TÍCH PHÂN SUY RỘNG

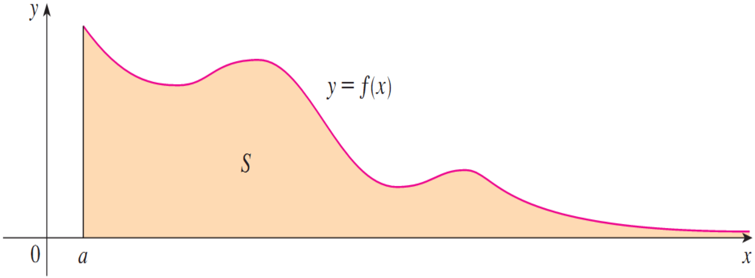
Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 8 tháng 11 năm 2023

Tích phân suy rộng loại 1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, B]$ khi đó
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx.$$
Nếu giới hạn hữu hạn thì ta nói tích phân hội tụ, ngược lại ta nói tích phân phân kỳ.



Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Giải. Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{B\to+\infty} \int_0^{B} \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{B\to+\infty} \arctan x \Big|_0^B \\ &= \lim_{B\to+\infty} (\arctan B - \arctan 0) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Giải. Theo định nghĩa ta có

$$I_2 = \lim_{B \to +\infty} \int_1^{B} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Vì $d\Big(-\frac{1}{x}\Big) = \frac{dx}{x^2}$ nên

$$\int_1^{B} \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^{B} \ln x d\Big(-\frac{1}{x}\Big) = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^B - \int_1^B \Big(-\frac{1}{x}\Big) d(\ln x)$$

$$= -\frac{\ln B}{B} + \int_1^B \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln B}{B} - \frac{1}{x}\Big|_1^B = -\frac{\ln B}{B} - \frac{1}{B} + 1.$$

Từ đó suy ra

$$I_2 = \lim_{B \to +\infty} \Big[1 - \frac{\ln B}{B} - \frac{1}{B}\Big] = 1 - \lim_{B \to +\infty} \frac{\ln B}{B} \overset{L}{=} 1 - 0 = 1.$$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \;\; a > 0.$$

Giải. Ta xét trường hợp $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{B\to+\infty} \int_a^B \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B x^{-\alpha} dx \\ &= \lim_{B\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(B^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}\right) \\ &= \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{B^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Trường hợp $\alpha \leq 1$ được xét tương tự và ta đi đến kết luận:

- Nếu $\alpha > 1$ tích phân đã cho hội tụ
- Nếu $\alpha \leq 1$ tích phân đã cho phân kỳ

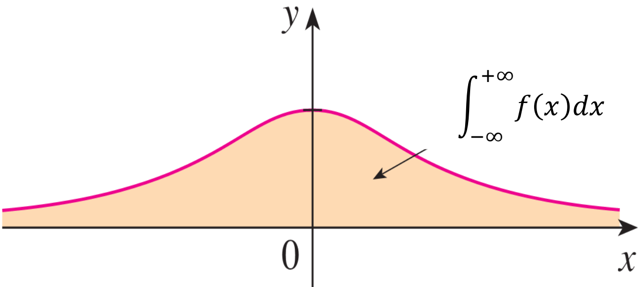
Các tích phân suy rộng loại 1 khác

Ta cũng định nghĩa các tích phân suy rộng sau

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx$$

và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$



Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}.$$

Giải. Ta có

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = I_1 + I_2.$$

- Tính I_1

$$I_1 = \lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3}\Big|_A^0 = -\lim_{A\to-\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{A}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

- Tính I_2

$$I_2 = \lim_{B\to+\infty} \int_0^B \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3}\Big|_0^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{B}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Tiêu chuẩn so sánh

Tiêu chuẩn 1. Giả sử $0 \le f(x) \le g(x), \ \forall x \ge a$. Khi đó

- Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ,
- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Chú ý. Ta thường so sánh tích phân đang xét với tích phân

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \ \ a > 0.$$

Nhắc lại: Ta có

- Nếu $\alpha > 1$ tích phân đã cho hội tụ
- Nếu $\alpha \le 1$ tích phân đã cho phân kỳ

Ví dụ: Xét sự hội tụ

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x+1}}dx.$$

Giải. Ta có đánh giá

$$\frac{x}{\sqrt{x^6+x+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^6}} = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng sau

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x\sqrt{x^2+x-1}}dx.$$

Giải. Vì $x-1 \geq 0$ nên ta có

$$0 < \frac{2+\cos x}{x\sqrt{x^2+x-1}} \leq \frac{3}{x\sqrt{x^2}} = \frac{3}{x^2}, \qquad \forall x \geq 1.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}dx$$

hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng sau

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

Giải. Do $\ln(1+x)$ là hàm đơn điệu tăng trong $[1, +\infty)$ nên ta có

$$\ln(1+x) \geq \ln 2$$

do đó

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \geq \frac{\ln 2}{x}, \qquad \forall x \geq 1.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln 2}{x} dx$$

phân kỳ nên tích phân đã cho phân kỳ.

