# Cân bằng Histogram

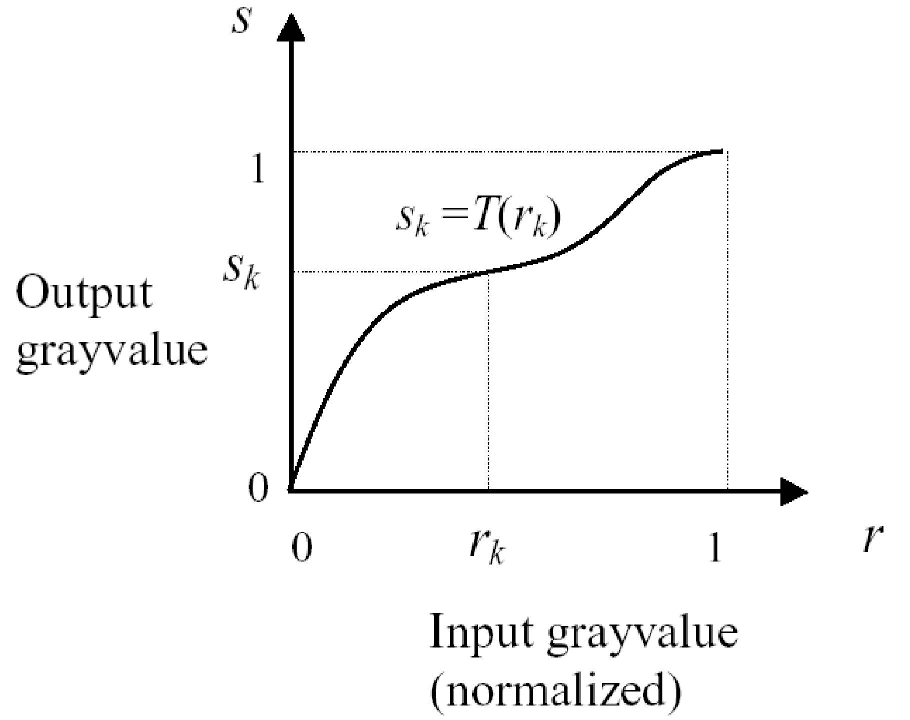
- **Ý tưởng:** Tìm một biến đổi phi tuyến

$$g = T(f)$$

áp dụng cho mỗi pixel của ảnh *f(x,y)*, để *g(x,y)* phân phố đều.

# Cân bằng Histogram

- Chúng ta có giá trị xám *r* liên tục trong [0,1], *r*=0 mô tả màu đen và *r*=1 mô tả màu trắng.
- Chúng ta cần xây dựng một biến đổi $s=T(r)$, trên cơ sở histogram của ảnh, biến đổi này sẽ làm tăng cường ảnh.
- *T* có các tính chất:
  - $T(r)$ là hàm tăng đều với $0 \le r \le 1$
  - $T(r)$ ánh xạ từ [0,1] vào [0,1].



# Cân bằng Histogram

- Xem xét biến đổi ngược $r = T^{-1}(s)$ và xem như biến đổi ngược này cũng thỏa hai điều kiện trên.
- Xem như giá trị xám của ảnh ban đầu (A) và kết quả (B) như biến ngẫu nhiên trong [0, 1].
- Đặt $p_{in}(r)$ và $p_{out}(s)$ là mật độ xác suất các giá trị xám của A và B.
- Nếu biết $p_{in}(r)$ và $T(r)$, và $T^{-1}(s)$ thỏa điều kiện 1, chúng ta có thể viết (lý thuyết xác suất):

$$p_{out}(s) = \left[ p_{in}(r) \frac{dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)}$$

- Một cách để tăng cường ảnh là thiết kế một biến đổi $T(.)$ ở mức xám như phân bố không chuẩn trong [0, 1].

$$p_{out}(s) = 1,\ 0 \le s \le 1$$

# Cân bằng Histogram

- Các vùng của histogram được chỉnh để "cân đối bằng nhau" trong mức xám. Kỹ thuật này được gọi là **cân bằng histogram** (**histogram equalization**).
- Xem như là biến đổi

$$s = T(r) = \int_o^r p_{\text{in}}(w)dw, \qquad 0 \le r \le 1$$

- CDF (cumulative distribution function) của $p_{\text{in}}(r)$ cũng thỏa 2 điều kiện trên.
- Từ phương trình trên ta suy ra, $\frac{ds}{dr} = p_{in}(r)$

# Cân bằng Histogram

- Thì kết quả sẽ là

$$p_{out}(s) = \left[ p_{in}(r) \frac{1}{p_{in}(r)} \right]_{r=T^{-1}(s)}$$
$$= [1]_{r=T^{-1}(s)} = 1, \text{ for } 0 \le s \le 1$$

- Hàm mật độ xác suất của g là đều mà không quan tâm f.
- Dùng một hàm biến đổi để cân bằng CDF của các giá trị xám *r*, của f, chúng ta có thể có một ảnh mới g có các giá trị xám chuẩn.
- Điều này sẽ làm tăng cường ảnh, (tăng vùng linh hoạt).

