CHƯƠNG 2: QUAN HỆ MỜ

Bộ môn: Khoa học máy tính

Khoa: Công nghệ thông tin

Nội dung

- 1. Quan hệ rõ và quan hệ mờ
- 2. Quan hệ mờ nhị phân
- 3. Quan hệ nhị phân trên một tập
- 4. Quan hệ tương tự
- 5. Quan hệ thứ tự mờ

1. Quan hệ rõ và quan hệ mờ

- Quan hệ rõ: Cho hai tập rõ X và Y
  - Một quan hệ R từ X vào Y là một tập con của tích Đêcac
  - Ví dụ: $\forall a, b$ là số nguyên, $aRb \Leftrightarrow a \equiv b$ (mod 3)
  - Biểu diễn quan hệ bằng: Liệt kê, ma trận, đồ thị.
- Quan hệ rõ trên họ các tập X_i ($i = 1, \ldots, n$) là quan hệ n-ngôi có thể cho dưới dạng bảng dữ liệu quan hệ.

MãsốNV	Họđệm	Tên	Ngày sinh	Địachỉ	MãsốĐV	TênĐV	MãsốNQL
NV001	Lê	Vân	12/02/79	Hà nội	5	Nghiêncứu	NV002
NV002	Trần Đức	Nam	14/02/66	Hà nội	5	Nghiêncứu	NV002

1. Quan hệ rõ và quan hệ mờ

- Tính chất của quan hệ rõ:
  - Tính phản xạ
  - Tính đối xứng, phản đối xứng
  - Tính bắc cầu
- Quan hệ tương đương (thỏa tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu)
  - Lớp tương đương, phân hoạch
- Quan hệ thứ tự (thỏa tính chất phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu)
  - Quan hệ thứ tự toàn phần (tuyến tính)
  - Quan hệ thứ tự từng phần (bộ phận)

1. Quan hệ rõ và quan hệ mờ

- **Ví dụ**:
  - Tập X = {New York City, Paris}, Y = {Beijing, New York city, London}
  - Quan hệ R giữa các phần tử trong X với các phần tử trong Y là: *"x cách rất xa y".*
  - $R(X, Y)$ = 1/(NYC, Beijing) + 0/(NYC, NYC) + 0.6/(NYC, London) + 0.9/(Paris,Beijing) + 0.7/(Paris,NYC) + 0.3/(Paris,London)
  - Biểu diễn R ở dạng ma trận.
  - R là một quan hệ mờ từ X vào Y

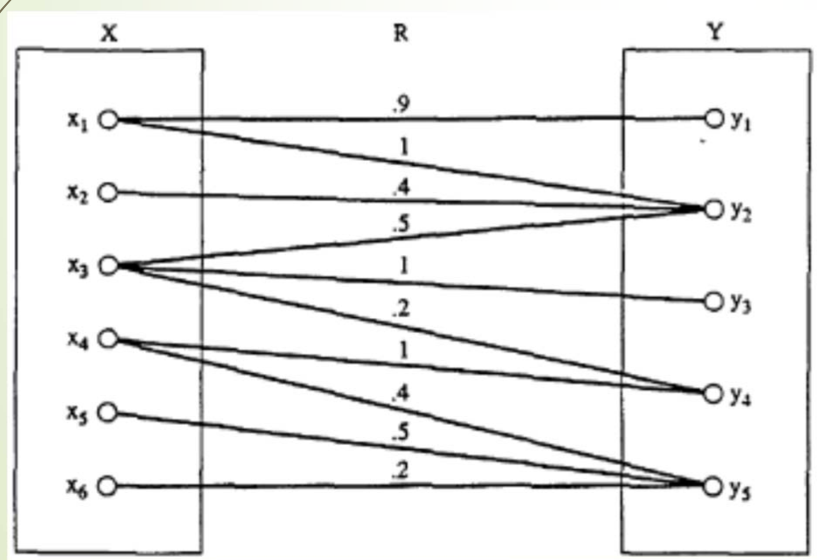
	NYC	*Paris*
Beijing	1	.9
NYC	0	.7
London	.6	.3

1. Quan hệ rõ và quan hệ mờ

- Định nghĩa:
  - Quan hệ mờ R giữa r tập tham chiếu $X_1, X_2, \ldots, X_r$ là một tập con mờ của $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$ với hàm thuộc f_R.
- Trường hợp riêng:
  - $r = 2$: quan hệ mờ nhị phân
  - $r = 2$ và $X_1 = X_2$: quan hệ mờ nhị phân xác định trên X
  - X, Y là tập hữu hạn: có thể biểu diễn quan hệ mờ nhị phân bằng ma trận.

