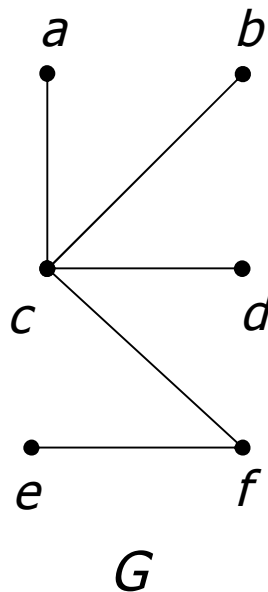


CÂY VÀ CÂY BAO TRÙM CỦA ĐỒ THỊ

- Cây và các tính chất của cây
- Cây bao trùm (cây khung) của đồ thị
- Bài toán cây bao trùm nhỏ nhất

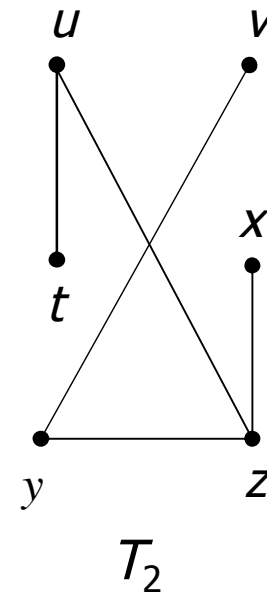
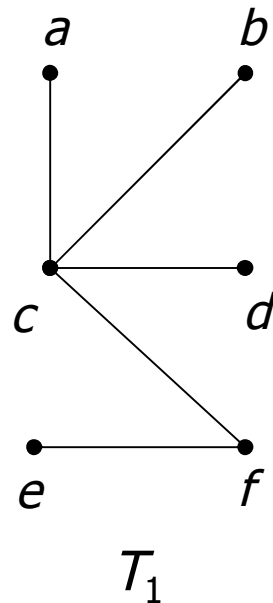
CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Cây tự do (free tree) là một đồ thị vô hướng liên thông không có chu trình (rừng là tập nhiều cây)



CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Một rừng hai cây



CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- **Định lý 1:** Đồ thị T vô hướng n đỉnh là một cây nếu thỏa một trong các tính chất sau

T không chứa chu trình và có $n-1$ cạnh

T liên thông và có $n-1$ cạnh

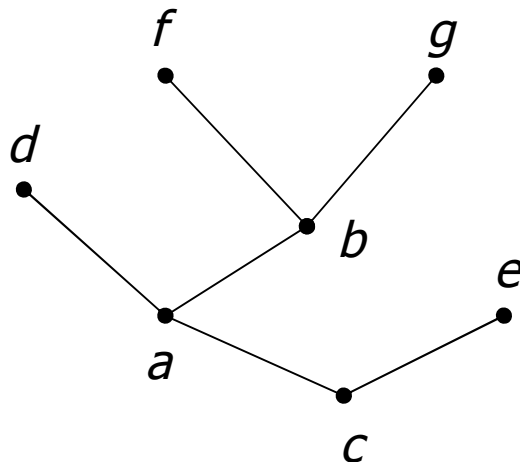
T liên thông và mỗi cạnh của nó đều là cầu

Hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng một đường đi duy nhất

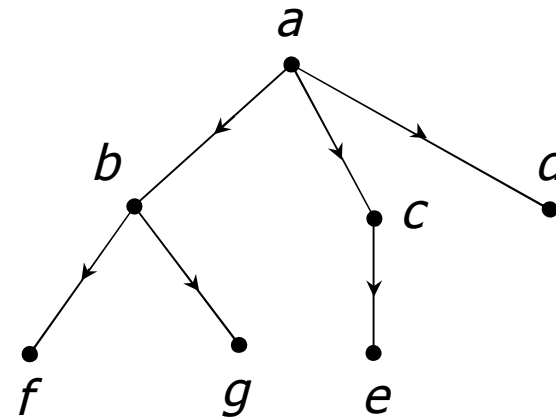
T không chứa chu trình nhưng nếu thêm vào một cạnh thì có một chu trình duy nhất

CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Cây có gốc (rooted tree) là một cây định hướng trên đó đã chọn một đỉnh là gốc (root) và các cạnh được định hướng sao cho với mọi đỉnh, luôn luôn có một đường đi có hướng từ gốc đến đỉnh đó



Cây T



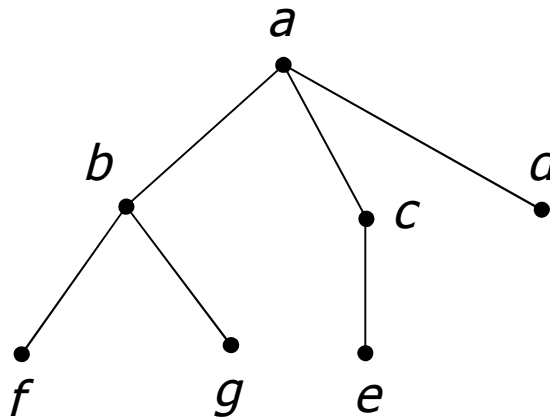
Cây T có hướng, có gốc a

CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Nếu (u, v) là một cạnh của T , thì u là cha của v
- Mỗi đỉnh có một cha duy nhất
- Các đỉnh có cùng cha được gọi là anh em
- Các đỉnh của cây gọi là lá nếu nó không có con
- Các đỉnh có con được gọi là đỉnh trong

CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Khi chọn một đỉnh làm gốc, thì hướng các cạnh **hoàn toàn xác định** (có thể bỏ qua hướng các cạnh khi biểu diễn cây có gốc)

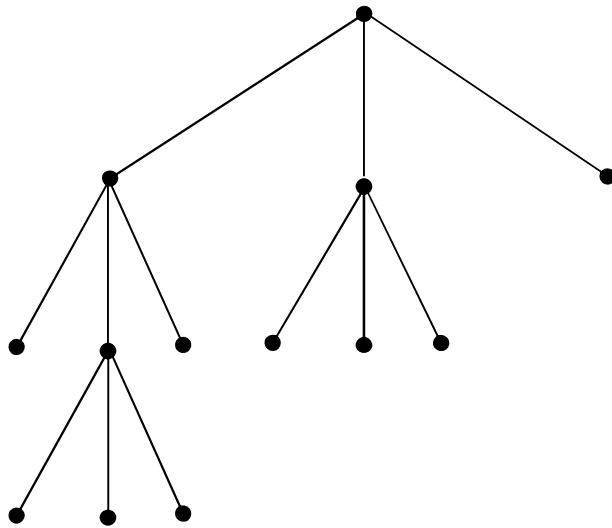


Cây T có gốc a, có hướng

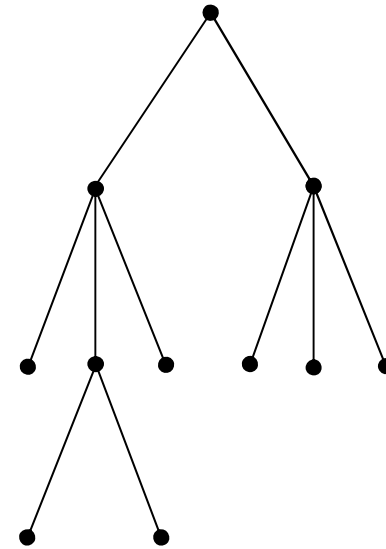
CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Cây có gốc được gọi là cây m-phân nếu tất cả các đỉnh trong của nó **không có hơn m con**
- Cây có gốc được gọi là m-phân **đầy đủ** nếu mọi đỉnh trong có **đúng m con**
- Cây m-phân với $m = 2$ được gọi là **cây nhị phân**

CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY



Cây 3-phân đầy đủ



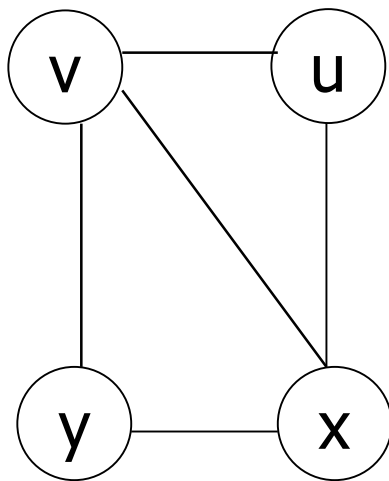
Cây 3-phân không đầy đủ

CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

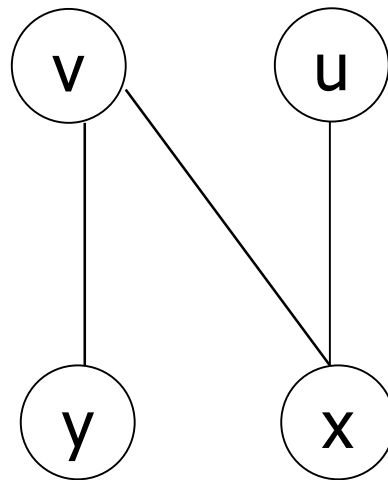
- Cây có **thứ tự** là cây có gốc trong đó **các con của mỗi đỉnh trong** được sắp theo một thứ tự nhất định từ trái sang phải
- Trong cây nhị phân, con **thứ nhất gọi là con bên trái**, con thứ hai gọi là con bên phải

CÂY BAO TRÙM CỦA ĐỒ THỊ

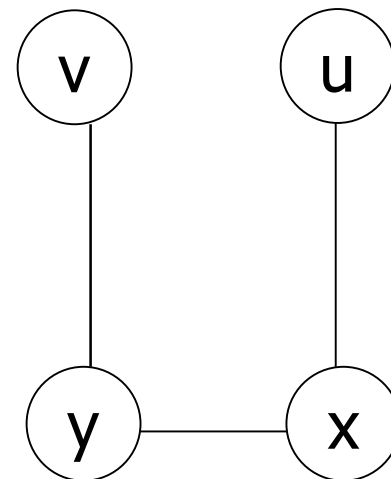
- Cây $T = (V, F)$ được gọi là một cây bao trùm (spanning tree) của đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ nếu $F \subseteq E$



G



Cây BT T_1



Cây BT T_2

CÂY BAO TRÙM CỦA ĐỒ THỊ

- Nhận xét
 - Một đồ thị có thể có nhiều cây bao trùm
 - Ví dụ đồ thị K_n (gồm n đỉnh và mỗi đỉnh đều có cạnh nối với $n-1$ đỉnh còn lại) có n^{n-2} cây bao trùm
 - Cây bao trùm của $G = (V, E)$ là đồ thị V đỉnh liên thông ít cạnh nhất

CÂY BAO TRÙM CỦA ĐỒ THỊ

- Các **cây tìm kiếm** sinh ra khi thực thi các thuật toán DFS và BFS trên các đồ thị vô hướng liên thông chính là các **cây bao trùm của đồ thị**