# Cân bằng Histogram

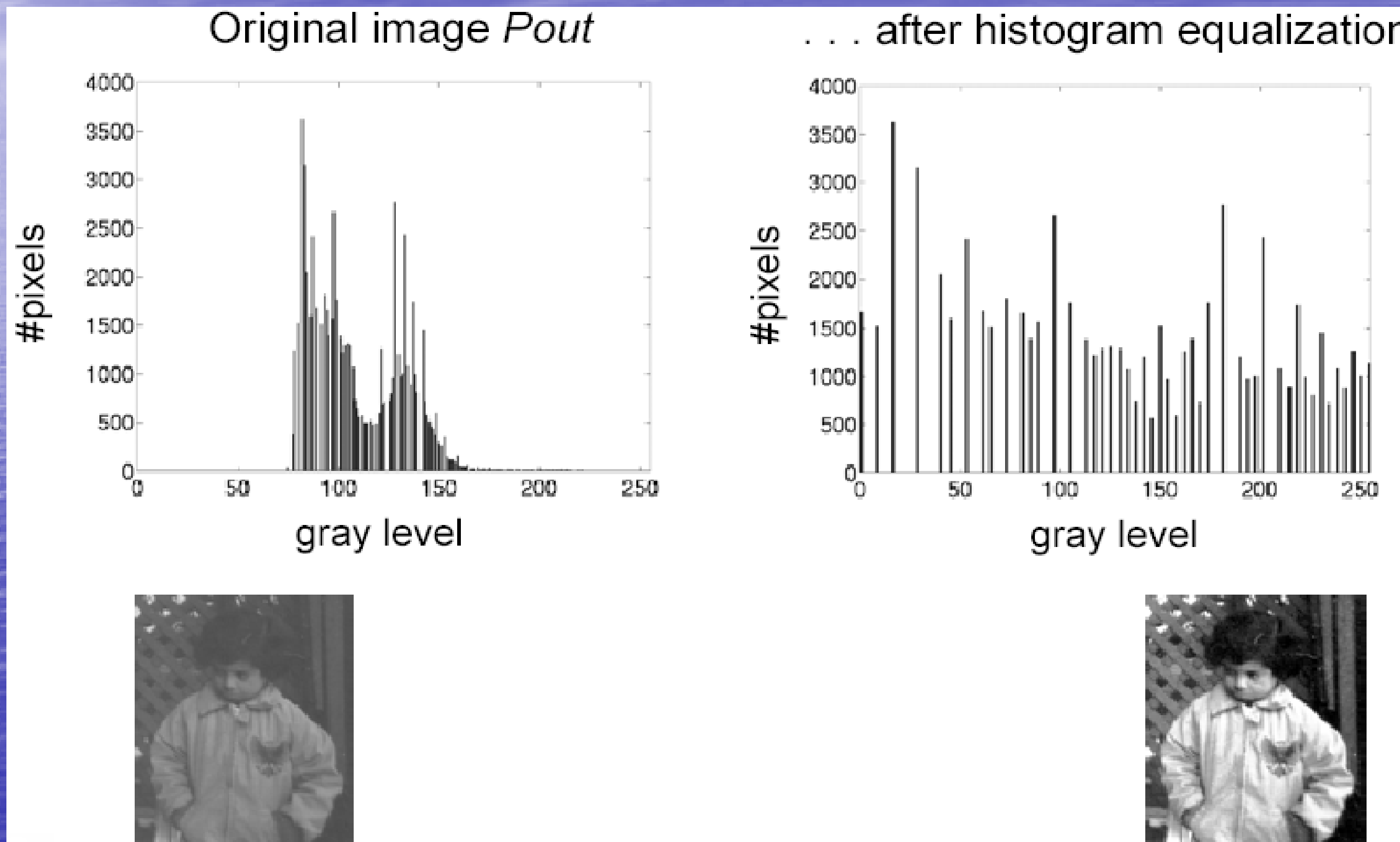
- Rời rạc hóa, ta sẽ có $p_{\text{in}}(r_k) = \dfrac{n_k}{n}$, for $0 \le r \le 1$, và $0 \le k \le L-1$
  - *L*: Tổng số mức xám
  - $n_k$: số lượng pixel ở mức xám $r_k$
  - *n*: Tổng số pixel trong ảnh
- CDF sẽ là $s_k = T(r_k) = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{n_i}{n} = \sum_{i=0}^{k} p_{\text{in}}(r_i)$, for $0 \le k \le L-1$
- Cân bằng histogram không phải lúc nào cũng cho kết quả như mong muốn, chỉ hiệu quả khi histogram bị dồn lại. Điều này có thể gây ra sai cạnh và vùng, có thể gây ra nhiễu.

# Ví dụ cân bằng Histogram

Ảnh ban đầu

Sau khi cân bằng histogram

# Ví dụ cân bằng Histogram

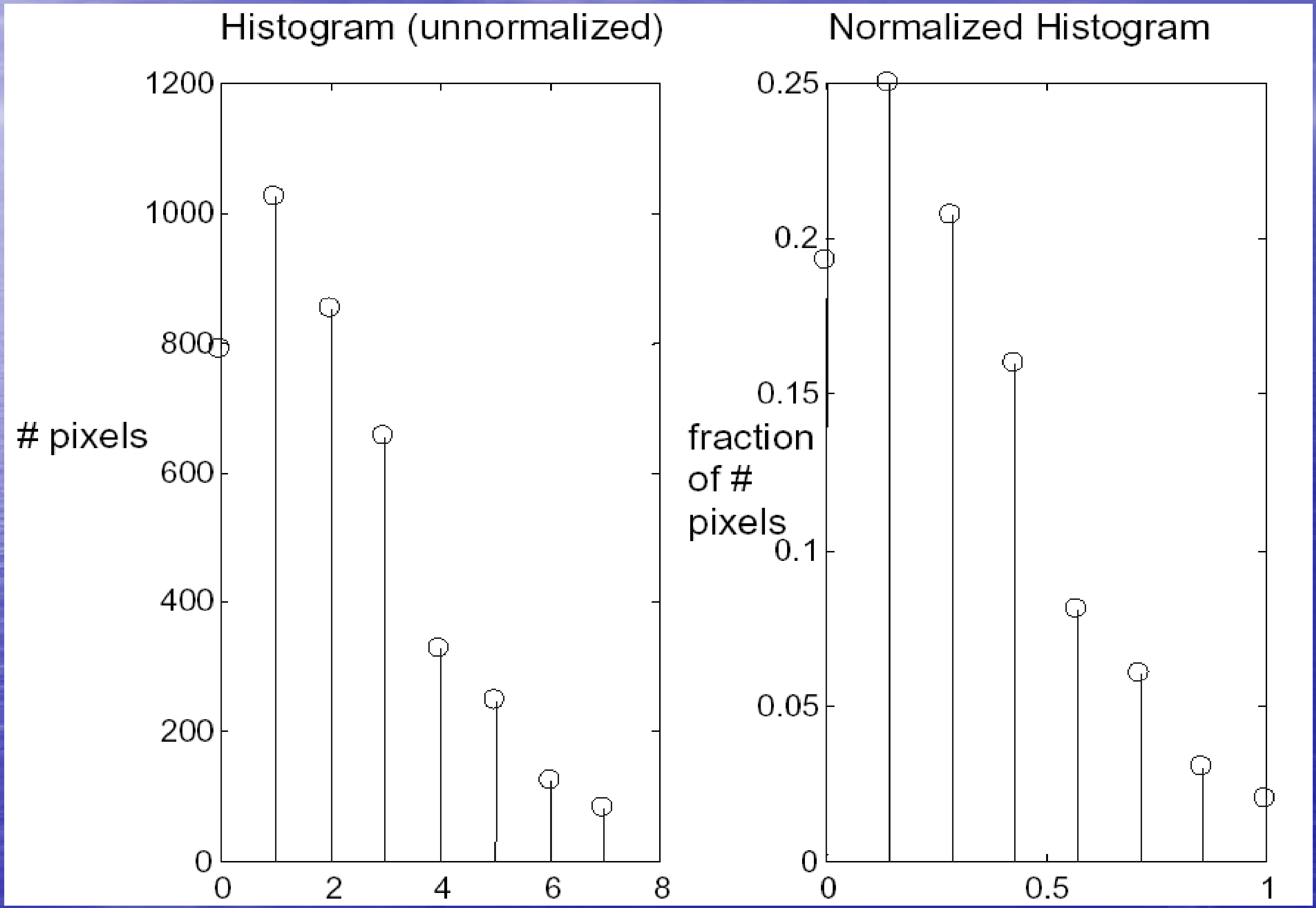


# Ví dụ

- Xem xét một bức ảnh kích thước 64x64 ở 8 mức xám (0, 1, ..., 7). Chuẩn hóa giá trị xám (0, 1/7, 2/7, ..., 1). Histogram sau chuẩn hóa như bảng:

| $k$ | $r_k$ | $n_k$ | $p(r_k)=n_k/n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 790 | 0.19 |
| 1 | 1/7 | 1023 | 0.25 |
| 2 | 2/7 | 850 | 0.21 |
| 3 | 3/7 | 656 | 0.16 |
| 4 | 4/7 | 329 | 0.08 |
| 5 | 5/7 | 245 | 0.06 |
| 6 | 6/7 | 122 | 0.03 |
| 7 | 1 | 81 | 0.02 |