2. Quan hệ mờ nhị phân

- Cho hai tập hợp rõ *X* và *Y*.
  - Quan hệ mờ nhị phân có thể gán mỗi phần tử $x \in X$ với nhiều phần tử $y \in Y$ có độ thuộc trong [0,1] để chỉ mức độ thỏa quan hệ giữa *x* và *y*
- Ví dụ: Sơ đồ đối xứng dọc và ma trận độ thuộc



$$
\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .5 & 1 & .2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & .4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .2
\end{array}\right]
\end{array}
$$

2. Quan hệ mờ nhị phân

- Cho một quan hệ mờ *R*(*X*, *Y*):
  - Tập xác định là một tập mờ trên *X*. Ký hiệu: *dom R*

    $$dom\ R(x) = \underbrace{max}_{y \in Y} R(x, y)$$

  - Tập giá trị là một tập mờ trên *Y*. Ký hiệu: *ran R*

    $$ran\ R(y) = \underbrace{max}_{x \in X} R(x, y)$$

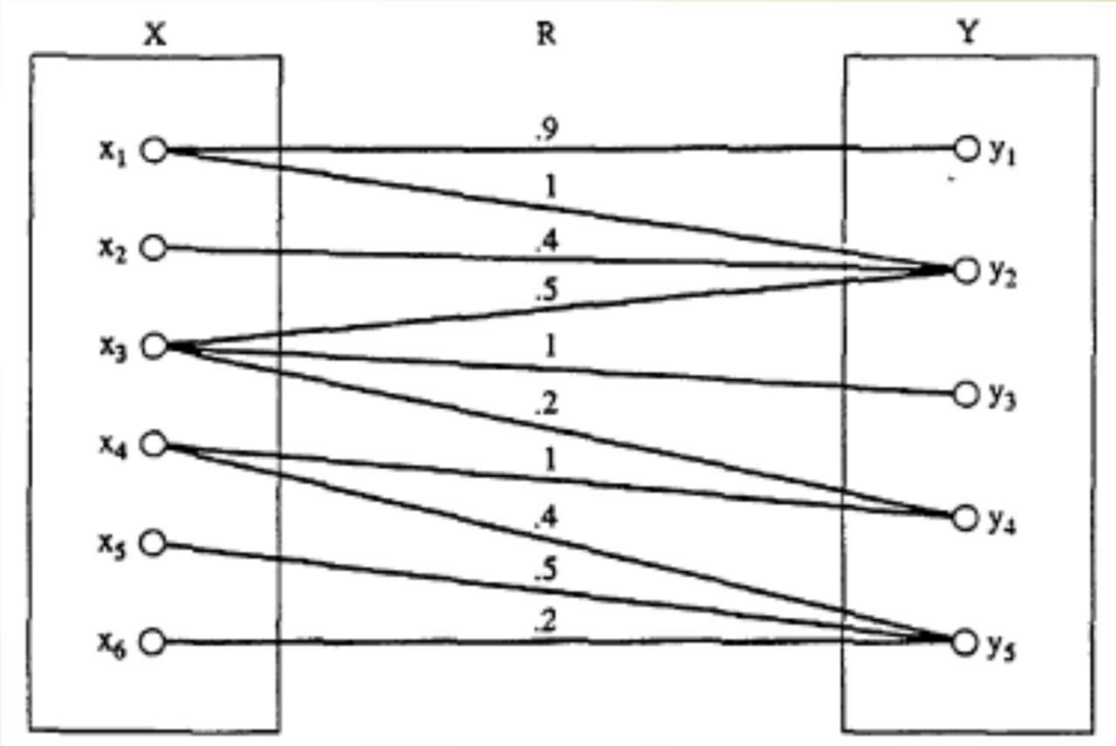
  - Chiều cao của quan hệ mờ *h*(*R*) là một số theo công thức:

    $$h(R) = \underbrace{max}_{y \in Y} \underbrace{max}_{x \in X} R(x, y)$$

    (Giá trị lớn nhất giữa các độ thuộc của các cặp (*x*, *y*) trong *R*)

