Các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng

Giảng viên hướng dẫn: TS Nguyễn Thị Ngọc Anh
Viện Toán ứng dụng và Tin học

Thứ tư, ngày 15 tháng 07 năm 2020

Danh sách thành viên

Họ và tên	MSSV	Phân công
Nguyễn Thiện Đông	20161027	Viết báo cáo + Demo Code
Ngô Gia Lâm	20162311	Tìm tài liệu + Báo cáo
Nguyễn Bá Kiên	20152057	Tìm tài liệu + Báo cáo

Nội dung

1. Lý thuyết hàng đợi
   - Giới thiệu chung
   - Định nghĩa
   - Các phương pháp giải bài toán mô hình xếp hàng
   - Các yếu tố cơ bản của hệ thống xếp hàng
   - Một số điểm hạn chế của hệ thống xếp hàng
   - Ứng dụng
2. Áp dụng cho bài toán bán vé
   - Đề bài
   - Hệ thống hàng đợi M/M/C/K
   - Giải quyết bài toán
   - Chương trình

Lý thuyết hàng đợi

Lý thuyết hàng đợi

Giới thiệu chung

Lý thuyết xếp hàng là một trong các công cụ toán học mạnh mẽ cho việc phân tích, ước lượng trong các hệ thống hàng đợi. Lý thuyết xếp hàng thông thường được áp dụng cho các hệ thống lý tưởng để đưa ra các kết quả gần đúng cho một mô hình thực tế. Tính chất chung của các giải pháp ứng dụng lý thuyết xếp hàng là làm rõ lưu lượng dòng vào, để cung cấp dự báo những danh giới lớn hơn trên những kết quả nghiên cứu thu được. Chúng rất hữu ích cho việc xác định tính đúng đắn của các phương pháp.

Lý thuyết hàng đợi

Định nghĩa

Một quá trình xếp hàng là:

- Dòng khách hàng tới
- Khả năng phục vụ của server
- Nếu khách hàng tới chưa được phục vụ thì sẽ xếp xếp hàng
- Hệ thống xếp hàng gồm khách hàng trong hàng đợi và khách hàng đang được phục vụ.

Lý thuyết hàng đợi

Chuẩn ký hiệu cho hệ thống xếp hàng được sắp xếp như sau:
Dòng vào / dòng phục vụ / số lượng server / số lượng khách hàng lớn nhất trong hệ thống / quy tắc xếp hàng.

- Dòng vào: lượng khách tới hệ thống
- Dòng phục vụ: lượng khách được phục vụ xong ra khỏi server
- Số server: số kênh phục vụ
- Lượng khách lớn nhất: tổng lượng khách đang phục vụ và trong xếp hàng
- Quy tắc xếp hàng: Một số nguyên tắc phục vụ thường được áp dụng trong các hệ thống hàng đợi là FIFO (First in first out), LIFO (Last in first out), FCFS (First come first serve), có ưu tiên, không ưu tiên, Random Order...

Lý thuyết hàng đợi

Các phương pháp giải bài toán mô hình xếp hàng

Phương pháp giải tích

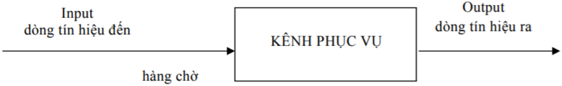
- B1: Phân tích hệ thống
- B2: Thiết lập hệ phương trình trạng thái cho các xác suất trạng thái
- B3: Giải hệ tìm các xác suất trạng thái
- B4: Tính toán phân tích các chỉ tiêu đưa ra nhận xét và quyết định

Phương pháp mô phỏng trên máy tính

- B1: Xác định bài toán
- B2: Đo và thu thập dữ liệu cần thiết để khảo sát
- B3: Chạy mô phỏng kiểm chứng, so sánh thực tế. Phân tích kết quả nếu cần thì sửa lại phương án được đánh giá qua mô phỏng
- B4: Triển khai thực tế

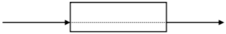
Lý thuyết hàng đợi

Các yếu tố cơ bản của hệ thống xếp hàng

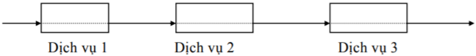


Bố trí vật lý:

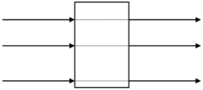
Single Channel – Single Server (Một kênh phục vụ, một loại dịch vụ)



Single Channel – Multi Server (Một kênh phục vụ, nhiều loại dịch vụ)



Multi Channel – Single Server (Nhiều kênh phục vụ, một loại dịch vụ)



Lý thuyết hàng đợi

Các yếu tố cơ bản của hệ thống xếp hàng

Nguyên tắc phục vụ:

- FIFO (First In First Out)
- LIFO (Last in first out)
- FCFS(First come first serve)
- Có ưu tiên
- Không ưu tiên

Lý thuyết hàng đợi

Một số điểm hạn chế của hệ thống xếp hàng

Các mô hình xếp hàng giới thiệu ở trên là những mô hình tiện lợi nhất được áp dụng khá rộng rãi. Tuy nhiên, do các mô hình này công nhận các giả thuyết *quá chặt chẽ* ít xảy ra trên thực tế, nên các chuyên gia trong lĩnh vưc Toán ứng dụng/Khoa học quản lí cũng đã đề xuất xem xét nhiều mô hình khác như: số tín hiệu cần phục vụ là hữu hạn, dòng tín hiệu đến là Poisson, cường độ phục vụ phụ thuộc vào số tín hiệu trong xếp hàng ...
Trong thực tiễn, các hệ thống xếp hàng không bao giờ đạt tới trạng thái vững. Chẳng hạn, trong một hệ thống xếp hàng, cường độ tín hiệu đến trung bình thay đổi nhiều lần trong ngày không cho phép hệ thống đạt được trạng thái vững. Do đó, để giải quyết cần áp dụng phương pháp mô phỏng để tìm ra lời giải có tính thực tiễn cho các mô hình xếp hàng khi hệ thống không thể đạt tới trạng thái vững hoặc khi không có các mô hình lí thuyết thích hợp.

