CHIẾN LƯỢC CHIA ĐỂ TRỊ

- Các đặc trưng cơ bản
- Các ví dụ minh họa

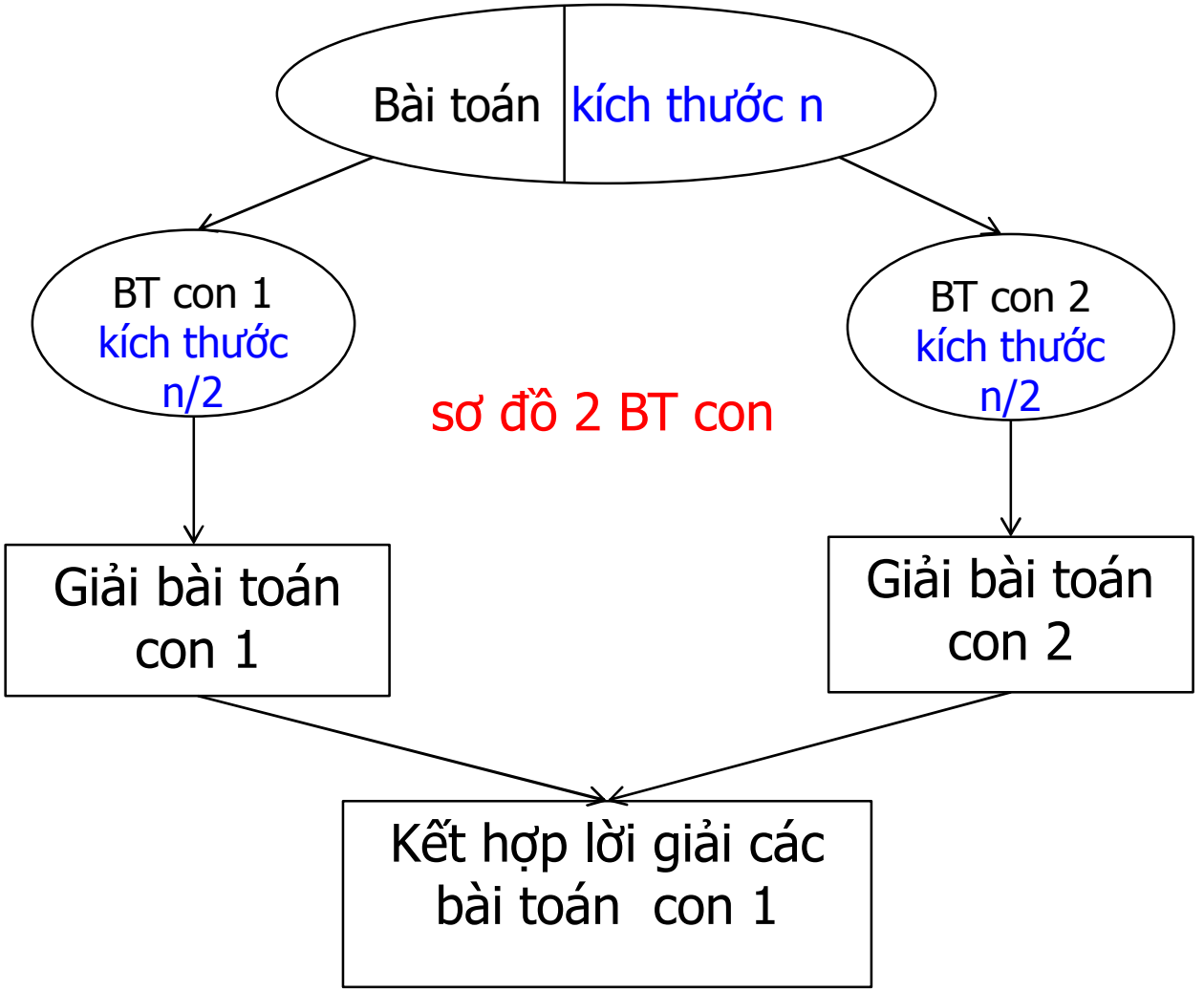
CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN

- Là chiến lược thiết kế được áp dụng rất rộng rãi trong giải toán nói chung và thiết kế giải thuật nói riêng

CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN

- Giải thuật giải một bài toán dựa trên chiến lược chia để trị được phát triển theo các bước:
  - Chia bài toán thành các bài toán con, thường là cùng kiểu
  - Giải các bài toán con (thường dùng kỹ thuật đệ qui)
  - Kết hợp lời giải các bài toán con để có lời giải bài toán ban đầu

CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN



CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

- Tìm kiếm nhị phân
- Giải thuật MergeSort
- Giải thuật QuickSort (đọc Levitin)
- Bài toán nhân các số nguyên lớn
- Bài toán tìm cặp điểm gần nhau nhất

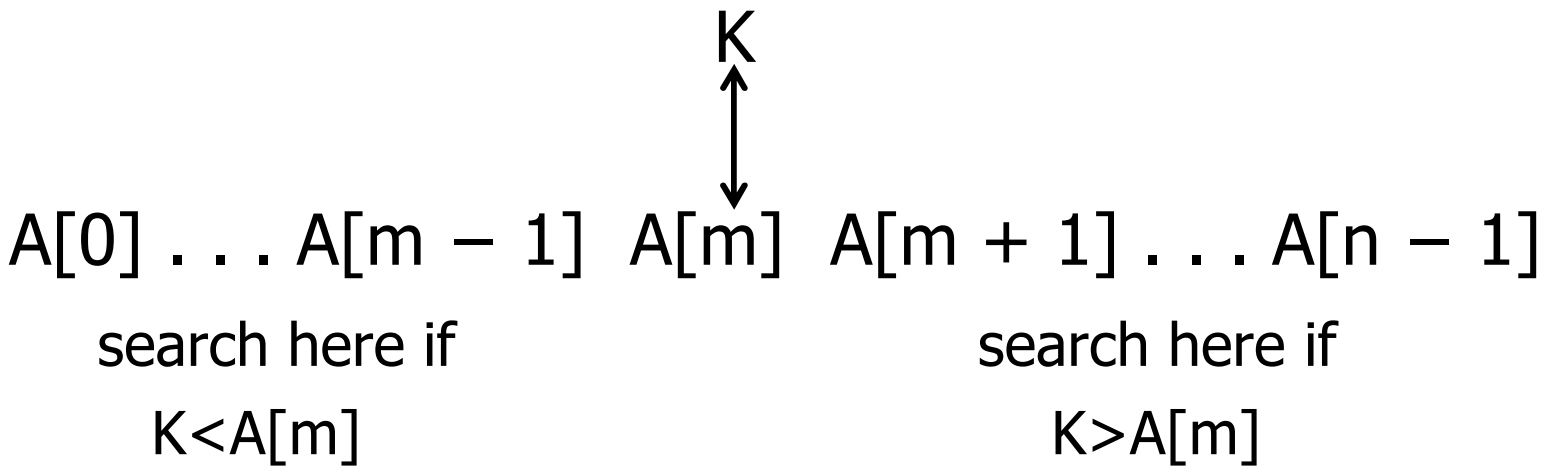
TÌM KIẾM NHỊ PHÂN

- Cho một mảng A[0..n-1] các số được sắp theo thứ tự tăng và một số K, tìm trong mảng số có giá trị bằng K

TÌM KIẾM NHỊ PHÂN

- Giải thuật tìm kiếm dựa trên chiến lược chia để trị như sau
  - Chia mảng A[0..n-1] thành 2 phần (thường chọn điểm chia m ở giữa mảng)
  - Nếu A[m] =K thì kết thúc tìm kiếm
  - Nếu K<A[m] tìm K trong mảng con bên trái (giải bài toán con)
  - Nếu K>A[m] tìm K trong mảng con bên phải

TÌM KIẾM NHỊ PHÂN



.

TÌM KIẾM NHI PHÂN

ALGORITHM BinarySearch(A[0..n − 1], K)

```
1   l←0; r ←n − 1
2   while l ≤ r do
3       m←⌊(l + r)/2⌋
4       if K = A[m] return m
5       else if K <A[m] r ←m − 1
6            else l←m + 1
7   return −1
```

TÌM KIẾM NHI PHÂN

- Tính độ phức tạp thời gian
  - Kích thước đầu vào là n
  - Thao tác cơ bản là so sánh trong lệnh 2 (giả sử thời gian là c)
  - Với kích thước đầu vào n, số phép so sánh phụ thuộc vào n và chính các phần tử của mảng vì vậy cần tính 3 trường hợp, tốt nhất, xấu nhất và trung bình

TÌM KIẾM NHI PHÂN

- Trường hợp tốt nhất
  - Khi A[m]=K, trong lần so sánh đầu tiên
  - $T(n)= c=\Theta(1)$ (hoặc O(1))

TÌM KIẾM NHI PHÂN

- Trường hợp xấu nhất
  - Gọi s là số lần so sánh nhiều nhất, thì suy ra $n/2^{s-1} \geq 1$
  - Từ đó $n \geq 2^{s-1}$ hay $s \leq (\log_2 n) + 1$
  - $T(n) = O(\log_2 n)$

