Tăng cường ảnh trong miền tần số

Image Enhancement
Frequency domain methods

Tăng cường ảnh trong miền tần số

- Khái niệm lọc dễ dàng nhận thấy trong miền tần số. Giúp tăng cường ảnh *f(m,n) dựa vào cơ sở* DFT *F(u,v)* .
- Tích chặp

Ảnh tăng cường

PSS

$$g(m,n) = h(m,n)*f(m,n)$$

Ảnh

.

Miền tần số

- Chúng ta có thể thiết kế hàm tương ứng *H(u,v)* and và cài đặt việc tang cương trong miền tần số như

Hàm biến đổi

Ảnh tang cường

$$G(u,v) = H(u,v)*F(u,v)$$

Ảnh

Biến đổi Fourier 1-d

- Cho dãy 1-d s[*k*], *k={…,-1,0,1,2,…,}*
- Biến đổi Fourier

$$S\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\omega k} \qquad \omega \in \Re$$

- Biến đổi Fourier có chu kỳ 2π
- Biến đổi Fourier ngược

$$s[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega k}\,d\omega$$

Fourier 1-d

- Làm sao biến đổi Fourier của dãy *s*[*k*] liên quan biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]\,\delta(t-k)$$

continuous

discrete

continuous
delta function

- Biến đổi Fourier với thời gian liên tục

$$\widehat{S}(\omega) = \int_t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]\,\delta(t-k)\,e^{-j\omega t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\omega k} = S\left(e^{j\omega}\right)$$

Biến đổi Fourier 2-d của ảnh số

- Cho ma trận 2-d của ảnh

$$s[m,n], \quad m,n \in Z^2$$

- Biến đổi Fourier

$$S\left(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}\right) = \sum_{m-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[m,n] e^{-j\omega_x m - j\omega_y n} \qquad \omega_x, \omega_y \in \Re^2$$

- Biến đổi Fourier có chu kỳ 2π trong cả hai ω_x và ω_y
- Biến đổi Fourier ngược

$$s[m,n] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}\right) e^{j\omega_x m + j\omega_y n} d\omega_x d\omega_y$$

Biến đổi Fourier 2-d của ảnh số

- Làm sao biến đổi Fourier của dãy *s*[*m,n*] liên quan biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục

$$s(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[m,n]\,\delta_2(x-m,y-n)$$

continuous

discrete

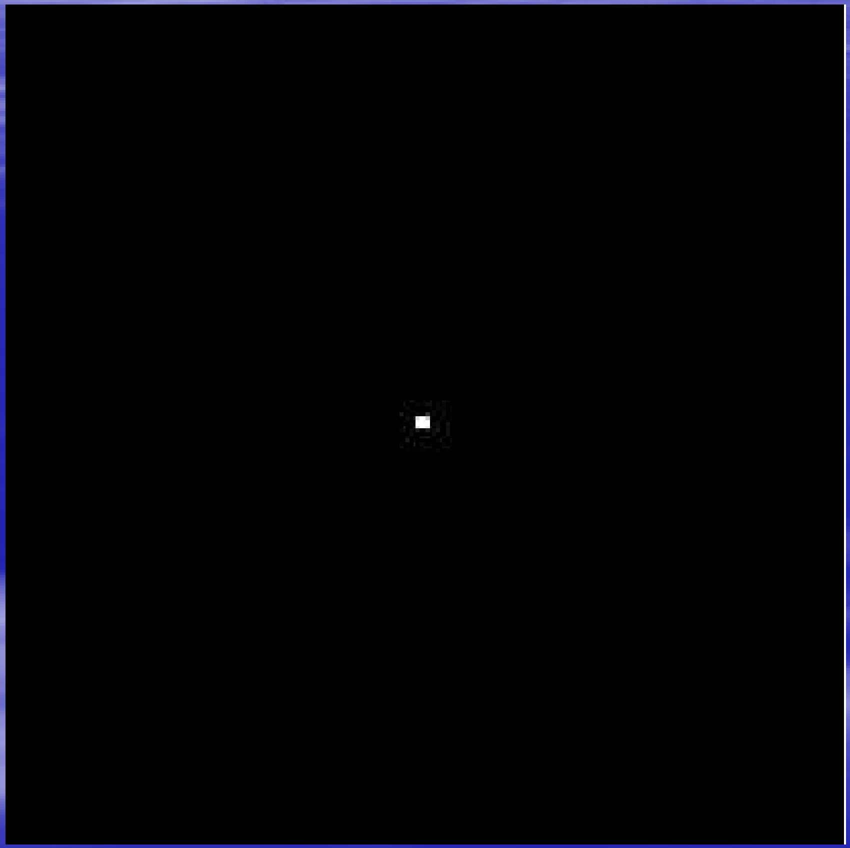
continuous delta function

- Biến đổi Fourier 2D trong không gian liên tục

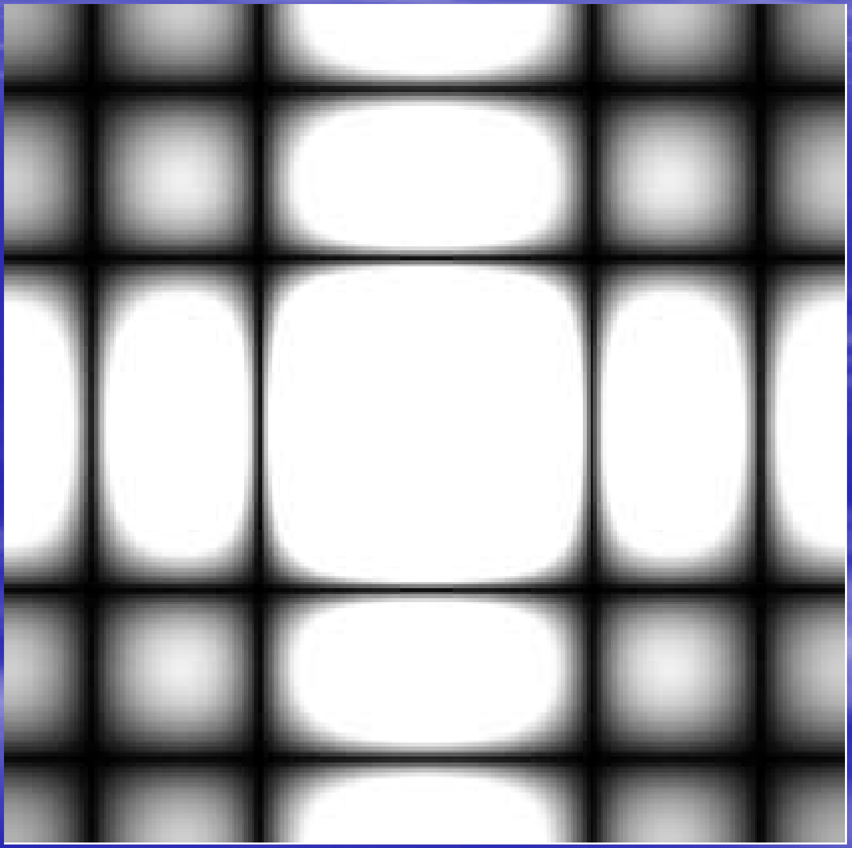
$$\widehat{S}(\omega_x,\omega_y)=\int_x\int_y\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[m,n]\,\delta_2(x-m,y-n)e^{-j\omega_x x-j\omega_y y}\,dxdy$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[m,n]e^{-j\omega_x m-j\omega_y n}=S\left(e^{j\omega_x},e^{j\omega_y}\right)$$

Ví dụ biến đổi Fourier

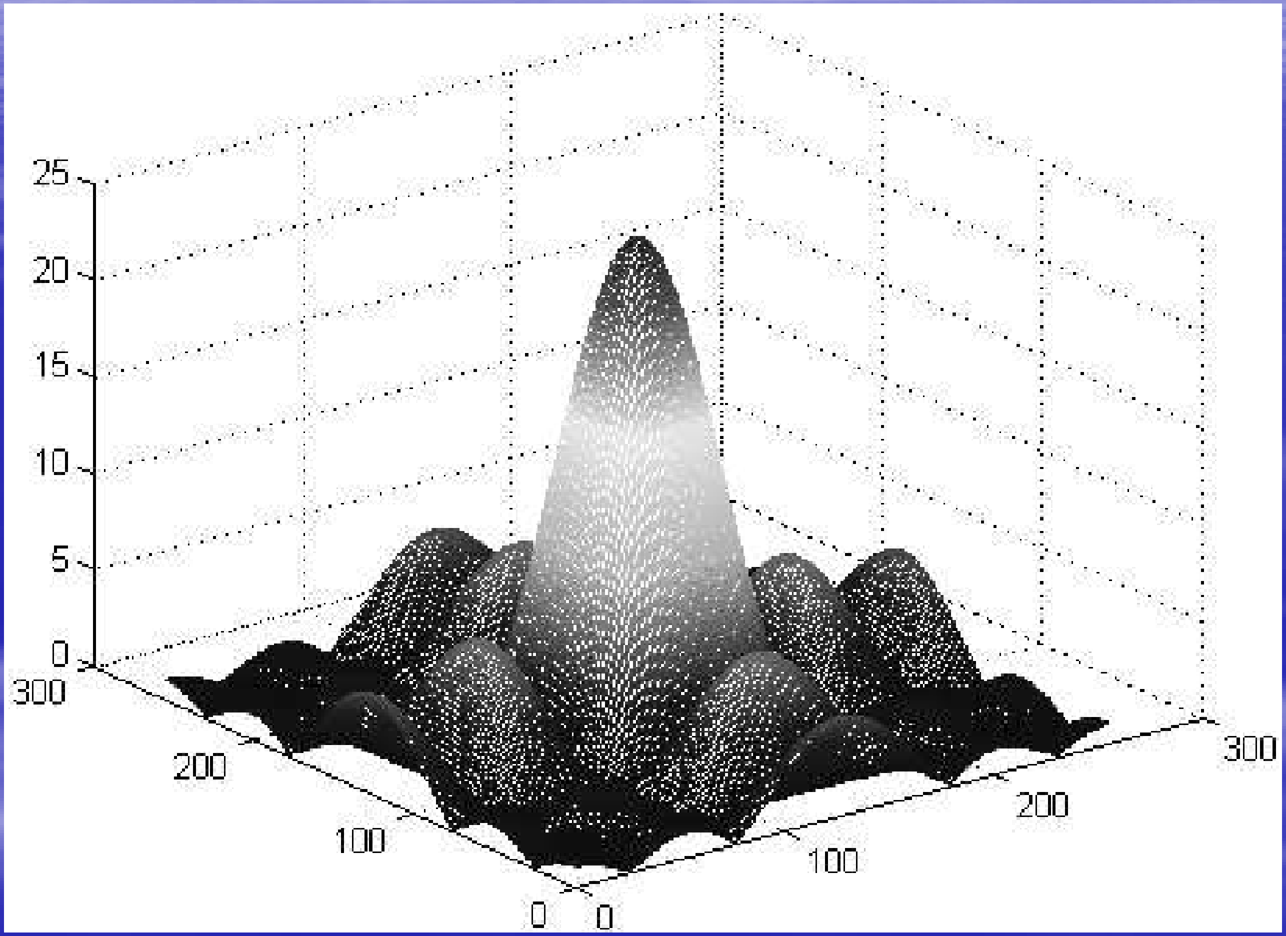


f(x,y)



