Chương: Phương trình vi phân

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 7 tháng 6 năm 2024

Phương trình vi phân

Một phương trình vi phân là phương trình thể hiện mối liên hệ giữa biến độc lập, hàm cần tìm, và các đạo hàm của nó. Phương trình vi phân cấp n được cho dưới dạng:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

trong đó $y = y(x)$ là hàm của biến x cần tìm và $y', \ldots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của y.

Ví dụ.

- Phương trình vi phân cấp 1: $y^2y' - 2x^5 = 0$.
- Phương trình vi phân cấp 2: $y'' + 3y' + y - \sin x = 0$

Nghiệm của phương trình vi phân

Cho phương trình vi phân cấp n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Hàm số $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, được gọi là nghiệm của phương trình vi phân (1) nếu φ có đạo hàm đến cấp n trên (a, b), và

$$F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0, \quad x \in (a, b).$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n là nghiệm chứa n tham số độc lập.
- Nghiệm riêng là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách thay n tham số bằng n số cụ thể.

Ví dụ. Chứng minh rằng hàm $y = x^2$ là một nghiệm của phương trình $y^2y' - 2x^5 = 0$.

Giải. Ta có $y' = 2x$. Thay vào phương trình ta được

$$y^2y' - 2x^5 = x^4 \cdot 2x - 2x^5 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ. Chứng minh rằng hàm $y = (x^6 + C)^{1/3}$ là nghiệm của phương trình $y^2y' - 2x^5 = 0$.

Giải. Ta có

$$y' = \frac{1}{3}(x^6 + C)^{-2/3}6x^5 = 2x^5(x^6 + C)^{-2/3}.$$

Thay vào phương trình ta được

$$y^2y' - 2x^5 = (x^6 + C)^{2/3}2x^5(x^6 + C)^{-2/3} - 2x^5 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Nghiệm $y = (x^6 + C)^{1/3}$ là nghiệm tổng quát của $y^2y' - 2x^5 = 0$
- Nghiệm $y = x^2$ là một nghiệm riêng ($C = 0$).

Ví dụ. Chứng minh rằng hàm $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$ là nghiệm của phương trình

$$y' + 2xy = x^3.$$

Giải. Ta có $y' = x - C2xe^{-x^2}$. Do đó

$$y' + 2xy = x - C2xe^{-x^2} + 2x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}\right) = x^3.$$

$\rightsquigarrow$ Hàm

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Với $C = 1$ ta được hàm

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + e^{-x^2}$$

là một nghiệm riêng. Tương tự ta có các nghiệm riêng khác.

Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1 cho dưới một trong các dạng sau

1. $F(x, y, y') = 0$
2. $y' = f(x, y)$
3. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (Từ 2: $y' = \frac{dy}{dx}$ và $f(x, y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$)

Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 chứa một hằng số $y = y(x, C)$.
- Nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp 1 là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát khi thay hằng số C bởi một số cụ thể.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp 1

Ta thường tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$, trong đó x_0 và y_0 là các số thực cho trước. Để tìm nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$ ta làm như sau:

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y = y(x, C)$
- Thay điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ để tìm C.

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $y' + 2xy = x^3$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$ biết nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Giải. Từ điều kiện $y(0) = 1$ ta nhận được $-\frac{1}{2} + C = 1$ hay $C = \frac{3}{2}$. Vậy nghiệm cần tìm là

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}.$$

Phương trình tách biến

Phương trình vi phân tách biến là phương trình có dạng

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

Để giải phương trình này ta tích phân các vế của phương trình trên

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

Phương trình trên cho ta một hàm ẩn y của biến x. Trong một số trường hợp ta có thể giải tường minh được y theo x.

▷ Một trường hợp đặc biệt của phương trình vi phân tách biến là

$$y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad dy = f(x)dx.$$

Đây là bài toán tìm nguyên hàm.