2. Quan hệ mờ nhị phân

- Ví dụ: Cho quan hệ mờ dưới sơ đồ hình bên. Xác đinh:
  - Tập xác định mờ
  - Tập giá trị mờ
  - Chiều cao

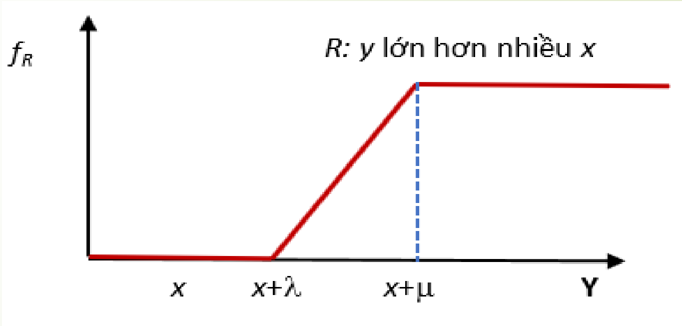


2. Quan hệ mờ nhị phân

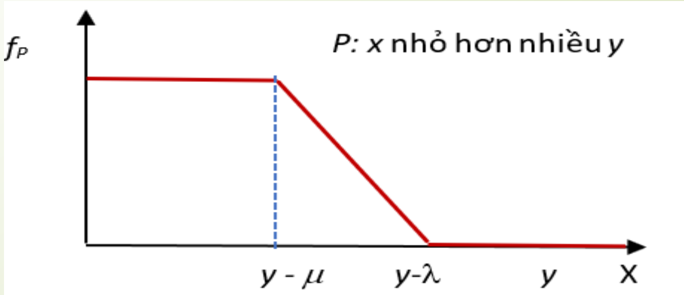
- **Nghịch đảo** của quan hệ mờ *R* giữa *X* và *Y* là một quan hệ mờ R^{-1} giữa *Y* và *X* được xác định bởi:

$$\forall y \in Y, \forall x \in X, f_{R^{-1}}(y,x) = f_R(x,y)$$

- Ma trận $M(R^{-1})$ là chuyển vị của ma trận $M(R)$
- Ví dụ: Quan hệ *R:* "*y* lớn hơn nhiều *x*" và *P:* "*x* nhỏ hơn nhiều *y*" trên tập số thực *R*



- $$f_R(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } y \le x+\lambda \\ \frac{y-x-\lambda}{\mu-\lambda} \text{ nếu } x+\lambda < y < x+\mu \\ 1 \text{ nếu } y \ge x+\mu \end{cases}$$



- $$f_P(y,x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \ge y-\lambda \\ \frac{y-x-\lambda}{\mu-\lambda} \text{ nếu } y-\mu < x < y-\lambda \\ 1 \text{ nếu } x \le y-\mu \end{cases}$$

2. Quan hệ mờ nhị phân

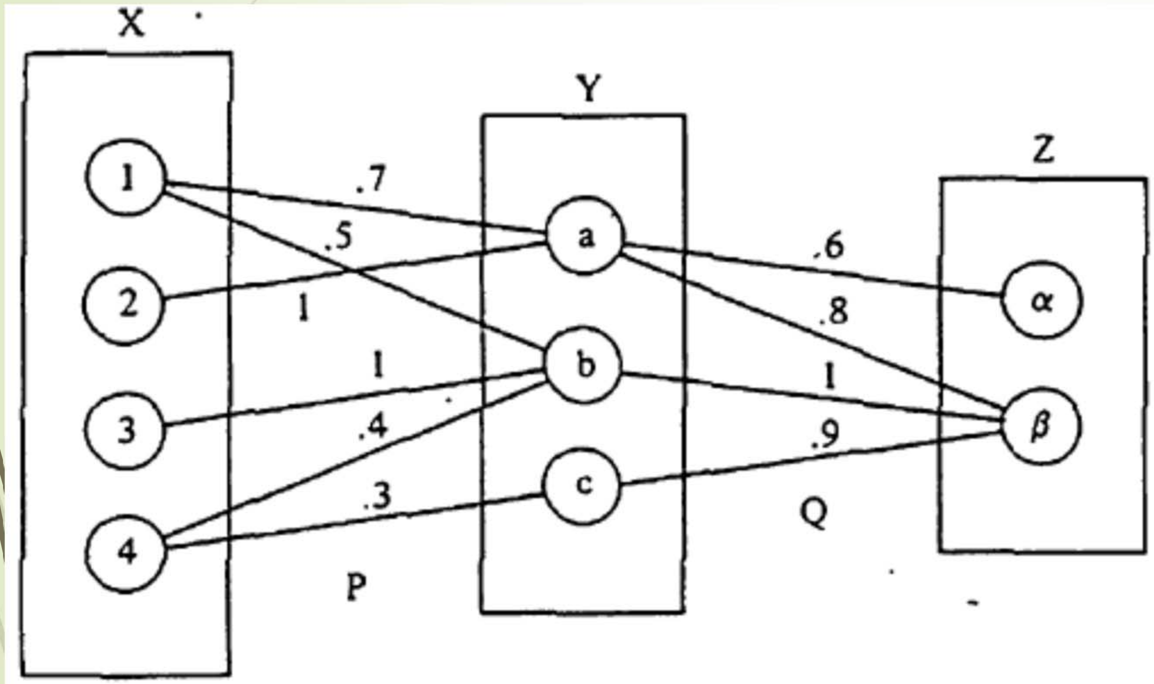
- *P* là quan hệ mờ trên *X*×*Y*, *Q* là quan hệ mờ trên *Y*×*Z*.
- **Hợp thành của các quan hệ mờ**
  - Hợp thành chuẩn của *P* và *Q*, ký hiệu $P \circ Q$, là quan hệ mờ trên *X*×*Z* xác định như sau:

$$P \circ Q(x, z) = \underbrace{max}_{y \in Y} \min[P(x, y), Q(y, z)]$$

- **Ghép nối các quan hệ mờ**
  - Là một quan hệ trên bộ ba (*x*, *y*, *z*) trên ba tập *X*, *Y*, *Z*

$$R(x, y, z) = [P * Q](x, y, z) = \min[P(x, y), Q(y, z)]$$

2. Quan hệ mờ nhị phân



Composition: R = P ∘ Q		
x	z	$\mu_R(x, z)$
1	α	.6
1	β	.7
2	α	.6
2	β	.8
3	β	1
4	β	.4

Join: S = P * Q			
x	y	z	$\mu_S(x, y, z)$
1	a	α	.6
1	a	β	.7
1	b	β	.5
2	a	α	.6
2	a	β	.8
3	b	β	1
4	b	β	.4
4	c	β	.3

2. Quan hệ mờ nhị phân

- **Hợp thành của các quan hệ mờ**
  - Việc tính ma trận của quan hệ hợp thành có thể tính bằng phép tích ma trận thông thường. Trong đó, phép cộng thay bằng phép "max", phép nhân thay bằng phép "min"
  - Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} .3 & .5 & .8 \\ 0 & .7 & 1 \\ .4 & .6 & .5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} .9 & .5 & .7 & .7 \\ .3 & .2 & 0 & .9 \\ 1 & 0 & .5 & .5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .3 & .5 & .5 \\ 1 & .2 & .5 & .7 \\ .5 & .4 & .5 & .6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} .8(=r_{11}) &= \max[\min(.3, .9), \min(.5, .3), \min(.8, 1)] \\ &= \max[\min(p_{11}, q_{11}), \min(p_{12}, q_{21}), \min(p_{13}, q_{31})], \\ .4(=r_{32}) &= \max[\min(.4, .5), \min(.6, .2), \min(.5, 0)] \\ &= \max[\min(p_{31}, q_{12}), \min(p_{32}, q_{22}), \min(p_{33}, q_{32})]. \end{aligned}$$

2. Quan hệ mờ nhị phân

- **Hợp thành của các quan hệ mờ**
  - Tính kết hợp:

    $$[P(X,Y) \circ Q(Y,Z)] \circ R(Z,W) = P(X,Y) \circ [Q(Y,Z) \circ R(Z,W)]$$

  - Nghịch đảo của quan hệ hợp thành bằng hợp thành của các quan hệ nghịch đảo.

    $$[P(X,Y) \circ Q(Y,Z)]^{-1} = Q(Y,Z)^{-1} \circ P(X,\mathrm{Y})^{-1}$$

  - Phép hợp thành không có tính giao hoán (ngay cả khi *X* = Z)