TÌM KIẾM NHI PHÂN

- Trường hợp trung bình
  - Số lần so sánh trung bình khi tìm thấy thành công là $s \approx \log_2 n - 1$ và không tìm thấy là $s \approx \log_2 n + 1$
  - $T(n) = O(\log n)$

GIẢI THUẬT MERGESORT

- Giải thuật MergeSort sử dụng chiến lược chia để trị, sắp xếp một mảng tăng dần như sau
  - Chia mảng A[p..r] thành 2 mảng con A[p..$\lfloor (p+r)/2 \rfloor$] và A[$\lfloor (p+r)/2 \rfloor$+1..r]
  - Sắp xếp các mảng con
  - Kết hợp (bằng cách trộn) các phần tử của các mảng con thành mảng được sắp

GIẢI THUẬT MERGESORT

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1   if p < r
2       then q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MERGE-SORT(A, p, q)
4            MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5            MERGE(A, p, q, r)
```

GIẢI THUẬT MERGESORT

```
MERGE(A, p, q, r)
 1   n1 ← q − p + 1
 2   n2 ← r − q
 3   create arrays L[1 . . n1 + 1] and R[1 . . n2 + 1]
 4   for i ← 1 to n1
 5         do L[i] ← A[p + i − 1]
 6   for j ← 1 to n2
 7         do R[j] ← A[q + j]
 8   L[n1 + 1] ← ∞
 9   R[n2 + 1] ← ∞
10   i ← 1
11   j ← 1
12   for k ← p to r
13         do if L[i] ≤ R[j]
14               then A[k] ← L[i]
15                    i ← i + 1
16               else A[k] ← R[j]
17                    j ← j + 1
```

GIẢI THUẬT MERGESORT

- Đặt n=r-p+1
- Dễ thấy thời gian chạy của Merge(A, p, q, r) là O(n)
- Gọi T(n) là thời gian chạy của giải thuật Mergesort(A, p, r) thì

$$T(n)=\begin{cases}O(1), n=1\\ 2T(n/2)+O(n), n>1\end{cases}$$

GIẢI THUẬT MERGESORT

Giải sử $n=2^k$, coi $O(1)=1$ và $O(n) = n$, thì

$T(n) = 2T(n/2)+ n= 2(2T(n/2^2)+n/2)+n=2^2T(n/2^2)+2n$

$= 2^2(2T(n/2^3)+n/2^2)+2n=2^3T(n/2^3)+3n$

$=\ldots$

$=2^kT(n/2^k)+kn$

$= n + (\log_2 n)\, n = O(n\log_2 n)$

GIẢI THUẬT MERGESORT

Áp dụng định lý Master (hệ thức truy hồi chia để trị), ta cũng có

$$T(n) = O(n\log_2 n)$$

BÀI TOÁN NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN LỚN

- Cho 2 số nguyên a và b, mỗi số có n chữ số, n lớn và chẵn hãy tính tích a*b

BÀI TOÁN NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN LỚN

- Mỗi số nguyên a có n chữ số (n chẵn) có thể biểu diễn

$$a=r_{n-1}10^{n-1}+r_{n-2}10^{n-2}+\ldots+r_{n/2}10^{n/2}+ r_{n/2-1}10^{n/2-1} +\ldots+r_1 10+ r_0$$

$$=\underbrace{(r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_{n/2})}_{n/2 \text{ chữ số}}10^{n/2}+ \underbrace{r_{n/2-1}\ldots r_1 r_0}_{n/2 \text{ chữ số}}$$

Ký hiệu $a_1=r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_{n/2}$ và $a_0 = r_{n/2-1}\ldots r_1 r_0$, thì

$$a=a_1 10^{n/2}+ a_0$$

BÀI TOÁN NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN LỚN

- Viết b dưới dạng $b=b_1 10^{n/2}+ b_0$

$$c = a * b = (a_1 10^{n/2} + a_0) * (b_1 10^{n/2} + b_0)$$
$$= (a_1 * b_1)10^n + (a_1 * b_0 + a_0 * b_1)10^{n/2} + (a_0 * b_0)$$
$$= c_2 10^n + c_1 10^{n/2} + c_0$$

Trong đó

$$c_2 = a_1 * b_1$$
$$c_0 = a_0 * b_0$$
$$c_1 = (a_1 + a_0) * (b_1 + b_0) - (c_2 + c_0)$$

BÀI TOÁN NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN LỚN

ALGORITHM Product(a, b, n)

1 $a \leftarrow r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_{n/2}r_{n/2-1}\ldots r_1r_0$; $b \leftarrow p_{n-1}p_{n-2}\ldots p_{n/2}p_{n/2-1}\ldots p_1p_0$

2 **if** n=1 return r_0*p_0

3 **else** $a_1 \leftarrow r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_{n/2}$; $a_0 \leftarrow r_{n/2-1}\ldots r_1r_0$

