Chương: Tích phân đường và tích phân mặt

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích, Trường Đại học Giao thông vận tải
E-mail: kiennv@utc.edu.vn & kien.nv.hp@gmail.com

Ngày 16 tháng 4 năm 2024

1 Tích phân đường

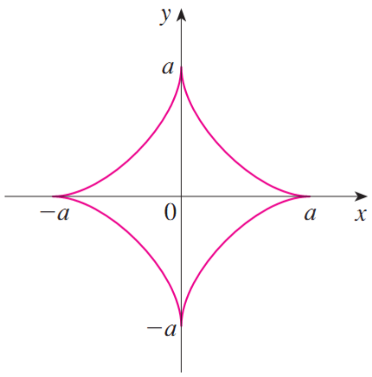
1.1 Phương trình tham số của đường cong

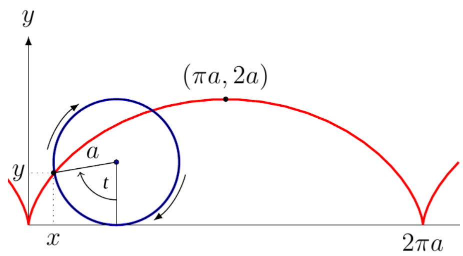
Một đường cong trong mặt phẳng hoặc trong không gian có thể cho dưới dạng tham số. Tức là

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \le t \le b \qquad \text{hoặc trong không gian} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \le t \le b.$$

Ví dụ. Phương trình tham số của một số đường cong trong mặt phẳng

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \ (\text{Astroid}) \qquad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi \ (\text{Cycloid})$$





1. Ellipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$ (Khi t tăng, đường cong chạy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ)

2. Đường tròn: $x^2 + y^2 = a^2$ $\quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$ (Ngược chiều kim đồng hồ)

3. Đường tròn: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$ (Ngược chiều kim đồng hồ) $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi$

4. Đường Astroid: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi$ (Ngược chiều kim đồng hồ)

5. Đoạn thẳng từ (x_0, y_0) đến (x_1, y_1) $\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$

Chú ý: Một đường cong có nhiều cách tham số. Ví dụ nửa đường tròn $x^2+y^2=a^2$, $y \ge 0$, có cách tham số

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi, \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} \quad 0 \le x \le a.$$

Trường hợp riêng

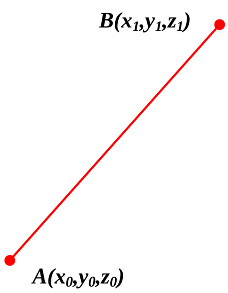
1. $y = f(x),\ a \le x \le b$, coi x là tham số ta có $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \quad a \le x \le b$

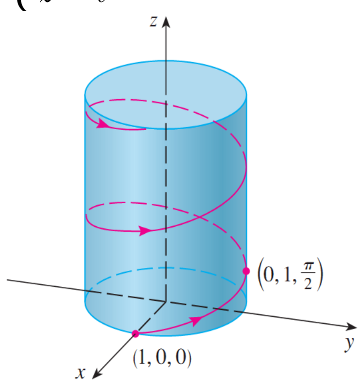
2. $x = g(y),\ a \le y \le b$, coi y là tham số ta có $\begin{cases} x = g(y) \\ y = y \end{cases} \quad a \le y \le b$

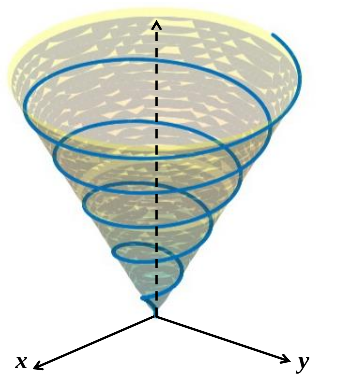
3. $r = r(\varphi),\ a \le \varphi \le b$, coi φ là tham số ta có $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad a \le \varphi \le b$

Ví dụ. Phương trình tham số của một số đường cong trong không gian

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} ,0 \le t \le 4\pi \qquad \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases} ,0 \le t \le 10\pi$$







1.2 Tích phân đường loại 1

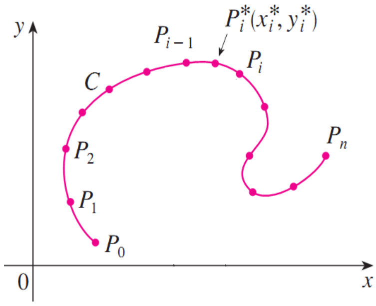
Định nghĩa 1.1. Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên đường cong C. Ta định nghĩa tích phân của hàm $f(x, y)$ trên C như sau. Ta chia C thành n phần với độ dài của các phần là $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Ta chọn một điểm bất kỳ $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trong phần thứ i và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i.$$

Khi đó tích phân của hàm $f(x, y)$ trên C là

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

nếu giới hạn này tồn tại.



Tích phân đường loại 1 có các tính chất như sau:

- Tính tuyến tính: Với a, b là các hằng số

$$\int_C [af(x, y) + bg(x, y)]ds = a\int_C f(x, y)ds + b\int_C g(x, y)ds.$$

- Nếu $C = C_1 \cup C_2$ trong đó điểm đầu của C_2 là điểm cuối của C_1, khi đó

$$\int_C f(x, y)ds = \int_{C_1} f(x, y)ds + \int_{C_2} f(x, y)ds.$$

Cách tính.