CÂY BAO TRÙM NHỎ NHẤT

- Khái niệm
- Thuật toán Kruskal
- Thuật toán Prim

KHÁI NIỆM

- Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông có trọng số và T là một cây bao trùm của G

Trọng số của T , ký hiệu $w(T)$, là tổng trọng số của tất cả các cạnh của nó: $w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$

Bài toán: Tìm một cây bao trùm T có trọng số nhỏ nhất (minimum spanning tree-MST) của G

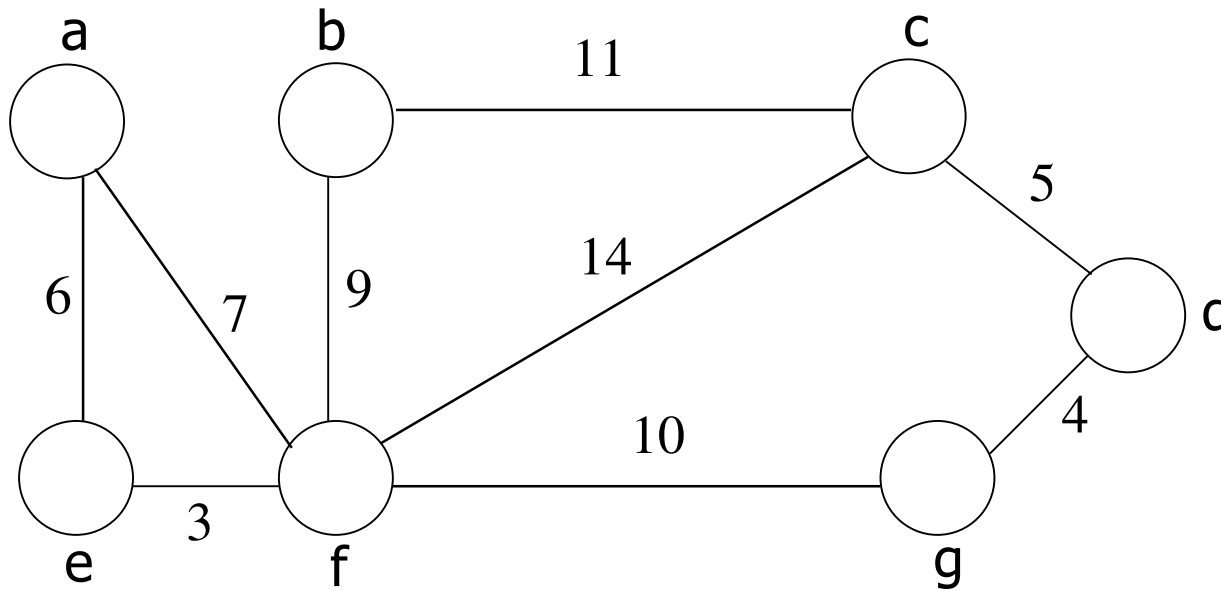
THUẬT TOÁN KRUSKAL

Ý tưởng

- Tại mỗi bước, thuật toán tìm một cạnh có **trọng số nhỏ nhất** thêm vào tập cạnh của cây bao trùm sao cho **không gây ra chu trình**
- Thuật toán dừng khi số cạnh của cây bằng số đỉnh của đồ thị trừ 1

THUẬT TOÁN KRUSKAL

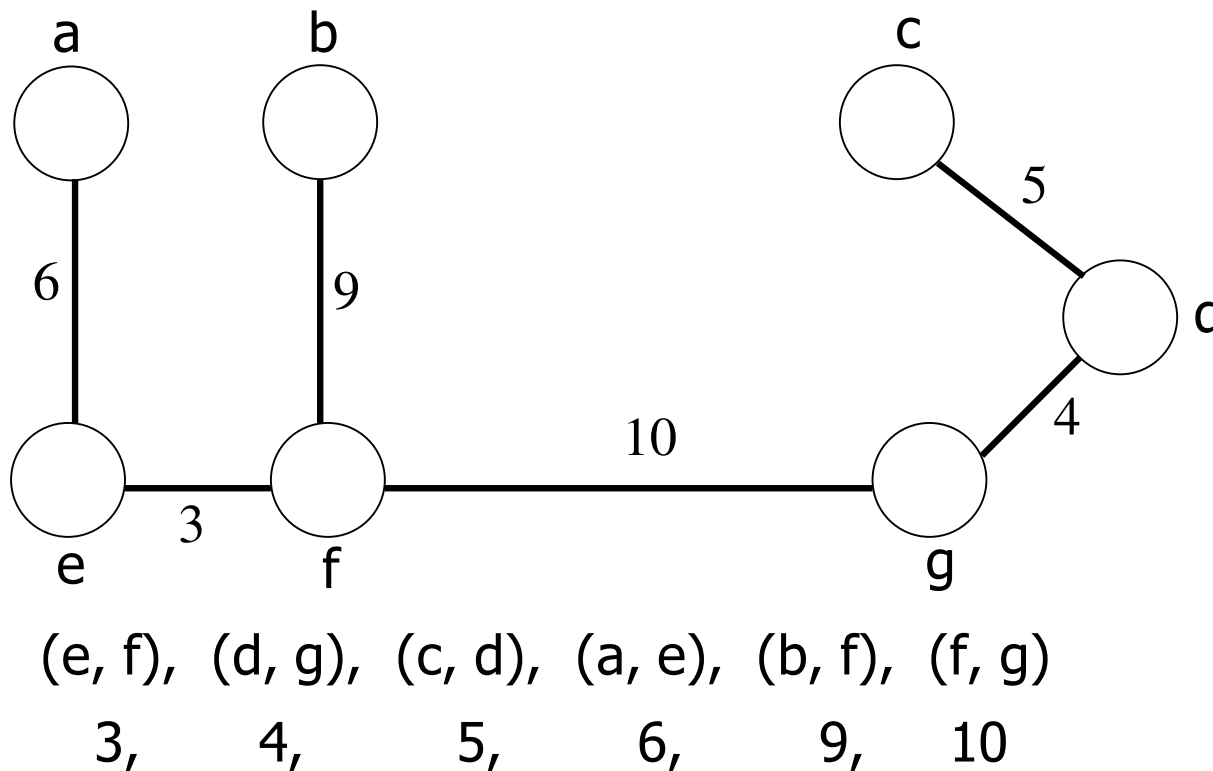
- Đồ thị G có trọng số và các cạnh được sắp



