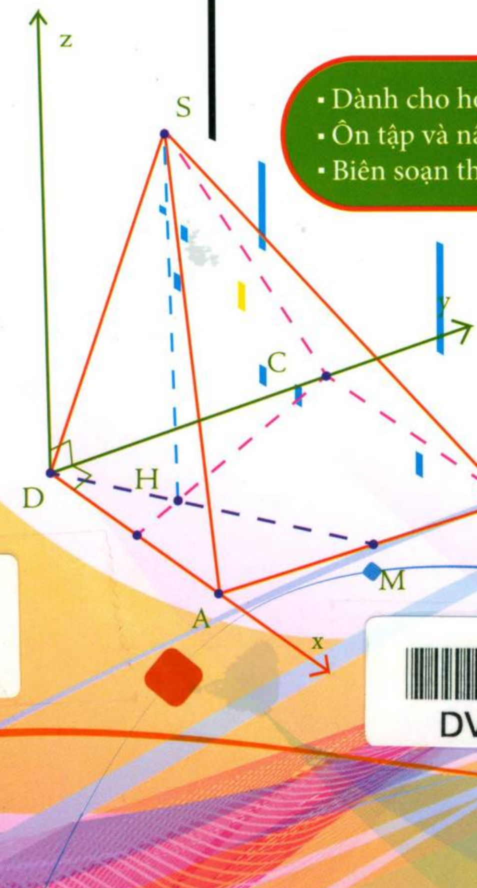
NGUYỄN TRUNG KIÊN

TÀI LIỆU ÔN THI ĐẠI HỌC

HÌNH GIẢI TÍCH



- Dành cho học sinh lớp 12 chương trình chuẩn và nâng cao
- Ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài
- Biên soạn theo nội dung và cấu trúc để thi của Bộ GD&ĐT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN TRUNG KIÊN

TÀI LIỆU ÔN THI ĐẠI HỌC
HÌNH GIẢI TÍCH

- Dành cho học sinh lớp 12 chương trình chuẩn và nâng cao
- Ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài
- Biên soạn theo nội dung và cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT

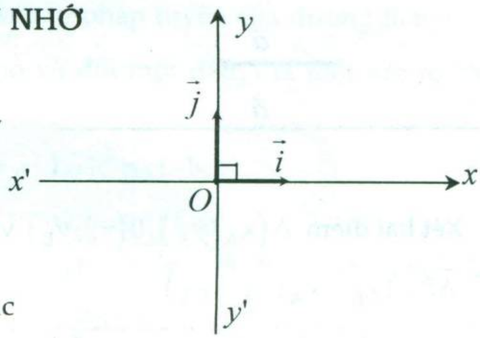
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Phần 1:

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

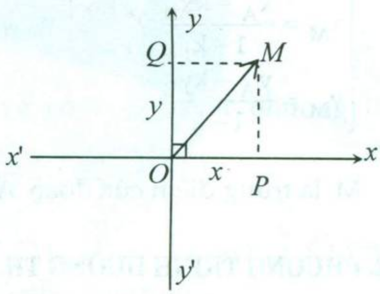
I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM CẦN NHỚ

I.1. TỌA ĐỘ ĐIỂM, VÉCTƠ.



* Hệ trục tọa độ trong mặt phẳng Oxy

- Hệ gồm hai trục Ox, Oy đôi một vuông góc được gọi là hệ trục toạ độ vuông góc trong mặt phẳng.
- Điểm O gọi là gốc của hệ tọa độ, trục Ox là trục hoành, Oy là trục tung.
- Véc tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$, thì $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1, \vec{i}.\vec{j} = 0$.



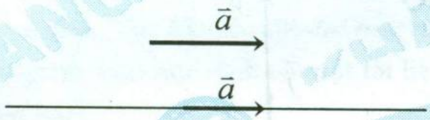
- Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ thì tọa độ của điểm đó là $M(x;y)$. Ngược lại, điểm $M(x;y)$ thì $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.
- Với véc tơ $\vec{u}$ trong hệ tọa độ Oxy luôn tồn tại duy nhất bộ $(x;y)$ thỏa mãn $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$. Tọa độ $\vec{u}$ là $(x;y)$.

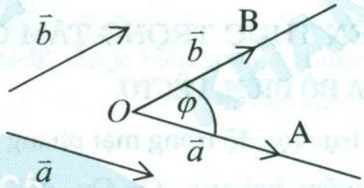
* Biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các véc tơ $a_1(x_1;y_1), a_2(x_2;y_2)$ và một số thực k tùy ý, ta có:

- $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2); \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.
- $k\overrightarrow{a_1} = (kx_1; ky_1); \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.
- Với $\overrightarrow{a_2} \neq \vec{0}$ thì hai véc tơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \end{cases}$, hay $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

- $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2$, suy ra $\overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2}$ khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.
- $\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{a_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.
- $\cos\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right) = \dfrac{\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|.\left|\overrightarrow{a_2}\right|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ với $\overrightarrow{a_1} \neq \vec{0}, \overrightarrow{a_2} \neq \vec{0}$.





* Xét hai điểm $A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right)$ và số thực k, $k \neq 1$, ta có

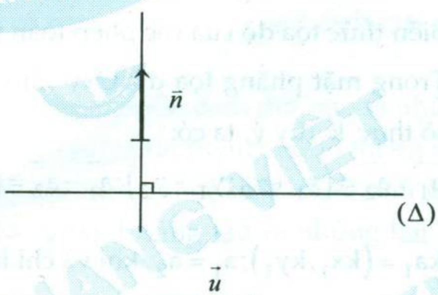
- $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$
- $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.
- M chia đoạn AB theo tỉ số k khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, khi đó

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}.$$

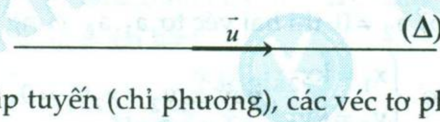
- M là trung điểm của đoạn AB thì $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

I.2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG.

* Véc tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với đường thẳng Δ.



* Véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng Δ.



Một đường thẳng có vô số véc tơ pháp tuyến (chỉ phương), các véc tơ pháp tuyến (chỉ phương) này có giá song song hoặc trùng nhau.

+ Hai đường thẳng song song với nhau thì véc tơ pháp tuyến (chỉ phương) của đường thẳng này cũng là một véc tơ pháp tuyến (chỉ phương) của đường thẳng kia.
+ Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng đó.
+ Véc tơ pháp tuyến và véc tơ chỉ phương của một đường thẳng luôn vuông góc với nhau, vì thế nếu $\vec{n}(a;b)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $\vec{u}(b;-a)$ (hoặc $\vec{u}(-b;a)$, "đổi chỗ và đổi một dấu") là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

  Ngược lại nếu có $\overrightarrow{u_\Delta}(a;b)$ thì $\vec{n}_\Delta(b;-a)$ hoặc $\vec{n}_\Delta(-b;a)$.

* Các dạng phương trình đường thẳng trong mặt phẳng

+ Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;b), a^2+b^2 \neq 0$ thì Δ có phương trình tổng quát: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.
+ Dạng phương trình tổng quát của đường thẳng $ax+by+c=0$.
+ Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(a;b), a^2+b^2 \neq 0$ thì Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$.
+ Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(a;b), a.b \neq 0$ thì Δ có phương trình chính tắc $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$.
+ Đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ có các thành phần tọa độ tương ứng khác nhau thì có phương trình:

  $$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$

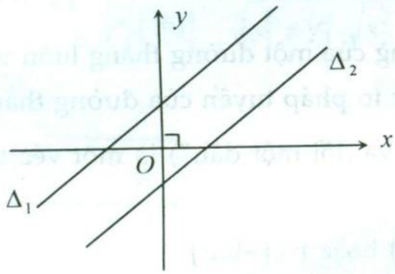
+ Đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt $A(a;0), B(0;b); a,b \neq 0$ thì có phương trình đường thẳng theo đoạn chắn $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.
+ Phương trình đường thẳng không song song hoặc trùng với trục hoành đều có thể viết về dạng $\Delta: y = kx+m$, khi đó k gọi là hệ số góc của đường thẳng, nó được xác định bởi $k = \tan\alpha$ với α là góc hợp bởi tia Ox và đường thẳng Δ. Chú ý $0 \le \alpha \le \pi, \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$.

