Chương 1: Tập mờ

Nội dung:

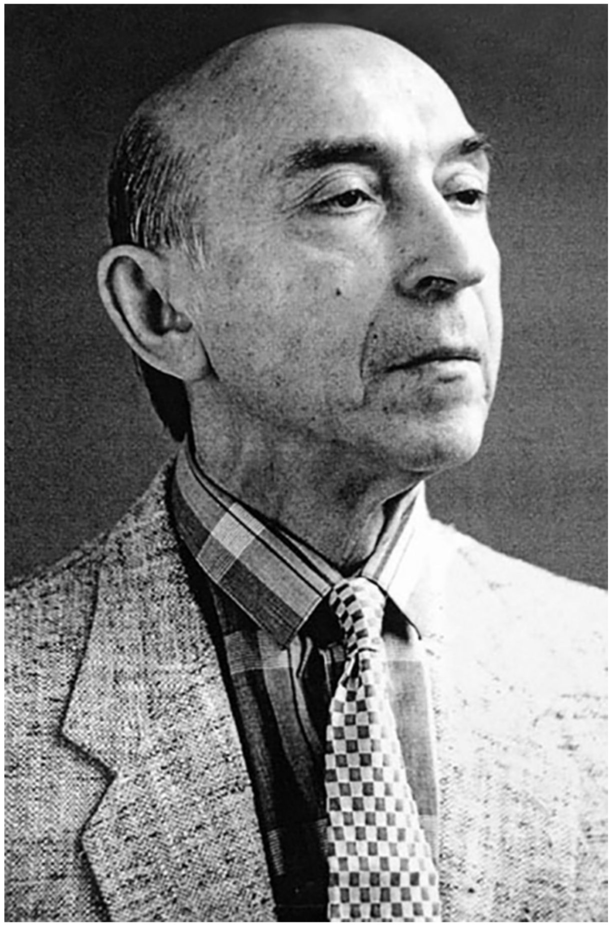
1. Giới thiệu
2. Nhắc lại về tập rõ
3. Các kiểu tập mờ
4. Các khái niệm cơ bản
5. Các phép toán trên tập mờ

1. Giới thiệu

- Tính không chắc chắn:
  - Khi *A* là một tập mờ, *x* là một đối tượng, mệnh đề *"x* là phần tử của *A"* không cần thiết phải đúng hoặc sai. Nó có thể chỉ đúng ở mức độ nào đó (mức độ *x* là một phần tử của *A*)
  - Ví dụ: thời tiết hôm nay
    - Nắng: Nếu chúng ta định nghĩa "độ bao phủ của mây nhỏ hơn hoặc bằng 25% thì trời nắng"
    - Câu hỏi: "Nếu mây bao phủ 26% thì trời nắng không?"
    - Tính mờ (vagueness) cần được xem xét.

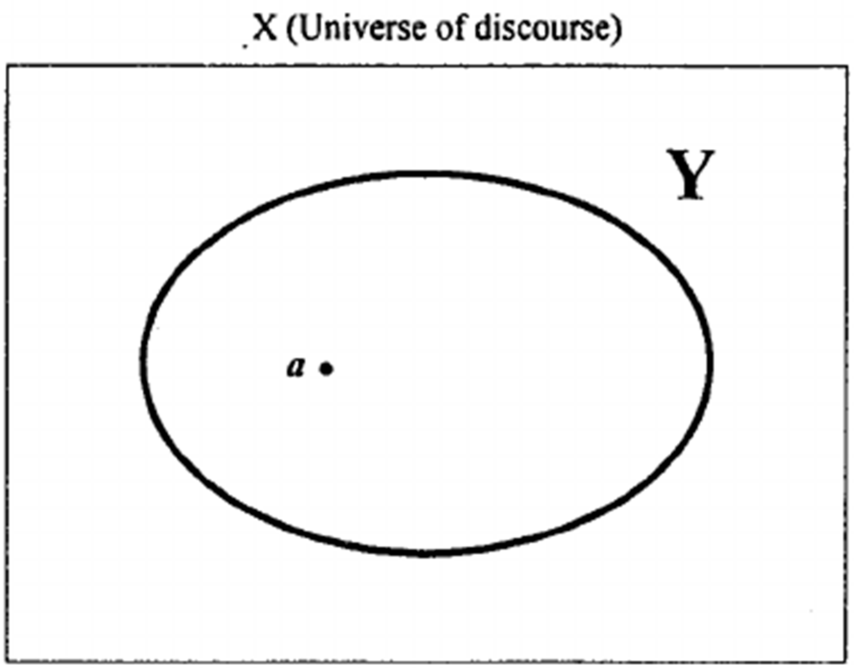
1. Giới thiệu

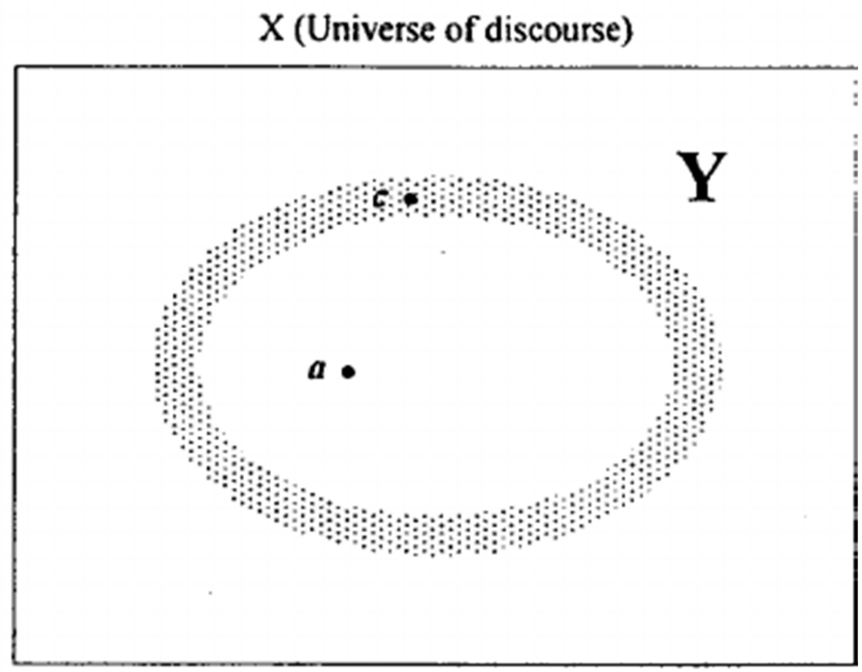
- GS. Lotfi Zadeh (1921 – 2017)
- Giáo sư ngành khoa học máy tính tại Đại học California, Berkeley.
- Đưa ra lý thuyết tập mờ vào khoảng 1965



1. Giới thiệu

- Tập rõ và tập mờ





1. Giới thiệu

- Tập rõ và tập mờ
  - Tập rõ được định nghĩa theo cách chỉ ra các đối tượng trong một tập tham chiếu đã cho được phân chia thành hai nhóm: là phần tử hoặc không là phần tử
    - Có nhiều khái niệm phân lớp không thể chỉ rõ ranh giới giữa các lớp.
    - Ví dụ: tập hợp những người cao, xe ô tô đắt tiền, trời nắng, …
  - Tập mờ có thể định nghĩa theo toán học bằng việc gán cho mỗi đối tượng trong tập tham chiếu một giá trị “độ thuộc” vào một tập mờ.
    - Ví dụ: một tập mờ biểu diễn khái niệm “trời nắng” có thể gán độ thuộc 1 nếu độ bao phủ của mây là 0%, độ thuộc 0.8 nếu độ bao phủ của mây là 20%, độ thuộc 0.4 nếu độ bao phủ của mây là 30%, độ thuộc 0 nếu độ bao phủ của mây là 75%

2. Nhắc lại về tập rõ

- Các ký hiệu thông thường
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – tập tất cả các số nguyên
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – tập tất cả các số tự nhiên dương
  - $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – tập tất cả các số tự nhiên không âm
  - $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
  - $\mathbb{N}_{0,n} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$
  - $\mathbb{R}$ - tập tất cả các số thực
  - $\mathbb{R}^+$ - tập tất cả số thực không âm
  - $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) – khoảng đóng, khoảng mở trái, khoảng mở phải, khoảng mở các số thực giữa *a* và *b*
  - $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: bộ gồm n phần tử có thứ tự

2. Nhắc lại về tập rõ

- Ba phương pháp biểu diễn tập rõ
  - Phương pháp liệt kê: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
  - Phương pháp dựa trên luật: $A = \{x \mid P(x)\}$
    - | Ký hiệu cho “sao cho”
    - *P(x)* là một hàm mệnh đề dạng *“x* thỏa tính chất *P”*
  - Phương pháp hàm thuộc:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in A \\ 0 \text{ nếu } x \notin A \end{cases}$$

  - Hàm thuộc: $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$

2. Nhắc lại về tập rõ

- Một họ các tập hợp: là một tập hợp mà các phần tử của nó là các tập hợp.
  - $\{A_i \mid i \in I\}$, *i* và *I* lần lượt là chỉ số tập hợp và tập chỉ số
  - Họ các tập hợp được gọi là một tập có chỉ số.
  - Ví dụ: $\mathcal{A} = \{A_{1,}, A_2, \dots, An\}$
- *A* là tập con của tập *B*: $A \subseteq B$
- *A*, *B* là hai tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ và $B \subseteq A$
- *A* và *B* là hai tập không bằng nhau: $A \neq$ B
- *A* là tập con thực sự của *B*: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ và $A \neq$ B
- *A* được bao hàm trong tập *B*: $A \subseteq B$

2. Nhắc lại về tập rõ

- Tập lũy thừa của tập *A* ($\mathcal{P}(A)$): là họ gồm tất cả các tập con của tập *A* cho trước.
  - Tập lũy thừa có thứ tự thứ hai của *A*: $\mathcal{P}^2(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
  - Tập lũy thừa có thứ tự cao hơn của *A*: $\mathcal{P}^3(A), \mathcal{P}^4(A), \ldots$
- Lực lượng của tập *A (|A|):* số lượng phần tử của tập hữu hạn *A*.
  - Ví dụ: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- *B – A:* là phần bù của tập *A* trong tập *B*

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

- Nếu *B* là tập tham chiếu thì $B - A = \bar{A}$

2. Nhắc lại về tập rõ

- Hợp của hai tập *A* và *B*

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

- Phép hợp tổng quát: cho một họ các tập hợp

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i, \text{với } i \in I \text{ nào đó}\}$$

- Giao của hai tập *A* và *B*

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$$

- Phép giao tổng quát: Cho một họ các tập hợp

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i, \text{với mọi } i \in I\}$$

2. Nhắc lại về tập rõ

- Các tính chất của các phép toán trên tập hợp rõ
  - Luật phản xạ:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

  - Luật kết hợp:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

  - Luật giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

  - Luật phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

  - Luật lũy đẳng:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

2. Nhắc lại về tập rõ

- Các tính chất của các phép toán trên tập hợp rõ

- Luật đồng nhất:

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap U = A$$

- Luật hấp thu:

$$A \cup U = U$$
$$A \cap \phi = \phi$$

- Luật đầy đủ và phi mâu thuẫn:

$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$

- Luật De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

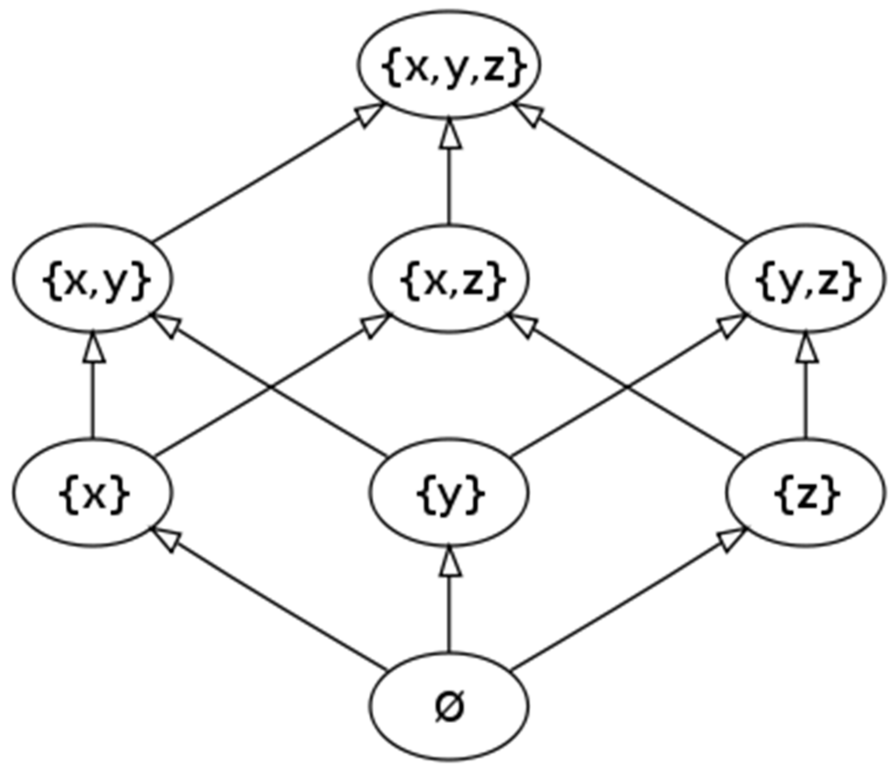
2. Nhắc lại về tập rõ

- Quan hệ thứ tự từng phần trong tập lũy thừa
  - Các phần tử trong tập lũy thừa $\mathcal{P}(A)$ có thể được sắp thứ tự bởi quan hệ được bao hàm $\subseteq$

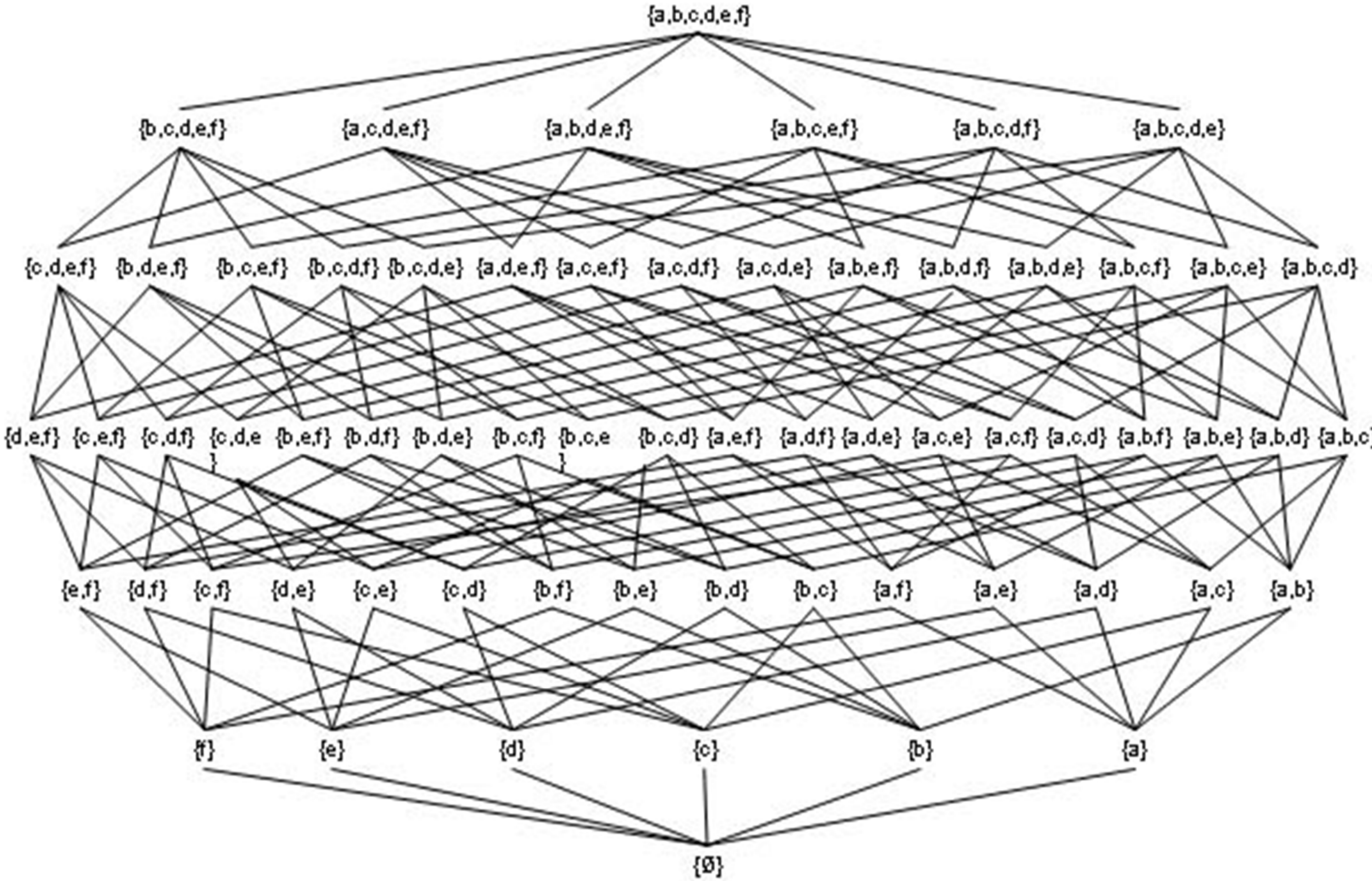
$A \subseteq B \text{ } iff \text{ } A \cup B = B \text{ } (hoặc \text{ } A \cap B = A)$ với bất kỳ $A, B \in \mathcal{P}(X)$

- Phân biệt:
  - Là hai tập bất kỳ không có phần tử chung

$$A \cap B = \emptyset$$



Quan hệ thứ tự $\subseteq$ từng phần



2. Nhắc lại về tập rõ

- Phân hoạch trên tập *A* ($\pi(A)$):
  - Một họ các tập con đôi một phân biệt, khác rỗng của tập *A* được gọi là một phân hoạch trên tập *A* nếu hợp của chúng bằng tập *A*.

