Giới hạn và liên tục của hàm một biến

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 1 tháng 10 năm 2023

Các hàm sơ cấp cơ bản

- Hàm hằng
- Lũy thừa của x: x, x^2, x^3, x^α...
- Căn của x: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$,...
- Hàm mũ: e^x, 2^x,...
- Hàm logarit: $\ln x$, $\log_2 x$,...
- Hàm lượng giác: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$
- Hàm lượng giác ngược: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot} x$.

Hàm lượng giác ngược

Kí hiệu	Định nghĩa	Miền xác định	Miền giá trị
$y = \arcsin x$	$x \mapsto y : x = \sin y$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$x \mapsto y : x = \cos y$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$	$x \mapsto y : x = \tan y$	$x \in \mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arccot} x$	$x \mapsto y : x = \cot y$	$x \in \mathbb{R}$	$0 < y < \pi$

Ví dụ. Ta có

$$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$$

and

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \arctan 1.$$

Giới hạn của hàm một biến

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D = (a, x_0) \cup (x_0, b)$.

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn A khi $x \to x_0$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ bé tùy ý tồn tại số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - A| < \epsilon$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn A khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ $(x_n \in D)$ khi $n \to \infty$ thì $f(x_n) \to A$ khi $n \to \infty$.

▷ Hai định nghĩa trên đương đương.

Ví dụ. Xét hàm số $f(x) = 2x + 1$. Ta có

x	0,9	0,95	0,99	$x \to 1$	1,01	1,02	1,1
$f(x) = 2x + 1$	2,8	2,9	2,98	$f(x) \to ?$	3,02	3,04	3,2

Như vậy

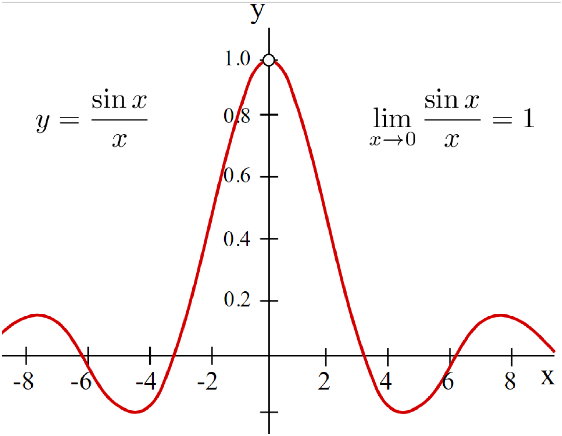
$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3.$$

Ví dụ. Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ta có

x	1	0,1	0,01	$x \to 0$	-0,01	-0,1	-1
$\frac{\sin x}{x}$	0,8414	0,9983	0,9999	$\frac{\sin x}{x} \to ?$	0,9999	0,9983	0,8414

Như vậy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Hình: Đồ thị của hàm $\frac{\sin x}{x}$

Tính chất 1. Giả sử tồn tại $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Khi đó

- $\lim_{x \to x_0} [\alpha f(x)] = \alpha A$, α là hằng số
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = AB$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^m = A^m$, m là số nguyên dương

Tính chất 2. Giả sử tồn tại các giới hạn $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ và $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ thì $A \leq B$.

Tính chất 3. Giả sử $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ trong khoảng $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ và tồn tại các giới hạn $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Ví dụ. Chứng minh giới hạn sau bằng tính chất kẹp

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Giải. Ta có

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1, \quad \forall x \ne 0.$$

Suy ra

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|.$$

Hơn nữa từ $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ ta kết luận

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Giới hạn một phía

Định nghĩa.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập (a, x_0). Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn trái là A khi $x \to x_0$ với mọi nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$ $(x_n < x_0)$ thì $f(x_n) \to A$ khi $n \to \infty$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập (x_0, b). Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn phải là A khi $x \to x_0$ với mọi nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$ $(x_n > x_0)$ thì $f(x_n) \to A$ khi $n \to \infty$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

Chú ý. Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to x_0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Ví dụ: Tính các giới hạn một phía của hàm số khi $x \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}.$$

Giải. Ta có khi $x \to 0^+$ thì $\frac{1}{x} \to +\infty$ và $1 + e^{1/x} \to +\infty$. Do đó

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0.$$

Tương tự, khi $x \to 0^-$ thì $\frac{1}{x} \to -\infty$ và $1 + e^{1/x} \to 1$. Suy ra

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

Ví dụ: Tính các giới hạn một phía của hàm số sau khi $x \to 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{nếu } x > 1 \\ -x & \text{nếu } x \leq 1. \end{cases}$$

Giải. Ta có giới hạn phải là

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x+1) = 3$$

và giới hạn trái là

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x) = -1.$$

Ví dụ: Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x \to 0$

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & \text{nếu } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

và

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ae^x = a.$$

Vậy để hàm số có giới hạn khi $x \to 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Suy ra $a = \frac{1}{2}$.