- Nếu C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$$

khi đó

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

và

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Trong trường hợp C có phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$, khi đó coi x là tham số ta có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x). \end{cases}$$

Từ đó ta được

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

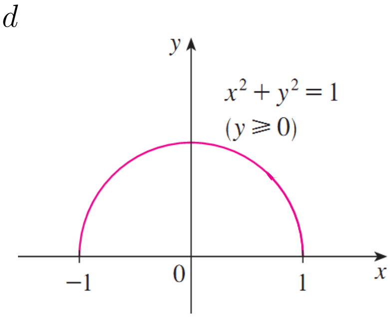
và

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

- Trong trường hợp C có phương trình $x = x(y)$, $a \leq y \leq b$, khi đó coi y là tham số ta có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = x(y) \\ y = y. \end{cases}$$
Từ đó ta nhận được
$$ds = \sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy$$
và
$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(y), y)\sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy.$$

Ví dụ 1.2. Tính tích phân sau
$$I_1 = \int_C (2 + x^2 y) ds,$$
trong đó C là nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Nửa trên của đường tròn có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$
Từ đó ta nhận được
$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = d$$
và



$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= 2\int_0^\pi dt - \int_0^\pi \cos^2 t d(\cos t) \\ &= \left(2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

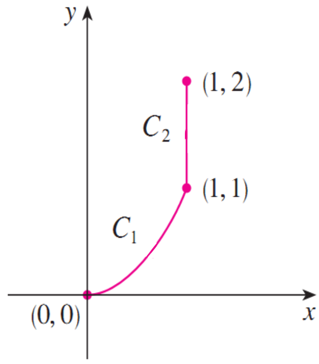
Ví dụ 1.3. Tính tích phân
$$I_2 = \int_C 2x ds,$$
trong đó C gồm C_1 là đường $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ và đoạn thẳng C_2 từ $(1,1)$ đến $(1,2)$.

Giải. Ta có

$$I_2 = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds.$$

C_1 có phương trình $y = x^2$ với $0 \leq x \leq 1$. Khi đó

$$ds = \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$



Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned}\int_{C_1} 2xds &= \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, d(1 + 4x^2) \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + 4x^2)^{1/2}\, d(1 + 4x^2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}.\end{aligned}$$

Tương tự, C_2 có phương trình $x = 1$ với $1 \leq y \leq 2$. Từ đó ta nhận được

$$ds = \sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy = dy$$

và

$$\int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2dy = 2.$$

Vậy

$$\int_C 2xds = \frac{5\sqrt{5} + 11}{6}.$$

Tích phân đường loại 1 trong không gian

Giả sử C là một đường cong trong không gian và $f(x, y, z)$ là hàm xác định trên C. Khi đó tích phân của $f(x, y, z)$ trên C được định nghĩa giống như tích phân đường loại một trong mặt phẳng và được ký hiệu

$$\int_C f(x, y, z)ds.$$

Tích phân đường loại 1 trong không gian có các tính chất giống tích phân đường loại 1 trong mặt phẳng.

Cách tính. Nếu C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad\quad a \leq t \leq b \\ z = z(t) \end{cases}$$

khi đó

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

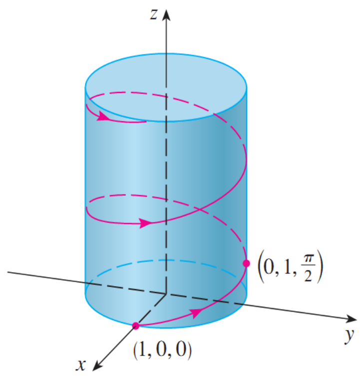
và

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Ví dụ 1.4. Tính tích phân
$$I = \int_C y \sin z ds,$$
trong đó C là đường cong cho bởi phương trình tham số $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 4\pi$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \\ &= \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2}dt. \end{aligned}$$



Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} \int_C y \sin z ds &= \int_0^{4\pi} \sin^2 t(\sqrt{2}dt) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{4\pi} (1 - \cos 2t)dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{4\pi} = 2\sqrt{2}\,\pi. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.5. Tính tích phân
$$I = \int_C yzds,$$
trong đó C là đoạn thẳng từ $A(1, 0, 0)$ đến $B(2, 2, 3)$.

Giải. Vector chỉ phương của đoạn AB là $\vec{n} = (1, 2, 3)$ Ta có phương trình tham số của đoạn thẳng nối $A(1, 0, 0)$ và $B(2, 2, 3)$ là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Từ đó ta nhận được

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\, dt = \sqrt{14}dt$$

và

$$\int_C yzds = \int_0^1 2t \cdot 3t\sqrt{14}\, dt = 6\sqrt{14} \int_0^1 t^2 dt = 6\sqrt{14}\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = 2\sqrt{14}.$$

Ví dụ 1.6. Tính tích phân
$$J = \int_C (z + 1)ds$$
trong đó C là đường cong có phương trình tham số $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $0 \le t \le 1$.

Giải. Ta có

$$\begin{cases} x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t \\ z'(t) = e^t \end{cases}$$

và

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{2e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{3} e^t dt. \end{aligned}$$

Vậy

$$J = \int_0^1 (e^t + 1)\sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} \frac{(e^t + 1)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(e^2 + 2e - 3).$$

Ứng dụng của tích phân đường loại 1

- Độ dài của đường cong C là
$$\ell = \int_C ds.$$

- Giả sử rằng $\rho(x, y)$ là khối lượng riêng tại điểm (x, y) của một sợi dây mảnh có hình dạng là đường cong C. Khi đó khối lượng m của sợi dây cho bởi
$$m = \int_C \rho(x, y) ds.$$

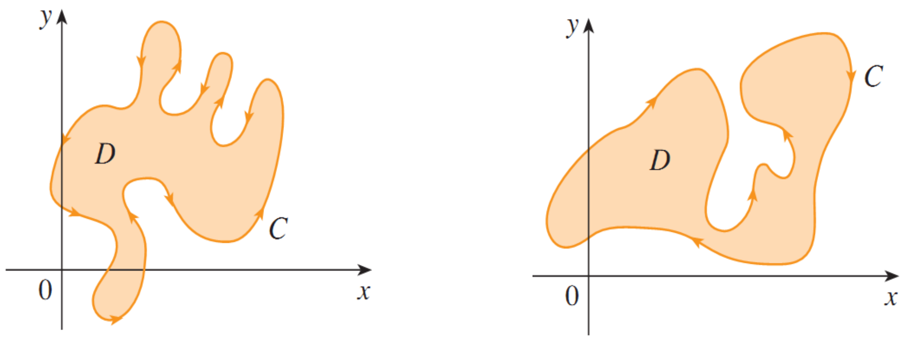
- Trọng tâm của sợi dây với hàm mật độ $\rho(x, y)$ là điểm $(\bar{x}, \bar{y})$, trong đó
$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y) ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y) ds.$$

1.3 Tích phân đường loại 2

Trước hết ta định nghĩa đường cong đã được định hướng.

