

Super-élément fini perforé non-linéaire pour la modélisation des assemblages dans les calculs de structures

Phuc Viet Khoa NGUYEN, Doctorant 2A

département DMAS/CRD, phuc_viet_khoa.nguyen@onera.fr

Directeur(s) de thèse : Nicolas LECONTE ¹

Encadrant(s) : Bertrand LANGRAND ¹, Franck MASSA ², Cédric HUBERT ²

Financement(s) : 50% ONERA - 50% Région Hauts de France

¹ DMAS/ONERA, Lille, ² LAMIH UMR CNRS 8201, UPHF

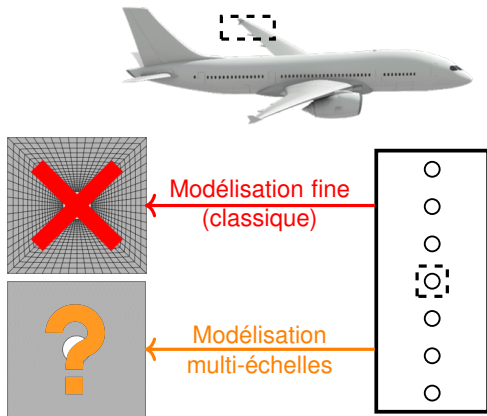
Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Super-élément perforé
- 3 Méthodes multi-échelles
- 4 Conclusion et perspectives

1. Introduction



Domaine aéronautique / Sécurité (passive) des usagers



Jumeau numérique prédictif



Assemblages rivetés :
concentrations de contraintes !
structure complète !



Maîtriser les temps de simulation

2. Super-élément perforé

Principe

Une formulation de super-élément perforé a été proposée

Problème aux limites en **élasticité linéaire**

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - b_i = 0 \quad \text{dans } V$$

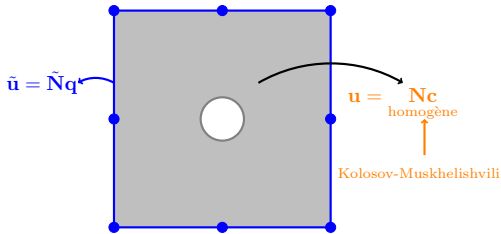
$$\sigma_{ij} n_j + \hat{T}_i = 0 \quad \text{sur } S_t$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{sur } S_u$$

En utilisant le **principe de l'Energie Potentielle Totale**

$$\Pi_{TPE}(u_i) = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS + \frac{1}{2} \int_V \left(-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - b_i \right) dV - \frac{1}{2} \int_V b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS$$

Méthode hybride-Trefftz déplacement*



Méthode de Trefftz :

Equation d'équilibre a priori satisfaite

Hybridation :

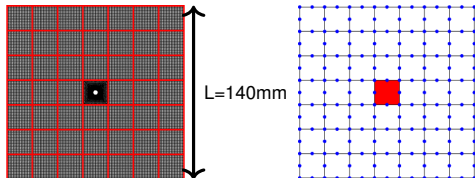
Compatibilité des déplacements aux frontières

En **LINEAIRE**, il existe une solution analytique (**Solution de Kolosov-Muskhelishvili**) qui satisfait le problème aux limites

* Leconte, N. et al. (2010). Finite Elements in Analysis and Design 46, 819-828.

2. Super-élément perforé

Evaluation de la précision et de l'efficacité



Plaque perforée de rayon $a=2\text{mm}$ élasticité linéaire

($E=74000\text{MPa}$, $\nu=0,3$) en traction uni-axiale ($u_x=0,117\text{mm}$)

(par un maillage fin et par un super-élément (SE))

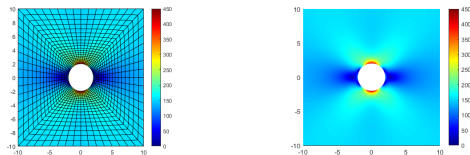


Fig 1 : Contrainte de von Mises dans la zone perforée
modélisée par maillage MEF et SE