(e, f), (d, g), (c, d), (a, e), (a, f), (b, f), (f, g), (b, c), (c, f)
3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14

THUẬT TOÁN KRUSKAL

- Cây bao trùm nhỏ nhất của G



THUẬT TOÁN KRUSKAL

KRUSKAL(G, w) // $G = (V, E)$ có n đỉnh

1. $F \leftarrow \emptyset$ // F là tập cạnh của cây MST
2. Sort the edges of E into nondecreasing order by weight w
3. **while** $|F| < n-1$ and $E \neq \emptyset$ // thực hiện cho đến khi $|F| = n-1$ hoặc $E = \emptyset$
4. **do** $e \leftarrow x \mid w(x) = \min\{w(y), y \in E\}$ \triangleright e có trọng số bé nhất
5. $E \leftarrow E - \{e\}$
6. **if** $F \cup \{e\}$ not contain cycle **then** $F \leftarrow F \cup \{e\}$
7. **if** $|F| < n-1$
8. **then** G is not connected
9. **else return** $T = (V, F)$

THUẬT TOÁN KRUSKAL

- Thời gian sắp xếp là $O(E \lg E)$
- Chi phí cho tất cả các lần lặp trong vòng lặp **while** 3-6 không quá $O(V^2)$
- Do đó, tổng chi phí là $O(E \lg E) + O(V^2)$

THUẬT TOÁN PRIM

Ý tưởng

- Khởi đầu, thuật toán chọn một đỉnh bất kỳ của đồ thị làm đỉnh gốc của cây bao trùm bé nhất
- Tại mỗi bước chọn thêm một đỉnh của đồ thị mà trọng số cạnh nối nó với một đỉnh của cây là nhỏ nhất
- Thuật toán kết thúc khi tất cả các đỉnh của đồ thị đã được chọn

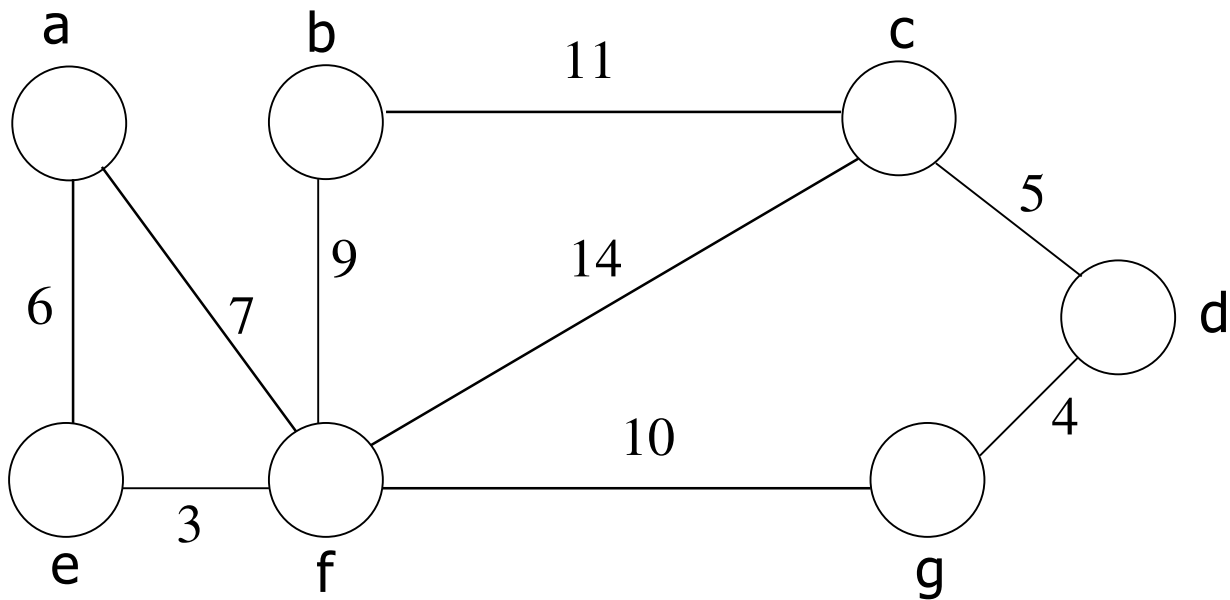
THUẬT TOÁN PRIM

MST-PRIM(G, w, s)

```
1  for each  $u \in V[G]$ 
2      do  $key[u]$       //  $key[u]$  là trọng số nhỏ nhất của cạnh nối  $u$ 
3           $\pi[u]$       NIL // với một đỉnh trong cây MST đang xây dựng
4   $key[s] = 0$ 
5   $Q = V[G]$ 
6  while  $Q \neq \emptyset$ 
7      do  $u = \text{Extract-min}(Q)$  //  $u$  là đỉnh có  $key$  nhỏ nhất
8          for each  $v \in \text{Adj}[u]$ 
9              do if  $v \in Q$  and  $w(u,v) < key[v]$ 
10                  then  $\pi[v] = u$ 
11                       $key[v] = w(u,v)$ 
```