Định nghĩa 1.7.
- Một đường cong đã được định hướng tức là đã chỉ ra điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối. Hướng từ điểm đầu đến điểm cuối gọi là hướng dương.
- Nếu C là đường cong kín không tự cắt thì hướng dương được quy ước là hướng ngược chiều kim đồng hồ.

(a) Hướng dương (b) Hướng âm



Cho $C = \widetilde{AB}$ là một đường cong đã được định hướng từ A đến B. Giả sử $(P(x,y), Q(x,y))$ là các hàm xác định trên một miền chứa C. Ta chia đường cong C thành n phần bởi các điểm chia $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$. Giả sử rằng $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$. Ta chọn một điểm bất kỳ (x_i^*, y_i^*) trong cung $\widetilde{M_{i-1}M_i}$ và lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i.$$

Khi đó ta định nghĩa tích phân của hai hàm $(P(x,y), Q(x,y))$ dọc theo C là giới hạn

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i$$

nếu giới hạn tồn tại. Để ngắn gọn ta viết $\int_C Pdx + Qdy$. Nếu C là đường cong kín, ta ký hiệu

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Nếu đặt $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$, trong vật lý ta hay dùng kí hiệu

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}, \qquad d\overrightarrow{r} = (dx, dy).$$

Tính chất.

- Tính tuyến tính giống các tích phân khác.
- Nếu C nằm trên cung AB ta có

$$\int_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = \int_{\widetilde{AC}} Pdx + Qdy + \int_{\widetilde{CB}} Pdx + Qdy.$$

- Nếu đổi chiều của đường cong thì tích phân đường loại hai đổi dấu

$$\int_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\widetilde{BA}} Pdx + Qdy$$

Cách tính.

- Nếu C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

với $t = a$ ứng với điểm đầu và $t = b$ ứng với điểm cuối của C (không nhất thiết $a < b$), khi đó

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big]dt.$$

- Nếu C có phương trình $y = y(x)$ với $x = a$ ứng với điểm đầu và $x = b$ ứng với điểm cuối của C. Khi đó

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\big]dx.$$

- Nếu C có phương trình tham số $x = x(y)$ với $y = a$ ứng với điểm đầu và $y = b$ ứng với điểm cuối của C, khi đó

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\big]dy.$$

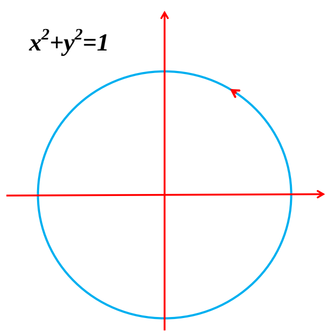
Ví dụ 1.8. Tính tích phân

$$I = \oint_{C^+} -ydx + xdy,$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \big[-\sin t(-\sin t)dt + \cos t(\cos t)dt\big] \\ &= \int_0^{2\pi} \big[\sin^2 t + \cos^2 t\big]dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.9. Tính tích phân

$$J = \int_C (2x + y)dx + (x - 2y)dy,$$

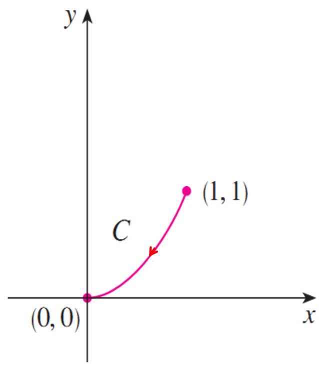
trong đó C là đường $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $O(0,0)$.

Giải. Ta có C có phương trình $y = x^2$ và x đi từ 1 đến 0 ($x = 1$ ứng với điểm đầu và $x = 0$ ứng với điểm cuối). Từ đó ta nhận được

$$y' = 2x$$

và

$$\begin{aligned} J &= \int_1^0 \left[(2x + x^2)dx + (x - 2x^2)2xdx\right] \\ &= -\int_0^1 (-4x^3 + 3x^2 + 2x)dx \\ &= -\left(-x^4 + x^3 + x^2\right)\Big|_0^1 \\ &= -1. \end{aligned}$$



Ví dụ 1.10. Tính tích phân

$$\int_C y^2dx + xdy,$$

trong đó

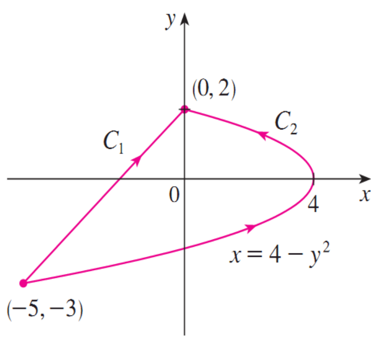
(a) $C = C_1$ là đoạn thẳng từ $(-5, -3)$ đến $(0, 2)$

(b) $C = C_2$ là một phần của Parabol $x = 4 - y^2$ từ $(-5, -3)$ đến $(0, 2)$.

Giải.