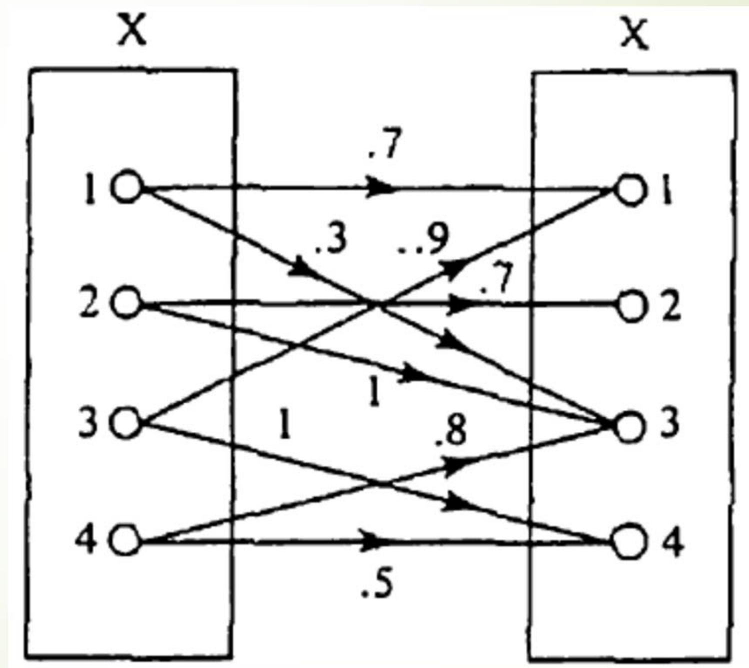
    $$P(X,Y) \circ Q(Y,Z) \neq Q(Y,Z) \circ P(X,Y)$$