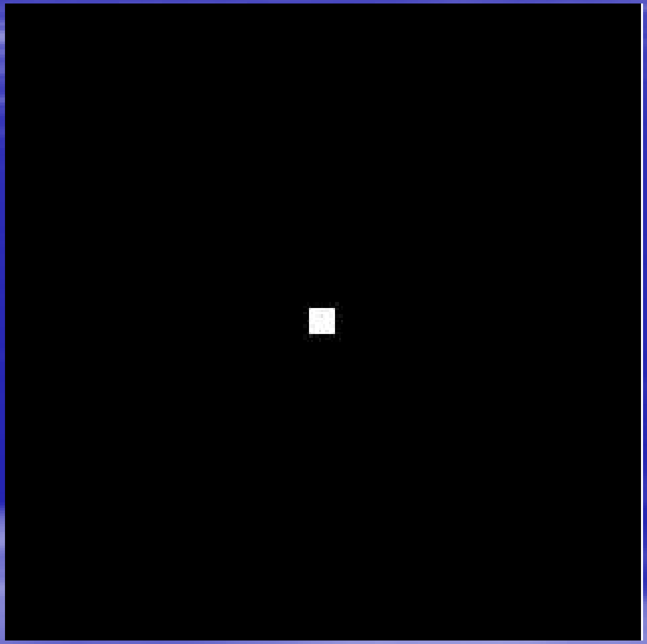
|*F(u,v)*| hiển thị như ảnh

Ví dụ biến đổi Fourier

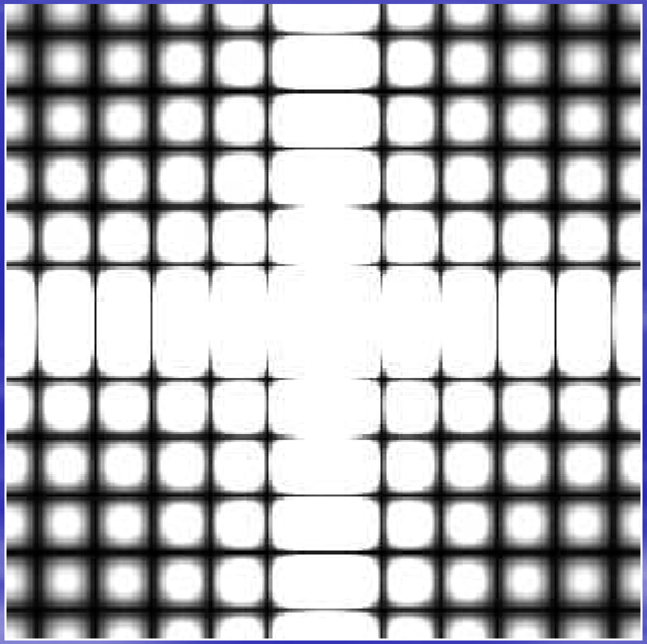


$|F(u,v)|$ hiển thị trong 3-D

Ví dụ biến đổi Fourier

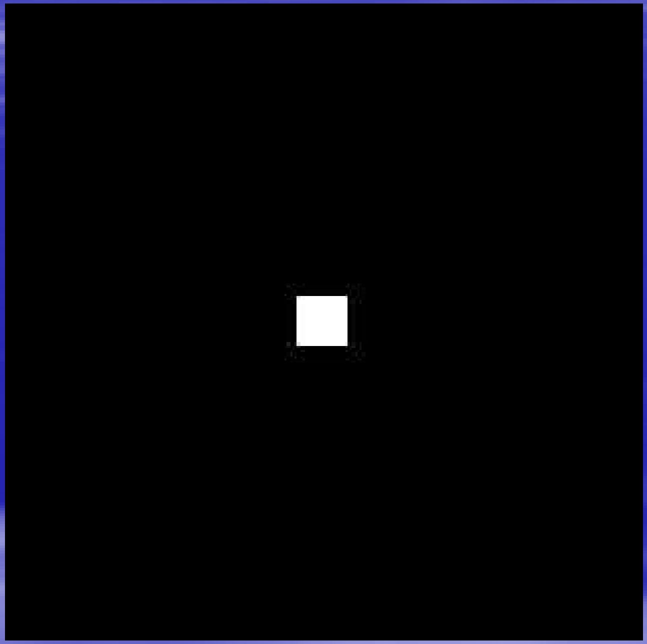


Ảnh

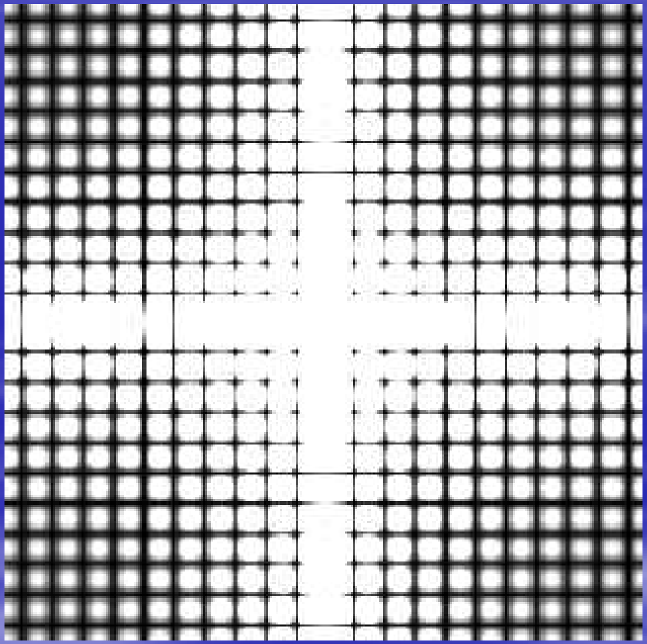


Phổ độ lớn

Ví dụ biến đổi Fourier

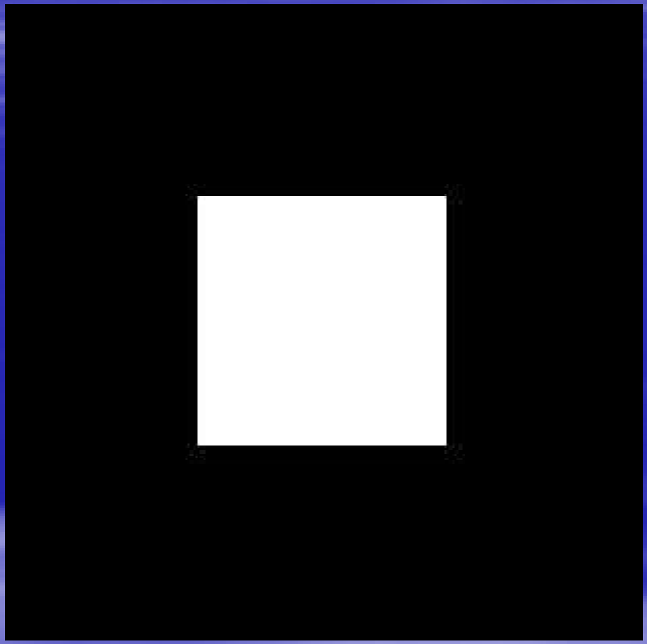


Ảnh

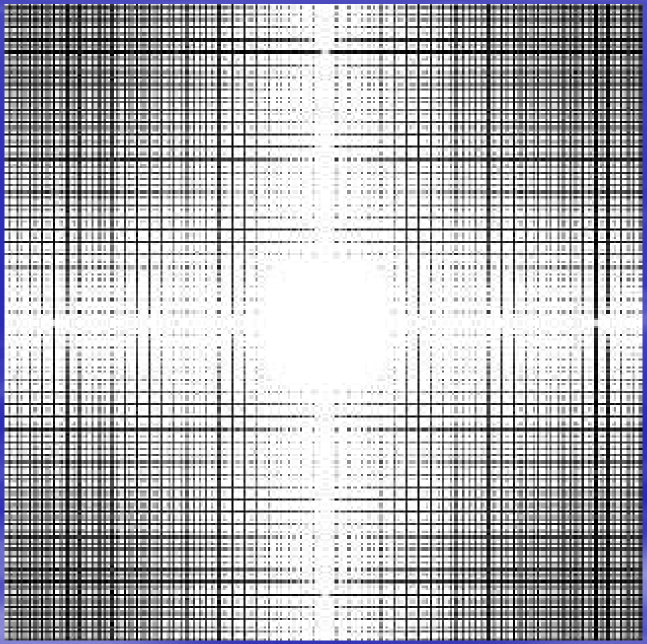


Phổ đọ lớn

Ví dụ biến đổi Fourier



Ảnh

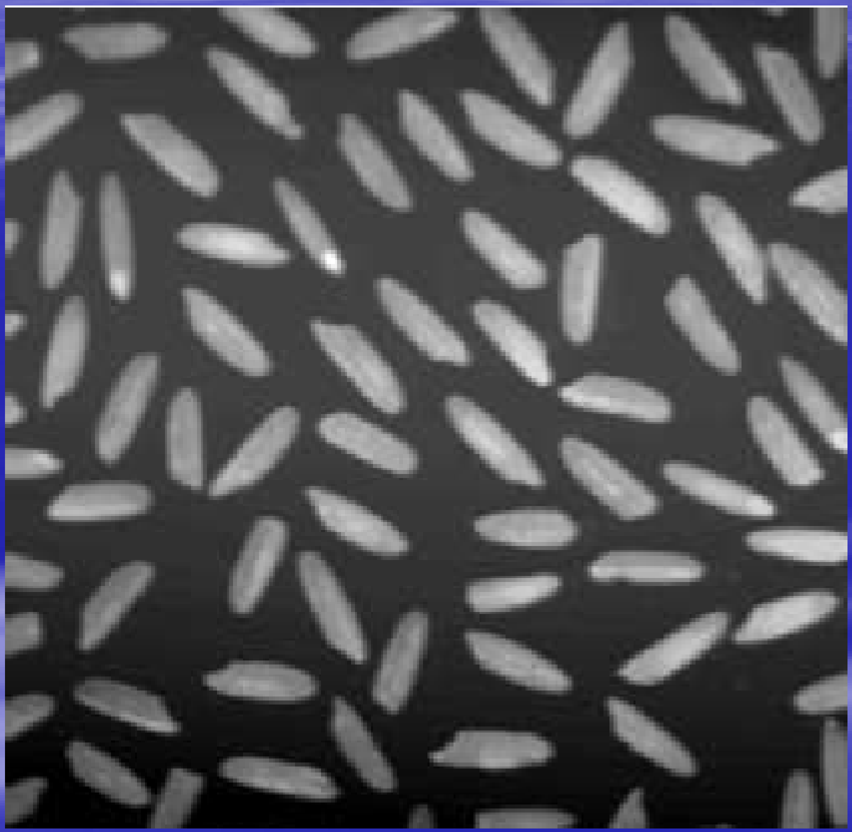


Phổ độ lớn

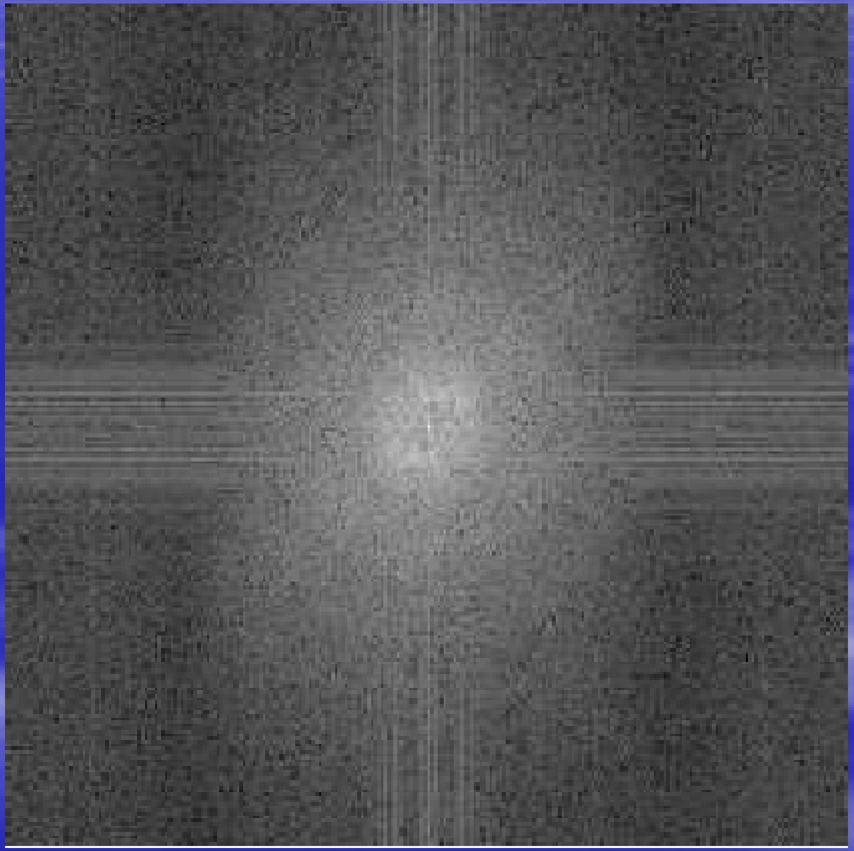
Biến đổi Fourier

- Kích thước đối tượng tăng trong miền không gian, tương ứng “kích thước” trong miền tần số giảm.

Biến đổi Fourier của ảnh “gạo”

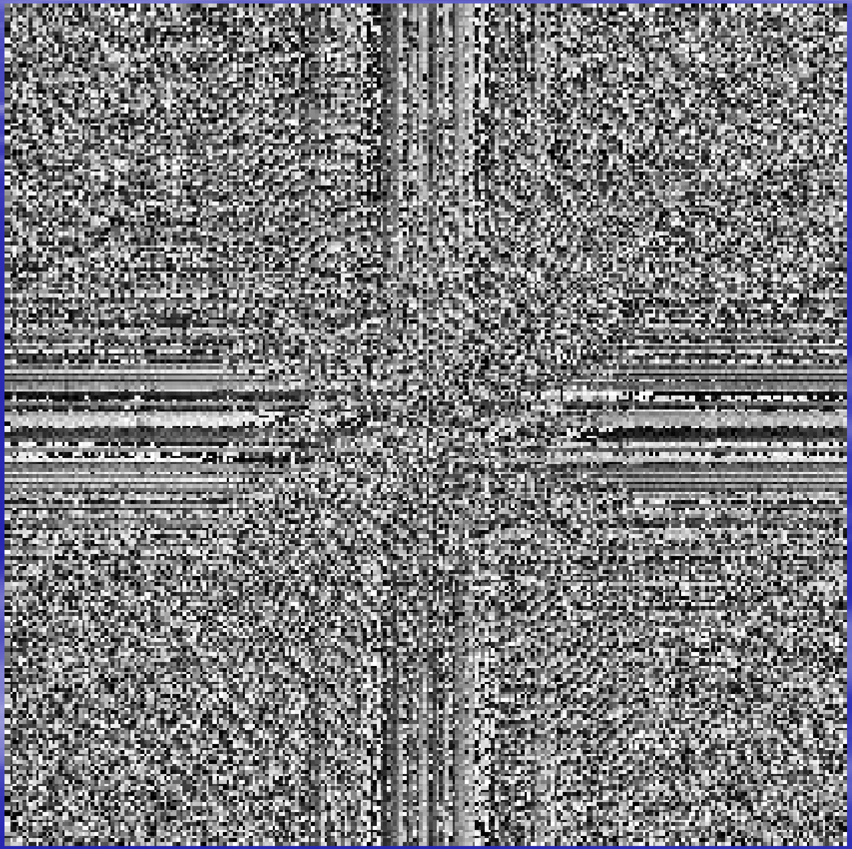


f(x,y)



$|F(u,v)|$

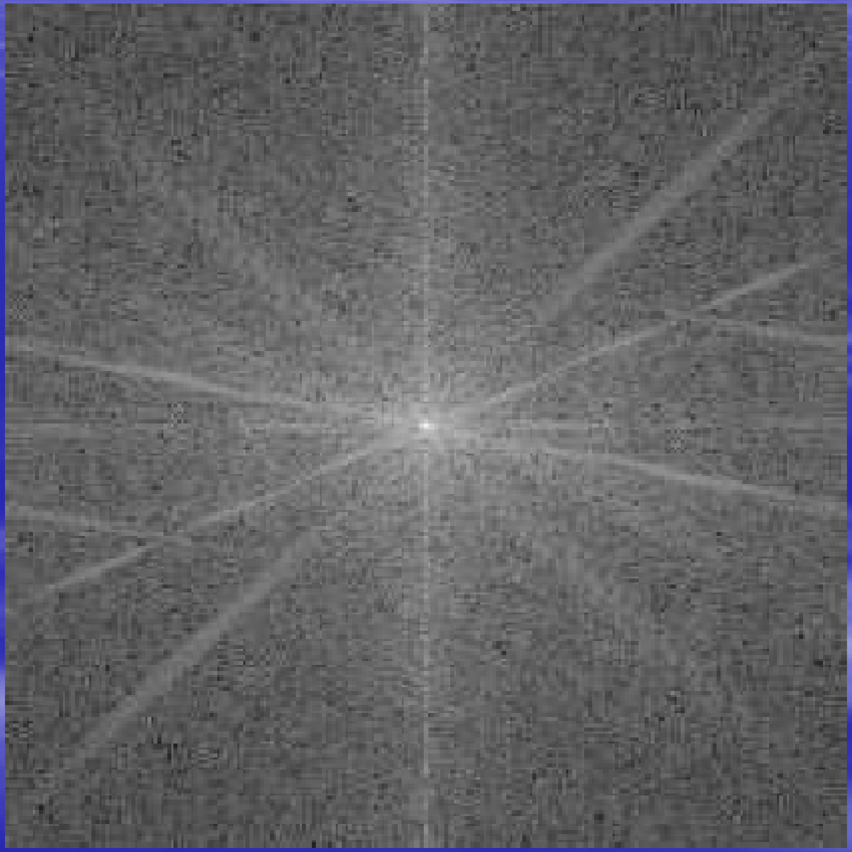
Biến đổi Fourier của ảnh "gạo"



