Đạo hàm và vi phân của hàm một biến

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 2 tháng 10 năm 2023

Đạo hàm của hàm một biến

Định nghĩa. Cho $f(x)$ xác định trong (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Nếu giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

tồn tại hữu hạn thì được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $\frac{df}{dx}(x_0)$). Khi đó ta nói hàm $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Nhận xét. Nếu hàm $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 thì

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

trong đó $\varepsilon \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Từ đó ta có công thức tính gần đúng $f(x_0 + \Delta x)$ khi Δx đủ bé

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ. Tính đạo hàm bằng định nghĩa của hàm số tại x_0 bất kỳ

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Giải. Từ định nghĩa ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x^2} - e^{x_0^2}}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x_0^2}(e^{x^2-x_0^2} - 1)}{x - x_0}.$$

Ta có

$$e^{x^2-x_0^2} - 1 \sim x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0), \quad \text{do } x^2 - x_0^2 \to 0$$

nên

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x_0^2}(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0^2}(x + x_0) = 2x_0e^{x_0^2}.$$

Quy tắc tính đạo hàm

Các phép toán

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$, α là hằng số
3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

Đạo hàm của hàm hợp.

Cho $u = u(x)$ và $y = y(u)$ là các hàm khả vi. Khi đó hàm $y(u(x))$ cũng là hàm khả vi và

$$[y(u(x))]' = y'(u(x))u'(x).$$

Công thức trên còn được viết dưới dạng vi phân như sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Bảng đạo hàm các hàm sơ cấp

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\qquad$ $(u(x)^\alpha)' = \alpha u(x)^{\alpha-1}u'(x)$
2. $(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}u'(x)$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad$ $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a.u'(x)$
4. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
5. $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\sin u(x))' = u'(x)\cos u(x)$
6. $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin u(x)$
7. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\tan u(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $(\cot u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
10. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\arctan u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

Đạo hàm một phía

Định nghĩa.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a, x_0]$. Giới hạn

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

  được gọi là đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $[x_0, b)$. Giới hạn

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

  được gọi là đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0.

Chú ý. $f'(x_0)$ tồn tại khi và chỉ khi $f'_-(x_0)$ và $f'_+(x_0)$ tồn tại và

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Ví dụ. Tính đạo hàm trái và đạo hàm phải của hàm số sau tại điểm $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{nếu } x \geq 1 \\ x^2 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

Giải. Ta có đạo hàm phải của hàm số là

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

(do $e^{x-1} - 1 \sim x - 1$ khi $x \to 1$) và đạo hàm trái là

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = 2.$$

Như vậy hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Ví dụ. Tính đạo hàm của hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{nếu } x \le 2 \\ 9-2x & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Giải.

- Nếu $x > 2$ ta có $f(x) = 9 - 2x$ do đó $f'(x) = -2$.
- Nếu $x < 2$ ta có $f(x) = x^2 + 1$ do đó $f'(x) = 2x$.
- Nếu $x = 2$ ta có $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ và

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{9-2x-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{4-2x}{x-2} = -2$$

Do $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ nên không tồn tại $f'(2)$.

Ví dụ. Tính đạo hàm của hàm số sau

$$f(x)=\begin{cases}2^x-1 & \text{nếu } x\leq 0\\ \ln(1+x) & \text{nếu } x>0.\end{cases}$$

Giải.

- Nếu $x>0$ ta có $f(x)=\ln(1+x)$ do đó $f'(x)=\frac{1}{1+x}$.
- Nếu $x<0$ ta có $f(x)=2^x-1$ do đó $f'(x)=2^x\ln 2$.
- Nếu $x=0$ ta có $f(0)=2^0-1=0$ và

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x}=\ln 2$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

Do $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ nên không tồn tại $f'(0)$.

Ví dụ. Xét tính khả vi của hàm số sau

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \\ \ln(1 + x^2) & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Giải.

- Nếu $x > 0$ ta có $f(x) = \ln(1 + x^2)$ và $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, nên hàm số khả vi
- Nếu $x < 0$ ta có $f(x) = 1 - \cos x$ và $f'(x) = \sin x$, nên hàm số khả vi.
- Nếu $x = 0$ ta có $f(0) = 1 - \cos 0 = 0$ và

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

Do $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$ nên $f'(0) = 0$, do đó hàm số khả vi tại $x = 0$.