(a) Phương trình tham số của đoạn thẳng từ $(-5, -3)$ đến $(0, 2)$ là

$$\begin{cases} x = 5t - 5 \\ y = 5t - 3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$



Khi đó

$$\begin{aligned} \int_C y^2dx + xdy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5dt) + (5t - 5)(5dt) \\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)dt \\ &= 5\left(\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right)\Big|_0^1 = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

(b) Phương trình của C trong trường hợp này là $x = 4 - y^2$ với $-3 \le y \le 2$. Từ đó ta được

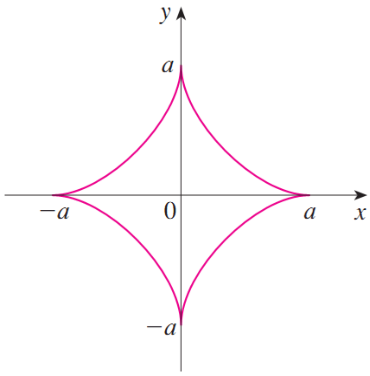
$$\begin{aligned} \int_C y^2dx + xdy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y)dy + (4 - y^2)dy \\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)dy = \left(-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right)\Big|_{-3}^2 = \frac{245}{6}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta thấy, hai đường cong có chung điểm đầu và điểm cuối nhưng giá trị tích phân khác nhau.

Ví dụ 1.11. Tính tích phân
$$\oint_{C+} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}},$$
trong đó C là đường Astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

Giải.

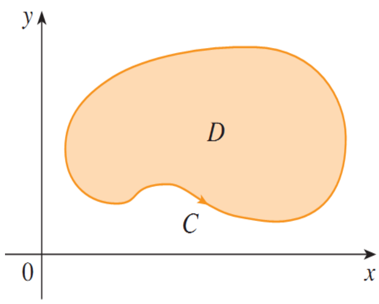
Phương trình tham số của đường Astroid là
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Từ đó ta nhận được
$$\begin{cases} dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt \\ dy = 3a\sin^2 t \cos t\, dt. \end{cases}$$
và
$$\begin{aligned}\oint_{C+} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^6 t(3a\sin^2 t\cos t) - a^2\sin^6 t(-3a\cos^2 t\sin t)}{a^{5/3}\cos^5 t + a^{5/3}\sin^5 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3a^3\left[\cos^7 t\sin^2 t + \sin^7 t\cos^2 t\right]}{a^{5/3}(\cos^5 t + \sin^5 t)} dt \\ &= 3a^{4/3}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^5 t + \sin^5 t)}{\cos^5 t + \sin^5 t} dt \\ &= 3a^{4/3}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t dt.\end{aligned}$$
Dùng công thức $\sin t\cos t = \frac{\sin(2t)}{2}$ và $\sin^2(2t) = \frac{1-\cos(4t)}{2}$ ta được
$$\begin{aligned}\oint_{C+} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} &= \frac{3a^{4/3}}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt \\ &= \frac{3a^{4/3}}{8}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt \\ &= \frac{3a^{4/3}}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^{4/3}\pi}{4}.\end{aligned}$$

Định lý Green

Định lý Green thể hiện mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 trên một đường cong kín C và tích phân hai lớp trong miền D mà C bao quanh.



Định lý 1.12. *Cho C là một đường cong kín không tự cắt, định hướng dương (ngược chiều kim đồng hồ), và D là miền có biên là C. Nếu $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các hàm có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền chứa D, khi đó ta có*

$$\oint_{C+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

Ví dụ 1.13. Tính tích phân

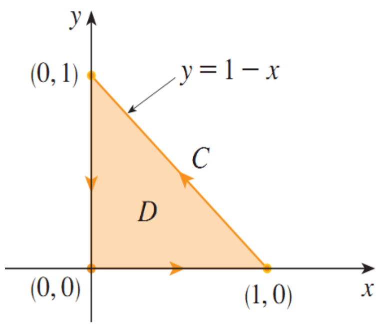
$$H = \oint_{C+} x^4 dx + 2xydy,$$

trong đó C là biên của tam giác OAB từ $O(0,0) \to A(1,0) \to B(0,1) \to O(0,0)$.

Giải.

Gọi D là tam giác OAB. Đặt $P(x,y) = x^4$ và $Q(x,y) = 2xy$, dùng Định lý Green ta có

$$\begin{aligned} H &= \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy \\ &= \iint_D (2y-0)dxdy = \iint_D 2ydxdy. \end{aligned}$$



Vì

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x. \end{cases}$$

ta nhận được

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2ydy \\ &= \int_0^1 y^2\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.14. Tính tích phân

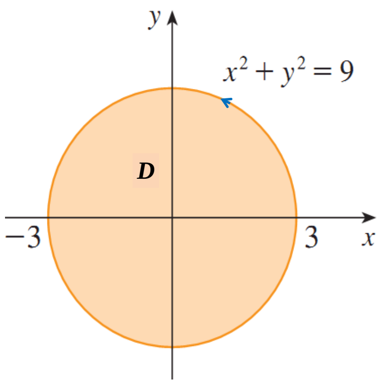
$$J = \oint_{C+} (3y - e^{\sin x})dx + (x + \sqrt{y^4 + y^2 + 1})dy,$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

Giải.

Gọi $D = \{x^2 + y^2 \le 9\}$. Áp dụng Định lý Green với

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 3y - e^{\sin x} \\ Q(x,y) &= x + \sqrt{y^4 + y^2 + 1} \end{aligned}$$



ta có

$$\begin{aligned} J &= \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint_D (1-3)dxdy \\ &= -2\iint_D dxdy. \end{aligned}$$

Đổi biến sang tọa độ cực ta nhận được

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \end{cases} \quad dxdy = rd\varphi dr$$

từ đó

$$J = -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 rdr = -\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^3 d\varphi = -18\pi.$$

Ví dụ 1.15. Tính tích phân

$$I = \oint_{C^-} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$$

trong đó C là đường $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Giải. Trước tiên ta có

$$I = -\oint_{C^+} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy.$$

Miền D bị chặn bởi C là hình Ellipse $\left\{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \le 1\right\}$. Với $P(x,y) = xy + x + y$ và $Q(x,y) = xy + x - y$, áp dụng Định lý Green ta có

$$\begin{aligned} I &= -\iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = -\iint_D (y + 1 - (x+1))dxdy \\ &= -\iint_D (y - x)dxdy = \iint_D (x - y)dxdy. \end{aligned}$$

