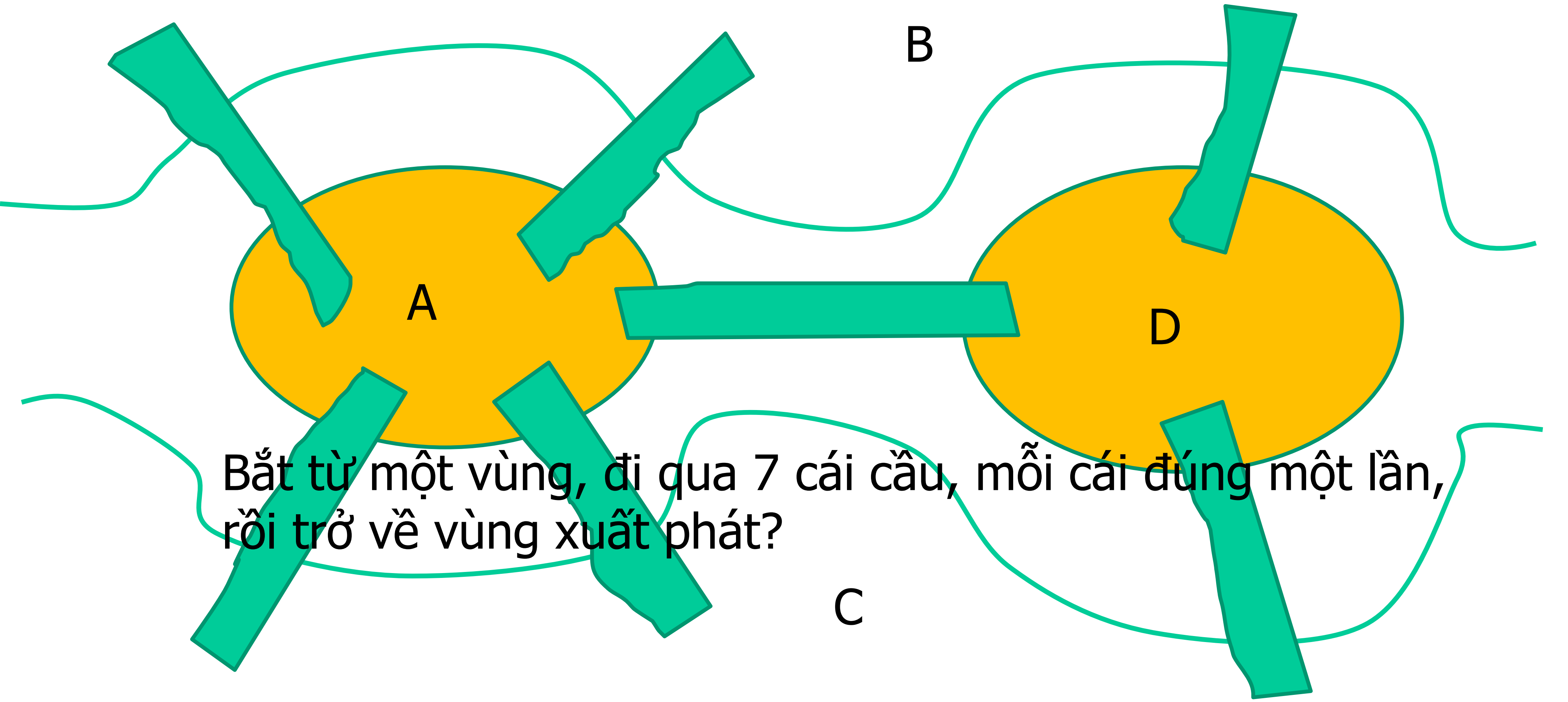
ĐỒ THỊ EULER VÀ HAMILTON

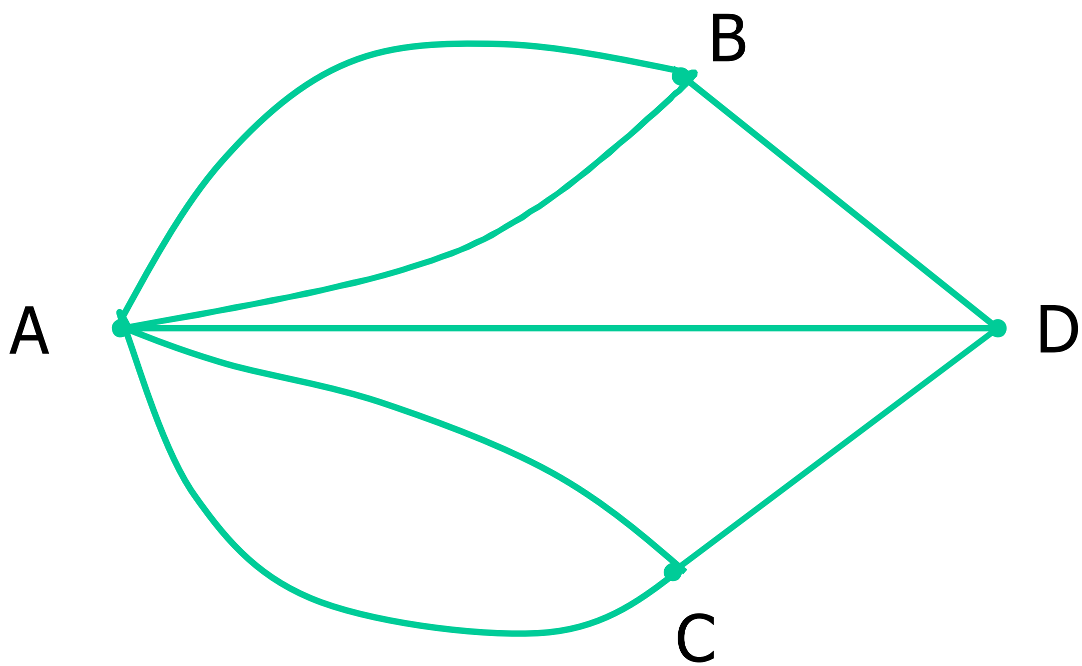
- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

ĐỒ THỊ EULER



Bắt từ một vùng, đi qua 7 cái cầu, mỗi cái đúng một lần, rồi trở về vùng xuất phát?

