauss-Ôxtrôgradxki) *Giả sử* S *là mặt cong kín thỏa mãn các điều kiện đã nói ở đầu mục 4.6, mặt* S *được định hướng ra phía ngoài.* $V \subset \mathbb{R}^3$ *là miền không gian được giới hạn bởi mặt* S*. Giả thiết tiếp rằng hàm véc tơ* $\mathbf{F} = (P, Q, R) : V \to \mathbb{R}^3$ *khả vi liên tục trên miền* V*. Khi đó*

$$\boxed{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.}$$

Định lí cho ta mối liên hệ giữa tích phân mặt loại hai và tích phân bội ba trên miền V. Trường hợp đặc biệt khi

$P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = z$ với mọi (x,y,z) thuộc miền V,

khi đó

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 1,$$

suy ra vế trái của đẳng thức trong định lí bằng $3V$ (ta cũng kí hiệu V là thể tích của miền V), hay

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy.}$$

Ta cũng lưu ý rằng Định lí Stokes và định lí Gauss-Ôxtrôgradxki còn được coi là tổng quát hóa định lí Newton-Leibnitz trong hàm một biến

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

theo nghĩa sau đây: tích phân của các đại lượng liên quan tới "đạo hàm" hàm $\mathbf{F}$ được xác định thông qua các giá trị của hàm tại chính biên của miền lấy tích phân đó.

Ta dẫn vào kí hiệu

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Khi đó định lí Gauss-Ôxtrôgradxki có thể viết gọn hơn dưới dạng

$$\boxed{\iiint\limits_V div\mathbf{F}\,dxdydz = \iint\limits_S \mathbf{F}\,d\mathbf{S}.}$$

Ý *nghĩa vật lí của công thức trên là ở chỗ: vế phải là lưu lượng của dòng véc tơ* $\mathbf{F}$ *đi từ miền* V *qua mặt* S *ra ngoài. Như vậy có thể coi trong* V *có một nguồn mà* $div\mathbf{F}$ *là mật độ nguồn của trường véc tơ* $\mathbf{F}$.

Ví dụ 4.6.1

1. Hãy tích phân mặt loại hai của hàm véctơ

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

trên mặt cong kín giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và hai đáy hình trụ nằm trên mặt phẳng $z = 1$ và $z = -1$, mặt định hướng ra "phía ngoài".

Cách 1

Gọi S là mặt cong kín nói trên. S được phân tích thành 3 mặt cong

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3,$$

trong đó S_1 là mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$, S_2 và S_3 là đáy trên và đáy dưới hình trụ. Khi đó

$$I = \iint_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{F}\, d\mathbf{S}.$$

a) Trước hết ta tính tích phân trên mặt trụ $I_1 = \iint_{S_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{S}$. Phương trình tham số của mặt trụ là

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\mathbf{i} + 2\sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k} \quad 0 \le u \le 2\pi, -1 \le v \le 1.$$

Véc tơ pháp tuyến của mặt trụ bằng:

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos u\mathbf{i} + 2\sin u\mathbf{j}.$$

(Véc tơ hướng ra phía ngoài mặt trụ). Vậy

$$I_1 = \iint_{S_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} (4\cos^2 u + 4\sin^2 u) du dv = 16\pi.$$

b) Đáy trên của hình trụ có phương trình

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} \quad 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\pi.$$

Véc tơ pháp tuyến của đáy trên

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v = u\mathbf{k}.$$

Véc tơ này hướng lên trên, tức là ra phía ngoài mặt trụ. Vậy

$$I_2 = \iint_{S_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} u\, dudv = 4\pi.$$

c) Đáy dưới của hình trụ có phương trình

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} - 1 \cdot \mathbf{k} \quad 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\pi.$$

Véc tơ pháp tuyến của đáy dưới cũng bằng

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}'_u \wedge \mathbf{r}'_v = u\mathbf{k},$$

tuy nhiên đáy dưới (hay mặt S_3) được định hướng xuống dưới (do cả hình trụ kín định hướng ra phía ngoài), suy ra

$$I_3 = \iint_{S_3} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = -\int_0^2 \int_0^{2\pi} (-1) \cdot u\, dudv = 4\pi.$$

Vậy tích phân trên cả mặt trụ kín bằng

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 16\pi + 4\pi + 4\pi = 24\pi.$$

Cách 2 (Sử dụng định lí Gauss-Ôxtrôgradxki)

Do

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

nên

$$I = \iint_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \iint \int_V div\mathbf{F}\, dxdydz = 3V,$$

V là thể tích hình trụ, $V = 8\pi$. Suy ra kết quả tích phân $I = 24\pi$.

2. Cho hàm véctơ

$$\mathbf{F} = (x + y + z)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}.$$

Hãy xác định véc tơ $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ và tính tích phân mặt loại hai của hàm véc tơ đó trên phần mặt cong parabôlôit $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$. (Giả thiết mặt định hướng lên "phía trên").

Cách 1

Dễ dàng tính được véc tơ pháp tuyến của mặt cong parabôlôit

$$\mathbf{n} = (-z_x^{'}, -z_y^{'}, 1) = (-2x, -2y, 1)$$

và véc tơ $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = -xy\mathbf{i} + (1-2x)\mathbf{j} + (yz-1)\mathbf{k}.$$

Vậy tích phân mặt cần tìm đưa về tích phân kép của tích vô hướng $\mathbf{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}$ trên hình tròn $D : x^2 + y^2 = 4$

$$\iint_S \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (2x^2y - 2y + 4xy + yz - 1)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^4\cos^2 u\sin u +$$

$$-2r^2\sin u + 4r^3\cos u\sin u + r^4\sin u - r)drdu = -4\pi.$$

Cách 2 (Sử dụng Định lí Stokes)

Biên của mặt cong parabôlôit là đường tròn trong mặt phẳng $z = 4$. Phương trình tham số của đường tròn có dạng

$$\mathbf{g}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$$

nên

$$\mathbf{g}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0).$$

Vậy theo Định lí Stokes, tích phân mặt cần tìm đưa về tích phân đường trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ thuộc mặt phẳng $z = 4$.

$$\iint_S \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,d\mathbf{S} = \oint\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{g}(t))\mathbf{g}'(t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t\cos t - 4\sin^2 t - 8\sin t + 32\sin t\cos^2 t)\,dt = -4\pi.$$

4.7 Các công thức cần nhớ trong tích phân đường, tích phân mặt

Tích phân đường loại một

Đường cong L với $\mathbf{g}(t), t \in (a,b)$ là biểu diễn tham số, hàm f xác định liên tục trên $\overline{L}$. Khi đó

$$\boxed{\int_{\overline{L}} f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\mathbf{g}'(t)|dt = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt}$$

Nhắc lại rằng

$$\boxed{\int_a^b |\mathbf{g}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt)}$$

là độ dài cung L.

Trường hợp đặc biệt khi đường cong L là đường cong phẳng được cho bởi phương trình $y = g(x), x \in (a,b)$, khi đó

$$\boxed{\int_L f\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx.}$$

Tích phân đường loại hai

Tích phân đường loại hai của hàm liên tục

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

trên cung $\overline{L}$ với $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (a,b)$ là biểu diễn tham số, luôn luôn tồn tại và bằng

$$\boxed{\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b (P(\mathbf{g}(t)) \cdot x'(t) + Q(\mathbf{g}(t)) \cdot y'(t) + R(\mathbf{g}(t)) \cdot z'(t))dt}$$

hoặc viết dưới dạng véc tơ

$$\boxed{\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^0(\mathbf{x})\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)\, dt}$$

Biểu thức dưới dấu tích phân là tích vô hướng của $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ với $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ cũng như tích vô hướng của $\mathbf{F}(\mathbf{g}(t)$ và véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{g}'(t)$ ($\mathbf{v}^0$ là véc tơ đơn vị của véc tơ tiếp tuyến $\mathbf{g}'$).

Định lí Green

$$\boxed{\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,}$$

trong đó L là biên của miền D.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong kín L

$$\boxed{S(D) = \oint\limits_L x\, dy = \oint\limits_L -y\, dx = \frac{1}{2} \oint\limits_L x\, dy - y\, dx.}$$

Điều kiện tích phân không phụ thuộc đường đi

D là miền hình sao trong $\mathbb{R}^3$, điều kiện để tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x}))$ trên một cung $L \subset D$ chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút của cung đó là $\mathbf{F}'(x,y,z)$ là ma trận đối xứng tại mọi điểm thuộc miền D. Nói cách khác với mọi $M \in D$

$$\boxed{\frac{\partial Q(M)}{\partial x} = \frac{\partial P(M)}{\partial y}, \frac{\partial P(M)}{\partial z} = \frac{\partial R(M)}{\partial x}, \frac{\partial R(M)}{\partial y} = \frac{\partial Q(M)}{\partial z}}$$

Khi đó tồn tại hàm $u(x,y,z)$ để $du = Pdx + Qdy + Rdz$. Hàm $u(x,y,z)$ còn được gọi là nguyên hàm của $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ có thể được xác định bằng một trong các công thức sau

$$\boxed{u(x,y,z) = \int\limits_{AM} \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

AM là một cung bất kì trong D nối điểm $A(x_0, y_0, z_0)$ với điểm $M(x, y, z)$. Người ta thường sử dụng công thức sau để tính nguyên hàm

$$\boxed{u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz.}$$

Đặc biệt khi $D \subset \mathbb{R}^2$, nguyên hàm của $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(x, y), Q(x, y))$

$$\boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.}$$

$$\boxed{u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx.}$$

Tích phân hàm $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên một cung trơn bất kì L trong miền hình sao D chỉ phụ thuộc vào 2 đầu mút $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ của cung đó

$$\boxed{\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}) \quad \left(= u(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}^{\mathbf{x}=\mathbf{b}}\right).}$$

Tích phân mặt loại một

Mặt cong S với $\mathbf{g}(u, v), (u, v) \in D$ là biểu diễn tham số, hàm f xác định liên tục trên $\overline{S}$. Khi đó

$$\boxed{\iint_S f(\mathbf{x})dS = \iint_D f(\mathbf{g}(u,v))\left|\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u,v)\right|dudv.}$$

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}(u,v)$$

là véc tơ pháp tuyến của S tại $\mathbf{g}(u, v) \in S$. Do vậy công thức trên cũng có thể viết dưới dạng

$$\boxed{\iint_S f(\mathbf{x})dS = \iint_D f(\mathbf{g}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|dudv.}$$

Trường hợp đặc biệt khi mặt cong trơn S được cho bởi hàm số hai biến số $z = g(x,y), (x,y) \in D$, khi đó

$$\boxed{\iint\limits_S f(\mathbf{x})dS = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g'^2_x+g'^2_y}\,dxdy.}$$

Khối lượng, trọng tâm mặt cong

Khối lượng của mặt cong bằng:

$$\boxed{m = \iint\limits_S \varrho(x,y,z)dS}$$

trong đó $\varrho(\mathbf{x}) = \varrho(x,y,z)$ là khối lượng riêng của mặt cong tại $(x,y,z) \in S$. đồng thời tọa độ trọng tâm của mặt cong S

$$\boxed{x_S = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\varrho(x,y,z)dS \qquad y_S = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\varrho(x,y,z)dS}$$

và

$$\boxed{z_S = \frac{1}{m}\iint\limits_S z\varrho(x,y,z)dS.}$$

Tích phân mặt loại hai

Mặt cong S với $\mathbf{g}(u,v), (u,v) \in D$ là biểu diễn tham số, hàm $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ liên tục trên $\overline{S}$. Khi đó tích phân mặt loại hai của hàm véc tơ $\mathbf{F}$ trên S bằng

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{S} = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v))\cdot\mathbf{n}(u,v)\,dudv.}$$

Biểu thức dưới dấu tích phân là tích vô hướng của hàm véc tơ $\mathbf{F}\circ\mathbf{g}$ và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$.

Nếu phương trình của mặt cong S có thể biểu diễn dưới dạng tường

$$z = z(x, y), \quad \text{trong đó } (x, y) \text{ thuộc miền } D_1 \text{ nào đó của mặt phẳng } xOy.$$

Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_S R(x, y, z)\, dxdy = \pm \iint\limits_{D_1} R(x, y, z(x, y))\, dxdy.}$$

Dấu trước tích phân là dấu + hoặc dấu - tùy theo góc tạo bởi giữa trục cao Oz với véc tơ pháp tuyến là góc nhọn hay góc tù.

Tương tự ta có các công thức

$$\boxed{\iint\limits_S Q(x, y, z)\, dxdz = \pm \iint\limits_{D_2} Q(x, y(x, z), z)\, dxdz.}$$

Dấu trước tích phân là dấu + hoặc dấu - tùy theo góc tạo bởi giữa trục cao Oy với véc tơ pháp tuyến định hướng mặt S là góc nhọn hay góc tù.

$$\boxed{\iint\limits_S P(x, y, z)\, dydz = \pm \iint\limits_{D_3} P(x(y, z), y, z)\, dydz.}$$

Dấu + hoặc dấu - tùy theo góc tạo bởi giữa trục cao Ox với véc tơ pháp tuyến định hướng mặt S là góc nhọn hay góc tù.

Tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ trên S khi đó bằng

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint\limits_S P(x, y, z) dydz + \iint\limits_S Q(x, y, z) dxdz + \iint\limits_S R(x, y, z) dxdy.}$$

Định lí Stokes và định lí Gauss-Ôxtrôgradxki

Định lí Stokes chỉ ra mối quan hệ giữa tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên đường cong kín L và tích phân mặt loại hai hàm véctơ $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ trên mặt cong S mà L là biên của S

$$\boxed{\iint\limits_S \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, d\mathbf{S} = \oint\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.}$$

trong đó véctơ

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ta đưa vào kí hiệu

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Khi đó định lí Gauss-Ôxtrôgradxki khẳng định tích phân hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ trên mặt cong kín S bằng tích phân bội ba hàm $div\mathbf{F}$ trên miền không gian V mà S là mặt cong kín bao miền V

$$\boxed{\iiint\limits_V div\mathbf{F}\, dxdydz = \iint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S}.}$$

Trường hợp đặc biệt khi hàm $\mathbf{F} = (x, y, z)$, thể tích của miền V bằng

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy.}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Tính các tích phân đường loại một

   (a) $\int\limits_L (x^2+y^2)ds$, L là đoạn thẳng nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(2,4)$.

