LAB 3: Phân tích thuật toán (tiếp theo)

Nguyễn Tiến Dũng - 23001585

Bài 1.1: Áp dụng Master Theorem

a. $T(n) = 9T(n/3) + n$.

Phân tích: $a = 9,\ b = 3 \Rightarrow \log_b a = \log_3 9 = 2$. Ta có $f(n) = n = O(n^{2-\varepsilon})$ (ví dụ $\varepsilon = 1$). Đây là **trường hợp 1**.

Kết luận: $T(n) = \Theta(n^2)$.

b. $T(n) = T(2n/3) + 1$.

Phân tích: Viết dưới dạng $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$ ta có $a = 1$ và $n/b = 2n/3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$. Do đó $\log_b a = \log_{3/2} 1 = 0$. $f(n) = 1 = \Theta(n^0)$, tương đương với $n^{\log_b a}$, nên là **trường hợp 2**.

Kết luận: $T(n) = \Theta(\log n)$.

c. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$.

Phân tích: $a = 3,\ b = 4 \Rightarrow \log_b a = \log_4 3 \approx 0.79$. $f(n) = n \log n = n^1 \log n$, rõ ràng lớn hơn $n^{\log_4 3}$ theo đa thức (vì mũ $1 > 0.79$). Kiểm tra điều kiện regularity:

$$a\,f(n/b) = 3 \cdot \frac{n}{4} \log\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{3n}{4}(\log n - 2) \leq c \cdot n \log n$$

với một $c < 1$ khi n đủ lớn (ví dụ c chọn giữa $3/4$ và 1). Vậy **trường hợp 3** áp dụng.

Kết luận: $T(n) = \Theta(n \log n)$.

d. $T(n) = 2T(n/3) + n$.

Phân tích: $a = 2,\ b = 3 \Rightarrow \log_b a = \log_3 2 \approx 0.6309$. $f(n) = n$ có mũ $1 > 0.6309$, nên lớn hơn theo đa thức. Kiểm tra regularity:

$$a\,f(n/b) = 2 \cdot \frac{n}{3} = \frac{2n}{3} \leq c\,n$$

với $c = \frac{2}{3} < 1$. Thỏa **trường hợp 3**.

Kết luận: $T(n) = \Theta(n)$.

e. $T(n) = T(n/2) + n$.

Phân tích: $a = 1,\ b = 2 \Rightarrow \log_b a = \log_2 1 = 0$. $f(n) = n$ có mũ $1 > 0$, nên thuộc **trường hợp 3**. Kiểm tra regularity: $1 \cdot f(n/2) = n/2 \leq \frac{1}{2}n$ với $\frac{1}{2} < 1$.

Kết luận: $T(n) = \Theta(n)$.

f. $T(n) = 3T(n/2) + n$.

Phân tích: $a = 3,\ b = 2 \Rightarrow \log_b a = \log_2 3 \approx 1.585$. $f(n) = n = n^1$ nhỏ hơn $n^{\log_2 3}$ theo đa thức. Do đó thuộc **trường hợp 1**.

Kết luận: $T(n) = \Theta\big(n^{\log_2 3}\big)$.

g. $T(n) = 2T(n/2) + n$.

Phân tích: $a = 2,\ b = 2 \Rightarrow \log_b a = \log_2 2 = 1$. $f(n) = n = \Theta(n^1)$, bằng chính xác $n^{\log_b a}$, do đó là **trường hợp 2**.

Kết luận: $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Bài 2.1

1. Mô tả các bước:
   Bước 1: Divide
   - Nếu mảng đang xét chỉ có 1 phần tử ($left == right$)
     - Nếu phần tử đó = X thì return 1.
     - Ngược lại thì return 0.
   - Nếu mảng có nhiều hơn 1 phần tử:
     - Tính $mid = (left + right)/2$.
     - Chia mảng thành 2 nửa:
       * Bên trái: $a[left...mid]$
       * Bên phải: $a[mid + 1...right]$

   Bước 2: Conquer
   - Gọi đệ quy hàm tìm kiếm trên 2 nửa mảng:
     - $CountX(a, left, mid, X)$
     - $CountX(a, mid + 1, right, X)$

   Bước 3: Combine
   - Kết quả trả về:
     - $returnCountX(a, left, mid, X) + CountX(a, mid + 1, right, X)$

2. Phân tích độ phức tạp của thuật toán:
   - Phân tích: Mỗi lần thuật toán chia mảng thành 2 nửa, gọi đệ quy trên mỗi nửa (kích thước là $n/2$) và cộng kết quả lại.
   - Nên ta có phương trình hồi quy : $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
   - Áp dụng Master Theorem với $a = 2, b = 2, f(n) = O(1)$ ta có $\log_b a = \log_2 2 = 1$. Do đó $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ với $\varepsilon = 1$.
     $\Rightarrow$ Thuộc trường hợp 1 của Master Theorem.
   - Kết luận: $T(n) = \Theta(n^{\log_2 2}) = \Theta(n)$.