Vô cùng bé (VCB)

Định nghĩa. $f(x)$ được gọi là một VCB khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Ví dụ.

- $f(x) = x^2$ là VCB khi $x \to 0$
- $f(x) = \sin(x-1)$ là VCB khi $x \to 1$

Tính chất của VCB

1. Nếu f, g là các VCB khi $x \to x_0$ thì $f \pm g$, fg, αf (α là hằng số) cũng là những VCB khi $x \to x_0$.
2. Nếu f là VCB khi $x \to x_0$, $|g| \leq M$ (M là hằng số dương) trong khoảng $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ thì fg cũng là VCB khi $x \to x_0$.

So sánh hai VCB

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$. Xét giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

- Nếu $k = 0$ ta nói $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$ và ký hiệu là $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$
- Nếu $k = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB tương đương, ký hiệu là $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$
- Nếu $k \neq 0, 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB cùng bậc, ký hiệu là $f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$
- Nếu giới hạn không tồn tại ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB không so sánh được

Ví dụ. So sánh các VCB

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{và} \quad g(x) = 2(x-1), \quad \text{khi} \;\; x \to 1.$$

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2} = 1.$$

Vậy $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to 1$.

Ví dụ. So sánh các VCB

$$f(x) = \sqrt{1+2x} - 1 \quad \text{và} \quad g(x) = 2x, \quad \text{khi} \;\; x \to 0.$$

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-1}{2x(\sqrt{1+2x}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $f(x) = O(g(x))$ khi $x \to 0$.

Các VCB tương đương khi $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $(1+mx)^\alpha - 1 \sim m\alpha x$
8. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

Ta có thể mở rộng

1. $\sin u(x) \sim u(x)$ nếu $u(x) \to 0$ khi $x \to x_0$
2. $\tan u(x) \sim u(x)$ nếu $u(x) \to 0$ khi $x \to x_0$
3. $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$ nếu $u(x) \to 0$ khi $x \to x_0$

Các công thức khác được mở rộng tương tự.

Ví dụ:

- $\sin(x^2) \sim x^2$ khi $x \to 0$ vì $x^2 \to 0$ khi $x \to 0$.
- $e^{(x-1)^2} - 1 \sim (x-1)^2$ khi $x \to 1$ vì $(x-1)^2 \to 0$ khi $x \to 1$.
- $\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$ khi $x \to 0$ vì $\sin x \to 0$ khi $x \to 0$.
- $\arctan(x-2) \sim (x-2)$ khi $x \to 2$ vì $(x-2) \to 0$ khi $x \to 2$.

Quy tắc thay thế tương đương

Giả sử $f(x)$, $g(x)$, $\overline{f}(x)$, $\overline{g}(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ và $f(x) \sim \overline{f}(x)$, $g(x) \sim \overline{g}(x)$ khi $x \to x_0$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau:

$$I_1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan 3x}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Dùng thay thế tương đương, ta có

$$e^{2x} - 1 \sim 2x \quad \text{và} \quad \tan 3x \sim 3x, \;\; x \to 0.$$

Do đó

$$I_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Chú ý.

- Giả sử $f(x)$, $g(x)$, $\overline{f}(x), \overline{g}(x)$ là các VCB và $f(x) \sim \overline{f}(x)$, $g(x) \sim \overline{g}(x)$ khi $x \to x_0$. Ta có
$$f(x)g(x) \sim \overline{f}(x)\overline{g}(x), \quad x \to x_0.$$
- Nếu $f(x) \sim A(x - x_0)^k$, $g(x) \sim B(x - x_0)^k$, $(k > 0)$ khi $x \to x_0$ và $A + B \neq 0$ thì ta có
$$f(x) + g(x) \sim (A + B)(x - x_0)^k, \ x \to x_0.$$
Nếu $A + B = 0$ thì không có tương đương trên.

