TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 8 tháng 11 năm 2023

Nội dung

Khái niệm nguyên hàm

Khái niệm. Ta gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trong khoảng (a, b) nếu

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in (a, b).$$

Ví dụ. Hàm số $F(x) = e^{x^2} + \sin x + 1$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2xe^{x^2} + \cos x$ trên $\mathbb{R}$ vì

$$F'(x) = (e^{x^2} + \sin x + 1)' = 2xe^{x^2} + \cos x = f(x).$$

Tính chất. Giả sử $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khi đó $F(x) + C$ với C là hằng số, cũng là một nguyên hàm của $f(x)$. Ngược lại, mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$.

Tích phân bất định

Tập tất cả các nguyên hàm của hàm $f(x)$ được ký hiệu là $\int f(x)dx$ và được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$. Như vậy nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Tính chất

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, α là hằng số
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

Bảng nguyên hàm của một số hàm sơ cấp

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
10. $\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + a| + C$
11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a \pm x^2}} = \pm\sqrt{a \pm x^2} + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} =$
$\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

Các phương pháp đổi biến

Giả sử cần tính tích phân $\int f(x)dx$ ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau:

1. Nếu $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ ta đặt $t = \varphi(x)$ khi đó

$$\int f(x)dx = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int g(t)dt$$

tính tích phân bên phải và thay trở lại $t = \varphi(x)$.

2. Ta có thể đổi biến $x = \varphi(t)$ (khả vi liên tục và có hàm ngược). Khi đó

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

tính tích phân bên phải thay t theo x.

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int 2x\cos(x^2+1)dx.$$

Giải. Đặt $t = x^2 + 1$ ta có $dt = (x^2+1)'dx = 2xdx$. Từ đó ta nhận được

$$I = \int \cos t dt = \sin t + C.$$

Thay $t = x^2 + 1$ ta nhận được

$$I = \sin(x^2+1) + C.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int \sin x \cos^4 x dx.$$

Giải. Đặt $t = \cos x$ ta có $dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx$. Tích phân trở thành

$$\begin{aligned} I &= \int (-\cos^4 x)(-\sin x dx) \\ &= -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C. \end{aligned}$$

Thay $t = \cos x$ ta được

$$I = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$J = \int x^3\sqrt{x^2+1}dx.$$

Giải. Ta viết tích phân dưới dạng

$$J = \int x^2\sqrt{x^2+1}\,xdx.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ ta có $t^2 = x^2+1$ và $2tdt = 2xdx$. Từ đó suy ra

$$J = \int (t^2-1)\cdot t\cdot tdt = \int (t^4-t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C.$$

Trở lại biến ban đầu

$$J = \frac{\sqrt{(x^2+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + C.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Ta có công thức

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Các tích phân dưới đây được tính bằng phương pháp tích phân từng phần (k, m là các số nguyên dương)

- $\int x^k \sin x dx$, $\int x^k \cos x dx$
- $\int x^k e^x dx$
- $\int x^k (\ln x)^m dx$
- $\int x^k \arctan x dx$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I = \int x \sin x dx.$$

Giải. Vì $d(-\cos x) = \sin x dx$ nên tích phân được viết lại

$$I = \int x d(-\cos x).$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần với $u = x$ và $v = -\cos x$ ta có

$$\begin{aligned} I &= -x\cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I = \int \arctan x dx.$$

Giải. Bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = \arctan x$ và $v = x$ ta có

$$\begin{aligned} I &= x \arctan x - \int x d(\arctan x) \\ &= x \arctan x - \int x (\arctan x)' dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$J = \int x \ln x dx.$$

Giải. Vì $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ nên ta có thể viết

$$J = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = \ln x$ và $v = \frac{x^2}{2}$ ta được

$$\begin{aligned} J &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} d\left(\ln x\right) \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \left(\ln x\right)' dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Tích phân $\int \frac{Mx+N}{(x+a)(x+b)}dx$

- Nếu $a = b$ ta viết

$$\frac{Mx+N}{(x+a)^2} = \frac{Mx+Ma-Ma+N}{(x+a)^2} = \frac{M}{x+a} + \frac{-Ma+N}{(x+a)^2}.$$

- Nếu $a \neq b$ ta phân tích

$$\frac{Mx+N}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}.$$

Chú ý: Ta sử dụng các công thức sau

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} + C$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int \frac{4x-2}{x^2+3x+2} dx.$$