ĐỒ THỊ EULER

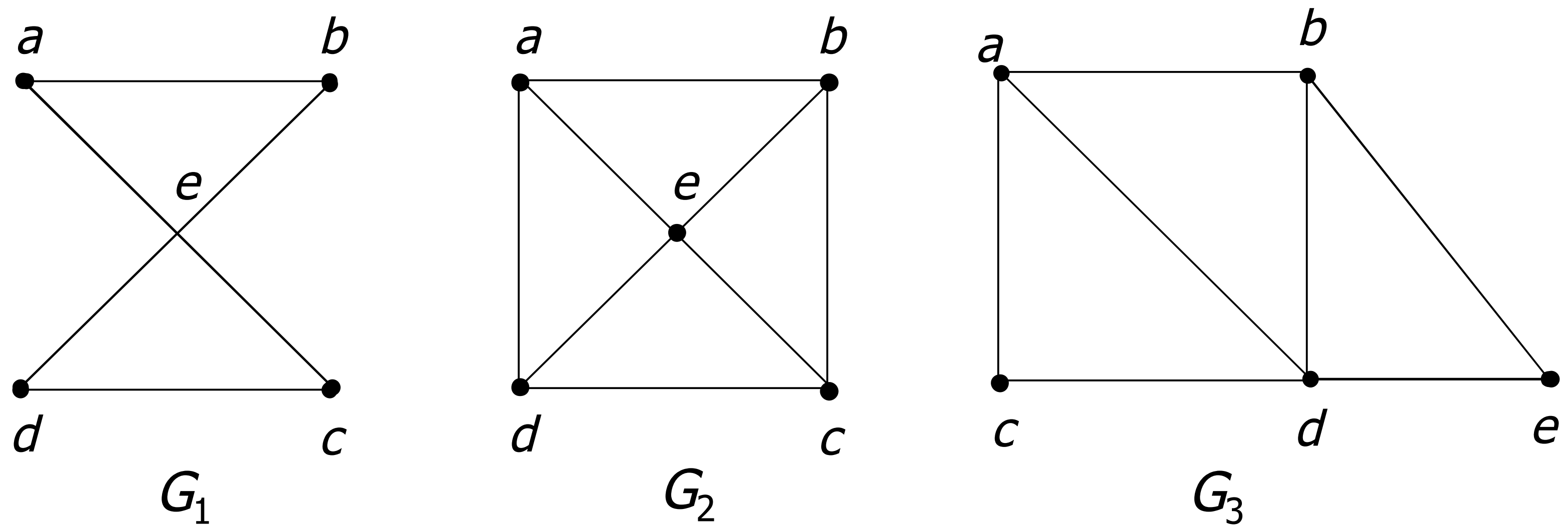


Bài toán không có lời giải

ĐỒ THỊ EULER

- Đường đi đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần gọi là đường đi Euler
- Chu trình đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần gọi là chu trình Euler
- Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler và gọi là đồ thị nửa Euler nếu nó có đường đi Euler

ĐỒ THỊ EULER



- G_1 có chu trình Euler, ví dụ a, e, c, d, e, b, a
- G_3 có đường đi Euler a, c, d, e, b, d, a, b nhưng không có chu trình Euler
- G_2 không có đường đi và chu trình Euler

ĐỒ THỊ EULER

- Một đồ thị Euler là nữa Euler (tại sao?)
- **Định lý 1:** Đồ thị vô hướng liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn
- **Chứng minh?**

ĐỒ THỊ EULER

- Giả sử G là đồ thị Euler
  - Gọi C là chu trình Euler trong G
  - Xét đỉnh v bất kỳ của G, giả sử C đi qua nó k lần
  - Vì mỗi lần C đi qua v có duy nhất một cặp cạnh vào và ra khỏi v thuộc chu trình $\Rightarrow$ có 2k cạnh kề với v nên deg(v)=2k (chẵn)

ĐỒ THỊ EULER

- Giả sử deg(v) chẵn với mọi v trong G, chu trình Euler trong G được xây dựng như sau:

  Bắt đầu từ 1 đỉnh u đi theo các cạnh một cách tùy ý nhưng không lặp lại cạnh nào đã đi qua cho đến khi không thể đi tiếp được nữa phải dừng ở đỉnh w, lúc này mọi cạnh tới w đã đi qua (vì ngược lại sẽ có cạnh ra khỏi w chưa đi qua, nên chưa thể dừng ở w)

  Rõ ràng w u, vì nếu w □u thì số lần tới w nhiều hơn số lần ra khỏi w là 1 nên deg(w) lẻ trái với giả thiết, vậy ta có chu trình C= u,v,..., z,u

ĐỒ THỊ EULER

- Nếu mọi cạnh của G thuộc chu trình thì C là chu trình Euler
- Ngược lại gọi s là một đỉnh trong chu trình này liên thuộc với 1 cạnh mà C chưa đi qua (s tồn lại do G liên thông)