Một số thuật ngữ

- Khi giải các phương trình vi phân ta thường phải lấy tích phân do đó việc giải phương trình vi phân còn gọi là tích phân phương trình vi phân
- Trong nhiều trường hợp ta không tìm được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$ mà tìm được dưới dạng một hàm ẩn cho bởi $\Phi(x, y, C) = 0$. Hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của phương trình vi phân.
- Khi thay hằng số C trong tích phân tổng quát bởi một hằng số cụ thể ta được một tích phân riêng.

Ví dụ: Giải phương trình $y^2y' - 2x^5 = 0$. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$.

Giải. Vì $y' = \frac{dy}{dx}$ nên phương trình đã cho được viết lại là

$$y^2\frac{dy}{dx} - 2x^5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2dy - 2x^5dx = 0.$$

Đây là phương trình tách biến. Tích phân các vế ta được

$$\int y^2dy - \int 2x^5dx = C$$

hay

$$\frac{y^3}{3} - \frac{2x^6}{6} = C \quad \Leftrightarrow \quad y^3 = x^6 + 3C \quad \Leftrightarrow \quad y = (x^6 + 3C)^{1/3}.$$

Từ giả thiết $y(0) = 1$ ta có $1 = (0 + 3C)^{1/3}$ hay $3C = 1$. Vậy nghiệm thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$ là

$$y = (x^6 + 1)^{1/3}.$$

Ví dụ. Giải phương trình sau

$$x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0.$$

Giải. Chia cả hai vế cho $(x^2+1)(y^2+1)$ ta được

$$\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{ydy}{y^2+1} = 0.$$

Đây là phương trình tách biến. Tích phân hai vế

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{ydy}{y^2+1} = C$$

ta được

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C.$$

Từ đó suy ra

$$\ln[(x^2+1)(y^2+1)] = 2C \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1)(y^2+1) = e^{2C}.$$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình cho dưới dạng hàm ẩn.

Phương trình vi phân đưa được về tách biến - Dạng 1

Xét phương trình

$$y' = f(ax + by + c),$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $b \neq 0$. Đặt

$$u = ax + by + c.$$

Ở đây u là hàm của biến x. Ta có đạo hàm (theo x)

$$u' = a + by' \quad \Leftrightarrow \quad by' = u' - a \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Thay vào phương trình ban đầu với $u' = \frac{du}{dx}$ ta được

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = bf(u) + a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{bf(u) + a} = dx.$$

⇝ Đây là phương trình vi phân tách biến.

Ví dụ. Giải phương trình sau

$$y' = (x + y + 1)^2.$$

Giải. Đặt

$$u = x + y + 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1.$$

Thay vào phương trình ta nhận được

$$u' - 1 = u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{u^2 + 1} = dx.$$

Đây là phương trình tách biến. Tích phân hai vế ta được

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \arctan u = x + C.$$

Thay $u = x + y + 1$ trở lại ta được

$$\arctan(x + y + 1) = x + C.$$

Phương trình đưa được về tách biến: PT đẳng cấp

Phương trình đẳng cấp là phương trình có dạng

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Để giải phương trình này ta đặt $u = \frac{y}{x}$. Ở đây u là hàm của biến x. Ta có

$$y = x \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x \cdot u'.$$

Khi đó ta được

$$u + x \cdot u' = f(u) \qquad \text{hay} \qquad x \cdot u' = f(u) - u.$$

Vì $u' = \frac{du}{dx}$ nên ta viết lại

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

⇝ Đây là phương trình vi phân tách biến.

Ví dụ. Giải phương trình

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

Giải. Đặt

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x \cdot u'$$

ta được

$$u + x \cdot u' = u + e^u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = e^u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế ta được

$$\int \frac{du}{e^u} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-u} = \ln|x| + C.$$

Như vậy nghiệm tổng quát cho dưới dạng

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

Phương trình tuyến tính

Phương trình tuyến tính cấp 1 cho dưới dạng

$$y' + p(x)y = q(x),$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm của biến x.