# Ví dụ



Histogram (unnormalized)
Normalized Histogram
1200
1000
800
600
400
200
0
# pixels
0
2
4
6
8
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
fraction of # pixels
0
0.5
1

# Ví dụ

- Áp dụng biến đổi như trên, chúng ta có kết quả (sau khi làm tròn):

$$s_0 = T(r_0) = \sum_{i=0}^{0} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) = 0.19 \rightarrow 1/7$$

$$s_1 = T(r_1) = \sum_{i=0}^{1} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) = 0.44 \rightarrow 3/7$$

$$s_2 = T(r_2) = \sum_{i=0}^{2} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) + p_{\text{in}}(r_2) = 0.65 \rightarrow 5/7$$

$$s_3 = T(r_3) = \sum_{i=0}^{3} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) + \cdots + p_{\text{in}}(r_3) = 0.81 \rightarrow 6/7$$

$$s_4 = T(r_4) = \sum_{i=0}^{4} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) + \cdots + p_{\text{in}}(r_4) = 0.89 \rightarrow 6/7$$

$$s_5 = T(r_5) = \sum_{i=0}^{5} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) + \cdots + p_{\text{in}}(r_5) = 0.95 \rightarrow 1$$

$$s_6 = T(r_6) = \sum_{i=0}^{6} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) + \cdots + p_{\text{in}}(r_6) = 0.98 \rightarrow 1$$

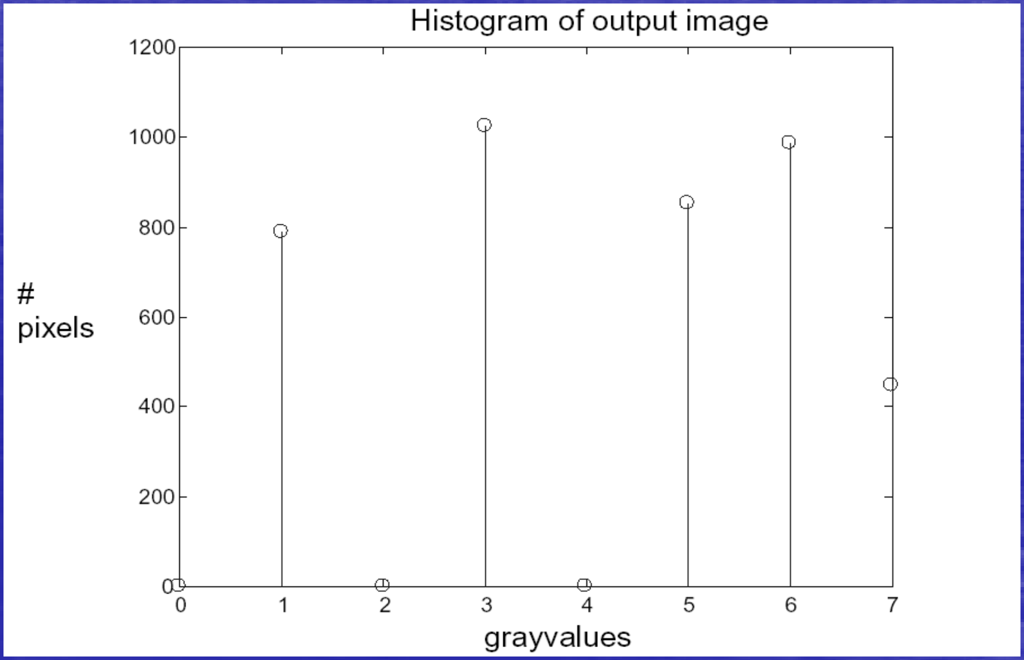
$$s_7 = T(r_7) = \sum_{i=0}^{7} p_{\text{in}}(r_i) = p_{\text{in}}(r_0) + p_{\text{in}}(r_1) + \cdots + p_{\text{in}}(r_7) = 1.00 \rightarrow 1$$

- Chú ý, có duy nhất 5 giá trị xám rời rạc --- (1/7, 3/7, 5/7, 6/7, 1) được gán nhãn là ($s_0$, $s_1$, ..., $s_4$).

# Ví dụ

- Với biến đổi này histogram của g là
- Histogram của g là xấp xỉ, không chính xác hoàn toàn, chuẩn.

| $k$ | $s_k$ | $n_k$ | $p(s_k)=n_k/n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/7 | 790 | 0.19 |
| 1 | 3/7 | 1023 | 0.25 |
| 2 | 5/7 | 850 | 0.21 |
| 3 | 6/7 | 985 | 0.24 |
| 4 | 1 | 448 | 0.11 |