Vi phân cấp 1

Định nghĩa. Giả sử $f(x)$ khả vi tại điểm x_0. Biểu thức $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số tại điểm x_0 và được ký hiệu $df(x_0)$. Tức là

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Ta có thể chứng minh được $\Delta x = dx$ và như vậy $df(x_0)$ được viết lại

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Các phép toán của vi phân

1. $d(f+g) = df + dg$
2. $d(\alpha f) = \alpha df$, α là hằng số
3. $d(fg) = gdf + fdg$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

Ứng dụng của vi phân

Nếu hàm $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 và Δx đủ bé thì ta có

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ. Tính gần đúng giá trị sau bằng vi phân cấp 1

$$A = \arctan 1,02.$$

. **Giải.** Ta viết

$$A = \arctan 1,02 = \arctan(1 + 0,02).$$

Trong ví dụ này $f(x) = \arctan x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 1$ và $\Delta x = 0,02$. Như vậy

$$\begin{aligned} A &\approx \arctan 1 + \arctan'(1) \cdot 0,02 \\ &= \arctan 1 + \frac{1}{1+1^2} 0,02 = \frac{\pi}{4} - 0,01. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính gần đúng giá trị sau bằng vi phân cấp 1

$$B = \sqrt{1 + 1,97^3}.$$

Giải. Ta viết

$$B = \sqrt{1 + 1,97^3} = \sqrt{1 + (2 - 0,03)^3}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$ với $x_0 = 2, \ \Delta x = -0,03.$ Đạo hàm của hàm $f(x)$ là

$$f'(x) = \frac{(1 + x^3)'}{2\sqrt{1 + x^3}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}.$$

Ta có

$$B = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$= \sqrt{1 + 2^3} + \frac{3.2^2}{2\sqrt{1 + 2^3}}(-0,03) = 2,94.$$

Đạo hàm cấp cao

- Giả sử $f(x)$ khả vi trong khoảng (a, b) và $f'(x)$ cũng khả vi trong khoảng (a, b) khi đó ta nói $f(x)$ khả vi đến cấp 2 trong khoảng (a, b) và đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ trong (a, b) và ta ký hiệu $f''(x) := [f'(x)]'$.
- Đạo hàm cấp 3 $f'''(x) := [f''(x)]'$, đạo hàm cấp 4 $f^{(4)}(x) := [f'''(x)]'$.
- Tổng quát: Giả sử $f(x)$ khả vi đến cấp $n-1$ khoảng (a, b) và $f^{(n-1)}(x)$ cũng khả vi trong khoảng (a, b) khi đó ta nói $f(x)$ khả vi đến cấp n trong khoảng (a, b) và $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$, $n \geq 4$.
- Quy ước đạo hàm cấp 0: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Đạo hàm cấp n của tổng

$$[\alpha f(x)+\beta g(x)]^{(n)}=\alpha f^{(n)}(x)+\beta g^{(n)}(x).$$

Đạo hàm cấp n của tích - công thức Leibnitz

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Đạo hàm cấp n của một số hàm

1. $(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$
2. $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$
3. $\sin(ax)^{(n)}=a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{2})$
4. $\cos(ax)^{(n)}=a^n\cos(ax+\frac{n\pi}{2})$
5. $\left[\frac{1}{ax+b}\right]^{(n)}=(-1)^n\frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

Ví dụ. Tính đạo hàm cấp n được chỉ ra của các hàm số sau:

1. $f(x) = e^{-3x}, \quad n = 101$
2. $f(x) = \cos^2 x, \quad n = 1000$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}, \quad n = 99$

Giải.

1. Ta có $(e^{-3x})^{(101)} = (-3)^{101} e^{-3x} = -3^{101} e^{-3x}$.
2. Ta có $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$. Từ đó suy ra

$$(\cos^2 x)^{(1000)} = \frac{1}{2} 2^{1000} \cos(2x + \frac{1000\pi}{2}) = 2^{999} \cos(2x).$$

3. Áp dụng công thức ta nhận được

$$\left(\frac{1}{2x-3}\right)^{(99)} = \frac{(-1)^{99} 2^{99} 99!}{(2x-3)^{100}} = \frac{-2^{99} 99!}{(2x-3)^{100}}.$$

Ví dụ. Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Giải. Ta có phân tích

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Vậy đạo hàm cấp 100 của hàm đã cho là

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= \frac{(-1)^{(100)}100!}{(x-2)^{101}} - \frac{(-1)^{(100)}100!}{(x-1)^{101}} \\ &= \frac{100!}{(x-2)^{101}} - \frac{100!}{(x-1)^{101}}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính đạo hàm cấp 20 của các hàm sau

1. $y = x^2 e^{-2x}$
2. $y = x\sin(3x)$.

Giải.