Đổi biến sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = 5r\cos\varphi \\ y = 4r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1, \end{cases} \quad dxdy = 4\cdot 5rdrd\varphi = 20rdrd\varphi$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (5r\cos\varphi - 4r\sin\varphi)20rdr = 20\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (5\cos\varphi - 4\sin\varphi)r^2 dr \\ &= 20\int_0^{2\pi} (5\cos\varphi - 4\sin\varphi)\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{20}{3}\int_0^{2\pi} (5\cos\varphi - 4\sin\varphi)d\varphi \\ &= \frac{20}{3}(5\sin\varphi + 4\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Chú ý rằng ta không thể áp dụng định lý Green trong trường hợp $P(x,y)$ hoặc $Q(x,y)$ không có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D. Ta xét ví dụ sau:

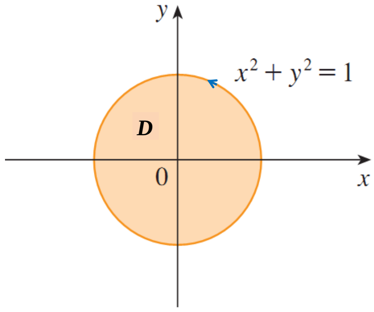
Ví dụ 1.16. Tính tích phân

$$K = \oint_{C^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Đường tròn $x^2+y^2=1$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$



Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t)+\cos t(\cos t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Chú ý. Gọi D là hình tròn $\{x^2+y^2\le 1\}$ và $P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. Ta có

$$Q'_x=\frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

và

$$P'_y=-\frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Nếu áp dụng Định lý Green ta nhận được

$$K=\iint_D (Q'_x-P'_y)dxdy=\iint_D\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dxdy=0.$$

Kết quả này khác kết quả 2π ở trên. Tuy nhiên với bài này ta không được phép áp dụng Định lý Green bởi $P(x,y)$ (và $Q(x,y)$) là các hàm không xác định tại điểm $(0,0)$ do đó không liên tục trên D. Vì vậy nếu áp dụng sẽ cho kết quả sai.

Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

Cho C_1 và C_2 là hai đường cong mà có cùng điểm đầu A và điểm cuối B. Nói chung ta có

$$\int_{C_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy \ne \int_{C_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

xem nhận xét ở trên. Cho $(P(x,y),Q(x,y))$ là các hàm liên tục trên D và C là một đường cong trong D với điểm đầu là A và điểm cuối là B. Ta nói rằng tích phân

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

không phụ thuộc vào đường đi nếu

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{C'} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

với C' một đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối với C.

Định lý 1.17. *Cho $(P(x,y),Q(x,y))$ là các hàm xác định trên D và C là một đường cong trong D. Giả sử rằng P và Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và*

$$Q'_x=P'_y.$$

Khi đó

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

không phụ thuộc vào đường đi.

Ví dụ 1.18. Cho A và B là hai điểm cố định trọng mặt phẳng Oxy và C là một đường cong từ A đến B. Chỉ ra rằng các tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi

$$\int_C \frac{y^2}{2}\cos x dx + y \sin x dy$$

.

Giải. Đặt $P(x,y) = \frac{y^2}{2}\cos x$ và $Q(x,y) = y\sin x$ ta có

$$P'_y = y\cos x, \qquad Q'_x = y\cos x.$$

Từ đó ta nhận được $P'_y = Q'_x$. Như vậy tích phân trên không phụ thuộc vào đường đi.

Ví dụ 1.19. Tính tích phân sau

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,2)} e^{xy}(1+xy)dx + e^{xy}x^2dy.$$

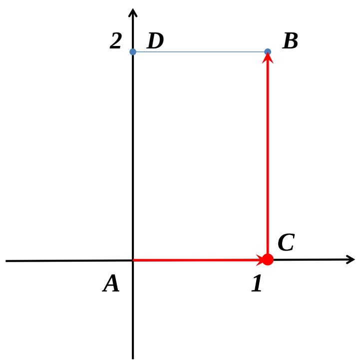
Giải. Đặt $P(x,y) = e^{xy}(1+xy)$ và $Q(x,y) = e^{xy}x^2$ ta có

$$P'_y = xe^{xy}(1+xy) + xe^{xy} = e^{xy}(2x + x^2y)$$

và

$$Q'_x = 2xe^{xy} + e^{xy}x^2y = e^{xy}(2x+x^2y).$$

Như vậy tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường nối hai điểm $A(0,0)$ và $B(1,2)$. Ta chọn đường nối $A(0,0)$ và $B(1,2)$ là đoạn AC có phương trình $y=0$ với $0 \le x \le 1$ và đoạn CB có phương trình $x = 1$ với $0 \le y \le 2$.



Khi đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{AC} e^{xy}(1+xy)dx + e^{xy}x^2dy + \int_{CB} e^{xy}(1+xy)dx + e^{xy}x^2dy \\ &= \int_0^1 dx + \int_0^2 e^y dy = e^2. \end{aligned}$$

Chú ý: Ta cũng có thể chọn đường nối hai điểm $A(0,0)$ và $B(1,2)$ là đoạn AB có phương trình $y = 2x$ với $0 \le x \le 1$ hoặc đường đi từ A tới D rồi tới B.

Tích phân đường loại 2 trong không gian

Cho $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ là các hàm xác định trên một miền chứa đường cong C đã được định hướng. Khi đó tích phân của $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ trên C được định nghĩa tương tự như tích phân đường loại 2 trong mặt phẳng và được ký hiệu

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Tích phân đường loại hai trong không gian được tính như sau: Nếu C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

với $t = a$ ứng với điểm đầu và $t = b$ ứng với điểm cuối của C. Khi đó

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)dt.$$

Ví dụ 1.20. Tính tích phân

$$I = \int_C zdx + xdy + ydz,$$

trong đó C là đoạn thẳng đi từ $A(0,1,2)$ đến $B(1,3,4)$.