Dùng hàm imhist và histeq trong image processing toolbox

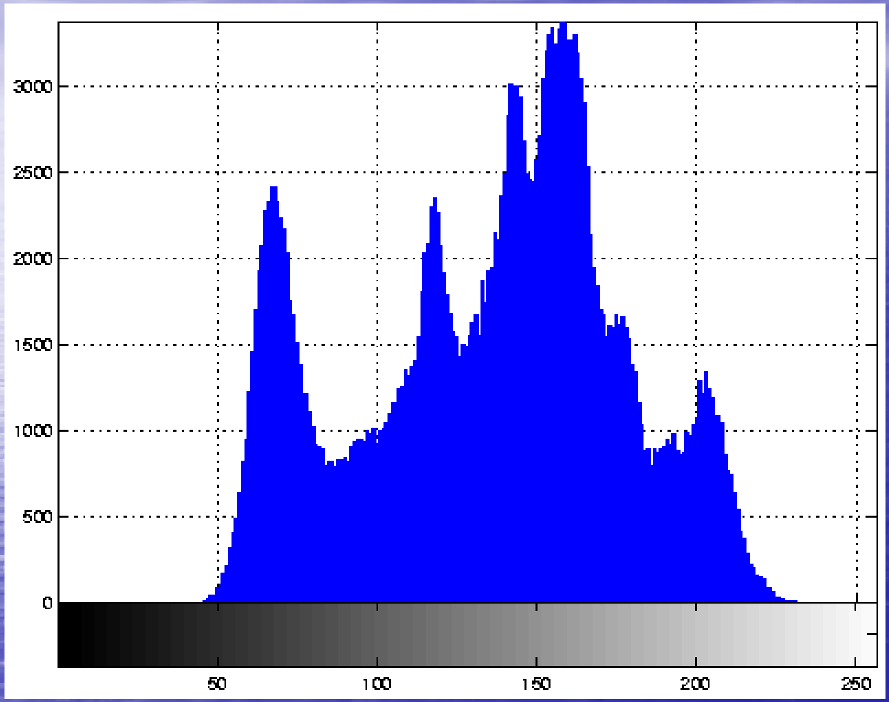
# Ví dụ

Ảnh ban đầu

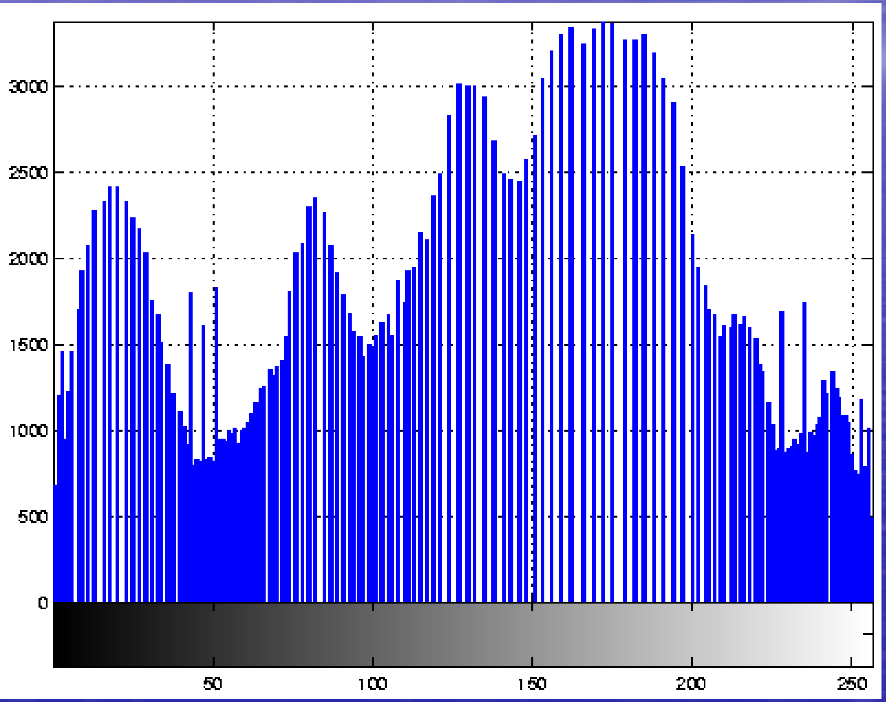
Ảnh sau khi cân bằng

http://www.cs.cmu.edu/~chuck/lennapg/

# Ví dụ




Histogram của ảnh ban đầu



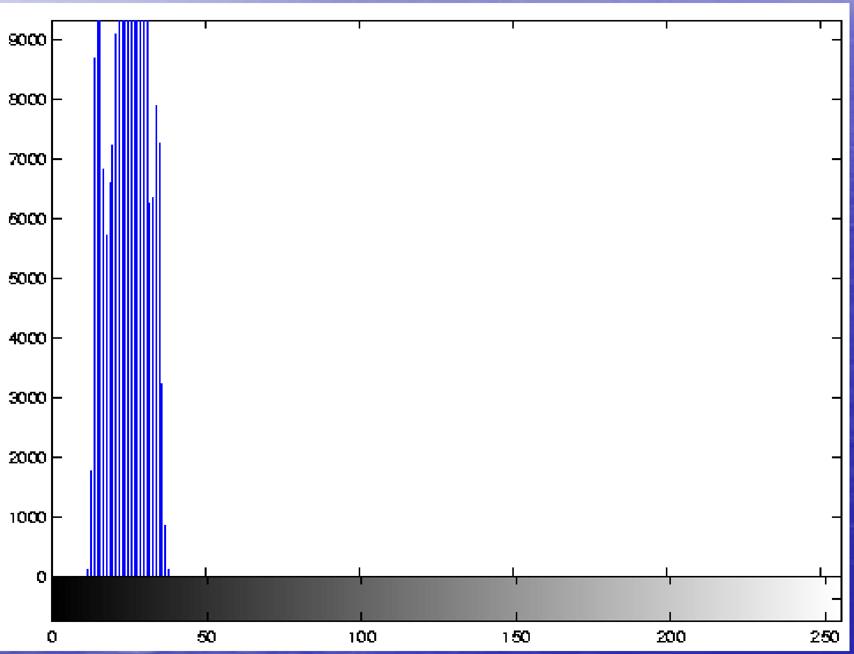

Histogram của ảnh sau cân bằng

# Ví dụ

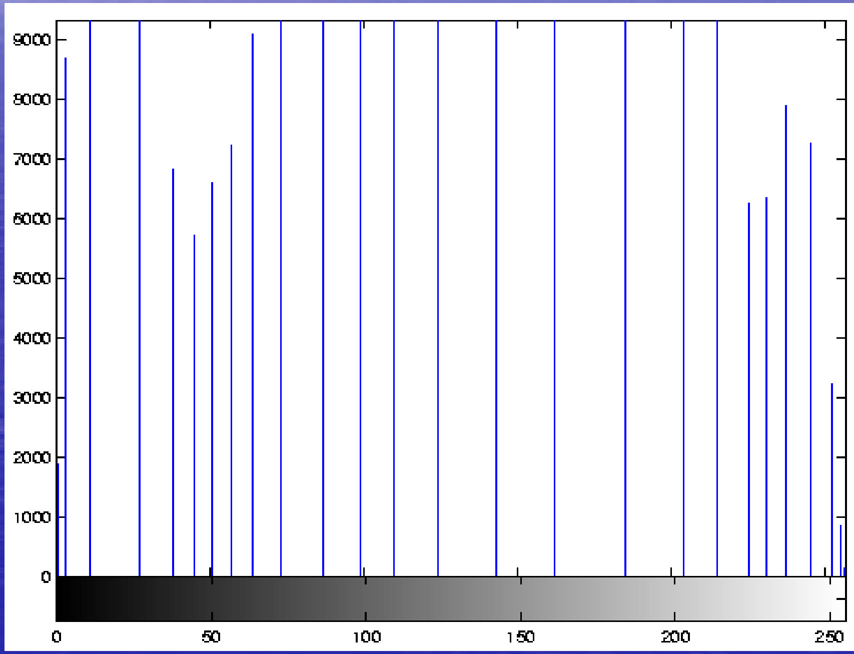
Ảnh ban đầu

Ảnh sau khi cân bằng

# Ví dụ




Histogram của ảnh ban đầu



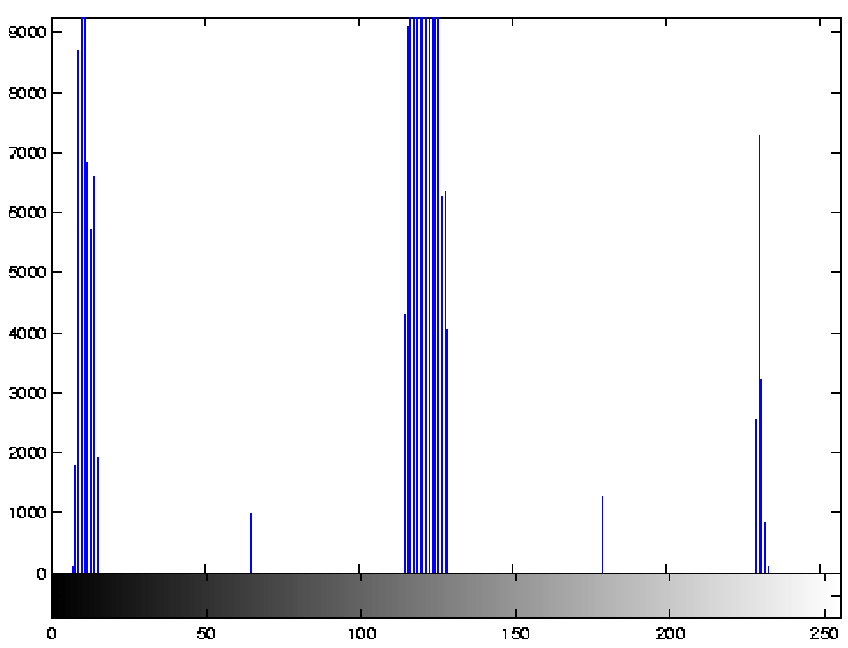

Histogram của ảnh sau cân bằng

# Ví dụ

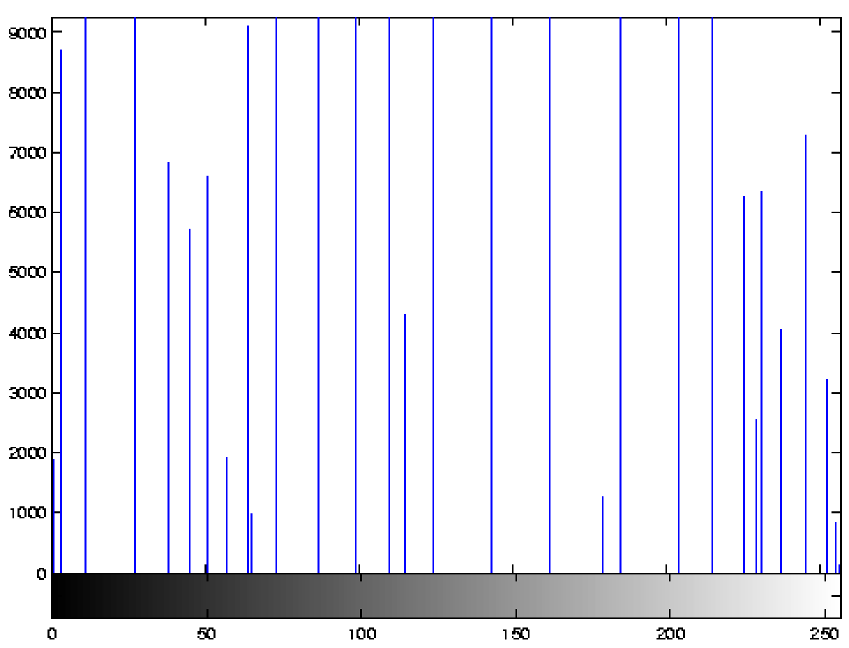
Ảnh ban đầu

Ảnh sau khi cân bằng

# Ví dụ




Histogram của ảnh ban đầu



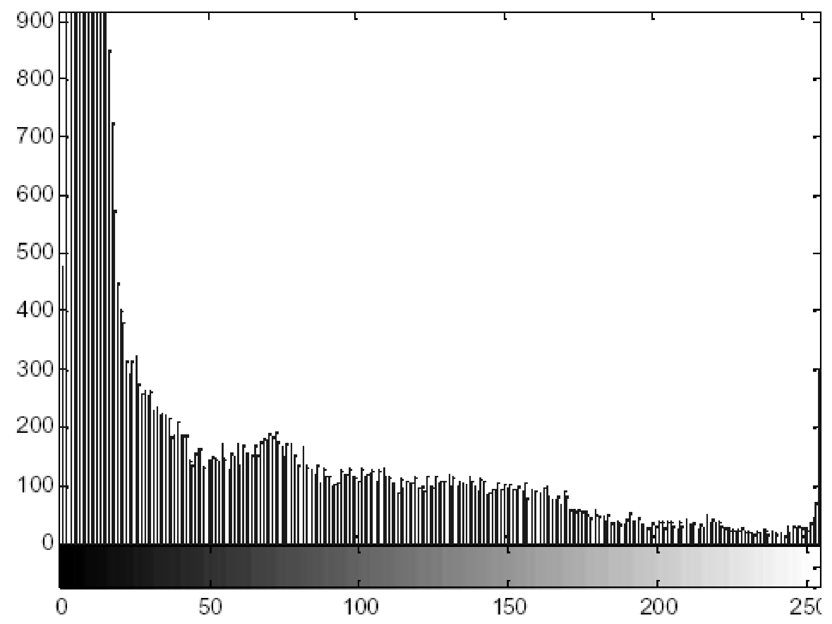

Histogram của ảnh sau cân bằng