* Một số vấn đề giữa hai đường thẳng

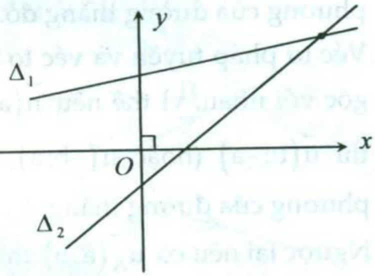
Xét hai đường thẳng có phương trình

$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

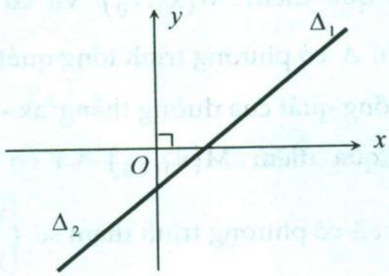
* Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:



$\Delta_1 // \Delta_2$



Δ_1 cắt Δ_2



$\Delta_1 \equiv \Delta_2$

* **Cách 1:**

Δ_1 và Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Δ_1 và Δ_2 song song khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} \neq 0$,

hoặc $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Δ_1 và Δ_2 trùng nhau khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} = 0$.

* **Cách 2:**

Δ_1 và Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

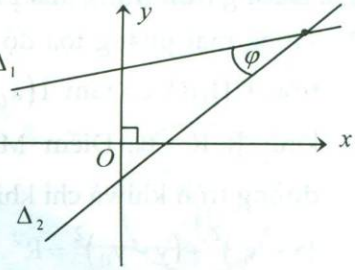
Δ_1 và Δ_2 song song khi và chỉ khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Δ_1 và Δ_2 trùng nhau khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

* Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được xác định thông qua góc giữa hai véc tơ pháp tuyến hoặc góc giữa hai véc tơ chỉ phương, chẳng hạn qua hai véc tơ pháp tuyến thì

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

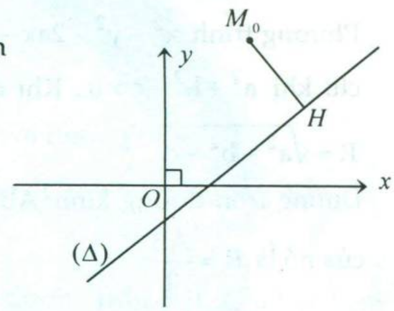


* Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$, hay $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

* Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ

Sử dụng công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Hoặc

+) Tìm hình chiếu của H của điểm M trên đường thẳng Δ_1.

+) $d(M, \Delta_1) = MH$.

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, \Delta_1)$ với M_2 là điểm bất kỳ thuộc Δ_2.

Nếu hai đường thẳng song song có phương trình dạng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $\Delta_2 : a_1x + b_1y + c_2 = 0$ thì khoảng cách giữa chúng là $d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$.

* Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau Δ_1 và Δ_2 là $\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

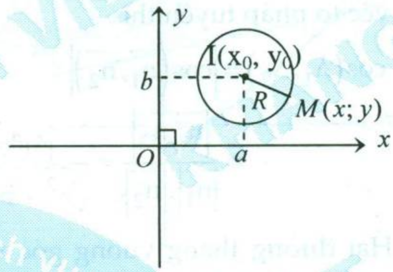
* Vị trí tương đối của hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$.

\+ Hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ nằm cùng phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)>0$.

\+ Hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ nằm khác phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_A+by_A+c)(ax_B+by_B+c)<0$.

I.3. Đường tròn trong mặt phẳng.

* Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn $C(I;R)$ có tâm $I(x_0;y_0)$ và bán kính $R, R>0$. Điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn khi và chỉ khi $IM=R$, hay $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.



Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$. Khi đó đường tròn có tâm là $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

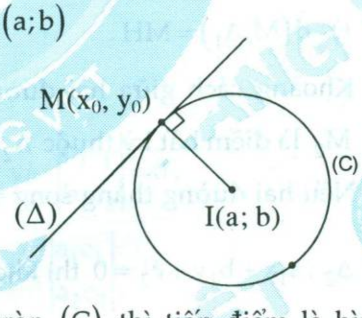
Đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm I của AB và bán kính của nó là $R=\dfrac{AB}{2}$.

* Tiếp tuyến của đường tròn

Xét đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, I(a;b)$

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn là đường thẳng qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}$ nên có phương trình

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=0$.



Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì tiếp điểm là hình chiếu của tâm I lên đường thẳng Δ.

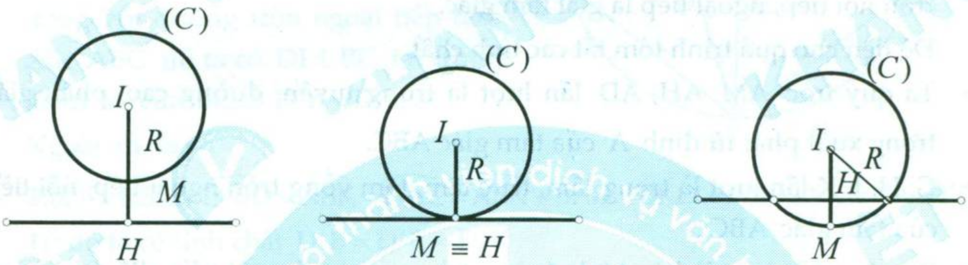
* Vị trí tương đối

Giữa điểm M và đường tròn (C) tâm I, bán kính R.

\+ Nếu $IM>R$ thì điểm M nằm ngoài đường tròn (C). Qua M kẻ hai đường tiếp tuyến ME, MF với đường tròn. Ta có $ME=MF$; MI là phân giác của các góc $\widehat{EMF}, \widehat{EIF}$; EF cắt IM tại H là trung điểm của đoạn thẳng EF.

+ Nếu $IM = R$ thì điểm M nằm trên đường tròn (C). Qua M kẻ được một tiếp tuyến với (C).
+ Nếu $IM < R$ thì điểm M nằm trong đường tròn (C). Không có tiếp tuyến nào đi qua điểm M.

* Giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C) tâm I bán kính R.



So sánh $d(I,\Delta)$ và R.

+ Nếu $d(I,\Delta) > R$ thì Δ không có điểm chung với đường tròn (C).
+ Nếu $d(I,\Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với đường tròn (C). Khi đó đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C).
+ Nếu $d(I,\Delta) < R$ thì Δ có hai điểm chung với đường tròn (C). Gọi hai điểm đó là A, B thì $d^2(I,\Delta) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2$.

* Giữa hai đường tròn (C_1) tâm I_1 bán kính R_1 và (C_2) tâm I_2 bán kính R_2. So sánh I_1I_2 với $|R_1 - R_2|$ và $R_1 + R_2$.

+ Nếu $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$ thì đường tròn này nằm trong đường tròn kia nên không tồn tại tiếp tuyến chung.
+ Nếu $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ thì hai đường tròn này tiếp xúc trong với nhau nên hai đường tròn có 1 tiếp tuyến chung.
+ Nếu $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ thì hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì hai đường tròn này có 2 tiếp tuyến chung.
+ Nếu $I_1I_2 = R_1 + R_2$ thì hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại M. Hai đường tròn có 3 tiếp tuyến chung.
+ Nếu $I_1I_2 > R_1 + R_2$ thì hai đường tròn nằm ngoài nhau. Khi đó hai đường tròn có 4 tiếp tuyến chung.

II. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP TRỌNG TÂM

DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC

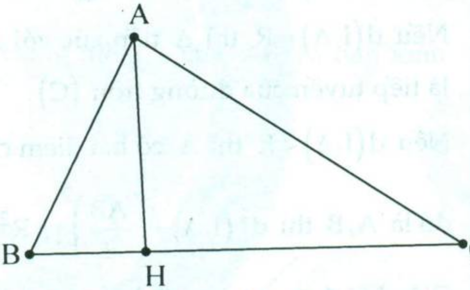
Ta gọi chung các bài toán: Xác định tọa độ đỉnh tam giác, các yếu tố liên quan đến đường cao, trung tuyến, phân giác, trọng tâm, trực tâm, tâm vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp là giải tam giác.

Để tiện cho quá trình tóm tắt các tính chất.

+ Ta quy ước AM, AH, AD lần lượt là trung tuyến, đường cao, phân giác trong xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.
+ G, H, I, K lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm vòng tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC.
+ R, r, S, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, diện tích, nửa chu vi của tam giác ABC.

Muốn giải quyết tốt các dạng câu hỏi giải tam giác. Ta cần nắm chắc các tính chất cơ bản sau:

* Khi biết đường cao AH của tam giác ABC ta thường dùng tính chất $AH \perp BC$ để viết phương trình BC hoặc dùng điều kiện $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ để tìm tọa độ các điểm.