3. Quan hệ mờ trên một tập

- Biểu diễn quan hệ mờ trên tập *X*

X	1	2	3	4
1	.7	0	.3	0
2	0	.7	1	0
3	.9	0	0	1
4	0	0	.8	.5

Ma trận độ thuộc



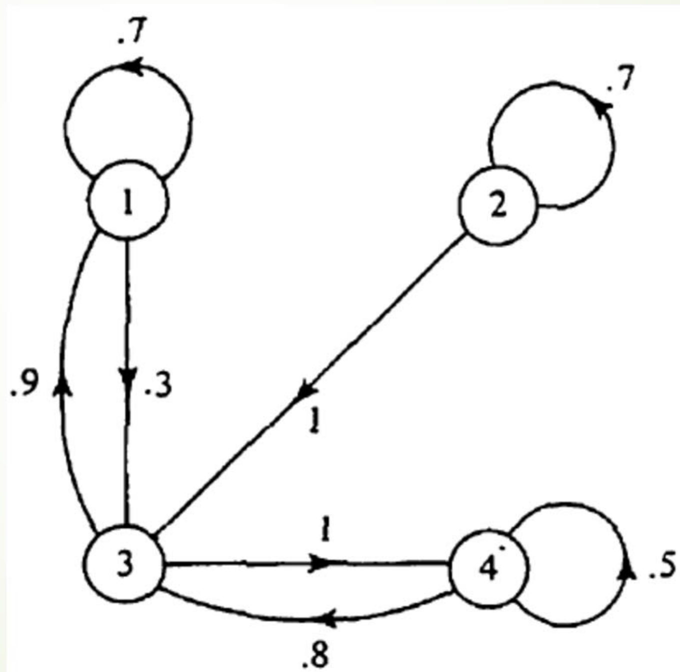
Sơ đồ sagittal

3. Quan hệ mờ trên một tập

- Biểu diễn quan hệ mờ trên tập *X*

X	1	2	3	4
1	.7	0	.3	0
2	0	.7	1	0
3	.9	0	0	1
4	0	0	.8	.5

Ma trận độ thuộc



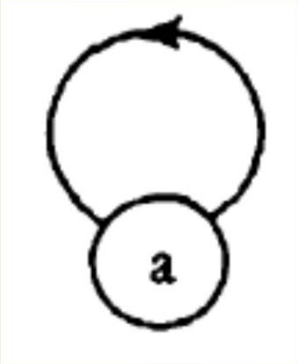
Đồ thị có hướng

x	y	R(x, y)
1	1	.7
1	3	.3
2	2	.7
2	3	1
3	1	.9
3	4	1
4	3	.8
4	4	.5

Bảng độ thuộc

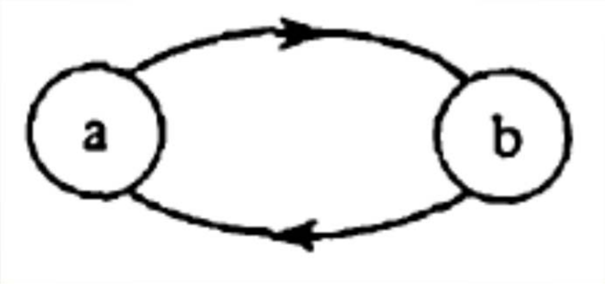
3. Quan hệ mờ trên một tập

- Các tính chất của quan hệ mờ
  - Tính phản xạ: $R(x, x) = 1$ với mọi $x \in X$.
  - Không có tính phản xạ: tồn tại x mà $R(x, x) \neq 1$.
  - Phản phản xạ: nếu với mọi x đều có $R(x, x) \neq 1$
  - Phản xạ yếu hơn ε-phản xạ: $R(x, x) \geq \varepsilon$ với mọi x



3. Quan hệ mờ trên một tập

- Các tính chất của quan hệ mờ
  - Tính đối xứng: $R(x, y) = R(y, x)$ với mọi $x, y \in X$
  - Không đối xứng: tồn tại x, y để $R(x, y) \neq R(y, x)$
  - Tính phản đối xứng: Nếu $R(x, y) > 0$ và $R(y, x) > 0$ thì $x = y$ với mọi x, y



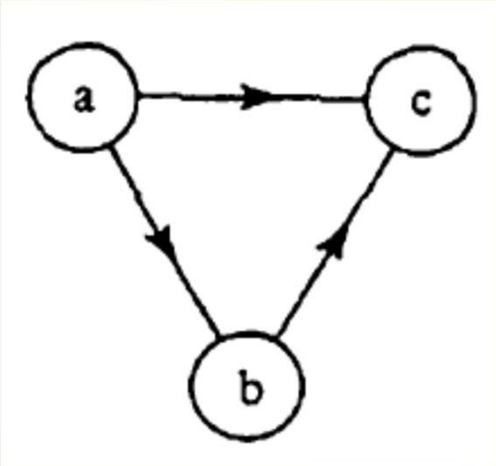
3. Quan hệ mờ trên một tập

- Các tính chất của quan hệ mờ
  - Tính bắc cầu (bắc cầu max - min): với mỗi $(x, z) \in X^2$

$$R(x,z) \geq \underbrace{max}_{y \in Y} \min[R(x,y), R(y,z)] \text{ (*)}$$

  - Không bắc cầu: tồn tại cặp (*x*, *z*) mà không thỏa (*)
  - Phản bắc cầu: với mọi cặp $(x, z) \in X^2$

$$R(x,z) < \underbrace{max}_{y \in Y} \min[R(x,y), R(y,z)] \text{ (*)}$$



3. Quan hệ mờ trên một tập

- Ví dụ:
  - Cho *X* là tập các thành phố.
  - Quan hệ *R* trên *X* là quan hệ “rất gần”.
  - Rõ ràng, *R* có tính phản xạ, đối xứng
  - *R* không có tính bắc cầu.

  (Có thể tồn tại: $R(a, b) = 0.7$, $R(b, c) = 0.8$, $R(a, c) = 0.5$)

3. Quan hệ mờ trên một tập

- Bao đóng bắc cầu của quan hệ mờ *R*(*X*, *X*).
  - Ký hiệu: $R_T(X,X)$
  - Được xác định theo thuật toán sau:
  - B1: $R' = R \cup (R \circ R)$
  - B2: Nếu $R' \neq R$, đặt $R = R'$, quay lại bước 1.
  - B3: $R_T(X,X) = R'$
  - Phép $\cup$ trong B1 cần tương thích với phép $\circ$
  - Khi phép hợp thành max-min và phép hợp max thì được gọi là bao đóng bắc cầu max-min

3. Quan hệ mờ trên một tập

- Bao đóng bắc cầu của quan hệ mờ *R*(*X*, *X*).
  - Ví dụ: Tìm bao đóng bắc cầu max-min