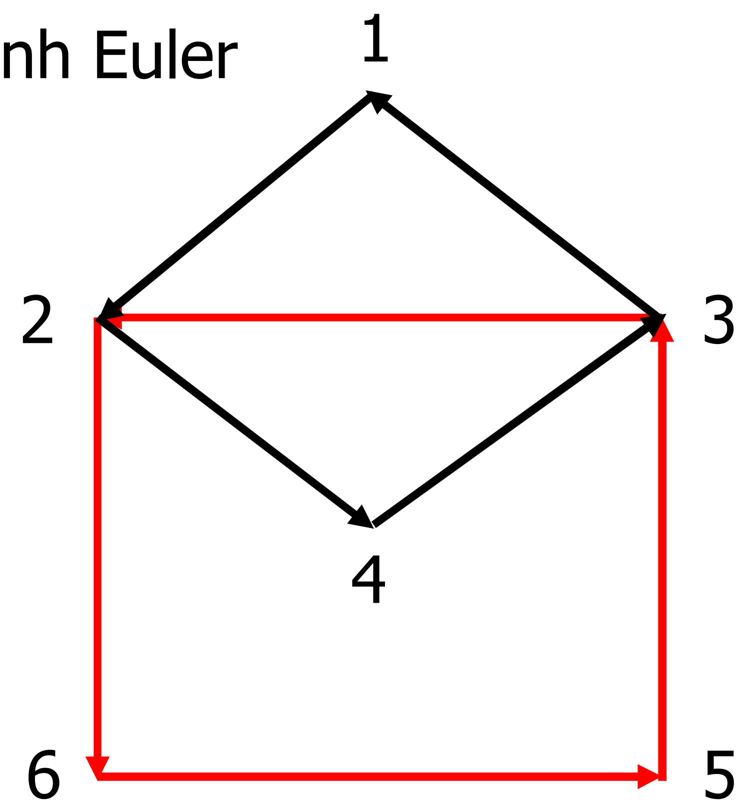
ĐỒ THỊ EULER

Mở rộng (breakout) C thành chu trình lớn hơn bằng cách khởi hành lại từ s, đi theo chu trình C cho đến khi hoàn tất nó tại s, rồi tiếp tục đi theo cạnh liên thuộc với s mà chu trình cũ chưa đi qua nói trên cho đến khi phải dừng lại, ta được một chu trình mới chứa chu trình cũ

Cứ tiếp tục quá trình "thành lập và mở rộng chu trình" cho đến khi thu được chu trình C không thể mở rộng hơn được nữa (do G hữu hạn, điều này sẽ xẩy ra khi không còn cạnh nào liên thuộc với một đỉnh trong C mà chưa được đi qua)

ĐỒ THỊ EULER

Xây dựng chu trình Euler



ĐỒ THỊ EULER

- Gọi e =(x, y) là một cạnh bất kỳ của G, vì G liên thông nên có đường đi u, u_1, u_2, …, x từ u đến x
- Cạnh (u, u_1) phải thuộc chu trình C (vì không còn cạnh nào tới u chưa đi qua), suy ra u_1 thuộc chu trình C
- Tương tự (u_1, u_2) thuộc chu trình nên u_2 thuộc chu trình, cứ tiếp tục ta suy ra x thuộc chu trình C

ĐỒ THỊ EULER

- Vì mọi cạnh đi qua x đều thuộc chu trình C nên e =(x, y) thuộc chu trình C
- Vì vậy C là một chu trình Euler và do đó G là đồ thị Euler

ĐỒ THỊ EULER

- Thuật toán Flor: Xuất phát từ một đỉnh u bất kỳ của đồ thị, đi theo các cạnh của nó một cách tùy ý, và đảm bảo 2 qui tắc sau:

  Xóa bỏ cạnh đã đi qua và đồng thời xóa bỏ cả những đỉnh cô lập được tạo thành

  Ở mỗi bước, chỉ đi qua cạnh cầu khi không còn lựa chọn nào khác

ĐỒ THỊ EULER

```
Euler_Cycle(G) // dựa trên thuật toán Flor
S ← ∅;  C ← ∅;  u ← Select(V[G]); Push(S, u)
While S ≠ ∅
  do   x ←Top(S)
       if Adj[x] ≠ ∅
          then   y ← First(Adj[x])
                 Push(S,y)
                 Adj[x] ← Adj[x] -{y}
                 Adj[y] ← Adj[y]-{x}
          else   x ← Pop(S)
                 Push(C, x)
```

ĐỒ THỊ EULER

- Độ phức tạp của thuật toán Euler_Cycle là O(m), m là số cạnh của đồ thị

ĐỒ THỊ EULER

- **Hệ quả 1**: Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẽ
- Chứng minh?