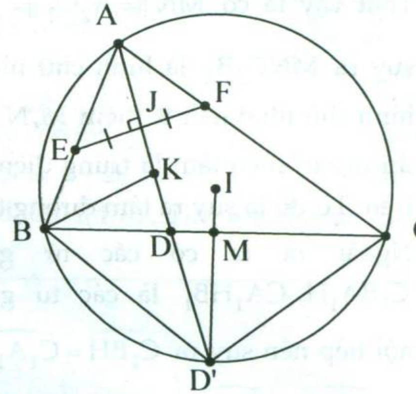
* Khi biết đường trung tuyến AM ta thường dùng một trong các tính chất sau:

+ Tọa độ điểm $M\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right) \in AM$
+ $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM}$,
+ $S_{\Delta GAB} = S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCA} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}$
+ IM là đường trung trực của tam giác ABC

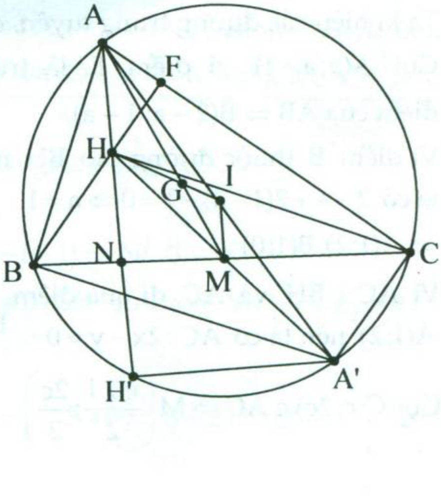
* Khi biết đường phân giác trong AD ta cần lưu ý các tính chất sau:

+ Tính chất đối xứng qua phân giác trong:

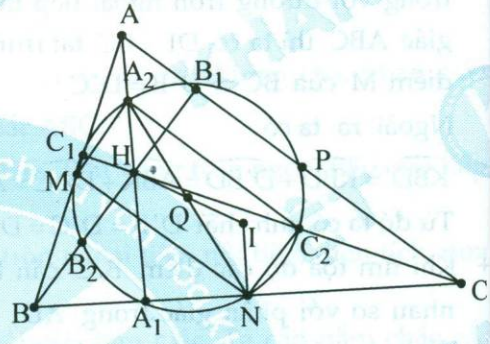
Xét điểm $E \in AB$ gọi F là điểm đối xứng với E qua phân giác trong AD th $F \in AC$



+ Để xác định tọa độ chân đường phân giác trong ta dùng tính chất:
$AC.DB = AB.DC$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AC}{AB}\overrightarrow{DC}$
+ Gọi D' là giao điểm của phân giác trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có $DI \perp BC$ tại trung điểm M của $BC \Rightarrow D'B = D'C$.
Ngoài ra ta có
$\widehat{KBD'} = \widehat{KBD} + \widehat{D'BD} = \widehat{ABK} + \widehat{DAC} = \widehat{ABK} + \widehat{BAD} = \widehat{BKD'} \Rightarrow \Delta BKD'$ cân tại D'
Từ đó ta có tính chất $D'B = D'C = D'K$.
+ Khi tìm tọa độ các điểm B,C cần lưu ý điều kiện B,C luôn ở khác phía nhau so với phân giác trong AD, Tâm K của đường tròn ngoại tiếp và đỉnh A luôn cùng phía so với BC.
* Mối liên hệ trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:
Gọi AA' là một đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H' là giao điểm của đường cao AN với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có:
+ Tứ giác BHCA' là hình bình hành, nên HA',BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường.
+ Ta có $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$, nhưng $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MI}$
$\Rightarrow 3\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HI} \Leftrightarrow \overrightarrow{HI} = 3\overrightarrow{GI}$
+ Điểm H,H' đối xứng nhau qua BC
+ Trong tam giác ABC gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. A_1, B_1, C_1 lần lượt là các chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện. A_2, B_2, C_2 là trung điểm của HA, HB, HC. Khi đó 9 điểm M, N, P, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 cùng nằm trên một đường tròn gọi là đường tròn Ơ le của tam giác ABC.



Thật vậy ta có $MN \parallel = A_2C_2 \parallel = \frac{1}{2}AC$, $MA_2 \parallel = NC_2 \parallel = \frac{1}{2}BH$ mà $BH \perp AC$ suy ra MNC_2B_2 là hình chữ nhật, tương tự ta có MPB_2C_2, NPA_2B_2 là hình chữ nhật nên 9 điểm $M, N, P, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của các đường chéo của 3 hình chữ nhật trên. Từ đó ta suy ra tâm đường tròn Ơ le là trung điểm Q của HI.



Ngoài ra ta có các tứ giác C_1BA_1H, CA_1HB_1 là các tứ giác nội tiếp nên suy ra $\widehat{C_1BH} = \widehat{C_1A_1H}$ và $\widehat{HA_1B_1} = \widehat{HCB_1}$.

Nhưng $\widehat{C_1BH} = \widehat{HCB_1} \Rightarrow \widehat{C_1A_1H} = \widehat{HA_1B_1}$.

Nói cách khác AA_1 là phân giác trong của góc $\widehat{C_1A_1B_1}$.

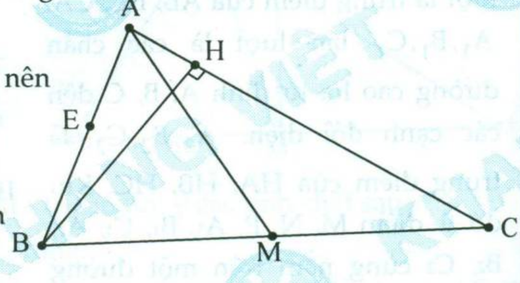
Tương tự cho các đường BB_1, CC_1 ta suy ra trực tâm H là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

🕮 Rèn luyện kỹ năng giải các dạng bài tập

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trung tuyến và đường cao xuất phát từ đỉnh A, B lần lượt là $x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ đoạn AB có trung điểm $E(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác.

Giải:

Ta kí hiệu các đường trung tuyến, đường cao như hình vẽ:



Gọi $A(a;a+1)$ vì điểm E là trung điểm của $AB \Rightarrow B(2-a;1-a)$.

Vì điểm B thuộc đường cao BH nên ta có $2 - a + 2(1-a) - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow A(1;2), B(1;0)$

Vì $AC \perp BH$ và AC đi qua điểm $A(1;2)$ nên ta có $AC: 2x - y = 0$

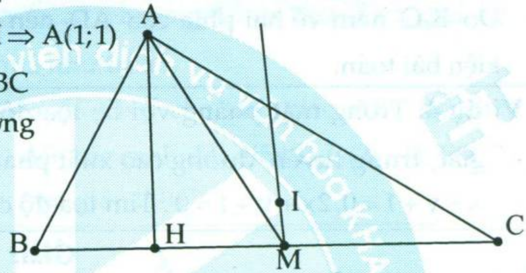
Gọi $C(c;2c) \in AC \Rightarrow M\left(\frac{c+1}{2};\frac{2c}{2}\right)$.

Vì $M \in AM \Rightarrow \frac{c+1}{2} - \frac{2c}{2} + 1 = 0 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow C(3;6)$

Vậy $A(1;2), B(1;0), C(3;6)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trung tuyến và đường cao xuất phát từ đỉnh A lần lượt là $x + 2y - 3 = 0$, $x + y - 2 = 0$. Biết tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác là điểm $I(4;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Giải:



Ta kí hiệu các đường như hình vẽ:

Điểm A là giao điểm của $AM, AH \Rightarrow A(1;1)$

Đường trung trực IM của cạnh BC qua I song song với AH có phương trình: $x + y - 4 = 0$

Ta tìm được điểm $M(5;-1)$ là giao điểm của IM và AM.

Đường thẳng BC qua M vuông góc với AH có dạng: $x - y - 6 = 0$

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-3;1)$.

Gọi điểm $B(b;b-6) \Rightarrow \overrightarrow{IB}(b-4;b-6)$, vì $IB = IA = R$

$\Rightarrow (b-4)^2 + (b-6)^2 = 10 \Leftrightarrow b^2 - 10b + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = 7 \end{array}\right.$

Từ đó ta có $\begin{cases} B(3;-3) \\ C(7;1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B(7;1) \\ C(3;-3) \end{cases}$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Phân giác trong $AD: x + y + 2 = 0$, đường cao $BH: 2x - y + 1 = 0$, cạnh AB đi qua $M(1;1)$, diện tích tam giác là 6,75. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

Giải:

Gọi N là điểm đối xứng với M qua phân giác trong AD.