   (b) $\int\limits_L x\,ds$, L là cung parabol $y=x^2$ nối 2 điểm $A(0,0)$ và $B(2,4)$.

   (c) $\int\limits_L xy\,ds$, L là chu tuyến hình vuông $|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

2. Tính diện tích mặt trụ $x^2+y^2=4$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z=0$ và $z=4-x$.

3. Tính diện tích mặt trụ $y=\dfrac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z=0, x=0$, $z=x$ và $y=6$.

4. Tính các tích phân đường loại một

   (a) $\int\limits_L \dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, L là đường đinh ốc

   $$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt,\ 0\le t\le 2\pi.$$

   (b) $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, L là đường tròn $x^2+y^2+z^2=R^2, x=y$.

5. Tính tích phân đường loại hai các hàm véc tơ $\mathbf{F}(x,y)$ theo cung L

   (a) $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+(y^2-x^2)\mathbf{j}$, $\quad L:\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{x}{3}=1,\quad 0\le x\le 1$.

   (b) $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$, $\quad L:\ x=2t^2,\ y=3t-5,\quad 0\le t\le 2$.

   (c) $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-y\mathbf{j}$, $\quad L:\ x=a\cos t,\ y=b\sin t,\quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$.

6. Tính tích phân $\oint\limits_C xdx + ydy - zdz$ trên đường tròn C

$$x = R\cos\alpha\cos t,\ y = R\cos\alpha\sin t\ \ z = R\sin\alpha, \qquad (\alpha \quad \text{là hằng số})$$

và hãy tính tích phân cùng hàm đó $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy - zdz$ theo một đường cong trơn bất kì nối $A(1, 0, -3)$ với $B(6, 4, 8)$.

7. Hãy tính công sinh ra khi một chất điểm chuyển động dọc theo cung

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

dưới tác dụng của lực $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x - y, x + y, xyz)$.

8. Sử dụng công thức Green để tính

$$\oint\limits_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$

theo hướng dương dọc theo chu tuyến của tam giác nối các đỉnh $A(1, 1),\ B(2, 2)$ và $C(1, 3)$.
Hãy kiểm tra lại kết quả bằng cách tính trực tiếp.

9. Hãy tính tích phân $\oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx$ theo hướng dương trên đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$.

10. Hãy xác định hàm $u = u(x, y)$ thỏa mãn

    (a) $du = 2xye^{x^2y}dx + x^2e^{x^2y}dy$.

    (b) $du = \big(y\cos x - \sin(x - y)\big)dx + \big(\sin x + \sin(x - y)\big)dy$.

    (c) $du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy$

    (d) $du = (2xy - z^2 - yz)dx + (x^2 + z^2 - xz)dy + (2yz - 2xz - xy)dz$

    (e) $du = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x - 1)^3}}dx + zdy + ydz$.

11. Tính tích phân $\int\limits_L (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$, L là một nhịp đường xiclôit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi, (a > 0)$.

12. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường cong

    (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

    (b) $(x+y)^3 = xy$.

    (c) $x^3 + y^3 - xy = 0$.
    (Hướng dẫn: đặt $y = tx$).

13. Tính tích phân $\displaystyle\oint_C ydx + zdy + xdz$ trên đường tròn C

    $$x = R\cos\alpha\cos t,\ y = R\cos\alpha\sin t,\ z = R\sin\alpha, \qquad (\alpha \quad \text{là hằng số}).$$

14. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} yzdx + zxdy + xydz$ theo một đường cong trơn bất kì nối $A(1,1,1)$ với $B(a,b,c)$.

15. Tính tích phân
    $$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
    theo một đường cong trơn bất kì nối $A(0,0,0)$ với $B(3,4,5)$.

16. Tính tích phân đường loại hai $\displaystyle\int_C z - ydx\,dy$ với C là giao của mặt phẳng $x + y = 1$ với mặt cong $z = x^2 + y^2$, định hướng từ $A(1,0,1)$ tới $B(0,1,1)$.

17. Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$ là cung thuộc giao của mặt phẳng $x + y = 2$ và mặt parabôlôit $z = 2x^2 + y^2$ nối 2 điểm $A(1,1,3)$ và $B(2,0,8)$. Tính tích phân đường loại hai trên cung $\overset{\frown}{AB}$
    $$I = \oint_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx + 2x\,dy + dz.$$

18. Gọi L là giao hai mặt trụ
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$$
(tương ứng với $y>0, z>0$) nối điểm $(1,0,0)$ với điểm $(-1,0,0)$. Hãy tính các tích phân
    - $I_1 = \int\limits_L y^2\,dx - xy\,dy + z^2\,dz.$
    - $I_2 = \int\limits_L xz\,dx + xy\,dy + yz\,dz.$

19. Gọi C là giao nằm trong góc phần tám thứ nhất $x>0, y>0, z>0$ của hai mặt trụ
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+z^2=1. \end{cases}$$
Hãy tính các tích phân
    - $I_1 = \int\limits_C y^2\,dx - xy\,dy + z^2\,dz.$
    - $I_2 = \int\limits_C xz\,dx + xy\,dy + yz\,dz.$

20. Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S (x+y+z)dS$, với S là mặt của hình lập phương $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a.$

21. Tính tích phân mặt $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, với S là mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1.$

22. Tính diện tích chỏm cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$ với chiều cao chỏm cầu là h.

23. Tính tích phân mặt loại một $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, với S là mặt nón
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0, \quad (0 \le z \le b).$$

24. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S z\,dxdy$, với S là mặt ngoài của elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

25. Tính tích phân mặt loại hai

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx$$

trên mặt cong S (hướng lên phía trên)

$x = 4\cos u \cos v,\ y = 4\cos u \sin v,\ z = 4\sin u,$ với $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}.$

26. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S xy\,dydz + (2x+y)\,dzdx + zdxdy$ trên mặt cong S

$$x = u + 2v,\ y = -v,\ z = u^2 + 3v, \quad \text{với } 0 \leq u \leq 3,\ 0 \leq v \leq 1.$$

27. Tính tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S \dfrac{1}{xz}\,dydz + \dfrac{1}{yz}\,dzdx$ trên mặt cong S (hướng lên phía trên)

$$x = 5\cos^3 u \cos v,\ y = 5\cos^3 u \sin v,\ z = 5\sin^3 u,$$

với $\dfrac{\pi}{4} \leq u \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq 2\pi.$ (*Đồ thị mặt S gần giống như một tháp hình nón*).

28. Tính

$$\iint\limits_S yz\,dydz + xz\,dzdx + xy\,dxdy$$

với S là mặt ngoài của tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và $x + y + z = a$.

29. Tính tích phân mặt

$$\iint\limits_{S} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$

với S là mặt ngoài của hình lập phương $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

30. Áp dụng định lí Stokes tính tích phân $I = \oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, với C là elip

$$x^2 + y^2 = 1, x + z = 1.$$

31. Áp dụng định lí Stokes và kiểm tra kết quả thông qua tính trực tiếp tích phân $I = \oint\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, với C là đường gấp khúc nối các điểm

$$A(a,0,0),\ B(0,a,0),\ C(0,0,a),\ A(a,0,0).$$

32. Áp dụng định lí Stokes tính $I = \oint\limits_C e^x dx + (x^2+y)dy + z\,dz$, với C là biên của phần mặt phẳng $2x + y + 2z = 2$ thuộc góc phần tám thứ nhất và C có hướng ngược với chiều quay của kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

33. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, với C là đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. (a) $\frac{40\sqrt{5}}{3}$, (b) $\frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}}-1\right)$, (c) 0

2. 16π

3. Diện tích mặt trụ trong góc phần tám thứ nhất bằng $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$

4. (a) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2b\pi}{a}$, (b) $2\pi R^2$

5. (a) $\frac{449}{81}$, (b) 32, (c) $-\frac{a^3}{3}-\frac{b^2}{2}$

6. $\oint\limits_C xdx+ydy-zdz=0, \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx+ydy-zdz=-2$

7. $\frac{3\pi}{2}$

8. $-\frac{4}{3}$

9. 0

10. (a) $u=e^{x^2y}+C$
    (b) $u=\cos(x-y)+y\sin x+C$
    (c) $u=\sqrt{x^2+y^2}+C$,
    (d) $u=x^2y-xyz-xz^2+yz^2+C$
    (e) $u=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+yz+C$

11. $-3ma^2\pi$

12. (a) πab, (b) $\frac{1}{60}$, (c) $\frac{1}{6}$

13. $-\pi R^2\cos^2\alpha$

14. $abc-1$

15. $5\sqrt{2}$. *Chú ý: có thể chứng minh trực tiếp theo định nghĩa hàm véc tơ dưới dấu tích phân* $\mathbf{F}$ *khả tích trên cung trơn* $\overset{\frown}{AB}$, *mặc dù hàm không liên tục tại gốc tọa độ* $A(0,0,0)$, (do $|\mathbf{F}(x,y,z)|=1\ \forall(x,y,z)$).

16. $\frac{7}{6}$

17. $\frac{5}{2}$

18. $I_1 = -2, \quad I_2 = \frac{2}{3}$

19. $I_1 = -\frac{2}{3}, \quad I_2 = \frac{1}{3}$

20. $9a^3$

21. $\frac{8\pi}{3}$

22. $2\pi Rh$

23. $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$

24. $\frac{4\pi abc}{3}$

25. $\frac{64\pi}{3}$
Lưu ý nếu mặt S ứng với $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ thì S là nửa mặt cầu và ta có thể áp dụng định lí Gauss-Ôxtrôgradxki bằng cách bổ sung thêm mặt phẳng $z = 0$.

26. 30

27. $6\pi \ln 2$
Hướng dẫn: véc tơ pháp $\mathbf{n}$ của mặt định hướng lên phía trên bằng $15(\cos^4 u \sin^2 u \cos v, \cos^4 u \sin^2 u \sin v, \cos^5 u \sin u)$
Do vậy bài toán dẫn đến tích phân kép trên miền
$D = \{\dfrac{\pi}{4} \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}$ của hàm $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ hay $f = 6\frac{\cos u}{\sin u}$.

28. 0

29. $3a^4$

30. -4π

31. $-a^3$

32. $\frac{2}{3}$

33. $-\sqrt{3}\pi R^2$.

Chương 5

Phương trình vi phân

5.1 Mở đầu về phương trình vi phân

Trong quá trình nghiên cứu các hiện tượng vật lý nhiều quy luật được phát hiện nằm trong mối quan hệ giữa một hàm cần tìm với các đạo hàm của hàm đó. Trong nhiều lĩnh vực khoa học cũng như kĩ thuật, ta cũng gặp vấn đề tương tự. Các phương trình như vậy được gọi là *phương trình vi phân*. Nếu hàm cần tìm chỉ phụ thuộc một biến số thì phương trình vi phân được gọi là phương trình vi phân thường, thông thường chỉ nói đơn giản là phương trình vi phân.

Ví dụ Từ định luật vật lý, người ta biết rằng tốc độ nguội dần của vật tỷ lệ với hiệu nhiệt độ của vật và môi trường xung quanh. Kí hiệu $\theta(t)$ là nhiệt độ của vật tại thời điểm t, xác định qui luật thay đổi nhiệt độ của vật theo thời gian chính là tìm hàm $\theta(t)$. Đạo hàm hàm $\theta(t)$ là tốc độ nguội dần của vật. Giả thiết vật được đặt trong một môi trường nhiệt độ a, khi đó quá trình vật lý nêu trên được mô tả bởi phương trình vi phân

$$\frac{\theta(t)}{dt} = -K(\theta(t) - a), \quad K \text{ là hệ số tỷ lệ.} \tag{5.1}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng phương trình (5.1) có nghiệm $\theta(t) = Ce^{-Kt} + a$, với C là hằng số tùy ý. Giá trị của hằng số này sẽ được xác định nếu biết nhiệt độ vật thể tại thời điểm nào đó, chẳng hạn tại thời điểm đầu $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, suy ra $\theta_0 = C + a$. Như vậy, nghiệm của bài toán là $\theta(t) = (\theta_0 - a)e^{-Kt} + a$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{5.2}$$

trong đó F là một hàm cho trước, thông thường thỏa mãn một số điều kiện xác định như liên tục, khả vi, x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm chưa biết cần tìm, $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của y.

Cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình vi phân được gọi là *cấp của phương trình vi phân*. Nghiệm của phương trình vi phân cấp n là hàm $y(x)$ có các đạo hàm $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ trên một miền X nào đó, thỏa mãn hệ thức

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Đồ thị của nghiệm phương trình vi phân được gọi là *đường cong tích phân* của phương trình. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đã cho. Việc giải phương trình vi phân bao giờ cũng liên quan đến việc lấy tích phân các hàm có mặt trong phương trình.

Ví dụ $y''' + 2y' + y = \sin x$ là phương trình vi phân cấp ba.
$y' + ky = \cos x$ là phương trình vi phân cấp một.

5.2 Phương trình vi phân cấp một

Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.3}$$

trong đó hàm số ba biến F được cho trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $y = y(x)$ là hàm cần tìm, x là biến độc lập và y' là đạo hàm của hàm y. Ta gọi nghiệm riêng của phương trình (5.3) là một hàm khả vi $y = y(x)$ trên khoảng mở $(a, b) \subset \mathbb{R}$ nào đó thỏa mãn phương trình

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in (a, b), \quad (x, y, y'(x)) \in \Omega.$$

Như vậy mỗi nghiệm của phương trình xác định trên một khoảng mở nào đó.

Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân đã cho thỏa mãn $y(x_0) = y_0$, với (x_0, y_0) là một điểm cho trước nào đó thuộc mặt phẳng xOy. Điều kiện $y(x_0) = y_0$ còn được viết dưới dạng

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

và được gọi là điều kiện ban đầu của phương trình vi phân. Trong các trường hợp cụ thể bài toán Cauchy có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm.