Giải. Tích phân được viết lại thành

$$I = \int \frac{4x-2}{(x+1)(x+2)} dx.$$

Ta phân tích

$$\frac{4x-2}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

và nhận được

$$4x - 2 = A(x+2) + B(x+1).$$

- Cho $x = -1$ ta có $-6 = A$ hay $A = -6$.
- Cho $x = -2$ ta có $-10 = -B$, suy ra $B = 10$. Từ đó ta nhận được

$$I = \int \frac{-6dx}{x+1} + \int \frac{10dx}{x+2} = -6\ln|x+1| + 10\ln|x+2| + C.$$

Để tính tích phân này ta đặt $x + A = t$ và sử dụng các công thức dưới đây

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} \ln \left|x^2 + a\right| + C$

Ví dụ. Tính tích phân

$$J = \int \frac{-3x + 4}{9x^2 - 6x + 2} dx.$$

Giải. Ta có

$$J = \int \frac{-3x + 4}{(3x - 1)^2 + 1} dx.$$

Đổi biến $t = 3x - 1$ ta được $x = \frac{t+1}{3}$. Từ đó suy ra $dx = \frac{dt}{3}$ và

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{-(t+1)+4}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{-t+3}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= -\frac{1}{6} \ln(t^2+1) + \arctan t + C. \end{aligned}$$

Thay thế $t = 3x - 1$ ta có kết quả là

$$J = -\frac{1}{6} \ln((3x-1)^2+1) + \arctan(3x-1) + C.$$

Tích phân của phân thức hữu tỉ

Giả sử $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m với $n < m$. Để tính

$$I = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

ta tìm cách đưa về các tích phân đơn giản sau

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^k}, \ k = 2, 3, 4..$
- $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$
- $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx, \ k = 2, 3, 4..$

Giả sử a, b, c là các hằng số khác nhau và giả sử bậc của đa thức ở tử số nhỏ hơn bậc của đa thức ở mẫu số. Khi đó ta có một số phân tích

- $\dfrac{P_n(x)}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b}$
- $\dfrac{P_n(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b} + \dfrac{C}{x+c}$
- $\dfrac{P_n(x)}{(x+a)^2(x+b)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{(x+a)^2} + \dfrac{C}{x+b}$
- $\dfrac{P_n(x)}{(x+a)(x^2+px+q)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, ($-a$ không là nghiệm của $x^2+px+q=0$)

Các hằng số A, B, C ở vế phải được tìm bằng cách quy đồng và đồng nhất hệ số.

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$$

Giải. Ta phân tích

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Quy đồng ta được

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$$

- Cho $x = -1$ ta được $-1 = A(-1+2)(-1+3) = 2A \ \Rightarrow \ A = -\frac{1}{2}$
- Cho $x = -2$ ta được $-2 = B(-2+1)(-2+3) = -B \ \Rightarrow \ B = 2$
- Cho $x = -3$ ta được $-3 = C(-3+1)(-3+2) = 2C \ \Rightarrow \ C = -\frac{3}{2}$

Từ đó ta có phân tích

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)}.$$

Vậy ta có kết quả

$$\begin{aligned} I &= \int \Big[-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)} \Big] dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$J = \int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)}dx.$$

Giải. Ta phân tích

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Quy đồng ta được

$$x^2+1 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2.$$

- Cho $x = -1$ ta được $2 = B(-1-1) = -2B \;\Rightarrow\; B = -1$
- Cho $x = 1$ ta được $2 = C(1+1)^2 = 4C \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2}$
- Cho $x = 0$ ta được $1 = -A - B + C = -A + 1 + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}$

Từ đó ta có phân tích

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} J &= \int \Big[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}\Big] dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$K = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Giải. Ta phân tích

$$\frac{1}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Quy đồng ta được

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

- Cho $x = -1$ ta được $1 = 2A \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}$
- Cho $x = 0$ ta được $1 = A + C = \frac{1}{2} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2}$
- Cho $x = 1$ ta được $1 = 2A + 2(B + C) = 1 + 2(B + \frac{1}{2}) \;\Rightarrow\; B = -\frac{1}{2}$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$$
$$= -\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Vậy

$$K = -\int \frac{dx}{2(x+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Tích phân $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}dx$

Để tính tích phân trên ta biến đổi về một trong hai dạng

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{(x+A)^2 \pm B^2}}dx \qquad \text{hoặc} \qquad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{B^2-(x+A)^2}}dx.$$