$\angle F(u,v)$

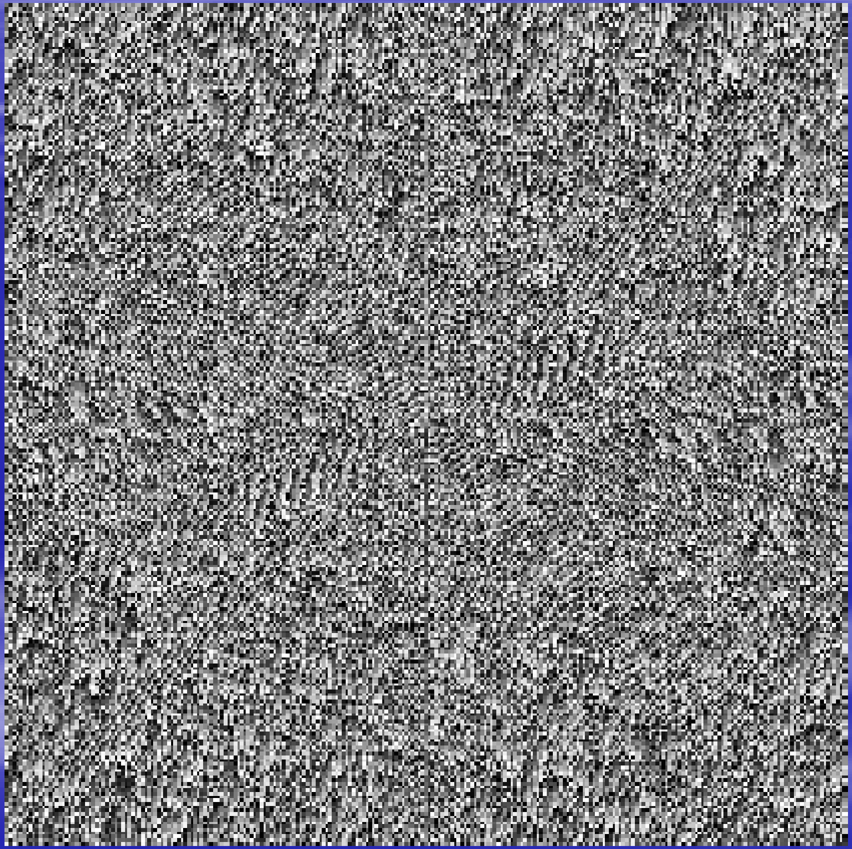
Biến đổi Fourier của ảnh

g(x,y)



|*G(u,v)*|

Biến đổi Fourier của ảnh



$\angle G(u,v)$

Thông tin về pha của ảnh

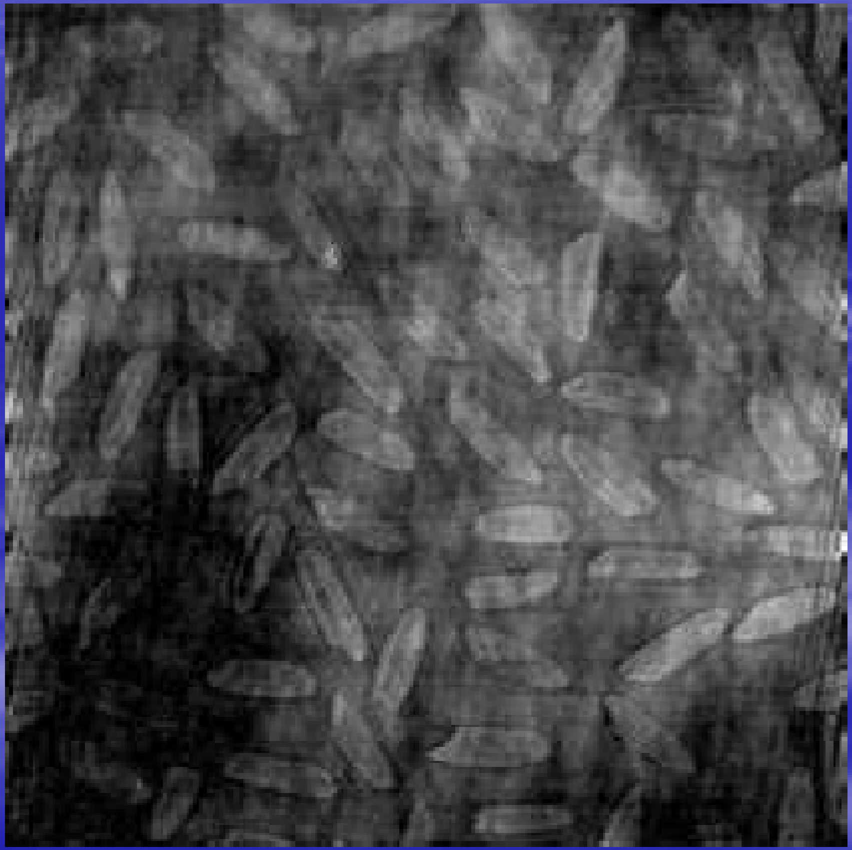
- Hình ảnh được hình thành từ phổ độ lớn của gạo và phổ pha của máy ảnh người chụp ảnh

$$\mathcal{F}^{-1}(|F(u,v)| * \exp(i\angle G(u,v)))$$

Thông tin về pha của ảnh

- Hình ảnh được hình thành từ phổ độ lớn của người chụp ảnh và phổ pha của gạo

$$\mathcal{F}^{-1}(|G(u,v)| * \exp(i\angle F(u,v)))$$



Biến đổi Fourier rời rạc 1-D (DFT)

- Đối với hình ảnh rời rạc ở mức độ hữu hạn, biến đổi Fourier là DFT.
- Chúng ta sẽ tìm hiểu đối với trường hợp 1-D, sẽ dễ dàng hơn để hình dung.
- Giả sử { *f*(0), *f*(1), …, *f*(*N*-1)} là dãy/ vector/ảnh1-D. *N*-điểm DFT là

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi\frac{nu}{N}}, \qquad n = 0,1,\ldots N-1.$$

- DFT ngược(được chuẩn):

$$F(u) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi\frac{nu}{N}}, \qquad u = 0,1,\ldots N-1.$$

DFT

- Ví dụ: $f(n) = \{1,-1,2,3\}$ (N=4)

$$F(0) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{0} = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 5.$$

$$F(1) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-j2\pi\frac{n}{4}} = 1e^{0} + (-1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 1 + (0 + j) + 2(-1) + 3(0 + j) = -1 + 4j.$$

$$F(2) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-j2\pi\frac{2n}{4}} = 1e^{0} + (-1)e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + 3e^{-j3\pi}$$

$$= 1 + 1 + 2 + (-3) = 1.$$

$$F(3) = \sum_{n=0}^{3} f(n)e^{-j2\pi\frac{3n}{4}} = 1e^{0} + (-1)e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} + 3e^{-j\frac{9\pi}{2}}$$

$$= 1 + (0 - j) + 2(-1) + 3(0 - j) = -1 - 4j.$$

DFT

- *F*(*u*) là phức cho dù *f*(*n*) là thực.
- Cài đặt trực tiếp DFT thì độ phức tạp là $O(N^2)$.
- Có cách cài đặt DFT hiệu quả hơn bằng cách dùng thuật toán **Fast Fourier Transform** (FFT). Đây không phải là một biến đổi mới.

DFT

- FFT hiệu quả nhất khi $N = 2^m$ (hoặ mũ của cơ sở số nguyên/ cơ số). Các thuật toán cơ số-2 được sử dụng phổ biến nhất.
- Độ phức tạp của FFT theo thuật toán cơ số-2 là $N\log(N)$ với cộng và $\frac{1}{2}N\log(N)$ với nhân. Cuối cùng là $N\log(N)$.
- Trong MATLAB, có lệnh `fft`.

Biến đổi Fourier rời rạc 2-D (2D DFT)

- Những biến đổi Fourier thì phù hợp cho hình ảnh liên tục trong miền, và có lẽ của vô hạn.
- Đối với hình ảnh rời rạc của mức độ hữu hạn, biến đổi Fourier rời rạc 2-D là 2-D DFT.

2-D DFT

- Giả sử *f*(*m*,*n*), *m* = 0,1,2,…*M*-1, *n* = 0,1,2,…*N*-1, là ảnh *N*×*M* rời rạc. Thì 2-D DFT *F*(*u*,*v*) là:

$$F(u,v) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f(m,n)e^{-j2\pi\left(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N}\right)},$$
$$u = 0,1,\ldots M-1, v = 0,1,\ldots N-1$$

- DFT ngược là:

$$f(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{v=0}^{N-1}\sum_{u=0}^{M-1} F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N}\right)},$$
$$m = 0,1,\ldots M-1, n = 0,1,\ldots N-1$$

2-D DFT

- Đối với hình ảnh rời rạc của mức độ hữu hạn, Biến đổi Fourier là 2-D DFT.
- Matlab cung cấp hàm `fft2` cho 2-D DFT.

2-D DFT)

- Trong trường hợp *M=N*, chúng ta có DFT:

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f(m,n)e^{-j2\pi\left(\frac{mu+nv}{N}\right)},$$

$$f(m,n) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{mu+nv}{N}\right)}$$

Ví dụ chặp

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 8 & 2\\ 7 & -2 & -3 & 1 & -5\\ 0 & 2 & \mathbf{-3} & -1 & -1\\ 6 & -3 & -2 & 0 & 1\\ 8 & 2 & -2 & -1 & 4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -6 & 16 & -17 & 4 & 2\\ 6 & -18 & 12 & -1 & -15 & 19 & -3\\ -7 & 4 & 4 & 6 & -3 & 10 & -4\\ 6 & -17 & 20 & \mathbf{2} & -6 & -2 & -5\\ 2 & -11 & 10 & 4 & -2 & -10 & 4\\ -8 & -2 & 16 & 0 & -8 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$g(m,n) = f(m,n) * h(m,n) = \sum_{t=-1}^{1}\sum_{s=-1}^{1} h(s,t) f(m-s, n-t)$$

Ví dụ chặp

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 & 2 \\ 7 & -2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & \mathbf{-3} & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{(mask)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 16 & -17 & 4 & 2 \\ 6 & -18 & 12 & -1 & -15 & 19 & -3 \\ -7 & 4 & 4 & 6 & -3 & 10 & -4 \\ 6 & -17 & 20 & \mathbf{2} & -6 & -2 & -5 \\ 2 & -11 & 10 & 4 & -2 & -10 & 4 \\ -8 & -2 & 16 & 0 & -8 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$f(m,n) \quad \text{(mask)} \quad h(-m,-n) = g(m,n)$$

Tong matlab, nếu *f và h là 02 ma trận mô tả cho ảnh*, **conv2(f, h)** cho tích chặp 2D của ảnh *f và h.*

Tính chất của DFT

- **Tuyến tính** (phân bố và tỷ lệ): cả trong miền liên tục và rời rạc.
  - DFT của tổng của hai ảnh là tổng DFTs từng ảnh.

$$\mathcal{F}\left[f_1(m,n)+f_2(m,n)\right]=\mathcal{F}\left[f_1(m,n)\right]+\mathcal{F}\left[f_2(m,n)\right]$$

  - DFT của một ảnh tỷ lệ là DFT của ảnh ban đầu tỷ lệ bởi các yếu tố tương tự

$$\mathcal{F}\left[af(m,n)\right]=a\mathcal{F}\left[f(m,n)\right]$$

Tính chất của DFT

- **Tỷ lệ trên không gian Spatial scaling** (chỉ dung cho miền liên tục):

$$\mathcal{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v)\Rightarrow \mathcal{F}\left[f(ax,by)\right]=\frac{1}{|ab|}F\left(\tfrac{u}{a},\tfrac{v}{b}\right)$$

  - Nếu *a*, *b* > 1, ảnh "co lại" và phổ "nở”

Tính chất của DFT

- Chu kỳ (chỉ dành cho trường hợp rời rạc): DFT và nghịch đảo của nó là có kỳ (trong cả hai chiều), với khoảng thời gian N.

  $$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$$

  - *Tương tự,*

  $$f(m,n) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{mu+nv}{N}\right)}$$

  cũng là N-chu kỳ trong *m* và *n*.

Tính chất của DFT

- Sự phân rã (cả hai liên tục và rời rạc): Phân rã 2D DFT thành các 1D DFT

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}f(m,n)e^{-j2\pi\left(\frac{mu+nv}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}e^{-j2\pi\left(\frac{mu}{N}\right)}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)e^{-j2\pi\left(\frac{nv}{N}\right)}}_{\tilde{f}(m,v)\text{:1D DFT applied to each row of } f(m,n)}$$

$$=\frac{1}{N}\underbrace{\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{f}(m,v)e^{-j2\pi\left(\frac{mu}{N}\right)}}_{\text{1D DFT applied to each column of } \tilde{f}(m,v)}$$

Tính chất của DFT

- *Tương tự,*

$$f(m,n) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{mu}{N}\right)} \underbrace{\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{nv}{N}\right)}}_{\text{1D DFT applied to each rowof } F(u,v)}}_{\text{1D DFT applied to each column of previous result}}$$

Tính chất của DFT

- **Tích chặp: Trong liên không gian liên tục, biến đổi Fourier của chập là sản phẩm của các Bốn biến đổi.**

$$\mathcal{F}[f(x,y)*\mathrm{h}(x,y)] = F(u,v)\ H(u,v)$$

  - Do đó, nếu

$$g(x,y) = f(x,y)*h(x,y)$$

  là kết quả của biến đổi LTI với PSF $h(x,y)$ cho ảnh đầu vào $f(x,y)$, thì

$$G(u,v) = F(u,v)*H(u,v)$$

Tính chất của DFT

- Mặt khác, Phổ *G*(*u*,*v*) là tích của phổ đầu vào *F*(*u*,*v*) và hàm biến đổi *H*(*u*,*v*).
- Vì vậy, FT có thể được sử dụng như một công cụ tính toán để đơn giản hóa các tích chập.

