

# Compression d'images JPEG

Problématique, modèle théorique et compromis qualité/taille

Khanh-Phuong NGUYEN

Année universitaire 2025–2026

ableofcontents

# Chapter 1

## Introduction : Problématique de la compression d'images

Les images numériques occupent une place centrale dans les échanges actuels (photographie, vidéo, réseaux sociaux, archives médicales, etc.). Une image en niveaux de gris de taille  $N \times M$  codée sur 8 bits par pixel nécessite  $N \times M$  octets de stockage. Pour des résolutions élevées, le volume devient vite incompatible avec les contraintes de bande passante et de mémoire.

Le problème général posé est le suivant :

- **Entrée** : une image discrète  $I(x, y)$  définie sur une grille  $0 \leq x < N$ ,  $0 \leq y < M$ , avec  $I(x, y) \in \{0, \dots, 255\}$ .
- **Objectif** : construire un fichier compressé  $C$  tel que

$$|C| \ll |I| \quad \text{tout en préservant la qualité visuelle.}$$

JPEG choisit délibérément une *compression avec perte* : l'image reconstruite  $\hat{I}$  diffère de l'originale, mais l'erreur est principalement portée sur des composantes peu sensibles pour l'œil humain (hautes fréquences, détails chromatiques fins). Le but de ce rapport est de présenter le cadre théorique de cette approche, les outils mathématiques utilisés et le compromis obtenu entre qualité et taux de compression.

### Remarques personnelles

Travailler sur JPEG m'a permis de relier des notions assez abstraites (transformées, quantification, entropie) à un problème très concret : stocker et transmettre des images dans un contexte de ressources limitées. J'ai été particulièrement surpris par le fait qu'une transformée relativement simple comme la DCT, associée à une bonne stratégie de quantification, permette d'obtenir des fichiers beaucoup plus petits sans dégradation flagrante à première vue. Cela montre à quel point la perception humaine joue un rôle central dans la conception de ces algorithmes.

# Chapter 2

## Cadre théorique et outils mathématiques

### 2.1 Modèle de l'image

On modélise l'image par une matrice de niveaux de gris

$$I = [I(x, y)]_{0 \leq x < N, 0 \leq y < M}, \quad I(x, y) \in [0, 255].$$

Les pixels voisins sont fortement corrélés : cette redondance spatiale rend possible une représentation plus compacte dans un domaine transformé.

Dans le cas couleur, la norme JPEG recommande de travailler dans l'espace YCbCr plutôt que RGB. La composante de luminance  $Y$  concentre l'information perçue, les composantes chrominance  $Cb$  et  $Cr$  pouvant être sous-échantillonnées sans gêne visuelle notable.

### 2.2 Transformée en cosinus discrète (DCT) 2D

L'outil central de JPEG est la transformée en cosinus discrète (DCT) appliquée bloc par bloc. Chaque bloc de taille  $8 \times 8$  est d'abord recentré autour de zéro :

$$f(x, y) = I(x, y) - 128, \quad 0 \leq x, y < 8.$$

La DCT 2D d'un bloc  $f$  est définie par

$$F(u, v) = \frac{1}{4} C(u) C(v) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right),$$

où

$$C(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{si } k = 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le coefficient  $(u, v) = (0, 0)$ , dit coefficient DC, représente la moyenne du bloc. Les autres coefficients (AC) décrivent les variations plus ou moins rapides.

#### Propriété de concentration d'énergie

Pour de nombreuses images naturelles, l'énergie est fortement concentrée dans quelques coefficients de basse fréquence. Autrement dit,  $|F(u, v)|$  décroît en moyenne lorsqu'on s'éloigne du coin haut-gauche. Cette propriété justifie une approximation agressive des hautes fréquences dans la suite du traitement.

## 2.3 Quantification des coefficients

Après transformation, chaque bloc est quantifié par une table  $Q(u, v)$  qui pondère différemment les fréquences :

$$F_q(u, v) = \text{round}\left(\frac{F(u, v)}{Q(u, v)}\right).$$

Les valeurs de  $Q(u, v)$  sont faibles pour les basses fréquences (préservées) et plus élevées pour les hautes fréquences (fortement atténuées). Cette étape est irréversible : plusieurs valeurs de  $F(u, v)$  donnent le même  $F_q(u, v)$ .