$\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A\}$ là một phân hoạch trên A khi và chỉ khi:

- $A_i \neq \emptyset$ với mọi $i \in I$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, với mọi cặp $i, j \in I$ và $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

- Các phần tử trong phân hoạch $\pi(A)$ thường được coi như một lớp của phân hoạch.
- Mỗi phần tử trong A thuộc về duy nhất một lớp của $\pi(A)$

2. Nhắc lại về tập rõ

- Cho A và B là hai tập hợp. Tích Đêcac của A và B, ký hiệu là $A \times B$, là tập hợp của tất cả các cặp (a,b) với $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ và } b \in B \}$$

  - $|A \times B| = |A|.|B|$
  - Nếu $A \neq B$ và A, B khác rỗng thì $A \times B \neq B \times A$
- Tích Đêcac của một họ các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ được ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ là tập hợp của dãy sắp thứ tự $(a_1, a_2, .., a_n)$ trong đó $a_i \in A_i$ với $i = 1, 2, ..n$.

$$A_1 \times A_2 \times .. \times A_n = \{ (a_1, a_2, .., a_n) \mid a_i \in A_i \text{ với } i = 1, 2, ..n\}$$

- Tích Đêcac $A \times A$, $A \times A \times A$, … được ký hiệu lần lượt là A^2, A^3, …

2. Nhắc lại về tập rõ

- Một tập hợp mà tất cả các phần tử có thể được gán nhãn bằng một số nguyên dương thì được gọi là tập đếm được.
  - Ví dụ: tập $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ là tập đếm được
- Nếu không thể gán nhãn như vậy thì gọi là tập không đếm được.
  - Ví dụ: $\{a \mid a$ là số thực, $0 < a < 1\}$ là tập không đếm được.
- Mọi tập không đếm được là tập vô hạn
- Các tập đếm được chia thành hai lớp: tập đếm được hữu hạn và tập đếm được vô hạn

3. Các kiểu tập mờ

- Khái niệm:
  - *A* là một tập mờ trên miền tham chiếu *X*
  - μ_A là hàm thuộc (membership function) để định nghĩa tập mờ *A*

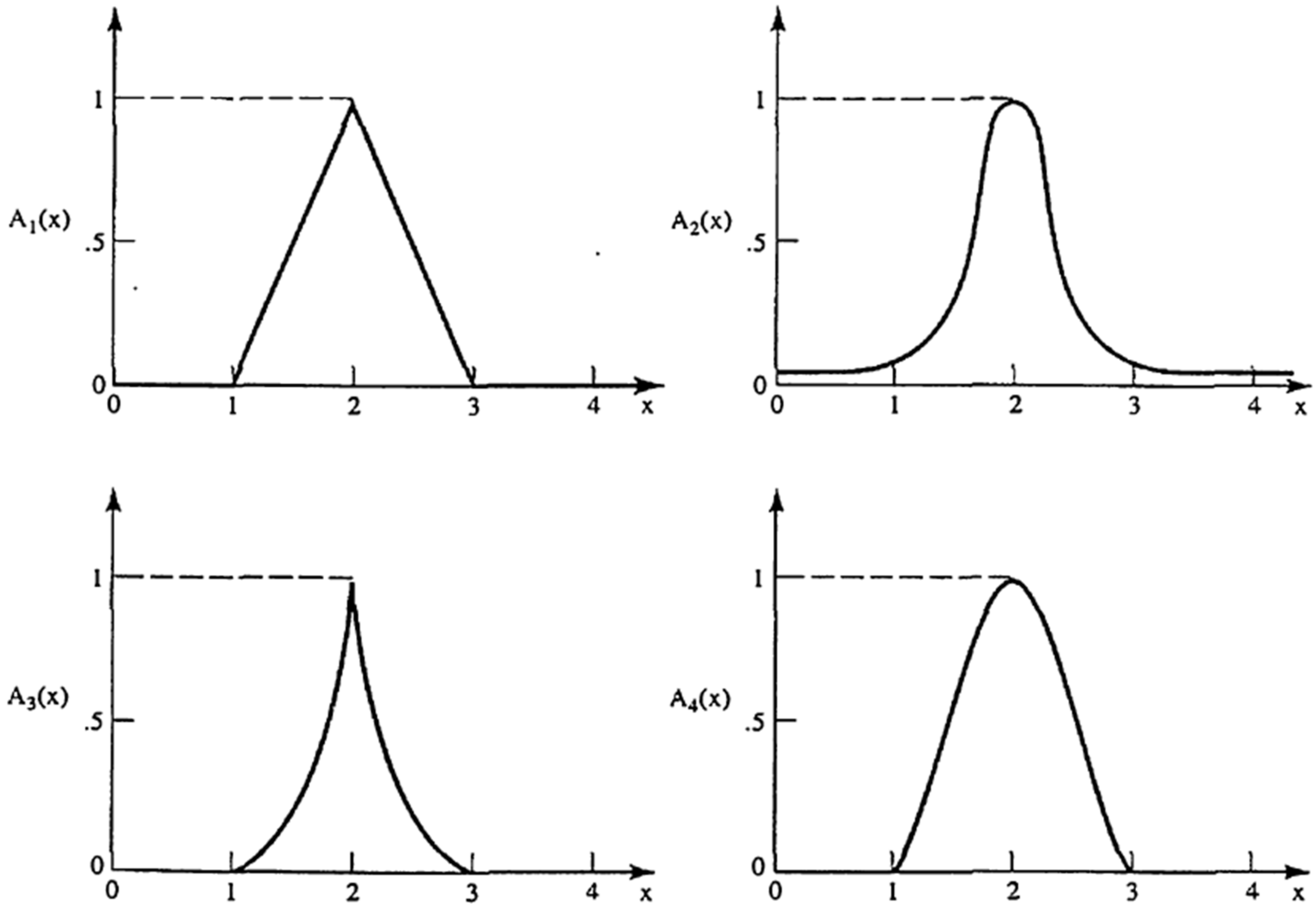
$$\mu_A: X \to [0,1]$$

$\mu_A(x)$ - độ thuộc của *x* vào tập *A*

- Ví dụ: *A – trời nắng*, $X = [0, 100]$, $x \in X$ là tỷ lệ bao phủ của mây.
  - $\mu_A(0) = 1$, $\mu_A(20) = 0.8$, $\mu_A(30) = 0.4$, $\mu_A(75) = 0$

3. Các kiểu tập mờ

Bốn ví dụ về hàm thuộc của tập mờ biểu diễn “gần bằng 2”



3. Các kiểu tập mờ

- Bốn tập mờ trên tương tự vì các tính chất sau được thỏa bởi mỗi tập:
  - (i): $A_i(2) = 1$ và $A_i(x) < 1$ với mọi $x \neq 2$
  - (ii): A_i đối xứng qua đường $x = 2$
  - (iii): A_i đơn điệu tăng với $x < 2$, đơn điệu giảm với $x > 2$

3. Các kiểu tập mờ

- Với mỗi hàm trong hình là một trường hợp của họ các hàm có tham số như sau:

$$A_1(x) = \begin{cases} p_1(x-r)+1 & \text{when } x \in [r-1/p_1, r] \\ p_1(r-x)+1 & \text{when } x \in [r, r+1/p_1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_2(x) = \frac{1}{1+p_2(x-r)^2}$$

$$A_3(x) = e^{-|p_3(x-r)|}$$

$$A_4(x) = \begin{cases} (1+\cos(p_4\pi(x-r)))/2 & \text{when } x \in [r-1/p_4, r+1/p_4] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. Các kiểu tập mờ

- Ví dụ: Các mức độ học vấn

0 – no education
1 – elementary school
2 – high school
3 – two-year college degree
4 – bachelor's degree
5 – master's degree
6 – doctoral degree

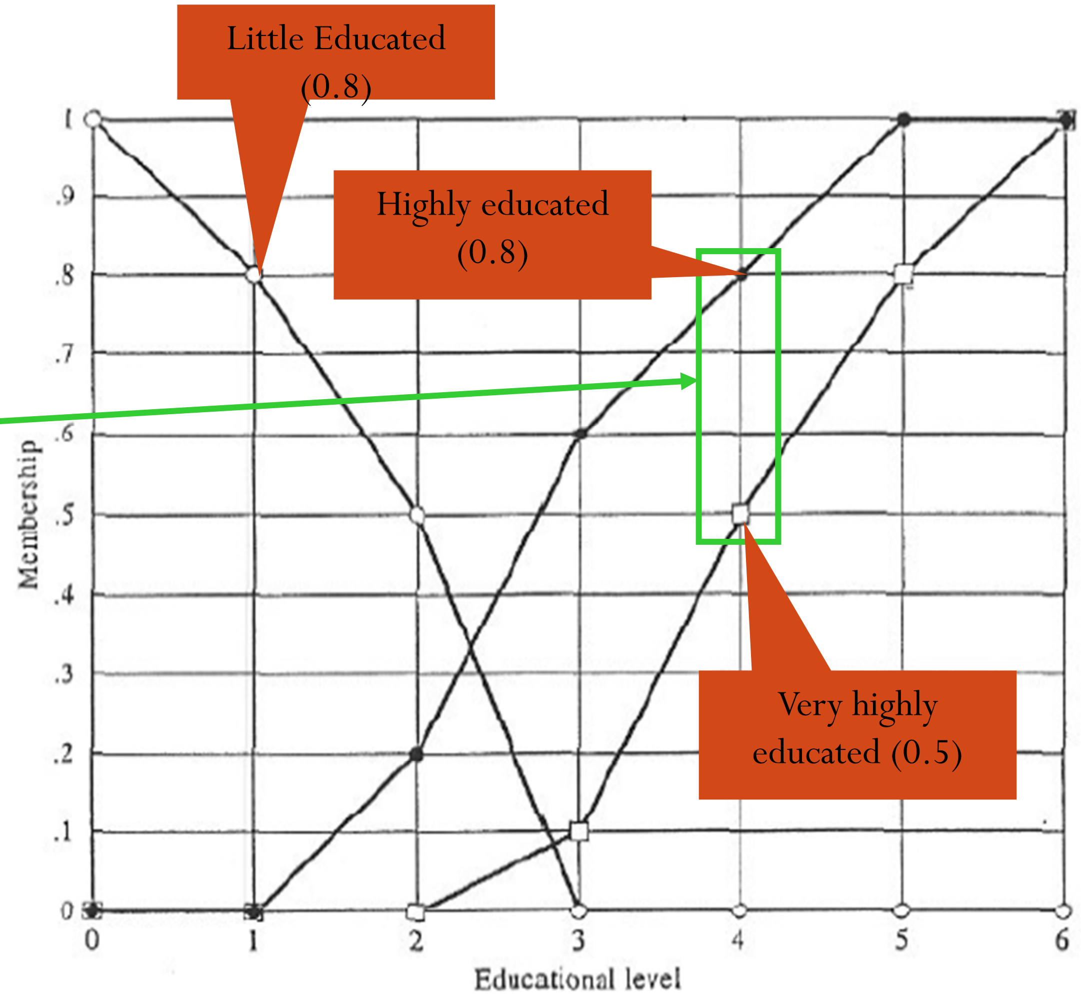
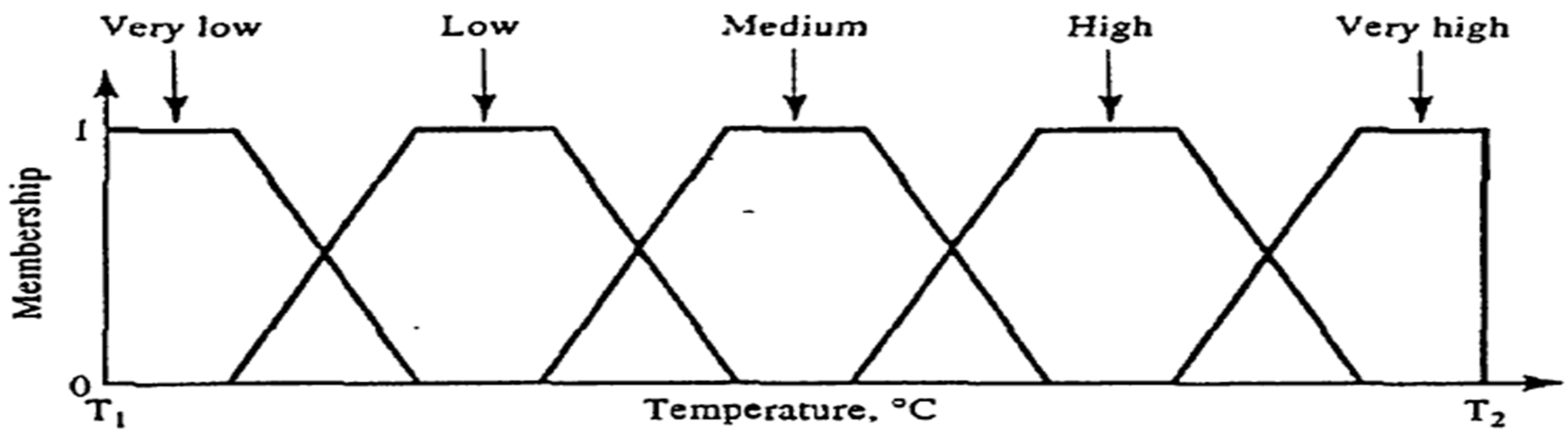


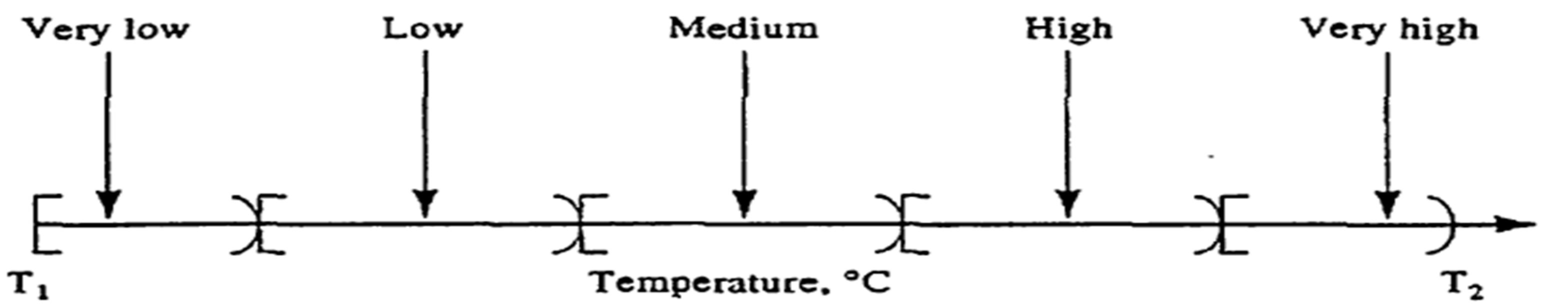
Figure 1.3 Examples of fuzzy sets expressing the concepts of people that are little educated (○), highly educated (●), and very highly educated (□).