4 $b_1 \leftarrow p_{n-1}p_{n-2}\ldots p_{n/2}$; $b_0 \leftarrow p_{n/2-1}\ldots p_1p_0$

5 $c_2 \leftarrow$Product(a_1, b_1, n/2); $c_0 \leftarrow$ Product(a_0, b_0, n/2)

6 $A \leftarrow a_1+a_0$; $B \leftarrow b_1+ b_0$;

7 $c_1 \leftarrow$ Product(A, B, n/2)- $(c_2 + c_0)$

8 **return** $c_2 10^n+c_1 10^{n/2}+c_0$

BÀI TOÁN NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN LỚN

- Gọi T(n) là thời gian chạy của thuật giải Product(a, b, n)

$$T(n) = \begin{cases} O(1), n = 1 \\ 3T(n/2) + O(n), n > 1 \end{cases}$$

BÀI TOÁN NHÂN CÁC SỐ NGUYÊN LỚN

- Sử dụng định lý Master (đánh giá hệ thức truy hồi chia để trị) ta có

  $a=3, b=2, d=1$

  Vì $a=3>2^1=b^d$, nên $T(n)=O(n^{\log_b a})=O(n^{\log_2 3})\approx O(n^{1.6})$

- Lưu ý: khi áp dụng chiến lược trực tiếp thì được giải thuật $O(n^2)$

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

- Cho P là một tập n điểm trong mặt phẳng Oxy, tìm cặp điểm có khoảng cách nhỏ nhất
- Lưu ý: Áp dụng chiến lược trực tiếp sẽ có giải thuật $O(n^2)$

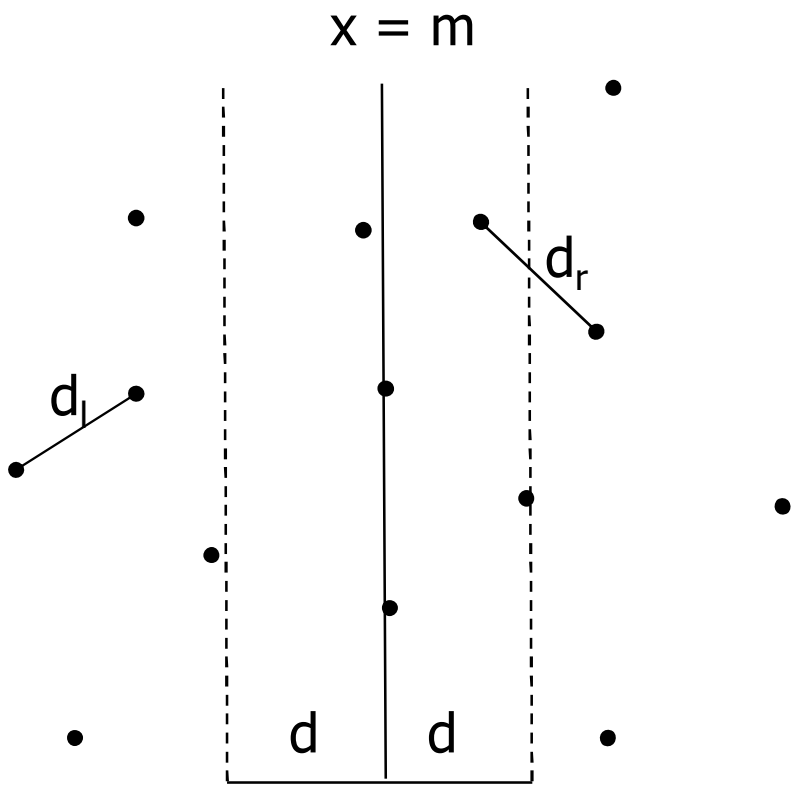
BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

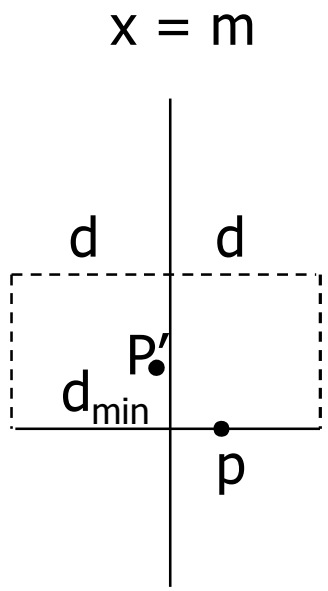
- Áp dụng chiến lược chia để trị tìm cặp điểm gần nhau nhất như sau:
  - Chia tập điểm đã cho làm 2 tập
  - Tìm các cặp điểm gần nhau nhất trong mỗi tập
  - Tìm cặp điểm gần nhau nhất mà có các đỉnh (điểm) của nó tương ứng thuộc mỗi tập được chia
  - Tìm cặp nhỏ nhất trong 3 cặp trên

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

- Không mất tính tổng quát, giả sử P được sắp tăng theo hoành độ
- Gọi Q là tập điểm đã cho được sắp tăng theo tung độ y
- Chia P thành 2 tập con P_l và P_r tương ứng có $\lceil n/2 \rceil$ và $\lfloor n/2 \rfloor$ điểm bởi đường thẳng $x=m=P[\lceil n/2 \rceil - 1].x$
- Một số điểm của P_l và P_r có thể nằm trên đường thẳng x=m

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT





BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

- Gọi d_l và d_r là các khoảng cách ngắn nhất của các cặp tương ứng trong P_l và P_r, tìm $d=\min(d_l,d_r)$
- Tìm cặp điểm gần nhau nhất có 2 điểm tương ứng thuộc 2 phần đối nhau theo đường thẳng $x=m$ (các điểm này chỉ thuộc trong phần giữa 2 đường nét dứt, là điểm có hoành độ $|x - m| < d$), gọi khoảng các giữa chúng là d_c
- Lấy $d_{min}=\min(d, d_c)$

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

- Tìm d_c như sau:
  - Xét tập S các điểm nằm giữa 2 đường nét đứt, các điểm này sắp theo thứ tự tăng của tung độ y
  - Khởi đầu d_{min}=d, gọi p là một điểm trong S, nếu có P' đi sau p mà hiệu các tung độ nhỏ hơn d_{min} thì xác định lại d_{min} là khoảng cách giữa p và p'

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

ALGORITHM EfficientClosestPair(P, Q, n)

1 **if** $n \le 3$

2 return the minimal distance found by the brute-force algorithm

3 **else**

4 copy the first $\lceil n/2 \rceil$ points of P to array P_l

5 copy the same $\lceil n/2 \rceil$ points from Q to array Q_l

6 copy the remaining $\lfloor n/2 \rfloor$ points of P to array P_r

7 copy the same $\lfloor n/2 \rfloor$ points from Q to array Q_r

8 $d_l \leftarrow$ EfficientClosestPair(P_l, Q_l, $\lceil n/2 \rceil$)

9 $d_r \leftarrow$ EfficientClosestPair(P_r, Q_r, $\lfloor n/2 \rfloor$)

10 $d \leftarrow \min\{d_l, d_r\}$

11 $m \leftarrow P[\lceil n/2 \rceil - 1].x$

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

ALGORITHM EfficientClosestPair(P, Q, n) //tiếp theo