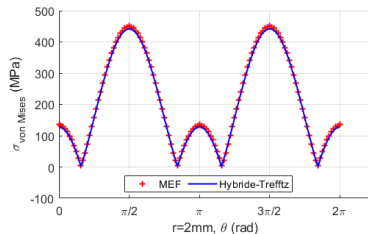


Fig 2 : Evolution des contraintes sur le bord de la perforation

Calcul	$\max(\sigma_{VM})$ MPa	$\frac{\ \sigma_{VM}^{MEF} - \sigma_{VM}^{calcul}\ }{\ \sigma_{VM}^{MEF}\ } * 100\%$ Ecart%	Temps de calcul (s)
MEF	450	-	10
Hybride-Trefftz	442	1,8	0,15

Efficacité et précision!

2. Super-élément perforé

Limitations



Super-élément **limité à l'élasticité linéaire**



En **non linéaire**, il n'existe **pas de solution analytique analogue à celle de Kolosov!**

$$\begin{aligned}u_x(R, \theta) &= \frac{1}{2\mu} \sum_{j=-N}^M \alpha_j \left[(kR^j + R^{-j}) \cos j\theta - j (R^j - R^{j-2}) \cos (j-2)\theta \right] \\&+ \beta_j \left[- (kR^j + R^{-j}) \sin j\theta + j (R^j - R^{j-2}) \sin (j-2)\theta \right] \\&= \sum_{j=-N}^M (\alpha_j N_{\alpha_j} + \beta_j N_{\beta_j})\end{aligned}$$

Situation d'impact : **fortement non linéaire!**

Objectif

Formuler un «super-élément» capable de traiter les problèmes avec non-linéarités géométriques et matérielles



Méthodes multi-échelles

3. Méthodes multi-échelles

Pistes investiguées (pour la non-linéarité)

Méthodes d'homogénéisation

- **Analytique** : Modèles de Voigt, Reus ou Hashin-Shtrikman, etc.
- **Semi-analytique** (basée sur le problème d'Eshelby) : Mori-Tanaka, self-consistent, etc.
- **Numérique** : Eléments finis au carré (EF^2), Transformation Field Analysis (TFA)



3. Méthodes multi-échelles

Méthodes d'homogénéisation - Transformation Field Analysis

Equations fondamentales* :

- Relations de localisation (macro \rightarrow micro) :

$$\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_r : \mathbf{E}(\mathbf{X}) + \sum_{s=1}^n \mathbf{D}_{rs} : \boldsymbol{\epsilon}_s^{in}(\mathbf{x})$$

Linéaire Non-linéaire

$$\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_r : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) - \sum_{s=1}^n \mathbf{F}_{rs} : \mathbf{L}_s : \boldsymbol{\epsilon}_s^{in}(\mathbf{x})$$

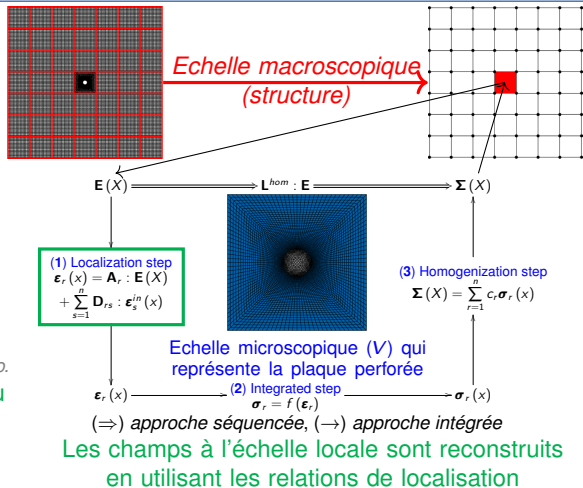
- Relations d'homogénéisation (micro \rightarrow macro) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^n c_r \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{x}) ; \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^n c_r \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x})$$

- $\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r$: tenseurs de localisation, $\mathbf{D}_{rs}, \mathbf{F}_{rs}$: tenseurs d'influence,
- \mathbf{L}_s : tenseur d'élasticité, $\boldsymbol{\epsilon}_s^{in}$: tenseur de déformation inélastique,
- (\cdot) signifie le champ de chaque sous-volume (V_r) à l'échelle micro.