Giải. Ta có véc tơ chỉ phương của đoạn thẳng AB là $\vec{n} = (1,2,2)$. Do đó phương trình tham số của đoạn thẳng từ $A(0,1,2)$ đến $B(1,3,4)$ là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \quad\quad 0 \le t \le 1. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 \big[(2+2t)dt + t(2dt) + (1+2t)(2dt)\big] = \int_0^1 (8t+4)dt = \big(4t^2+4t\big)\Big|_0^1 = 8.$$

2 Tích phân mặt

2.1 Tích phân mặt loại một

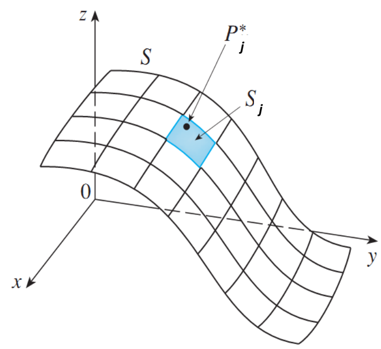
Định nghĩa 2.1. Cho $f(x,y,z)$ là một hàm ba biến mà miền xác định của nó chứa mặt cong S. Ta chia mặt S thành n phần S_j, $j = 1,\dots,n$. Chọn điểm P_j^* trên mỗi phần S_j và gọi ΔS_j là diện tích của phần S_j. Ta lập tổng

$$\sum_{j=1}^{n} f(P_j^*)\Delta S_j$$

Khi đó tích phân của hàm $f(x,y,z)$ trên mặt S được định nghĩa là

$$\iint_S f(x,y,z)dS := \lim_{\max \Delta S_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(P_j^*)\Delta S_j$$

nếu giới hạn tồn tại.



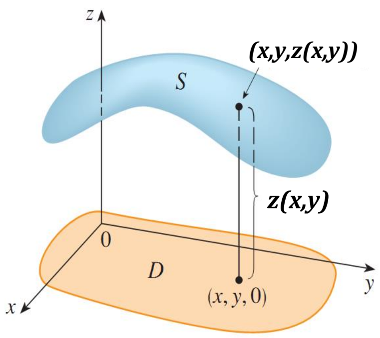
Tính chất

Tích phân mặt loại một có các tính chất như sau:

- Tuyến tính: Cho α và β là hai hằng số ta có
$$\iint_S [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dS = \alpha \iint_S f(x,y,z)dS + \beta \iint_S g(x,y,z)dS.$$
- Nếu S là hợp của hai mặt S_1 và S_2 mà chúng chỉ có giao trên biên, khi đó
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS$$

Tính tích phân mặt loại 1

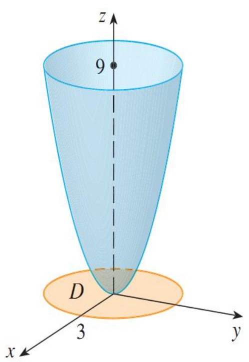
Để tính tích phân mặt loại một ta đưa về tích phân hai lớp. Giả sử mặt S là đồ thị của một hàm hai biến $z = z(x,y)$ với $(x,y) \in D$, tức là, D là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy.

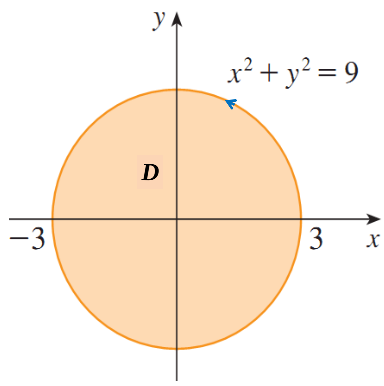


Khi đó
$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dxdy$$
và
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy.$$

Ví dụ 2.2. Tính tích phân
$$\iint_S \sqrt{4z+1}dS,$$
trong đó S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 9$.

Giải. Ta có hình vẽ như sau:





Mặt S có phương trình $z = x^2 + y^2$ và có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$. Các đạo hàm riêng của $z = x^2 + y^2$ là

$$z'_x = 2x, \qquad z'_y = 2y.$$

Từ đó ta có

$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dxdy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$$

và

$$\iint_S \sqrt{4z+1}dS = \iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy$$
$$= \iint_D (4x^2+4y^2+1)dxdy.$$

Đổi biến sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3, \end{cases} \quad dxdy = rdrd\varphi$$

ta nhận được

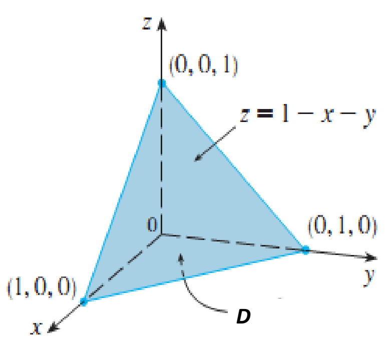
$$\iint_S \sqrt{4z+1}dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (4r^2+1)\, rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (4r^3+r)dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(r^4 + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^3 d\varphi = \frac{191\pi}{2}.$$

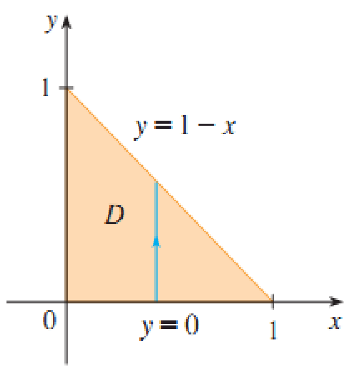
Ví dụ 2.3. Tính tích phân

$$\iint_S (1-x-z)dS,$$

trong đó S là mặt $x+y+z=1$ với $x, y, z \geq 0$.

