Lý thuyết chuỗi

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 8 tháng 11 năm 2023

Khái niệm về chuỗi số

Cho dãy số thực: $u_1,\ u_2, ..., u_n, ...$ Khi đó

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

được gọi là một chuỗi số. u_n được gọi là số hạng thứ n. Tổng

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi. Nếu

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

hữu hạn thì chuỗi được gọi là hội tụ và có tổng là S và ta viết

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S.$$

Ngược lại thì ta nói chuỗi phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots.$$

Giải. Ta có

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Từ đó ta nhận được

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Ta thấy rằng chuỗi hội tụ và có tổng là 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$$

Giải.

- Nếu $q = -1$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$. Ta có

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n \text{ chẵn} \\ 1 & \text{nếu} \quad n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Do đó giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ không tồn tại và chuỗi phân kỳ

- Nếu $q = 1$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Như vậy chuỗi cũng phân kỳ

- Nếu $q \neq \pm 1$, tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Từ đó ta nhận được

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1 \end{cases}.$$

Kết luận:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \begin{cases} \text{hội tụ và có tổng là } \dfrac{1}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } |q| \geq 1 \end{cases}.$$

Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ, thì

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Chú ý.

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ hoặc không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ thì chuỗi phân kỳ
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ta chưa thể suy ra được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ. Chẳng hạn như chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

phân kỳ nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{4n+5}.$$

Giải. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{4n+5} = \frac{3}{4} \neq 0.$$

Từ đó ta kết luận chuỗi phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n.$$

Giải. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n-1}} = e.$$

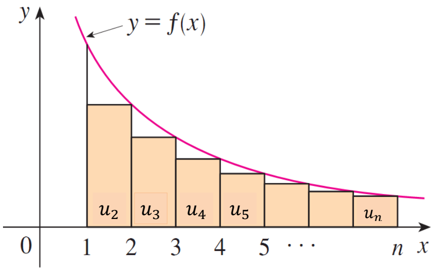
Từ đó ta kết luận chuỗi phân kỳ.

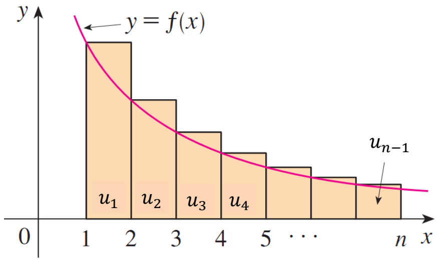
Tiêu chuẩn tích phân

Định lý. Giả sử rằng $f(x)$ là hàm dương, liên tục, đơn điệu giảm trên $[1, +\infty)$ và $u_n = f(n)$. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{và} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.





Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Giải. • Nếu $\alpha \leq 0$ ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ nên chuỗi phân kỳ theo điều kiện cần.

• Nếu $\alpha > 0$ ta xét hàm

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \qquad x \in [1, +\infty)$$

Ta có $f(x)$ là hàm dương, liên tục, đơn điệu giảm trên $[1, +\infty)$ và $f(n) = u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Do đó

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{và} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ta biết rằng tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ $0 < \alpha \leq 1$ nên chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ $0 < \alpha \leq 1$.

Kết luận: Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Tiêu chuẩn so sánh

Định lý. Cho hai chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$. Giả rằng $u_n \leq v_n, \forall n > n_0$.

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ cũng hội tụ
- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ cũng phân kỳ

Chú ý. Ta thường so sánh chuỗi đang xét với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

▷ Nếu $\alpha > 1$ thì chuỗi hội tụ.

▷ Nếu $\alpha \leq 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+n}}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{n}{\sqrt{n^6+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^6}} = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Bởi vì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{4n^2-1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{1/2}}, \quad n \geq 1.$$

Mặt khác chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{1/2}}$$

phân kỳ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Định lý. Cho hai chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$. Nếu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$$

với $0 < k < +\infty$, khi đó cả hai chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả. Cho hai chuỗi dương

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad \text{và} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

Nếu u_n và v_n là các VCB tương đương khi $n \to +\infty$ thì cả hai chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý. Các vô cùng bé tương đương $n \to +\infty$.