Les tenseurs ne dépendent QUE de la géométrie du VER et des propriétés du matériau élastique
 \Rightarrow A calculer une seule fois (étape « offline »)

*Dvorak, G.J. (1992). Proc. R. Soc. Lond. A 437, 311-327.



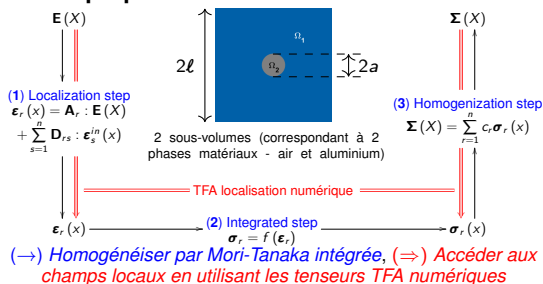
3. Méthodes multi-échelles

Méthodes d'homogénéisation - Mori-Tanaka combinée à TFA

Méthode TFA :

- **Approche séquentielle** : Perte de valeurs locales (ϵ_r, σ_r). La loi homogénéisée est souvent trop complexe pour implémenter dans un code de calcul
- **Approche intégrée** : Nécessite un grand nombre de sous-volumes \rightarrow trop chère

Méthode proposée : Mori-Tanaka* combinée à TFA



Méthodologie :

- **Etape 1** : Définir de dimension à l'échelle microscopique

$$\text{Hétérogénéité}(a) < V(\ell) < \text{Structure}(L) \\ \Rightarrow \ell \geq 5a^{**}$$

- **Etape 2** : Calculer les tenseurs de TFA (pour la relocalisation)
- **Etape 3** : Homogénéiser ($E \rightarrow \Sigma$) : Par **Mori-Tanaka intégrée**
- **Etape 4** : Post-traiter : Relocaliser des champs locaux (ϵ_r, σ_r) en utilisant les tenseurs de l'étape 2 (**tenseurs TFA numériques**)

* Chaboche, J.L. et al. (2001). International Journal of Plasticity 17, 411-439.

** Leconte, N. et al. (2023). International Journal of Solids and Structures 285, 112559.

3. Méthodes multi-échelles

Méthodes d'homogénéisation - Résultats numériques

Même cas de calcul linéaire (dans un premier temps) que dans la partie précédente réutilisée pour évaluer la méthode TFA.

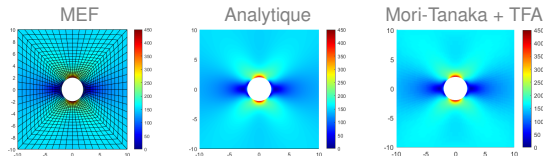


Fig 3 : Contrainte de von Mises dans la zone perforée modélisée par la MEF, l'analytique et la Mori-Tanaka combinée à TFA

Calcul	max (σ_{VM}) MPa	Ecart% $\frac{\ \sigma_{VM}^{MEF} - \sigma_{VM}^{calcul}\ }{\ \sigma_{VM}^{MEF}\ } * 100\%$	Temps de calcul (s)
MEF	450	-	10
Hybride-Trefftz	442	1,8	0.15
Mori-Tanaka+TFA	426	5,6	0,10
TFA	426	5,6	1200