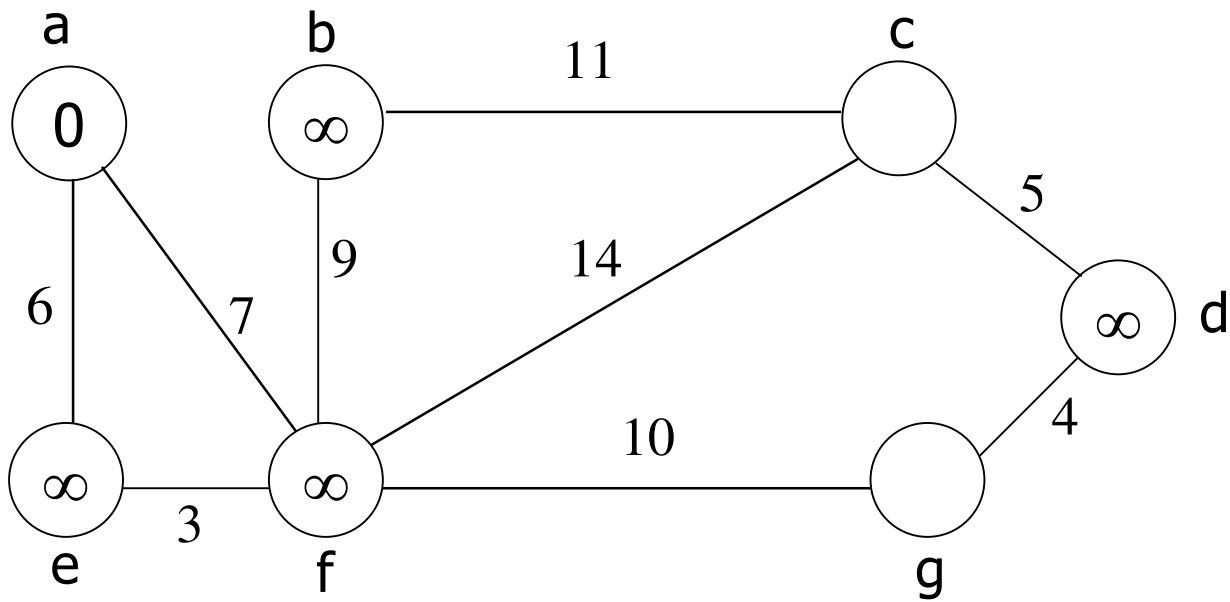
THUẬT TOÁN PRIM

- Đồ thị G có trọng số, lấy a làm đỉnh xuất phát



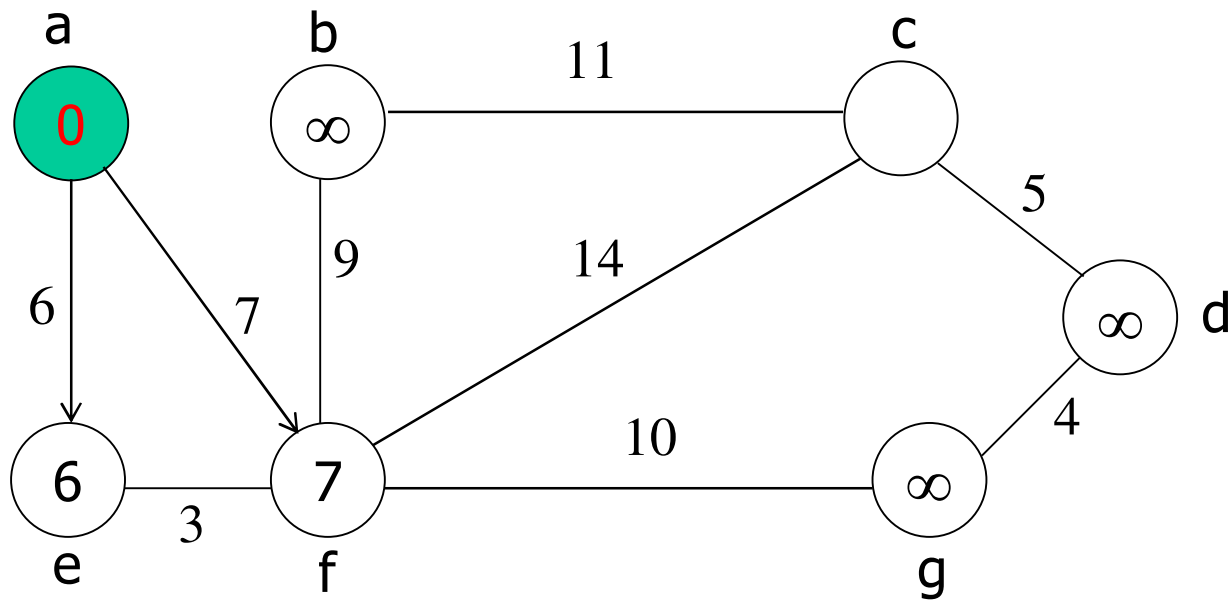
THUẬT TOÁN PRIM

- $\text{Key}[a]=0, \text{key}[u]=\infty$ với mọi u thuộc V



THUẬT TOÁN PRIM