Tiếp đó ta đặt $t = x + A$ và dùng các công thức sau

- $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a \pm x^2}} = \pm\sqrt{a \pm x^2} + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int \frac{4x-2}{\sqrt{-x^2-6x-5}}dx.$$

Giải. Ta có

$$I = \int \frac{4x-2}{\sqrt{4-(x+3)^2}}dx.$$

Đặt $t = x+3$ ta có $x = t-3$ và $dx = dt$. Khi đó

$$I = \int \frac{4(t-3)-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{4t-14}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{4tdt}{\sqrt{4-t^2}} - \int \frac{14dt}{\sqrt{4-t^2}}$$
$$= -4\sqrt{4-t^2} - 14\arcsin\frac{t}{2} + C.$$

Thay $t = x+3$ ta nhận được

$$I = -4\sqrt{4-(x+3)^2} - 14\arcsin\frac{x+3}{2} + C.$$

Ví dụ. Tính tích phân
$$J = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}.$$

Giải. Ta có
$$J = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^2 - 6}}.$$

Đặt $t = x + 1$ ta có $x = t - 1$ và $dx = dt$. Khi đó
$$J = \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2 - 6}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 6}} dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6}}$$
$$= \sqrt{t^2 - 6} - \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 6}\right| + C.$$

Trở lại biến cũ ta nhận được
$$J = \sqrt{(x+1)^2 - 6} - \ln\left|x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 - 6}\right| + C.$$

Tích phân $\int f(\sqrt[n]{ax+b}, x)dx$

Để tính tích phân dạng này ta có thể đặt

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int x\sqrt{x-1}dx.$$

Giải. Đặt $t = \sqrt{x-1}$. Suy ra $x = t^2 + 1$ và $dx = 2tdt$. Thay vào ta được

$$I = \int (t^2+1)t(2tdt) = 2\int (t^4+t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + C.$$

Thay trở lại biến x ta có

$$I = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{(\sqrt{x-1})^3}{3}\right) + C.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x-1}} dx.$$

Giải. Với bài này ta đặt

$$\sqrt[3]{2x-1} = t, \quad 2x-1 = t^3, \quad x = \frac{t^3+1}{2}, \quad dx = \frac{3}{2}t^2 dt.$$

Khi đó

$$I = \int \frac{\frac{t^3+1}{2}+2}{t} \cdot \frac{3}{2}t^2 dt = \int \frac{t^3+1+4}{2} \cdot \frac{3}{2} t dt$$
$$= \frac{3}{4}\int (t^4+5t)dt = \frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{5t^2}{2}\right) + C.$$

Thay lại biến cũ ta nhận được

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{(\sqrt[3]{2x-1})^5}{5} + \frac{5(\sqrt[3]{2x-1})^2}{2}\right] + C.$$

Để tích tích phân trên ta đặt như sau:

1. Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Đặt $t = \cos x$
2. Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Đặt $t = \sin x$
3. Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Đặt $t = \tan x$
4. Đặt tổng quát $t = \tan \frac{x}{2}$

Ví dụ. Với hàm $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ ta có

$$
\begin{aligned}
R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{-\sin x}{-\sin^3 x - \cos^3 x} \\
&= \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = R(\sin x, \cos x)
\end{aligned}
$$

Như vậy hàm này thỏa mãn điều kiện 3.

Ví dụ. Tính tích phân sau:

$$I = \int \sin^3 x dx.$$

Giải. Trong trường hợp này $R(\sin x, \cos x) = \sin^3 x$. Ta có

$$R(-\sin x, \cos x) = (-\sin x)^3 = -\sin^3 x = -R(\sin x, \cos x).$$

Tích phân được viết lại

$$I = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx.$$

Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, ta có

$$I = \int (1 - t^2)(-dt) = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C.$$

Trở lại biến ban đầu

$$I = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

Giải. Ta có $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$. Để ý rằng

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{\cos^4 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, ta có

$$I = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x}(-\sin x) dx = \int \frac{t^2 - 1}{t^4} dt$$
$$= \int (t^{-2} - t^{-4}) dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C.$$

Thay $t = \cos x$ ta được

$$I = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$J = \int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}.$$

Giải. Trong trường hợp này $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$. Ta có

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{\sin x(-\cos x)dx}{(-\cos x)^2 + 2\sin^2 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Do đó ta đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, ta có

$$J = \int \frac{\sin x \cos x dx}{(1 - \sin^2 x) + 2\sin^2 x} = \int \frac{tdt}{1 + t^2}$$
$$= \int \frac{tdt}{1 + t^2} = \ln \left|1 + t^2\right| + C.$$