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y) * h(x,y) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f(x,y) * h(x,y)]\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{F(u,v)H(u,v)\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f(x,y)]\mathcal{F}[h(x,y)]\}
\end{aligned}
$$

Tính chất của DFT

- Tương quan: Trong liên tục-không gian, mối tương quan giữa hai hình ảnh f (x, y) và h (x, y) được định nghĩa là :

$$r_{fh}(x,y) = f(x,y) \circ h(x,y) = f^*(-x,-y) * h(x,y)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha,\beta) h(x+\alpha, y+\beta) d\alpha d\beta$$

- Vì thế,

$$\mathcal{F}[r_{fh}(x,y)] = \mathcal{F}[f(x,y) \circ h(x,y)]$$
$$= \mathcal{F}[f^*(-x,-y) * h(x,y)]$$
$$= \mathcal{F}[f^*(-x,-y)]\mathcal{F}[h(x,y)]$$
$$= F^*(u,v)H(u,v)$$

Tính chất của DFT

- $r_{ff}(x,y)$ *thường được gọi là tự tương quan của ảnh f(x, y) (với chính nó) và* $r_{fh}(x,y)$ *được gọi là tương quan chéo giữa* $f(x,y)$ and $h(x,y)$.
- Nôm na, $r_{fh}(x,y)$ *đo mức độ tương quan giữa ảnh* $f(x,y)$ và $h(x,y)$. Giá trị $r_{fh}(x,y)$ *lớn nghĩa là* hai ảnh tương tự như.

Tính chất của DFT

- Thường được dùng cho việc so khớp mẫu, với $h(x,y)$ là hình dáng mẫu mà chúng ta muốn phát hiện trong ảnh $f(x,y)$.
- Xác định những nơi $r_{fh}(x,y)$ lớn (đỉnh của hàm tương quan chéo) thì có khả năng là nơi xuất hiện hình dạng $h(x,y)$ trong ảnh $f(x,y)$.

Tính chất của DFT

- **Tính chất tích chặp cho ảnh rời rạc:** Giả sử

  $f(m,n)$, $m = 0,1,2,\ldots M\text{-}1$, $n = 0,1,2,\ldots N\text{-}1$

  là ảnh $N \times M$ và

  $h(m,n)$, $m = 0,1,2,\ldots K\text{-}1$, $n = 0,1,2,\ldots L\text{-}1$

  là ảnh $N \times M$. Thì

  $$g(m,n) = f(m,n) * h(m,n)$$

  là ảnh $(M+K-1) \times (N+L-1)$.

Tính chất của DFT

- Vì vậy, nếu chúng ta muốn có một tính chất tích chập cho ảnh rời rạc --- cái gì đó như

  $$g(m,n) = f(m,n)*h(m,n)$$

  Chúng ta cần có $G(u, v)$ vói kích thước $(M+K-1)\times(N+L-1)$.
- Do đó, chúng ta cũng cần $F(u, v)$ và $H(u, v)$ cũng có kích thước tương tự, như $(M+K-1)\times(N+L-1)$

Tính chất của DFT

- Do đó chúng ta tính **zero-pad** của ảnh *f*(*m*, *n*), *h*(*m*, *n*), sẽ có kích thước $(M+K-1)\times(N+L-1)$. Để $f_e(m,n)$ và $h_e(m,n)$ là zero-pad (hoặc mở rộng ảnh).

  Với 2D-DFT của *F*(*u*, *v*) và *H*(*u*, *v*), có cùng kích thước $(M+K-1)\times(N+L-1)$. Thì

$$
\begin{aligned}
g(m,n) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(u,v)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(u,v)H(u,v)\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f_e(m,n)]\mathcal{F}[h_e(m,n)]\}
\end{aligned}
$$

- Điều này cũng tương tự cho ảnh rời rạc.

Tính chất của DFT

- **Dịch chuyển:** (rời rạc và liên tục):

$$\mathcal{F}\{f(m-m_0,n-n_0)\}=F(u,v)e^{-j\frac{2\pi}{N}(um_0+vn_0)}$$

  - Chú ý $$\left|F(u,v)e^{-j\frac{2\pi}{N}(um_0+vn_0)}\right|=\left|F(u,v)\right|$$

    thì *f*(*m*, *n*) và *f*(*m*-*m*$_0$, *n*-*n*$_0$) có cùng phố độ lớn nhưng phổ của pha sẽ khác nhau.
  - Tương tự,

$$f(m,n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(u_0m+v_0n)}=\mathcal{F}^{-1}\{F(u-u_0,v-v_0)\}$$

Tính chất của DFT

- **Đối xứng liên hợp :** nếu *f*(*m*, *n*) là thực, thì *F*(*u*, *v*) là đối xứng liên hợp,

$$F(-u,-v) = F^*(u,v)$$

$$\Leftrightarrow |F(-u,-v)| = |F(u,v)| \quad \text{and} \quad \angle F(-u,-v) = -\angle F(u,v)$$

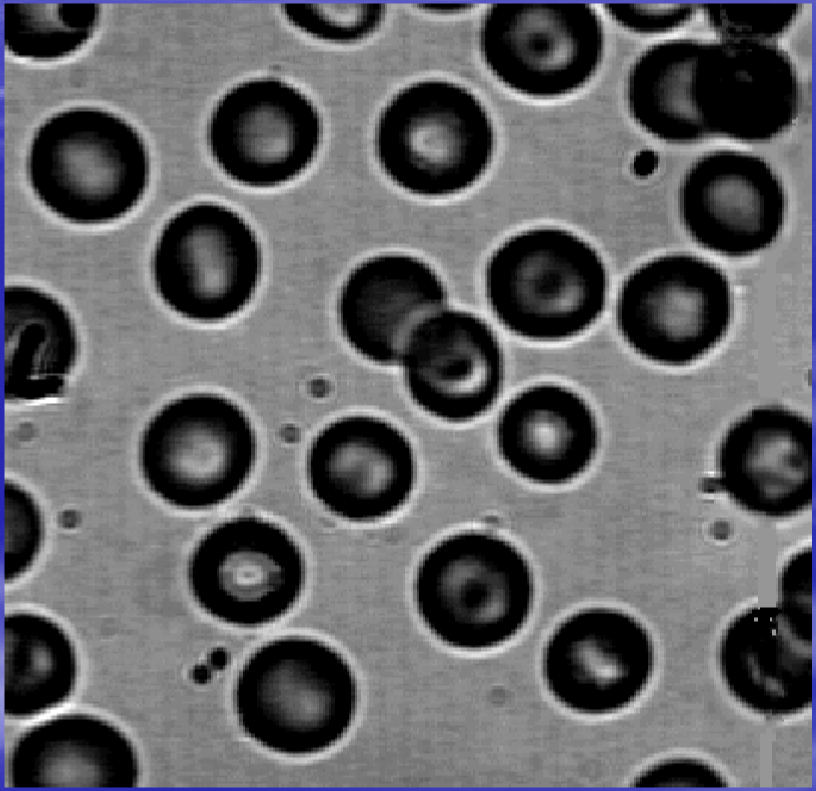
- Do đó thường hiển thị *F*(*u-N/2,v-N/2*), thay vì *F*(*u*, *v*), vì dễ hình dung tính đối xứng của phổ hơn.
- Trong Matlab dùng `fftshift`.

Tính chất của DFT

- **Tích:** (trong miền liên tục) Đây là hai trong những tính chất của tích chập. Phép nhân của hai ảnh tương ứng với chặp phổ của ảnh.

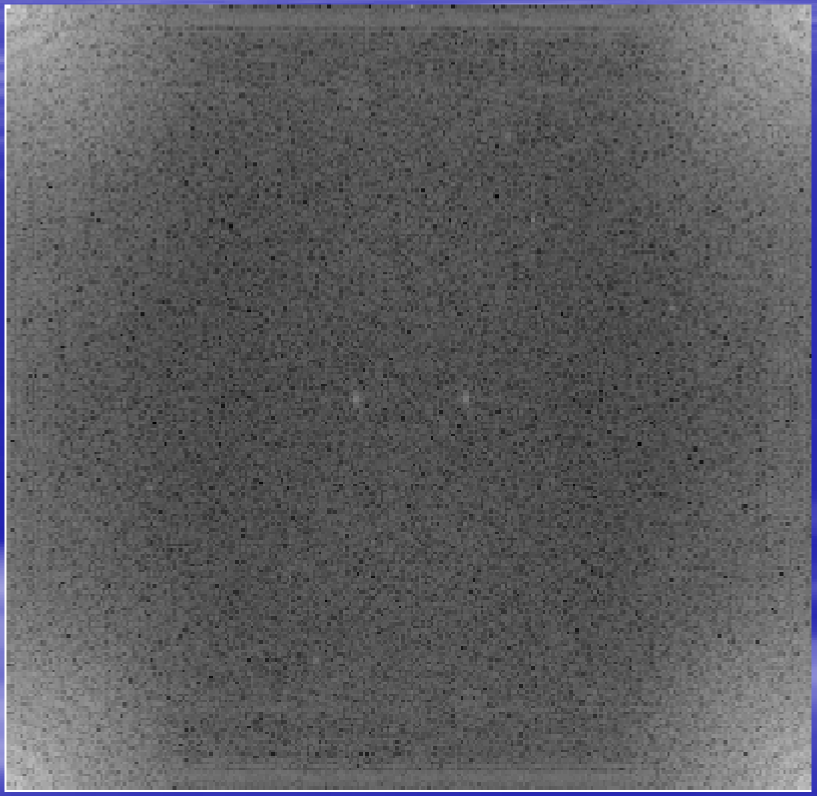
$$\mathscr{F}[f(x,y)\mathrm{h}(x,y)] = F(u,v)\,H(u,v)$$

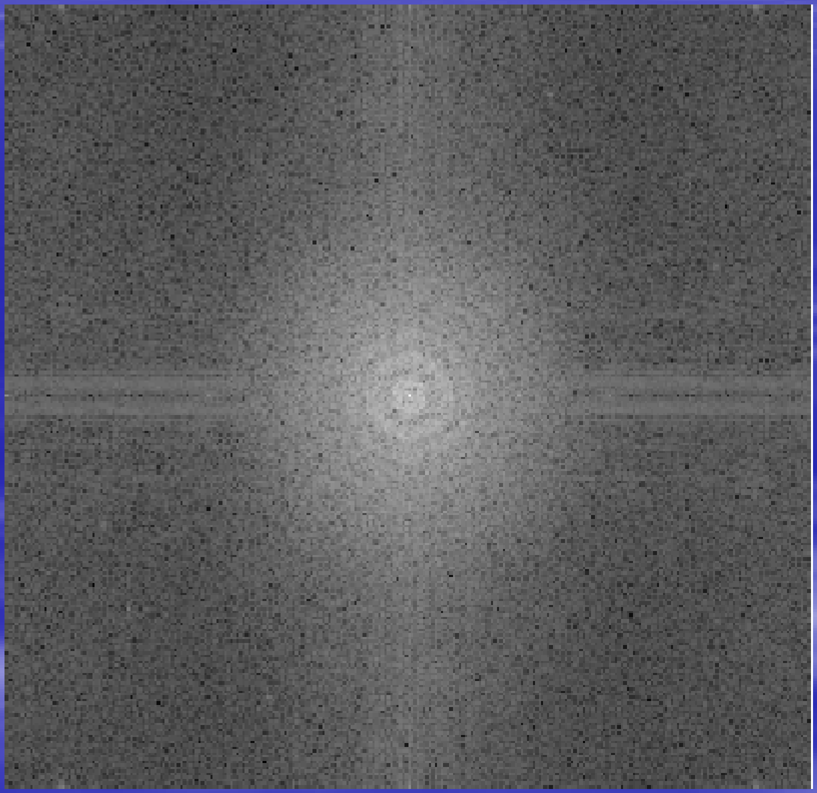
Phổ độ lớn "trung tâm"



$f(m,n)$

Phổ độ lớn “trung tâm”





$|F(u,v)|$ $|F(u-N/2,v-N/2)|$

Tính chất của DFT

- **Giá trị trung bình: giá trị điểm ảnh trung bình:**

$$\bar{f} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f(m,n)$$

chú ý (trường hợp $u = v = 0$):

$$F(0,0) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f(m,n) = N^2\bar{f} \Rightarrow \bar{f} = \frac{1}{N^2}F(0,0).$$

Tính chất của DFT

- **Đạo hàm:** (chỉ cho miền liên tục): Đạo hàm thường dùng phát hiện cạnh trong ảnh. Một cạnh là biên của các đối tượng và mô tả sự thay đổi đột ngột giá trị xám.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\} = (-j2\pi u)F(u,v)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\} = (-j2\pi v)F(u,v)$$

Tính chất của DFT

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right\} = (-4\pi^2 u^2)F(u,v)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right\} = (-4\pi^2 v^2)F(u,v)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -4\pi^2 (u^2 + v^2)F(u,v)$$