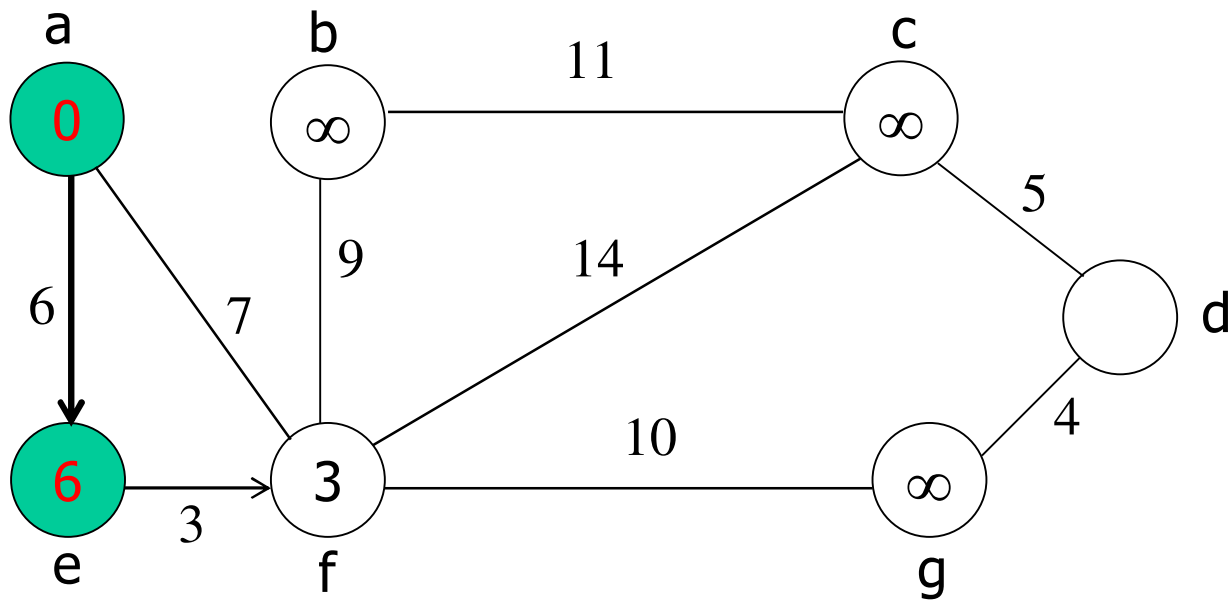
- Chọn a là đỉnh đầu tiên của MST (do $\text{key}[a] = 0$ nhỏ nhất)



Cập nhật $\text{key}[e]=6$, $\text{key}[f]=7$

THUẬT TOÁN PRIM

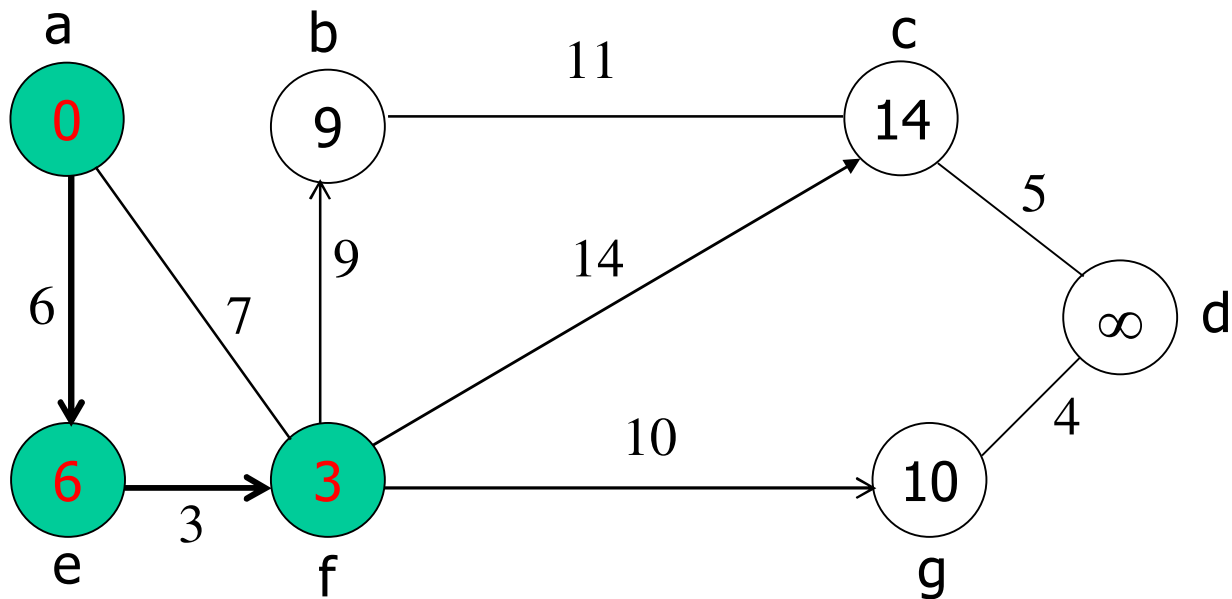
- Chọn e là đỉnh kế tiếp của MST, $\text{key}[e] = 6$