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .7 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \circ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} .7 & .5 & 0 & .5 \\ 0 & 0 & .8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 \\ 0 & .4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} \cup (\mathbf{R} \circ \mathbf{R}) = \begin{bmatrix} .7 & .5 & 0 & .5 \\ 0 & 0 & .8 & 1 \\ 0 & .4 & 0 & .4 \\ 0 & .4 & .8 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}'.$$

$$\mathbf{R} \circ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} .7 & .5 & .5 & .5 \\ 0 & .4 & .8 & .4 \\ 0 & .4 & .4 & .4 \\ 0 & .4 & .4 & .4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} \cup (\mathbf{R} \circ \mathbf{R}) = \begin{bmatrix} .7 & .5 & .5 & .5 \\ 0 & .4 & .8 & .1 \\ 0 & .4 & .4 & .4 \\ 0 & .4 & .8 & .4 \end{bmatrix} = \mathbf{R}''$$

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .5 & .5 \\ 0 & .4 & .8 & 1 \\ 0 & .4 & .4 & .4 \\ 0 & .4 & .8 & .4 \end{bmatrix}$$

3. Quan hệ mờ trên một tập

- Cho *R* là một quan hệ trên *X* được biểu diễn bởi ma trận vuông *M*(*R*)

Tính chất của *R*	**Quan hệ**	**Tính chất của M(R)**
R có tính đối xứng	$\Leftrightarrow$	*M(R)* là ma trận đối xứng
R có tính phản xạ	$\Leftrightarrow$	*M(R)* có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1
R có tính bắc cầu	$\Leftrightarrow$	Các phần tử của ma trận *M(R)* không nhỏ hơn các phần tử tương ứng của ma trận $M(R \circ R)$
R có tính phản đối xứng	$\Leftarrow$	*M*(*R*) là ma trận tam giác

3. Quan hệ mờ trên một tập

- Ví dụ: xét các tính chất của các quan hệ sau dựa trên ma trận độ thuộc

$$M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(R_3) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

4. Quan hệ tương tự

- Là mở rộng quan hệ tương đương trong tập rõ.
- **Định nghĩa**: Một quan hệ tương tự *R* là quan hệ mờ đối xứng, phản xạ và bắc cầu max-min.
- Tương tự như lớp tương đương trong quan hệ rõ, xem xét trong quan hệ tương tự:
  - Thực hiện nhóm các phần tử của tập tham chiếu *X* trong cùng một lớp mà sự giống nhau được thể hiện bởi quan hệ mờ *R*.
  - Nhóm các phần tử của *X* thỏa mạnh *R*, thỏa vừa phải *R* và những phần tử không thoả *R.*

4. Quan hệ tương tự

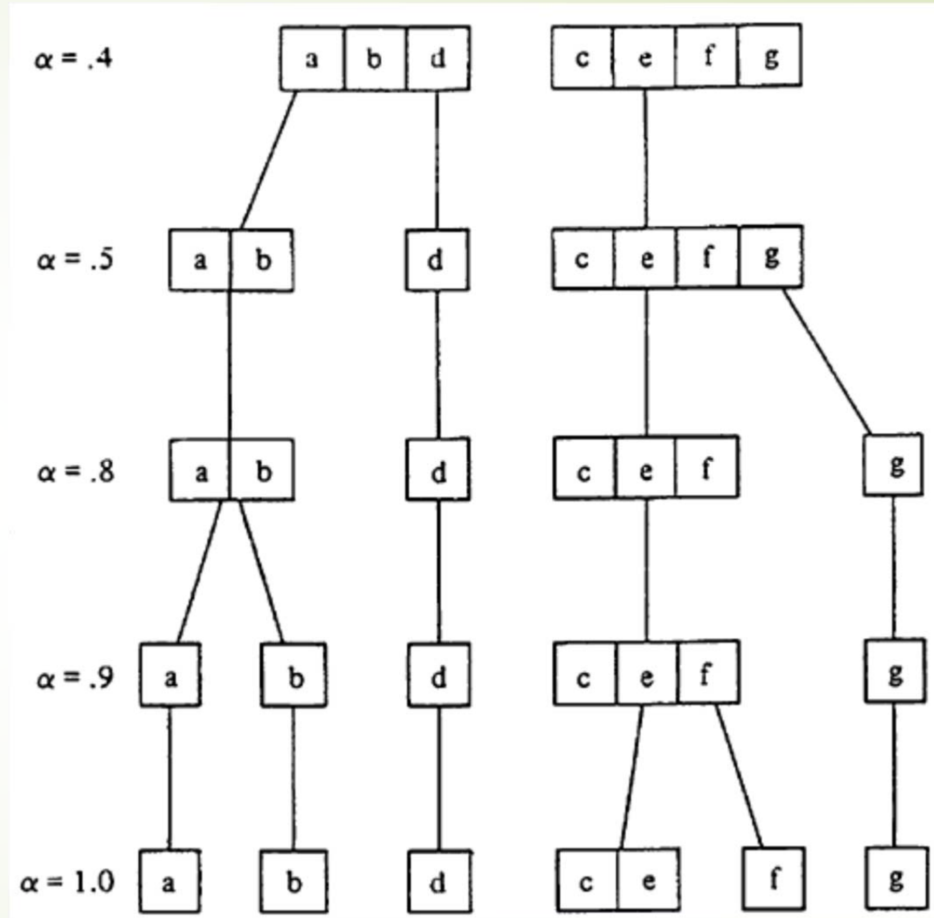
- Với mỗi mức $\alpha \in [0,1]$, *x* và *y* thuộc cùng một lớp nếu và chỉ nếu chúng có quan hệ *R* với nhau với mức độ ít nhất bằng α.
- Định nghĩa: Quan hệ mức α
  - Quan hệ mức α liên kết với một quan hệ mờ *R* là quan hệ thông thường R_α sao cho *x* và *y* thỏa quan hệ R_α khi và chỉ khi $f_R(x, y) \geq \alpha$
  - Với mọi $\alpha \in [0,1]$, quan hệ mức R_α liên kết với một quan hệ tương tự *R* là quan hệ tương đương.