### Facteur de qualité

Dans JPEG, une table de base  $Q_{\text{base}}$  est fournie pour la luminance. Un facteur de qualité  $F_q \in [1, 100]$  permet de l'adapter ; un schéma classique est

$$\lambda(F_q) = \begin{cases} 5000/F_q & \text{si } F_q < 50, \\ 200 - 2F_q & \text{si } F_q \geq 50, \end{cases}$$

puis

$$Q(u, v) = \max\left(1, \min\left(255, \frac{Q_{\text{base}}(u, v) \lambda(F_q) + 50}{100}\right)\right).$$

Un faible  $F_q$  produit une très forte quantification (compression élevée mais perte de qualité), tandis qu'un  $F_q$  proche de 100 se rapproche d'un codage presque sans perte.

## Remarques personnelles

Sur le plan mathématique, j'ai trouvé la DCT assez naturelle dès lors que l'on la voit comme une décomposition de l'image en motifs plus ou moins rapides. En revanche, la quantification m'a demandé un changement de point de vue : accepter d'introduire volontairement de l'erreur peut sembler contre-intuitif quand on a l'habitude de chercher des représentations fidèles. Ici, tout repose sur l'idée que certaines informations sont « moins utiles » pour la perception et peuvent être sacrifiées pour gagner en compression.

## 2.4 Réduction de redondance : zig-zag, RLE et Huffman

Les coefficients quantifiés contiennent de nombreuses valeurs nulles, surtout dans les hautes fréquences. JPEG exploite cette structure en trois sous-étapes.

### Parcours zig-zag

Les 64 coefficients du bloc sont parcourus suivant un ordre zig-zag qui commence par les basses fréquences et termine par les plus hautes. Cette linéarisation tend à regrouper les suites de zéros en fin de vecteur.

### Codage différentiel et RLE

Le premier coefficient (DC) est codé par différence entre blocs successifs :

$$\Delta DC = DC_k - DC_{k-1}.$$

Les coefficients AC sont codés par *Run-Length Encoding* (RLE) : chaque valeur non nulle est représentée par un couple  $(r, v)$  où  $r$  est le nombre de zéros qui la précédent.

## Codage entropique de Huffman

Les symboles issus du RLE (et du différentiel DC) sont enfin compressés par un code de Huffman. Cet algorithme assigne des mots binaires plus courts aux symboles fréquents et plus longs aux symboles rares. La longueur moyenne du code se rapproche alors de la borne donnée par l'entropie de Shannon.

# Chapter 3

## Chaîne de traitement JPEG

On peut maintenant résumer la stratégie de résolution du problème initial sous la forme d'une chaîne de traitement en plusieurs blocs.

### 3.1 Encodage

1. **Prétraitement** : conversion éventuelle en YCbCr, découpage en blocs  $8 \times 8$ , recentrage  $I \mapsto f = I - 128$ .
2. **DCT bloc par bloc** : calcul des coefficients  $F(u, v)$  pour chaque bloc.
3. **Quantification** : application de la table  $Q(u, v)$  ajustée par le facteur de qualité  $F_q$  pour obtenir  $F_q(u, v)$ .
4. **Réordonnancement** : balayage zig-zag pour former un vecteur 1D par bloc.
5. **RLE et différentiel DC** : réduction de la redondance de longueurs de zéros.
6. **Codage de Huffman** : obtention du flux binaire compressé.

Le résultat est un bitstream où la plupart des degrés de liberté inutiles ont été supprimés soit par approximation (quantification), soit par compression entropique (Huffman).

### 3.2 Décodage

La décompression applique symétriquement les opérations inverses :

1. décodage de Huffman puis dé-RLE pour retrouver les coefficients quantifiés ;
2. déquantification  $\hat{F}(u, v) = F_q(u, v) Q(u, v)$  ;
3. IDCT bloc par bloc pour revenir dans le domaine spatial ;
4. ajout de 128 et réassemblage des blocs pour reconstruire  $\hat{I}$ .