- Nếu $q(x) = 0$ phương trình được gọi là phương trình thuần nhất. Ngược lại phương trình gọi là phương trình không thuần nhất.
- Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$y = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình

$$y' + 2xy = x^3 e^{-x^2}$$

thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$.

Giải. Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính. Nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} y &= \left(\int x^3 e^{-x^2} e^{\int 2x dx} dx + C \right) e^{-\int 2x dx} \\ &= \left(\int x^3 e^{-x^2} e^{x^2} dx + C \right) e^{-x^2} \\ &= \left(\int x^3 dx + C \right) e^{-x^2} = \left(\frac{x^4}{4} + C \right) e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Từ điều kiện $y(0) = 1$ ta nhận được $C = 1$. Vậy nghiệm cần tìm là

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + 1 \right) e^{-x^2}.$$

Phương trình đưa được về PT tuyến tính: PT Bernoulli

Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0; 1.$$

Nếu $y \neq 0$, chia cả hai vế cho y^{α} ta nhận được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $u = y^{1-\alpha}$. Như vậy u là hàm của biến x. Ta có

$$u' = (1-\alpha)y^{1-\alpha-1}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-\alpha}y' = \frac{u'}{1-\alpha}.$$

Thay vào phương trình ban đầu ta nhận được

$$\frac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x) \quad \Leftrightarrow \quad u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x).$$

$\rightsquigarrow$ Đây là phương trình vi phân tuyến tính.

Ví dụ. Giải phương trình
$$y' - y = \frac{1}{y}e^{2x}.$$
Giải. Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = -1$. Ta có
$$yy' - y^2 = e^{2x}.$$
Đặt $u = y^2 \;\Rightarrow\; u' = 2yy' \;\Rightarrow\; yy' = \frac{u'}{2}$ ta nhận được phương trình
$$\frac{u'}{2} - u = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad u' - 2u = 2e^{2x}.$$
Đây là phương trình tuyến tính cấp 1. Nghiệm tổng quát là
$$\begin{aligned} u &= \left(\int 2e^{2x}e^{-\int 2dx}dx + C\right)e^{\int 2dx} \\ &= \left(\int 2e^{2x}e^{-2x}dx + C\right)e^{2x} = (2x + C)e^{2x}. \end{aligned}$$
Vì $u = y^2$ ta nhận được
$$y^2 = (2x + C)e^{2x}.$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y' + \frac{2y}{x} = 2\sqrt{y}\cos x.$$

Giải. Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = 1/2$. Phương trình này có một nghiệm $y = 0$. Nếu $y \neq 0$, chia cả hai vế cho $\sqrt{y}$ ta nhận được

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + 2\frac{\sqrt{y}}{x} = 2\cos x. \tag{2}$$

Đặt

$$u = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad yy' = 2u'.$$

Thay vào phương trình (2) ta nhận được

$$2u' + 2\frac{u}{x} = 2\cos x \quad \Rightarrow \quad u' + \frac{u}{x} = \cos x.$$

Đây là phương trình tuyến tính.

Nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} u &= \left(\int \cos x \, e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C \right) e^{-\int \frac{dx}{x}} \\ &= \left(\int \cos x e^{\ln|x|} dx + C \right) e^{-\ln|x|} \\ &= \left(\int \cos x e^{\ln|x|} dx + C \right) e^{\ln(|x|^{-1})}. \end{aligned}$$

Với điều kiện $x > 0$ ta có

$$u = \left(\int x \cos x dx + C \right) \frac{1}{x}.$$

Tích phân từng phần ta nhận được

$$u = \frac{x \sin x + \cos x + C}{x}$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$\sqrt{y} = \frac{x \sin x + \cos x + C}{x}, \quad (x > 0).$$

Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

trong đó biểu thức bên trái là vi phân toàn phần của một hàm hai biến khả vi $u(x,y)$ nào đó. Tức là