3. Các kiểu tập mờ

- Các tập mờ biểu diễn các khái niệm ngôn ngữ như *low, medium, high.*



(a)



(b)

3. Các kiểu tập mờ

- Tập mờ thông thường: *X* là tập tham chiếu, *A* là một tập mờ. Dạng của hàm thuộc như sau:
  - $A : X \to [0, 1]$
- Tập mờ khoảng giá trị:
  - Hàm thuộc của tập mờ thông thường là giá trị rõ.
  - Có thể xác định hàm thuộc có giá trị xấp xỉ.
  - Một tập mờ mà mỗi phần tử trong tập vũ trụ được gán giá trị là một khoảng đóng các số thực (thay vì một số thực) giữa các giới hạn trên và dưới.

$$A: X \to \varepsilon([0,1]), \qquad \mathcal{E}([0, 1]) \subset \mathcal{P}([0, 1]).$$

3. Các kiểu tập mờ

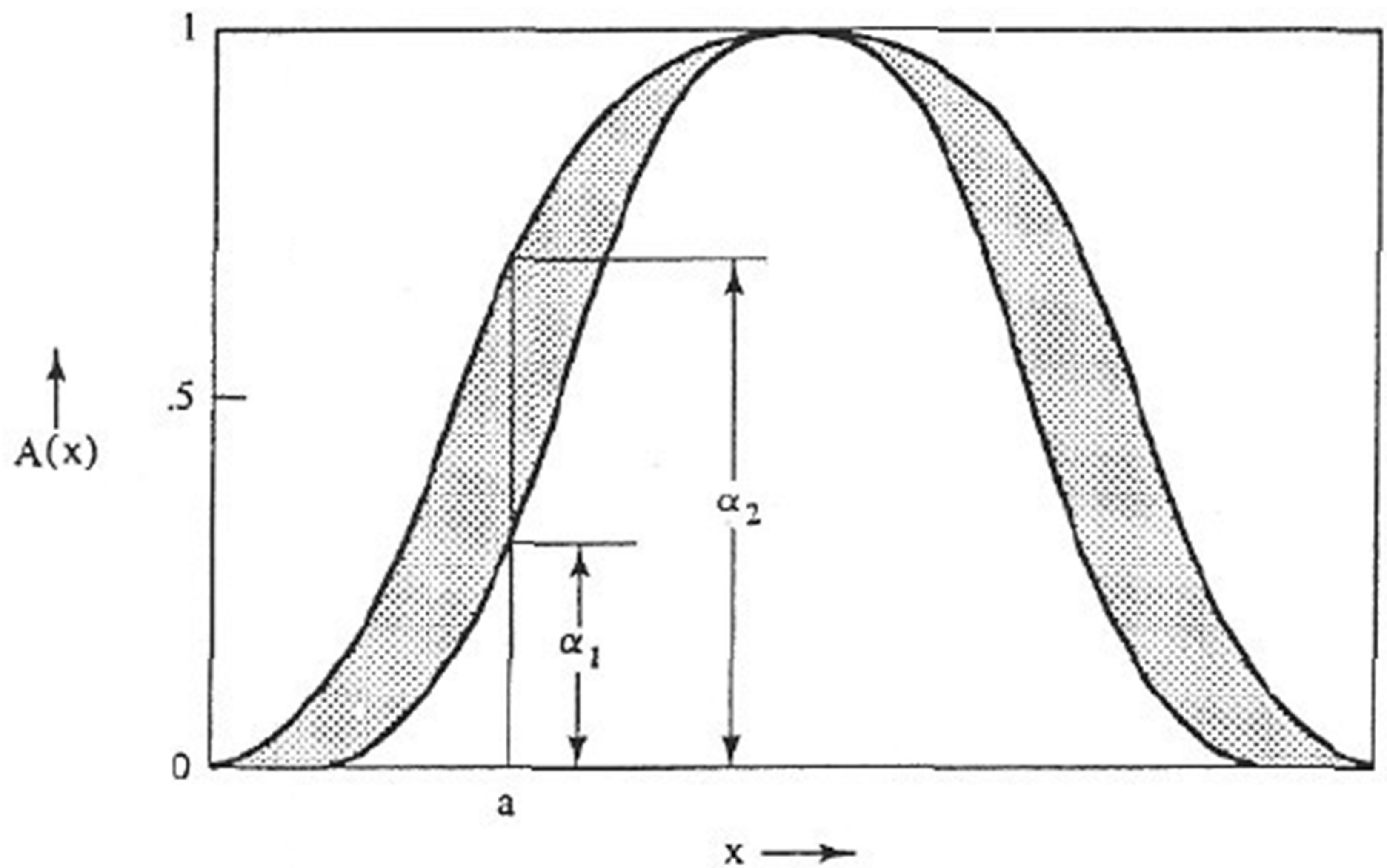


Figure 1.5 An example of an interval-valued fuzzy set $(A(a) = [\alpha_1, \alpha_2])$.

3. Các kiểu tập mờ

- Tập mờ kiểu 2:

$$A: X \longrightarrow \mathcal{F}([0,1])$$

  - $\mathcal{F}([0,1])$: tập tất cả các tập mờ thông thường được định nghĩa trên khoảng tham chiếu [0,1]
  - $\mathcal{F}([0,1])$: còn được gọi là tập lũy thừa mờ của [0,1]

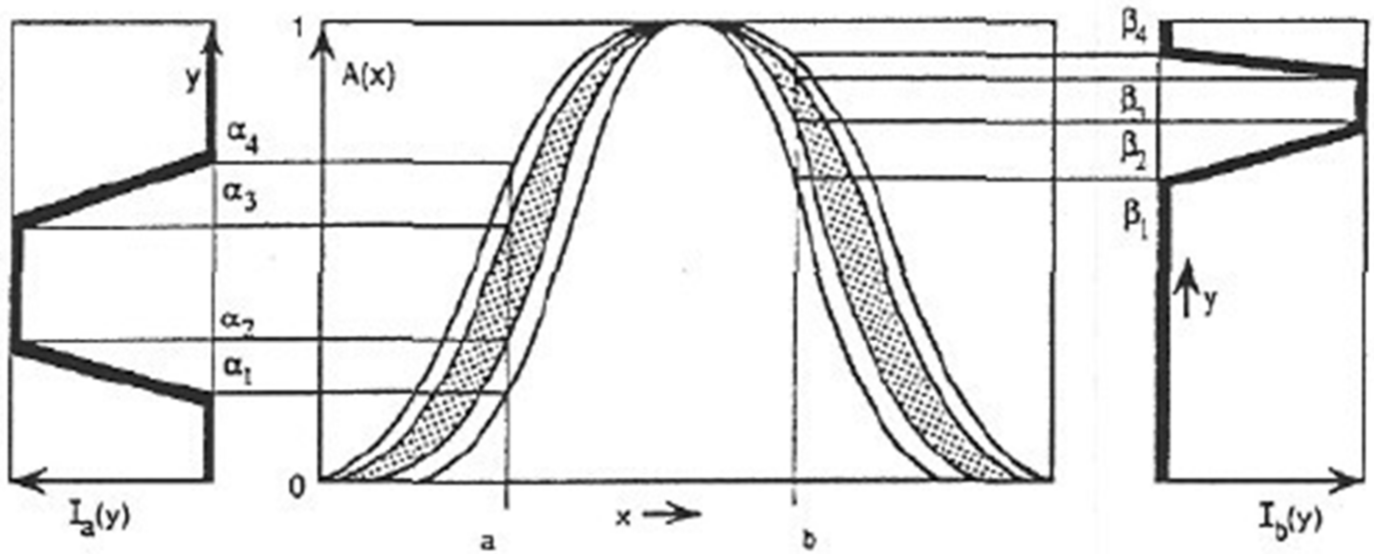


Figure 1.6 Illustration of the concept of a fuzzy set of type 2.

3. Các kiểu tập mờ

- Nhận xét:
  - Nhược điểm chính của tập mờ khoảng so với tập mờ thông thường là yêu cầu tính toán nhiều hơn.
  - Yêu cầu tính toán khi xử lý tập mờ kiểu 2 thậm chí còn nhiều hơn yêu cầu tính toán khi xử tập mờ khoảng.
  - Do đó, tập mờ loại 2 hầu như chưa được áp dụng trong các ứng dụng.

3. Các kiểu tập mờ

- *L* – tập mờ:
  - Mức độ hàm thuộc được biểu diễn bởi ký hiệu của một *L* tùy ý. Tập *L* ít nhất thỏa tính chất sắp thứ tự từng phần.
  - *L* – tập mờ rất phổ biến. Tất cả các trường hợp khác có thể được xem như trường hợp đặc biệt của *L* – tập mờ.

3. Các kiểu tập mờ

- Tập mờ mức 2:

$$A : \mathcal{F}(X) \longrightarrow [0,1]$$

  - $\mathcal{F}(X)$: tập lũy thừa mờ của *X*
  - Tập mờ mức 2 cho phép xử lý với các tình huống trong đó các phần tử của tập vũ trụ không thể xác định rõ mà chỉ xác định xấp xỉ.
  - Ví dụ: Giả sử mệnh đề *"x* gần bằng *r"* được biểu diễn bởi tập mờ thường *B*, độ thuộc của một giá trị *x* (gần bằng giá trị *r*) trong tập mờ mức 2 của tập *A* là *A(B)*.

3. Các kiểu tập mờ

- Tập mờ kiểu 2 và mức 2:

$$A: \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}([0,1])$$

  - $\mathcal{F}(X)$: tập lũy thừa mờ của X
- Các kiểu tổ hợp khác cũng có thể được đề xuất.

3. Các kiểu tập mờ

Nhận xét:

- Kiểu tổng quát của tập mờ chưa đóng vai trò quan trọng trong các ứng dụng của lý thuyết tập mờ.
- Có hai lý do khi giới thiệu các kiểu tập mờ tổng quát trong phần này:
  - Người đọc có thể hiểu lý thuyết tập mờ không chỉ dừng lại ở tập mờ thông thường.
  - Sự quan trọng trong thực tế của một vài kiểu tập mờ tổng quát sẽ tăng lên

4. Các khái niệm cơ bản

- Xét 3 tập mờ biểu diễn khái niệm *young, middle-age, old* của biến *tuổi*. Hàm thuộc được định nghĩa trên khoảng tham chiếu [0, 80] như sau:

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{when } x \geq 35 \end{cases}$$

young

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \leq 20 \text{ or } \geq 60 \\ (x - 20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60 - x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

Middle-age

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{when } x \leq 45 \\ (x - 45)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } x \geq 60 \end{cases}$$

old

4. Các khái niệm cơ bản

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \le 20 \text{ or } \ge 60 \\ (x-20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \le x \le 45 \end{cases}$$

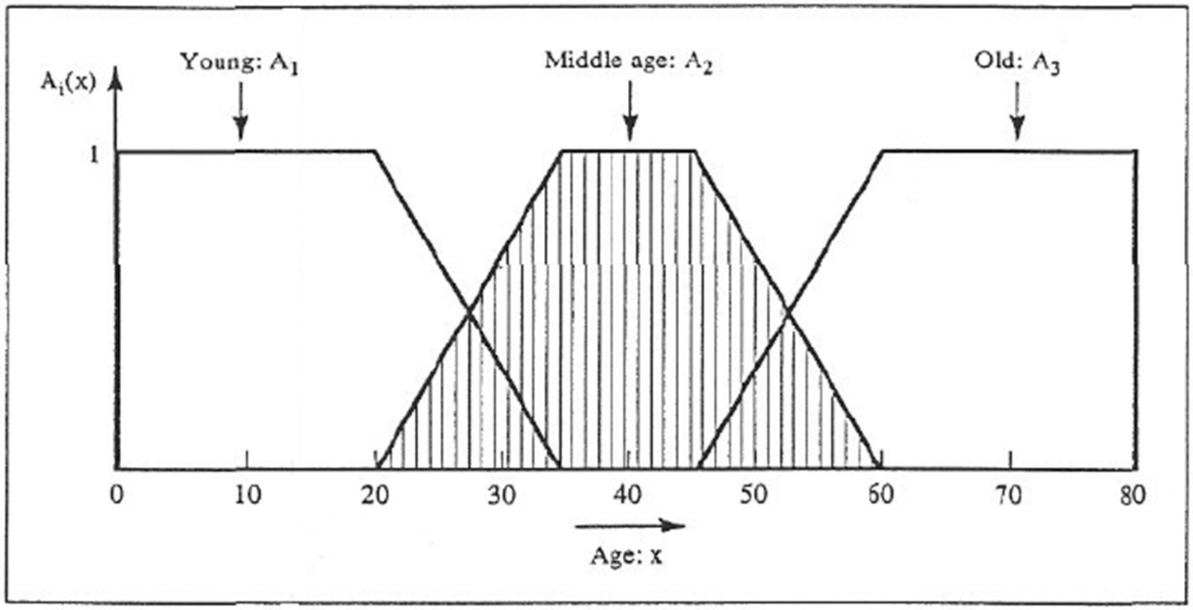


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.

TABLE 1.2 DISCRETE APPROXIMATION OF MEMBERSHIP FUNCTION A_2 (FIG. 1.7) BY FUNCTION D_2 OF THE FORM:
$D_2 : \{0, 2, 4, \ldots, 80\} \rightarrow [0, 1]$

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$	1.00

4. Các khái niệm cơ bản

- **α - nhát cắt và α - nhát cắt chặt**
  - Cho một tập mờ *A* định nghĩa trên *X*, một số bất kỳ $\alpha \in [0,1]$, α - nhát cắt và α - nhát cắt chặt là các tập rõ:

$$^{\alpha}A = \{x | A(x) \geq \alpha\}$$

$$^{\alpha+}A = \{x | A(x) > \alpha\}.$$

  - α - nhát cắt của tập mờ *A* là một tập rõ chứa tất cả các phần tử của *X* có độ thuộc vào *A* lớn hoặc hoặc bằng α.
  - α - nhát cắt chặt (tương tự)

4. Các khái niệm cơ bản

- Ví dụ:

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \le 20 \text{ or } \ge 60 \\ (x-20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \le x \le 45 \end{cases}$$

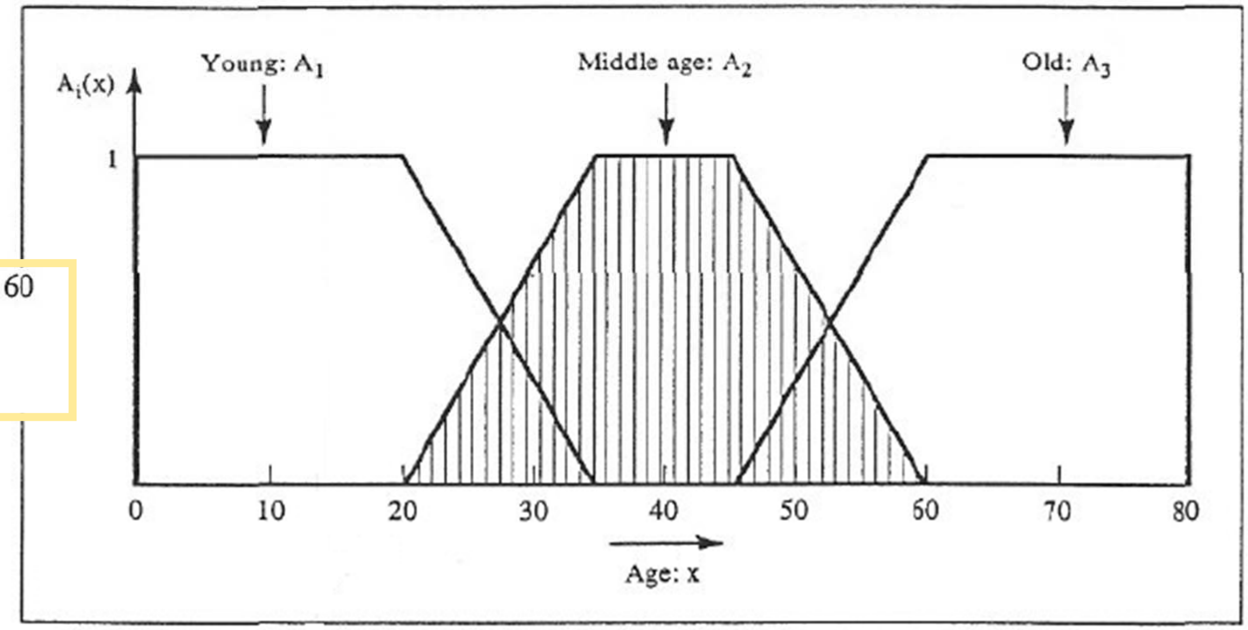


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.