```
1  if n ≤ 3
2       return the minimal distance found by the brute-force algorithm
3  else
       -----------------
12      copy all the points of Q for which |x − m| < d into array S[0..num − 1]
13      dminsq ←d²
14      for i ←0 to num − 2 do
15          k←i + 1
16          while k ≤ num − 1 and (S[k].y − S[i].y)² < dminsq
17              dminsq ←min((S[k].x − S[i].x)²+ (S[k].y − S[i].y)², dminsq)
18              k←k + 1
19 return sqrt(dminsq)
```

BÀI TOÁN TÌM CẶP ĐIỂM GẦN NHAU NHẤT

- Gọi T(n) là độ phức tạp của thuật giải, thì

$$T(n)=\begin{cases} O(1), n=1 \\ 2T(n/2)+O(n), n>1 \end{cases}$$

trong đó O(n) là tổng chi phí của các lệnh copy và tìm d_{min} theo tập S của các dòng lệnh 14-18

- Do a=2, b=2, d=1, $a=b^d$, nên

$$T(n)=O(n^d \log_2 n)= O(n\log_2 n)$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Đọc chương 5 (Divide -and -conquer), sách Levitin
- Đọc bài toán nhân 2 ma trận, QuickSort
- Giải bài toán "tìm dãy con của một dãy có tổng lớn nhất" bằng trực tiếp và chia để trị
- Làm bài tập về nhà đã cho trong DS bài tập
- Bài thực Hành: MergeSort và tìm cặp điểm gần nhau nhất