Cập nhật $\text{key}[f]=3$

THUẬT TOÁN PRIM

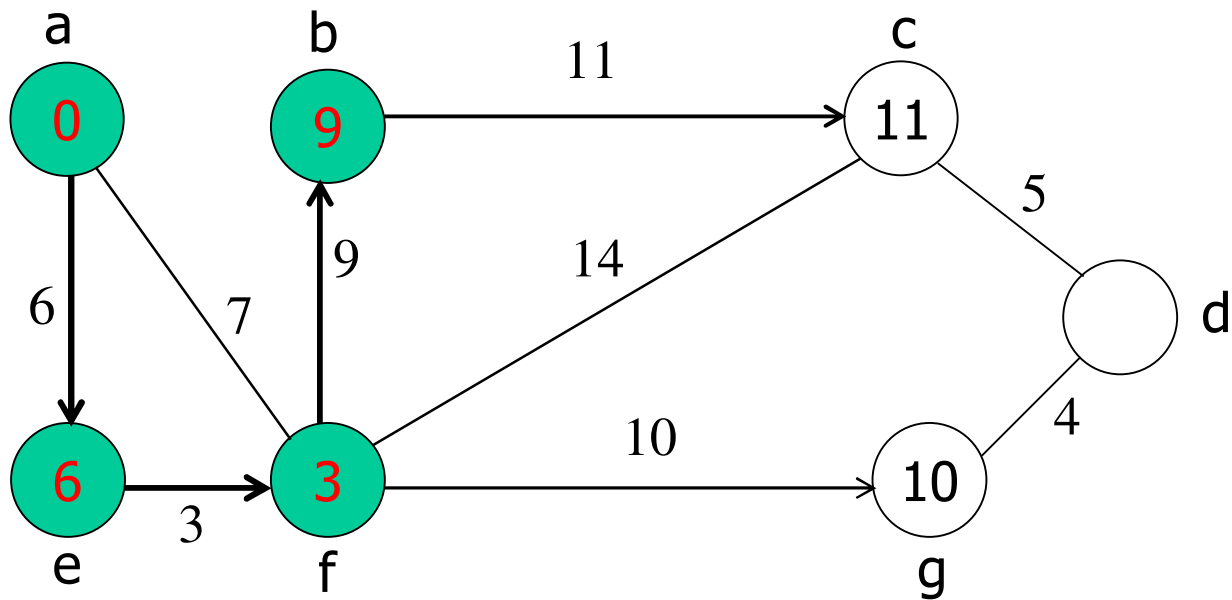
- Chọn f là đỉnh kế tiếp của MST, $\text{key}[f] = 3$



Cập nhật $\text{key}[b]=9$, $\text{key}[c]=14$, $\text{key}[g]=10$

THUẬT TOÁN PRIM

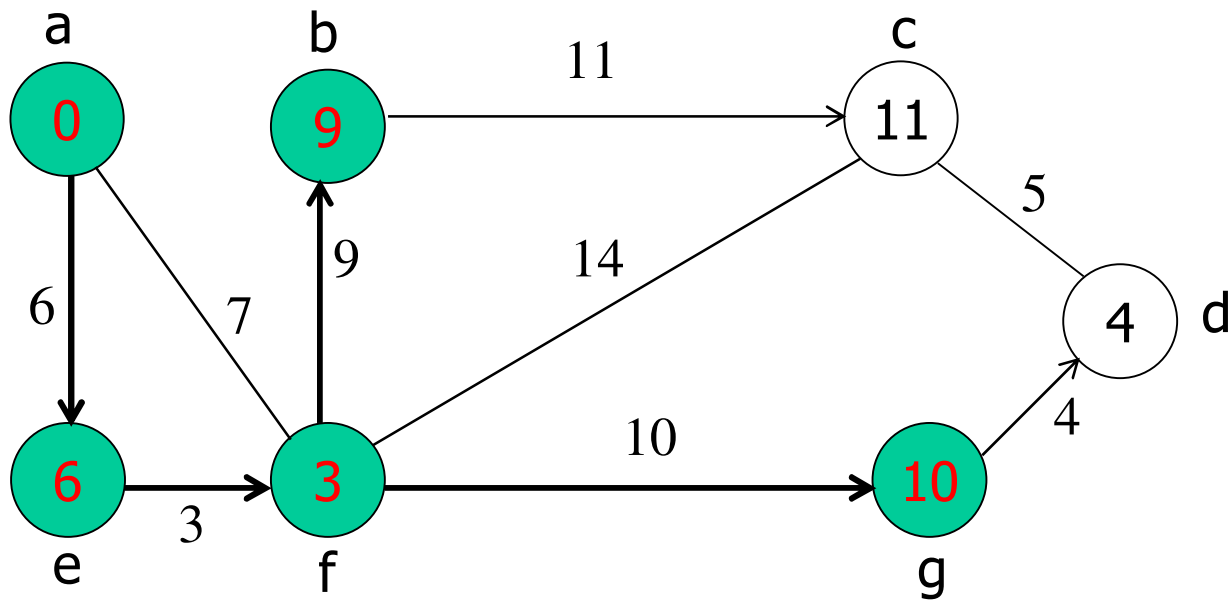
- Chọn b là đỉnh kế tiếp của MST, $\text{key}[b] = 9$