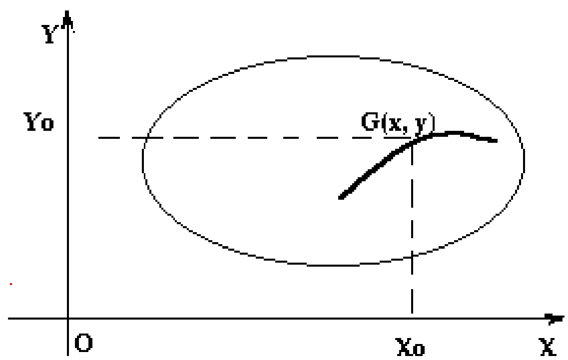
Ta thừa nhận định lí sau đây về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy

Định lí 5.2.1 *Xét bài toán Cauchy*

$$y' = f(x, y) \tag{5.4}$$

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

với $f(x, y)$ *liên tục trên miền* $G \subset \mathbb{R}^2$ *và* (x_0, y_0) *là một điểm thuộc* G*. Khi đó trong lân cận điểm* $x = x_0$ *tồn tại nghiệm của phương trình* (5.4) *thỏa mãn điều kiện ban đầu* $y(x_0) = y_0$*.*
Ngoài ra nếu giả thiết tiếp $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *liên tục trên miền* G *thì nghiệm đó là duy nhất.*



Hình 5.1: Nghiệm bài toán Cauchy

Định lí trên khẳng định bài toán Cauchy có nghiệm trong lân cận điểm (x_0, y_0) và có duy nhất một đường cong tích phân nằm trong G đi qua điểm đó.

Nghiệm tổng quát của phương trình (5.3) (hay còn gọi là tích phân tổng quát) là họ các đường cong được cho dưới dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{5.5}$$

Cũng đôi khi nghiệm tổng quát của phương trình vi phân được viết dưới dạng tường $y = \Psi(x, C)$. Với mỗi giá trị xác định C_0 của tham số C, hàm ẩn được xác định từ hệ thức (5.5)

$$\Phi(x, y, C_0) = 0 \quad \text{hay} \quad y = \Psi(x, C_0)$$

được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình (5.3).

Định lí 5.2.1 khẳng định sự tồn tại nghiệm của một lớp khá rộng các phương trình vi phân, song việc tìm lời giải chung cho chúng lại rất khó khăn. Trong các mục tiếp theo chúng ta sẽ giới thiệu các phương pháp để giải một số dạng đặc biệt của phương trình vi phân cấp một.

5.2.1 Phương trình có biến phân ly

Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{5.6}$$

với $M(x, y) = \phi_1(x)\psi_1(y), N(x, y) = \phi_2(x)\psi_2(y)$ được gọi là phương trình có biến phân ly.
Trước hết, xét phương trình

$$\phi(x)dx + \psi(y)dy = 0.$$

Nếu $y = y(x)$ là nghiệm thì $\phi(x)dx = -\psi[y(x)]dy(x)$, lấy tích phân hai vế

$$\int \phi(x)dx = -\int \psi[y(x)]dy(x) + C = -\int \psi(y)dy + C$$

hay

$$\int \phi(x)dx + \int \psi(y)dy = C$$

là tích phân tổng quát.

Ví dụ 5.2.1

1. Giải phương trình vi phân
$$x^2dx = ydy.$$
Lấy tích phân 2 vế ta có tích phân tổng quát $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{y^2}{2} = C.$

2. Giải phương trình
$$\frac{y^2y'}{x} = 1 + x^2.$$
Đưa phương trình trên về dạng phương trình có biến phân ly
$$\frac{y^2}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 \quad \text{hay} \quad y^2dy = x(1 + x^2)dx$$
Tích phân 2 vế ta được nghiệm tổng quát
$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C.$$

Trở lại phương trình
$$\phi_1(x)\psi_1(y)dx + \phi_2(x)\psi_2(y)dy = 0$$
tại các điểm có $\phi_2(x)\psi_1(y) \neq 0$. Chia cả hai vế cho tích đó, ta được
$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = 0$$
theo trường hợp đầu lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát
$$\int \frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx + \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = C.$$
Ngoài tích phân tổng quát trên còn có những nghiệm đi qua điểm (x_0, y_0) thỏa mãn phương trình $\phi_2(x)\psi_1(y) = 0$

Ví dụ 5.2.2

1. Giải phương trình vi phân

$$(2+x)ydx + (2-y)xdy = 0.$$

Với $xy \neq 0$ phương trình có thể đưa về dạng

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)dx = \left(1-\frac{2}{y}\right)dy$$

Lấy tích phân 2 vế ta được

$$\ln x^2 + x = y - \ln y^2 + C \quad \text{hay} \quad \ln x^2y^2 + x - y = C.$$

Hiển nhiên $x \equiv 0,\ y \equiv 0$ cũng thỏa mãn phương trình.

2. Giải phương trình

$$2xe^{-y}dx = y\,dy.$$

Đưa phương trình trên về dạng phương trình có biến phân ly

$$2x\,dx = ye^y dy$$

Tích phân 2 vế ta được nghiệm tổng quát

$$x^2 + C = (y-1)e^y.$$

5.2.2 Phương trình đẳng cấp

• Hàm $M(x,y)$ được gọi là đẳng cấp bậc m (hay thuần nhất bậc m) nếu với mọi (x,y) và với mọi $t>0$ thì $M(tx,ty) = t^mM(x,y)$
• Nếu hai hàm $M(x,y)$ và $N(x,y)$ cùng là đẳng cấp bậc m thì phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ được gọi là *phương trình đẳng cấp cấp một*.

Cách giải: Đưa phương trình vi phân về dạng

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})}{N(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})} = -\frac{x^m}{x^m}\cdot\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} = f(\frac{y}{x})$$

Như vậy phương trình đẳng cấp cấp một luôn đưa được về dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{5.7}$$

Đặt $y = xz(x)$, với hàm $z(x)$ chưa biết, ta có $\dfrac{dy}{dx} = z + x \cdot \dfrac{dz}{dx}$. Thay vào phương trình (5.7) ta được

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z.$$

Với $f(z) - z \neq 0$, phương trình trên có thể đưa về dạng phân ly biến số

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế

$$\ln|x| = \int \frac{dz}{f(z) - z} + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Thay trở lại $z = \dfrac{y}{x}$, ta có tích phân tổng quát của phương trình ban đầu.

Nếu $f(z) - z = 0$ tại điểm $z = A$ khi đó hiển nhiên phương trình có nghiệm $y = Ax$.

Ví dụ 5.2.3

1. Giải phương trình vi phân

$$x^2 dy = (y^2 + 2xy)dx$$

Phương trình có nghiệm $x \equiv 0$. Với $x \neq 0$, phương trình đã cho là phương trình đẳng cấp

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}.$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$

$$x\frac{du}{dx} + u = u^2 + 2u \quad \text{hay} \quad x\frac{du}{dx} = u^2 + u$$

Với $u^2 + u = 0$, phương trình vi phân đã cho có nghiệm $y = 0$ và $y = -x$. Xét trường hợp $u^2 + u \neq 0$, phương trình có dạng phân ly biến số $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u^2 + u}$. Tích phân 2 vế ta được

$$\ln|Cx| = \ln|u| - \ln|u+1| \quad \text{hay} \quad Cx = \frac{u}{u+1}$$

Thay trả lại các biến cũ $u = \dfrac{y}{x}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$Cx = \frac{y}{x+y} \quad \text{hay} \quad y = \frac{Cx^2}{1 - Cx}.$$

2. Giải phương trình vi phân

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$$

Đây là phương trình đẳng cấp với $M(x, y) = x^2 + y^2, N(x, y) = xy$ là các hàm đẳng cấp bậc hai. Đặt $y = xz, dy = zdx + xdz$, thay vào phương trình đã cho

$$(x^2 + x^2z^2)dx + x^2z(zdx + xdz) = 0 \quad (*)$$

Phương trình có nghiệm $x \equiv 0$. Với $x \neq 0$ ta có các biến đổi sau đây

$$\begin{aligned} (*) \ &\Leftrightarrow (1 + 2z^2)dx + zxdz = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{z}{1 + 2z^2}dz \end{aligned}$$

Tích phân 2 vế

$$\ln\left|\frac{x}{c}\right| = -\frac{1}{4}\ln(1 + 2z^2) \quad \text{hay} \quad x = \frac{C}{\sqrt[4]{1 + 2z^2}}.$$

Vậy

$$x^4 = \frac{C^4x^2}{x^2 + 2z^2} \quad \text{hay} \quad y = \pm\sqrt{\frac{C^4}{x^2} - \frac{x^2}{2}}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

3. Giải phương trình
$$y' = \frac{2x + y + 1}{x - 1}$$
Có thể thấy phương trình không có dạng đẳng cấp. Ta sẽ sử dụng phép biến đổi sau để đưa phương trình đã cho về dạng đẳng cấp
$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$
Khi đó
$$y' = Y' = \frac{2(X + a) + (Y + b) + 1}{X + a - 1} = \frac{2X + Y + (2a + b + 1)}{X + (a - 1)}$$
Phương trình trên có dạng đẳng cấp khi và chỉ khi các hệ số tự do của tử thức và mẫu thức bằng 0
$$\begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ \quad a - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$
Phương trình vi phân
$$Y' = \frac{2X + Y + (2a + b + 1)}{X + (a - 1)} = \frac{2X + Y}{X} = \frac{Y}{X} + 2$$
có dạng đẳng cấp. Đặt $u = \dfrac{Y}{X}$ và giải bằng phương pháp tách biến ta được nghiệm
$$Y = 2X \ln CX \quad \text{hay} \quad y + 3 = 2(x - 1) \ln C(x - 1).$$

5.2.3 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình vi phân có dạng
$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{5.8}$$
trong đó P, Q là các hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, đồng thời
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \tag{5.9}$$

Cách giải: Từ các kết quả về tích phân đường loại 2 trong chương IV, điều kiện (5.9) kéo theo sự tồn tại hàm $u(x,y)$ trên D sao cho vi phân toàn phần

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(Trong chương IV ta gọi $u(x,y)$ là nguyên hàm của hàm véc tơ $\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ trên D). Do vậy phương trình vi phân (5.8) có nghiệm tổng quát $u(x,y) = C$, với C là hằng số tùy ý. Hàm $u(x,y)$ được xác định bởi công thức

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy. \tag{5.10}$$

Nói cách khác tích phân tổng quát của phương trình (5.8)

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C, \quad (x_0,y_0) \text{ là điểm bất kỳ trong } D.$$

Ví dụ 5.2.4

Giải phương trình vi phân

$$y' = \frac{x^3 - 2y^2}{y^3 + 4xy} \quad \text{với điều kiện đầu} \quad y\big|_{x=-2} = 2$$

Phương trình có dạng $(x^3 - 2y^2)dx - (y^3 + 4xy)dy = 0$ thỏa mãn điều kiện (5.9)

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân có dạng $u(x,y) = C$, trong đó

$$u(x,y) = \int_0^x x^3\,dx - \int_0^y (y^3 + 4xy)dy = \frac{x^4}{4} - 2xy^2 - \frac{y^4}{4}.$$

Thay điều kiện đầu $y(-2) = 2$ vào nghiệm tổng quát $\frac{x^4}{4} - 2xy^2 - \frac{y^4}{4} = C$, ta được $C = 16$. Vậy nghiệm của bài toán Cauchy đã cho

$$\frac{x^4}{4} - 2xy^2 - \frac{y^4}{4} = 16.$$

Thừa số tích phân. Trong một số trường hợp phương trình

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

không phải là phương trình vi phân toàn phần nhưng với một hàm $\mu(x,y)$ thích hợp phương trình

$$\mu(x,y)\big(Pdx + Qdy\big) = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó hàm $\mu(x,y)$ được gọi là *thừa số tích phân.* Như vậy hàm $\mu = \mu(x,y)$ cần tìm phải thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}(x,y).$$

Ví dụ 5.2.5

Giải phương trình vi phân

$$(x + y + 2)e^x dx + 2e^x dy = 0.$$

Phương trình không thuộc dạng phương trình vi phân toàn phần, nhưng dễ dàng nhận thấy, chọn $\mu = (x + y)$ làm thừa số tích phân, phương trình

$$(x + y)\Big((x + y + 2)e^x dx + 2e^x dy\Big) = 0$$

hay

$$\Big((x + y)^2 + 2(x + y)\Big)e^x dx + 2(x + y)e^x dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. **Á**p dụng công thức (5.10) để tính nguyên hàm

$$u(x,y) = \int\limits_0^x (x^2 + 2x)e^x\, dx + \int\limits_0^y 2(x + y)e^x dy = (x + y)^2 e^x$$

Phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$(x + y)^2 e^x = C.$$

Trong nhiều trường hợp thừa số tích phân μ chỉ phụ thuộc vào một biến
• Phương pháp xác định hàm $\mu = \mu(x)$ chỉ phụ thuộc biến x. Hàm $\mu = \mu(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x} \quad \text{hay} \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Như vậy nếu $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(x)$ chỉ phụ thuộc vào x, hàm cần tìm $\mu = \mu(x)$ là nghiệm của phương trình phân ly biến số $\mu' = \mu F_1(x)$, suy ra

$$\ln \mu(x) = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx \quad \text{hay} \quad \mu(x) = e^{\int F_1(x) dx}$$

• Tương tự thừa số tích phân $\mu = \mu(y)$ chỉ phụ thuộc biến y, nếu hàm $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = F_2(y)$ chỉ phụ thuộc vào y và

$$\ln \mu(y) = \int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy \quad \text{hay} \quad \mu(y) = e^{\int F_2(y) dy}.$$

Ví dụ 5.2.6

1. Giải phương trình

$$ydx + 2(x + y + 1)dy = 0$$

Phương trình không thuộc dạng phương trình vi phân toàn phần. Với $P = y, Q = 2(x+y+1)$, ta thấy $P'_y = 1, Q'_x = 2, P'_y \neq Q'_x$. Mặt khác ta thấy $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \dfrac{1}{y}$ chỉ phụ thuộc biến y. Vậy thừa số tích phân được xác định bởi phương trình

$$\ln \mu(y) = \int \frac{1}{y} dx = \ln |y| \quad \text{hay} \quad \mu(y) = y.$$

Như vậy với thừa số tích phân $\mu = y$, phương trình

$$y \cdot \big(ydx + 2(x + y + 1)dy\big) = 0 \quad \text{hay} \quad y^2 dx + 2(xy + y^2 + y)dy = 0$$

trở thành phương trình vi phân toàn phần, áp dụng công thức (5.10) để tính nguyên hàm, với $x_0 = 0, y_0 = 0$

$$u(x,y) = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y 2(xy + y^2 + y)dy = (x+1)y^2 + \frac{2y^3}{3}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho $(x+1)y^2 + \dfrac{2y^3}{3} = C$.