$${}^0A_1 = {}^0A_2 = {}^0A_3 = [0, 80] = X;$$

$${}^{\alpha}A_1 = [0, 35 - 15\alpha], {}^{\alpha}A_2 = [15\alpha + 20, 60 - 15\alpha], {}^{\alpha}A_3 = [15\alpha + 45, 80] \text{ for all } \alpha \in (0, 1];$$

$${}^{\alpha+}A_1 = (0, 35 - 15\alpha), {}^{\alpha+}A_2 = (15\alpha + 20, 60 - 15\alpha), {}^{\alpha+}A_3 = (15\alpha + 45, 80) \text{ for all } \alpha \in [0, 1);$$

$${}^{1+}A_1 = {}^{1+}A_2 = {}^{1+}A_3 = \varnothing.$$

4. Các khái niệm cơ bản

- **Tập mức của tập *A***
  - Là tập tất cả các mức $\alpha \in [0,1]$ mà biểu diễn các α - nhát cắt phân biệt của một tập mờ *A* cho trước

$$\Lambda(A) = \{\alpha | A(x) = \alpha \text{ với } x \in X \text{ nào đó}\}$$

  - Ví dụ:

$$\Lambda(A_1) = \Lambda(A_2) = \Lambda(A_3) = [0, 1], \text{ and}$$

$$\Lambda(D_2) = \{0, 0.13, 0.27, 0.4, 0.53, 0.67, 0.8, 0.93, 1\}.$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \leq 20 \text{ or } \geq 60 \\ (x-20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

TABLE 1.2 DISCRETE APPROXIMATION OF MEMBERSHIP FUNCTION A_2 (FIG. 1.7) BY FUNCTION D_2 OF THE FORM:
$D_2 : \{0, 2, 4, \ldots, 80\} \to [0, 1]$

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$	1.00

4. Các khái niệm cơ bản

- ***Tính chất của α - nhát cắt và α - nhát cắt chặt***
  - Cho tập mờ *A* bất kỳ, cặp giá trị α_1, $\alpha_2 \in [0,1]$ là các giá trị phân biệt thỏa $\alpha_1 < \alpha_2$

$$^{\alpha_1}A \supseteq {}^{\alpha_2}A \quad \text{and} \quad {}^{\alpha_1+}A \supseteq {}^{\alpha_2+}A$$

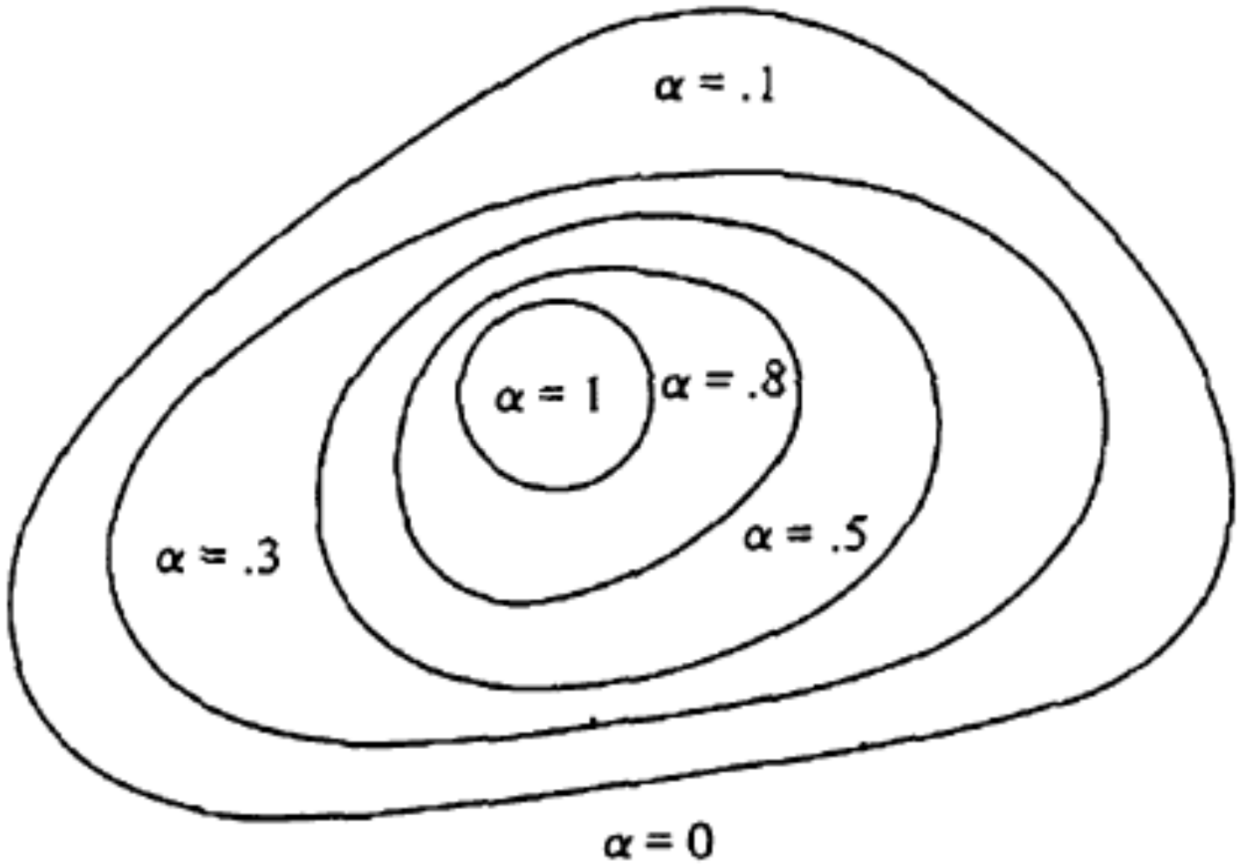
$$^{\alpha_1}A \cap {}^{\alpha_2}A = {}^{\alpha_2}A, {}^{\alpha_1}A \cup {}^{\alpha_2}A = {}^{\alpha_1}A$$

$$^{\alpha_1+}A \cap {}^{\alpha_2+}A = {}^{\alpha_2+}A, {}^{\alpha_1+}A \cup {}^{\alpha_2+}A = {}^{\alpha_1+}A$$

  - Tất cả α - nhát cắt và α - nhát cắt chặt của bất kỳ tập mờ nào tạo thành hai họ riêng biệt các tập rõ lồng nhau

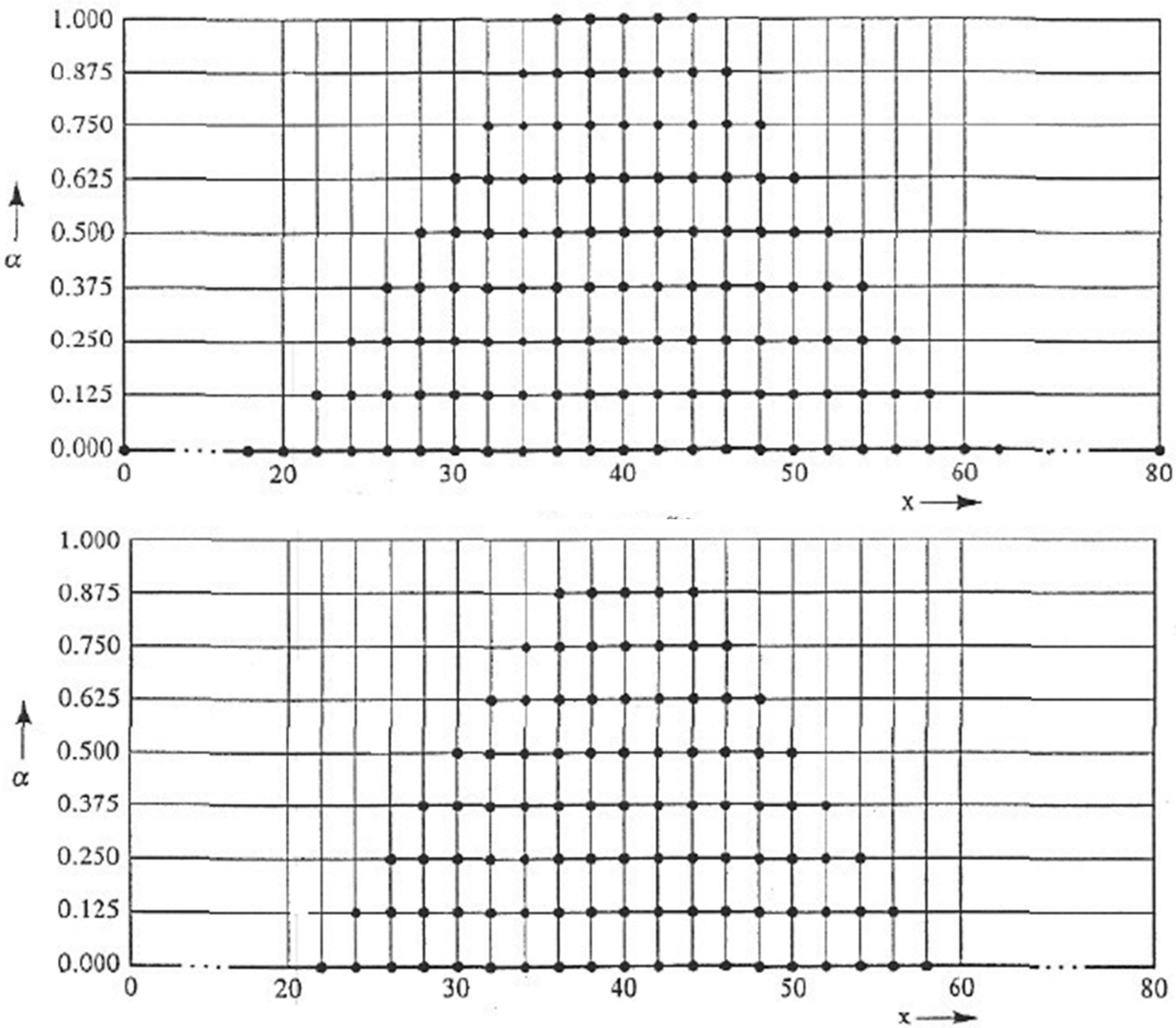
4. Các khái niệm cơ bản

- Tất cả α - nhát cắt và α - nhát cắt chặt của bất kỳ tập mờ nào tạo thành hai họ riêng biệt các tập rõ lồng nhau



4. Các khái niệm cơ bản

- Ví dụ: xét xấp xỉ rời rạc D_2 của tập mờ A_2 như sau:



(b) Strong α - cuts ${}^{\alpha+}D_2$

TABLE 1.2 DISCRETE APPROXIMATION OF MEMBERSHIP FUNCTION A_2 (FIG. 1.7) BY FUNCTION D_2 OF THE FORM: $D_2 : \{0, 2, 4, \ldots, 80\} \to [0, 1]$

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$	1.00

4. Các khái niệm cơ bản

- **Giá của tập mờ *A***
  - Giá của tập mờ *A* trong phạm vi tập tham chiếu *X* là một tập rõ chứa tất cả các phần tử của *X* có độ thuộc khác không vào tập *A*.
  - Giá của *A* chính là tập α - nhát cắt chặt của *A* khi α=0
  - Ký hiệu: *S(A)* hoặc supp(*A*) = ^{0+}A
- **Hạt nhân (core) của tập *A***
  - Tập 1- nhát cắt của *A* (^{1}A) được gọi là hạt nhân của tập *A*

4. Các khái niệm cơ bản

- **Chiều cao** của tập mờ *A*:
  - Chiều cao của tập mờ *A* là độ thuộc lớn nhất của bất kỳ phần tử nào trong tập tham chiếu.

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$$

  - Một tập mờ *A* gọi là chuẩn hóa nếu $h(A) = 1$
  - *A* được gọi là không chuẩn hóa nếu $h(A) < 1$
  - Chiều cao của *A* có thể được xem như là supremum của α với ${}^{\alpha}A \neq \emptyset$

4. Các khái niệm cơ bản

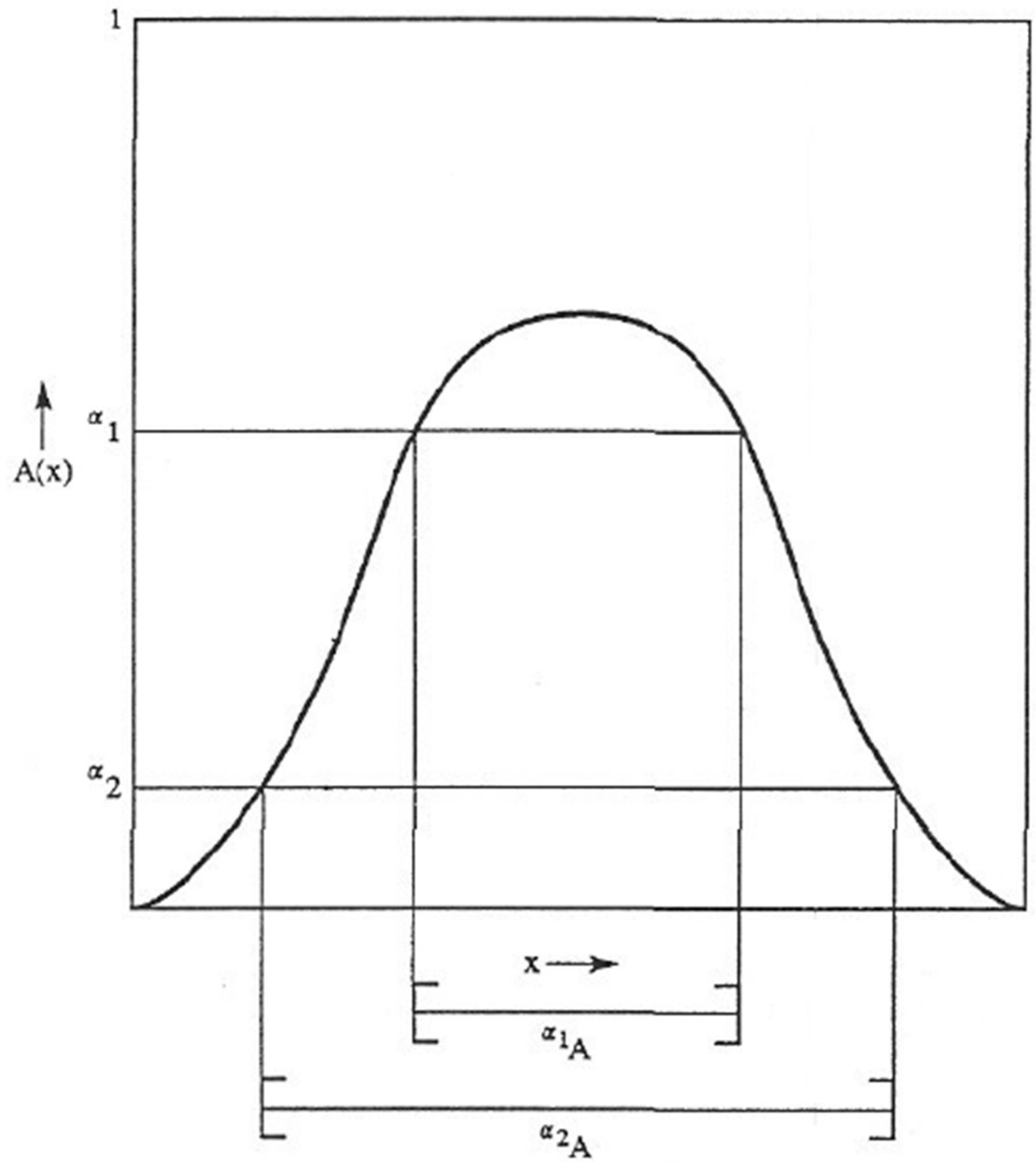
- ***Định lý***: *A* là một tập mờ trên $\mathbb{R}$ là lồi khi và chỉ khi:
$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min[A(x_1), A(x_2)]$$
Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và mọi $\lambda \in [0,1]$

- ***Tính chất 1***: Một tập con mờ *A* của $\mathbb{R}$ là lồi nếu tất cả những α - nhát cắt của nó là lồi. Có nghĩa nếu, với mọi cặp phần tử *a* và *b* của $^{\alpha}A$ và mọi số thực $\lambda \in [0,1]$, $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ thuộc $^{\alpha}A$

- ***Tính chất 2***: Nếu *A* và *B* là hai tập con mờ lồi của $\mathbb{R}$ thì giao của chúng là lồi.