# Ví dụ

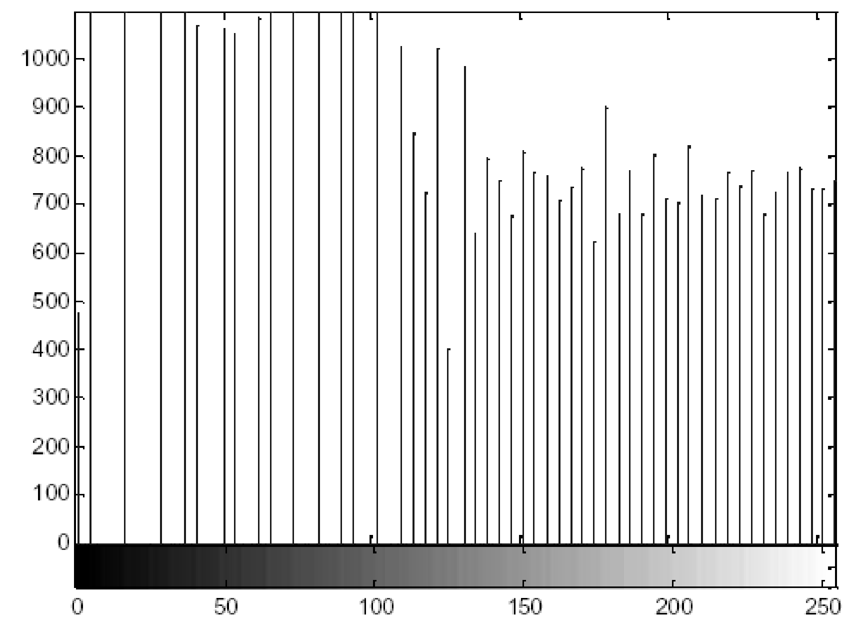
Ảnh ban đầu

Ảnh sau khi cân bằng

# Ví dụ




Histogram của ảnh ban đầu




Histogram của ảnh sau cân bằng

# Chỉ định dạng Histogram

- Cân bằng histogram cung cấp một ảnh có các pixel được phân bố chuẩn mức xám (theo lý thuyết).
- Đôi khi chúng ta không muốn điều này. Thay vì vậy, chúng ta cần một biến đổi mà cho ta một histogram theo ý mình. Kỹ thuật này gọi là **chỉ định histogram** (**histogram specification**).
- Giả sử ảnh f có mật độ xác suất $p_{in}(r)$. Chúng ta muốn tìm một biến đổi $z=H(r)$, và mật độ xác suất của g là $p_{out}(z)$.
- Áp dụng biến đổi

$$s = T(r) = \int_{o}^{r} p_{\text{in}}(w)\,dw, \qquad 0 \le r \le 1 \quad (*)$$

để ảnh mới có mật độ xác suất chuẩn.