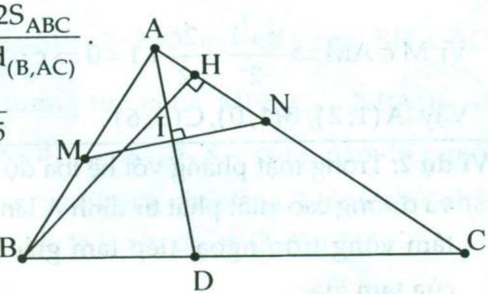
Phương trình của $MN: x - y = 0$

Gọi I là giao điểm của AD và $MN \Rightarrow I(-1;-1) \Rightarrow N(-3;-3)$

Đường thẳng AC qua N vuông góc với BH có dạng $AC: x + 2y + 9 = 0$ suy ra $A = AC \cap AD = (5;-7)$

Phương trình cạnh AB đi qua $A, M: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow B = BH \cap AB = \left(\frac{1}{2};2\right)$.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}d_{(B,AC)}.AC \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABC}}{d_{(B,AC)}}$.



Tính được $d_{(B,AC)} = \frac{27}{2\sqrt{5}} \Rightarrow AC = \sqrt{5}$

Gọi $C(-2c-9;c)$

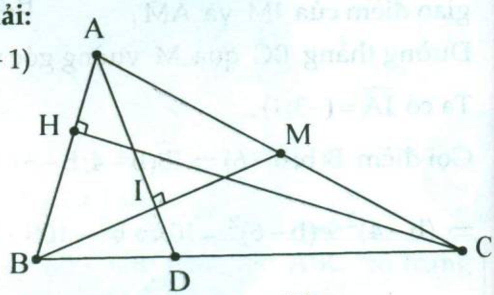
$\Rightarrow \overrightarrow{AC}(-2c-14;c+7)$

$\Rightarrow AC^2 = 5(c+7)^2 = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=-6 \\ c=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C(3;-6) \\ C(7;-8) \end{array}\right.$

Do B,C nằm về hai phía của AD nên chỉ có điểm $C(3;-6)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phân giác, trung tuyến, đường cao xuất phát từ A, B, C lần lượt là $x+y-3=0$, $x-y+1=0$, $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

Giải:



Gọi $A(a;3-a)$, $B(b;b+1)$, $C(c;-2c-1)$

Trung điểm M của AC có tọa độ

$M\left(\frac{a+c}{2};\frac{2-a-2c}{2}\right)$.

Vì điểm $M \in BM$

$\Rightarrow \frac{a+c}{2} - \frac{2-a-2c}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2a+3c=0$ (1)

Ta có $AB \perp CH \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}_{CH} = 0$,

$\overrightarrow{AB}(b-a;b+a-2)$, $\overrightarrow{u}_{CH}(-1;2) \Rightarrow b+3a-4=0$ (2)

Ta thấy $BM \perp AD$ nên theo tính chất đối xứng của phân giác trong ta suy ra điểm B đối xứng với M qua phân giác trong AD. Tức là trung điểm I của BM thuộc AD

Tọa độ điểm $I\left(\frac{a+2b+c}{4};\frac{2b-a-2c+4}{4}\right)$. Vì $I \in AD \Rightarrow 4b-c-8=0$ (3)

Giải hệ phương trình (1),(2),(3) ta thu được $a=\frac{12}{17}; b=\frac{32}{17}; c=-\frac{8}{17}$

Suy ra $A\left(\frac{12}{17};\frac{39}{17}\right); B\left(\frac{32}{17};\frac{49}{17}\right); C\left(-\frac{8}{17};-\frac{1}{17}\right)$.

Chú ý : Nếu không phát hiện ra điểm đặc biệt của bài toán là: $BM \perp AD$ thì ta có thể giải theo cách khác như sau:

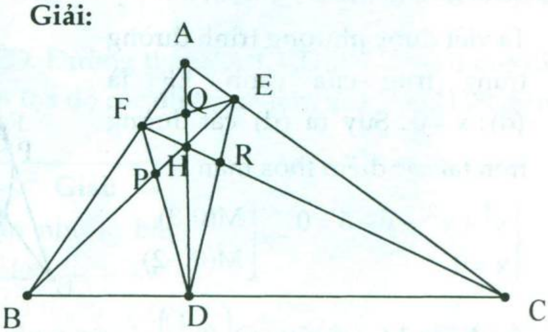
Gọi C' là điểm đối xứng với C qua phân giác trong AD. Phương trình đường thẳng $CC': x - y - 3c - 1 = 0$. Giao điểm của CC' và AD là điểm J có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x - y - 3c - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3c+4}{2} \\ y = \dfrac{2-3c}{2} \end{cases} \Rightarrow C'(2c+4; 3-c)$$

Vì $C' \in AB \Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\vec{u}_{CH} = 0$ từ đó ta có phương trình thứ 3 và giải hệ 3 phương trình cũng thu được kết quả như trên.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện là D(2; –1), E(2; 2), F(–2; 2). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

Giải:



* **Cách 1:** Gọi H là trực tâm của tam giác ABC ta suy ra H là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác DEF. Để tìm H ta sẽ viết phương trình các đường phân giác trong góc $\widehat{DEF}, \widehat{EDF}$ như sau:

Ta có $\overrightarrow{DE}(0;3), \overrightarrow{DF}(-4;3), \overrightarrow{EF}(-4;0) \Rightarrow DE = 3; DF = 5; EF = 4$.

Kí hiệu các điểm P, Q, R như hình vẽ.

\+ Dựa vào tính chất đường phân giác trong ta có $\overline{QE} = -\dfrac{DE}{DF}\overline{QF}$.

Gọi $Q(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{QE}(2-x; 2-y), \overrightarrow{QF}(-2-x; 2-y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - x = -\dfrac{3}{5}(-2-x) \\ 2 - y = -\dfrac{3}{5}(2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$$

\+ Tương tự ta có $R\left(2; \dfrac{1}{3}\right)$.

Phương trình các đường thẳng $DQ: 2x + y - 3 = 0$,

$FR: x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow H = DQ \cap FR = (1;1)$

Từ đó ta viết được phương trình các cạnh của tam giác ABC là

$AB: 3x - y + 8 = 0; AC: x + y - 4 = 0;$

$BC: x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow A(-1;5), B(-4;-4), C(4;0)$

* **Cách 2:**

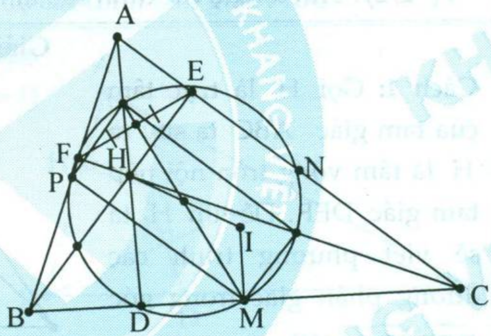
Ta gọi phương trình đường tròn đi qua các điểm D, E, F là :

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} 4+1+2a-b+c=0 \\ 4+4+2a+2b+c=0 \\ 4+4-2a+2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=-6 \end{cases}$ suy đường tròn cần tìm là

$(T): x^2 + y^2 - y - 6 = 0$

Gọi M, N, P là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB. Theo tính chất đường tròn Ơ le ta có: M là giao điểm của đường trung trực của cạnh EF với đường tròn (T).



Ta viết được phương trình đường trung trực của cạnh EF là $(d): x = 0$. Suy ra (d) cắt đường tròn tại các điểm thỏa mãn

$\begin{cases} x^2 + y^2 - y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;3) \\ M(0;-2) \end{array}\right.$

do điểm M và tâm $Q\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ ở cùng phía với EF nên ta suy ra $M(0;-2)$.