Bộ lọc Lowpass và Hipass

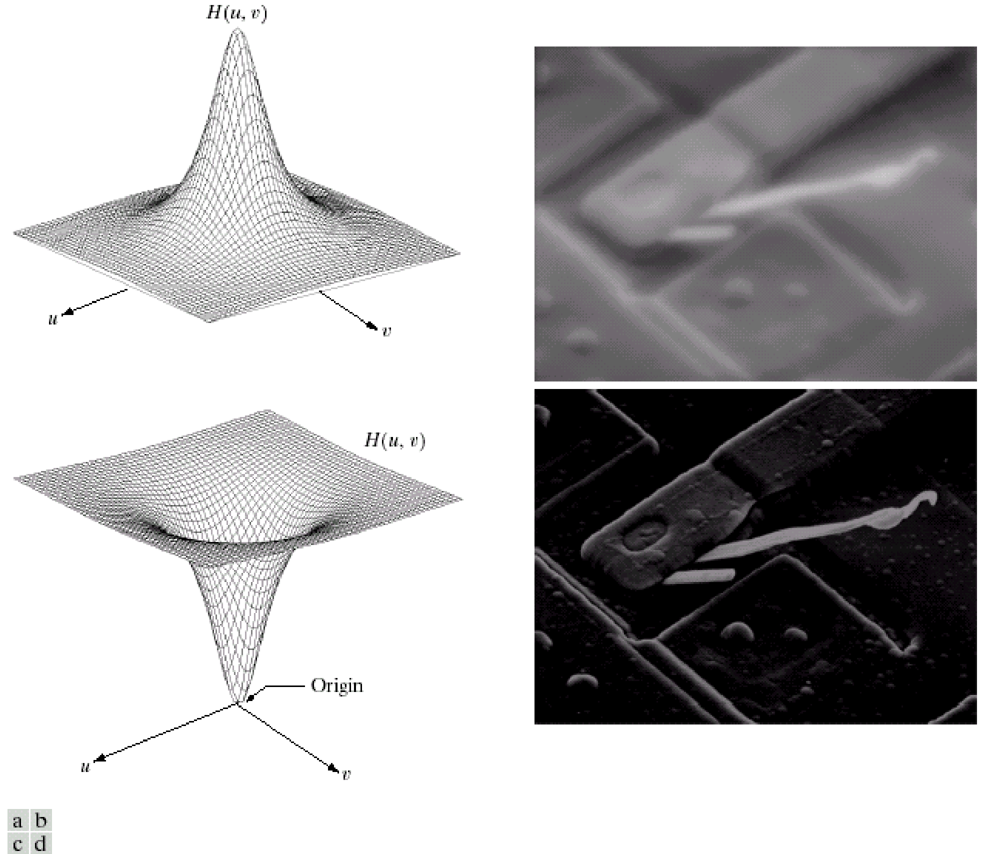
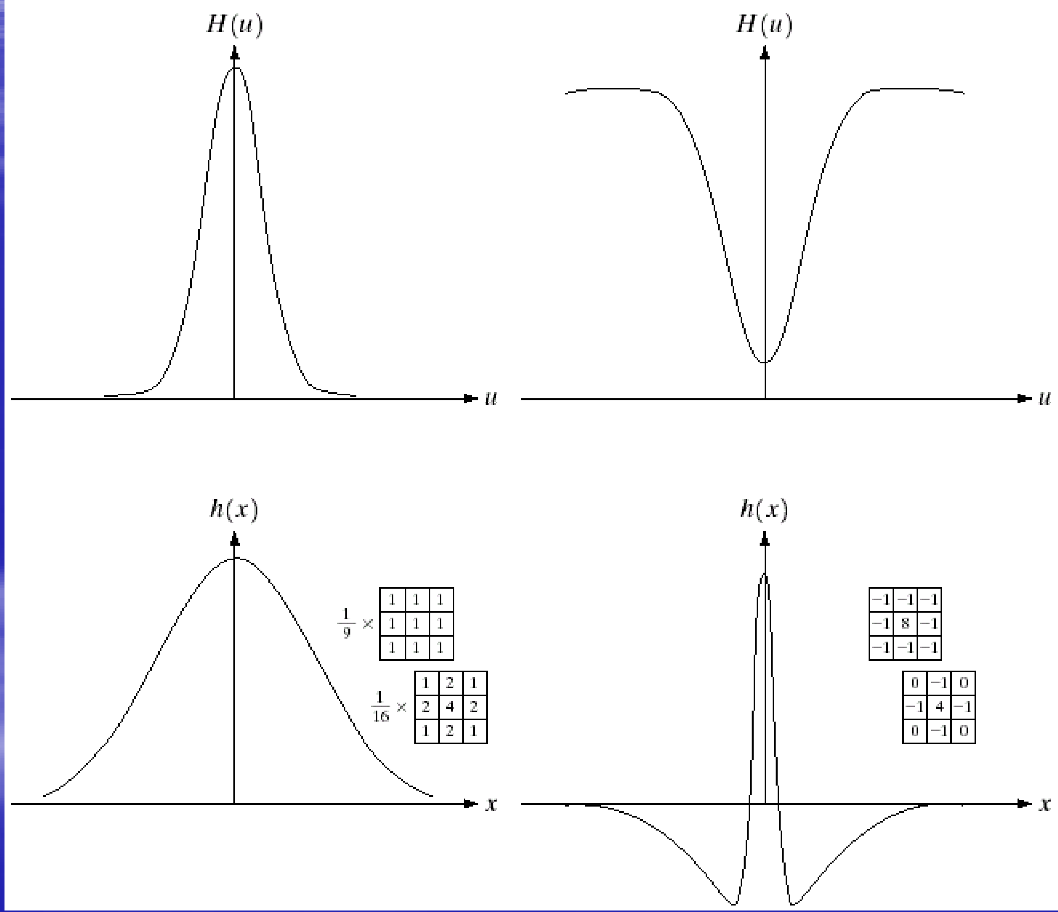


FIGURE 4.7 (a) A two-dimensional lowpass filter function. (b) Result of lowpass filtering the image in Fig. 4.4(a). (c) A two-dimensional highpass filter function. (d) Result of highpass filtering the image in Fig. 4.4(a).

Lọc trên miền tần số và trên miền không gian



a b
c d

FIGURE 4.9
(a) Gaussian frequency domain lowpass filter.
(b) Gaussian frequency domain highpass filter.
(c) Corresponding lowpass spatial filter.
(d) Corresponding highpass spatial filter. The masks shown are used in Chapter 3 for lowpass and highpass filtering.

Lọc Lowpass

- Cạnh và quá trình chuyển đổi hình dạng trong giá trị xám của ảnh đóng góp đáng kể vào nội dung tần số cao của biến đổi Fourier của nó.
- Các vùng có các giá trị màu xám tương đối đồng nhất trong ảnh đóng góp cho nội dung tần số thấp của biến đổi Fourier của nó.
- Do đó, một ảnh có thể được làm trơn trong miền tần số bằng cách giảm nội dung ở tần số cao của biến đổi Fourier của nó.
  Đây là lọc lowpass!

Lọc Lowpass lý tưởng

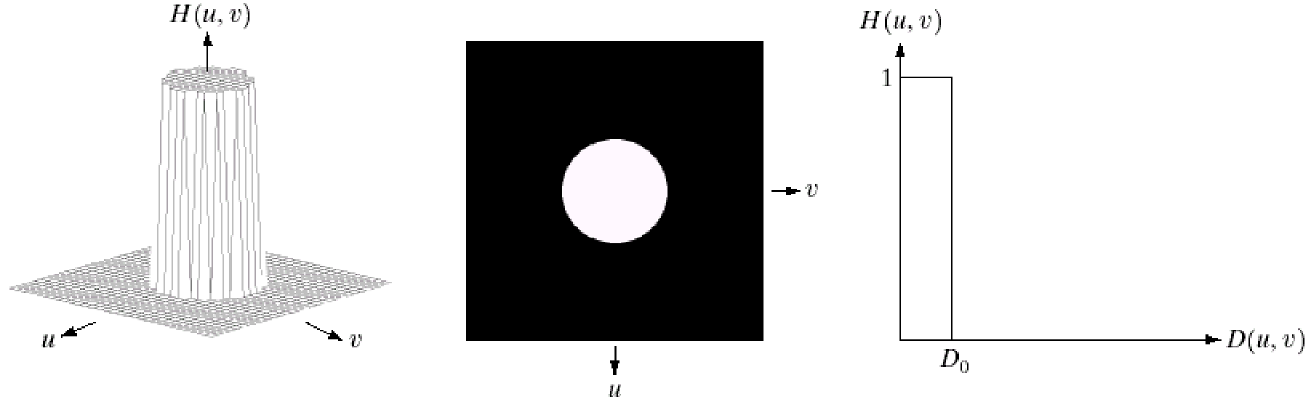


FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

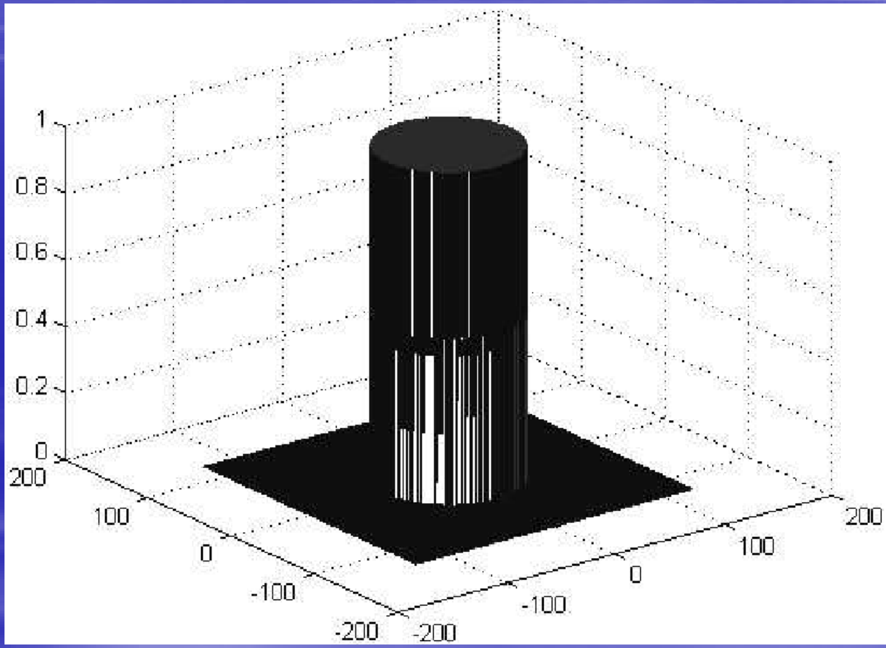
Lọc Lowpass lý tưởng

- Để đơn giản, chúng ta sẽ chỉ xem xét các bộ lọc thực và xuyên tâm đối xứng.
- Một bộ lọc lowpass lý tưởng với tần số cắt r_0:

$$H(u,v)=\begin{cases}1, \text{ if } \sqrt{u^2+v^2}\le r_0\\ 0, \text{ if } \sqrt{u^2+v^2}> r_0\end{cases}$$

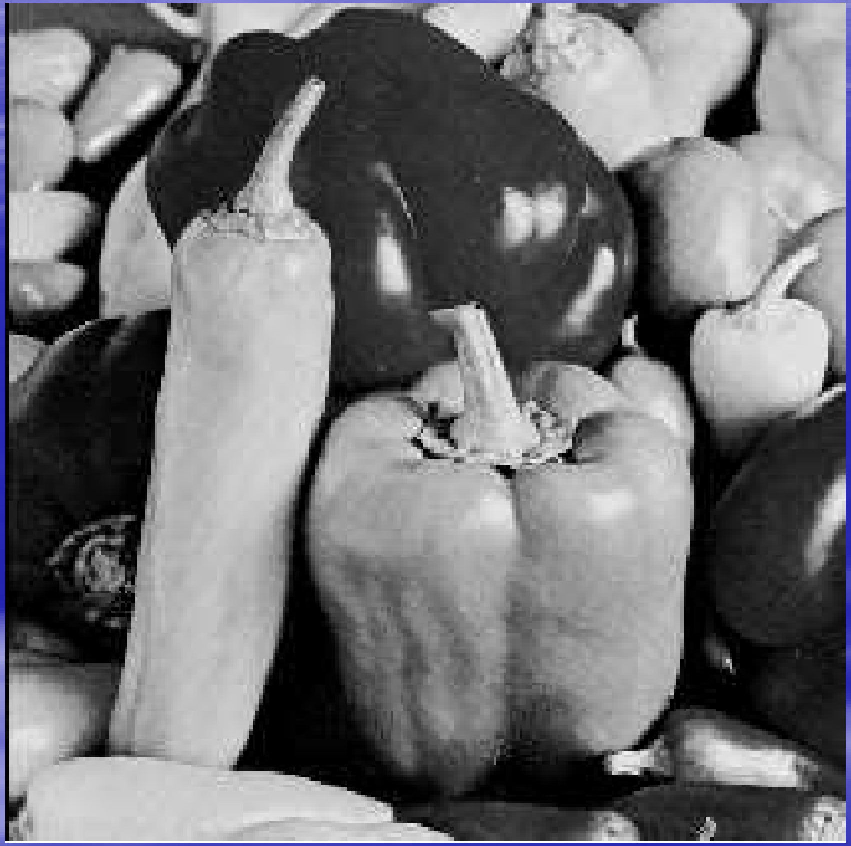
Lọc Lowpass lý tưởng

- Lưu ý gốc (0, 0) là ở trung tâm và không phải là gốc của ảnh (xem lại "fftshift" hoạt động).
- Việc chuyển đổi đột ngột từ 1 sang 0 của hàm truyền *H(u,v)* có thể không được thực hiện trong thực tế, sử dụng linh kiện điện tử. Tuy nhiên, nó có thể được mô phỏng trên máy tính.



LPF lý tưởng với $r_0 = 57$

Ví dụ LPF lý tưởng



Ảnh gốc

LPF lý tưởng với $r_0 = 57$

Ví dụ LPF lý tưởng

r_0= 36

r_0= 26

Ví dụ LPF lý tưởng

- Chú ý hiệu quả khi dùng giá trị cắt lớn sẽ làm ảnh mờ, đó là một đặc tính của bộ lọc lý tưởng. Đó là do bị gián đoạn trong các chức năng chuyển bộ lọc.

Chọn tần số cắt trong LPF lý tưởng

- Tần số cắt r_0 của LPF lý tưởng xác định số lượng các thành phần tần số thông qua bộ lọc.
- Khi nhỏ hơn r_0, chi tiết của các thành phần trong ảnh bị loại bỏ bởi bộ lọc.
- Tổng quát, giá trị r_0 được chọn sao cho các thành phần quan tâm sẽ đi qua bộ lọc, trong khi hầu hết các thành phần không cần quan tâm được loại bỏ.
- Thông thường, đây là một tập hợp các yêu cầu mâu thuẫn nhau. Chúng ta sẽ thấy một số chi tiết của việc này trong phục hồi hình ảnh
- Một cách hữu ích để thiết lập một tập các tần số cắt tiêu chuẩn là tính toán vòng tròn với tổng năng lượng ảnh.

Chọn tần số cắt trong LPF lý tưởng

- Giả sử $P_T = \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{M-1} P(u,v)$

  với $P(u,v) = |F(u,v)|^2$ tổng năng lượng ảnh.
- Xem xét vòng tròn bán kính *=$r_0(\alpha)$ là tần số cắt với* ngưỡng α sao cho $\sum_v \sum_u P(u,v) = \alpha P_T$
- Chúng ta có thể cố định một ngưỡng α và có được một tần số cắt phù hợp $r_0(\alpha)$.