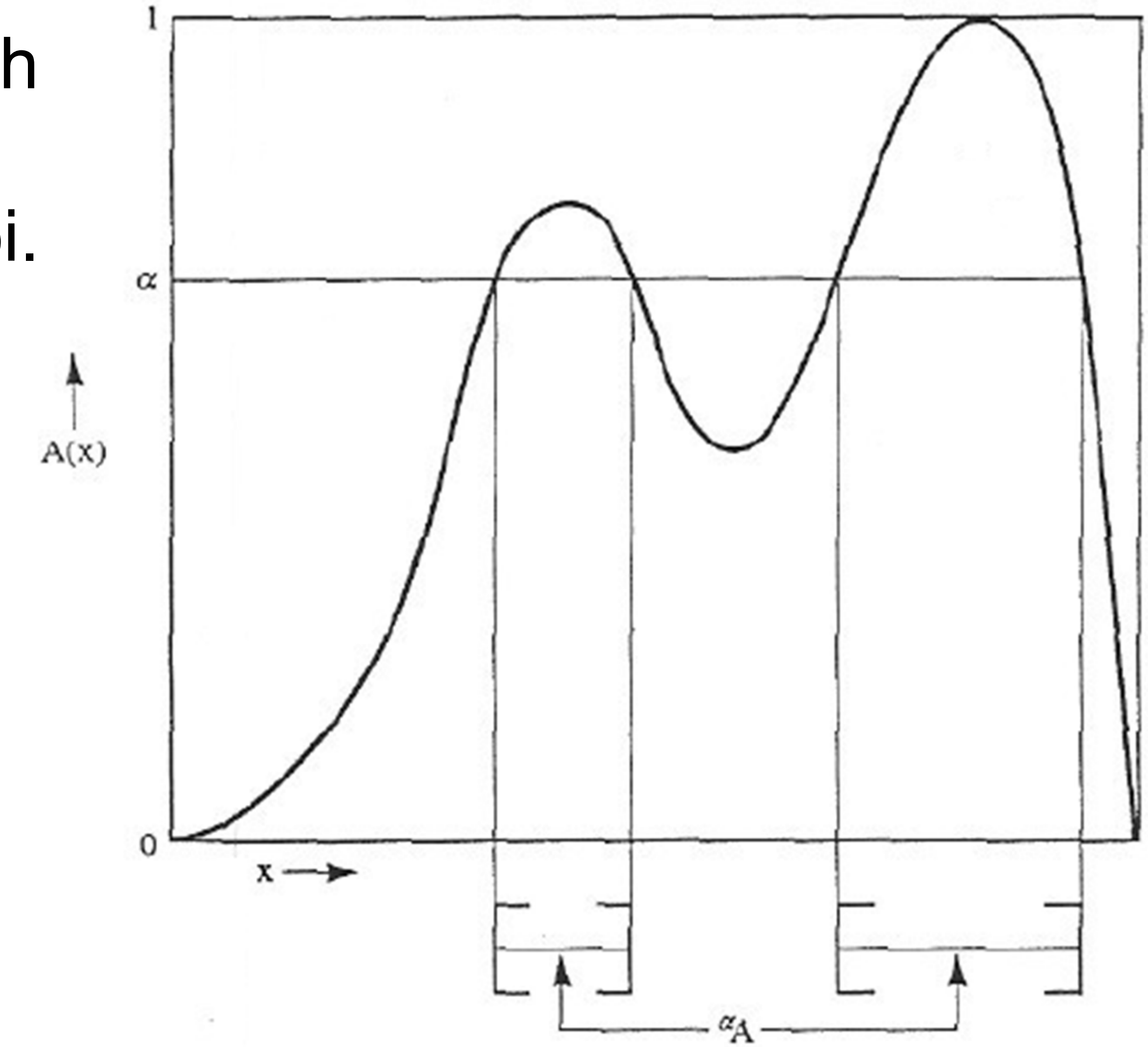
4. Các khái niệm cơ bản

- **Tính lồi**:
  - Các α - nhát cắt của một tập mờ lồi là tập lồi với mọi $\alpha \in (0,1]$
  - Ví dụ: Hình bên là tập mờ lồi không chuẩn



4. Các khái niệm cơ bản

- Ví dụ: Hình bên minh họa tập mờ chuẩn hóa nhưng không lồi.



4. Các khái niệm cơ bản

- **Phần bù chuẩn** của một tập mờ *A* trong tập tham chiếu *X* được định nghĩa cho mọi $x \in X$ theo công thức:

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$$

- Các phần tử của *X* mà $\bar{A}(x) = A(x)$ được gọi là điểm cân bằng của *A*.
- Ví dụ: Điểm cân bằng của A_2 là 27.5 và 52.5

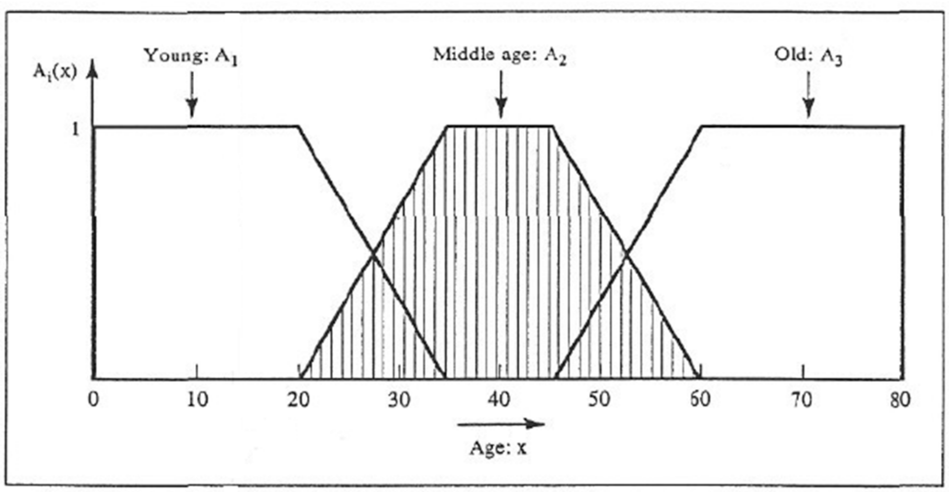
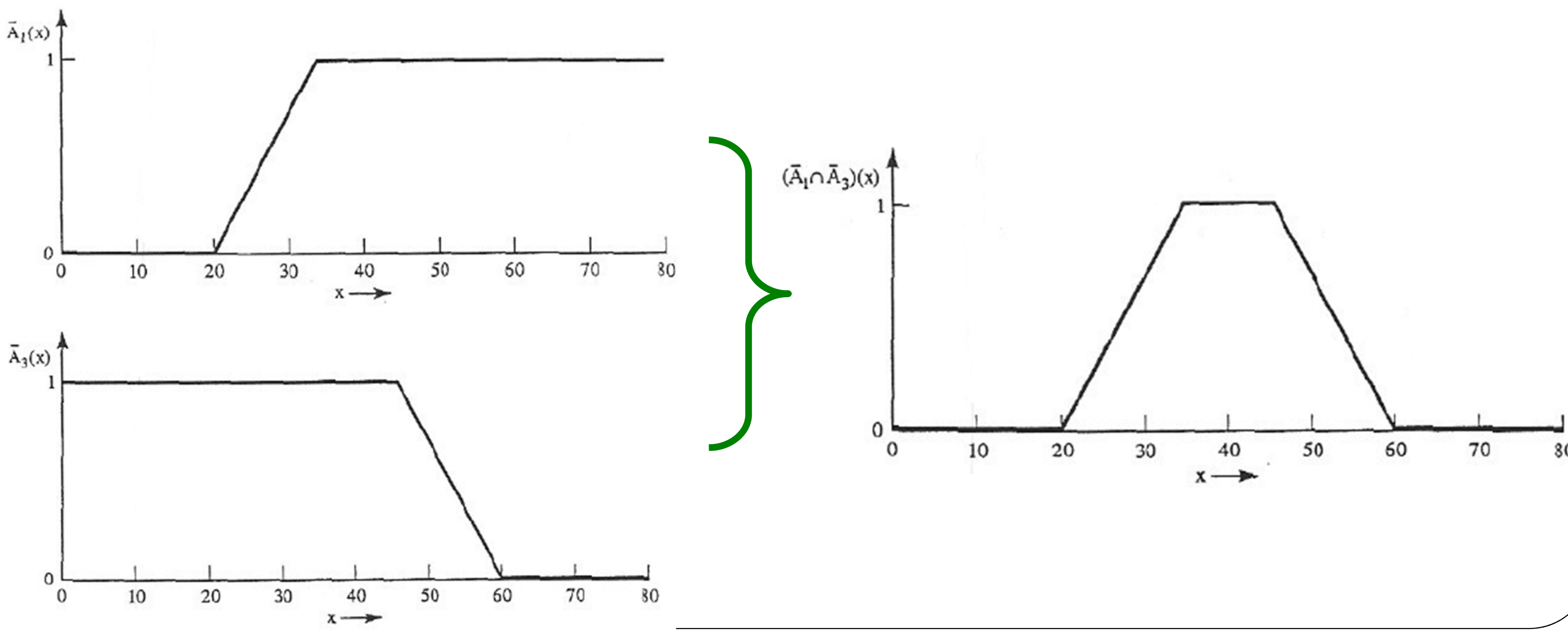


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.

4. Các khái niệm cơ bản

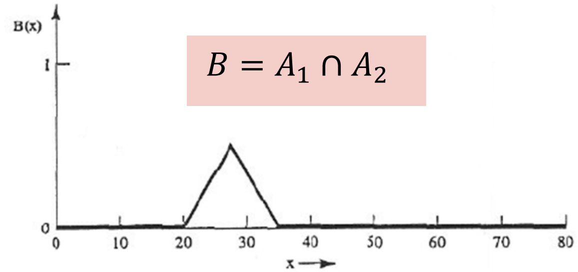
- **Giao chuẩn và hợp chuẩn**: cho hai tập mờ *A* và *B*, giao chuẩn và hợp chuẩn được định nghĩa cho mọi $x \in X$ như sau:

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)],$$
$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)],$$



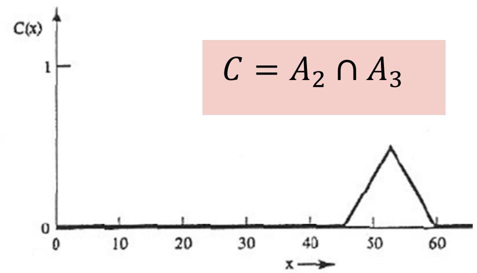
4. Các khái niệm cơ bản

- Ví dụ:
  - A_1, A_2, A_3 là chuẩn hóa.
  - B và C là không chuẩn hóa.
  - B và C thoải tính lồi.
  - $B \cup C$ and $\overline{B \cup C}$ không thỏa tính lồi.



$B = A_1 \cap A_2$

Tính lồi và chuẩn hóa có thể bị mất khi thực hiện các phép toán giao chuẩn và hợp chuẩn, lấy phần bù



$C = A_2 \cap A_3$

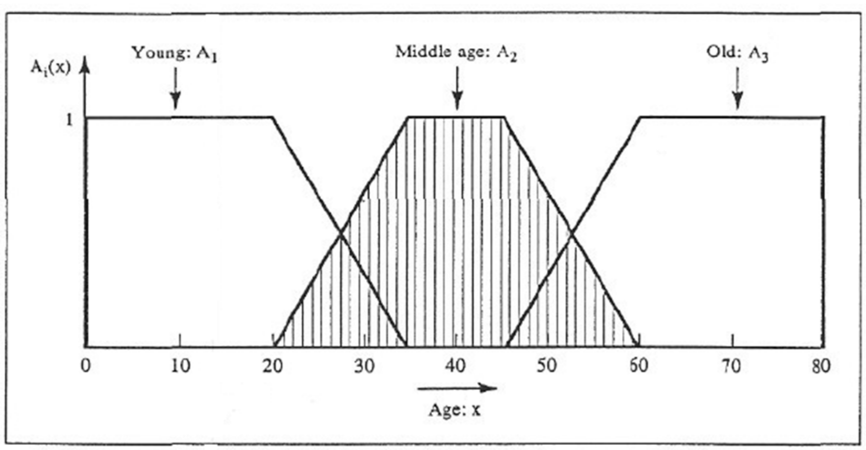


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.

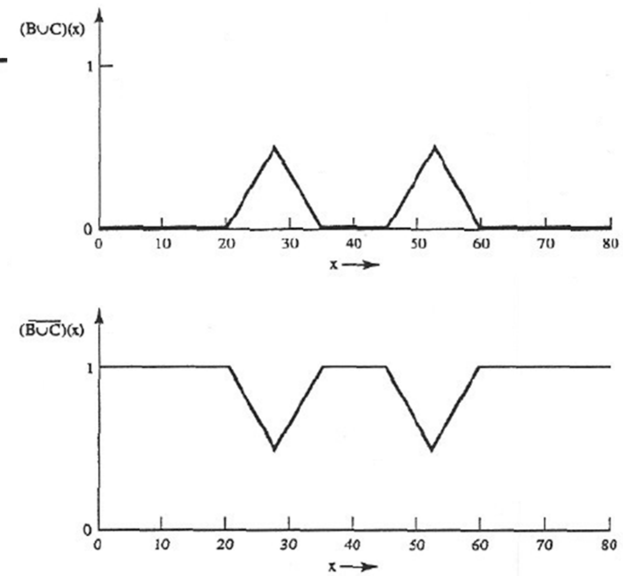


Figure 1.13 Illustration of standard operation on fuzzy sets $B = A_1 \cap A_2$ and $C = A_2 \cap A_3$ (A_1, A_2, A_3 are given in Fig. 1.7).

4. Các khái niệm cơ bản

- Nhận xét:
  - Tính chuẩn hóa và tính lồi có thể bị mất khi thực hiện các phép toán trên tập mờ: giao chuẩn và hợp chuẩn.
  - Giao mờ và hợp mờ thỏa tất cả các tính chất trong của phép giao và hợp trên tập rõ, ngoại trừ tính phi mâu thuẫn và đầy đủ

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup X = X$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap X = A$$
$$\boxed{\begin{array}{c} A \cap \overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = X \end{array}}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

4. Các khái niệm cơ bản

- **Tập con**
  - Cho *A* và *B* là hai tập con mờ xác định trên tập tham chiếu *X*
  - *A* được gọi là tập con của *B* khi và chỉ khi $A(x) \leq B(x)$, với mọi $x \in X$
  - Ký hiệu: $A \subseteq B$
- Ví dụ: Xét quan hệ $\subseteq$ giữa các tập mờ sau ($x > 0$)

$$A(x) = \frac{1}{1+10x},\ B(x) = \left(\frac{1}{1+10x}\right)^{1/2},\ C(x) = \left(\frac{1}{1+10x}\right)^{2}$$

$$C \subseteq A \subseteq B$$

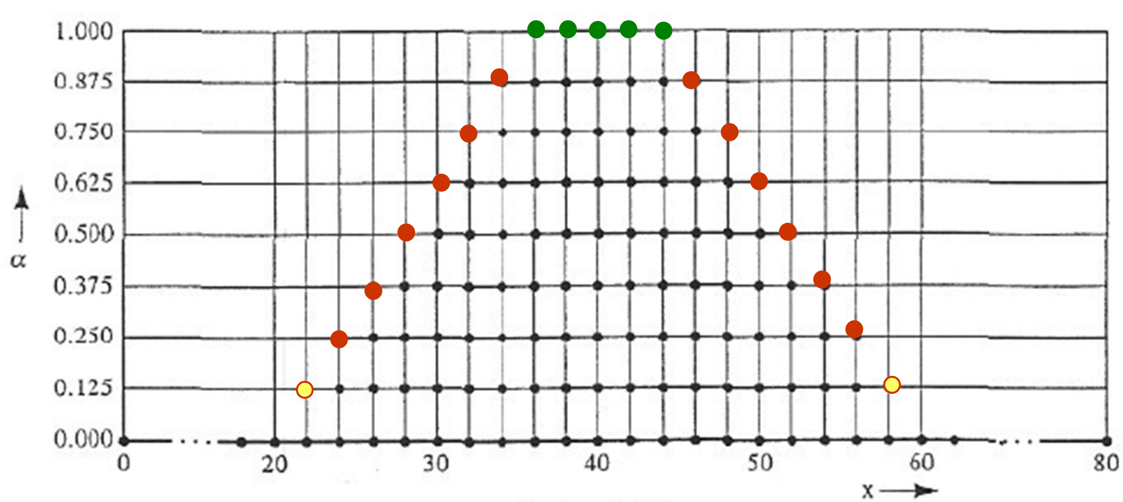
4. Các khái niệm cơ bản

- **Lực lượng** (rời rạc) (scalar cardinality) của tập mờ A trên tập tham chiếu X (tập rời rạc), ký hiệu $|A|$, được xác định như sau:

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x)$$

- Ví dụ: lực lượng của tập mờ D_2 được định nghĩa

$$|D_2| = 2(.13 + .27 + .4 + .53 + .67 + .8 + .93) + 5 = 12.46.$$



(a) α - cuts ${}^{\alpha}D_2$

TABLE 1.2 DISCRETE APPROXIMATION OF MEMBERSHIP FUNCTION A_2 (FIG. 1.7) BY FUNCTION D_2 OF THE FORM:
$D_2 : \{0, 2, 4, \ldots, 80\} \to [0, 1]$

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$	1.00

4. Các khái niệm cơ bản

- Cho một tập mờ A định nghĩa trên tập tham chiếu hữu hạn *X*. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ký hiệu các phần tử thuộc giá của *A* và đặt a_i là độ thuộc của phần tử x_i vào *A*

$$A = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \ldots + a_n/x_n$$

- Nếu tập tham chiếu là tập vô hạn hoặc đếm được

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i/x_i \text{ or } A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/x_i$$

- Nếu tập tham chiếu là các số thực

$$A = \int_X A(x)/x.$$

5. Các phép toán trên tập mờ

- 5.1. Phép bù mờ
- 5.2. Phép giao mờ
- 5.3. Phép hợp mờ
- 5.4. Tổ hợp các phép toán
- 5.5. Các phép gộp nhập

5.1. Phép bù mờ (fuzzy complement)

- Cho *A* là một tập mờ trên tập tham chiếu *X*.
- Ký hiệu *cA* là phần bù mờ của *A*
- *cA*(*x*) – mức độ *x* thuộc *cA*, mức độ *x* không thuộc *A*
- Phần bù *cA* được định nghĩa bởi hàm *c* như sau:

$$c: [0, 1] \rightarrow [0,1] \text{ mà } c\big(A(x)\big) = cA(x)\ \forall x \in X$$

- Phần bù *cA* được xác định khi áp dụng hàm *c* cho các giá trị *A*(*x*) ($\forall x \in X$)

5.1. Phép bù mờ

- Các hàm *c* cần thỏa ít nhất hai tiên đề sau:
  - Tiên đề 1: điều kiện biên

$$c(0) = 1 \text{ và } c(1) = 0$$

  - Tiên đề 2: tính đơn điệu

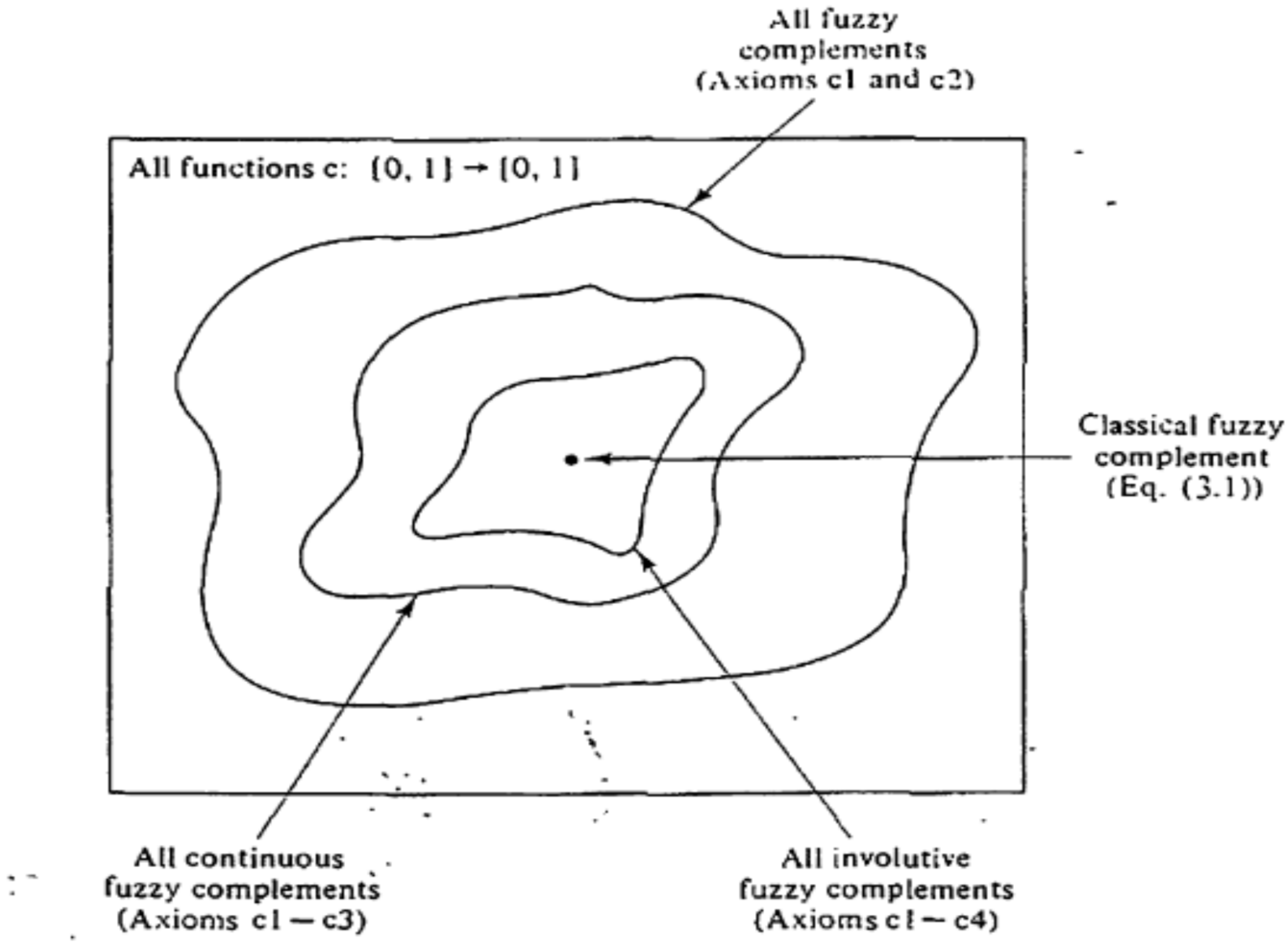
$$\forall a, b \in [0,1]: \textit{nếu } a \leq b \textit{ thì } c(a) \geq c(b)$$

- Hai tiên đề khác (thường được yêu cầu thêm):
  - Tiên đề 3: *c* là hàm liên tục
  - Tiên đề 4: *c* có tính chất *involutive*

$$c\big(c(a)\big) = a \quad \forall a \in [0,1]$$

5.1. Phép bù mờ

- ***Định lý 1***: Nếu hàm *c*: [0, 1] → [0,1] thỏa tiên đề 2 và 4 thì *c* thỏa tiên đề 1 và 3. Đồng thời, *c* phải là hàm song ánh.

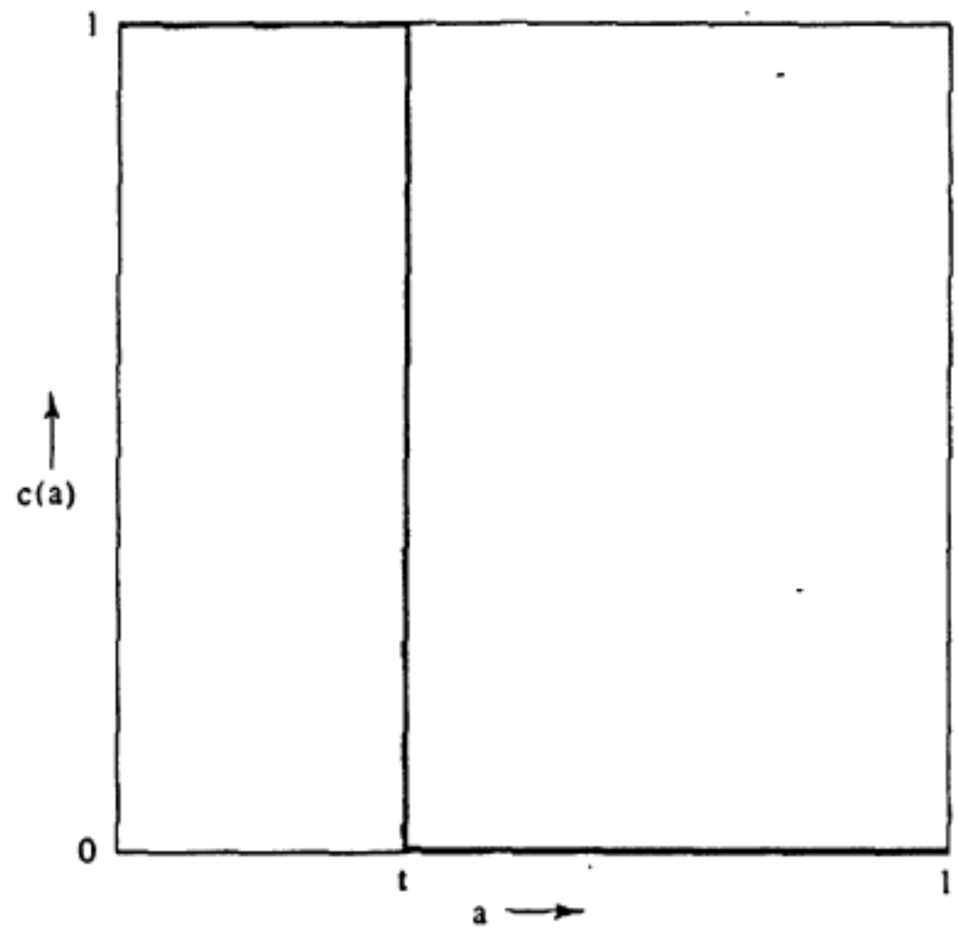


5.1. Phép bù mờ

- ***Ví dụ 1:*** Hàm bù ngưỡng

$$c(a) = \begin{cases} 1 \text{ if } a \le t \\ 0 \text{ if } a > t \end{cases}$$

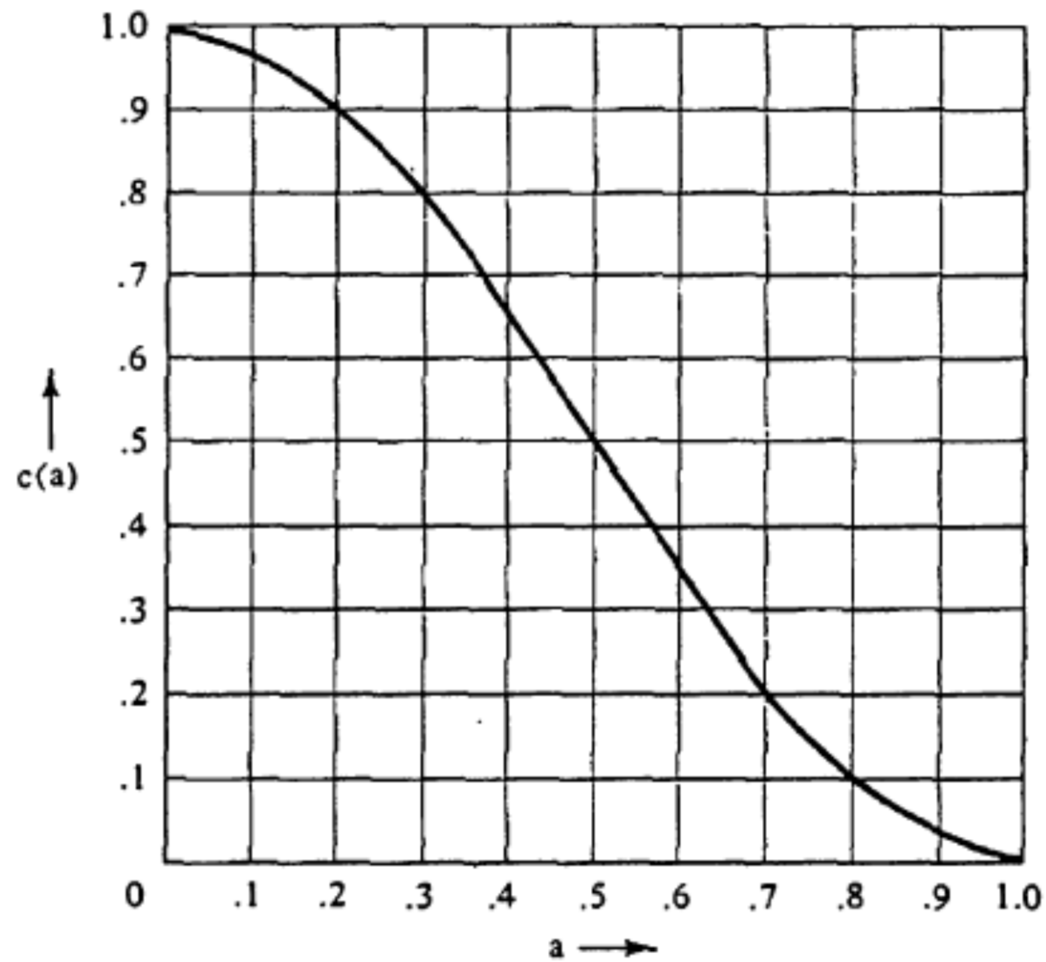
- Giá trị *t* được gọi là ngưỡng của *c*
- Hàm bù ngưỡng chỉ thỏa tiên đề 1 và tiên đề 2.



5.1. Phép bù mờ

- ***Ví dụ 2:*** Cho hàm bù sau:

$$c(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos\pi a)$$



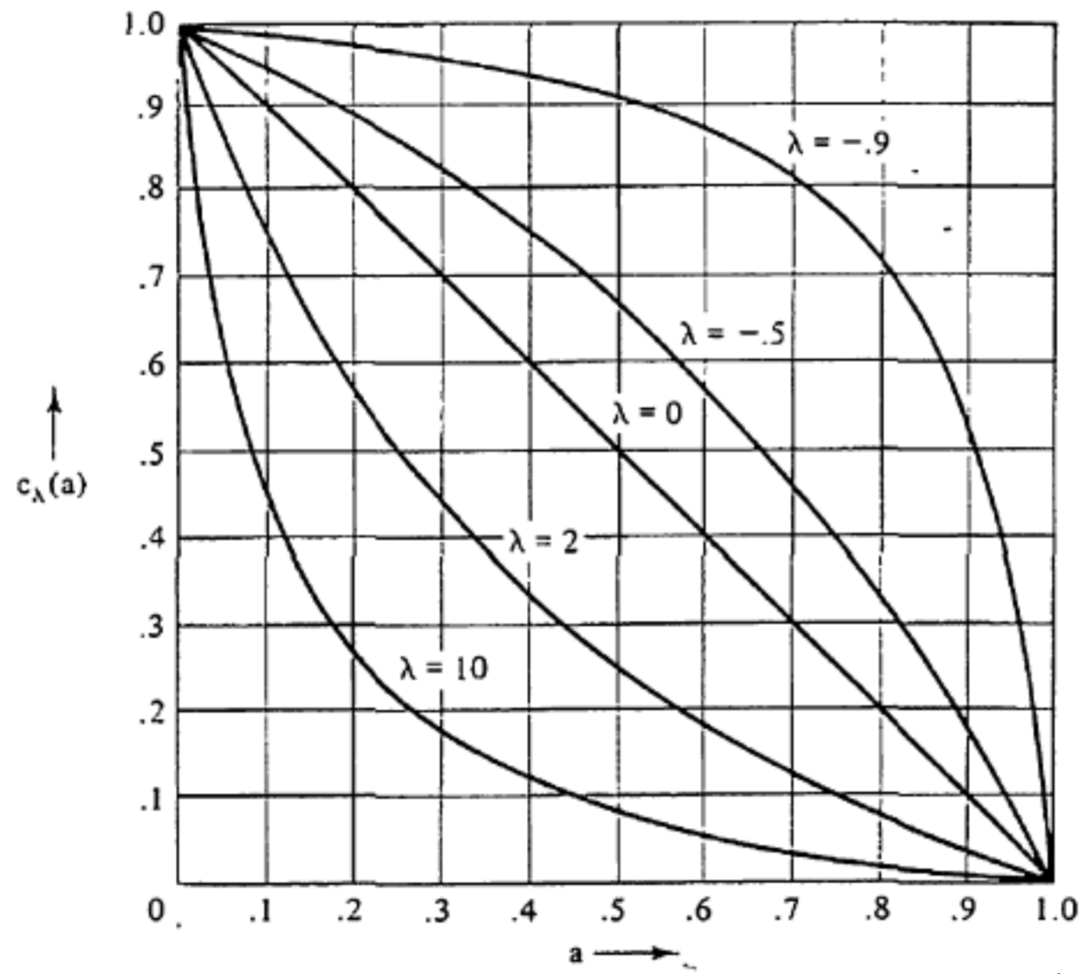
- *c* thỏa tiên đề 1, 2 và 3.
- *c* không thỏa tiên đề 4.
  - *c*(0.33) = 0.75 nhưng
    c(0.75) = 0.15 ≠ 0.33