Cập nhật $\text{key}[c] = 11$

THUẬT TOÁN PRIM

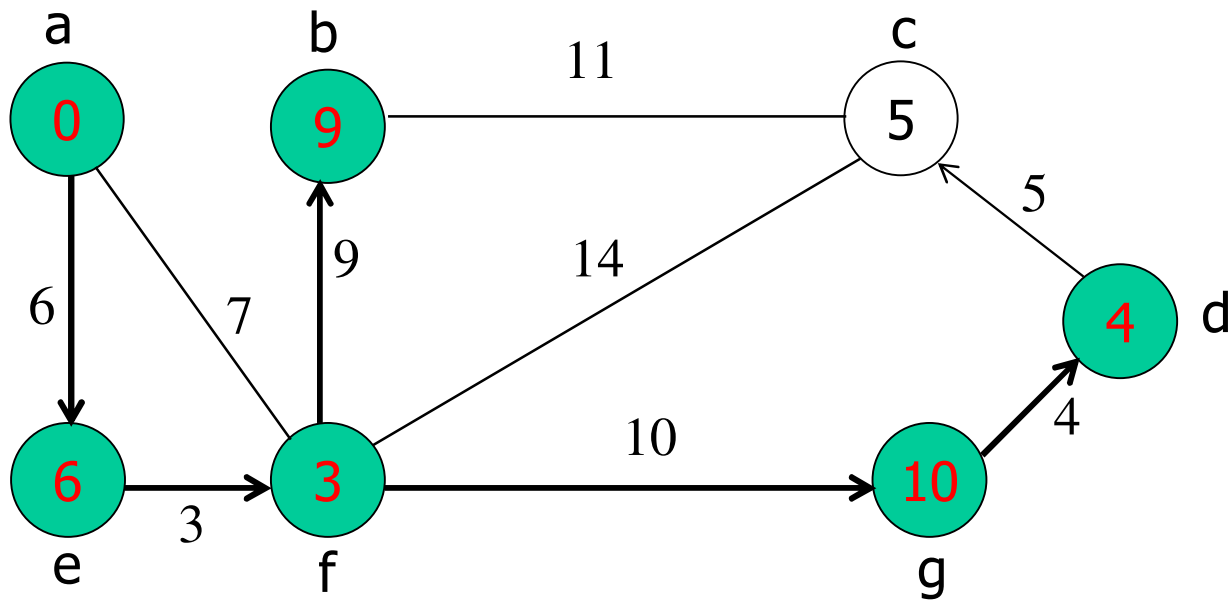
- Chọn g là đỉnh kế tiếp của MST, $\text{key}[g] = 10$



Cập nhật $\text{key}[d]=4$

THUẬT TOÁN PRIM

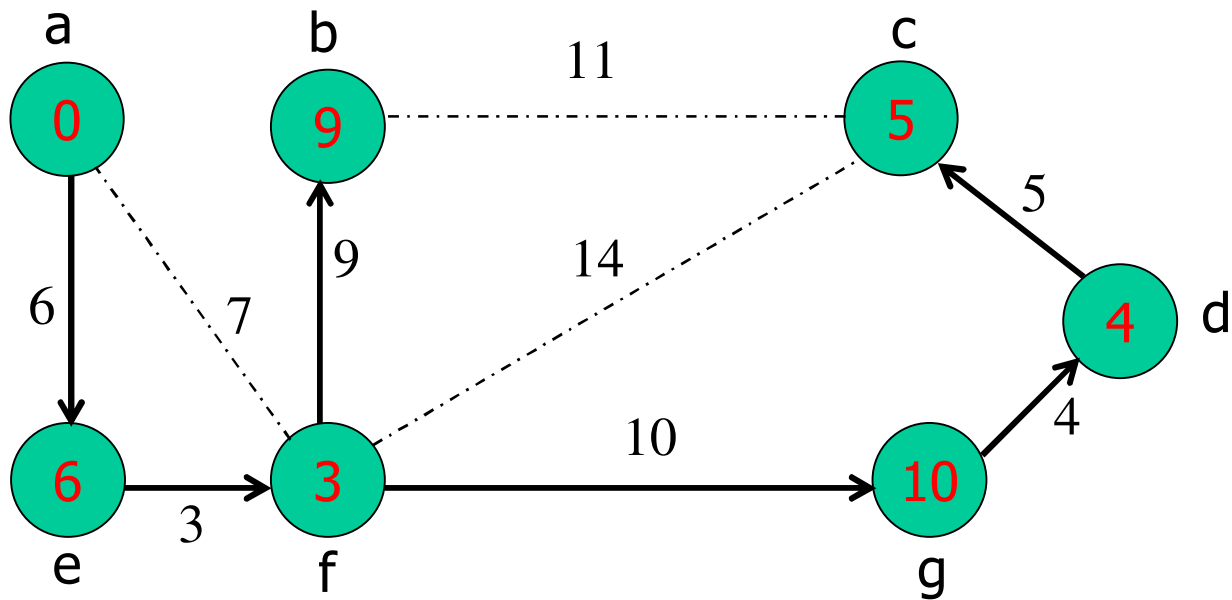
- Chọn d là đỉnh kế tiếp của MST, $\text{key}[d] = 4$



Cập nhật $\text{key}[c]=5$

THUẬT TOÁN PRIM

- Chọn c là đỉnh kế tiếp của MST, $\text{key}[c] = 5$, kết thúc thuật toán



THUẬT TOÁN PRIM

- Chi phí khởi tạo dòng 1-3 là $O(V)$
- Tổng thời gian cho tất cả các lần gọi EXTRACT-MIN trong vòng lặp **while** là $O(V \lg V)$
- Tổng thời gian cho tất cả các lần lặp của vòng lặp **for** 8-11 là $O(E \lg V)$
- Do đó, tổng chi phí là $O(V \lg V + E \lg V) = O(E \lg V)$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Làm bài tập của chương 5