Hoàn toàn tương tự ta tìm được N, P từ đó dễ dàng suy ra các điểm A, B, C.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(6;6)$, tâm đường tròn nội tiếp là $K(4;5)$. Biết $A(2;3)$ và $(x_B < x_C)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Giải:

Từ giả thiết ta suy ra phương trình đường phân giác trong góc A là:

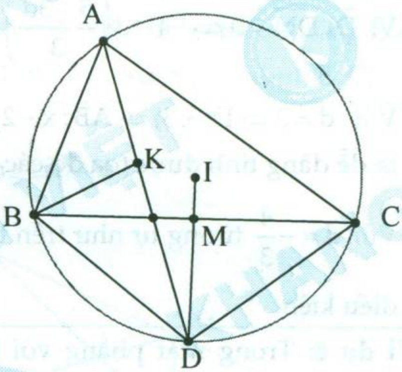
$AK: x - y + 1 = 0$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$

Gọi D là giao điểm của phân giác trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì tọa độ điểm D phải thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow D(9;10)$$



Theo tính chất tâm đường tròn nội tiếp ta có $DB = DC = DK$ nên điểm B, C thuộc đường tròn tâm D bán kính $DK = \sqrt{50}$.

Từ đó ta suy ra tọa độ các điểm B, C phải thỏa mãn hệ:

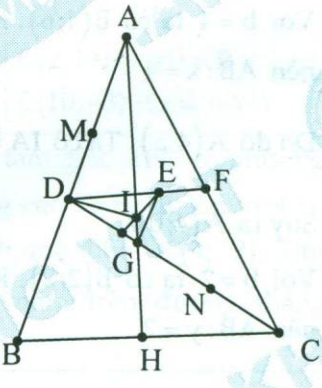
$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \end{cases}$$

Hay $B(2;9), C(10;3)$.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AB, $I\left(\frac{11}{3};\frac{5}{3}\right), E\left(\frac{13}{3};\frac{5}{3}\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp , trọng tâm tam giác ACD. Đường thẳng AB, CD lần lượt đi qua các điểm $N(-3;0), M(3;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm A có tung độ dương.

Giải:

Đây là bài toán khó. Khi gặp những bài toán kiểu như thế này việc kẻ thêm các đường phụ để tận dụng các yếu tố đặc biệt là trọng tâm, trực tâm, đường trung bình… chính là chìa khóa để giải quyết.



Việc cho điểm D là trung điểm của AB giúp ta liên tưởng đến đường trung tuyến CD, trọng tâm tam giác ABC.

Thật vậy gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Do $ID \perp AB$, $FG // AB \Rightarrow ID \perp GE$, mặt khác $IG \perp DE$ (do tam giác ABC cân ở A) ta suy ra I là trực tâm của tam giác DEG $\Rightarrow EI \perp DC$.

Viết được phương trình của DC là: $x - 3 = 0$.

Gọi $D(3;d) \Rightarrow \overrightarrow{DI}\left(\frac{2}{3};\frac{5-3d}{2}\right), \overrightarrow{DN}(-6;-d)$

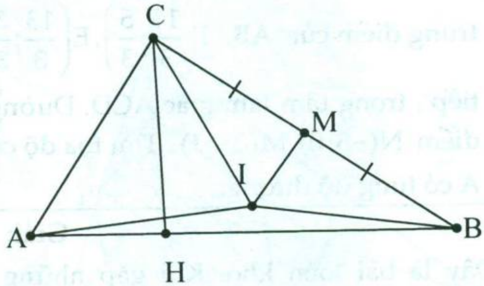
Vì $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow -4 - d\left(\dfrac{5-3d}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

\+ Với $d = 3 \Rightarrow D(3;3) \Rightarrow AB: x - 2y + 3 = 0, DE \perp AI \Rightarrow AI: x - y - 2 = 0$. Từ đó ta dễ dàng tính được tọa độ các điểm $A(7;5), B(-1;1), C(3;-3)$.

\+ Với $d = -\dfrac{4}{3}$ tương tự như trên ta tính được $A\left(\dfrac{107}{6};\dfrac{-125}{27}\right)$ không thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ C xuống AB là $H(4;2)$, trung điểm của BC là $M(3;4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(5;3)$. Tìm tọa độ điểm A.

Giải:



Đường thẳng BC đi qua $M(3;4)$ và nhận $\overrightarrow{MI}(2;-1)$ là VTPT nên $BC: 2x - y - 2 = 0$.

Khi đó $B(b;2b-2)$.

Trong tam giác BHC vuông tại H thì trung tuyến kẻ từ H bằng một nửa cạnh huyền nên

$MH = MB \Leftrightarrow 5 = (b-3)^2 + (2b-6)^2 \Leftrightarrow 5b^2 - 30b + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = 2 \end{array}\right.$

\+ Với $b = 4$ ta có $B(4;6)$. Khi đó đường thẳng AB đi qua $B(4;6)$ và $H(4;2)$ nên $AB: x = 4$

Do đó $A(4;a)$. Ta có $IA = IB \Leftrightarrow 1 + (a-3)^2 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(4;6) \equiv B \\ A(4;0) \end{array}\right.$.

Suy ra $A(4;0)$.

\+ Với $b = 2$ ta có $B(2;2)$. Khi đó đường thẳng AB đi qua $B(2;2)$ và $H(4;2)$ nên $AB: y = 2$.

Do đó $A(a;2)$. Ta có $IA = IB \Leftrightarrow (a-5)^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(2;2) \equiv B \\ A(8;2) \end{array}\right.$.

Suy ra $A(8;2)$.

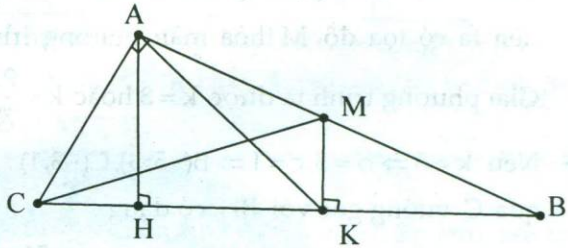
Ví dụ 9: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(2;3)$, $AB = 2AC$. Gọi M là trung điểm của AB. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng BC là $K(4;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Giải:

Từ giả thiết ta suy ra tam giác AMC vuông cân tại A.

Mặt khác tứ giác AMKC nội tiếp, ta suy ra:

$\widehat{ACM} = \widehat{AKM} = 45^0$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC thì $\widehat{HAK} = \widehat{AKM} = 45^0$ nên tam giác AHK vuông cân tại H.

Gọi $H(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(x-2;y-3), \overrightarrow{KH}(x-4;y-9)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{KH} = 0 \\ AH = KH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 7 \\ x = 6, y = 5 \end{array}\right.$

+ Nếu $H(0;7)$ thì

$B(8;11) \Rightarrow \overrightarrow{HK}(-4;-2) \Rightarrow C(4+2t;9+t), \overrightarrow{AB}(6;-8), \overrightarrow{AC}(2t+2;t+6)$

Vì $AB = 2AC \Rightarrow 5t^2 + 20t + 40 = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C(8;11) \text{ (loại)} \equiv B \\ C(-8;3) \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$

+ Nếu $H(6;5)$ thì $B(2;13)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HK}(-2;4) \Rightarrow C(4-t;9+2t), \overrightarrow{AB}(0;10), \overrightarrow{AC}(2-t;2t+6)$

Vì $AB = 2AC \Rightarrow 5t^2 + 20t + 40 = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C(2;13) \text{ (loại)} \equiv B \\ C(10;-3) \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$

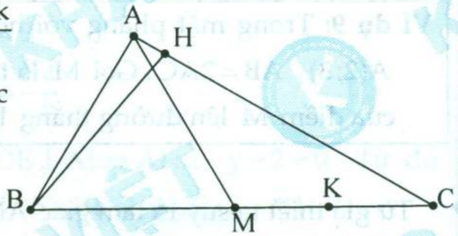
Ví dụ 10: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có phương trình của trung tuyến xuất phát từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt là: $2x - 5y - 1 = 0; x + 3y - 4 = 0$. Đường thẳng BC đi qua điểm $K(4;-9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết đỉnh C nằm trên đường thẳng $d: x - y - 6 = 0$ và điểm B có tọa độ là số nguyên.

Giải:

Gọi $B(4-3b;b), C(c;c-6)$ ta có $\overrightarrow{KB}(-3b;b+9); \overrightarrow{KC}(c-4;c+3)$

K, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$.

Từ đó ta tính được $b = \dfrac{7k-9}{4}, c = \dfrac{27-5k}{4k}$



Gọi M là trung điểm của BC ta tính được

$$M\left(\frac{-21k^2+38k+27}{8k}; \frac{7k^2-38k+27}{8k}\right)$$

Vì M thuộc đường trung tuyến AM

nên ta có tọa độ M thỏa mãn phương trình $AM \Rightarrow -77k^2+258k-81=0$.