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

hay

$$P(x,y) = u'_x(x,y), \qquad Q(x,y) = u'_y(x,y).$$

Như vậy nếu phương trình (3) là phương trình vi phân toàn phần thì nó có nghiệm là

$$u(x,y) = C.$$

Điều kiện và cách tìm $u(x, y)$

- Điều kiện để phương trình (3) là phương trình vi phân toàn phần là

$$P'_y = Q'_x.$$

- Cách tìm hàm $u(x, y)$. Trước hết ta chọn (x_0, y_0) tùy ý trên miền mà $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ khả vi liên tục, khi đó

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$$

hoặc

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Giải. Đặt $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2,\ Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$ ta có

$$P'_y = Q'_x = 12xy.$$

Do đó, phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần, chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$, ta nhận được nghiệm tổng quát

$$u(x, y) = C$$

hay

$$\begin{aligned} & \int_0^x P(x, y)dx + \int_0^y Q(0, y)dy = C \\ \Leftrightarrow \quad & \int_0^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3dy = C \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C. \end{aligned}$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$3x^2(1+\ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

Giải. Với

$$P(x,y) = 3x^2(1+\ln y), \quad Q(x,y) = -2y + \frac{x^3}{y}$$

ta có

$$P'_y = Q'_x = \frac{3x^2}{y}.$$

Như vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần, chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ta có nghiệm tổng quát là

$$\int_0^x 3x^2(1+\ln 1)dx - \int_1^y \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - (y^2 - x^3\ln|y|)\Big|_1^y = C$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - y^2 + x^3\ln|y| = C - 1.$$

Phương trình vi phân cấp 2

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

trong đó $y = y(x)$ là hàm của biến x cần tìm. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai chứa hai hằng số C_1, C_2:

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

Nghiệm riêng của phương trình là nghiệm thu được khi thay C_1 và C_2 bởi hai số cụ thể. Ta thường tìm nghiệm của phương trình $F(x, y, y', y'') = 0$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y_1$, trong đó x_0, y_0 và y_1 là các giá trị đã cho.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai cho dưới dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{4}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, và $f(x)$ là các hàm của x.

- Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình đã cho gọi là phương trình thuần nhất, ngược lại gọi là phương trình không thuần nhất.
- Nếu $p(x)$, $q(x)$ là các hằng số thì phương trình đã cho gọi là phương trình có hệ số hằng.

Tính chất nghiệm

Xét phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{5}$$

và phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

Ta có các tính chất sau

- Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (6) thì $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (6).
- Nếu $\bar{y}(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (6) và $y_*(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình (5), khi đó $y(x) = \bar{y}(x) + y_*(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình (5).

Phương trình thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng số

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{7}$$

trong đó a, b, c là các hằng số $a \neq 0$. Phương trình đặc trưng của (7) là

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{8}$$

- Nếu (8) có hai nghiệm thực $\lambda_1 \neq \lambda_2$, khi đó (7) có nghiệm tổng quát là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- Nếu (8) có nghiệm kép $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, khi đó (7) có nghiệm tổng quát

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

- Nếu (8) có nghiệm phức $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, khi đó (7) có nghiệm tổng quát

$$\overline{y}(x) = e^{\alpha x}\big[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\big].$$

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$
2. $4y'' - 4y' + y = 0$

Giải.

1. Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \ \ \lambda_2 = -3.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

2. Phương trình đặc trưng tương ứng là

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình

1. $y'' - 6y' + 10y = 0$
2. $y'' + 9y = 0.$

Giải.

1. Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 3 \pm i.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\overline{y}(x) = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

2. Phương trình đã cho có phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 3i.$$

Nghiệm tổng quát là

$$\overline{y}(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0$ và $y'(0) = 1$.

Giải. Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Từ đó suy ra $\overline{y}'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Theo giả thiết

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + 3C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$\overline{y}(x) = -e^{2x} + e^{3x}.$$

Phương trình không thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{9}$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$. Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình trên ta thực hiện các bước sau:

- Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}(x)$ của phương trình thuần nhất tương ứng

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- Tìm một nghiệm riêng $y_*(x)$ của phương trình (9)
- Nghiệm tổng quát của phương trình (9) cho bởi $y(x) = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

Để tìm nghiệm riêng $y_*(x)$ ta xét một số trường hợp.