Ví dụ. Ta có $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$ khi $x \to 0$. Khi đó

- $\sin x \tan x \sim x^2$ và $\sin x + \tan x \sim 2x$ khi $x \to 0$
- nhưng $\sin x - \tan x \not\sim x - x = 0$ khi $x \to 0$.

Ví dụ. Tính giới hạn sau:

$$I_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \arctan 2x}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Ta có

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{và} \quad \arctan 2x \sim 2x,\ \ x \to 0.$$

Từ đó ta có

$$x \arctan 2x \sim 2x^2,\ \ x \to 0.$$

Dùng quy tắc thay thế tương đương ta nhận được

$$I_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau:

$$I_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x\sin x)}{\sqrt{1+4x^2} - 1}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Ta có các tương đương

$$\ln(1 + x\sin x) \sim x\sin x \sim x^2, \ x \to 0$$

và

$$\sqrt{1+4x^2} - 1 = (1+4x^2)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}4x^2 = 2x^2, \ x \to 0.$$

Dùng quy tắc thay thế tương đương ta nhận được

$$I_3 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ. So sánh các VCB khi $x \to 0$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad \text{và} \quad g(x) = \sqrt{1+4x} - 1.$$

Giải. Xét giới hạn

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\sqrt{1+4x} - 1}.$$

Ta có

$$\ln(1+x) \sim x; \quad \ln(1-x) \sim -x$$

và

$$\sqrt{1+4x} - 1 = (1+4x)^{1/2} - 1 \sim \frac{4x}{2} = 2x, \ x \to 0.$$

Do đó

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - (-x)}{2x} = 1$$

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB tương đương khi $x \to 0$.

Ví dụ. So sánh các VCB khi $x \to 0$

$$f(x) = 1 - \cos 2x \quad \text{và} \quad g(x) = x.$$

Giải. Xét giới hạn

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$$

Vì

$$1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2, \ x \to 0$$

nên ta có

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to 0} 2x = 0.$$

Vậy $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to 0$.

Ví dụ. So sánh các VCB khi $x \to 2$.

$$f(x) = \arctan(x-2) \quad \text{và} \quad g(x) = \ln(5-x^2).$$

Giải. Xét giới hạn

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{\arctan(x-2)}{\ln(5-x^2)}.$$

Vì

$$\arctan(x-2) \sim (x-2),\ \ln(1+4-x^2) \sim (4-x^2),\ x \to 2$$

nên

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} = -\lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB cùng bậc khi $x \to 2$.

Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ và $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ thì

$$g(x) + f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau:

$$K = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tan x}.$$

Giải. Đây là giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Ta có

$$e^{x^3} - 1 \sim x^3 \;\Rightarrow\; e^{x^3} - 1 + x^2 \sim x^2 \;\text{ và }\; x\tan x \sim x^2, \quad x \to 0.$$

Dùng quy tắc thay thế tương đương ta nhận được

$$K = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Phần chính của VCB

Định nghĩa. Giả sử $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$. Nếu tồn tại số C và $k > 0$ sao cho

$$f(x) \sim C(x - x_0)^k$$

khi đó $C(x - x_0)^k$ gọi là phần chính của VCB. k gọi là bậc của VCB $f(x)$.

Ví dụ: Tìm phần chính dạng Cx^k khi $x \to 0$ của VCB

$$f(x) = \tan x - \sin x.$$

Giải. Ta có $f(x) = \tan x(1 - \cos x)$ và

$$\tan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0.$$

Suy ra $f(x) \sim \frac{x^3}{2}$, $x \to 0$. Vậy phần chính của VCB $f(x)$ khi $x \to 0$ là $\frac{x^3}{2}$.

Ví dụ: Tìm phần chính dạng Cx^k của VCB

$$f(x) = \sqrt{3} - \sqrt{2+\cos x} \qquad \text{khi} \qquad x \to 0.$$

Giải. Ta có

$$f(x) = \frac{3-(2+\cos x)}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}}$$

Vì

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0$$

và $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}) \sim 2\sqrt{3}$ nên

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\cos x}} \sim \frac{x^2}{4\sqrt{3}}, \qquad x \to 0.$$

Vậy phần chính của VCB $f(x)$ khi $x \to 0$ là $\frac{x^2}{4\sqrt{3}}$.