Tiêu chuẩn 2. Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định và không âm trên $[a, +\infty)$. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < \infty$$

thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{và} \qquad \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ

Hệ quả. Cho $f(x)$ và $g(x)$ xác định và không âm trên $[a, +\infty)$. Nếu khi $x \to +\infty$ mà $f(x)$ và $g(x)$ là hai vô cùng bé tương đương thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{và} \qquad \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^3-x+1}}dx.$$

Giải. Áp dụng quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn bậc thấp ta có

$$\frac{x+1}{x\sqrt{x^3-x+1}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}, \ x \to +\infty.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của tích phân sau

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$$

Giải. Ta có

$$1 - \cos\frac{2}{x} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{2}{x^2}, \quad x \to +\infty.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$$

hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của tích phân sau

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx$$

Giải. Ta có

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}, \quad x \to +\infty.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$$

phân kỳ nên tích phân đã cho phân kỳ.

Hội tụ tuyệt đối

Trong phần này ta xét tích phân suy rộng với $f(x)$ có dấu bất kỳ

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Tính chất. Nếu tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Định nghĩa.

1. Nếu $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì ta nói $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối
2. Nếu $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ, nhưng $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ hay hội tụ tương đối.

Ví dụ. Xét sự hội tụ tuyệt đối của tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx.$$

Giải. Ta có đánh giá

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| \le \frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^3}, \quad x \ge 1.$$

Mà tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

hội tụ nên tích phân

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| dx$$

hội tụ. Vậy tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

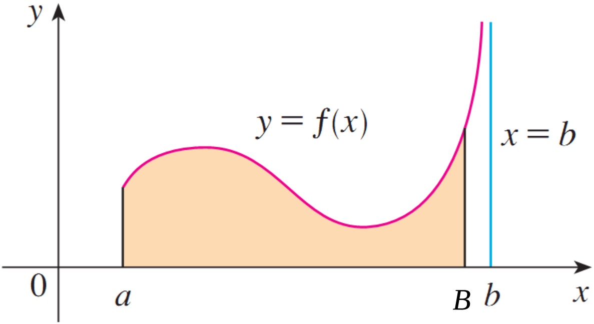
Tích phân suy rộng loại 2

Giả sử $f(x)$ không bị chặn trong lân cận của điểm $x = b$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{B \to b^-} \int_a^B f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ trên $[a, b)$ với $x = b$ là điểm kỳ dị.

Nếu giới hạn tồn tại thì ta nói tích phân hội tụ, ngược lại ta nói phân kỳ.



Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Giải: Tích phân I tích phân suy rộng với $x = 1$ là điểm kỳ dị vì

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{B \to 1^-} \int_0^B \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{B \to 1^-} \arcsin x \Big|_0^B \\ &= \lim_{B \to 1^-} \arcsin B = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy tích phân đã cho hội tụ.

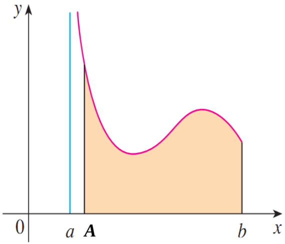
Các tích phân suy rộng loại 2 khác

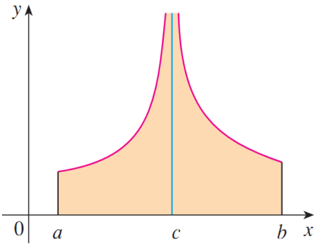
Nếu $f(x)$ không bị chặn trong lân cận điểm $x = a$ (a là điểm kỳ dị)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A \to a^+} \int_A^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Nếu $f(x)$ không bị chặn trong lân cận điểm $c \in (a, b)$, khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$





Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau

$$J = \int_0^1 \ln x dx.$$

Giải: Tích phân J là tích phân suy rộng với $x = 0$ là điểm kỳ dị vì

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Ta có

$$\begin{aligned} J &= \lim_{A \to 0^+} \int_A^1 \ln x dx = \lim_{A \to 0^+} \left(x \ln x \Big|_A^1 - \int_A^1 x d(\ln x) \right) \\ &= \lim_{A \to 0^+} \left(-A \ln A - \int_A^1 dx \right) = \lim_{A \to 0^+} \left[-A \ln A - x \Big|_A^1 \right] \\ &= \lim_{A \to 0^+} (-A \ln A - 1 + A). \end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{A \to 0^+} (A \ln A) = \lim\limits_{A \to 0^+} \frac{\ln A}{1/A} = 0$ nên

$$J = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{tích phân hội tụ.}$$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các tích phân

$$J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad J_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}.$$

Giải. Xét J_1 với $0 < \alpha < 1$. Tích phân J_1 là tích phân suy rộng với $x = 0$ là điểm kỳ dị vì

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = \infty.$$

Ta có

$$J_1 = \lim_{A \to 0^+} \int_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to 0^+} \int_A^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{A \to 0^+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_A^1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \to 0^+} (1 - A^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Trường hợp $\alpha \geq 1$ được xét tương tự. Nếu $\alpha \leq 0$ tích phân đã cho là tích phân xác định. Như vậy

- Nếu $\alpha < 1$ tích phân đã cho hội tụ
- Nếu $\alpha \geq 1$ tích phân đã cho phân kỳ

Tiêu chuẩn với hàm không âm

Tiêu chuẩn 1. Xét tích phân suy rộng với $x = a$ là điểm kỳ dị. Giả sử $0 \leq f(x) \leq g(x)$ trên $(a, b]$. Khi đó

- Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ,
- Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Chú ý. Ta thường so sánh tích phân đang xét với tích phân

$$J = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}.$$

Ta có

- Nếu $\alpha < 1$ tích phân đã cho hội tụ
- Nếu $\alpha \geq 1$ tích phân đã cho phân kỳ

Tiêu chuẩn 2. Xét tích phân suy rộng với $x = a$ là điểm kỳ dị. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm xác định, không âm trên $(a, b]$. Giả sử khi $x \to a^+$ ta có $f(x)$ và $g(x)$ là các vô cùng lớn tương đương thì

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{và} \quad \int_a^b g(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Nhắc lại. Các vô cùng bé tương đương $x \to 0$.

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\ln(1 + x) \sim x$
7. $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
8. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Giải. Ta có tích phân I là tích phân suy rộng loại 2 với $x = 0$ là điểm kỳ dị vì

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \infty.$$

Ta có

$$\frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0^+.$$

Mà

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

hội tụ nên tích phân I hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\tan x - \sin x}.$$

Giải. Ta có tích phân I là tích phân suy rộng loại 2 với $x = 0$ là điểm kỳ dị vì

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\tan x - \sin x} = \infty.$$

Hơn nữa ta có

$$\frac{1}{\tan x - \sin x} = \frac{1}{\tan x(1 - \cos x)} \sim \frac{1}{x.\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^3}, \quad x \to 0^+.$$

Mà tích phân

$$\int_0^1 \frac{2}{x^3} dx$$

phân kỳ nên tích phân I phân kỳ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Giải. Ta có tích phân I là tích phân suy rộng loại 2 với $x = 1$ là điểm kỳ dị vì

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \infty.$$

Hơn nữa

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-x}}, \quad x \to 1^-.$$

Mà

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-x}}$$

hội tụ nên tích phân I hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ của tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{1 - \cos 2x} dx.$$

Giải. Ta có

$$\frac{\arcsin x}{1 - \cos 2x} \sim \frac{x}{\frac{(2x)^2}{2}} = \frac{1}{2x}, \quad x \to 0^+.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arcsin x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} = \infty.$$

Do đó tích phân I là tích phân suy rộng loại 2 với $x = 0$ là điểm kỳ dị.

Hơn nữa tích phân

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x}$$

phân kỳ nên tích phân I phân kỳ.

Ví dụ: Xét tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\arctan(2x)} dx.$$

Ta có hàm dưới dấu tích phân $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\arctan(2x)}$ không xác định tại $x = 0$. Tuy nhiên

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\arctan(2x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Do đó tích phân I không phải là tích phân suy rộng loại 2. Vì giới hạn $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ hữu hạn nên $x = 0$ là điểm gián đoạn khử được do đó tích phân I có thể coi là tích phân xác định.

Hội tụ tuyệt đối

Xét tích phân suy rộng loại 2 với $x = a$ là điểm kỳ dị và $f(x)$ có dấu bất kỳ

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Tính chất. Nếu tích phân $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.

Định nghĩa.

1. Nếu $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ thì ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.
2. Nếu $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ, nhưng $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ bán hội tụ hay hội tụ tương đối.

HẾT