ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Nguyễn Văn Kiên

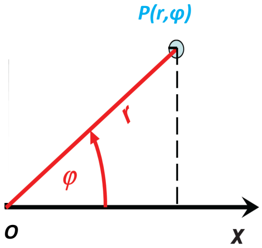
Bộ môn Toán Giải tích

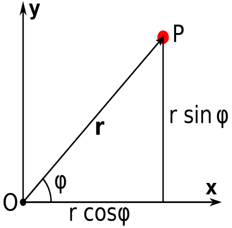
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 8 tháng 11 năm 2023

Tọa độ cực

Lấy điểm O cố định trong mặt phẳng, gọi là gốc cực, tia nằm ngang Ox, gọi là trục cực. Nếu P là một điểm trong mặt phẳng, ta đặt $r = PO$ và $\varphi = \widehat{xOP}$. Khi đó cặp số (r, φ) gọi là tọa độ cực của P.





Nếu trục cực là tia Ox trong hệ trục vuông góc thì

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Đường cong trong mặt phẳng có thể được cho trong tọa độ cực dưới dạng

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

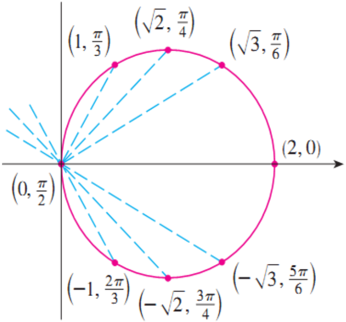
Ví dụ. Vẽ đường

$$r = 2\cos\varphi.$$

Ta có bảng các giá trị

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

Đây là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

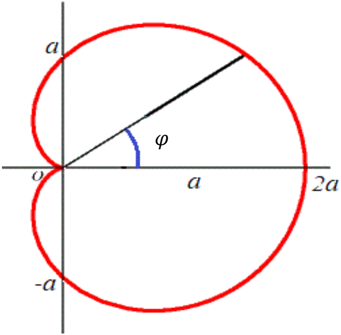


Ví dụ. Đường cardioid

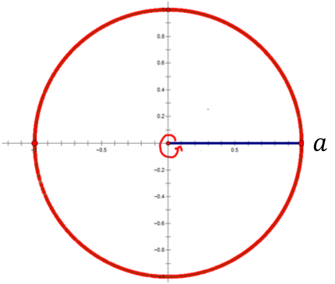
$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

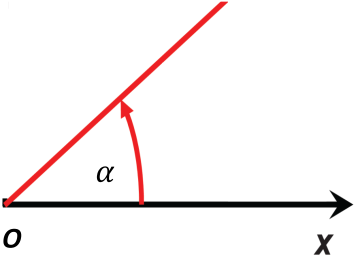
Ta có bảng các giá trị

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
r	2a	$\frac{(2+\sqrt{3})a}{2}$	$\frac{(2+\sqrt{2})a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	a	0



Đường tròn $r = a$ và tia $\varphi = \alpha$





Đường tròn $r = a$

Tia $\varphi = \alpha$

Đường cong cho dưới dạng tham số

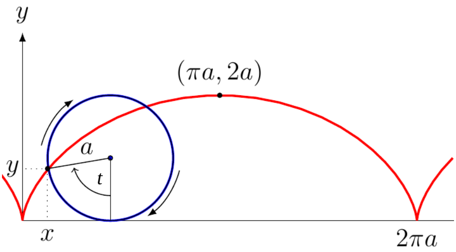
Một đường cong trong mặt phẳng có thể cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

Với mỗi t ta được một điểm $(x(t), y(t))$. Tập hợp các điểm như vậy khi $t \in [a, b]$ vẽ thành một đường cong trong mặt phẳng Oxy.

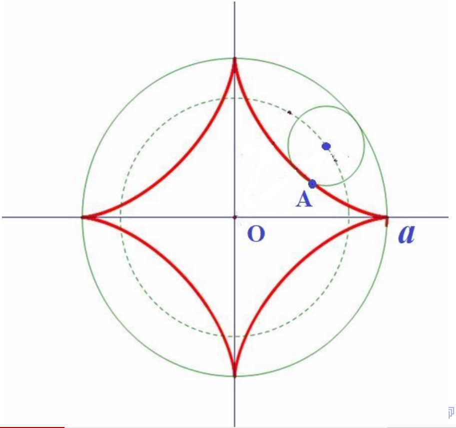
Ví dụ. Đường Cycloid

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



Ví dụ. Đường astroid trong tọa độ Oxy có phương trình là $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Dạng tham số của đường này là

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$



Dạng tham số của một số đường cong khác

1. Đường tròn: $x^2 + y^2 = a^2$ $\quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi$

2. Tròn: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ $\quad \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi$

3. Elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi$

Độ dài đường cong

Gọi L là độ dài của cung AB

- Nếu cung AB có phương trình $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ khi đó

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

- Nếu AB có dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$, khi đó

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

- Nếu AB có dạng $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, khi đó

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Ví dụ: Tính độ dài của đường cong

$$y = \ln\cos x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

Giải. Ta có $y'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$. Độ dài của đường cong là