Trường hợp 1. $f(x)$ có dạng

$$f(x) = e^{\alpha x}(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n).$$

Khi đó

$$y_*(x) = x^m e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n)$$

trong đó

- $m = 0$ nếu $\lambda = \alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng
- $m = 1$ nếu $\lambda = \alpha$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng
- $m = 2$ nếu $\lambda = \alpha$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

và $A_0,\ A_1, ..., A_n$ là các hệ số chưa biết, được tìm bằng cách thay $y_*(x)$ vào phương trình

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

và đồng nhất hệ số.

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}.$$

Giải. • Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

- Ta có $f(x) = e^{2x}3$. Vì $\lambda = 2$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên $y_*(x)$ được tìm dưới dạng

$$\begin{aligned} y_*(x) &= x^1 e^{2x} A_0 = A_0 x e^{2x} \\ y_*'(x) &= A_0 e^{2x} + 2A_0 x e^{2x} \\ y_*''(x) &= 2A_0 e^{2x} + 2A_0 e^{2x} + 4A_0 x e^{2x} = 4A_0 e^{2x} + 4A_0 x e^{2x}. \end{aligned}$$

Thay y_*, y_*', và y_*'' vào phương trình ban đầu

$$\begin{aligned} 4A_0 e^{2x} + 4A_0 x e^{2x} - 3[A_0 e^{2x} + 2A_0 x e^{2x}] + 2A_0 x e^{2x} &= 3e^{2x} \\ \Leftrightarrow \qquad A_0 e^{2x} &= 3e^{2x} \end{aligned}$$

ta nhận được $A_0 = 3$. Suy ra nghiệm riêng là $y_*(x) = 3xe^{2x}$.

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

Giải. • Phương trình thuần nhất là

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

có phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

• Ta có $f(x) = xe^x = e^x(0 + x)$. Vì $\lambda = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên:

$$y_*(x) = x^0 e^x(A_0 + A_1 x) = e^x(A_0 + A_1 x)$$

$$y_*'(x) = e^x A_1 + e^x(A_0 + A_1 x)$$

$$y_*''(x) = e^x A_1 + e^x A_1 + e^x(A_0 + A_1 x) = 2e^x A_1 + e^x(A_0 + A_1 x).$$

Thay y_*, y'_*, và y''_* vào phương trình ban đầu ta được

$$2e^xA_1 + e^x(A_0 + A_1x) - 5[e^xA_1 + e^x(A_0 + A_1x)] + 6e^x(A_0 + A_1x) = xe^x$$
$$\Leftrightarrow \quad 2A_1 + (A_0 + A_1x) - 5[A_1 + (A_0 + A_1x)] + 6(A_0 + A_1x) = x$$
$$\Leftrightarrow \quad 2A_1x - 3A_1 + 2A_0 = x.$$

Giải hệ

$$2A_1 = 1, \qquad -3A_1 + 2A_0 = 0$$

ta tìm được $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_0 = \frac{3}{4}$. Vậy nghiệm riêng là

$$y_*(x) = e^x\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{4}e^x(3 + 2x).$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_*(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}e^x(3 + 2x).$$

Trường hợp 2: $f(x)$ có dạng

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\cos(\beta x) + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)\sin(\beta x)\right]$$

thì $y_*(x)$ được tìm dưới dạng

$$y_*(x) = x^m e^{\alpha x}\left[(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_n x^n)\sin(\beta x)\right]$$

trong đó

- $m = 0$ nếu $\lambda = \alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng
- $m = 1$ nếu $\lambda = \alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng

và $A_0,\ A_1, \ldots, A_n$ và $B_0,\ B_1, \ldots, B_n$ là các hằng số chưa biết, được tìm bằng cách thay $y_*(x)$ vào phương trình

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

và đồng nhất hệ số.

Ví dụ. Giải phương trình $y'' + 4y = 3\cos(2x)$.