Lọc Butterworth lowpass

- Một lọc Butterworth lowpass hai chiều :

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{r_0}\right]^{2n}}$$

n: thứ tự lọc, r_0: tần số cắt

Lọc Butterworth lowpass

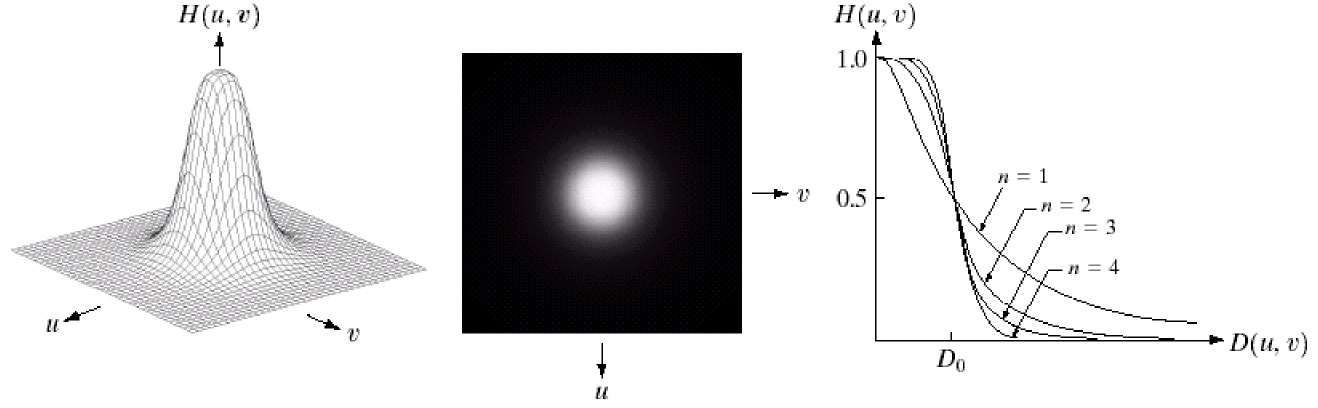
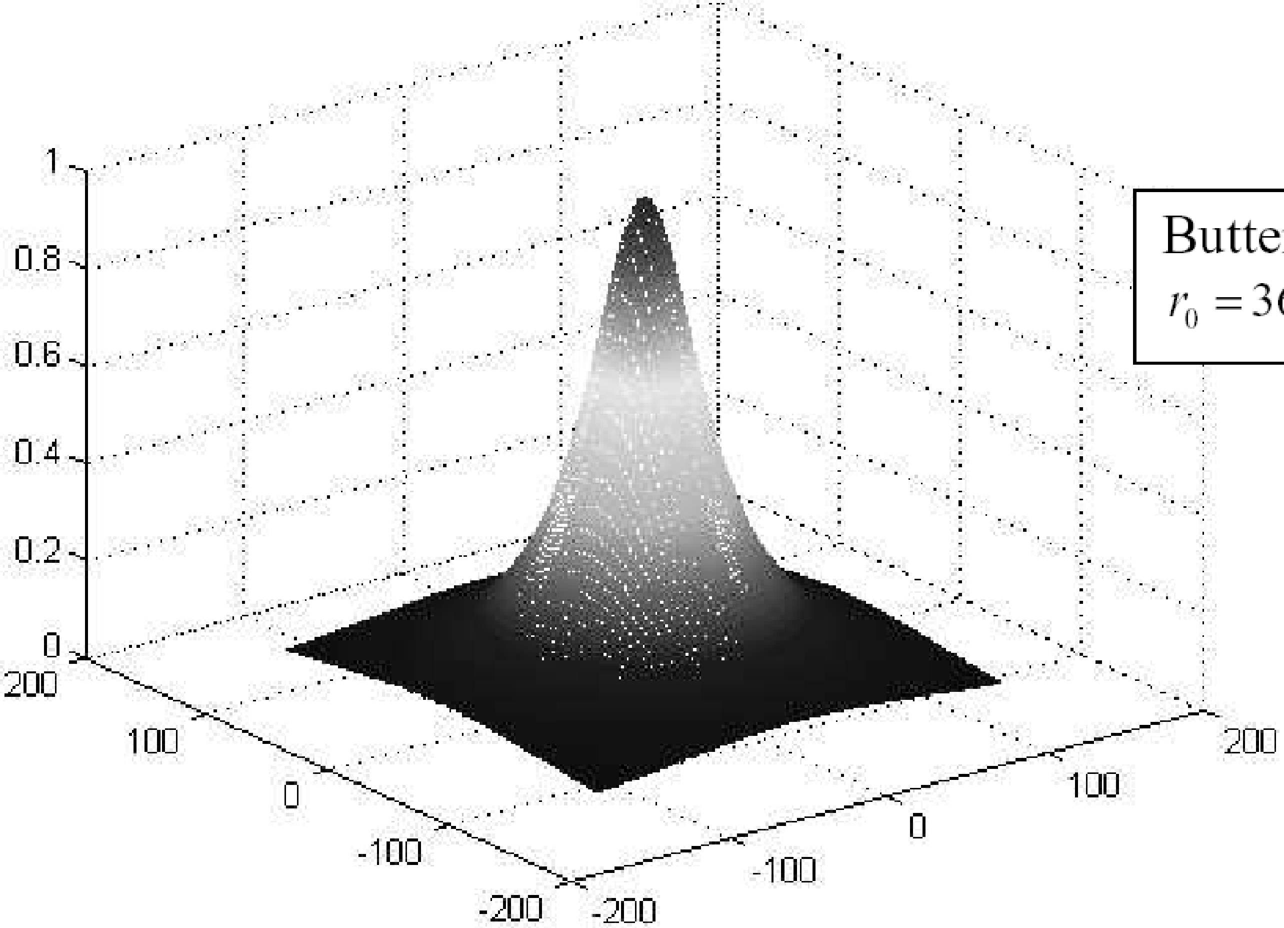


FIGURE 4.14 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Lọc Butterworth lowpass

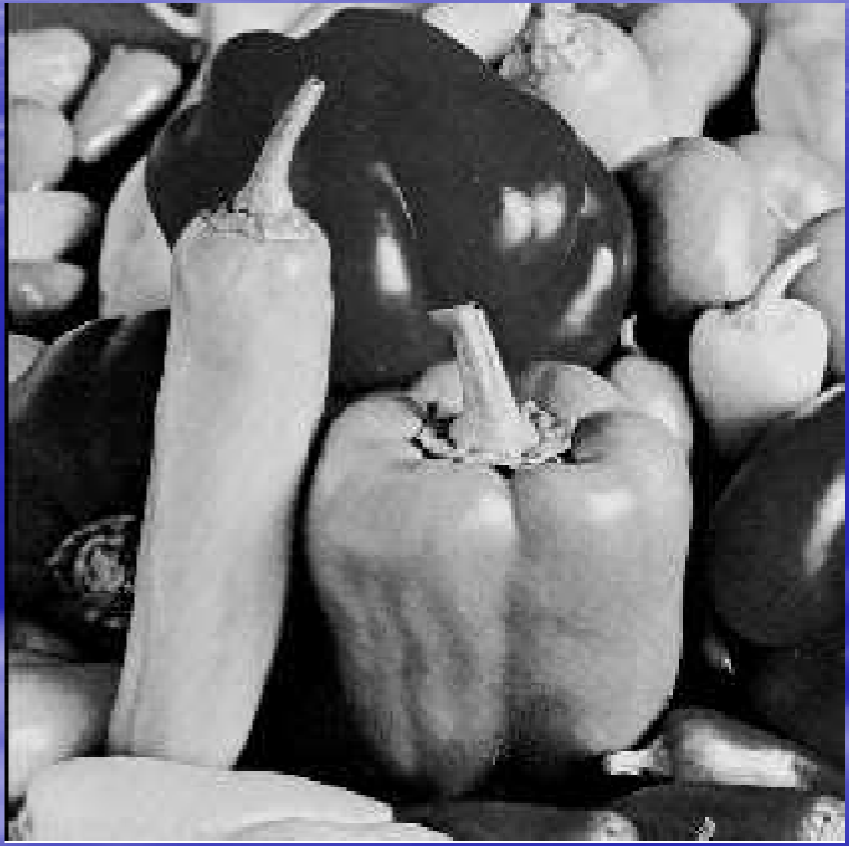


Butterworth LPF with
$r_0 = 36$ and $n = 1$

Lọc Butterworth lowpass

- Tần số đáp ứng không có chuyển dịch hình dáng mạnh như trong LPF lý tưởng.
- Điều này là phù hợp hơn cho làm mịn ảnh hơn là LPF lý tưởng,.