1. $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$
2. $\tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$
3. $\arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$
4. $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$
5. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
6. $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Giải. Ta có

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}, \;\; n \to +\infty.$$

Vì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

phân kỳ, nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Giải. Ta có

$$\arctan \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \quad n \to +\infty.$$

Vì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ.

Tiêu chuẩn D'Alembert

Định lý. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Giả sử rằng tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D.$$

Khi đó

- Nếu $D < 1$, thì chuỗi hội tụ
- Nếu $D > 1$, thì chuỗi phân kỳ
- Nếu $D = 1$, chưa kết luận được

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}.$$

Giải. Ta có

$$u_n = \frac{n}{4^n} \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{4^{n+1}} . \frac{4^n}{n} \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+1/n}{4} = \frac{1}{4} < 1.\end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}.$$

Giải. Ta có

$$u_n = \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}$$

và

$$u_{n+1} = \frac{3.5.7...(2n+1)(2(n+1)+1)}{2.5.8...(3n-1)(3(n+1)-1)} = \frac{3.5.7...(2n+1)(2n+3)}{2.5.8...(3n-1)(3n+2)}.$$

Dùng tiêu chuẩn D'Alembert ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Giả sử rằng tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = C.$$

Khi đó

- Nếu $C < 1$, thì chuỗi hội tụ
- Nếu $C > 1$, thì chuỗi phân kỳ
- Nếu $C = 1$, chưa thể kết luận được

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}.$$

Giải. Ta có

$$u_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n+1))^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$$

Do đó chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+4}\right)^n.$$

Giải. Ta có

$$u_n = \left(\frac{3n+1}{2n+4}\right)^n.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n+4}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{2n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+1/n}{2+4/n} = \frac{3}{2} > 1.\end{aligned}$$

Do đó chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n \qquad \left(\text{hay } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\right), \qquad a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ. Chuỗi sau là chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

Định lý.(Tiêu chuẩn Leibniz) Chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ hội tụ nếu

- $a_n \geq a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Giải. Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu với $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ thỏa mãn

- $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz .

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}.$$

Giải. Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu với $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Ta có

- $a_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{\ln(n+2)} = a_{n+1}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Hội tụ tuyệt đối

Trong phần này ta xét chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Ta có tính chất sau:.

Định lý. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Ta có khái niệm sau:

Định nghĩa.

- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối.
- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ phân kỳ nhưng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tương đối, hay hội tụ có điều kiện.

Ví dụ. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^3 + n}$$

Giải. Chuỗi trị tuyệt đối là

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n^3 + n}\right|.$$

Ta có

$$\left|\frac{\sin n}{n^3 + n}\right| \leq \frac{1}{n^3}.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ hội tụ do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n^3 + n}\right|$ hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+10}{3n+1}\right)^n.$$

Giải. Xét chuỗi trị tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+10}{3n+1}\right)^n.$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+10}{3n+1}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Do đó chuỗi trị tuyệt đối hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Giải. Chuỗi trị tuyệt đối là

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{2}}, \qquad n \geq 1.$$

Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ phân kỳ.

Nhận thấy rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Ta có

- $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = a_{n+1}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0.$

Vậy chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz. Kết luận chuỗi đã cho hội tụ tương đối.

Chuỗi hàm

Một chuỗi hàm là chuỗi mà các số hạng của nó là các hàm số xác định trên cùng tập $U \subset \mathbb{R}$

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Nếu $x_0 \in U$ chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ hội tụ, thì x_0 được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm. Tập hợp A tất cả các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ. Giả sử $x \in A$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ có tổng là $S(x)$. Khi đó ta viết

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \quad \forall x \in A.$$

Ví dụ. Chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

có miền hội tụ là $(-1, 1)$ và có tổng

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Ví dụ. Chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

có miền hội tụ là $(1, +\infty)$.

Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa. Một chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots \quad (1)$$

trong đó a_n và x_0 là các số đã biết.

Tính chất.