Giải phương trình ta được $k=3$ hoặc $k=\dfrac{27}{77}$

+ Nếu $k=3 \Rightarrow b=3, c=1 \Rightarrow B(-5;3), C(-3;1)$. Phương trình đường thẳng AC qua C vuông góc với BH có dạng:

$$3x-y+10=0 \Rightarrow A = AC \cap AM = \left(-\frac{51}{13}; -\frac{23}{13}\right)$$

+ Nếu $k=\dfrac{27}{77}$ thì tọa độ điểm B không phải là số nguyên nên không thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt có phương trình: $6x-5y-7=0; x-4y+2=0$. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng trọng tâm của tam giác thuộc trục hoành và đường cao xuất phát từ đỉnh B đi qua điểm $E(1;-4)$ và hoành độ điểm B nhỏ hơn -1.

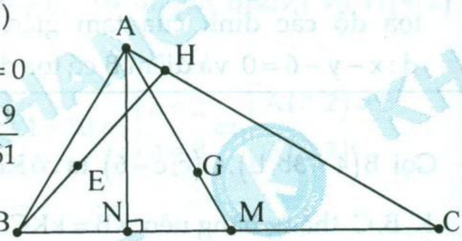
Giải:

Ta có $A(2;1)$. Gọi $G(a;0)$, vì G thuộc trung tuyến $AM: x-4y+2=0$ nên suy ra $G(-2;0)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có: $AG = 2GM \Rightarrow M\left(-4; -\dfrac{1}{2}\right)$

Viết được $BC: 5x+6y+23=0 \Rightarrow B(-1+6t; -3-5t); C(-7-6t; 5t+2)$ suy ra

Ta có $\overrightarrow{EB}(6t-2; 1-5t), \overrightarrow{AC}(-6t-8; 5t+1)$



Vì BE vuông góc với AC nên $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow 61t^2+42t-19=0 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=\dfrac{19}{61}$

Vì $x_B < -1 \Rightarrow t=-1, B(-7;2), C(-1;-3)$

Ta có $\overrightarrow{AB}\left(-9;1\right),\overrightarrow{AC}(-3;-4)$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{23}{5\sqrt{82}} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{39}{5\sqrt{82}}.$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.\sqrt{82}.5.\frac{39}{5\sqrt{82}} = 17,5$

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết trực tâm $H(1;0)$ chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0;2)$ trung điểm cạnh AB là $M(3;1)$.

Giải

+ Đường thẳng AC vuông góc với HK nên nhận $\overrightarrow{HK} = (-1;2)$ làm véc tơ pháp tuyến và AC đi qua K nên $(AC): x - 2y + 4 = 0$.

Ta viết được: $(BK): 2x + y - 2 = 0$.

+ Do $A \in AC, B \in BK$ nên giả sử $A(2a-4;a), B(b;2-2b)$.

Mặt khác $M(3;1)$ là trung điểm của *AB* nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 2a-4+b=6 \\ a+2-2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=10 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}.$$

Suy ra: $A(4;4), B(2;-2)$.

+ Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (-2;-6)$, suy ra: $(AB): 3x - y - 8 = 0$.

+ Đường thẳng BC qua B và vuông góc với AH nên nhận $\overrightarrow{HA} = (3;4)$, suy ra: $(BC): 3x + 4y + 2 = 0$.

KL: $AC: x - 2y + 4 = 0; AB: 3x - y - 8 = 0; BC: 3x + 4y + 2 = 0$.

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm là $H(-1;4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-3;0)$ và trung điểm của cạnh BC là $M(0;-3)$. Viết phương trình đường thẳng AB, biết B có hoành độ dương.

Giải:

Kẻ đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $BHCA'$ là hình bình hành IM là đường trung bình của tam giác $AHA' \Rightarrow \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MI}$

Kết hợp với $2\overrightarrow{MI} = \left(-6;6\right), H\left(-1;4\right)$ ta có $A\left(-7;10\right)$.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC, suy ra $IA = IB$ và $IM \perp MB$.

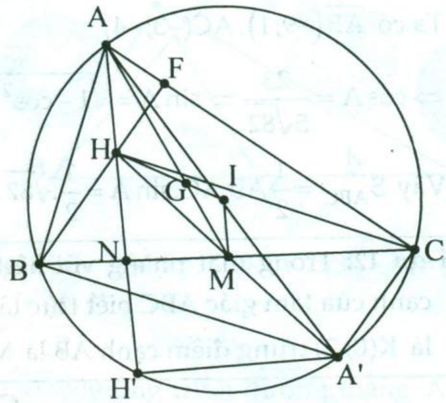
Gọi $B(x;y)$ với $x>0$, ta có x,y thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=16\\ -3x+3(y+3)=0\end{cases}\Rightarrow B(7;4)$$

Phương trình AB:

$$\frac{x+7}{7+7}=\frac{y-10}{4-10}$$

hay $3x+7y-49=0$.



Ví dụ 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD biết trực tâm ΔBCD là H(4; 0), tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD là $I\left(2;\frac{3}{2}\right)$ điểm B thuộc đường thẳng $3x-4y=0$ và đường thẳng BC đi qua M(5; 0). Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD biết đểm B có hoành độ dương.

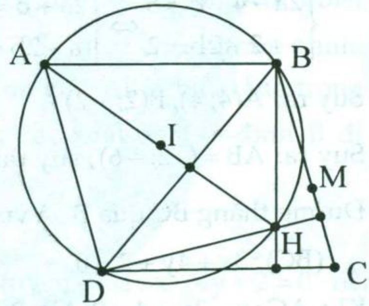
Giải:

Vì H là trực tâm của tam giác BCD

$$\Rightarrow\begin{cases}BH\perp CD\\ DH\perp BC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}BH\perp AB\\ DH\perp AD\end{cases}\Rightarrow HA \text{ là}$$

đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Từ đó suy ra $A(0;3)$.



Gọi $B(4t;3t)\Rightarrow IB=IA\Leftrightarrow(4t-2)^2+\left(3t-\frac{3}{2}\right)^2=4+\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.$

+ Nếu $t=0\Rightarrow B(0;0)$ (loại)
+ Nếu $t=1\Rightarrow B(4;3)$.

$$\text{Gọi } D(x;y)\Rightarrow\begin{cases}ID=IA\\ \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\\ 1.(x-4)-3y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0,x=4\\ y=-\frac{9}{10},x=\frac{13}{10}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D(4;0)\text{ (loại)}\equiv H\\ D\left(\frac{13}{10};-\frac{9}{10}\right)\end{array}\right.$$

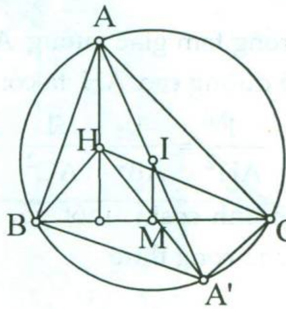
Vậy $D\left(\frac{13}{10};-\frac{9}{10}\right) \Rightarrow C\left(\frac{53}{10};-\frac{9}{10}\right)$.

Ví dụ 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $I(2;1)$ bán kính bằng 5. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết tam giác ABC có trực tâm $H(-1;-1)$, $\sin\widehat{BAC} = \frac{4}{5}$ và điểm A có hoành độ âm.

Giải:

Ta có $BC = 2R.\sin\widehat{BAC} = 8$. Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường kính AA'. Ta có $BHCA'$ là hình bình hành nên M là trung điểm của HA'.

Suy ra $AH = 2IM = 2\sqrt{IB^2 - BM^2} = 2\sqrt{25-16} = 6$.



Gọi $A(x;y),(x<0)$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} IA = 5 \\ HA = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow A(-1;5)$$

Vì $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \Rightarrow M(2;-2) \Rightarrow BC: y+2=0$

Điểm B, C chính là giao điểm của BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

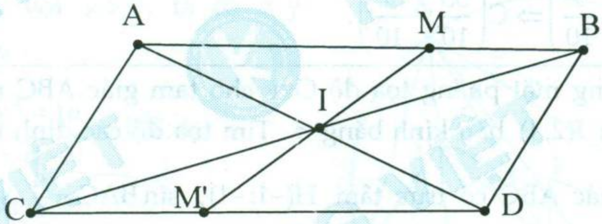
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2=0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6; y=-2 \\ x=-2; y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(6;-2), C(-2;-2) \\ C(6;-2), B(-2;-2) \end{array}\right.$$

DẠNG 2: GIẢI CÁC HÌNH ĐẶC BIỆT

Để giải quyết tốt các câu hỏi liên quan đến hình đặc biệt: Hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, các tam giác vuông , cân, đều… Thì chìa khóa là ta phải quy bài toán về quan hệ: ***"Góc hoặc khoảng cách"*** hoặc ta kẻ thêm các đường phụ để tận dụng các yếu tố liên quan đến trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp một tam giác.