2. Giải phương trình

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \quad (*)$$

Ta có $P'_y = 2y, Q'_x = -2y, P'_y \neq Q'_x$. Mặt khác ta thấy $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\dfrac{2}{x}$ chỉ phụ thuộc biến x. Vậy

$$\ln \mu(x) = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln|x| \quad \text{hay} \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Đưa phương trình $(*)$ về phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

Chọn điểm $(x_0, y_0) = (1, 0)$ và áp dụng công thức (5.10)

$$u(x,y) = \int_1^x (1+0)dx - \int_0^y \frac{2y}{x}dy = C$$

ta được nghiệm tổng quát $x - \dfrac{y^2}{x} = C$, ngoài ra phương trình cũng có nghiệm $x = 0$.

Chú ý. Có thể giải phương trình trên theo dạng đẳng cấp.

5.2.4 Phương trình tuyến tính cấp một

Phương trình vi phân có dạng

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{5.11}$$

với $p(x), f(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng (a, b) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp một* (vế trái là tổ hợp tuyến tính của hàm chưa biết với đạo hàm của hàm chưa biết).

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình

$$y' + p(x)y = 0 \tag{5.12}$$

được gọi là phương trình thuần nhất. Trường hợp $f(x) \not\equiv 0$, phương trình (5.11) được gọi là phương trình không thuần nhất. Phương trình (5.12) có dạng biến phân ly, nghiệm tổng quát

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{5.13}$$

Nó luôn luôn có nghiệm tầm thường $y(x) \equiv 0$.

Để giải phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.11), ta áp dụng phương pháp Becnuli sau đây.

Tìm nghiệm của (5.11) dưới dạng tích hai hàm $y = u(x) \cdot v(x)$. Tính đạo hàm $y' = u'v + uv'$, thay vào phương trình (5.11)

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = f(x).$$

Suy ra $u\big(v' + p(x)v\big) + u'v = f(x)$. Trước hết ta xác định $v(x)$ sao cho $v' + pv = 0$. Đây là phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Khi đó hàm $u(x)$ thỏa mãn phương trình

$$du = \frac{f(x)}{v(x)}dx \Rightarrow u = \int \frac{f(x)}{v(x)}dx + C = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.11)

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).} \tag{5.14}$$

Ví dụ 5.2.7

Giải phương trình vi phân tuyến tính $y' - y = \sin x$.
Nghiệm tổng quát theo công thức trên

$$y = e^{\int dx}\left(C + \int \sin x.e^{-x}dx\right)$$
$$= Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

Chú ý
• Có thể giải phương trình (5.11) bằng phương pháp hệ số bất định: C trong công thức nghiệm tổng quát (5.13) được coi là hàm $C(x)$ của biến x. Khi đó nghiệm được tìm dưới dạng $y = C(x) \cdot e^{-\int pdx}$. Đó cũng là phương pháp Becnuli với $u(x) = e^{-\int p(x)dx}, v(x) = C(x)$
• Công thức nghiệm (5.14) có thể được viết

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx = \overline{y} + y^*$$

trong đó $\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.12) và $y^* = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (5.11).

5.2.5 Phương trình Becnuli

Phương trình Becnuli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = y^\alpha f(x) \tag{5.15}$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ là số thực bất kì. Hiển nhiên nếu $\alpha > 0$ phương trình Becnuli có nghiệm tầm thường $y \equiv 0$.

• Nếu $\alpha = 0$, phương trình (5.15) là phương trình tuyến tính đã xét ở trên

$$y' + p(x)y = f(x).$$

• Nếu $\alpha = 1$, phương trình (5.15) trở thành phương trình tuyến tính thuần nhất.
• Trường hợp $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, chia hai vế của (5.15) cho y^α

$$y'y^{-\alpha} + p(x)yy^{-\alpha} = f(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, khi đó phương trình (5.15) trở thành phương trình tuyến tính

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)f(x).$$

Áp dụng công thức (5.14), ta có nghiệm tổng quát của phương trình trên

$$z = y^{1-\alpha} = e^{(\alpha-1)\int p(x)dx}\left(\int (1-\alpha)f(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Chú ý rằng ta cũng có thể giải trực tiếp phương trình Becnuli bằng cách đặt $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Ví dụ 5.2.8

1. Giải phương trình
$$y' + y = y^4$$
Đây là phương trình Becnuli với $p(x) = 1, f(x) = 1, \alpha = 4$. Phương trình có nghiệm $y \equiv 0$.
Bây giờ ta giả thiết nghiệm cần tìm không đồng nhất với 0, chia cả 2 vế cho y^4
$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{y^3} = 1.$$
Đổi biến $z = y^{-3} \Rightarrow z' = -3y^{-4}y'$, ta đưa phương trình đã cho về dạng tuyến tính
$$z' - 3z = -3.$$
Dễ dàng tính được $z = 1 + Ce^{3x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu
$$y = \frac{1}{z^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+Ce^{3x}}}$$

2. Giải phương trình
$$y' + \frac{2}{x+1}y + (x+1)^3y^2 = 0$$
Đây là phương trình Becnuli với $\alpha = 2$. Phương trình có nghiệm $y \equiv 0$. Tìm nghiệm $y \not\equiv 0$ bằng cách chia cả 2 vế cho y^2 rồi đặt $z = y^{-1}$, đưa phương trình về dạng tuyến tính theo z
$$z' - \frac{2}{x+1}z = (x+1)^3.$$

Giải phương trình tuyến tính này ta được nghiệm

$$z = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho $y = \dfrac{1}{C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}}$

5.3 Phương trình vi phân cấp hai

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng tổng quát

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{5.16}$$

với $F = F(x, y, u, v)$ là hàm được xác định trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ nào đó. Ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình (5.16) là một hàm khả vi đến cấp hai $y = y(x)$ trên khoảng mở $(a, b) \subset \mathbb{R}$ nào đó thỏa mãn phương trình

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) = 0, \quad x \in (a, b), \quad \big(x, y, y'(x), y''(x)\big) \in \Omega.$$

Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân (5.16) thỏa mãn các điều kiện $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0,\ (x_0, y_0, y'_0)$ là một điểm cho trước nào đó trong $\mathbb{R}^3$. Các điều kiện trên gọi là điều kiện đầu, chúng cũng được viết dưới dạng

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Bài toán Cauchy có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm.

Ý *nghĩa hình học của bài toán Cauchy*: Từ họ các đường cong tích phân đi qua điểm (x_0, y_0) ta chọn lấy một đường có hệ số góc của tiếp tuyến bằng hằng số y'_0 cho trước: $y'(x_0) = y'_0$. Chú ý rằng trong phương trình có thể vắng mặt các biến x, y, y' nhưng biến y'' phải luôn luôn có mặt. (Ngược lại phương trình đã cho không phải là phương trình vi phân cấp hai).

Giả thiết rằng từ phương trình (5.16) có thể giải được y'' theo các biến còn lại (dựa vào điều kiện hàm ẩn), khi đó phương trình vi phân cấp hai có dạng tường

$$y'' = f(x, y, y') \tag{5.17}$$

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được cho bằng định lý

Định lí 5.3.1 *Nếu vế phải của phương trình* (5.17)*, hàm f liên tục cùng với các đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y'),\ \dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *trên miền* $G \subset \mathbb{R}^3$ *và* (x_0, y_0, y_0') *là một điểm thuộc G thì trong lân cận nào đó của $x = x_0$ tồn tại nghiệm duy nhất $y = y(x)$ của phương trình* (5.17) *thỏa mãn các điều kiện đầu*

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\Big|_{x=x_0} = y_0'.$$

Ví dụ 5.3.1

Giải phương trình vi phân $y'' + y = 0$ với điều kiện đầu

$$y\Big|_{x=0} = 1,\ \ y'\Big|_{x=0} = 0.$$

Giải bài toán Cauchy trên đây chính là tìm đường cong tích phân của phương trình $y'' + y = 0$ đi qua điểm $(0, 1)$ và có hệ số góc của tiếp tuyến $y'(0) = 0$.
Dễ dàng kiểm tra thấy $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ là nghiệm của phương trình với hai hằng số tùy ý C_1, C_2, hơn nữa $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$. Vậy nếu chọn $C_1 = 1, C_2 = 0$ thì ta thấy $y = \cos x$ là nghiệm của bài toán. Theo định lí trên nghiệm $y = \cos x$ là duy nhất.

Nghiệm tổng quát của phương trình (5.17) là hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, thỏa mãn các điều kiện

1) $\varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình (5.17) với mọi giá trị của C_1, C_2.

2) Với mỗi điểm (x_0, y_0, y_0') mà tại đó các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm thỏa mãn, ta có thể xác định $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ thỏa mãn $y\,|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\,|_{x=x_0} = y_0'$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (5.17) nói chung được cho dưới dạng ẩn $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, nó biểu diễn một họ đường cong phụ thuộc hai tham số và được gọi là tích phân tổng quát.

Nếu thay $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ vào biểu thức nghiệm tổng quát thì ta được nghiệm riêng (hay còn gọi tích phân riêng) dưới dạng ẩn $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$.

5.3.1 Phương trình vi phân cấp hai có thể giảm cấp

Trong một số trường hợp ta có thể đưa phương trình vi phân cấp hai về phương trình cấp một.
a) Phương trình vi phân cấp hai không chứa y:

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{5.18}$$

Đặt $y' = z(x)$ là hàm chưa biết cần tìm. Ta có $y'' = z'(x)$, do vậy phương trình (5.18) trở thành phương trình vi phân cấp một $F(x, z, z') = 0$. Nếu giải được ta có nghiệm $z(x) = z(x, C_1), x \in (a, b)$. Thay nghiệm đó trở lại phương trình $y' = z(x, C_1)$ và giải tiếp bằng cách lấy tích phân

$$y = \int z(x, C_1)dx + C_2.$$

Ví dụ 5.3.2

1. Giải phương trình $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.
   Đặt $z = y', z' = y''$, phương trình đã cho trở thành phương trình vi phân cấp một $z' = \sqrt{1 + z^2}$. Giải phương trình này

   $$\begin{array}{rlcl} & z' = \sqrt{1+z^2} & \Rightarrow & \dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx \\ \Rightarrow & \ln|z + \sqrt{1+z^2}| = x + C_1 & \Rightarrow & z + \sqrt{1+z^2} = e^{x+C_1} \end{array}$$

   $$\Rightarrow z^2 + 1 = (e^{x+C_1} - z)^2 = z^2 - 2z.e^{x+C_1} + e^{2(x+C_1)} \Rightarrow z = sh(x + C_1)$$

   Trở lại hàm cũ $z = y' = sh(x + C_1)$. Suy ra $y = ch(x + C_1) + C_2$.

2. Tính tổng của chuỗi lũy thừa

   $$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

   Đạo hàm hàm cần tìm $y(x)$

   $$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

Do đó hàm cần tìm $y(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân $y'' = \dfrac{1}{1+x}$. Mặt khác từ chuỗi đã cho, hàm $y(x)$ phải thỏa mãn điều kiện đầu

$$y\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{và} \quad y'\Big|_{x=0} = 0$$

Đặt $z = y'(x)$ và đưa phương trình vi phân về phương trình cấp một

$$z' = \frac{1}{1+x} \;\Rightarrow\; z = \ln(1+x) + C.$$

Do $y'\Big|_{x=0} = 0$, suy ra $z = y' = \ln(1+x)$. Vậy nghiệm cần tìm

$$y = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

b) Phương trình không chứa x:

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{5.19}$$

Để giải phương trình (5.19), ta đặt $y'(x) = z\big(y(x)\big)$, coi $y'(x)$ là hàm phụ thuộc vào x thông qua hàm $y(x)$. Như vậy $z = z(y)$ là hàm cần tìm với biến độc lập y. Khi đó

$$y''(x) = z'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) \quad \text{hoặc viết gọn hơn} \quad y'' = z' \cdot z.$$

Phương trình (5.19) được đưa về phương trình cấp một $F(y, z, z') = 0$. Giả sử phương trình có nghiệm $z = z(y, C_1)$, $y \in (\alpha, \beta)$. Vậy nghiệm của (5.19) được tính bằng cách phân ly biến số

$$z(y, C_1) = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; x = \int \frac{dy}{z(y, C_1)} + C_2.$$

Ví dụ 5.3.3

Giải phương trình $y'^2 + 2yy'' = 0$.
Đặt $y' = z(y)$, đưa phương trình đã cho về phương trình vi phân cấp một $z^2 + 2yzz' = 0$. Xét các trường hợp

$\star$) $z = 0 \;\Rightarrow\; y \equiv C$.

$\star$) $z + 2yz' = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dy}{2y} \;\Rightarrow\; \ln\left|\dfrac{z}{C_1}\right| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{y}}$. Vậy

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}} = y' \;\Rightarrow\; \sqrt{y}dy = C_1 dx \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}y^{3/2} = C_1 x + C_2$$

c) Trường hợp hàm $F(x, y, y', y'')$ là đẳng cấp đối với các biến y, y', y''

$$F(x, ty, ty', ty'') = tF(x, y, y', y'') \quad \forall t.$$

Khi đó đặt

$$y' = yz, \; y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

phương trình vi phân $F(x, y, y', y'') = 0$ được đưa về phương trình vi phân cấp một $F^*(x, z, z') = 0$.

Ví dụ 5.3.4

Giải phương trình $y'^2 + 2yy'' = 0$. Ta thấy $y \equiv 0$ là một nghiệm. Xét trường hợp $y \not\equiv 0$, đặt $y' = yz$ thay vào phương trình đã cho $y^2(z^2 + 2z' + 2z^2) = 0$, suy ra $2z' + 3z^2 = 0$. Phương trình cuối có nghiệm $z \equiv 0$. Khi đó $y' = 0, \; y \equiv C$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

Nếu $z \not\equiv 0$ ta đưa về phương trình

$$\frac{2dz}{3z^2} = -dx \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}z^{-1} = x + C_1 \;\Rightarrow\; z = \frac{2}{3}(x + C_1)^{-1}.$$

Trở lại phép đặt ban đầu

$$\frac{dy}{y} = zdx = \frac{2}{3}\frac{dx}{(x + C_1)} \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = \frac{2}{3}\ln|x + C_1|,$$

hay là $y = C_2(x + C_1)^{2/3}$ là nghiệm tổng quát của phương trình. Nhận xét rằng nghiệm $y \equiv 0$ có được từ nghiệm tổng quát khi lấy $C_2 = 0$.