1. Áp dụng công thức Leibnitz với $f(x) = x^2$ và $g(x) = e^{-2x}$ ta có

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= C_{20}^0 x^2 (e^{-2x})^{(20)} + C_{20}^1 (x^2)'(e^{-2x})^{(19)} + C_{20}^2 (x^2)''(e^{-2x})^{(18)} \\ &= x^2(-2)^{20} e^{-2x} + 20.(2x)(-2)^{19} e^{-2x} + C_{20}^2 2(-2)^{18} e^{-2x} \\ &= 2^{20} x^2 e^{-2x} - 20.2^{20} x e^{-2x} + C_{20}^2 2^{19} e^{-2x} \end{aligned}$$

2. Áp dụng công thức Leibnitz với $f(x) = x$ và $g(x) = \sin(3x)$ ta có

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= C_{20}^0 x(\sin 3x)^{(20)} + C_{20}^1 (x)'(\sin 3x)^{(19)} \\ &= 3^{20} x \sin(3x + \frac{20\pi}{2}) + 20.3^{19} \sin(3x + \frac{19\pi}{2}). \end{aligned}$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa. Giả sử $f(x)$ khả vi đến cấp n trong khoảng (a, b). Khi đó vi phân cấp n của $f(x)$ được ký hiệu $d^n f$ và được tính

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Các quy tắc tính

- Vi phân cấp cao của tổng

$$d^n[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha d^n f(x) + \beta d^n g(x).$$

- Vi phân cấp cao của tích

$$d^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f(x) d^{n-k} g(x).$$

Hàm cho theo tham biến

Cho hệ hai hàm

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Giả sử $x = x(t)$ có miền giá trị $x \in (a, b)$ và có hàm ngược $t = t(x)$ xác định trong (a, b). Thay hàm $t = t(x)$ vào hàm $y = y(t)$ ta được hàm

$$y = y(t(x)) = f(x)$$

xác định trên khoảng (a, b).

Ví dụ. Xét hệ thức

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình đầu cho $t = x + 1$. Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$y = (x+1)^2 + (x+1) = x^2 + 2x + 1 + x + 1 = x^2 + 3x + 2.$$

Ví dụ. Xét hệ thức

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

Từ các phương trình trên ta được $x^2 + y^2 = 1$. Từ đó suy ra

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Vì $y \geq 0$ nên

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Đạo hàm của hàm cho theo tham biến

Giả sử hàm số $y = y(x)$ cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Khi đó các đạo hàm của hàm $y = y(x)$ được tính như sau

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = h_1(t)$$

và

$$y''(x) = \frac{h_1'(t)}{x'(t)} = h_2(t).$$

Ví dụ. Tính $y'(x),\ y''(x)$ của hàm cho dưới dạng tham biến sau:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta có đạo hàm cấp một được tính

$$y'(x) = \frac{(t^2+t)'}{(t-1)'} = \frac{2t+1}{1} = 2t+1$$

và đạo hàm cấp hai là

$$y''(x) = \frac{(2t+1)'}{(t-1)'} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ví dụ. Tính $y'(x),\ y''(x)$ của hàm cho dưới dạng tham biến sau:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in (0, \pi)$$

Giải. Ta có đạo hàm cấp một được tính

$$y'(x) = \frac{(2\sin t)'}{(2\cos t)'} = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\cot t$$

và đạo hàm cấp hai là

$$y''(x) = \frac{(-\cot t)'}{(2\cos t)'} = -\frac{-\frac{1}{\sin^2 t}}{-2\sin t} = -\frac{1}{2\sin^3 t}.$$

Ví dụ. Tính $y'(x)$, $y''(x)$ của hàm cho dưới dạng tham biến sau:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi).$$

Giải. Áp dụng công thức ta nhận được

$$y'(x) = \frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2}$$

và

$$y''(x) = \frac{(\cot\frac{t}{2})'}{a(t-\sin t)'} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Định lý Fermat

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là có cực đại tại x_0 nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ khi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. $f(x_0)$ gọi là giá trị cực đại.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là có cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ khi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. $f(x_0)$ gọi là giá trị cực tiểu.
- Điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là cực trị.

Định lý. Giả sử $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 và $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó

$$f'(x_0) = 0.$$

▷ Để tìm cực trị của hàm $f(x)$ ta thường giải phương trình $f'(x) = 0$.

Định lý Rolle

Định lý. Giả sử $f(x)$ xác định $[a, b]$ và thỏa mãn các điều kiện sau

- $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
- $f(x)$ khả vi trên (a, b)
- $f(a) = f(b)$.

Khi đó $\exists\ c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý Lagrange

Định lý. Giả sử $f(x)$ xác định $[a, b]$ và thỏa mãn các điều kiện sau

- $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
- $f(x)$ khả vi trên (a, b).