# Chỉ định dạng Histogram

- Nếu g có mật độ chuẩn: $$v = G(z) = \int_{o}^{z} p_{\text{out}}(w)dw, \qquad 0 \le z \le 1 \quad (**)$$
- Từ mức xám $v$ chúng ta có $z$ bằng biến đổi ngược $z=G^{-1}(v)$.
- Nếu thay vì dùng mức xám $v$ từ (**), chúng ta dùng $s$ từ (*) (cả hai đều là phân bố chuẩn), thì:

$$z = H(r) = G^{-1}[T(r)]$$

sẽ cho ảnh mới có phân bố cụ thể $p_{out}(z)$, từ ảnh có mật độ $p_{in}(r)$.

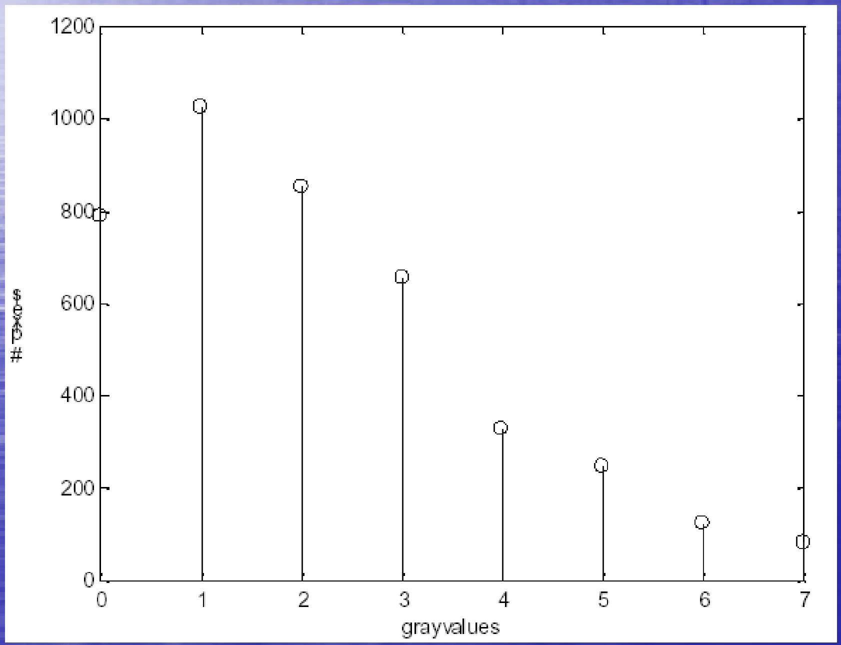
- Rời rạc các mức xám, ta có

$$s_k = T(r_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{n_i}{n}, \quad \text{for } 0 \le k \le L-1 \text{ và}$$

$$v_k = G(z_k) = \sum_{i=0}^{k} p_{\text{out}}(z_i), \quad \text{for } 0 \le k \le L-1$$

# Chỉ định dạng Histogram

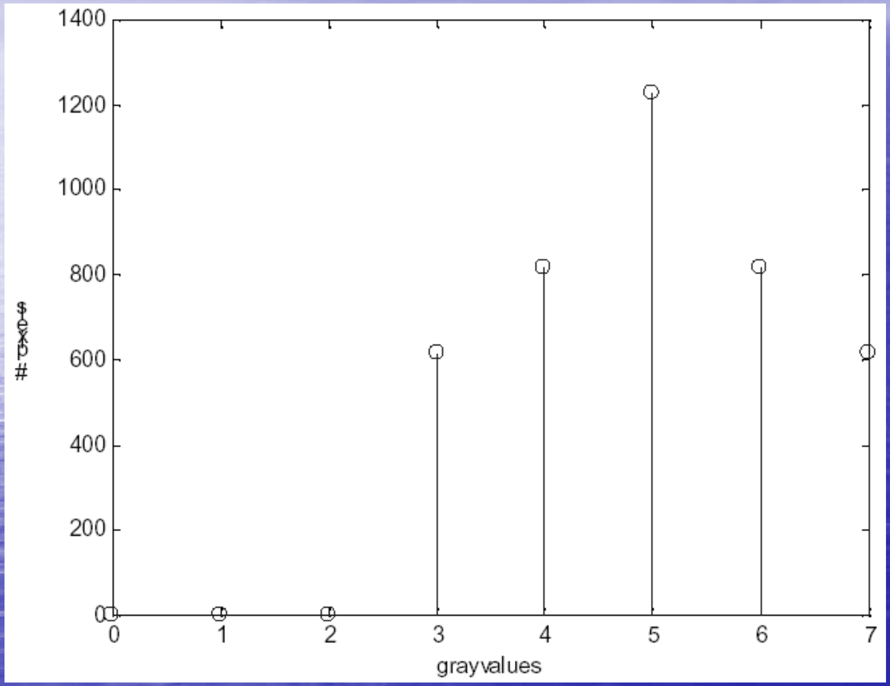
- Nếu biến đổi $z_k \rightarrow G(z_k)$ là 1-1, biến đổi ngược $s_k \rightarrow G^{-1}(s_k)$ được xác định dễ dàng, từ đây chúng ta có thể phân chia với một tập nhỏ các giá trị xám rời rạc.
- Trong thực tế, $z_k \rightarrow G(z_k)$ không phải lúc nào cũng là 1-1, chúng ta phải thiết lập các giá trị xám phù hợp với histogram có, càng chính xác càng tốt.
- Ví dụ: xem xét ảnh 64x64 ở 8 mức xám




| $k$ | $r_k$ | $n_k$ | $p(r_k)=n_k/n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 790 | 0.19 |
| 1 | 1/7 | 1023 | 0.25 |
| 2 | 2/7 | 850 | 0.21 |
| 3 | 3/7 | 656 | 0.16 |
| 4 | 4/7 | 329 | 0.08 |
| 5 | 5/7 | 245 | 0.06 |
| 6 | 6/7 | 122 | 0.03 |
| 7 | 1 | 81 | 0.02 |

# Ví dụ

- Xem xét biến đổi $z=H(r) = G^{-1}[T(r)]$, với histogram như sau:




| $k$ | $z_k$ | $p_{out}(z_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.00 |
| 1 | 1/7 | 0.00 |
| 2 | 2/7 | 0.00 |
| 3 | 3/7 | 0.15 |
| 4 | 4/7 | 0.20 |
| 5 | 5/7 | 0.30 |
| 6 | 6/7 | 0.20 |
| 7 | 1 | 0.15 |

# Ví dụ

- Biến đổi $T(r)$ như sau:

| $r_i \to s_k$ | $n_k$ | $p(s_k)$ |
|---|---|---|
| $r_0 \to s_0 = 1/7$ | 790 | 0.19 |
| $r_1 \to s_1 = 3/7$ | 1023 | 0.25 |
| $r_2 \to s_2 = 5/7$ | 850 | 0.21 |
| $r_3, r_4 \to s_3 = 6/7$ | 985 | 0.24 |
| $r_5, r_6, r_7 \to s_4 = 1$ | 448 | 0.11 |