ĐỒ THỊ EULER

- Chứng minh hệ quả:
  - Nếu G không có đỉnh bậc lẽ thì nó là đồ thị Euler nên nó là nửa Euler
  - Nếu G có đúng 2 đỉnh bậc lẽ là u và v thì tạo đồ thị H bằng cách thêm vào G đỉnh w và 2 cạnh (w, u), (w, v). Khi đó H là Euler, nên có chu trình Euler C. Xoá bỏ khỏi chu trình này đỉnh w và hai cạnh (w, u), (w, v) ta có đường đi Euler

ĐỒ THỊ EULER

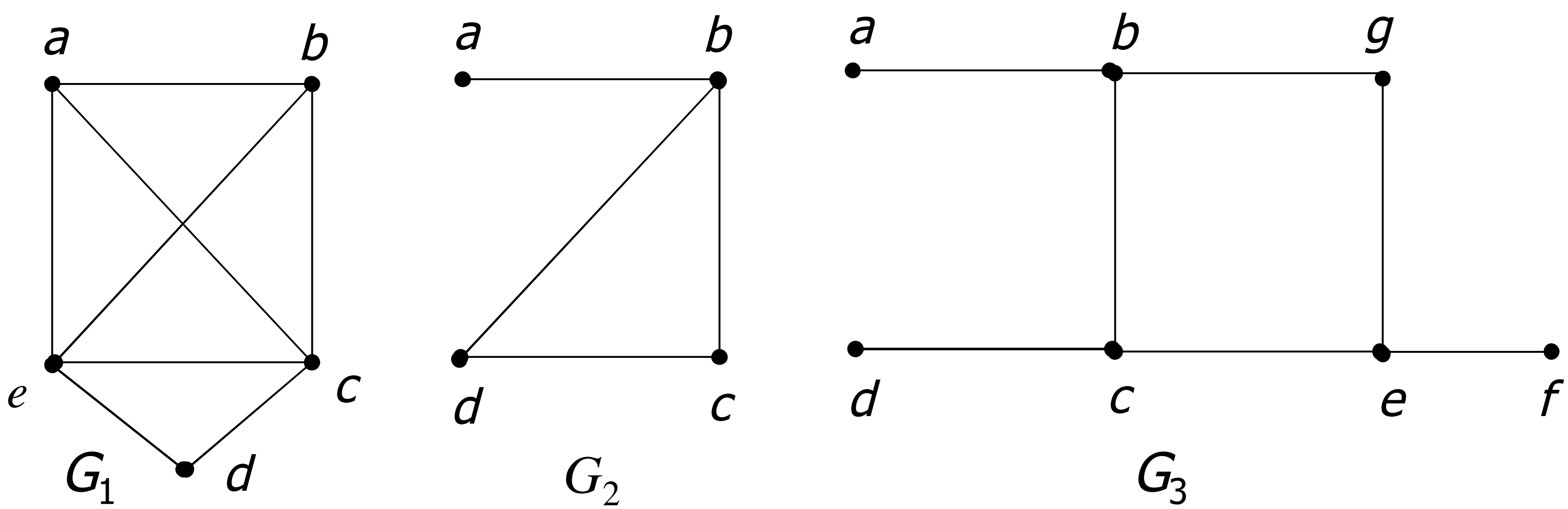
- **Định lý 2** Đồ thị có hướng liên thông mạnh G là đồ thị Euler khi và chỉ khi

$$\deg^+(v) = \deg^-(v) \text{ với mọi } v \text{ của } G$$

ĐỒ THỊ HAMILTON

- Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là đường đi Hamilton
- Chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là chu trình Hamilton
- Đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton nếu nó có chu trình Hamilton và gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu nó có đường đi Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