Giải. Hình vẽ





Mặt S có phương trình $z = 1 - x - y$ và có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền D. Khi đó

$$z'_x = -1, \qquad z'_y = -1.$$

Từ đó ta nhận được

$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\,dxdy = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1}\,dxdy = \sqrt{3}dxdy$$

và

$$\iint_S (1 - x - z)dS = \iint_D (1 - x - (1 - x - y))\sqrt{3}dxdy = \sqrt{3}\iint_D ydxdy.$$

Ta có

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x. \end{cases}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}\iint_S (1 - x - z)dS &= \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} ydy = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3}(x - 1)^3\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.4. Tính tích phân

$$\iint_S ydS,$$

trong đó S là mặt $z = x + y^2$ với $0 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 2$.

Giải. Vì

$$z'_x = 1, \quad z'_y = 2y$$

ta có

$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\,dxdy = \sqrt{1^2 + (2y)^2 + 1}\,dxdy = \sqrt{2 + 4y^2}\,dxdy.$$

Từ đó ta nhận được

$$\iint_S ydS = \iint_D y\sqrt{2 + 4y^2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}dy.$$

Đặt $\sqrt{1 + 2y^2} = t$ ta được $t^2 = 1 + 2y^2$ và $2tdt = 4ydy$ hay $ydy = tdt/2$. Khi đó

$$\iint_S ydS = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 dx \int_1^3 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{t^3}{3}\Big|_1^3 dx = \frac{13\sqrt{2}}{3}\int_0^1 dx = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

Cách tính trong các trường hợp khác

Trong trường hợp mặt cong S là đồ thị của hàm hai biến $x = x(y, z)$ hoặc $y = y(x, z)$ ta có các công thức dưới đây:

- Giả sử mặt S là đồ thị của một hàm hai biến $x = x(y, z)$ với $(y, z) \in D_{yz}$, tức là D_{yz} là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oyz. Khi đó

  $$dS = \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}\,dydz$$

  và

  $$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}\,dydz.$$

- Giả sử mặt S là đồ thị của một hàm hai biến $y = y(x, z)$ với $(x, z) \in D_{xz}$, tức là D_{xz} là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxz. Khi đó
$$dS = \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1}\, dxdz$$
và
$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1}dxdz.$$

Ví dụ 2.5. Tính tích phân
$$I = \iint_S (y^2 + z^2)dS,$$
trong đó S là phần mặt $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ nằm dưới mặt phẳng $x = 1$.

Giải. Ta có mặt S là mặt nón có phương trình $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ và có hình chiếu xuống Oyz là hình tròn $D_{yz} = \{y^2 + z^2 \le 1\}$. Khi đó
$$x'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad x'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$
và
$$dS = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\, dydz = \sqrt{2}\, dydz.$$
Từ đó ta có
$$I = \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2)\sqrt{2}dydz.$$
Đổi biến sang tọa độ cực
$$\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1, \end{cases} \quad dydz = rdrd\varphi$$
Vậy
$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Ứng dụng

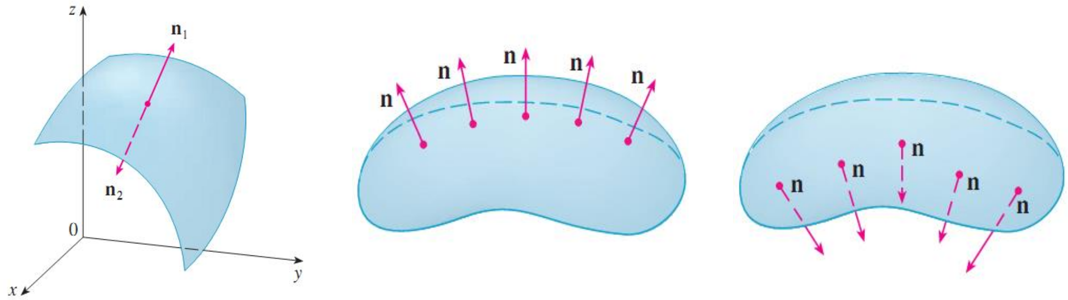
Nếu một bản mỏng có hình dạng là mặt cong S và có khối lượng riêng tại (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$, khi đó:

- Diện tích của mặt cong S là
$$A = \iint_S dS$$
- Khối lượng của bản đó được tính theo công thức
$$m = \iint_S \rho(x, y, z)dS.$$
- Tọa độ trọng tâm là điểm $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ trong đó
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)dS.$$

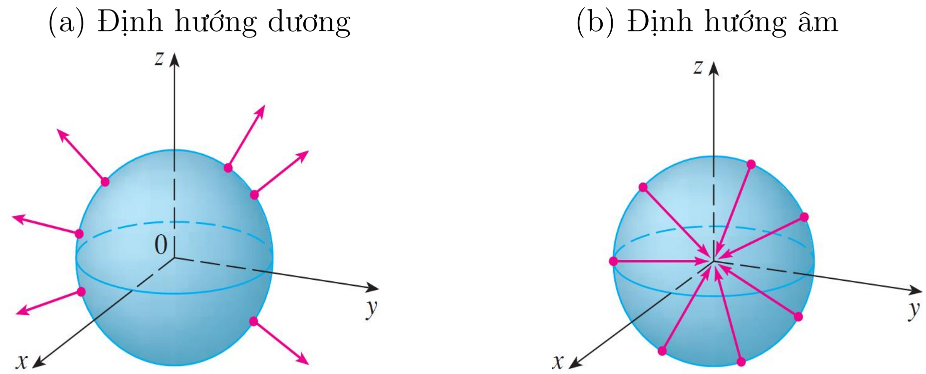
2.2 Tích phân mặt loại hai

Mặt cong đã được định hướng

Trong phần này ta chỉ xét mặt cong hai phía. Cho mặt cong S, tại mỗi điểm (x, y, z) trên mặt S có hai vector pháp tuyến đơn vị $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Nếu ta chọn một hướng pháp tuyến $\vec{n}$ tại mỗi điểm (x, y, z) sao cho pháp tuyến $\vec{n}$ thay đổi liên tục trên S, khi đó S được gọi là mặt cong đã được định hướng với pháp tuyến $\vec{n}$.