- Và G như sau:

$$v_0 = G(z_0) = \sum_{i=0}^{0} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) = 0.00 \to 0$$

$$v_1 = G(z_1) = \sum_{i=0}^{1} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) = 0.00 \to 0$$

$$v_2 = G(z_2) = \sum_{i=0}^{2} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) + p_{\text{out}}(z_2) = 0.00 \to 0$$

$$v_3 = G(z_3) = \sum_{i=0}^{3} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) + \cdots + p_{\text{out}}(z_3) = 0.15 \to 1/7$$

$$v_4 = G(z_4) = \sum_{i=0}^{4} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) + \cdots + p_{\text{out}}(z_4) = 0.35 \to 2/7$$

$$v_5 = G(z_5) = \sum_{i=0}^{5} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) + \cdots + p_{\text{out}}(z_5) = 0.65 \to 5/7$$

$$v_6 = G(z_6) = \sum_{i=0}^{6} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) + \cdots + p_{\text{out}}(z_6) = 0.85 \to 6/7$$

$$v_7 = G(z_7) = \sum_{i=0}^{7} p_{\text{out}}(z_i) = p_{\text{out}}(z_0) + p_{\text{out}}(z_1) + \cdots + p_{\text{out}}(z_7) = 1.00 \to 1$$

# Ví dụ

- Chú ý, $G$ không có $G^{-1}$. Nhưng chúng ta có thể chọn như sau:

$G^{-1}(0) = ?$ (không quan tâm)

$G^{-1}(1/7) = 3/7$

$G^{-1}(2/7) = 4/7$

$G^{-1}(3/7) = 4/7$ (chọn giá trị gần nhất)

$G^{-1}(4/7) = ?$ (không quan tâm)

$G^{-1}(5/7) = 5/7$

$G^{-1}(6/7) = 6/7$

$G^{-1}(1) = 1$

- Tích hợp T và $G^{-1}$ ta có $H$

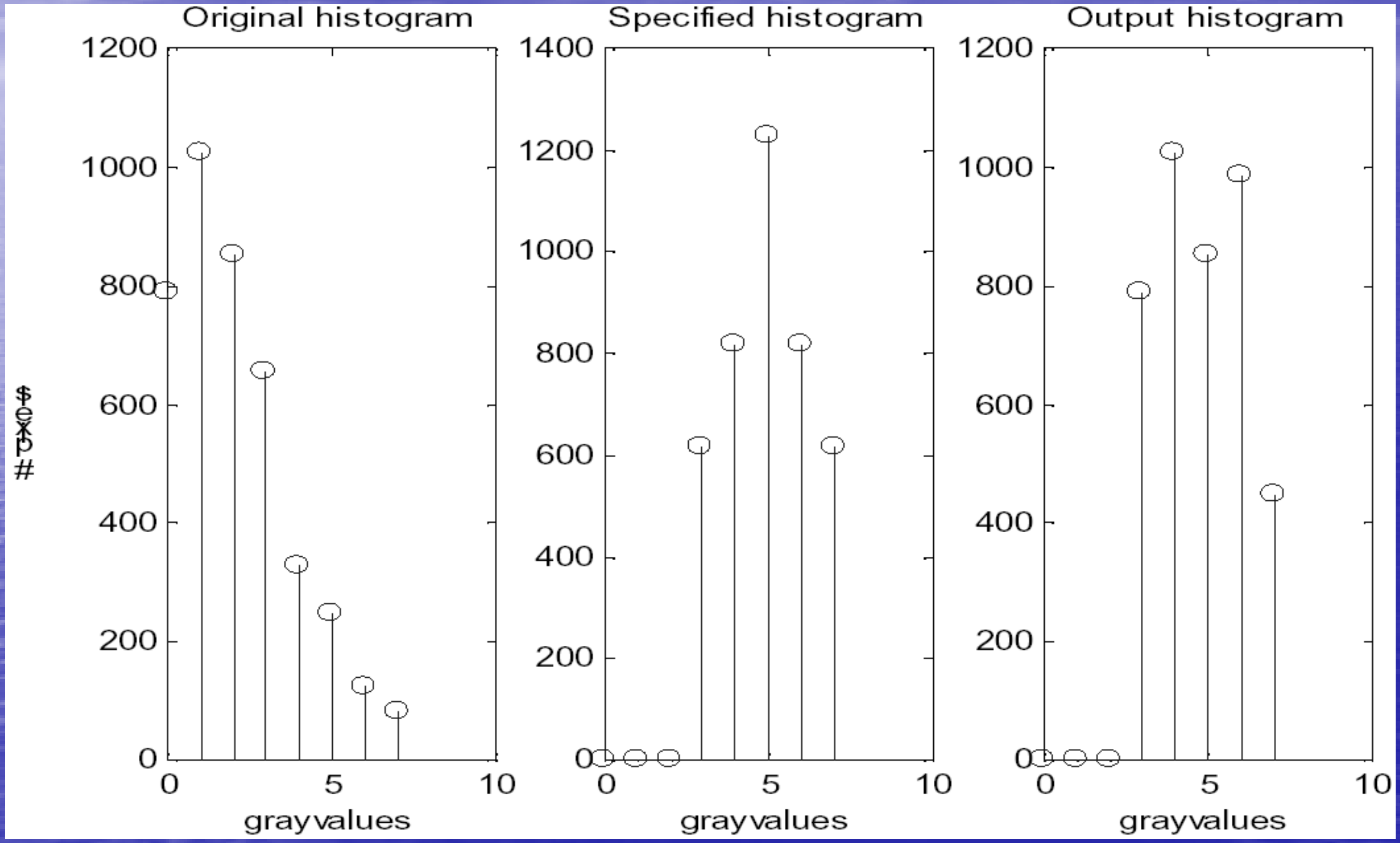
| $r \rightarrow T(r) = s$ | $s \rightarrow G^{-1}(s) = z$ | $r \rightarrow G^{-1}[T(r)] = H(r) = z$ |
|---|---|---|
| $r_0 = 0 \rightarrow 1/7$ | $0 \rightarrow ?$ | $r_0 = 0 \rightarrow z_3 = 3/7$ |
| $r_1 = 1/7 \rightarrow 3/7$ | $1/7 \rightarrow 3/7$ | $r_1 = 1/7 \rightarrow z_4 = 4/7$ |
| $r_2 = 2/7 \rightarrow 5/7$ | $2/7 \rightarrow 4/7$ | $r_2 = 2/7 \rightarrow z_5 = 5/7$ |
| $r_3 = 3/7 \rightarrow 6/7$ | $3/7 \rightarrow 4/7$ | $r_3 = 3/7 \rightarrow z_6 = 6/7$ |
| $r_4 = 4/7 \rightarrow 6/7$ | $4/7 \rightarrow ?$ | $r_4 = 4/7 \rightarrow z_6 = 6/7$ |
| $r_5 = 5/7 \rightarrow 1$ | $5/7 \rightarrow 5/7$ | $r_5 = 5/7 \rightarrow z_7 = 1$ |
| $r_6 = 6/7 \rightarrow 1$ | $6/7 \rightarrow 6/7$ | $r_6 = 6/7 \rightarrow z_7 = 1$ |
| $r_7 = 1 \rightarrow 1$ | $1 \rightarrow 1$ | $r_7 = 1 \rightarrow z_7 = 1$ |