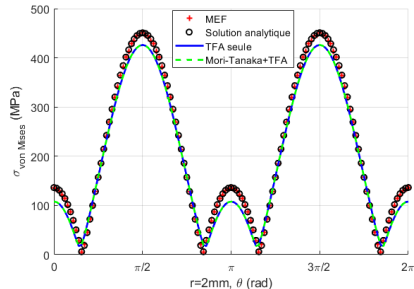


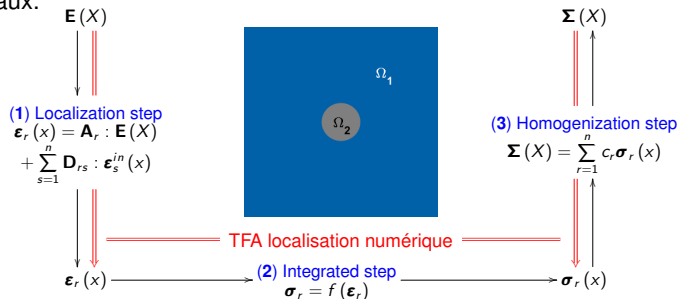
Fig 4 : Evolution des contraintes sur le bord de la perforation

⇒ aussi efficace que le super-élément

4. Conclusion et perspectives

Conclusion

- Une approche TFA intégrée et une approche Mori-Tanaka intégrée combinée à TFA ont été proposées.
- Ces deux approches ont fourni des résultats acceptables dans le problème de la plaque perforée linéaire.
- L'approche combinée est efficace en terme de temps de calcul et l'approche TFA pure n'est pas retenue pour la suite des travaux.



(\Rightarrow) Accéder aux champs locaux en utilisant les tenseurs TFA numériques

4. Conclusion et perspectives

Perspectives

Méthodes d'homogénéisation

- **Analytique** : Modèles de Voigt, Reus ou Hashin-Shtrikman, etc.
- **Semi-analytique** (basée sur le problème d'Eshelby) : Mori-Tanaka, self-consistent, etc.
- **Numérique** : Eléments finis au carré (EF^2), Transformation Field Analysis (TFA)

$\mathbf{E}, \Sigma, \mathbb{L}^{hom}$

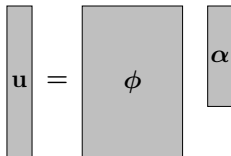


Matériau homogène

Réduction de modèles

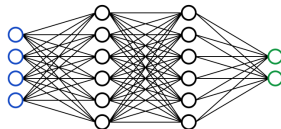
Proper Orthogonal Decomposition (POD)

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\phi}_i \alpha_i$$



Apprentissage automatique

- Artificial Neural Networks (ANNs)
- Physics-Guided Neural Networks (PGNNs)
- Physics-Informed Neural Networks (PINNs)



⇒ **Evaluation non linéaire à venir**

Merci de votre attention !

www.onera.fr

Références

Rapports techniques :

- P.V.K. Nguyen, *Matlab implementation of a linear membrane hybrid-Trefftz displacement perforated plate super-element*, Technical Report No. RT 3/35057 DMAS. ONERA-DMAS, Lille, France (novembre 2024).
- P.V.K. Nguyen, *Homogenization of a linear perforated plate using multimat Z-set*, Technical Report No. RT 2/35057 DMAS. ONERA-DMAS, Lille, France (novembre 2024).
- P.V.K. Nguyen, *Perforated plate analytical and numerical linear reference solutions*, Technical Report No. RT 1/35057 DMAS. ONERA-DMAS, Lille, France (octobre 2024).

Communications :

- *Congrès Français de Mécanique (CFM)*, 25-29 août 2025, Metz, France (prévue)
- *Computational Modeling of Complex Materials Across the scales (CMCS)*, 13-16 mai 2025, Champs-sur-Marne, France (prévue)
- *Congrès des Jeunes Chercheurs en Mécanique (MECA-J)*, 28-30 août 2024, En ligne, France (présentation orale)

Formations

Ecole doctorale : 42 crédits obtenus / 60 crédits requis

- Ethique - Intégrité Scientifique - Éthique et recherche durable
- Atelier : prise de parole en public lors de séminaire scientifique
- Workshop : how to write a scientific paper
- Diffuser ses travaux scientifiques : édition et autres formes de communication scientifique
- MOOC Doctorat et Poursuite de carrière
- Séminaire : le mois des GT Mécamat
- Modules d'insertion professionnelle
- etc.

ONERA :

- Machine Learning dans un contexte aéronautique