4. Quan hệ tương tự

$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & .8 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 \\
.8 & 1 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & .9 & .5 \\
.4 & .4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & .9 & .5 \\
0 & 0 & .9 & 0 & .9 & 1 & .5 \\
0 & 0 & .5 & 0 & .5 & .5 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ma trận quan hệ tương tự *R*
trên tập *X* = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*}

Ứng dụng quan hệ tương tự thường gặp trong phân lớp và nhận dạng



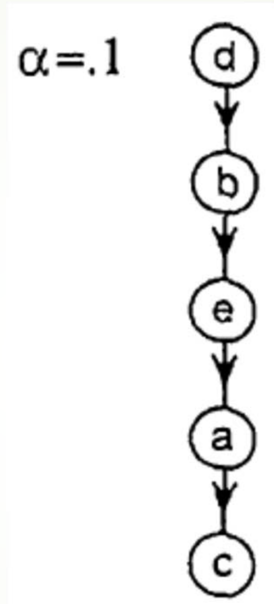
Cây phân hoạch của quan hệ tương tự R

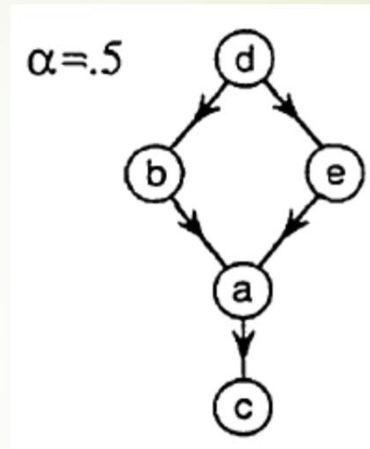
5. Quan hệ thứ tự mờ

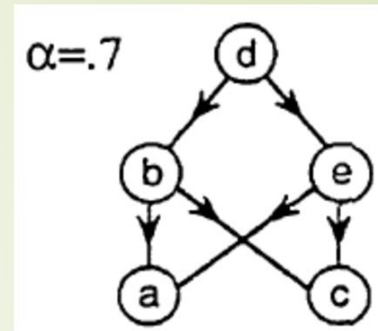
- Là sự mở rộng của quan hệ thứ tự rõ.
- **Định nghĩa**: Quan hệ thứ tự mờ là quan hệ nhị phân mờ *R* phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.
- **Tính chất**: Với mức bất kỳ $\alpha \in [0,1]$, quan hệ R_α mức α liên kết với một quan hệ thứ tự mờ là một quan hệ thứ tự bộ phận trên *X*.

5. Quan hệ thứ tự mờ

$$
R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & .7 & 0 & 1 & .7 \\
0 & 1 & 0 & .9 & 0 \\
.5 & .7 & 1 & 1 & .8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & .1 & 0 & .9 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$







5. Quan hệ thứ tự mờ

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & .7 & 0 & 1 & .7 \\ 0 & 1 & 0 & .9 & 0 \\ .5 & .7 & 1 & 1 & .8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & .1 & 0 & .9 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$