Giải. • Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y'' + 4y = 0.$$

Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y}(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x).$$

• Ta có $f(x) = e^{0x}(3\cos(2x) + 0\sin(2x))$. Vì $\lambda = \pm 2i$ là nghiệm của phương tình đặc trưng nên $y_*(x)$ được tìm dưới dạng

$$y_*(x) = x^1 e^{0x}(A_0\cos(2x) + B_0\sin(2x)) = x(A_0\cos(2x) + B_0\sin(2x)).$$

Ta có

$$y_*'(x) = A_0\cos(2x) + B_0\sin(2x) + x(-2A_0\sin(2x) + 2B_0\cos(2x))$$
$$y_*''(x) = -4A_0\sin(2x) + 4B_0\cos(2x) + x(-4A_0\cos(2x) - 4B_0\sin(2x)).$$

Thay y_* và y_*'' vào phương trình ban đầu ta được

$$y_*'' + 4y_* = -4A_0\sin(2x) + 4B_0\cos(2x) = 3\cos(2x)$$

và từ đó suy ra

$$-4A_0 = 0, \qquad 4B_0 = 3$$

hay $A_0 = 0$, $B_0 = 3/4$. Như vậy nghiệm riêng là

$$y_*(x) = \frac{3}{4}x\sin(2x).$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_*(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{3}{4}x\sin(2x).$$

Ví dụ. Giải phương trình $y'' - y = e^x \sin x$.

Giải. • Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y'' - y = 0.$$

Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

• Ta có $f(x) = e^x(0\cos x + 1\sin x)$. Vì $\lambda = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên $y_*(x)$ được tìm dưới dạng

$$y_*(x) = x^0 e^x(A_0 \cos x + B_0 \sin x) = e^x(A_0 \cos x + B_0 \sin x)$$

$$y_*'(x) = e^x(A_0 \cos x + B_0 \sin x) + e^x(-A_0 \sin x + B_0 \cos x)$$

$$y_*''(x) = 2e^x(-A_0 \sin x + B_0 \cos x).$$

Thay y_* và y_*'' vào phương trình ban đầu ta tìm được

$$2e^x(-A_0 \sin x + B_0 \cos x) - e^x(A_0 \cos x + B_0 \sin x) = e^x \sin x$$
$$\Leftrightarrow (-2A_0 - B_0) \sin x + (2B_0 - A_0) \cos x = \sin x.$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$-2A_0 - B_0 = 1, \qquad 2B_0 - A_0 = 0$$

có nghiệm là $A_0 = -\frac{2}{5}$, $B_0 = -\frac{1}{5}$. Suy ra nghiệm riêng là

$$y_*(x) = e^x\left(-\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x\right) = -\frac{e^x}{5}(2\cos x + \sin x)$$

- Vậy nghiệm tổng quát là

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_*(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{e^x}{5}(2\cos x + \sin x).$$

Trường hợp 3: Giả sử

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

trong đó $f_1(x)$ và $f_2(x)$ ở trường hợp 1 và trường hợp 2 ta áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm, tức là:

$$y_*(x) = y_1(x) + y_2(x).$$

Trong đó $y_1(x)$ là nghiệm riêng của phương trình:

$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$

và $y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình:

$$ay'' + by' + cy = f_2(x).$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân sau

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{2x} + 8x - 6.$$

Giải: • Phương trình thuần nhất:

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Phương trình đặc trưng là:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

• Xét phương trình:

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{2x}$$

Ta có $f_1(x) = 2e^{2x}$. Vì $\lambda = 2$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= x^1 e^{2x} A_0 = A_0 x e^{2x} \\
y_1'(x) &= A_0 e^{2x} + 2A_0 x e^{2x} \\
y_1''(x) &= 4A_0 e^{2x} + 4A_0 x e^{2x}.
\end{aligned}
$$

Thay vào phương trình $y'' - 6y' + 8y = 2e^{2x}$ ta nhận được

$$
\begin{aligned}
& 4A_0 e^{2x} + 4A_0 x e^{2x} - 6(A_0 e^{2x} + 2A_0 x e^{2x}) + 8A_0 x e^{2x} = 2e^{2x} \\
\Leftrightarrow \quad & -2A_0 e^{2x} = 2e^{2x}
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra $A_0 = -1$ và nghiệm riêng $y_1(x) = -xe^{2x}$.