Đối với mặt cong kín (tức là biên của một khối vật thể trong không gian) ta quy ước hướng dương là hướng pháp tuyến hướng ra ngoài.



Nếu mặt cong S là đồ thị của hàm số $z = z(x, y)$. Đặt $F(x, y, z) = z - z(x, y)$. Khi đó vector pháp tuyến của mặt cong này là

$$\vec{u} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

Vector có độ dài đơn vị (=1) cùng hướng với $\vec{u}$ là

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}(-z'_x, -z'_y, 1).$$

Do $\vec{n}$ có thành phần thứ 3 dương nên $\vec{n}$ tạo với tia Oz một góc nhỏ hơn $\pi/2$. Hay $\vec{n}$ là pháp tuyến hướng lên trên.

Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 2.6. Giả sử $\overrightarrow{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ là một hàm vector xác định trên một miền chứa mặt cong S đã được định hướng với pháp tuyến đơn vị là $\vec{n}$.

Chú ý rằng $\vec{n}$ thay đổi theo (x, y, z). Tích phân của hàm $\overrightarrow{F}$ trên mặt cong S được định nghĩa là

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n} dS$$

và được ký hiệu:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy := \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Tính chất. Ngoài các tính chất giống tích phân mặt loại một, tích phân mặt loại hai đổi dấu nếu ta đổi hướng của mặt cong, tức là:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = -\iint_{S^-} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Cách tính

Nếu S là đồ thị của hàm 2 biến $z = z(x, y)$ với định hướng lên trên, khi đó vector pháp tuyến có độ dài đơn vị là

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}(-z'_x, -z'_y, 1),$$

và tích phân mặt loại hai đưa được về

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S \frac{-Pz'_x - Qz'_y + R}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} dS.$$

Vì

$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy$$

ta nhận được

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$
$$= \iint_D \big(- P(x, y, z(x, y))z'_x(x, y) - Q(x, y, z(x, y))z'_y(x, y) + R(x, y, z(x, y))\big)dxdy$$

trong đó D là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy.

Ví dụ 2.7. Tính tích phân

$$I = \iint_S dydz + dxdz + z^2dxdy,$$

trong đó S là nửa trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geq 0)$ với pháp tuyến hướng lên trên.

Giải. Hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là miền $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vì $z \geq 0$ ta có $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Từ công thức tính ở trên ta nhận được

$$I = \iint_D \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 - x^2 - y^2 \right) dxdy$$

Đổi biến sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1, \end{cases} \quad dxdy = r dr d\varphi.$$

Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}} + 1 - r^2 \right) r dr \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}} + r - r^3 \right) d\varphi. \\ &= \int_0^1 \left[\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}} + r\varphi - r^3\varphi \right]_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Công thức Ostrogradsky-Gauss

Nếu S là một mặt cong kín bao quanh miền V với định hướng ra bên ngoài và P, Q, R là các hàm có các đạo hàm riêng cấp một liên tục, khi đó

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z) dxdydz.$$

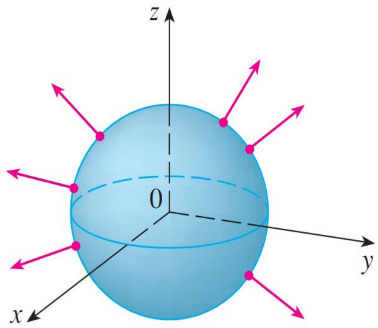
Ví dụ 2.8. Tính tích phân sau

$$J = \iint_S zdydz + ydxdz + xdxdy,$$

trong đó $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ với pháp tuyến hướng ra ngoài.

Giải. Dùng công thức Ostrogradsky-Gauss với $P = z$, $Q = y$, và $R = x$ ta nhận được

$$\begin{aligned} J &= \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z) dxdydz \\ &= \iiint_V (0 + 1 + 0) dxdydz \\ &= \iiint_V dxdydz \end{aligned}$$



trong đó $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

Đổi biến sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1, \end{cases} \quad dxdydz = r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$$

Khi đó

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2 dr\right) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.9. Tính tích phân

$$K = \iint_S ydydz + xdxdz + z(x^2+y^2)dxdy,$$

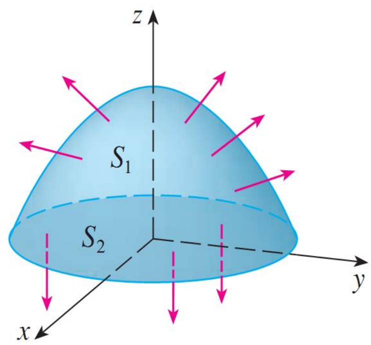
trong đó S là biên của miền V bị chặn bởi mặt $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng $z = 0$ với pháp tuyến hướng ra ngoài.

Giải. Kí hiệu

$$P = y, \qquad Q = x, \qquad R = z(x^2+y^2).$$

Dùng công thức Ostrogradsky-Gauss ta có

$$\begin{aligned} K &= \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz \\ &= \iiint_V (0 + 0 + x^2 + y^2)dxdydz \\ &= \iiint_V (x^2+y^2)dxdydz. \end{aligned}$$



Ta có miền V được biểu diễn

$$V = \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

trong đó $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$.

Từ đó

$$K = \iint_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2} (x^2+y^2)dz\right)dxdy = \iint_D (1-x^2-y^2)(x^2+y^2)dxdy$$

Đổi biến sang tọa độ cực ta nhận được

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1, \end{cases} \quad dxdy = rdrd\varphi$$

và

$$K = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)r^2 \cdot rdr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

HẾT