# Ví dụ

- Áp dụng *H* ta có:

| $k$ | $z_k$ | $n_k$ | $n_k/n$ (hist. thật sự) | $p_{\text{out}}(z_k)$ (hist. cần) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0.00 | 0.00 |
| 1 | 1/7 | 0 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 2/7 | 0 | 0.00 | 0.00 |
| 3 | 3/7 | 790 | 0.19 | 0.15 |
| 4 | 4/7 | 1023 | 0.25 | 0.20 |
| 5 | 5/7 | 850 | 0.21 | 0.30 |
| 6 | 6/7 | 985 | 0.24 | 0.20 |
| 7 | 1 | 448 | 0.11 | 0.15 |

# Ví dụ

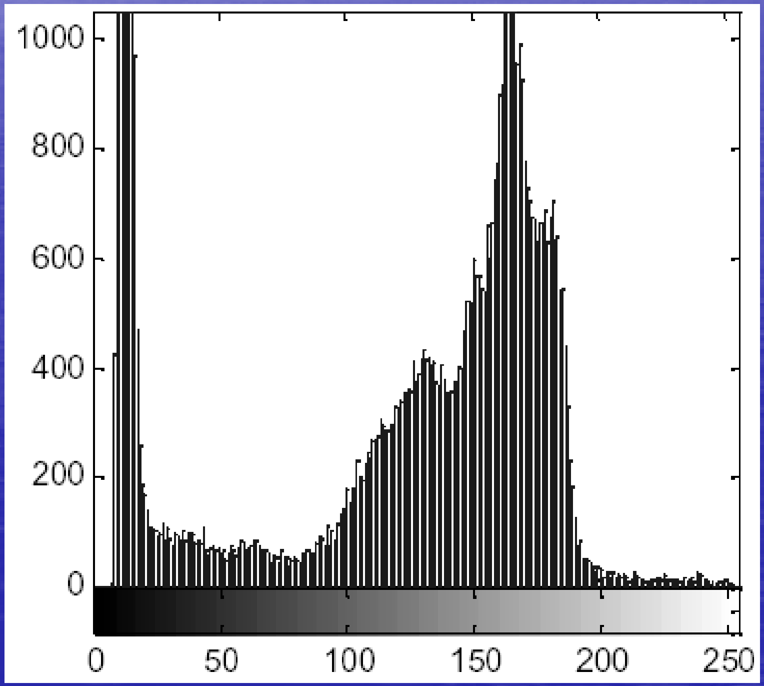


Original histogram
Specified histogram
Output histogram
1200
1000
800
600
400
200
0
1400
0
5
10
grayvalues

# Chỉ định dạng histogram

- Hình dạng của histogram của g không thật sự chính xác nhưng nó gần giống hình dạng histogram mà chúng ta muốn

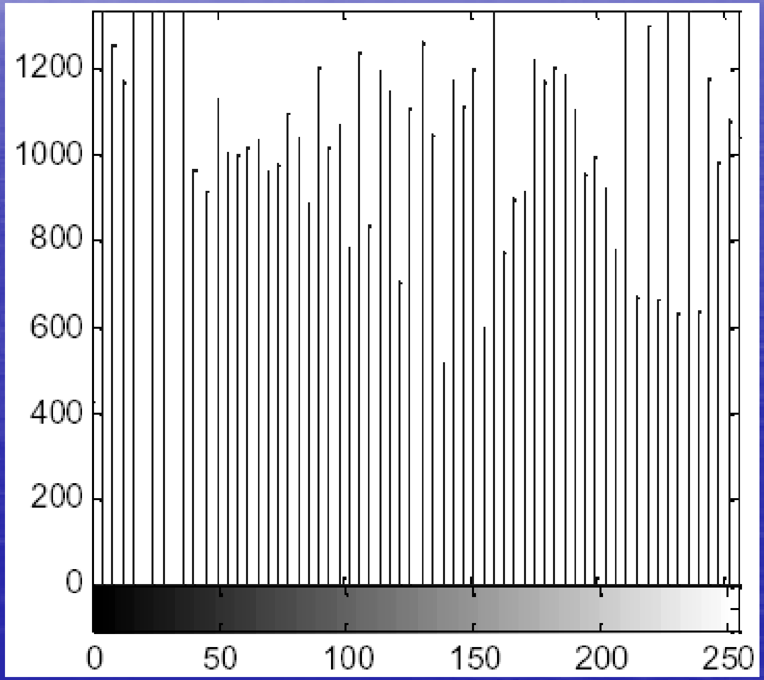
# Ví dụ




ảnh ban đầu và histogram

# Ví dụ

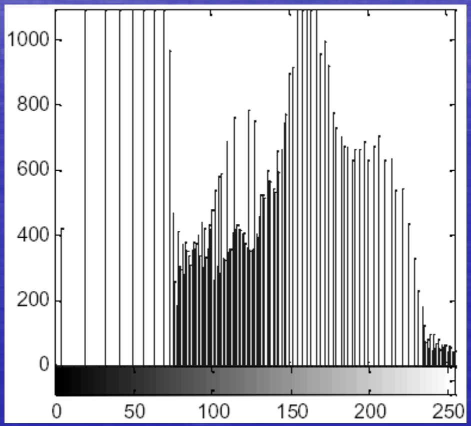
Cân bằng histogram



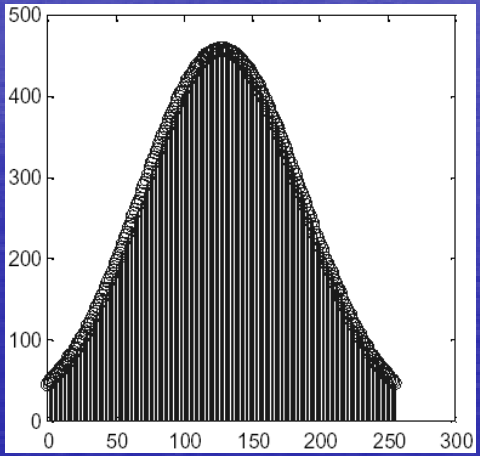

Histogram sau cân bằng

# Ví dụ

Ảnh sau khi hiệu chỉnh theo chỉ định Histogram




Ban đầu Histogram




Dạng Histogram chỉ định

# Tăng cường ảnh bằng cách dùng Histogram cục bộ

- Tăng cường chi tiết từ các vùng nhỏ của ảnh.
- Định nghĩa một hình chữ nhật hay vuông để xem xét láng giềng, từ tâm di chuyển từng pixel một.
- Tính toán histogram cục bộ trên cơ sở chọn láng giềng cho mỗi điểm và dùng cân bằng histogram và histogram chỉ định cho pixel ở tâm.
- Mặt khác dùng thông tin histogram để tăng cường ảnh là phương pháp kết hợp thống kê với với histogram (histogram xem như là hàm mật độ xác suất).
- Ví dụ, chúng ta có thể dùng trung bình (mean) cục bộ và phương sai (variance) để xác định độ tương phản/sáng cục bộ của một pixel.