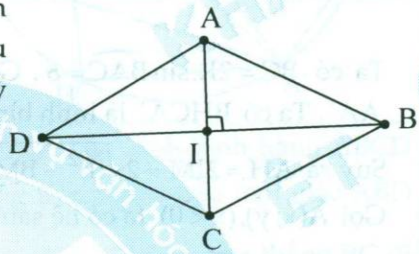
1. Các tính chất cần nắm:

+ Tính đối xứng qua tâm: Xét điểm M thuộc một cạnh của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hanh, gọi M' là điểm đối xứng với M qua I thì M' luôn nằm trên cạnh đối diện (Với I là giao điểm hai đường chéo).



+ Trong hình thoi, hình vuông: Khoảng cách giữa hai cặp cạnh đối diện luôn bằng nhau và bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc một cạnh đến cạnh đối diện

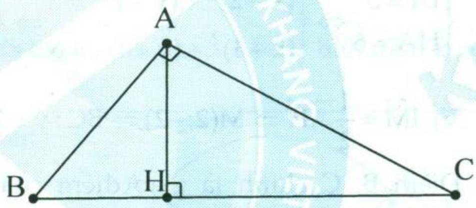
$d_{(AB,CD)} = d_{(BC,AD)} = d_{(M\in AB,CD)}$



+ Trong tam giác vuông ABC $\widehat{A} = 90^0$ kẻ đường cao AH ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

+ Để tính cosin một góc bất kỳ ta dùng công thức



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Trong các hình đặc biệt để tính cosin các góc ta nên quy các cạnh về một đơn vị độ dài, chẳng hạn như : Đặt cạnh $AB = a$ sau đó tính độ dài các cạnh liên quan theo a để từ đó áp dụng định lý cosin được dễ dàng.

2. Kỹ năng giải toán:

Để viết phương trình một đường thẳng Δ ta cần biết véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ và một điểm M thuộc đường thẳng.

+ Nếu giả thiết bài toán giúp ta suy ra trực tiếp véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ thì bài toán coi như được giải quyết.

+ Nếu giả thiết không thể suy ra trực tiếp véc tơ pháp tuyến thì ta gọi $\vec{n}(a;b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm sau đó dựa vào giả thiết về góc hoặc khoảng cách để thết lập phương trình đẳng cấp bậc 2 của a, b: $Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0$, từ đó ta thu được hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} a = x_1 b \\ a = x_2 b \end{array}\right.$ với (x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $Ax^2 + Bx + C = 0$)

+ Nếu không biết điểm $M \in \Delta$ ta có thể chia đường thẳng thành 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $\Delta : x + m = 0$

Trường hợp 2: $\Delta : y = kx + m$ việc làm này sẽ giúp ta giảm tối đa số ẩn khi giải toán.

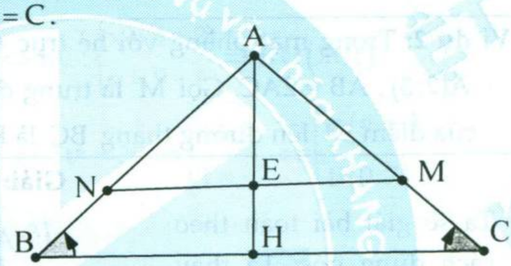
🕮 Rèn luyện kỹ năng giải các bài tập

Ví dụ 1: Cho tam giác cân ABC có cạnh đáy $BC: x - 3y - 1 = 0$, cạnh bên $AB: x - y - 5 = 0$. Đường thẳng AC đi qua $M(-4;1)$. Tìm toạ độ đỉnh C.

Giải:

Ta thấy rằng: Để tìm tọa độ điểm C ta cần viết được phương trình AC.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C}$.



Gọi $\vec{n}(a;b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của AC.

$\overrightarrow{n_1}(1;-3)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng BC, $\overrightarrow{n_2}(1;-1)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AB.

Ta có: $\cos B = \cos C \Leftrightarrow \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{n_1})\right| = \left|\cos(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_1})\right|$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\vec{n}, \overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n_1}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_2}\right|.\left|\overrightarrow{n_1}\right|} \Leftrightarrow \frac{|a - 3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 + 3|}{\sqrt{10}.\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} = |a - 3b| \Leftrightarrow 7a^2 + 6ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = \dfrac{b}{7} \end{array}\right.$$

+ Với $a = -b$ chọn $a = 1, b = -1 \Rightarrow \vec{n}(1;-1)$ loại vì AC//AB

+ Với $a = \dfrac{b}{7}$ chọn $a = 1; b = 7 \Rightarrow AC: x + 7y - 3 = 0$.

Điểm $C = AC \cap BC \Rightarrow C\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$

Ngoài cách làm trên ta có thể giải bài toán theo hướng kẻ thêm đường phụ như sau:

Kẻ đường thẳng MN song song với BC với $(N \in AB)$.

Phương trình đường thẳng $MN: x-3y+7=0$. Tọa độ điểm N thỏa mãn

hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x-3y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow N(11;6)$

Gọi E là trung điểm MN thì $E\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$. Đường thẳng AE qua E vuông góc

với BC có dạng $AE: 3x+y-14=0$

Đường thẳng AE cắt BC tại trung điểm H của BC nên ta có $H\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$.

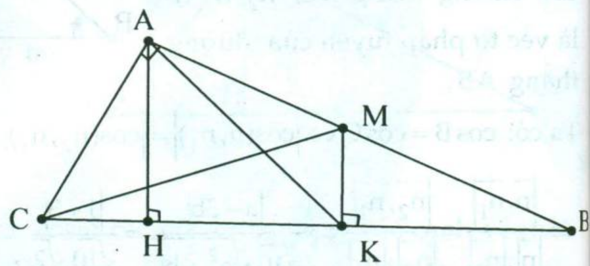
Điểm B là giao điểm của AB và BC nên $B(7;2) \Rightarrow C\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(2;3)$, $AB=2AC$. Gọi M là trung điểm của AB. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng BC là K(4; 9). Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Giải:

Ta sẽ giải bài toán theo cách dùng góc: Ta thấy nếu viết được phương trình BC thì bài toán được giải quyết.

Vì giả thiết đã cho biết A, K nên ta sẽ xác định góc tạo bởi AK và BC



Đặt $AC=a, AB=2a \Rightarrow AH=\frac{2}{\sqrt{5}}a$.

Ta tính được: $HB=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{4a^2-\frac{4a^2}{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \Delta AHK$ vuông cân ở H

Gọi $\vec{n}(a;b)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng BC (Điều kiện $a^2+b^2 \neq 0$)

Đường thẳng AK có phương trình: $3x-y-3=0$ nên có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}(3;-1)$.

Vì BC tạo với AK góc 45^0 nên ta có:

$$\left|\cos\left(\vec{n},\vec{n_1}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|3a-b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow (3a-b)^2 = 5(a^2+b^2) \Leftrightarrow 4a^2 - 6ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ a = -\dfrac{1}{2}b \end{array}\right.$

+ Với $a = 2b$ chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow BC: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 9 - 2t \end{cases} \Rightarrow B(4+t; 9-2t), \overrightarrow{KB}(t; -2t)$.

Mặt khác:

$AK = 2\sqrt{10} \Rightarrow KH = 2\sqrt{5} \Rightarrow KB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5t^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(6;5) \\ B(2;13) \end{array}\right.$.

Nếu $B(2;13)$ từ đó dễ tìm được $C(10;-3)$.

Nếu $B(6;5)$ loại do $H \equiv B$.

+ Với $a = -\dfrac{1}{2}b$ ta chọn $b = 2; a = -1 \Rightarrow BC: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 9 + t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{KH}(2t; t)$

Mặt khác $AK = 2\sqrt{10} \Rightarrow KB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5t^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(8;11) \\ B(0;7) \end{array}\right.$.

Nếu $B(8;11)$ ta dễ tìm được $C(8;-3)$.