5.3.2 Phương trình tuyến tính cấp hai

Phương trình vi phân có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{5.20}$$

với $p(x), q(x), f(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng (a, b) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai.*

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.21}$$

được gọi là *phương trình thuần nhất* tương ứng với phương trình (5.20). Trường hợp $f(x) \not\equiv 0$, phương trình (5.20) được gọi là *phương trình không thuần nhất*. Hiển nhiên phương trình thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường $y \equiv 0$.

Phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất

Trước hết, ta nghiên cứu cấu trúc nghiệm của phương trình thuần nhất (5.21)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Định lí 5.3.2 *Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình* (5.21) *thì hàm*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{5.22}$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, cũng là nghiệm của phương trình (5.21).

Chứng minh Tính y', y'' từ (5.22) rồi thay vào (5.21)

$$\big(C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x)\big) + p(x)\big(C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)\big) + q(x)\big(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\big) =$$

$$= C_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) \equiv 0$$

do $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm của (5.21). ■

Hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính trên* (a, b) nếu hàm này được biểu diễn tuyến tính qua hàm kia với mọi $x \in (a, b)$. Nói cách khác tồn tại hai số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0,\ \forall x \in (a, b). \tag{5.23}$$

Nếu hệ thức (5.23) chỉ thỏa mãn trong trường hợp duy nhất khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ thì hệ hai hàm $y_1(x), y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 5.3.1 (Hệ nghiệm cơ sở) *Một hệ hai nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình thuần nhất* (5.21) *độc lập tuyến tính trên (a, b) được gọi là hệ nghiệm cơ sở của phương trình đó.*

Định lí 5.3.3 *Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất* (5.21). *Ta có*

(i) *$y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên (a, b) khi và chỉ khi*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (a, b)$$

(ii) Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hệ nghiệm cơ sở của phương trình (5.21) *thì nghiệm tổng quát của phương trình đó*

$$\overline{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Chứng minh

(i) Kí hiệu $A = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ và giả thiết $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính. Ta sẽ chứng minh $\det(A) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in (a, b)$ để $\det(A) = 0$. Điều này cũng có nghĩa là tồn tại hai số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1y_1(x_0) + \alpha_2y_2(x_0) = 0 \\ \alpha_1y_1'(x_0) + \alpha_2y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Với hai số α_1, α_2 đó, theo định lý 5.3.2, hàm $y = \alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (5.21) và thỏa mãn điều kiện đầu

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha_1y_1(x_0) + \alpha_2y_2(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = \alpha_1y_1'(x_0) + \alpha_2y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Do tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, nghiệm đó phải là nghiệm tầm thường (đồng nhất với 0), vô lý với giả thiết hệ 2 hàm $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại giả thiết $\det(A) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ ta phải chứng minh $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử ngược lại $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên (a, b) hay $y_2(x) = ky_1(x)$. Khi đó

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1(x) & ky_1(x) \\ y_1'(x) & ky_1'(x) \end{vmatrix} = 0, \text{ trái với giả thiết } \det(A) \neq 0, \forall x \in (a, b).$$

(ii) $y_1(x), y_2(x)$ là hệ nghiệm cơ sở của phương trình (5.21), định thức

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là *định thức Wronsky*. Ta sẽ chứng minh $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát. Theo định lý 5.3.2, $\bar{y}$ là nghiệm của phương trình (5.21).

Ta phải chứng minh nghiệm bất kỳ $z(x)$ của (5.21) biểu diễn được dưới dạng $z(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với hai hằng số C_1, C_2 thích hợp.

Thật vậy, kí hiệu $z(x_0) = z_0, z'(x_0) = z'_0$ và xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = z_0 \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) = z'_0 \end{cases}$$

Theo giả thiết $y_1(x), y_2(x)$ là độc lập tuyến tính nên $W(y_1, y_2) \neq 0$, suy ra tồn tại nghiệm C_1^0, C_2^0 của hệ trên. Do bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất, hàm $y = C_1^0y_1 + C_2^0y_2$ cũng là nghiệm của (5.21) và nghiệm đó trùng với $z(x)$. ■

Từ định lí trên suy ra để có được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta phải tính được hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình đó.

Quy tắc tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.21), *khi biết một nghiệm riêng* $y_1(x) \not\equiv 0$ của phương trình đó. Ta sẽ tìm nghiệm thứ hai $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ dưới dạng

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x)$$

Tính $y'_2(x), y''_2(x)$ và thay vào phương trình thuần nhất (5.21), khi đó

$$y_1u'' + (py_1 + 2y'_1)u' = 0$$

là phương trình giảm cấp được. Đặt $u'(x) = z(x)$ và đưa phương trình trên về phương trình tuyến tính thuần nhất đối với u. Giải phương trình đó ta được nghiệm

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx. \tag{5.24}$$

Chọn nghiệm $u(x) \not\equiv \text{const}$, suy ra nghiệm của (5.21) $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1(x)$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.21)

$$\overline{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Ví dụ 5.3.5

1. Giải phương trình $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, biết $y_1 = x$ là một nghiệm của phương trình đó.

Tìm nghiệm độc lập tuyến tính với $y_1(x) = x$ dưới dạng $y_2(x) = xu(x)$

$$y_2' = u(x) + xu'(x),\ \ y_2'' = 2u'(x) + xu''(x).$$

Thay vào phương trình thuần nhất đã cho ta được

$$xu'' + 2(1 - x^2)u' = 0.$$

Đặt $u'(x) = z(x)$ đưa phương trình trên về phương trình tuyến tính thuần nhất đối với u.

$$x^2(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + 2xu = 0 \ \Leftrightarrow \ u'' = 0.$$

Chọn $u = x$, ta tìm được nghiệm $y_2 = uy_1(x) = x^2$, độc lập tuyến tính với $y_1(x) = x$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất đã cho

$$\bar{y} = C_1x + C_2x^2.$$

Chú ý rằng phương trình trên thuộc dạng phương trình Euler

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

Phương trình Euler có thể đưa về phương trình tuyến tính hệ số hằng đơn giản hơn, ta sẽ đề cập tới cách giải trong mục sau, bằng phép đổi biến

$$x = e^t \quad \text{hay} \quad t = \ln x.$$

Thật vậy, đặt $u(t) = y(x(t)) = y(e^t)$

$$u'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = y'e^t \ \Rightarrow \ y' = u'e^{-t}$$

$$u''(t) = y''(x) \cdot e^{2t} + y'(x) \cdot e^t \ \Rightarrow \ y'' = (u'' - u')e^{-2t}.$$

Thay vào phương trình Euler ta được phương trình tuyến tính hệ số hằng

$$u'' + (a - 1)u' + bu = 0.$$

2. Giải phương trình

$$y'' + \frac{2x}{1 - x^2}y' - \frac{2}{1 - x^2}y = 0,$$

biết một nghiệm của phương trình: $y_1(x) = x$.
Tiến hành các bước tương tự như ví dụ trên ta tìm được nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với $y_1(x) = x$

$$y_2 = x^2 + 1 \ \Rightarrow \ \text{nghiệm tổng quát} \ \ \bar{y} = C_1x + C_2(x^2 + 1).$$

Phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

Về cấu trúc nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất ta có định lí sau

Định lí 5.3.4 *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.*

Chứng minh Đặt $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (5.21), $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (5.21). Kí hiệu y^* là một nghiệm riêng bất kì của phương trình không thuần nhất (5.20), xét hàm

$$y = y^* + \bar{y}.$$

Hiển nhiên $y = y^* + \bar{y}$ thỏa mãn phương trình (5.20) (thay $y = y^* + \bar{y}$ vào phương trình không thuần nhất (5.20), phương trình đó trở thành đồng nhất thức).
Ngược lại nếu y^{**} là một nghiệm riêng bất kì của phương trình không thuần nhất (5.20). Khi đó $y - y^{**}$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (5.21)

$$(y - y^{**})'' + p(y - y^{**})' + q(y - y^{**}) =$$

$$= (y'' + py + qy) - (y^{**\prime\prime} + py^{**\prime} + qy^{**}) = f(x) - f(x) = 0.$$

Do vậy $y - y^*$ được biểu diễn tuyến tính qua hệ nghiệm cơ sở $y_1(x), y_2(x)$

$$y - y^* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad \text{hay} \quad y = y^* + \bar{y}. \text{ (đ.p.c.m).} \quad \blacksquare$$

Định lí 5.3.5 (Nguyên lý chồng chất nghiệm) *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của hai phương trình tương ứng*

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= f_1(x) \\ y'' + p(x)y' + q(x)y &= f_2(x) \end{aligned}$$

thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Định lí được chứng minh bằng cách thay $y = y_1 + y_2$ và các đạo hàm của nó vào phương trình trên. Hiển nhiên nguyên lý chồng chất nghiệm cũng đúng khi vế phải của phương trình tuyến tính không thuần nhất là tổng của hữu hạn hàm.

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nếu biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta có thể tìm được nghiệm của phương trình không thuần nhất tương ứng nhờ vào định lý sau đây

Định lí 5.3.6 *Giả sử* $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất* (5.21) *thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* (5.20) *có dạng*

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{5.25}$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ *là các hàm của* x *được xác định từ hệ phương trình*

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{5.26}$$

Chứng minh Ta tìm $C_1(x), C_2(x)$ để (5.25) trở thành nghiệm của phương trình không thuần nhất bằng cách tính $y'(x),\ y''(x)$ rồi thay vào phương trình (5.20)

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2y_2'(x).$$

Chọn các hàm $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn điều kiện $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x) = 0$. Khi đó

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Đạo hàm tiếp hàm $y'(x)$ ở trên

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Thay y', y'' vào phương trình không thuần nhất (5.20), lưu ý rằng $y_1(x), y_2(x)$ là nghiệm phương trình thuần nhất (5.20)

$$C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

suy ra $C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$. Ta được hệ phương trình tuyến tính (5.26) đối với hai ẩn $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases} \blacksquare$$

Chú ý rằng từ giả thiết $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, định thức Wronsky $W(y_1,y_2)\neq 0$ nên hệ phương trình (5.26) luôn luôn có nghiệm duy nhất $C_1'(x)=\phi(x), C_2'(x)=\psi(x)$. Suy ra

$$\begin{cases} C_1(x)=\int\phi(x)dx+C_1 \\ C_2(x)=\int\psi(x)dx+C_2. \end{cases}$$

Ví dụ 5.3.6

Giải phương trình $x^2y''-2xy'+2y=-2x^2 \;\Leftrightarrow\; y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=-2.$ Đây là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất. Phương trình thuần nhất tương ứng với nó đã được xét trong ví dụ 5.3.5

$$x^2y''-2xy'+2y=0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$\bar{y}=C_1x+C_2x^2.$$

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange để xác định nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho dưới dạng

$$y=C_1(x)x+C_2(x)x^2,$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là các hàm được xác định từ hệ phương trình (5.26)

$$\begin{cases} C_1'x+C_2'x^2=0 \\ C_1'+C_2'2x=-2. \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $C_1'=2,\ C_2'=-\dfrac{2}{x}$, suy ra

$$C_1=2x+K_1,\ C_2=-2\ln|x|+K_2,$$

K_1 và K_2 là các hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất ban đầu

$$y=(2x+K_1)\,x+(-2\ln|x|+K_2)x^2=-2x^2\ln|x|+K_1x+K_2x^2.$$

5.3.3 Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng

Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng là phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{5.27}$$

với p, q là các hằng số. Phương trình (5.27) là trường hợp riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai (5.20), nên các kết quả vừa chứng minh đều có hiệu lực. Trước hết, ta giải phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với (5.27)

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{5.28}$$

Tìm nghiệm của (5.28) dưới dạng $y = e^{kx}$. Thay $y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}$ vào phương trình (5.28) rồi giản ước cho e^{kx} ta thu được phương trình đại số

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{5.29}$$

Phương trình (5.29) được gọi là *phương trình đặc trưng* của (5.28). Xét các trường hợp sau liên quan tới nghiệm của phương trình đặc trưng.

a) Nếu $\Delta = p^2 - 4q > 0$, phương trình đặc trưng (5.29) có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2$, khi đó ta có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính phương trình thuần nhất (5.28)
$$y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}.$$
Vậy ta có nghiệm tổng quát của (5.28) $\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

b) Nếu $\Delta = p^2 - 4q = 0$, phương trình đặc trưng (5.29) có hai nghiệm thực trùng nhau $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$, ta có một nghiệm riêng $y = e^{k_1x}$ của phương trình (5.28). Nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với nghiệm thứ nhất của phương trình thuần nhất (5.28) được xác định theo công thức (5.24)
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2(x)}dx = y_1(x)\int \frac{e^{-px}dx}{e^{-px}} = xy_1(x).$$
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.28) là
$$\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}.$$

c) Nếu $\Delta = p^2 - 4q < 0$, phương trình đặc trưng (5.29) có hai nghiệm phức liên hợp

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ với } \alpha = -\frac{p}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$

Khi đó phương trình thuần nhất (5.28) có hai nghiệm riêng (theo công thức Euler)

$$y_1^\star = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$y_2^\star = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Ta đã biết tổ hợp tuyến tính của các nghiệm của phương trình thuần nhất lại là nghiệm của phương trình thuần nhất nên

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_1^\star + y_2^\star) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2 = \frac{1}{2i}(y_1^\star - y_2^\star) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

là hai nghiệm (hai hàm thực) độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (5.28). Vậy nghiệm tổng quát của nó

$$\bar{y} = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Từ nghiệm tổng quát $\bar{y}$ của phương trình thuần nhất ta có thể giải được phương trình không thuần nhất tương ứng bằng việc áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

Ví dụ 5.3.7

1. Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = 0$.
   Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho $k^2 - 3k + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $k_1 = 1, k_2 = 2$, vậy nghiệm tổng quát của nó

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

2. Giải phương trình $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.
   Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 4 = 0$ có nghiệm kép $k_1 = k_2 = 2$, vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

Để xác định nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho, ta sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, tìm nghiệm dưới dạng
$$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)xe^{2x},$$
trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là các hàm được xác định từ hệ phương trình (5.26)

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'2y_2' = f(x) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} C_1'e^{2x} + C_2'xe^{2x} = 0 \\ C_1'2e^{2x} + C_2'(1+2x)e^{2x} = 2e^{2x}. \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $C_1' = -2x,\ C_2' = 2$, suy ra

$$C_1 = -x^2 + K_1,\ C_2 = 2x + K_2,$$

K_1 và K_2 là các hằng số tùy ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất ban đầu

$$y = \left(-x^2 + K_1\right)e^{2x} + (2x + K_2)xe^{2x} = (x^2 + C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

3. Giải phương trình $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.
Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ có nghiệm phức $k_{1,2} = \pm i$, vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Để xác định nghiệm của phương trình không thuần nhất ban đầu, ta giải hệ phương trình (5.26)

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'2y_2' = f(x) \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \sin x + \cos 2x. \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ nhất của hệ với $\sin x$ và phương trình thứ hai của hệ với $\cos x$ rồi cộng lại, ta được

$$C_2' = (\sin x + \cos 2x)\cos x,\ C_1' = -(\sin x + \cos 2x)\sin x.$$

Suy ra

$$C_2 = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 3x}{6} + K_1$$

$$C_1 = -\frac{\cos x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{6} - \frac{x}{2} + K_2$$

Thay $C_1,\ C_2$ vừa tìm được vào nghiệm của phương trình thuần nhất, ta có nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = \left(-\frac{\cos x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{6} - \frac{x}{2} + K_2\right)\cos x +$$

$$+ \left(-\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 3x}{6} + K_1\right)\sin x$$

hay

$$y = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{2}x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Phương pháp hệ số bất định

Trong một số trường hợp khi vế phải của phương trình không thuần nhất, hàm $f(x)$ có dạng đặc biệt, ta có thể tìm nghiệm riêng của (5.27) dễ dàng hơn bằng phương pháp *hệ số bất định*. (Trong phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, đôi khi ta gặp các tích phân bất định phức tạp, việc tính các tích phân đó không đơn giản).

a) $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x. Khi đó, nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng sau

   $\star$) $y^* = e^{\alpha x}Q_n(x)$, nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

   $\star$) $y^* = xe^{\alpha x}Q_n(x)$, nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng.