5.1. Phép bù mờ

- ***Ví dụ 3:*** Cho hàm bù sau:

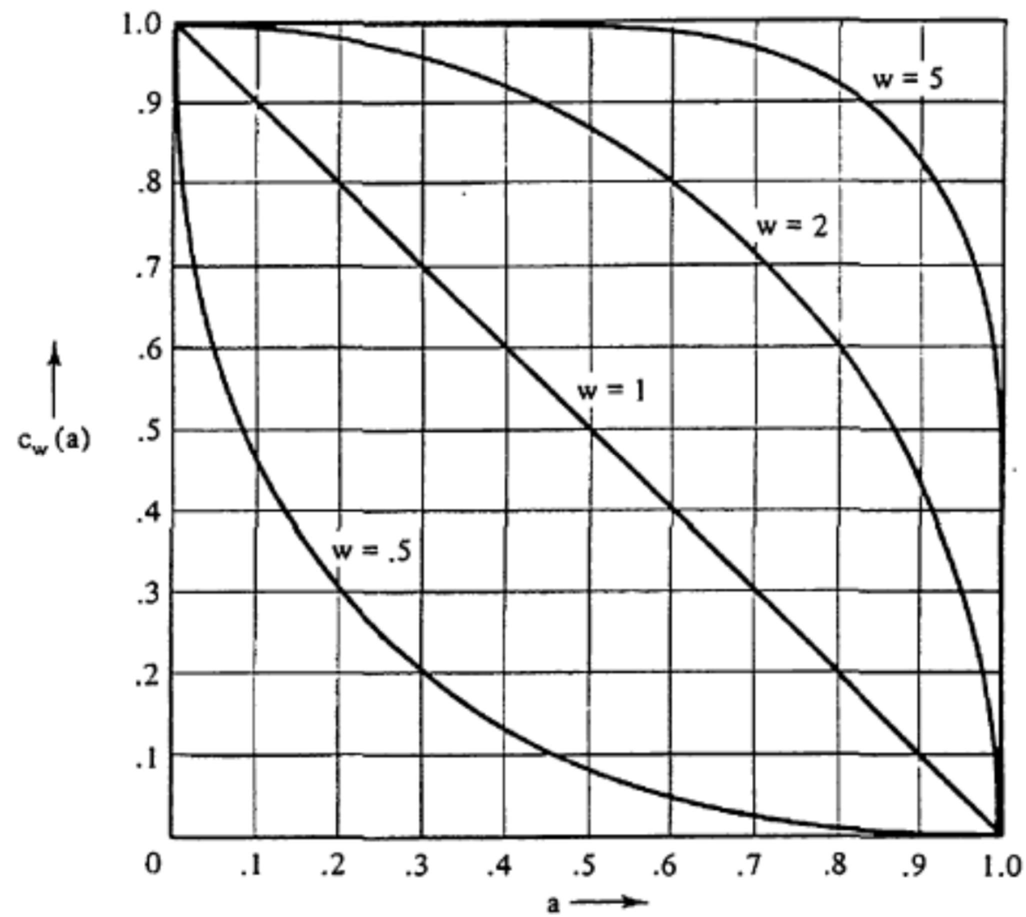
$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}(\lambda \in (-1;\infty))$$

- Hàm bù thỏa cả 4 tiên đề.
- Lớp hàm bù này được gọi là *lớp các hàm bù Sugeno*



5.1. Phép bù mờ

- ***Ví dụ 4:*** Cho hàm bù sau: $c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} (w \in (0; \infty))$
  - Hàm bù thỏa cả 4 tiên đề.
  - Lớp hàm bù này được gọi là *lớp các hàm bù Yager*



5.1. Phép bù mờ

- Điểm cân bằng *(equilibrium)* của phép bù mờ *c* là giá trị *a* thỏa $c(a) = a$.
- ***Định lý 2***: Mọi hàm bù mờ điều có nhiều nhất một điểm cân bằng.
- ***Định lý 3****:* Nếu hàm bù mờ *c* có một điểm cân bằng e_c (điểm cân bằng duy nhất) thì:

$$a \leq c(a) \text{ khi và chỉ khi } a \leq e_c$$

$$a \geq c(a) \text{ khi và chỉ khi } a \geq e_c$$

5.1. Phép bù mờ

- ***Định lý 3.4***: Nếu *c* là phép bù mờ liên tục thì *c* có duy nhất một điểm cân bằng.
- ***Ví dụ***: các hàm bù mờ *Sugeno* có điểm cân bằng là:

$$e_{c_\lambda} = \begin{cases} \dfrac{(1+\lambda)^{1/2}-1}{\lambda} for \lambda \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} for \lambda = 0 \end{cases}$$

- Giá trị này tính được nhờ giải phương trình

$$\frac{1-e_{c_\lambda}}{1+\lambda e_{c_\lambda}} = e_{c_\lambda}$$

5.2. Phép giao mờ : t-norms
(fuzzy intersection)

- Cho hai tập mờ *A* và *B*, giao của hai tập mờ được xác định bởi một hàm trên khoảng đơn vị [0,1]:

$$i: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$(A \cap B)(x) = i[A(x), B(x)]$$

- Thuật ngữ “t-norm” và “fuzzy intersection” đều được sử dụng để chỉ các phép giao mờ.

5.2. Phép giao mờ

- Một phép giao mờ cần thỏa ít nhất các tiên đề sau đây: $\forall$ *a, b, d* $\in$[0,1]
  - Tiên đề 1: Điều kiện biên

$$i(a,1) = a$$

  - Tiên đề 2: Tính đơn điệu

$$b \le d \Rightarrow i(a,b) \le i(a,d)$$

  - Tiên đề 3: Tính giao hoán

$$i(a,b) = i(b,a)$$

  - Tiên đề 4: Tính kết hợp

$$i(a,i(b,d)) = i(i(a,b),d)$$

5.2. Phép giao mờ

- Có ba tiền đề khác (thường được yêu cầu thêm)
  - Tiên đề 5: tính liên tục

    i là hàm liên tục
  - Tiên đề 6: Tính *subidempotency*

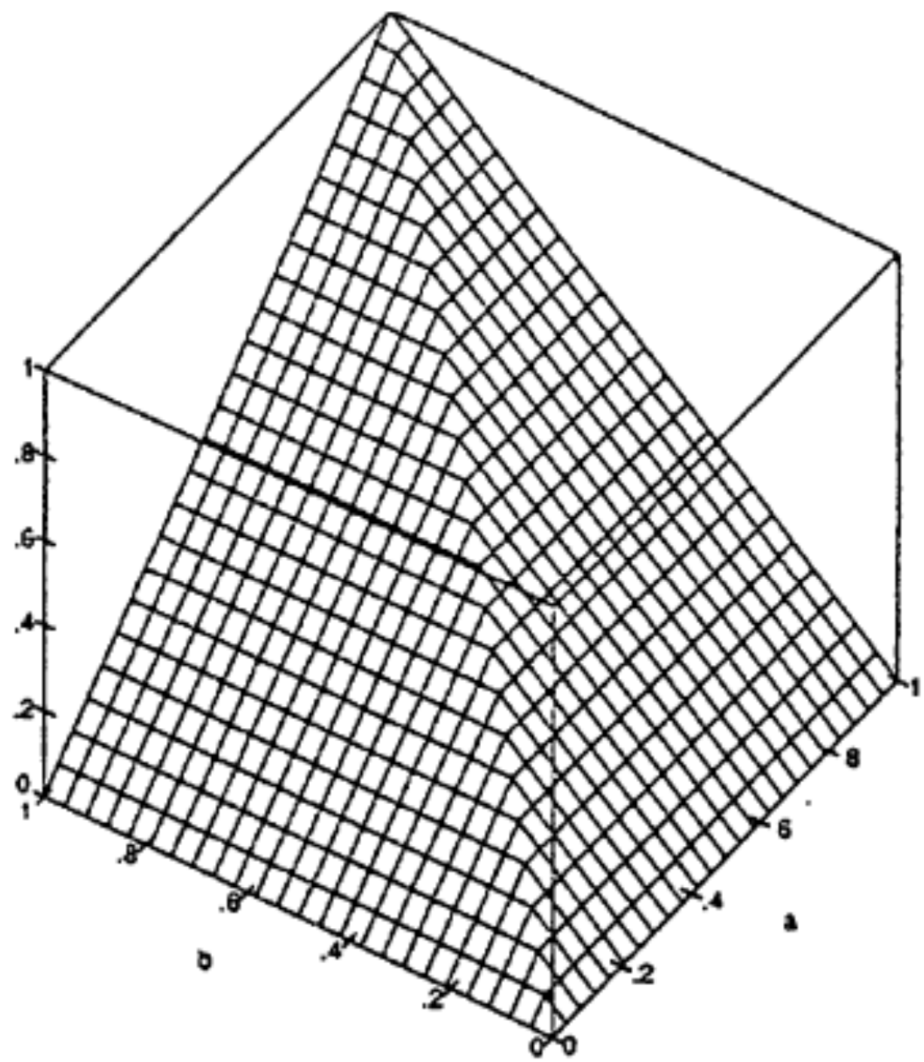
$$i(a,a) < a$$

  - Tiên đề 7: Đơn điệu chặt

$$a_1 < a_2, b_1 < b_2 \Rightarrow i(a_1,b_1) < i(a_2,b_2)$$

5.2. Phép giao mờ

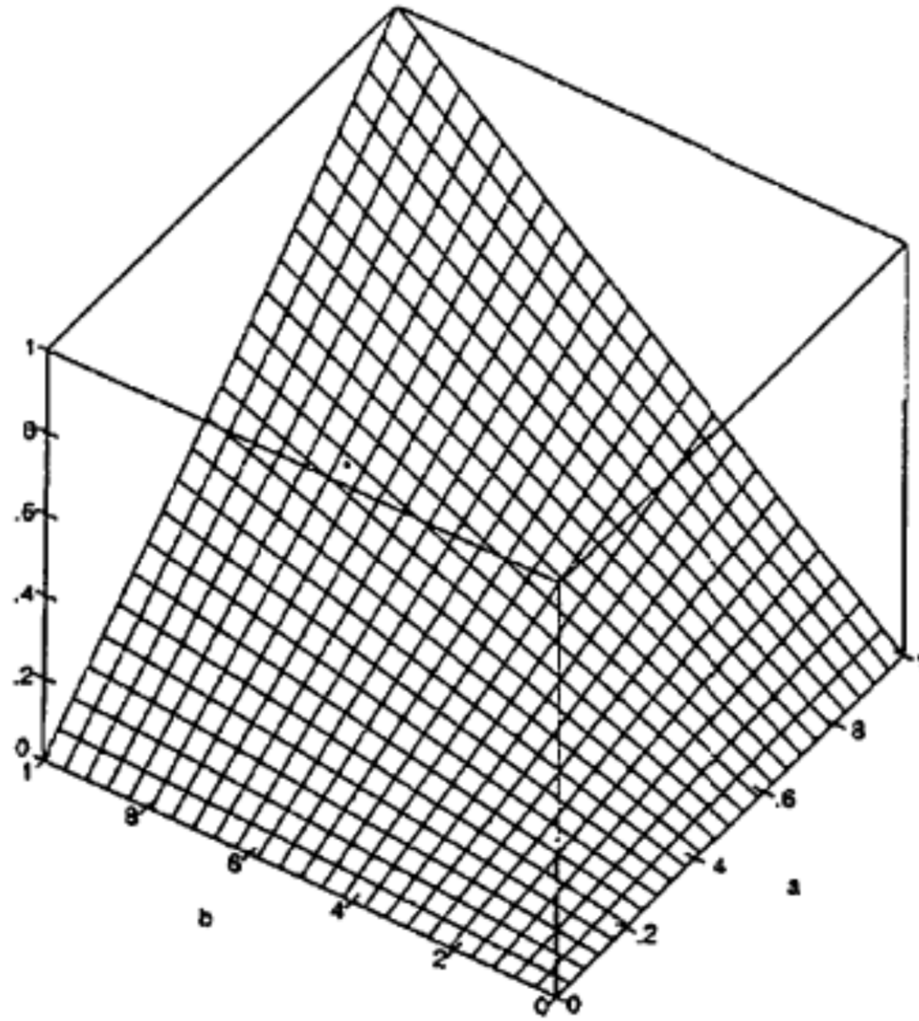
- Nhận xét: Phép giao mờ chuẩn:
  - Thỏa các tiên đề 1, 2, 3, 4
  - Thỏa tiên đề 5.
  - Không thỏa tiên đề 6.
  - Thỏa tiên đề 7.



min

5.2. Phép giao mờ

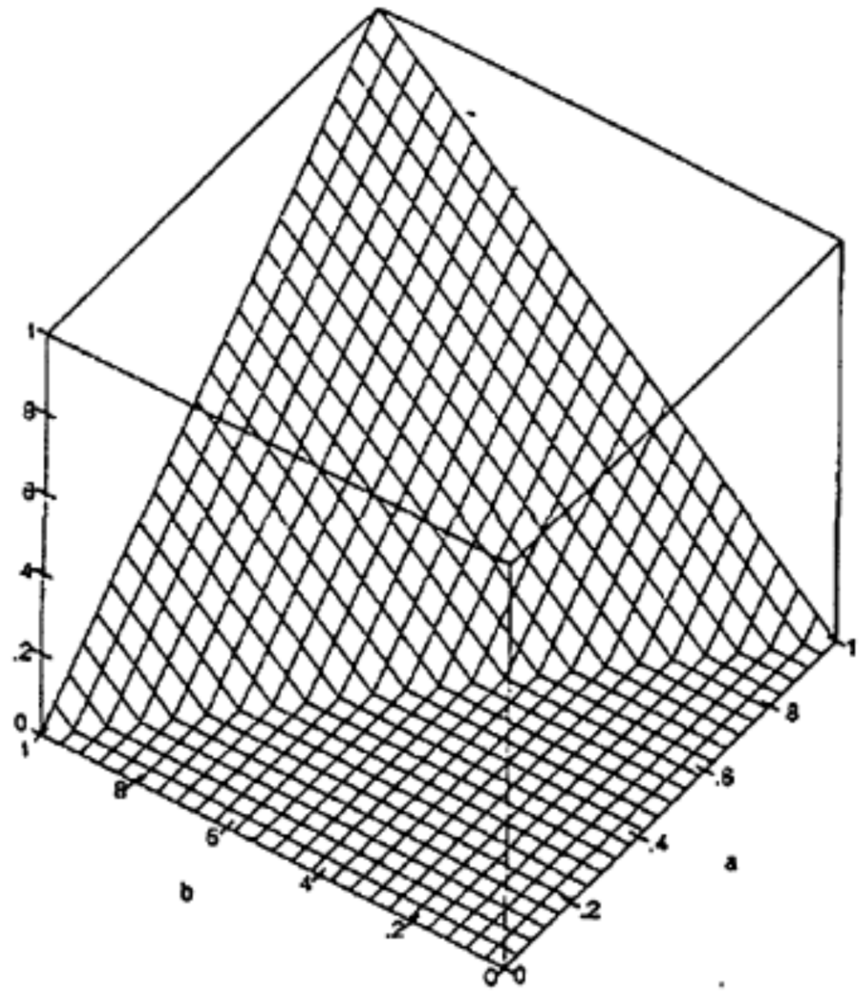
- ***Ví dụ 1***: phép giao mờ là tích đại số $i(a, b) = ab$.
- Phép giao mờ tích đại số thỏa tất cả 7 tiên đề



ab

5.2. Phép giao mờ

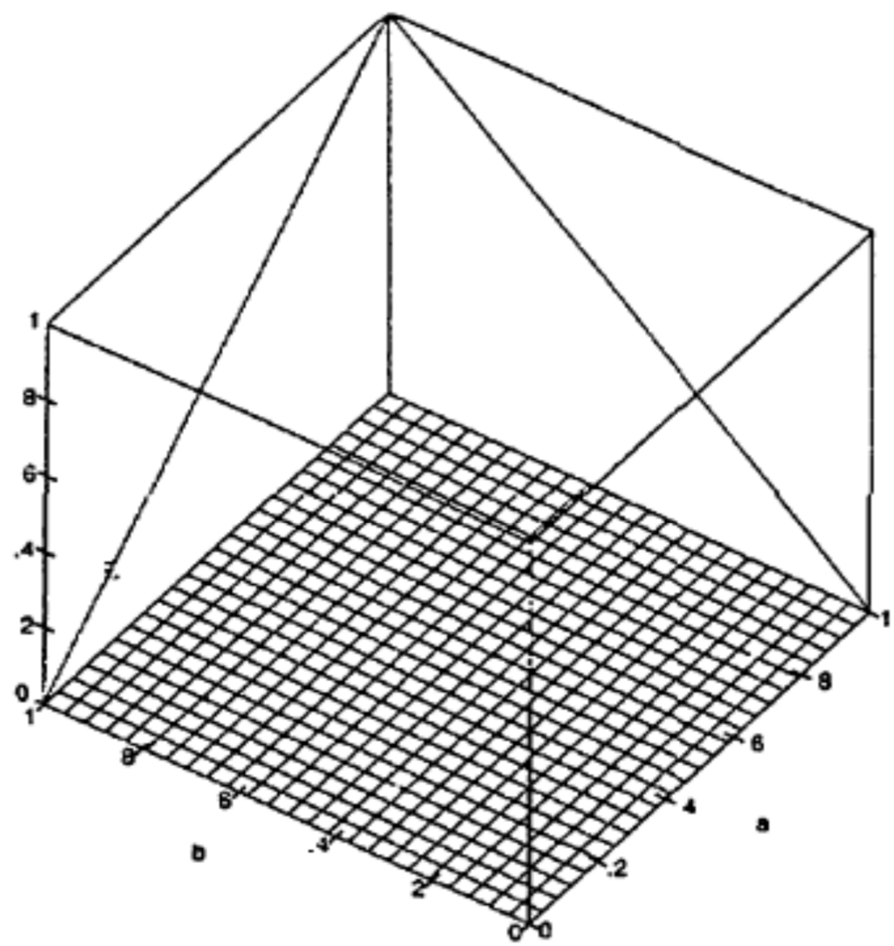
- ***Ví dụ 2***: Bounded difference
- $i(a, b) = \max(0, a + b - 1)$



max (0,a+b-1)