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} \\
&= -\int_0^{\pi/4} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|_0^{\pi/4} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}/2 - 1}{\sqrt{2}/2 + 1}\right|
\end{aligned}$$

Ví dụ: Tính độ dài của đường astroid

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải. Do tính đối xứng nên ta có

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 dt} \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{[-3a\cos^2 t \sin t]^2 + [3a\sin^2 t\cos t]^2}\ dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\ dt \\ &= 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\ dt = 12a\int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) \\ &= 12a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

Ví dụ: Tính độ dài của các đường cardioid

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

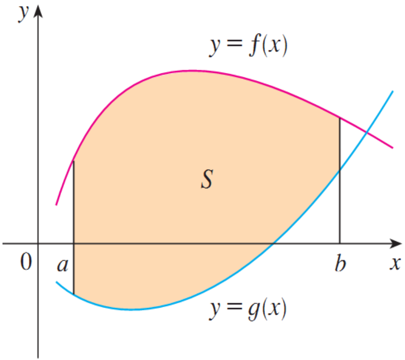
Giải. Ta có $r' = -a\sin\varphi$. Do tính đối xứng nên độ dài của đường cong là

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2 d\varphi} \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{[a(1+\cos\varphi)]^2 + (-a\sin\varphi)^2 d\varphi} \\
&= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi d\varphi} \\
&= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)} d\varphi \\
&= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a
\end{aligned}$$

Tính diện tích của miền phẳng

Diện tích của miền giới hạn bởi đường $x = a$, $x = b$ và các đường cong có phương trình $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Đường cong cho dưới dạng tham số

Diện tích của miền giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

và trục Ox cho bởi công thức sau

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)| dt.$$

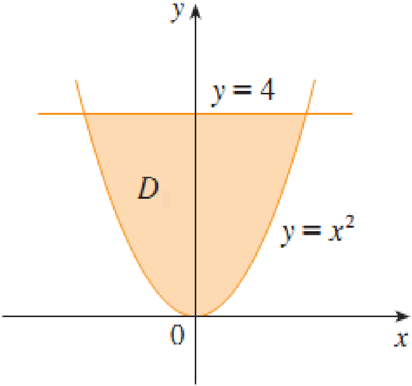
Nhận xét. Áp dụng công thức ở slide trước với $g(x) = 0$ và thực hiện phép đổi biến $x = x(t)$ ta được công thức như trên.

Ví dụ. Tìm diện tích của miền D giới hạn bởi các đường

$$y = 4 \quad \text{và} \quad y = x^2.$$

Giải. Hoành độ giao điểm là

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$



Vậy diện tích cần tìm là

$$S = \int_{-2}^{2} |4 - x^2| dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx$$
$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Ví dụ. Tìm diện tích của miền giới hạn bởi các đường

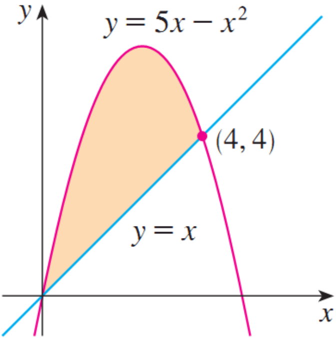
$$y = x \quad \text{và} \quad y = 5x - x^2.$$

Giải. Hoành độ giao điểm là

$$5x - x^2 = x \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ x = 4.$$

Vậy diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 |(5x - x^2) - x|dx \\ &= \int_0^4 |4x - x^2|dx \\ &= \int_0^4 (4x - x^2)dx \\ &= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$



Ví dụ: Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường $y = 0$ và

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

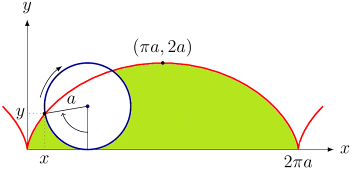
Giải. Do $x' = a(1 - \cos t)$, ta có diện tích là

$$S = \int_0^{2\pi} |y(t)x'(t)|dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

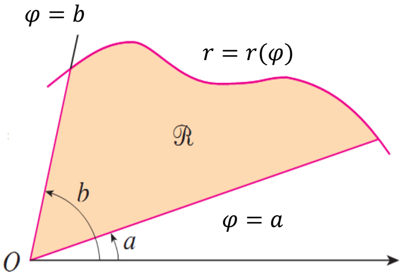
$$= a^2 \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$



Diện tích của miền hình quạt

Diện tích của hình quạt giới hạn bởi $r = r(\varphi)$, $a \le \varphi \le b$

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b [r(\varphi)]^2 d\varphi.$$

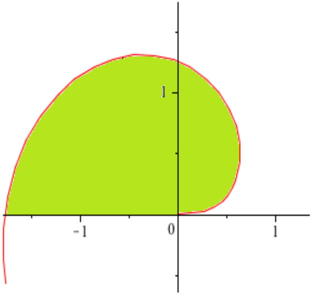


Ví dụ: Tính diện tích của miền giới hạn bởi

$$r = \sqrt{\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Giải. Ta có diện tích là

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [r(\varphi)]^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi d\varphi \\ &= \frac{\varphi^2}{4}\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$