Vì $t = \sin x$ ta nhận được

$$I = \frac{1}{2} \ln \left|1 + \sin^2 x\right| + C.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

Giải. Ta có $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos^3 x}$. Để ý rằng

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{-\sin x(-\cos x)^3} = \frac{1}{\sin x \cos^3 x} = R(\sin x, \cos x).$$

Đặt $t = \tan x$ ta có $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Vì $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ nên

$$I = \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{t^2+1}{t} dt$$
$$= \int \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{2} + \ln|t| + C.$$

Thay $t = \tan x$ ta được

$$I = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\tan x| + C.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$K = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Giải. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ ta có

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó

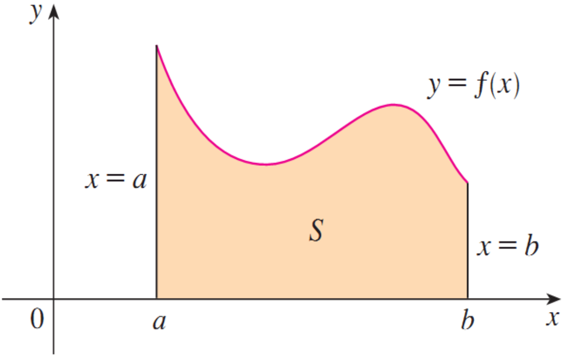
$$K = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{8t+3-3t^2+5+5t^2}{1+t^2}}$$
$$= \int \frac{2dt}{8t+8+2t^2} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \frac{-1}{t+2} + C.$$

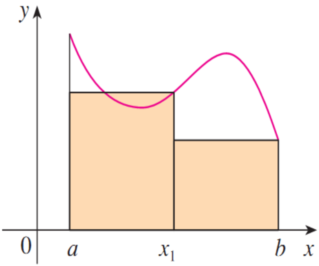
Vậy ta được

$$K = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+2} + C$$

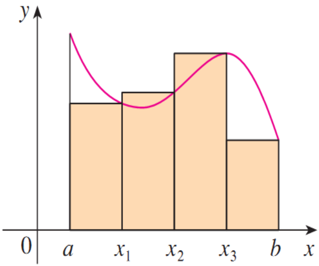
Bài toán tính diện tích

Tìm diện tích S của miền bị chặn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, các đường thẳng $x = a$, $x = b$, và trục Ox.

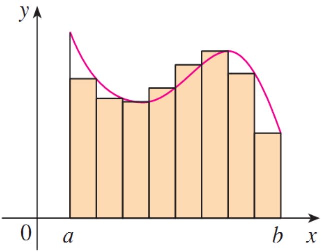




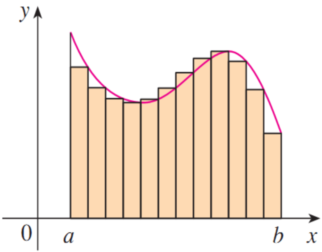
(a) $n = 2$



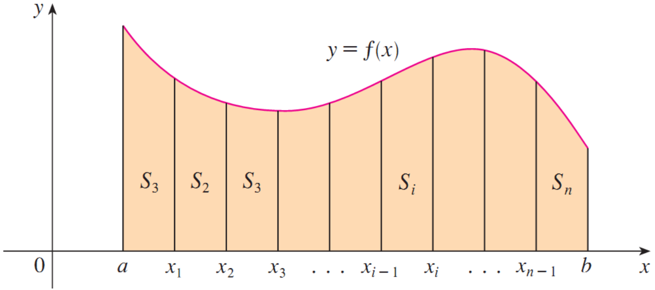
(b) $n = 4$

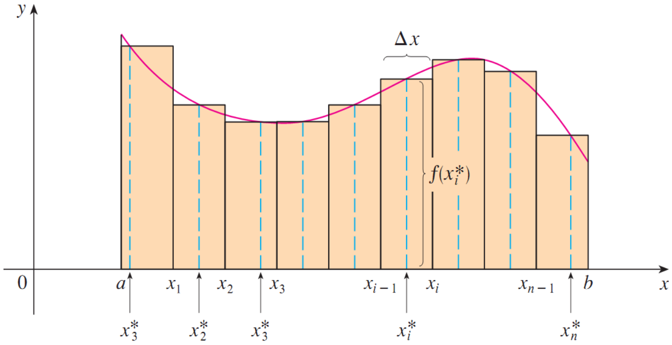


(c) $n = 8$



(d) $n = 12$


y
y = f(x)
S3
S2
S3
Si
Sn
0
a
x1
x2
x3
. . .
xi − 1
xi
. . .
xn − 1
b
x


y
Δx
f(xi*)
0
a
x1
x2
x3
xi − 1
xi
xn − 1
b
x
x3*
x2*
x3*
xi*
xn*

- Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn với độ dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

trong đó $x_0 = a$ và $x_n = b$.