Ví dụ Butterworth LPF



Ảnh ban đầu

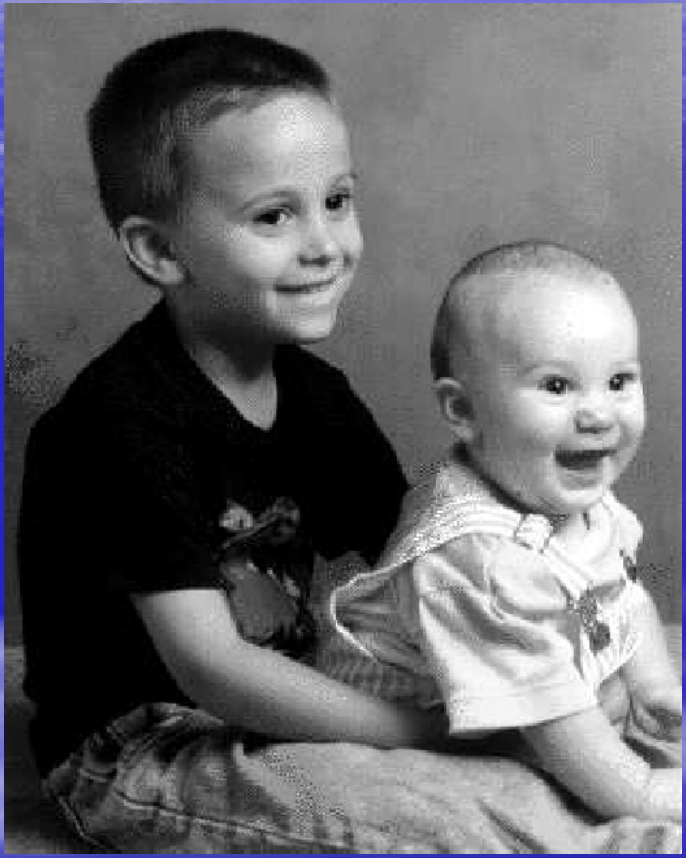
LPF với r_0= 18

Ví dụ Butterworth LPF

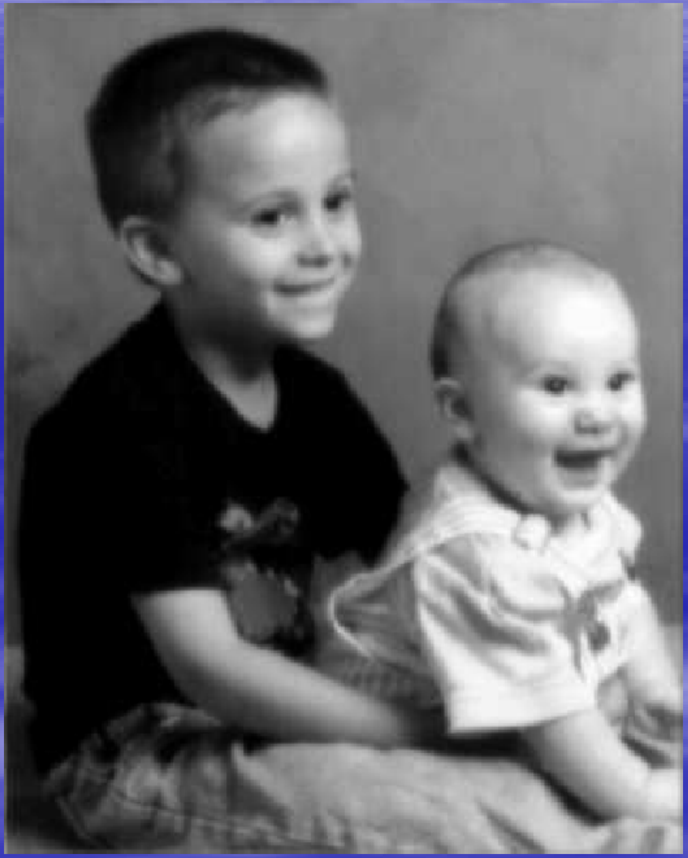
LPF với *r0*= 13

LPF với r_0= 10

Ví dụ Butterworth LPF : đường nét sai

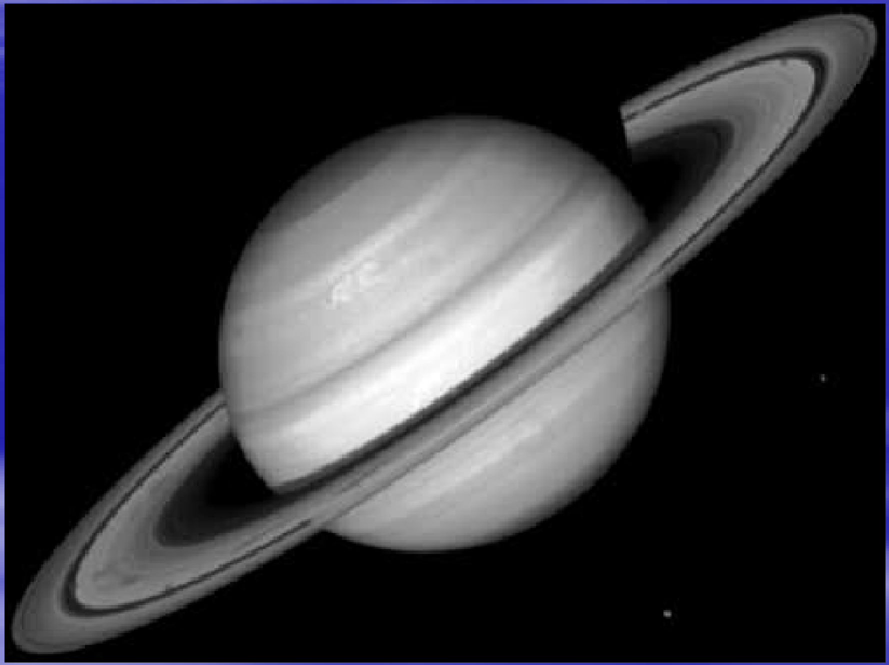


Hình ảnh với đường nét sai
do không đủ bit được sử dụng
cho lượng tử

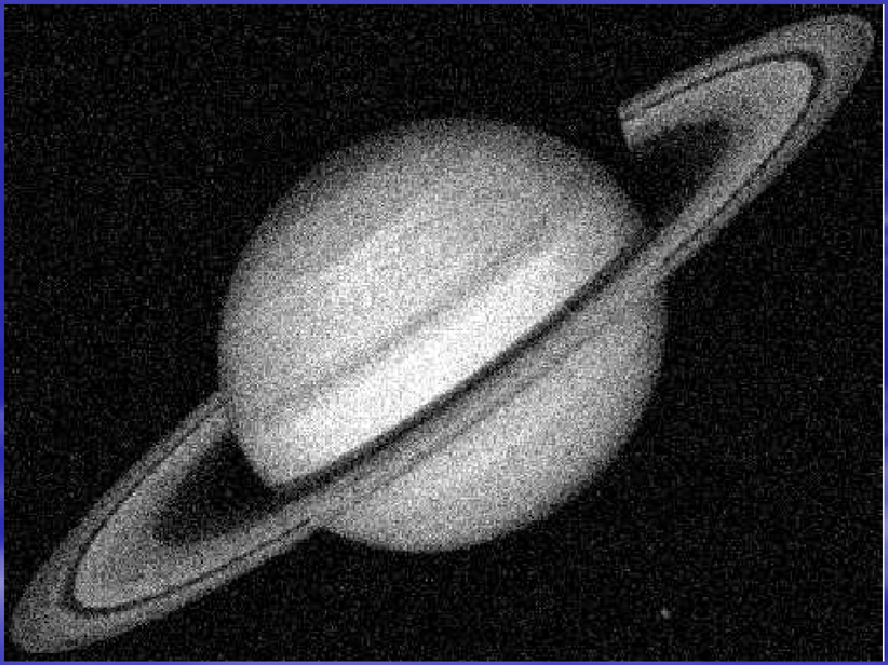


Lowpass lọc ảnh trước đó

Ví dụ Butterworth LPF : Lọc nhiễu

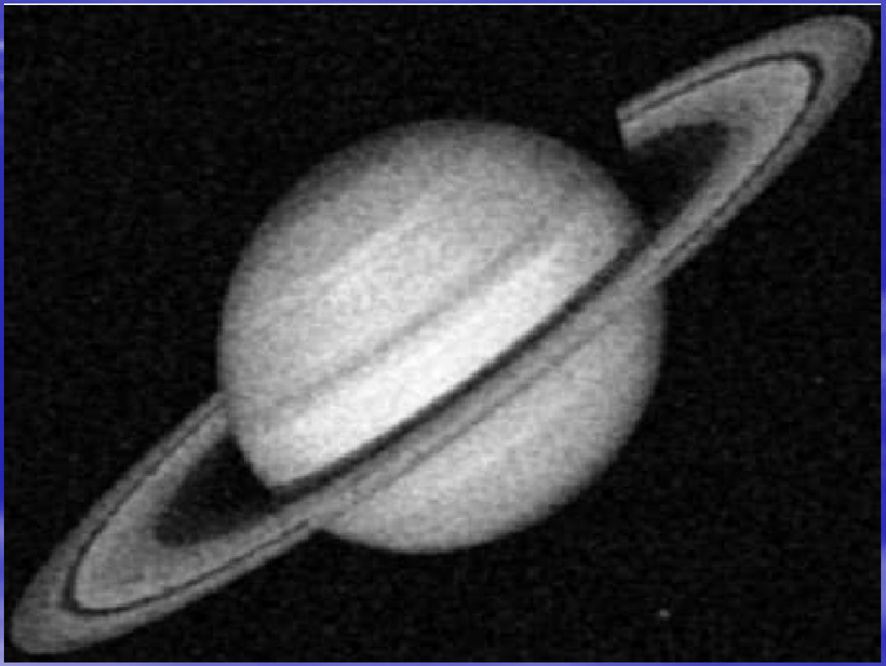


Ảnh ban đầu



Ảnh nhiễu

Ví dụ Butterworth LPF : Lọc nhiễu



Ảnh với LPF

Bộ lọc Low pass Gauss

- Công thức của lọc Low pass Gauss hai chiều

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

với

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

là khoảng cách từ gốc trong mặt phẳng tần số.

- Tham số σ đo mức độ trải ra hay phân tán của đường cong Gauss. Giá trị σ lớn hơn tần số cắt và nhỏ hơn bộ lọc.
- Khi $\sigma = D(u,v)$, bộ lọc giảm xuống 0.607 với giá trị tối đa là 1.

Bộ lọc Low pass Gauss

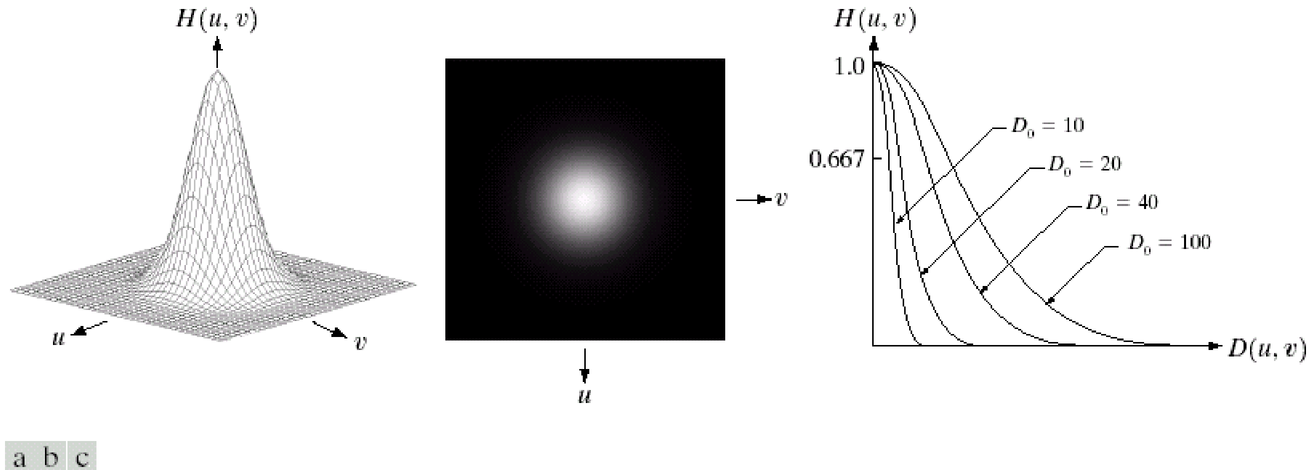


FIGURE 4.17 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

Lọc Highpass

- Cạnh và quá trình chuyển đổi hình dáng trong các giá trị xám của ảnh đóng góp đáng kể vào nội dung tần số cao của biến đổi Fourier của nó.
- Vùng các giá trị màu xám tương đối thống nhất trong một hình ảnh đóng góp cho nội dung tần số thấp của biến đổi Fourier của nó
- Do đó, hình ảnh sắc nét trong miền tần số có thể được thực hiện bằng cách giảm nội dung của tần số thấp của biến đổi Fourier của nó. Đây là bộ lọc HighPass

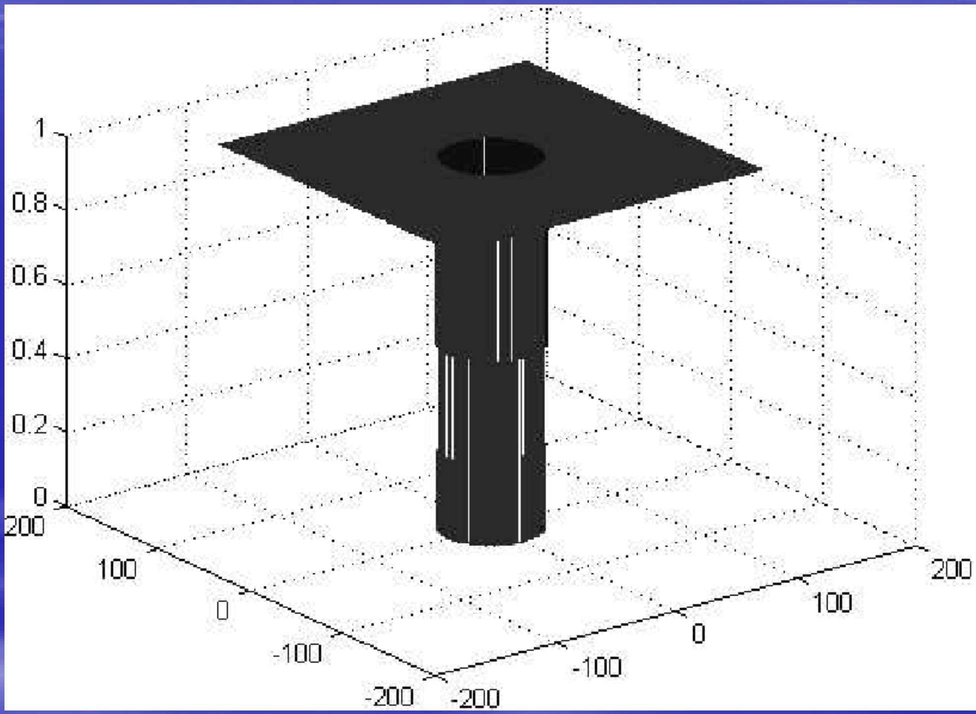
Lọc Highpass

- Để đơn giản, chúng ta sẽ chỉ xem xét các bộ lọc đó thực và xuyên tâm đối xứng.
- Một bộ lọc **highpass lý tưởng với tần số cắt** r_0:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sqrt{u^2+v^2} \le r_0 \\ 1, & \text{if } \sqrt{u^2+v^2} > r_0 \end{cases}$$

Lọc Highpass

- Lưu ý gốc (0, 0) là ở trung tâm và không phải là gốc của ảnh (xem lại "fftshift" hoạt động).
- Việc chuyển đổi đột ngột từ 1 sang 0 của hàm truyền *H(u,v)* có thể không được thực hiện trong thực tế, sử dụng linh kiện điện tử. Tuy nhiên, nó có thể được mô phỏng trên máy tính



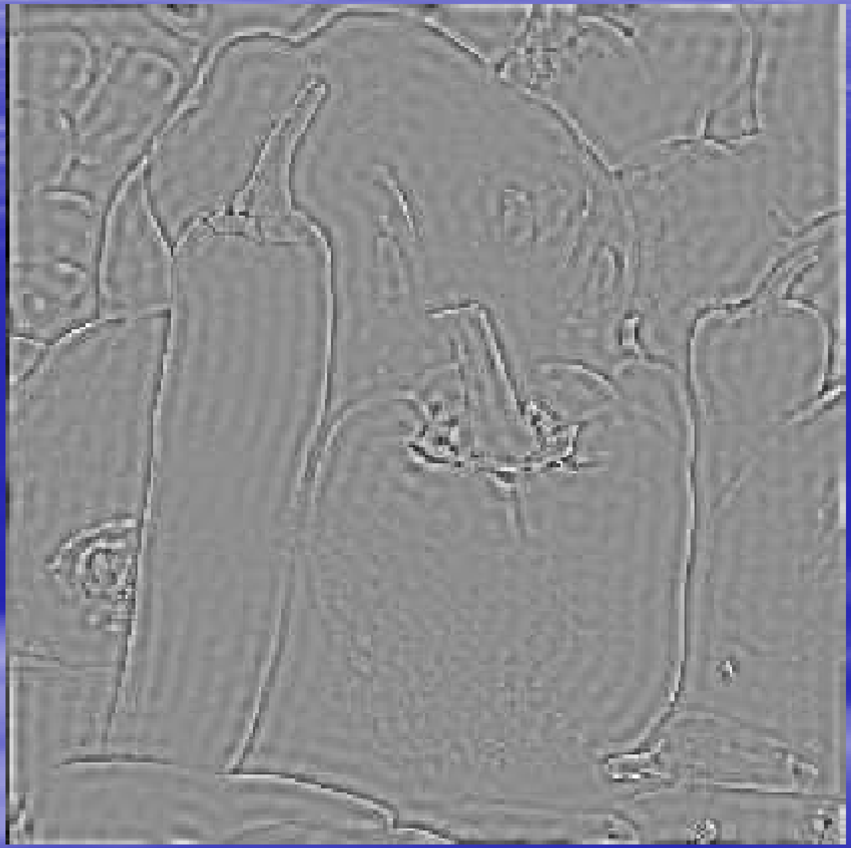
HPF lý tưởng với $r_0 = 36$

Ví dụ HPF lý tưởng

Ảnh gốc

HPF lý tưởng với $r_0 = 18$

Ví dụ HPF lý tưởng



HPF lý tưởng với r_0= 36

HPF lý tưởng với r_0= 26

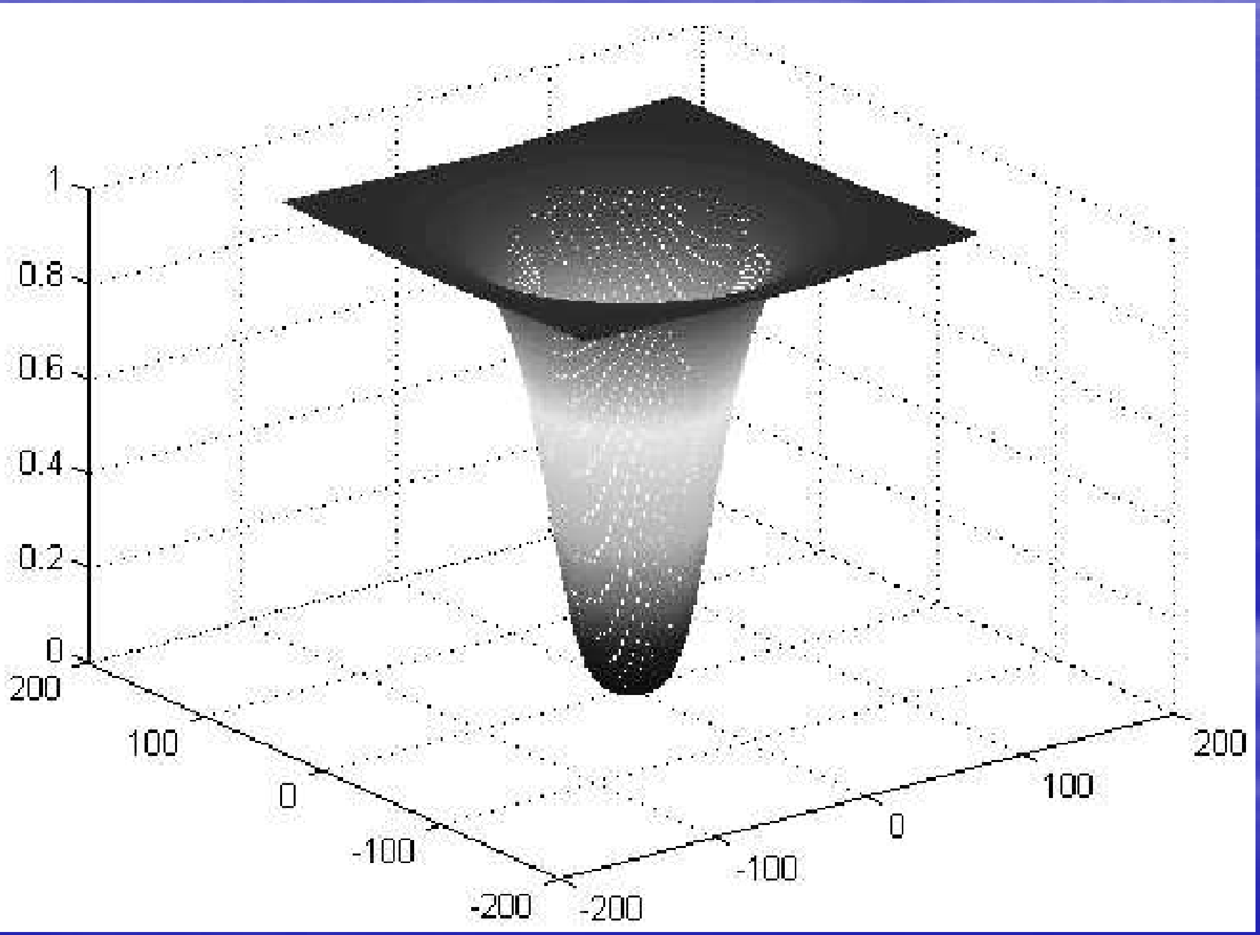
Bộ lọc Butterworth highpass

- **Bộ lọc Butterworth highpass hai chiều là hàm:**

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{r_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right]^{2n}}$$