   $\star$) $y^* = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$, nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

   trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n, cùng bậc với đa thức $P_n(x)$ với các hệ số chưa biết cần tìm.

b) $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$. Khi đó, ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất y^* dưới dạng

- $\star$) $y^* = e^{\alpha x}[M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x]$, nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.
- $\star$) $y^* = xe^{\alpha x}[M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x]$, nếu $\alpha \pm i\beta$ trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng.

trong đó $M_l(x),\ N_l(x)$ là các đa thức bậc l với $l = \max(m, n)$, các hệ số chưa biết cần tìm.

Ví dụ 5.3.8

1. Giải phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^{2x}.$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1, k_2 = 2$. Số α ở vế phải trùng với nghiệm $k_2 = 2$ của phương trình đặc trưng. Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y = x(Ax + B)e^{2x}$

$y' = (2Ax^2 + (2A+2B)x + B)e^{2x}, y'' = 2e^{2x}\big(2Ax^2 + (4A+2B)x + A + 2B\big).$

Thay vào phương trình đã cho

$$y'' - 3y' + 2y = (2Ax + 2A + B)e^{2x} = (3 - 4x)e^{2x}.$$

So sánh các hệ số ở 2 vế, các số A, B được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} 2A = -4 \\ 2A + B = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta tìm được $A = -2, B = 7$. Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho $y^* = (7x - 2x^2)e^{2x}$. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (7x - 2x^2)e^{2x}$$

2. Giải phương trình $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.
Bài tập này đã được giải trong ví dụ 5.3.7 bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Ta đưa ra một cách giải khác, sử dụng phương pháp hệ số bất định.

Phương trình đặc trưng có nghiệm phức $k_{1,2} = \pm i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm, ta sẽ tìm các nghiệm riêng của 2 phương trình không thuần nhất.
• $y'' + y = \sin x$. Vế phải của phương trình $f_1(x) = \sin x$, do nghiệm đặc trưng của phương trình trùng với $\alpha \pm i\beta$, nên nghiệm riêng có dạng $y_{r1} = x(A\cos x + B\sin x)$.
• $y'' + y = \cos 2x$, hàm ở vế phải $f_2(x) = \cos 2x$ nên nghiệm riêng của nó có dạng $y_{r2} = C\cos 2x + D\sin 2x$.

Vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình ban đầu dưới dạng

$$y = y_{r1} + y_{r2} = x(A\cos x + B\sin x) + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

Thay y và y'' vào phương trình đã cho, so sánh các hệ số ở 2 vế, ta được hệ phương trình tuyến tính. Giải hệ phương trình tuyến tính đó, ta được

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = -\frac{1}{3}, D = 0.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x.$$

5.3.4 Phương trình tuyến tính cấp cao hệ số hằng

Phương trình tuyến tính cấp cao hệ số hằng là mở rộng một cách tự nhiên các kết quả của phương trình tuyến tính cấp hai đã trình bày ở trên.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0 \tag{5.30}$$

là phương trình thuần nhất cấp n, phương trình đặc trưng tương ứng với nó

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_n = 0.$$

$\star$) Nếu phương trình đặc trưng có n nghiệm thực khác nhau từng đôi một $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thì hệ nghiệm cơ sở (độc lập tuyến tính) của (5.30)

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}. \tag{5.31}$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{k_i x}.$$

⋆) Nếu phương trình đặc trưng nhận λ là nghiệm thực bội m thì hệ nhận được từ (5.31) bằng cách thay m hàm ứng với $e^{\lambda x}$ bằng các hàm

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x},$$

là hệ nghiệm cơ sở của (5.30).
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.30) là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm riêng trong hệ nghiệm cơ sở của nó.

⋆) Nếu phương trình đặc trưng nhận $\lambda = \alpha + i\beta$ là nghiệm phức bội m thì cùng với nghiệm liên hợp của nó ta có $2m$ nghiệm độc lập tuyến tính của (5.30)

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Nghiệm của phương trình tuyến tính cấp cao không thuần nhất cũng được tìm như đã xét trong phương trình tuyến tính cấp hai.

Ví dụ 5.3.9

1. Tìm nghiệm của phương trình

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (k+1)^3 = 0$$

nhận $k = -1$ là nghiệm bội 3. Vậy nghiệm tổng quát

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

2. Giải phương trình $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Phương trình đặc trưng

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (k^2+1)^2 = 0$$

nhận các nghiệm phức $k_1 = i, k_2 = -i$ là nghiệm kép (bội 2). Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$$

5.4 Hệ phương trình vi phân cấp một

5.4.1 Các khái niệm mở đầu

Ta gọi hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{5.32}$$

là *hệ phương trình vi phân cấp một chuẩn tắc*, trong đó x là biến độc lập, $y_k(x), k = \overline{1, n}$ là các hàm chưa biết cần tìm. Các hàm $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là các hàm cho trước trên tập $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình (5.32) thỏa mãn điều kiện

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \tag{5.33}$$

được gọi là bài toán Cauchy, với $(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ là một điểm cho trước của không gian n chiều. Điều kiện (5.33) cũng được gọi là điều kiện đầu.

Định lí 5.4.1 *Nếu các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ trên miền Ω chứa điểm $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ thuộc không gian $(n+1)$ chiều, thì trong lân cận của điểm x_0 tồn tại duy nhất nghiệm $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ thỏa mãn điều kiện đầu (5.33).*

Nghiệm tổng quát của hệ là một bộ n hàm $y_i = \phi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), i = \overline{1, n}$ với $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tuỳ ý, có tính chất

⋆) Các hàm $y_i, i = \overline{1, n}$ thỏa mãn hệ (5.32) với mọi giá trị của $C_1, C_2, \ldots, C_n$

⋆) Với mỗi điểm $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ trong $\mathbb{R}^{n+1}$ sao cho tại đó điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được thỏa mãn thì tìm được $C_1 = C_1^0, \ldots, C_n = C_n^0$ sao cho các hàm số $y_i = \phi_i(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ thỏa mãn điều kiện đầu $y_i\,|_{x=x_0} = y_{i0}, i = \overline{1, n}$.

Nghiệm riêng của hệ là nghiệm có được khi cho các hằng số C_i trong nghiệm tổng quát các giá trị cụ thể $C_i = C_i^0, i = \overline{1,n}$.

Mối liên hệ giữa phương trình vi phân cấp cao và hệ phương trình chuẩn tắc

Xét phương trình vi phân cấp n (giải được theo $y^{(n)}$)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{5.34}$$

Đặt $y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n$, từ (5.34) ta được hệ phương trình vi phân cấp một chuẩn tắc

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{5.35}$$

Ngược lại từ một hệ phương trình chuẩn tắc có thể đưa về phương trình vi phân cấp cao bằng cách khử lần lượt các hàm số trong hệ. Để đơn giản ta xét hệ có hai ẩn hàm

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \phi(x, y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \psi(x, y_1, y_2) \end{cases} \tag{5.36}$$

Đạo hàm 2 vế phương trình thứ nhất của (5.36), ta được

$$y_1'' = \phi_x' + \phi_{y_1}' y_1' + \phi_{y_2}' y_2'$$

thay y_1', y_2' từ hai phương trình của hệ (5.36) vào hệ thức này ta có

$$y_1'' = \Phi(x, y_1, y_2).$$

Rút $y_2 = \theta(x, y_1, y_1')$ từ phương trình thứ nhất của hệ (5.36) rồi thay vào phương trình trên ta được

$$y_1'' = \Phi(x, y_1, \theta(x, y_1, y_1')) = \chi(x, y_1, y_1'). \tag{5.37}$$

Đây là phương trình vi phân cấp hai đối với hàm $y_1(x)$. Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là nghiệm của hệ (5.36) thì $y_1(x)$ là nghiệm của phương trình (5.37), từ đó ta tìm được hàm $y_2(x)$.

Ví dụ 5.4.1

1. Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = z & (1) \\ z' = y & (2) \end{cases}$$

với $y = y(x),\ z = z(x)$ là các hàm theo biến độc lập x.
Đạo hàm 2 vế phương trình (1) theo x rồi thay vào (2)

$$y'' = z' = y$$

Ta được phương trình vi phân cấp hai $y'' - y = 0$. Phương trình này có nghiệm tổng quát $y = C_1e^{-x} + C_2e^x$. Do đó, $z = -C_1e^{-x} + C_2e^x$.

2. Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' = yx + 2x^2 & (1) \\ y' = y^2 + 2yx & (2) \end{cases}$$

với $x = x(x),\ y = y(t)$ là các hàm theo biến độc lập t.
Nhân 2 vế của (1) với 2 rồi cộng các vế tương ứng với phương trình (2), ta được

$$2x' + y' = (2x + y)^2 \quad \text{hay} \quad \frac{d(2x + y)}{(2x + y)^2} = dt.$$

Tích phân 2 vế phương trình trên, suy ra $2x + y = -\dfrac{1}{t + C_2} \quad (*)$.
Mặt khác hệ phương trình có thể viết dưới dạng tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{x} = y + 2x \\ \dfrac{y'}{y} = y + 2x \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$ hay $x = C_1y$. Thay kết quả này vào $(*)$ ta được

$$y = -\frac{1}{(1 + 2C_1)(t + C_2)},\ x = -\frac{C_1}{(1 + 2C_1)(t + C_2)}.$$

Như vậy, để giải hệ phương trình chuẩn tắc ta có thể dùng phương pháp khử để đưa hệ về phương trình cấp cao cho một hàm nào đó trong số các ẩn hàm, rồi từ đó suy ra các ẩn hàm còn lại của hệ. Tuy nhiên việc này không phải lúc nào cũng làm được bởi vì có thể không biểu diễn được các hàm $y_2, y_3, \ldots, y_n$ qua các hàm $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}$.

5.4.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Trong mục này ta xét trường hợp đơn giản nhất về hệ phương trình.
Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{5.38}$$

Hệ (5.38) còn được viết dưới dạng ma trận

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{5.39}$$

trong đó

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ .. \\ y_n(x) \end{pmatrix},\ \mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ .. \\ y_n'(x) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nếu tồn tại một hệ nghiệm $y_1, y_2, \ldots, y_n$ độc lập tuyến tính thì nghiệm tổng quát của hệ (5.38) là

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

với $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tuỳ ý. Ta giải hệ (5.38) bằng hai phương pháp: Phương pháp khử đưa hệ về phương trình bậc cao và phương pháp toán tử sử dụng các kết quả của đại số tuyến tính.

Phương pháp khử: Từ phương trình thứ nhất của hệ (5.38) ta lấy đạo hàm hai vế $(n-1)$ lần, $y_1'', \ldots, y_1^{(n)}$, lần lượt thay các hàm $y_2', y_3', \ldots, y_n'$ qua các hàm $y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. Ta đưa hệ về phương trình vi phân tuyến tính cấp n đối với hàm y_1, giải phương trình vi phân cấp cao đó để tìm $y_1(x)$, rồi từ đó tìm được các hàm khác.