Ví dụ: Tính diện tích của miền giới hạn bởi

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

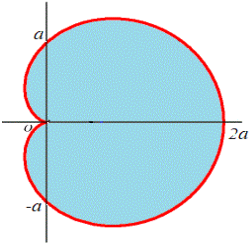
Giải. Ta có diện tích là

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [r(\varphi)]^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$$

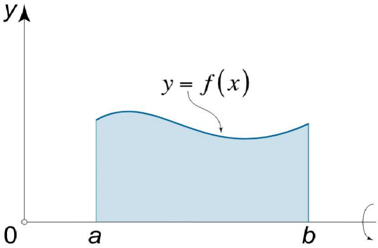
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

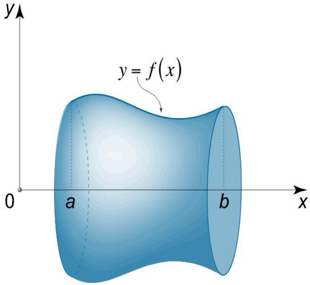


Thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Ox

Thể tích của vật thể tạo bởi khi quay miền giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$





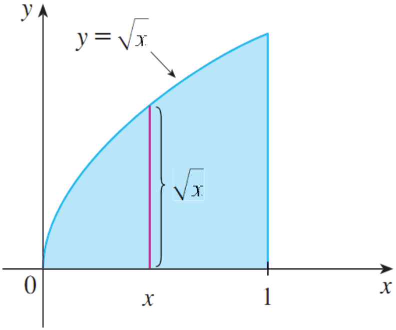
Ví dụ: Tính thể tích của vật thể tạo bởi khi quay miền giới hạn bởi

$$y = \sqrt{x}, \;\; y = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

quanh trục Ox.

Giải. Ta có thể tích cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [\sqrt{x}]^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Ví dụ. Tính thể tích của vật thể tạo bởi khi quay miền giới hạn bởi

$$y = x \quad \text{và} \quad y = 5x - x^2 \ \text{ quanh trục } \ Ox.$$

Giải. Hoành độ giao điểm là $x = 0$ và $x = 4$. Thể tích cần tìm là

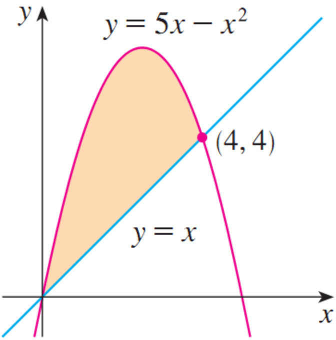
$$V = \pi \int_0^4 (5x - x^2)^2 dx - \pi \int_0^4 (x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 (25x^2 - 10x^3 + x^4 - x^2) dx$$

$$= \pi \int_0^4 (24x^2 - 10x^3 + x^4) dx$$

$$= \pi \left[24\frac{x^3}{3} - 10\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^4$$

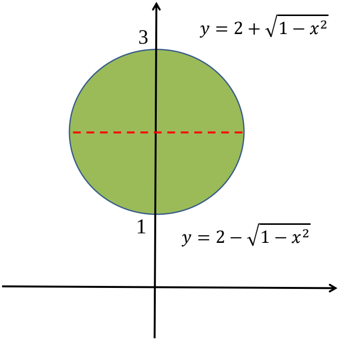
$$= \pi \frac{384}{5}.$$

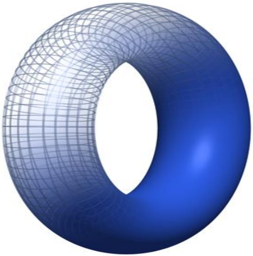


Ví dụ. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi

$$x^2 + (y-2)^2 = 1 \text{ quanh trục } Ox.$$

Giải. Vật thể tạo thành được gọi là hình xuyến. Ta có hình vẽ như sau





Thể tích của vật thể là

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} (2 - \sqrt{1 - x^2})^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{1 - x^2} dx = 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx.$$

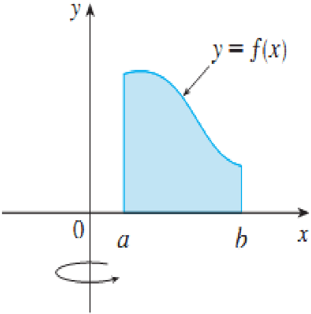
Để tính tích phân trên ta đặt $x = \sin t$ khi đó $dx = \cos t dt$ và

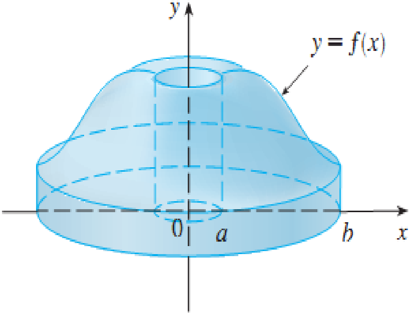
$$V = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt$$
$$= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt$$
$$= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt$$
$$= 4\pi \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2.$$

Thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Oy

Thể tích của vật thể tạo bởi khi quay miền giới hạn bởi $y = f(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Oy là

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$





HẾT