Vô cùng lớn (VCL)

Định nghĩa. Ta nói $f(x)$ là một VCL khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Ví dụ.

- $f(x) = \frac{1}{x}$ là một VCL khi $x \to 0$
- $f(x) = \ln x$ là một VCL khi $x \to +\infty$

Tính chất của VCL

- Nếu f, g là những VCL khi $x \to x_0$ thì fg là VCL khi $x \to x_0$
- Nếu f là VCL khi $x \to x_0$ thì $\frac{1}{f}$ là VCB khi $x \to x_0$
- Nếu f là VCB khi $x \to x_0$ thì $\frac{1}{f}$ là VCL khi $x \to x_0$

So sánh các VCL

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$ ta nói $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ với $0 < |l| < +\infty$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL cùng bậc. Đặc biệt nếu $l = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL tương đương, ký hiệu $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$.
- Nếu giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ không tồn tại thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL không so sánh được.

Hàm số liên tục

Định nghĩa.

1. Hàm số $f(x)$ xác định trên (a, b) được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Điểm không liên tục được gọi là điểm gián đoạn.
2. Nếu $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (tương ứng $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$) thì hàm số được gọi là liên tục trái (tương ứng phải) tại x_0.
3. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm trong (a, b).
4. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục trong (a, b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a.

Một số tính chất của hàm liên tục

1. Nếu f và g là hai hàm liên tục tại x_0 thì $f \pm g$, αf (α là hằng số) fg và $\frac{f}{g}$ (với $g(x_0) \neq 0$) liên tục tại x_0.
2. Nếu $u(x)$ liên tục tại x_0 và $f(u)$ liên tục tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm hợp $f(u(x))$ cũng liên tục tại x_0.
3. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đó.
4. Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.
5. Các hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định của nó.

Các hàm sơ cấp

- Hàm hằng
- Lũy thừa của x: x, x^2, x^3, x^α...
- Căn của x: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$,...
- Hàm mũ: e^x, 2^x,...
- Hàm logarit: $\ln x$, $\log_2 x$,...
- Hàm lượng giác: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$
- Hàm lượng giác ngược: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot} x$
- Các hàm số được tạo thành bằng cách lấy hàm hợp các hàm ở trên
- Tất cả các hàm số được tạo thành bằng cách cộng, trừ, nhân hay chia các hàm số sơ cấp trước đó.

Ví dụ. Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Giải.

- Với $x \neq 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ đây là hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục với $x \neq 0$.
- Với $x = 0$, ta có $f(0) = a$ và

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{(Xem tính chất kẹp).}$$

Vậy, nếu $a = 0$ hàm số liên tục tại $x = 0$, do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $a \neq 0$ hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

Ví dụ. Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a + x & \text{nếu} \quad x \le 0 \\ \frac{\sqrt{9+x}-3}{2x} & \text{nếu} \quad x > 0. \end{cases}$$

Giải.

- Với $x < 0$, $f(x) = a + x$ là hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục với $x < 0$.
- Với $x > 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{9+x}-3}{2x}$ là hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục với $x > 0$.
- Với $x = 0$, ta có $f(0) = a$ và

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a + x) = a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{9+x}-3}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2(\sqrt{9+x}+3)} = \frac{1}{12}.$$

Vậy, nếu $a = \frac{1}{12}$ hàm số liên tục tại $x = 0$ và từ đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $a \neq \frac{1}{12}$ hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

Ví dụ. Tìm a để hàm số sau liên tục với mọi x

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & \text{nếu} \quad x \leq 0 \\ \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} & \text{nếu} \quad x > 0. \end{cases}$$

Giải.

- Với $x < 0$, $f(x) = ae^x$ là hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục với mọi $x < 0$.
- Với $x > 0$, $f(x) = \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$ là hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục với $x > 0$.
- Với $x = 0$, ta có $f(0) = a$ và

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ae^x = a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \quad (\text{do } 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2}).$$

Để hàm số liên tục với mọi x thì hàm số phải liên tục tại $x = 0$, tức là $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Từ đó suy ra $a = \frac{1}{2}$.

Phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Giả sử x_0 là điểm gián đoạn.

- x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ hữu hạn. Nếu $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn khử được.
- x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 nếu nó không là điểm gián đoạn loại 1.

Ví dụ. Hàm $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ có điểm $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 vì

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

HẾT