Ví dụ 5.4.2

Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' = 2y_2 + y_3 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất $y_1'' = y_1' + y_2'$, thay y_2' từ phương trình thứ hai vào phương trình này, ta có $y_1'' = y_1' + (-y_1 - y_2 + y_3) = y_1' - y_1 - y_2 + y_3$. Tiếp tục tính $y_1''' = y_1'' - y_1' - y_2' + y_3'$. Thay biểu thức y_2', y_3' từ phương trình thứ hai và thứ ba ta nhận được

$$y_1''' = y_1'' - y_1' - (-y_1 - y_2 + y_3) + (2y_2 + y_3) = y_1'' - y_1' + y_1 + 3y_2$$

Lại thay $y_2 = y_1' - y_1$ từ phương trình thứ nhất cuối cùng ta thu được phương trình

$$y_1''' - y_1'' - 2y_1' + 2y_1 = 0.$$

Phương trình đặc trưng $k^3 - k^2 - 2k + 2 = (k-1)(k^2-2) = 0$ có các nghiệm $k_1 = 1, k_2 = \sqrt{2}, k_3 = -\sqrt{2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình bậc ba

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 e^{-\sqrt{2}x},$$

suy ra

$$y_2 = (y_1' - y_1) = (\sqrt{2} - 1)C_2 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2} + 1)C_3 e^{-\sqrt{2}x}$$
$$y_3 = y_2' + y_2 + y_1 = C_1 e^x + 2C_2 e^{\sqrt{2}x} + 2C_3 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Phương pháp toán tử: Phương pháp toán tử để giải hệ (5.39) viết dưới dạng ma trận

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Chú ý rằng phương trình tuyến tính thuần nhất $y' = \alpha y$ có nghiệm $y = e^{x\alpha} \cdot C$. Mở rộng kết quả này sang hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, nghiệm tổng quát của (5.39) được viết hình thức dưới dạng ma trận

$$\mathbf{y} = e^{xA}\,\mathbf{C}, \tag{5.40}$$

trong đó $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ .. \\ C_n \end{pmatrix}$ là ma trận cột gồm các hằng số $C_1, C_2, \dots, C_n$ tuỳ ý, e^{xA} là ma trận vuông cấp n còn được gọi là *toán tử mũ* của ma trận xA. Toán tử mũ của ma trận B (kí hiệu $exp(B)$ hoặc e^B) được xác định như sau

$$exp(B) = e^B = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \quad I \quad \text{là ma trận đơn vị.}$$

Dựa vào tính chất của chuỗi số $e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, người ta chứng minh được chuỗi ma trận này hội tụ với mọi ma trận vuông B đồng thời toán tử mũ có các tính chất sau

- $e^O = I$, với I là ma trận đơn vị, O là ma trận không.
- $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$, với P^{-1} là ma trận nghịch đảo của P.
- $e^{A+B} = e^Ae^B$ với mọi ma trận A, B thỏa mãn $AB = BA$.
- Trường hợp đặc biệt $I = e^{A-A} = e^Ae^{-A}$ suy ra $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$.
- Nếu A là ma trận chéo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Từ các tính chất này ta suy ra (5.40) là nghiệm tổng quát của hệ (5.39), bằng cách đạo hàm 2 vế (5.40)

$$\mathbf{y}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x+\Delta x)A} - e^{xA}}{\Delta x}\mathbf{C} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta xA} - I}{\Delta x} e^{xA}\mathbf{C} = Ae^{xA}\mathbf{C} = A\mathbf{y}.$$

Chú ý rằng $e^{xA}\mathbf{C}$ là các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cột của ma trận e^{xA} (với các hệ số $C_1, C_2, \dots, C_n$) nên ma trận e^{xA} là *hệ nghiệm cơ sở* của (5.39).

Việc giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ thực chất là việc xác định ma trận e^{xA} để tìm hệ nghiệm cơ sở. Ta xét các trường hợp sau.

Ma trận A chéo hoá được

Trong đại số tuyến tính chúng ta biết rằng với A là ma trận vuông cấp n, A chéo hoá được khi và chỉ khi A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính. Khi đó $A = P\Lambda P^{-1}$, P là ma trận không suy biến, các cột của P là các véc tơ riêng, Λ là ma trận chéo, các phần tử trên đường chéo là các trị riêng tương ứng với các véc tơ riêng (các cột) trong ma trận P. Khi đó ma trận hệ nghiệm cơ sở của (5.39)

$$e^{xA} = e^{xP\Lambda P^{-1}} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & .. & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Nghiệm tổng quát của hệ (5.39) $\mathbf{y} = e^{xA}\,\mathbf{C} = Pe^{x\Lambda}P^{-1}\,\mathbf{C}$. Đặt $\mathbf{C}^* = P^{-1}\,\mathbf{C}$, nghiệm tổng quát là các tổ hợp tuyến tính của các cột của ma trận $Pe^{x\Lambda}$.

Ví dụ 5.4.3

1. Sử dụng phương pháp toán tử để giải hệ phương trình vi phân đã trình bày trong ví dụ 5.4.2

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' = 2y_2 + y_3 \end{cases} \qquad \text{hay} \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức nghiệm tổng quát (5.40), $\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{C}$.
Để tính ma trận e^{xA}, người ta tiến hành các bước:
• Tính đa thức đặc trưng của A và tìm các trị riêng của A

$$\lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = \sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$$

• Tìm các véc tơ riêng tương ứng với các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Từ đây ta được ma trận P gồm các véc tơ riêng

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát, theo (5.40),

$$\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{C} = e^{xP\Lambda P^{-1}}\mathbf{C} = P\, e^{x\Lambda}\, P^{-1}\mathbf{C}$$

Kí hiệu $P^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$ và coi $\mathbf{C}^*$ là véc tơ các hằng số tùy ý, nghiệm tổng quát của hệ đã cho $\mathbf{y} = Pe^{x\Lambda}\mathbf{C}^*$. Các cột của ma trận $Pe^{x\Lambda}$ là hệ nghiệm cơ sở

$$Pe^{x\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x} \end{pmatrix}$$

$$Pe^{x\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2} & \frac{e^{\sqrt{2}x}}{2} & e^{x} \\ -\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}x} & \frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}x} & 0 \\ e^{-\sqrt{2}x} & e^{\sqrt{2}x} & e^{x} \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân là các tổ hợp tuyến tính của các cột của ma trận $Pe^{x\Lambda}$, hay

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1\frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2} + C_2\frac{e^{\sqrt{2}x}}{2} + C_3e^{x} \\ y_2(x) &= C_1\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}x} + C_2\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}x} \\ y_3(x) &= C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2e^{\sqrt{2}x} + C_3e^{x}. \end{aligned}$$

Do C_i là các hằng số tùy ý, ta có thể chọn chúng để nghiệm phù hợp với kết quả thu được trong ví dụ 5.4.2

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1e^{x} + C_2e^{\sqrt{2}x} + C_3e^{-\sqrt{2}x} \\ y_2(x) &= (\sqrt{2}-1)C_2e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2}+1)C_3e^{-\sqrt{2}x} \\ y_3(x) &= C_1e^{x} + 2C_2e^{\sqrt{2}x} + 2C_3e^{-\sqrt{2}x}. \end{aligned}$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \qquad \text{hay} \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có thể chéo hoá với các trị riêng $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ và các véc tơ riêng tương ứng là các cột của ma trận không suy biến $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ma trận chéo $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vậy nghiệm tổng quát

$$\mathbf{y} = Pe^{x\Lambda}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4x} & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^{4x} - C_2e^x - C_3e^x \\ y_2(x) = C_1e^{4x} + C_2e^x \\ y_3(x) = C_1e^{4x} + C_3e^x. \end{cases}$$

Ma trận A không chéo hoá được

Trường hợp này, việc xác định ma trận e^{xA} để tìm hệ nghiệm cơ sở phức tạp hơn đôi chút. Dựa vào dạng Jordan của ma trận A, ta xét các trường hợp sau

• A có một giá trị riêng duy nhất λ và không gian con riêng ứng với trị riêng λ là không gian 1 chiều. Giả thiết $\mathbf{e}_1$ là véc tơ riêng của A ứng với trị riêng λ đó.

a) *Trường hợp A là ma trận vuông cấp hai*, khi đó $\exists P$ sao cho $A = P\Lambda P^{-1}$, trong đó $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, P là ma trận không suy biến được xác định bởi các hệ thức

$$(A - \lambda I)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, (A - \lambda I)\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_1. \tag{5.41}$$

Nói cách khác, P có các cột là các véc tơ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, trong đó $\mathbf{e}_1$ là véc tơ riêng của A và $(A - \lambda I)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$. Hệ nghiệm cơ sở $e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1}$ (hoặc $Pe^{x\Lambda}$) với

$$e^{x\Lambda} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 5.4.4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = -8y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -25y_1 + 12y_2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y},\ A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -25 & 12 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có trị riêng duy nhất $\lambda = 2$, không gian con riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$ là không gian 1 chiều, chọn véc tơ riêng $\mathbf{e}_1 = (2, 5)$. Từ hệ thức (5.41), ta tính được $\mathbf{e}_2 = (1, 3)$. Ma trận P với 2 cột là các véc tơ $\mathbf{e}_1 = (2, 5), \mathbf{e}_2 = (1, 3)$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Hệ nghiệm cơ sở

$$Pe^{x\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 & 2x+1 \\ 5 & 5x+3 \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm tổng quát $\begin{cases} y_1 = e^{2x}(2C_1 + C_2(2x+1)) \\ y_2 = e^{2x}(5C_1 + C_2(5x+3)) \end{cases}$.

b) *Trường hợp A là ma trận vuông cấp ba*, khi đó $\exists P$ sao cho $A = P\Lambda P^{-1}$, trong đó $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, P là ma trận không suy biến, các cột là các véc tơ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ được xác định bởi các hệ thức

$$(A - \lambda I)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, (A - \lambda I)\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 = \lambda\mathbf{e}_2. \tag{5.42}$$

($\mathbf{e}_1$ là véc tơ riêng của A). Hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình vi phân là $e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1}$ (hoặc $Pe^{x\Lambda}$) với

$$e^{x\Lambda} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \frac{x^2 e^{\lambda x}}{2} \\ 0 & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 5.4.5

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_3' = 3y_1 \quad + y_3 \end{cases} \qquad \text{hay} \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A, $P(\lambda) = (1-\lambda)^3$. Ma trận A có trị riêng duy nhất $\lambda = 1$, không gian con riêng ứng với trị riêng $\lambda = 1$ là không gian 1 chiều, chọn véc tơ riêng $\mathbf{e}_1 = (0, 12, 0)$. Từ hệ thức (5.42), ta tính được $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 6)$, $\mathbf{e}_3 = (2, 0, 1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Hệ nghiệm cơ sở

$$Pe^{x\Lambda} = e^x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 12x & 6x^2 \\ 0 & 6 & 1+6x \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm tổng quát $\mathbf{y} = Pe^{x\Lambda}\mathbf{C}$ hay

$$\begin{cases} y_1(x) = 2C_3e^x \\ y_2(x) = 12C_1e^x + 12C_2xe^x + 6C_3x^2e^x \\ y_3(x) = \qquad 6C_2e^x + C_3(e^x + 6xe^x). \end{cases}$$

• A là ma trận vuông cấp hai, đa thức đặc trưng $P(\lambda)$ không có nghiệm thực, gọi $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ là 2 nghiệm phức liên hợp của $P(\lambda)$. Giả sử $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ là véc tơ riêng (xét trong trường số phức) ứng với trị riêng $\lambda_1 = a + ib$

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (a + ib)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \ \Rightarrow \ \begin{cases} A\mathbf{v} = \ \ a\mathbf{v} + b\mathbf{u} \\ A\mathbf{u} = -b\mathbf{v} + a\mathbf{u} \end{cases}$$

Như vậy trong cơ sở $\{\mathbf{v},\ \mathbf{u}\}$ ma trận A có dạng $\Lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Nói cách khác nếu kí hiệu P là ma trận gồm 2 cột tọa độ của $\mathbf{v}$ và $\mathbf{u}$ thì

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad A = P\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}P^{-1}$$

Khi đó hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình

$$Pe^{x\Lambda} = P\begin{pmatrix} e^{(a+ib)x} & 0 \\ 0 & e^{(a-ib)x} \end{pmatrix}$$

Với các tổ hợp tuyến tính thích hợp của các nghiệm cơ sở để mọi nghiệm của hệ phương trình vi phân chỉ gồm các nghiệm thực, ta có công thức sau để xác định hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình vi phân

$$P\begin{pmatrix} e^{ax}\cos bx & -e^{ax}\sin bx \\ e^{ax}\sin bx & e^{ax}\cos bx \end{pmatrix}$$

Ví dụ 5.4.6

1. Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases} \qquad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0$$

có nghiệm phức $\lambda = a \pm ib = \pm 3i$. Giải hệ phương trình sau để tìm véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 3i$

$$\begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2u + (-1-3i)v = 0$$

Chọn véc tơ riêng $(u, v) = (1 + 3i, 2)$ rồi tách phần ảo và phần thực, từ đó chọn cơ sở gồm 2 véc tơ $(3, 0)$ và $(1, 2)$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình

$$Pe^{x\Lambda} = e^{ax}P\begin{pmatrix} \cos bx & -\sin bx \\ \sin bx & \cos bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 3x & -\sin 3x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix}$$

$$Pe^{x\Lambda} = \begin{pmatrix} 3\cos 3x + \sin 3x & \cos 3x - 3\sin 3x \\ 2\sin 3x & 2\cos 3x \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát của hệ là $Pe^{x\Lambda}\mathbf{C}$ hay

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(3\cos 3x + \sin 3x) + C_2(\cos 3x - 3\sin 3x) \\ z(x) &= 2C_1 \sin 3x + 2C_2 \cos 3x. \end{aligned}$$

2. Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_2 + y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad (\lambda^2+1)(\lambda-2) = 0$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm i$.
Véc tơ riêng $(1,1,3)$ ứng với $\lambda_1 = 2$, còn đối với trị riêng phức $\lambda_2 = i$ ta có vectơ riêng $(-1, 1-i, 2)$. Tách vectơ riêng này thành phần ảo, phần thực và chọn ma trận P như sau

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình

$$Pe^{x\Lambda} = P\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & -\cos x & \sin x \\ e^{2x} & \cos x + \sin x & \cos x - \sin x \\ 3e^{2x} & 2\cos x & -2\sin x \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1e^{2x} - C_2\cos x + C_3 \sin x \\ y_2(x) &= C_1e^{2x} + C_2(\cos x + \sin x) + C_3(\cos x - \sin x). \\ y_3(x) &= 3C_1e^{2x} + 2C_2\cos x - 2C_3\sin x. \end{aligned}$$

3. Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } (\lambda-2)(\lambda-3-i)(\lambda-3+i) = 0$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i$.
Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta có véc tơ riêng $(1,0,1)$, với trị riêng phức $\lambda_2 = 3+i$ ta có các vectơ riêng $(2+i, 1+3i, 5)$. Tách vectơ riêng này thành phần ảo, phần thực và chọn ma trận P như sau

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó hệ nghiệm cơ sở của hệ phương trình

$$\begin{aligned} Pe^{x\Lambda} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x}\cos x & e^{3x}\sin x \\ 0 & -e^{3x}\sin x & e^{3x}\cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x}(2\cos x - \sin x) & e^{3x}(2\sin x + \cos x) \\ 0 & e^{3x}(\cos x - 3\sin x) & e^{3x}(3\cos x + \sin x) \\ e^{2x} & 5e^{3x}\cos x & 5e^{3x}\sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát $\mathbf{y} = Pe^{x\Lambda}\mathbf{C}$, hay