- Xét phương trình:

$$y'' - 6y' + 8y = 8x - 6.$$

Ta có $f_2(x) = 8x - 6 = e^{0x}(8x - 6)$. Vì $\lambda = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng:

$$y_2(x) = x^0 e^{0x}(A_1 x + A_0) = A_1 x + A_0, \qquad y_2'(x) = A_1, \qquad y_2''(x) = 0.$$

Thay vào phương trình $y'' - 6y' + 8y = 8x - 6$. ta được

$$-6A_1 + 8A_1 x + 8A_0 = 8x - 6.$$

Từ đó ta được $A_1 = 1$ và $A_0 = 0$. Vậy nghiệm riêng là $y_2(x) = x$.

- Nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_*(x) = y_1(x) + y_2(x) = -xe^{2x} + x$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_*(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - xe^{2x} + x.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân sau

$$y'' - 3y' + 2y = 2xe^x + 20\cos x.$$

Giải: • Phương trình thuần nhất:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

• Xét phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 2xe^x.$$

Ta có $f_1(x) = 2xe^x = e^x(0 + 2x)$. Vì $\lambda = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng $y_1(x)$ có dạng

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= x^1 e^x(A_0 + A_1x) = e^x(A_0x + A_1x^2)\\
y_1'(x) &= e^x(A_0x + A_1x^2) + e^x(A_0 + 2A_1x)\\
y_1''(x) &= e^x(A_0x + A_1x^2) + 2e^x(A_0 + 2A_1x) + e^x 2A_1.
\end{aligned}
$$

Thay vào phương trình $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ ta được

$$
\begin{aligned}
&\left[e^x(A_0x + A_1x^2) + 2e^x(A_0 + 2A_1x) + e^x 2A_1\right]\\
&- 3\left[e^x(A_0x + A_1x^2) + e^x(A_0 + 2A_1x)\right] + 2e^x(A_0x + A_1x^2) = 2xe^x\\
\Leftrightarrow \quad & -(A_0 + 2A_1x) + 2A_1 = 2x
\end{aligned}
$$

Từ đó ta nhận được $A_1 = -1,\ A_0 = -2$ và $y_1(x) = e^x(-2x - x^2)$.

- Xét phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 20\cos x.$$

Ta có $f_2(x) = 20\cos x = e^{0x}(20\cos x + 0.\sin x)$. Vì $\lambda = 0 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng $y_2(x)$ có dạng

$$y_2(x) = x^0 e^{0x}(A_0\cos x + B_0\sin x) = A_0\cos x + B_0\sin x,$$

$$y_2'(x) = -A_0\sin x + B_0\cos x$$

$$y_2''(x) = -A_0\cos x - B_0\sin x$$

Thay vào phương trình $y'' - 3y' + 2y = 20\cos x$ ta được

$$\Big[-A_0\cos x - B_0\sin x\Big] - 3\Big[-A_0\sin x + B_0\cos x\Big] + 2\Big[A_0\cos x + B_0\sin x\Big] = 20\cos x.$$

$$\Leftrightarrow \quad (A_0 - 3B_0)\cos x + (B_0 + 3A_0)\sin x = 20\cos x$$

Từ đó suy ra $A_0 = 2$, $B_0 = -6$ và $y_2(x) = 2\cos x - 6\sin x$. Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_*(x) = y_1(x) + y_2(x) = e^x(-2x - x^2) + 2\cos x - 6\sin x$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} y(x) &= \bar{y}(x) + y_*(x) \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(-2x - x^2) + 2\cos x - 6\sin x. \end{aligned}$$

HẾT