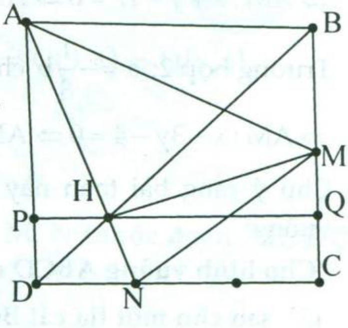
Nếu $B(0;7)$ loại do $H \equiv C$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\dfrac{11}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

(Trích đề tuyển sinh khối A năm 2012).

Giải:

Cách 1: Gọi H là giao điểm của BD và AN qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD, BC lần lượt ở P và Q.



Đặt $HP = x \Rightarrow PD = x, AP = HQ = 3x$

do $\dfrac{DP}{PA} = \dfrac{DH}{HB} = \dfrac{PH}{HQ} = \dfrac{DN}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow QC = MC = x$.

Như vậy $\Delta APH = \Delta MQH \Rightarrow AH \perp HM$ và $AH = HM \Rightarrow \Delta AHM$ vuông cân tại H.

Tức là $AM = \sqrt{2}MH = \sqrt{2}d(H, AN) = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Vì $A \in AN \Rightarrow A(a;2a-3) \Rightarrow \overrightarrow{MA}\left(a-\frac{11}{2};2a-\frac{7}{2}\right) \Rightarrow MA^2 = 5a^2 - 25a + \frac{85}{2} = \frac{90}{4}$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-1) \\ A(4;5) \end{array}\right.$.

Điểm mấu chốt của bài toán là kẻ đường thẳng qua H song song với AD rồi quy bài toán về khoảng cách. Nhưng đây là việc làm không hề dễ dàng đối với học sinh. Để tự nhiên hơn ta có thể tiếp cận bài toán theo cách khác như sau:

Ta thấy rằng muốn tìm điểm A thì ta chỉ cần viết được phương trình đường thẳng AM. Do đó ta cần tìm góc tạo bởi AM và AN. Tam giác AMN chưa phát hiện ra dấu hiệu đặc biệt nên ta sẽ dùng định lý cosin để tính góc $\widehat{MAN}$.

Để đơn giản trong tính toán ta đặt

$AB = 6x \Rightarrow NC = 2x, ND = 4x, MB = MC = 3x$.

Từ đó ta tính được: $AN^2 = 40x^2, MN^2 = 25x^2, AM^2 = 45x^2$.

Suy ra $\cos\widehat{MAN} = \dfrac{MA^2 + NA^2 - MN^2}{2MA.NA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi $\vec{n}(a;b)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AM, $\overrightarrow{n_1}(2;-1)$ là véc tơ pháp tuyến của AN.

Ta có:

$$\left|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{n_1}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 6a^2 - 16ab - 6b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ a = -\frac{1}{3}b \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $a = 3b$ chọn $b = 1, a = 3$

$\Rightarrow AM: x + y - 17 = 0 \Rightarrow AM \cap AN = A(4;5)$.

Trường hợp 2: $a = -\frac{1}{3}b$ chọn $b = -3, a = 1$

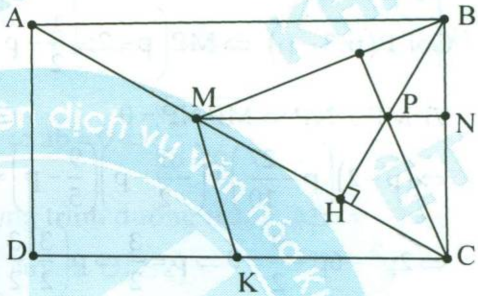
$\Rightarrow AM: x - 3y - 4 = 0 \Rightarrow AM \cap AN = A(1;-1)$.

Chú ý rằng bài toán này xuất phát từ một tính chất đặc biệt trong hình vuông:

"Cho hình vuông ABCD qua đỉnh A ta kẻ 2 tia tùy ý tạo với nhau một góc 45^0 sao cho một tia cắt BC, BD ở M, N, một tia cắt CD, BD ở P, Q thì các điểm C, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn đường kính MP."

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1: 2x - y + 2 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d_2: x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC. Biết $M\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right), K(9;2)$ lần lượt là trung điểm của AH và CD. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hoành độ đỉnh C lớn hơn 4.

Giải:



Trong bài toán có giả thiết liên quan đến trung điểm các cạnh nên điều đầu tiên ta cần nghỉ đến là kẻ các đường thẳng song song để tạo nên đường trung bình, hoặc nghĩ đến trọng tâm tam giác..

+ Qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt BH, BC ở P, N.

Dễ thấy tứ giác MKCP là hình bình hành do $MP // = KC // = \frac{1}{2}AB$.

Mặt khác ta có: $\begin{cases} MN \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow P$ là trực tâm của tam giác $MBC \Rightarrow PC \perp MB$

mà $MK // PC \Rightarrow MK \perp MB$.

+ Gọi $B(b;2b+2) \Rightarrow \overrightarrow{MB}\left(b - \frac{9}{5}; 2b + \frac{8}{5}\right), \overrightarrow{MK}\left(\frac{36}{5};\frac{8}{5}\right)$.

Vì $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MB} = 0 \Rightarrow \frac{52}{5}b - \frac{52}{5} = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B(1;4)$.

+ Gọi điểm $C(c;c-5) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(c-1;c-9), \overrightarrow{KC}(c-9;c-7)$.

Vì $BC \perp KC$

$\Rightarrow (c-1)(c-9) + (c-9)(c-7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 9 \\ c = 4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow C(9;4) \Rightarrow D(9;0)$.

+ Trung điểm I của đoạn BD là $I(5;2) \Rightarrow A(1;0)$.

Bài toán này xuất phát từ tính chất:

Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ $BH \perp AC$. Lấy M, N thuộc đoạn AH, DC sao cho $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$. Ta có $MN \perp MB$."

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A với H là trực tâm.

Gọi $M\left(2;\frac{7}{2}\right), N\left(\frac{27}{10};\frac{6}{5}\right)$ lần lượt là trung điểm của AB, HC. Biết phương trình đường thẳng $BC: x+y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.

Giải:

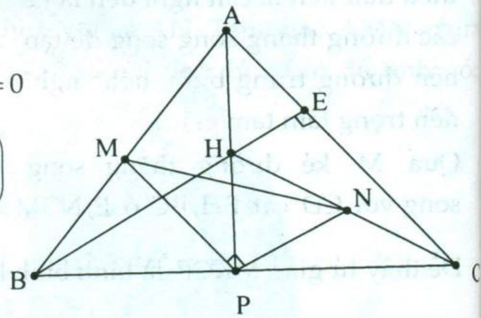
Gọi P là trung điểm của BC thì PN//HE và PM//AC mà $BH \perp AC$ nên t suy ra $PM \perp PN$.

Gọi $P(p;3-p) \Rightarrow \overrightarrow{MP}\left(p-2;-\frac{1}{2}-p\right), \overrightarrow{NP}\left(p-\frac{27}{10};\frac{9}{5}-p\right)$.

Vì $MP \perp NP \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NP}=0$

$\Leftrightarrow (p-2)\left(p-\frac{27}{10}\right)+\left(-\frac{1}{2}-p\right)\left(\frac{9}{5}-p\right)=0$

$\Leftrightarrow 2p^2-6p+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow p=\frac{3}{2} \Rightarrow p\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$



Gọi $B(b;3-b)$ thì $C(3-b;b)$.

Do H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có $BM \perp CN$

Ta có $\overrightarrow{MB}\left(p-2;-\frac{1}{2}-p\right), \overrightarrow{NC}\left(\frac{3}{10}-b;b-\frac{6}{5}\right)$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{NC}=0 \Leftrightarrow (b-2)\left(\frac{3}{10}-b\right)+\left(-\frac{1}{2}-b\right)\left(b-\frac{6}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow -2b^2+3b=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\frac{3}{2} \text{ (loại)}, (B \equiv C) \end{array}\right.$.

Vậy $B(0;3), C(3;0) \Rightarrow A(4;4)$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $A(0;2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC. Trên tia đối của BH lấy điểm E sao cho BE = AC. Biết phương trình đường thẳng $DE: x-y=0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết diện tích của hình chữ nhật bằng 6 và tung độ điểm B dương.

Giải:

Ta thấy rằng bài toán sẽ được giải quyết nếu ta viết được phương trìn đường thẳng AD.

Vì vậy ta cần tính góc $\widehat{ADE}$.