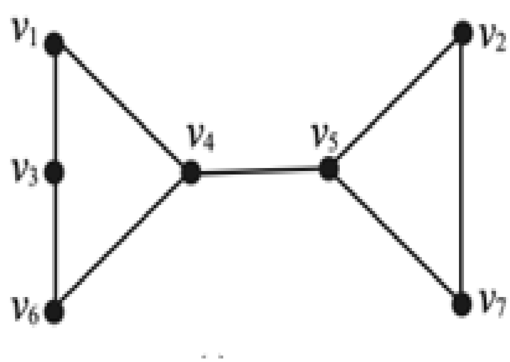


G_1 có chu trình Hamilton *a, b, c, d, e, a*
G_2 không có chu trình Hamilton nhưng có đường đi Hamilton: *a, b, c, d*
*G*3 không có chu trình và đường đi Hamilton

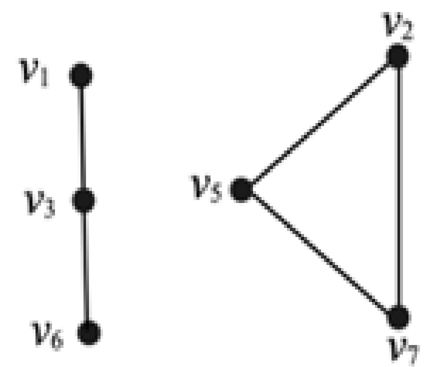
ĐỒ THỊ HAMILTON

- **Định lý 3** Cho một đồ thị G vô hướng liên thông, nếu xóa k đỉnh của G cùng với các cạnh liên thuộc với chúng mà nhận được đồ thị mới có nhiều hơn k thành phần liên thông thì G không phải là đồ thị Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON



Đồ thị G



Sau khi xóa đỉnh v_4 (xóa 1 đỉnh cùng các cạnh kề nó) của G ta được đồ thị mới có 2 thành phần nên G không Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

Lưu ý

- Chưa có điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Hamilton (bài toán mở)
- Chỉ có một số điều kiện đủ

ĐỒ THỊ HAMILTON

- **Định lý 3** (Dirak) Đơn đồ thị vô hướng G với n>2 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn n/2 là đồ thị Hamilton
- **Định lý 4** (Ore) Đơn đồ thị vô hướng G với $n \geq 3$ sao cho $deg(u) + deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh u và v không kề nhau là đồ thị Hamilton
- **Định lý 5** (Dirak tổng quát) Giả sử G là đồ thị có hướng liên thông mạnh với n đỉnh. Nếu

  $deg^{+}(v)$ □ $n/2$ và $deg^{-}(v)$ □ $n/2$ với mọi v

  thì G là đồ thị Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

```
Hamilton_Cycle(G, k, v0) //Tìm đỉnh x[k] trong n đỉnh của G
    for y   Adj[x[k-1]]
       do  if k=n and y=v0
                then   print(v0, x[1],…x[n-1],v0) //x[0]=v0
                else  if  unvisited[y]=true
                         then  x[k]     y
                               unvisited[y]     false
                               Hamilton_Cycle(G, k+1,v0)
                               unvisited[y]     true
```

ĐỒ THỊ HAMILTON

Lưu ý:

- Giải thuật Hamilton_Cycle(G, k, v_0) tìm tất cả các chu trình Hamilton của G
- Trước khi thực hiện GT cần gán unvisited[y]= true với mọi v $\in$ V[G] và x[0]=v_0 là đỉnh đầu của các chu trình

ĐỒ THỊ HAMILTON

- Độ phức tạp thuật toán Hamilton_Cycle là O(n!), n là số đỉnh của đồ thị

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Làm bài tập về nhà của chương 4