À chaque étape, les erreurs introduites par la quantification se propagent : JPEG est donc par nature un schéma à pertes contrôlées.

# Chapter 4

## Évaluation de la qualité et du taux de compression

Pour juger du compromis atteint par JPEG, on utilise des métriques quantitatives et une analyse qualitative.

### 4.1 Métriques objectives

#### Écart quadratique moyen (EQM)

Soit  $N$  le nombre total de pixels. L'EQM entre l'image originale  $I$  et la reconstruite  $\hat{I}$  est

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{x,y} (I(x,y) - \hat{I}(x,y))^2.$$

#### PSNR

Le *Peak Signal-to-Noise Ratio* est défini par

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{EQM} \right) \text{ dB.}$$

Des valeurs supérieures à 35 dB sont généralement perçues comme « très bonnes » pour des images naturelles.

#### Taux de compression

Le taux de compression global est

$$T = \frac{\text{taille brute de l'image}}{\text{taille du fichier JPEG}}.$$

En pratique, l'utilisation combinée de la quantification, du zig-zag, du RLE et de Huffman permet d'atteindre des valeurs de  $T$  de l'ordre de 10 à 20 sur des photographies, tout en conservant une qualité satisfaisante.

#### Remarques personnelles

Les métriques comme l'EQM et le PSNR donnent un repère chiffré utile, mais j'ai constaté qu'elles ne reflètent pas toujours exactement la perception visuelle. Deux images avec un PSNR proche peuvent donner une impression de qualité assez différente, notamment si les artefacts sont

localisés dans des zones importantes (visage, texte, etc.). Pour juger JPEG, il me semble donc important de combiner ces indicateurs objectifs avec une évaluation visuelle simple : observer les zones uniformes, les contours, les textures fines, et varier le facteur de qualité pour voir à partir de quand les défauts deviennent vraiment gênants.

## 4.2 Influence du facteur de qualité

Lorsque  $F_q$  augmente :

- la quantification devient plus fine, l'EQM diminue et le PSNR augmente ;
- le nombre de coefficients nuls se réduit, ce qui diminue le taux de compression.

Inversement, pour de faibles valeurs de  $F_q$ , on observe un très bon taux de compression mais l'apparition d'artefacts caractéristiques (effet de blocs, perte de textures fines).

# Chapter 5

## Discussion et conclusion

Le schéma JPEG répond à la problématique initiale en combinant trois idées fortes :

1. **Décorrélation** : la DCT projette l'image sur une base où les coefficients sont moins corrélés et plus faciles à approximer.
2. **Réduction perceptuelle de l'information** : la quantification s'attaque en priorité aux composantes les moins visibles pour l'œil humain.
3. **Compression entropique proche de l'optimum** : le codage de Huffman exploite les redondances résiduelles pour s'approcher de la borne d'entropie.

Cette architecture, introduite au début des années 1990, reste largement utilisée aujourd'hui car elle offre un excellent compromis entre complexité algorithmique, qualité visuelle et taux de compression. Ses principales limitations concernent la présence d'artefacts de blocs à très faible débit et une certaine rigidité liée à la taille fixe des blocs  $8 \times 8$ .

Des standards plus récents (JPEG 2000, HEIC, AVIF) remplacent la DCT bloc par des ondelettes ou des blocs plus flexibles, mais conservent la même philosophie générale : transformer, quantifier, puis compresser entropiquement.

Au niveau personnel, je retiens de ce travail que JPEG est à la fois un compromis technique et une forme de négociation avec la perception humaine : on accepte de sacrifier des détails que l'œil ne remarquera presque pas, en échange d'un gain significatif en stockage et en débit. Même si des standards plus récents offrent aujourd'hui de meilleures performances théoriques, je trouve intéressant que JPEG reste massivement utilisé, ce qui montre la robustesse des idées de base et leur adéquation avec de nombreux usages quotidiens.

# Bibliography

- [1] ITU-T Recommendation T.81, *Digital Compression and Coding of Continuous-Tone Still Images (JPEG)*, 1992.
- [2] Notes de cours “JPEG 25–26”, support pédagogique sur la chaîne JPEG, Université de Poitiers, 2025.