5.2. Phép giao mờ

- ***Ví dụ 3***: Drastic intersection – i_{min}
- $i_{min} = \begin{cases} a & khi\ b = 1 \\ b & khi\ a = 1 \\ 0 & TH\ khác \end{cases}$



i_{min}

5.2. Phép giao mờ

- Từ hình vẽ của bốn phép giao mờ, ta có:

$$i_{\min}(a, b) \le \max(0, a + b - 1) \le ab \le \min(a, b)$$

- Định lý 1: Với mọi *a*, *b* ∈ [0,1]

$$i_{\min}(a, b) \le i(a, b) \le \min(a, b).$$

- $i_{\min}(a,b)$ là cận dưới của t-norm
- min(*a*, *b*) là cận trên của t-norm

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms
(fuzzy unions)

- Phép hợp mờ của hai tập mờ *A* và *B* được xác định bởi hàm:

$$u: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$(A \cup B)(x) = u[A(x), B(x)], \forall x \in X$$

- Thuật ngữ “t-conorm” và “fuzzy union” đều chỉ các phép hợp mờ của các tập mờ.

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms

- Một phép hợp mờ là phép toán hai ngôi trên khoảng đơn vị [0,1] thỏa mãn ít nhất 4 tiên đề sau:
  - Tiên đề 1: điều kiện biên

$$u(a,0) = a$$

  - Tiên đề 2: Tính đơn điệu

$$b \leq d \Rightarrow u(a,b) \leq u(a,d)$$

  - Tiên đề 3: Tính giao hoán

$$u(a,b) = u(b,a)$$

  - Tiên đề 4: Tính kết hợp

$$u(a,u(b,d)) = u(u(a,b),d)$$

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms

- Các tiên đề khác (thường được thêm vào cho một phép hợp mờ)
  - Tiên đề 5: tính liên tục

    u là hàm liên tục

  - Tiên đề 6: Tính superidempotency

$$u(a, a) > a$$

  - Tiên đề 7: tính đơn điệu chặt

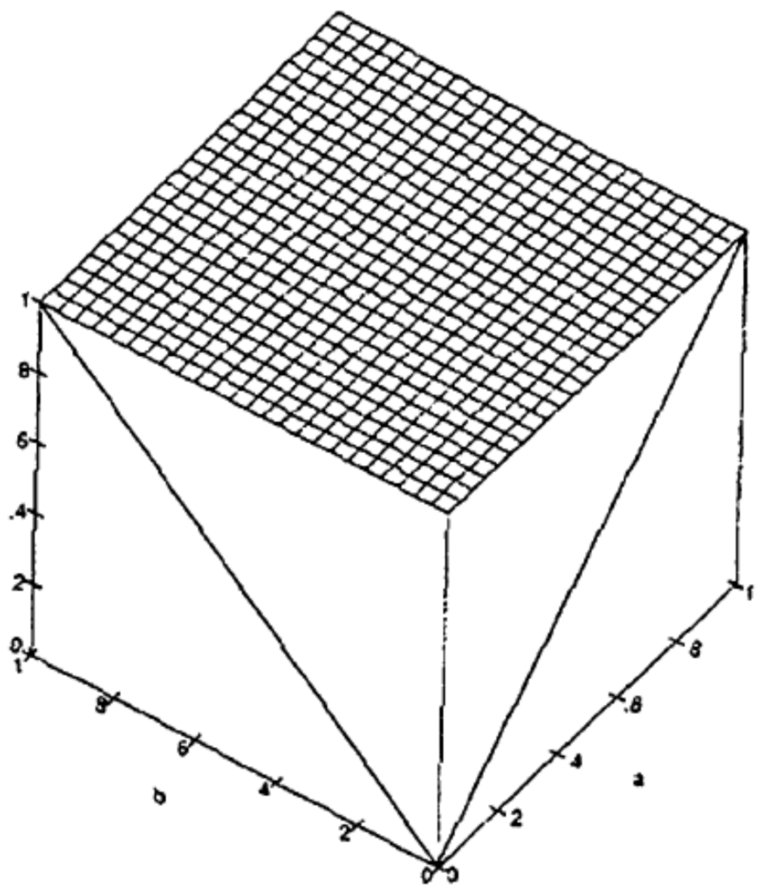
$$a_1 < a_2, b_1 < b_2 \Rightarrow u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$$

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms

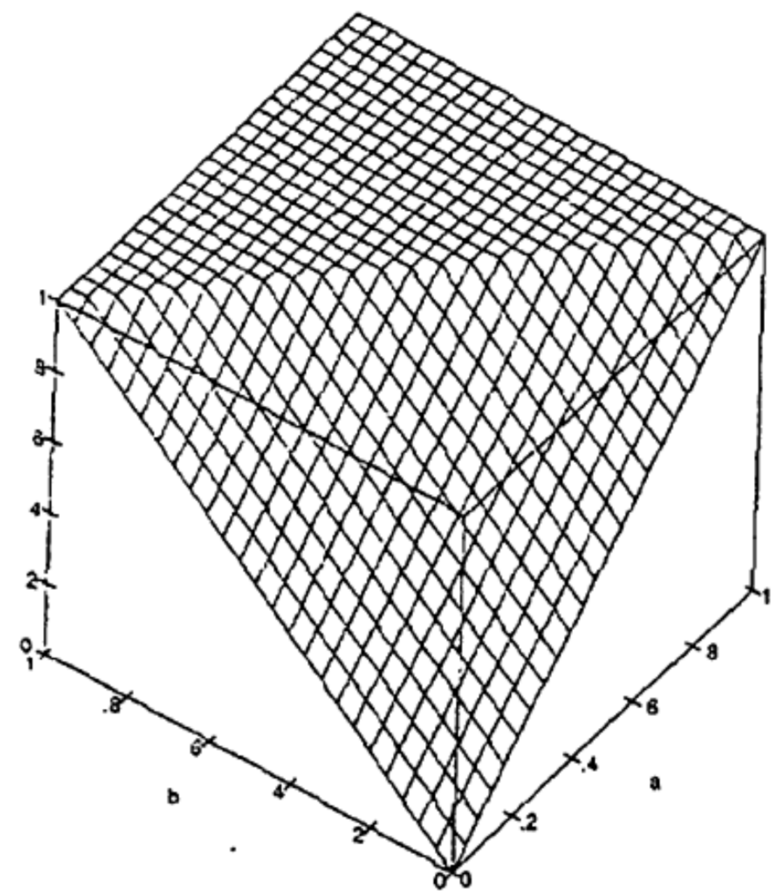
- Ví dụ:
  - Phép hợp mờ chuẩn: $u(a, b) = \max(a, b)$
  - Phép hợp mờ tổng đại số: $u(a, b) = a + b - ab$
  - Phép hợp mờ tổng giới hạn: $u(a, b) = \min(1, a + b)$
  - Phép hợp mờ chặt:

$$u(a, b) = \begin{cases} a & Khi\ b = 0 \\ b & Khi\ a = 0 \\ 1 & \mathrm{TH}\ khác \end{cases}$$

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms

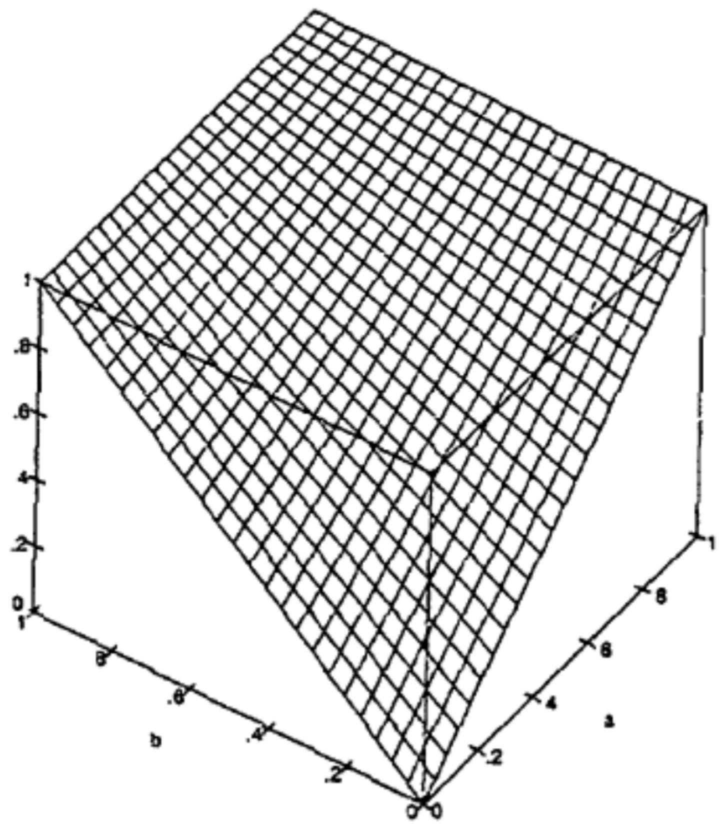


U_{max}

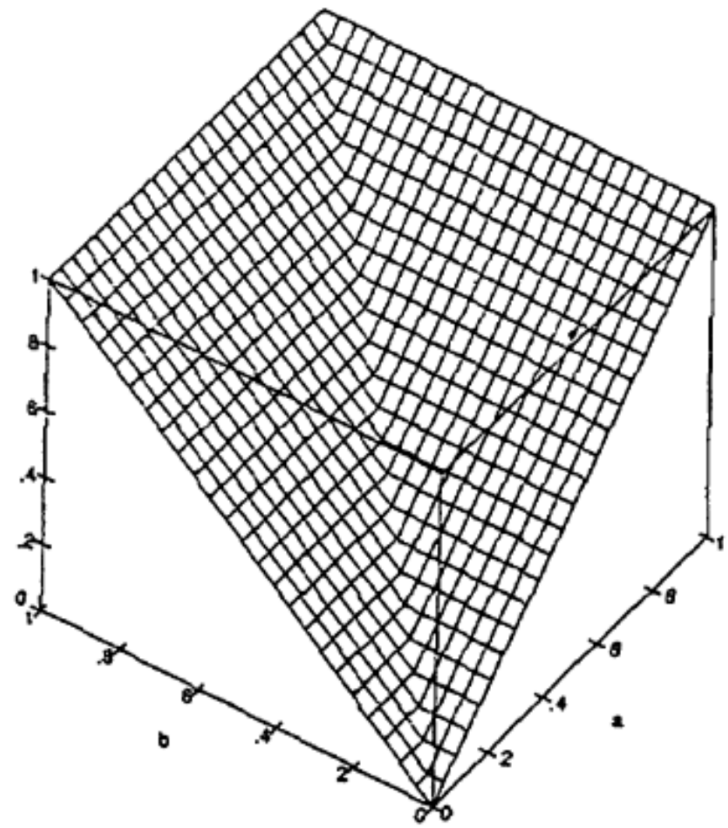


$min(1, a+b)$

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms



a+b-ab



max

- Từ hình vẽ, ta có:

$$\max(a,b) \le a+b-ab \le \min(1,a+b) \le u_{\max}(a,b)$$

5.3. Phép hợp mờ: t-conorms

- Định lý 1: Với mọi a, b $\in$[0,1]

$$\max(a, b) \leq u(a, b) \leq \mathrm{u}_{\max}(a, b)$$

- Max(a, b) là phép mờ cận dưới
- u_{max} (a, b) - phép hợp biên – là phép mờ cận trên

5.4. Tổ hợp các phép toán

- **Trong tập rõ**: Luật DeMorgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **Trong tập mờ**: t-norm *i* và t-conorm *u* được gọi là *dual* (đồng hành) với phép bù *c* khi và chỉ khi:

$$c(i(a,b)) = u(c(a),c(b)) \qquad c(u(a,b)) = i(c(a),c(b))$$

(Luật DeMorgan cho tập mờ)

- Bộ ba *(i, u, c)* thỏa luật DeMorgan được gọi là bộ ba đồng hành (dual).

5.4. Tổ hợp các phép toán

- Ví dụ: Các bộ ba thỏa luật DeMorgan mờ là:
  - $\{\min(a, b), \max(a, b), c_s\}$
  - $\{ab, a + b - ab, c_s\}$
  - $\{\max(0, a + b - 1), \min(1, a + b), c_s\}$
  - $\{i_{\min}(a, b), u_{\max}(a, b), c_s\}$

    (c_s - là phép bù chuẩn)

5.5. Các phép gộp nhập

- Ví dụ: Có 4 chuyên gia đánh giá năng lực một ứng cử viên bởi các từ *very good, good, medium, good*. Ngữ nghĩa của các từ được biểu diễn bởi tập mờ. Kết luận về năng lực của ứng viên là gì?
- Một phép gộp nhập được định nghĩa bởi hàm *h:*

$$h: [0,1]^n \to [0,1]$$

- Nếu A_1, A_2, …, A_n là các tập mờ trên X. Hàm gộp nhập h sinh ra một tập mờ A với
-

$$A(x) = h(A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)) \forall x \in X$$

5.5. Các phép gộp nhập

- Phép gộp nhập có nghĩa cần thỏa ít nhất 3 tiên đề sau:
  - Tiên đề 1: Điều kiện biên

    $$h(0,0,\ldots,0) = 0, h(1,1,\ldots,1) = 1$$

  - Tiên đề 2: Tính đơn điệu tăng.

    $$\forall i \in N_n: a_i \le b_i \Rightarrow h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le h(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

  - Tiên đề 3: Tính liên tục

    h là hàm liên tục

5.5. Các phép gộp nhập

- Các tiên đề thêm cho phép gộp nhập
  - Tiên đề 4: *h* là hàm đối xứng đối với tất cả tham số của nó *(p* là một hoán vị của N_n*)*

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h(a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots, a_{p(n)})$$

  - Tiên đề 5: *h* là hàm idempotent (lũy đẳng)

$$h(a, a, \ldots, a) = a$$

5.5. Các phép gộp nhập

- Một phép gộp nhập *h* thoả tiên đề 2 và 5 thì

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- Lớp các phép gộp nhập trung bình tổng quát

$$h_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

- Khi $\alpha = 1$, phép gộp nhập là trung bình cộng

$$h_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

5.5. Các phép gộp nhập

- Phép gộp nhập có trọng số: ordered weight averaging operation – OWA
  - Bộ trọng số: $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$
  - Với $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

$$h_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n$$