- Chuỗi (1) luôn hội tụ tại $x = x_0$. Nếu chuỗi (1) có một điểm hội tụ khác x_0 thì tồn tại số R $(0 < R \leq +\infty)$ sao cho chuỗi (1) hội tụ trong miền $|x-x_0| < R$ và phân kỳ trong miền $|x-x_0| > R$. Số R được gọi là bán kính hội tụ.
- Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ có cùng bán kính hội tụ và do đó miền hội tụ của chúng chỉ (có thể) khác nhau tại $x = x_0 \pm R$.

Cách tìm bán kính hội tụ

Định lý. Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$). Khi đó bán kính hội tụ cho bởi

$$R = \begin{cases} 1/\rho & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0 \\ 0 & \text{nếu } \rho = +\infty. \end{cases}$$

Ví dụ. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

Giải. Ta có $a_n = \frac{1}{n^2}$ và

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Vậy bán kính hội tụ là $R = 1$.

Cách tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Do chuỗi lũy thừa và chuỗi trị tuyệt đối của nó có khoảng hội tụ và khoảng phân kỳ như nhau nên để tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x), \quad u_n(x) = a_n X^n$$

ta làm như sau:

- Xét giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = D(x) \quad (\text{hoặc} \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = C(x))$$

- Giải $D(x) < 1$ (hoặc $C(x) < 1$) để tìm khoảng hội tụ
- Xét chuỗi tại các đầu mút của khoảng hội tụ
- Kết luận miền hội tụ

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx^n}.$$

Giải. Xét giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{(n+1)x^{n+1}} \cdot \frac{nx^n}{1} \right|$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)|x|} = \frac{1}{|x|} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{|x|}.$$

- Chuỗi đã cho hội tụ nếu

$$\frac{1}{|x|} < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < |x| \;\Leftrightarrow\; x < -1 \text{ hoặc } x > 1$$

- Tại $x = -1$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Đây là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{n}$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

- Tại $x = 1$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Chuỗi phân kỳ.

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi đã cho là $\big(-\infty, -1\big] \cup (1, +\infty)$.

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}.$$

Giải. • Xét

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}\frac{2^n n}{(x-1)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|n}{2(n+1)} = \frac{|x-1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-1|}{2}.$$

• Chuỗi hội tụ nếu

$$\frac{|x-1|}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

- Tại $x = -1$ chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Đây là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{n}$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

- Tại $x = 3$ chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Chuỗi phân kỳ.

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-1, 3)$.

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Giải. • Xét

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+2}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = |x|.$$

• Chuỗi hội tụ nếu

$$x < 1 \ \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

- Tại $x = -1$ chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Đây là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz nên chuỗi hội tụ.

- Tại $x = 1$ chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ta có đây là chuỗi dương và

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi hội tụ.

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-1, 1]$.

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n (x-2)^{2n}.$$

Giải. • Chuỗi đã cho là chuỗi dương. Dùng tiêu chuẩn Cauchy ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n (x-2)^{2n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)(x-2)^2 = \frac{(x-2)^2}{2}.\end{aligned}$$

• Do đó, nếu

$$\frac{(x-2)^2}{2} < 1 \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2},$$

thì chuỗi hội tụ

- Tại $x = 2 \pm \sqrt{2}$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n (\pm\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^n.$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n-1}} = e^{3/2} \neq 0.$$

Do đó chuỗi phân kỳ tại $x = 2 \pm \sqrt{2}$ theo điều kiện cần.

Kết luận miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(\ln x)^n}.$$

Giải. • Xét

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n+1)(\ln x)^n}{(2n+3)(\ln x)^{n+1}}\right|$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+1}{(2n+3)\ln x}\right| = \frac{1}{|\ln x|}.$$

• Chuỗi đã ho hội tụ nếu

$$\frac{1}{|\ln x|} < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < |\ln x| \;\Leftrightarrow\; 0 < x < \frac{1}{e} \text{ hoặc } x > e$$

- Tại $x = \frac{1}{e}$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Đây là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{2n+1}$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

- Tại $x = e$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Vì $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$, $n \to +\infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ phân kỳ nên chuỗi phân kỳ.

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi đã cho là $\left(0, \frac{1}{e}\right] \cup (e, +\infty)$.

HẾT