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1e^{2x} + C_2e^{3x}(2\cos x - \sin x) + C_3e^{3x}(2\sin x + \cos x) \\ y_2(x) &= C_2e^{3x}(\cos x - 3\sin x) + C_3e^{3x}(3\cos x + \sin x) \\ y_3(x) &= C_1e^{2x} + C_2 5e^{3x}\cos x + C_3 5e^{3x}\sin x. \end{aligned}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Giải các phương trình vi phân có biến phân ly

(a) $(x^2 + x)\,dx + (y+1)^2\,dy = 0$ (b) $xy' - y = y^3$

(c) $(1 + e^x)yy' = e^x,\ y\big|_{x=0} = 1$ (d) $y - xy' = a(1 + x^2y')$

(e) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$ (f) $y' = \cos(x-y)$

(g) $y'\sin x = y\ln y, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$ (h) $y' = (8x + y + 1)^2$

(i) $(2x + 3y)dx + (4x + 6y)dy = 0$ (k) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$

(l) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$

(m) $\mathrm{tg}^2 x \sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,\mathrm{cotg}^2 y\,dy = 0.$

2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

(a) $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ (b) $(x-y)y\,dx - x^2dy = 0$

(c) $(x\,dy - y\,dx) = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ (d) $2(x + yy')^2 = y^2(1 + y'^2)$

(e) $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$ (f) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

(g) $x\ln\dfrac{x}{y} - y\,dx = 0$ (h) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

(i) $x\cos\dfrac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\dfrac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$

(k) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0,\quad y\big|_{x=2} = 1.$

3. Giải các phương trình tuyến tính cấp một và phương trình Bernoulli

(a) $y' - y\sin x = \sin x\cos x$ (b) $2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$

(c) $y' + ay = e^{mx}$ (d) $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$

(e) $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$ (f) $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$

4. Giải các phương trình vi phân sau

(a) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y\big|_{x=e} = \dfrac{e^2}{2}$

(b) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y\big|_{x=0} = \frac{9}{4}$

(c) $y\,dx + (x + x^2y)dy = 0$

(d) $2xy\dfrac{dx}{dy} = 2x^2 + 4y^2.$

5. Chứng minh rằng phương trình $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 3$ có một nghiệm là tam thức bậc hai. Giải phương trình này.

6. Chứng minh rằng hàm số $y = x\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình

$$xy' - y = x^2e^{x^2}.$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn: $y\big|_{x=1} = 1.$

7. Chứng minh rằng phương trình $(x^3-1)y' = y^2 + x^2y - 2x$ có một nghiệm dạng $y_1 = x^\alpha$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách đặt $y = y_1 + z$.

8. Giải các phương trình vi phân toàn phần hoặc sử dụng thừa số tích phân để đưa phương trình về phương trình vi phân toàn phần và giải chúng.

   (a) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xy\,dy = 0$

   (b) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

   (c) $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0,\ \ y\Big|_{x=0} = 2$

   (d) $x\,dy + y\,dx + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$

   (e) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

9. Giải các phương trình vi phân sau

   (a) $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right) dy = 0$

   (b) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right) dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right) dy = 0$

   (c) $(x + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

   (d) $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$

   (e) $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

10. Chứng minh rằng phương trình

$$(1 - x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0$$

có một nghiệm dạng $y_1 = ax^n,\ n \in \mathbb{N}$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách đặt $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$.

11. Giải các phương trình vi phân cấp hai

    (a) $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$

    (b) $y'' = e^x + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

    (c) $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

    (d) $y''(1+\ln x) + \dfrac{1}{x}y' = 2 + \ln x,\ y\big|_{x=1} = \dfrac{1}{2},\ y'\big|_{x=1} = 1$

    (e) $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

12. Giải các phương trình vi phân sau

    (a) $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y'^2 + y^2}$

    (b) $y'' + 2y'(1-2y) = 0,\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

    (c) $xy'' - y' = x^2\ln x,\ y\big|_{x=1} = -\dfrac{4}{9},\ y'\big|_{x=1} = -1$

    (d) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

    (e) $y''^2 + y'^2 = a^2.$

13. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất biết một nghiệm riêng $y_1(x)$

    (a) $y''(\sin x - \cos x) - 2y'\sin x + y(\cos x + \sin x) = 0,\ y_1 = e^x$

    (b) $(1-x^2)y'' - xy' + \dfrac{y}{4} = 0,\ y_1 = \sqrt{1+x}$

    (c) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0,\ \ y_1(x)$ là một đa thức.

(d) $(1+x)y'' + (1-x)y' - y = 0, \quad y_1 = (1+x)^{-1}$

(e) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x)$ là hàm có dạng $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

14. Giải các phương trình vi phân sau biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình

(a) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0, \quad y_1(x)$ có dạng $e^{\alpha x},\ \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1-x)y = 0,\ y\big|_{x=1} = 0,\ y'\big|_{x=1} = -1$ biết $y_1(x) = e^x$.

(c) $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$, biết phương trình có 2 nghiệm riêng $y_1(x) = 1$ và $y_2(x) = x$.

(d) $x^2y'' + xy' - y = x^2$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm $y_1(x) = x$.

(e) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng dạng đa thức.

15. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng

(a) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$

(b) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$

(c) $y'' + y = 6\sin 2x$

(d) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

(e) $y'' - 4y = e^x\big((-4x+4)\cos x - (2x-6)\sin x\big)$.

16. Giải các phương trình vi phân sau

(a) $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$.

(b) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4\sin x)$.

(c) $y'' + 4y = \cos^2 x$

(d) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

(e) $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$.

17. Giải phương trình vi phân sau bằng phép đổi biến $x = \sqrt{t}$

$$xy'' - y' - x^3y = x^5.$$

18. Giải phương trình vi phân $x^2y'' + xy' - 4y = x^2 \ln x$ bằng phép đổi biến $x = e^t$.

19. Giải phương trình vi phân $y'' - y' - 4e^{2x}y = e^{2x}\cos e^x$ bằng phép đổi biến $e^x = t$.

20. Giải các hệ phương trình vi phân sau

(a) $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$ (b) Đề sai $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z^2} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y + 3z} \\ z' = \dfrac{z}{2y + 3z} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz} \\ z' = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z + 3 \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z + 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x} \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$ (k) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases}$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. (a) $2\big(x^3 + (y+1)^3\big) + 3x^2 = C$

   (b) $y = Cx\sqrt{y^2+1}$

   (c) $\frac{y^2-1}{2} + \ln 2 = \ln(1+e^x)$

   (d) $y - a = \dfrac{Cx}{1+ax}$ hay $y = \dfrac{Cx + a + a^2x}{1+ax}$.

   (e) $\ln \operatorname{tg} \frac{y}{2} - \ln C = -2\sin x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = Ce^{-2\sin x}$

   (f) $\operatorname{cotg} \dfrac{y-x}{2} = x + C$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

   (h) ***Hướng dẫn***: Đặt $u = 8x + y + 1$.

   (l) $3x + 6y + 9\ln(2x + 3y - 7) = C$.

2. (a) $x = y\ln^2 Cy$

   (b) $x = y(\ln|x| + C)$

   (c) $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

   (d) $y = \sqrt{(C \pm x)^2 - 2x^2}$

   (e) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y = C$
   Phương trình có thể đưa về dạng phương trình vi phân toàn phần.

   (f) $y = (C \pm \sqrt{x})^2 - x$

   (g) $x = ye^{Cy+1}$

   (h) $y = xe^{Cx+1}$

   (i) $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}$

   (k) $y^2 = x^2 - \frac{3}{8}x^3$

3. (a) $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$.

   (b) $y = \frac{C}{\sqrt{x(x-1)}} - \frac{\ln(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x(x-1)})}{2\sqrt{x(x-1)}} = \frac{C' - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x(x-1)}}$

   (c) $y = \begin{cases} \frac{1}{m+a}e^{mx} + Ce^{-ax} & \text{nếu} \quad m + a \neq 0 \\ xe^{-ax} + Ce^{-ax} & \text{nếu} \quad m + a = 0. \end{cases}$

   (d) $y = \dfrac{1}{x} + C\dfrac{x^2+1}{x}$.

(e) ***Hướng dẫn:*** Đặt $u = \sin y$, ta được $u = \sin y = x - 1 + Ce^{-x}$

(f) $x = \dfrac{C}{\sqrt{y^2+1}} - \dfrac{\cos y}{\sqrt{y^2+1}}$

4. (a) $y = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$

(b) $y = 1 + e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^x$

(c) $x = \dfrac{1}{y(\ln|y| + C)}$

(d) $x^2 = y^2(4\ln|y| + C)$

5. $y = C\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} + 2x^2 - 1$

6. $y = x + x\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt$

7. $y = x^2 + \dfrac{x^3 - 1}{x + C}$

8.

(a) $\dfrac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 = C$

(b) $x^2 + x + y^2 - xy - y = C$

(c) $\dfrac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$

(d) $xy - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$

(e) $\sqrt{1 + x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$

9. (a) $\ln|\dfrac{y}{x}| + \dfrac{xy}{y - x} = C$

(b) $\sin\dfrac{y}{x} - \cos\dfrac{x}{y} + x - \dfrac{1}{y} = C$

(c) ***Hướng dẫn***: Tìm thừa số tích phân: $\mu = \frac{1}{x^2}$. Suy ra nghiệm

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$$

(d) $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{\ln x}{y} = C$. ***Hướng dẫn***: chọn $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ làm thừa số tích phân

(e) $e^x(x^2y + \dfrac{y^3}{3}) = C$

10. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x + C} - x^2 = -\dfrac{Cx^2 + 1}{x + C}$

11. (a) $y = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)} + C_1x + C_2$

(b) $y = e^x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + C_1x + C_2$

(c) $y = -\dfrac{x}{C_1} + \dfrac{(1 + C_1^2)\ln(1 + C_1x)}{C_1^2} + C_2$

(d) $y = \dfrac{x^2}{2}$

(e) $C_1(x + C_2) = \frac{2}{3}(C_1y - 1)^{\frac{3}{2}}$

12. (a) $\ln\dfrac{C_1y - 1}{C_1y + 1} = x + C_2$

(b) $y = \dfrac{x}{2(x+1)}$

(c) $y = \dfrac{x^3\ln x}{3} - \dfrac{4x^3}{9}$

(d) $x = y + C_1\ln|y| + C_2$

(e) $y = -a\cos(x + C_1) + C_2$

13. (a) $y = C_1e^x + C_2\sin x$

(b) $y = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{|1-x|}$

(c) $y = C_1(x^2 + 1) + C_2e^x$.

Hướng dẫn: Ta có thể tìm nghiệm $y_1(x) = x^2 + 1$ bằng phương pháp hệ số bất định.

(d) $y = C_1\dfrac{1}{1+x} + C_2e^x(1+x)^{-1}$

(e) $y_1 = x$ và nghiệm tổng quát $y = C_1x + C_2\ln x$

14. (a) $y = C_1e^{-2x} + C_2(4x^2 + 1)$

    (b) $y = e^{x-1} - x^2$

    (c) $y = C_1(x - 1) + C_2x^2 + 1$

    (d) $y = \dfrac{x^2}{3} + C_1x + \dfrac{C_2}{x}$

    (e) $y = C_1(x + 2) + \dfrac{C_2}{x} + (\dfrac{x}{2} + 1)\ln x - \dfrac{x}{4} + 1$

15. (a) $y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^{4x} + x^3 + x$

    (b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + e^x - 1$

    (c) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2\sin 2x$

    (d) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$

    (e) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + e^x\big((x - \frac{6}{5})\cos x - \frac{7}{5}\sin x\big)$

16. (a) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + \dfrac{3}{2}xe^{-2x}$

    (b) $y = \bar{y} + y^* = e^x\big((C_1 + 2x)\cos x + (C_2 + x)\sin x\big)$

    (c) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}(x\sin 2x + 1)$.

    Hướng dẫn: Vế phải của phương trình: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$. Giải 2 phương trình vi phân

    $$y'' + 4y = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

    $$y'' + 4y = \frac{\cos 2x}{2} \qquad (2)$$

    (d) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \dfrac{x}{2}\sin 2x$

    (e) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sqrt{\sin 2x}$

17. $y = C_1e^{\frac{x^2}{2}} + C_2e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2$

18. $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{x^2}{16}(2\ln^2 x - \ln x)$

19. $y = C_1e^{2e^x} + C_2e^{-2e^x} - \dfrac{1}{5}\cos e^x$

20. (a) $\begin{cases} y = x + C_1 e^{C_2 x} \\ z = -\frac{1}{C_1 C_2 e^{C_2 x}}. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = \frac{-2C_1}{(C_1 x + C_2)^2} \\ z = \frac{1}{C_1 x + C_2}. \end{cases}$

(c) $y = C_1 x + C_2,\ z = Cy$, với $2C_1 + 3CC_1 = 1$

(d) $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = C_2 \cos t - C_1 \sin t \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y = C_2 \sqrt[3]{3x^2 + C_1} \\ z = \frac{\sqrt[3]{3x^2 + C_1}}{2C_2^2} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \\ z = 2C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y = (C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x + 1 \\ z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2e^{-x} \\ z = -C_1 e^x - \frac{3}{2} C_2 e^{2x} + e^{-x} \end{cases}$

(i) Các trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2$, có nhiều cách chọn ma trận các véc tơ riêng $\begin{cases} x = C_1 e^t + (C_2 + C_3)e^{-2t} \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-2t} \\ z = C_1 e^t - C_3 e^{-2t} \end{cases}$

(k) Các trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

$$\begin{cases} x = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t} \\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ z = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

CHỈ DẪN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. DIEUDONN NÉ, J.: Cơ sở giải tích hiện đại, tập I. NXB Đại học và THCN, Hà nội 1973.

2. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ.: Toán cao cấp, tập II. NXB Giáo dục, Hà nội 2000.

3. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ.: Toán cao cấp, tập III. NXB Giáo dục, Hà nội 2000.

4. PHẠM NGỌC THAO.: Giáo trình giải tích. Trường Đại học Đại cương, Hà nội 1996.

5. PHIKHTENGOL, G.M.: Phép tính vi phân, tích phân. Moxkva 1960.

6. RUDIN, U.: Cơ sở giải tích toán học. Moxkva 1966.