- *n*: thứ tự lọc, *r*0: tần số cắt

Butterworth HPF với r_0 = 47 and 2

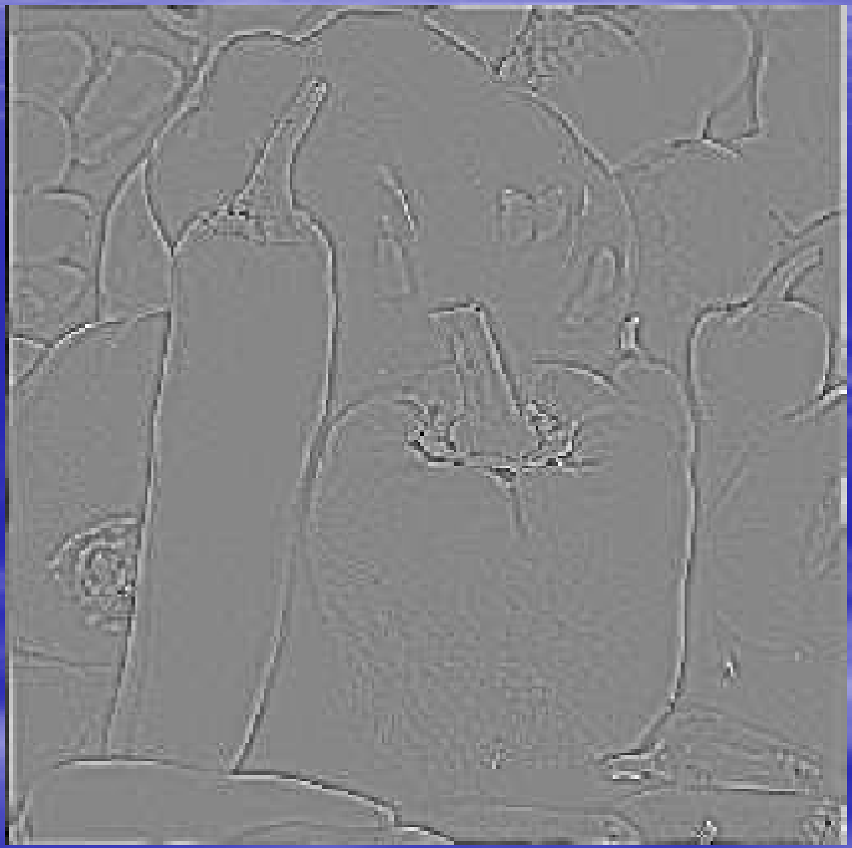


Bộ lọc Butterworth highpass

- Tần số đáp ứng không có một sự chuyển đổi hình dáng như trong HPF lý tưởng
- Điều này là phù hợp hơn cho làm sắc nét ảnh hơn HPF lý tưởng

Ví dụ Butterworth HPF

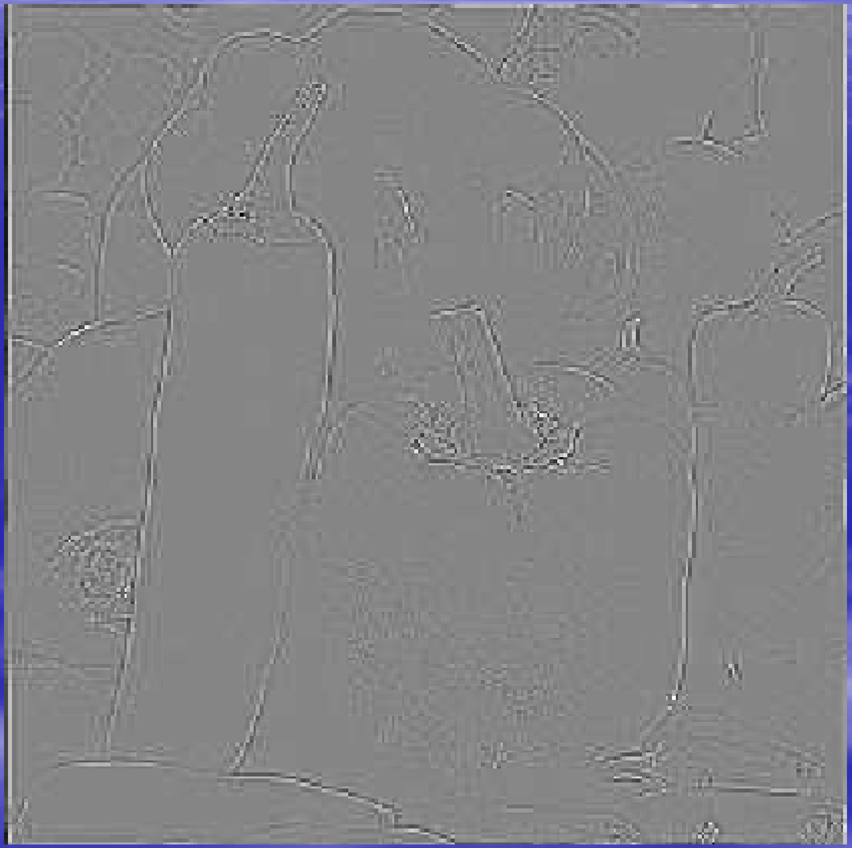
Ảnh gốc



HPF với $r_0 = 47$

Ví dụ Butterworth HPF

HPF với r_0= 36



HPF với r_0= 81

Bộ lọc High pass Gauss

- Công thức lọc High pass Gauss hai chiều

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

  với
- $$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

  là khoảng cách từ gốc trong mặt phẳng tần số.
- Tham số σ đo mức độ lan truyền hay phân tán của đường cong Gauss.

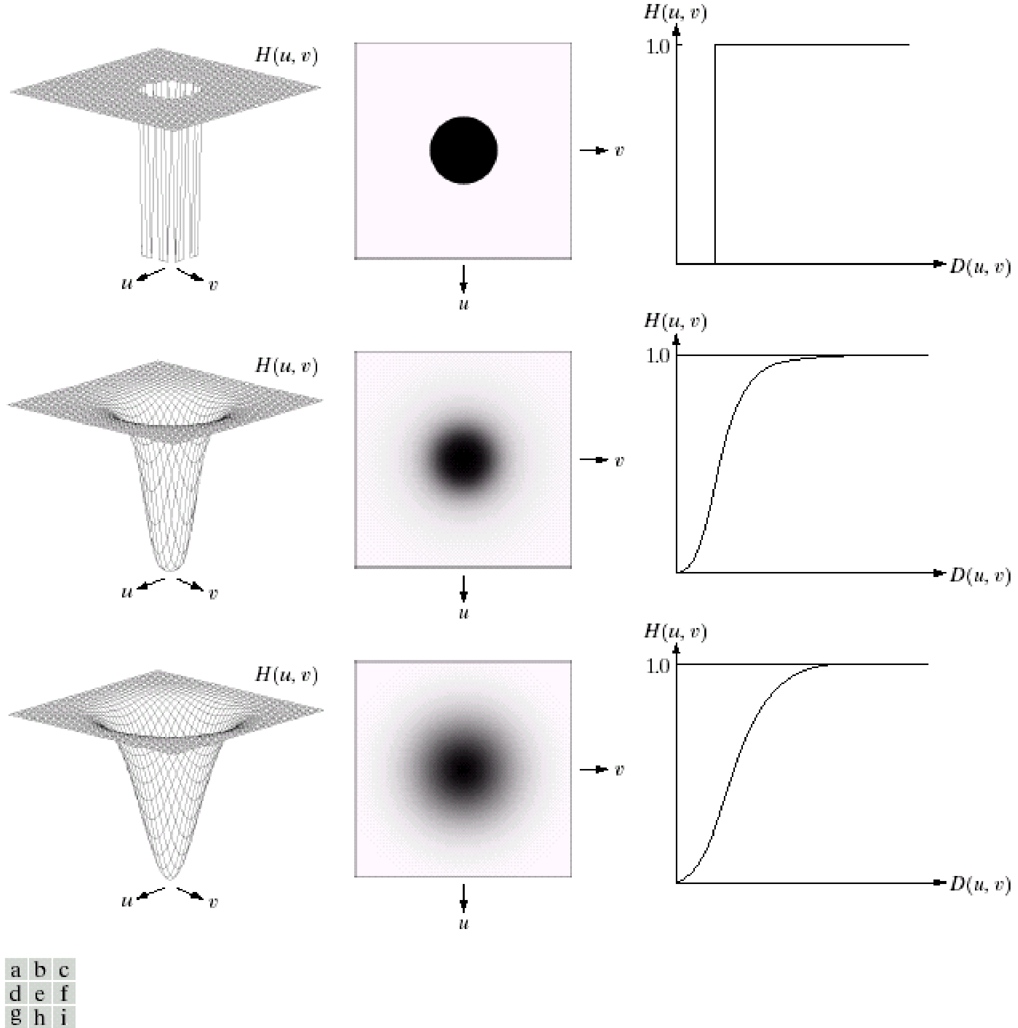


FIGURE 4.22 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

Mô tả trong không gian

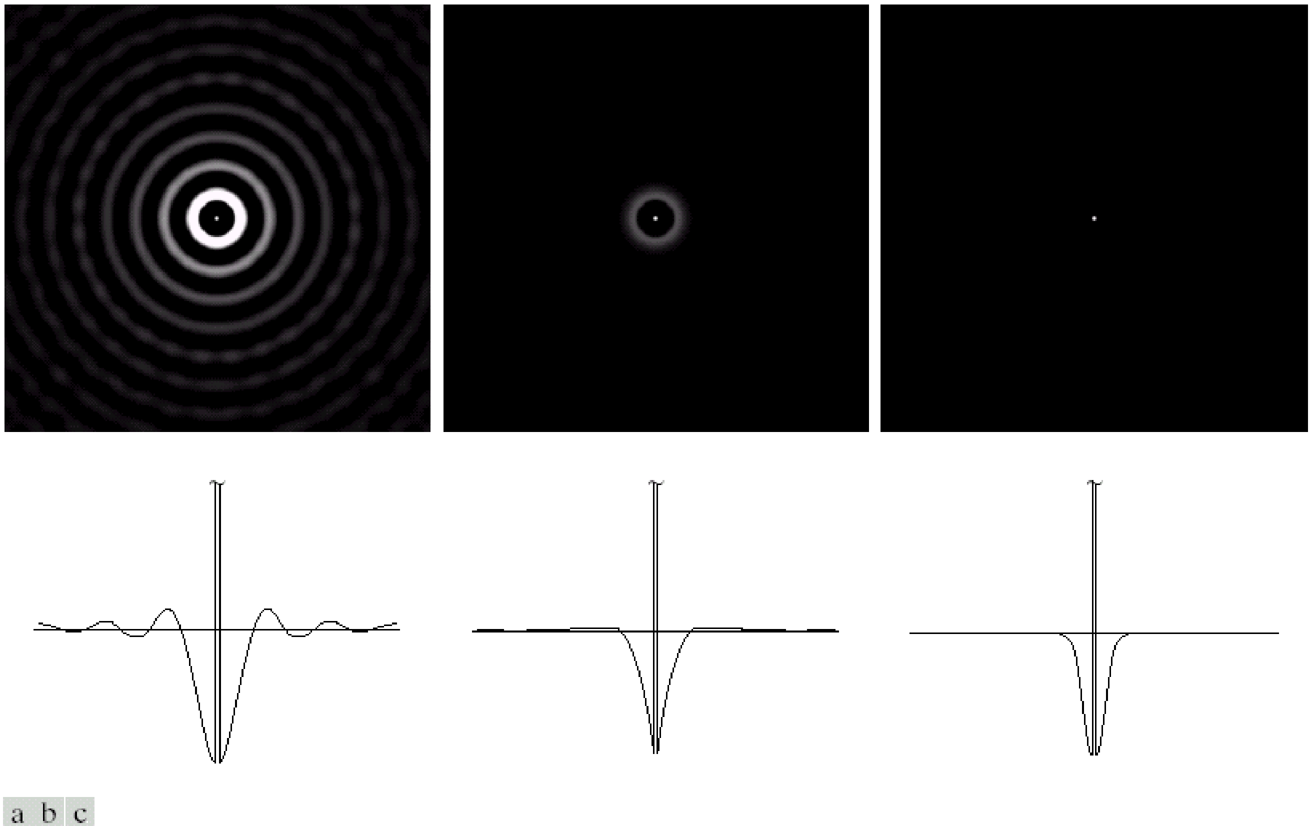


FIGURE 4.23 Spatial representations of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding gray-level profiles.