Lý thuyết hàng đợi

Ứng dụng

- Áp dụng cho bài toán bán vé
- Viễn thông
- Điều khiển giao thông
- Xác định trình tự của hệ thống máy tính
- Dự báo hiệu suất của máy tinh
- Dịch vụ sức khỏe

Áp dụng cho bài toán bán vé

Áp dụng cho bài toán bán vé

Đề bài

Giả sử dòng khách hàng tới mua vé tại một ga tàu với M quầy phục vụ là dòng Poisson với tham số λ là số khách hàng /1 phút, ví dụ $\lambda = 6$ (có nghĩa là khách hàng đến phòng bán vé với các thời điểm tuân theo luật phân phối mũ với tham số $\lambda = 6$). Ngoài ra, còn biết nguyên tắc phục vụ là FCFS (First come first serve) và thời gian phục vụ tại mỗi quầy có luật phân phối mũ với kì vọng t (phút). Suy ra, $\mu = \frac{1}{t}$

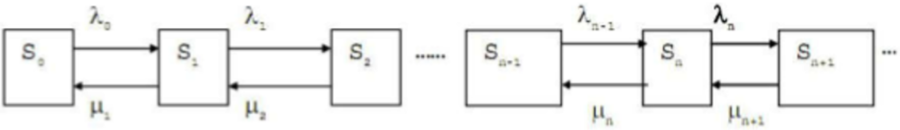
Áp dụng cho bài toán bán vé

Hệ thống hàng đợi M/M/C/K

- Có tiến trình đến là một tiến trình phân phối Poisson
- Hệ thống phục vụ có thời gian dịch vụ là một biến ngẫu nhiên phân phối mũ.
- C là số trạm phục vụ (server) khách hàng
- K là số lượng khách có thể chứa tối đa trong hệ thống .

Áp dụng cho bài toán bán vé

Hệ thống hàng đợi M/M/C/K



Hình 2.2: Sơ đồ chuyển trạng thái trong quá trình sinh-tử.

Áp dụng cho bài toán bán vé

Giải quyết bài toán

Bài toán có $K+1$ trạng thái: $\lambda_i = \lambda, \forall i = 1, ..., n$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, n = 1, ..., c-1 \\ c\mu, n = c, c+1, ... \end{cases}$$

Thiết lập ma trận sinh theo công thức:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \\ & & & & \mu_n & -\mu_n \end{bmatrix}$$

Áp dụng cho bài toán bán vé

Phân phối dừng của lượng người trong hệ thống bán vé là vectơ π là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \pi G = 0 \\ \sum_{i=0}^{k+1} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra được phân phối dừng của hệ thống

Áp dụng cho bài toán bán vé

Các đại lượng của mô hình M/M/1/K

1. Số lượng khách hàng trung bình trong hệ thống L :

$$L = \begin{cases} \rho \dfrac{1 + k.\rho^{k+1} - (k+1)\rho^k}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})} & \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2} & \rho = 1 \end{cases}$$

2.Số lượng khách hàng trong hàng đợi L_q:

$$L_q = \begin{cases} L - \dfrac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1 \\ \dfrac{k(k-1)}{2(k+1)} & \rho = 1 \end{cases}$$

3. Thời gian trung bình của một khách hàng phải mất trong hệ thống W_s:

$$W_s = \frac{L}{\lambda(1-p_k)}$$

4. Thời gian trung bình của một khách hàng phải mất để xếp hàng W_q:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

5. Tỷ lệ hoạt động có ích của hệ thống $\rho = \dfrac{\text{dòng vào}}{\text{dòng ra}}$:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Áp dụng cho bài toán bán vé

Các đại lượng của mô hình M/M/1/K

6.Tỷ lệ thời gian nhàn rỗi của hệ thống p_0:

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{k+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

7.Xác suất khi hệ thống phục vụ hết khách hàng p_n:

$$p_n = p_0 . \rho^n$$

Áp dụng cho bài toán bán vé

Các đại lượng của mô hình M/M/C/K

1. Số lượng khách hàng trung bình trong hệ thống L : $L = L_q + c - p_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho c)^n}{n!}$
2. Số lượng khách hàng trung bình trong hàng đợi L_q :

$$L_q = \frac{p_0 r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}[1 - \rho^{K-c+1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c}],$$

trong đó với $\frac{\lambda}{c\mu} \neq 1.$

3. Thời gian trung bình của một khách hàng phải mất trong hệ thống W_s :

$$W_s = \frac{L}{\lambda(1-p_k)}$$

4. Thời gian trung bình của một khách hàng phải mất để xếp hàng W_q:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-p_k)}$$

Áp dụng cho bài toán bán vé

Các đại lượng của mô hình M/M/C/K

5. Cường độ dòng đến

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \le n < k \\ 0 & khác \end{cases}$$

6. Cường độ dòng phục vụ

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \le n < c \\ c\mu & c \le n \le k \end{cases}$$

7.Xác suất khi hệ thống phục vụ hết khách hàng p_n :

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & 0 \le n < c \\ \dfrac{1}{c^{k-c}c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & c \le n \le k \end{cases}$$

Áp dụng cho bài toán bán vé

Chương trình

Giao diện khi chưa input

Áp dụng cho bài toán bán vé

Giao diện khi đã input