Khi đó $\exists\ c \in (a, b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Chú ý. Nếu $f'(x)$ là hàm bị chặn trên đoạn $[a, b]$, tức là tồn tại một số $M > 0$ sao cho $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Khi đó

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Công thức Taylor

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ có đạo hàm cấp $n-1$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi đến cấp n trong khoảng (a, b) và $f^{(n)}(x)$ liên tục tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó ta có công thức

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Công thức trên gọi là khai triển Taylor đến cấp n của hàm $f(x)$ trong lân cận x_0. Trong trường hợp $x_0 = 0$ ta gọi là khai triển Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Khai triển Maclaurin một số hàm quen thuộc

Ta có các công thức khai triển sau

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots . + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots . + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
4. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots . + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
6. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots . + (-1)^{(n-1)} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

Quy tắc L'Hospital

Xét giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Khi đó ta có

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nếu giới hạn bên phải tồn tại. Quy tắc L'Hospital vẫn đúng cho giới hạn một phía $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, giới hạn khi $x\to\infty$.

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Dùng quy tắc L'Hospital ta nhận được

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x)-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$J_1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{2x^2}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Dùng quy tắc L'Hospital ta nhận được

$$J_1 = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1 - 2x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - 2}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}.$$

Tiếp tục dùng quy tắc L'Hospital ta có

$$J_1 = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{2} = 1.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$J_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Dùng quy tắc L'Hospital

$$J_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Giới hạn bên phải vẫn là dạng $\frac{\infty}{\infty}$ nên ta dùng quy tắc L'Hospital một lần nữa để nhận được

$$J_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Một số dạng giới hạn và cách tính

1. Dạng $\frac{0}{0}$. Ta có thể nhân biểu thức liên hợp (nếu có), hoặc thay thế tương đương, hoặc dùng quy tắc L'Hospital.
2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Ta có thể đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc dùng quy tắc L'Hospital
3. Dạng $\infty - \infty$. Ta nhân liên hợp hoặc quy đồng đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$
4. Dạng $0 \times \infty$. Ta đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ bằng $fg = \frac{f}{1/g}$ hoặc $fg = \frac{g}{1/f}$.
5. Dạng 0^0, ∞^0, 1^∞. Với giới hạn dạng này ta áp dụng công thức

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \ln(u(x))}.$$

6. Với dạng 1^∞ ta có thể áp dụng công thức

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)(u(x)-1)}.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\tan x^2}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Dùng thay thế tương đương ta có

$$\ln(1 + 3x \sin x) \sim 3x \sin x \sim 3x^2, \ x \to 0$$

và

$$\tan x^2 \sim x^2, \ x \to 0.$$

Do đó ta nhận được

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$J = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \arctan x^2}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Trước hết thay thế tương đương

$$\arctan x^2 \sim x^2, \ \ x \to 0.$$

Khi đó

$$J = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Dùng quy tắc L'Hospital ta nhận được

$$J = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}.$$

Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$, thay thế $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}, \ \ x \to 0$ ta có

$$J = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2} = -\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$J = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right).$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\infty - \infty$. Quy đồng ta được

$$J = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}.$$

Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Dùng quy tắc L'Hospital ta nhận được

$$J = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}.$$

(Chú ý: Trước khi dùng L'Hospital ta có thể thay thế $\sin x \sim x$ ở dưới mẫu để được giới hạn đơn giản hơn). Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$, tiếp tục dùng quy tắc L'Hospital ta nhận được

$$J = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$K = \lim_{x \to 0^+} x \ln x.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $0 \times \infty$. Đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$

$$K = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Dùng quy tắc L'Hospital ta có kết quả

$$K = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$H = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng 1^∞ vì khi $x \to \infty$ ta có

$$\frac{2x+1}{2x-3} = \frac{2+1/x}{2-3/x} \to 1.$$

Dùng công thức

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)}$$

với $u(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$ và $v(x) = x$ ta nhận được

$$H = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{2x+1-2x+3}{2x-3}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{2-3/x}} = e^2.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau

$$L = \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng 0^0. Ta có

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x \ln \sin x)}.$$

Đặt $K = \lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x \ln \sin x)$. Đây là giới hạn dạng $(0 \times \infty)$. Thay thế $\tan x \sim x$, đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ và áp dụng quy tắc L'Hospital ta nhận được

$$K = \lim_{x\to 0^+} (x \ln \sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cos x}{\sin x}.$$

Thay thế tương đương $\sin x \sim x,\ x \to 0$ ta có

$$K = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cos x}{x} = -\lim_{x\to 0^+} x \cos x = 0.$$

Vậy $L = 1$.

HẾT