- Xấp xỉ phần S_i bởi hình chữ nhật với chiều rộng Δx và chiều dài $f(x_i^*)$. Diện tích của hình chữ nhật thứ i là $f(x_i^*)\Delta x$.
- Diện tích S được xấp xỉ bởi

$$I_n = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

- Xấp xỉ trên càng tốt nếu ta cho n càng lớn, và ta có

$$S = \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tích phân xác định

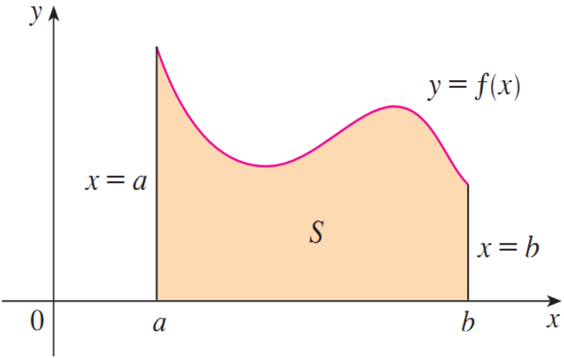
Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $[a, b]$.

1. Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn với độ dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ và các đầu mút là $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.
2. Lấy $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ là một điểm bất kỳ
3. Khi đó tích phân của hàm f trên $[a, b]$ được ký hiệu và định nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

nếu giới hạn tồn tại. Trong trường hợp giới hạn tồn tại thì ta nói f khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Bài toán diện tích



Như vậy ta có công thức

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Tính chất của tích phân xác định

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
5. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$, α là hằng số
6. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
7. Nếu $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Công thức Newton-Leibnitz

Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó trong đoạn đó thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ví dụ. Ta có

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

và

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|_3^4 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{2}{6} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

Phương pháp đổi biến

Xét tích phân

$$\int_a^b f(x)dx$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$. Giả sử phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện

- $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$;
- Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong $[a, b]$;
- $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b.$

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$K = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx.$$

Giải. Đặt $x = 2\sin t$ ta có $dx = (2\sin t)'dt = 2\cos t dt$,

x	0	2
t	0	$\pi/2$

và

$$K = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\cos^2 t} \cdot 2\cos t dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} 4 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (2 + 2\cos 2t) dt = \Big[2t + \sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \pi.$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Giải. Đặt $x = \tan t$, ta có

$$dx = (\tan t)' dt = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1+\tan^2 t)dt,$$

x	0	1
t	0	$\pi/4$

Khi đó tích phân trở thành

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I_2 = \int_0^1 x\sqrt[3]{1-x}dx.$$

Giải. Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ ta có $t^3 = 1 - x$ hay $x = 1 - t^3$. Từ đó suy ra

$$dx = (1-t^3)'dt = -3t^2dt$$

x	0	1
t	1	0

Tích phân trở thành

$$I_2 = \int_1^0 (1-t^3)\cdot t\cdot(-3t^2dt) = 3\int_0^1 (t^3 - t^6)dt$$
$$= 3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) = \frac{9}{28}.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Ta có
$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Ví dụ. Tính tích phân sau
$$I = \int_0^\pi x\cos x\, dx.$$

Giải. Vì $\cos x dx = d(\sin x)$, bằng phương pháp tích phân từng phần ta có
$$I = \int_0^\pi x\, d(\sin x) = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I_1 = \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

Giải. Vì $d(e^x) = e^x dx$, dùng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x^2 d(e^x) = x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x d(x^2) \\
&= e - \int_0^1 2xe^x dx = e - \int_0^1 2x d(e^x) \\
&= e - \left[2xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right] \\
&= e - \left[2e - 2e^x \Big|_0^1 \right] \\
&= e - \left[2e - 2e + 2 \right] = e - 2.
\end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau

$$I_2 = \int_0^1 x \arctan x dx.$$

Giải. Vì $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = xdx$, bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \arctan x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} d(\arctan x) \\
&= \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

HẾT