CHƯƠNG 1 GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

1. VCB - VCL

a) VCB TƯƠNG ĐƯƠNG

- ĐN: HS $y = f(x)$ gọi là VCB khi $x \to a$ nếu $lim_{x\to a} f(x) = 0$. Hai VCB $f(x)$ gọi là tương đương với $g(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$, nếu

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- Các VCB tương đương khi $x \to 0$: Khi $x \to 0$, có

* $\sin x \sim x; \tan x \sim x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
$\to \sin ax \sim ax \sim \tan ax \sim \arcsin ax \sim \arctan ax.$
* $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \to 1 - \cos ax \sim \frac{1}{2}(ax)^2 = \frac{a^2x^2}{2}.$
* $e^x - 1 \sim x \to e^{ax} - 1 \sim ax; a^x - 1 \sim x \ln a; \ln(1+x) \sim x \to \ln(1+ax) \sim ax.$
*
$(1+x)^a - 1 \sim ax \to$
$$\begin{cases} \sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x \to \sqrt{1+ax} - 1 \sim \frac{1}{2}ax. \\ \sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x \to \sqrt[3]{1+ax} - 1 \sim \frac{1}{3}ax. \end{cases}$$

- QUY TẮC THAY THẾ VCB TƯƠNG ĐƯƠNG TRONG TÍCH THƯƠNG: Nếu 2 VCB $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$ thì

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)} = lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}.$$

b) SO SÁNH 2 VCB

- ĐN: Cho 2 VCB $f(x)$ và $g(x)$ khi $x \to a$. Tính $L = lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

*** Nếu $L = 0 \to$ ta nói $f(x)$ là VCB có bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to a$.**

*** Nếu $L = \infty \to$ ta nói $f(x)$ là VCB có bậc thấp hơn $g(x)$, hoặc $g(x)$ là VCB có bậc cao hơn $f(x)$ khi $x \to a$.**

*** Nếu $L = 1 \to$ ta có $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$.**

*** Nếu $L < \infty; \neq 0; 1 \to$ ta nói $f(x)$ là VCB có cùng bậc với $g(x)$ khi $x \to a$.**

c) VCL

- ĐN: HS $f(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ nếu $lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

- ĐN: Cho 2 VCL $f(x)$ và $g(x)$ khi $x \to a$. Tính $L = lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

*** Nếu $L = \infty \to$ ta nói $f(x)$ là VCL có bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to a$.**

*** Nếu $L = 0 \to$ ta nói $f(x)$ là VCL có bậc thấp hơn $g(x)$, hoặc $g(x)$ là VCL có bậc cao hơn $f(x)$ khi $x \to a$.**

*** Nếu $L = 1 \to$ ta có $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$.**

*** Nếu $L < \infty; \neq 0; 1 \to$ ta nói $f(x)$ là VCL có cùng bậc với $g(x)$ khi $x \to a$.**

- QUY TẮC NGẮT BỎ VCL BẬC THẤP HƠN TRONG TỔNG HIỆU: Nếu $g(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$ khi $x \to a$ thì

$$lim_{x\to a}(f \pm g) = lim_{x\to a} f.$$

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC

a) ĐN

- ĐN: HS $f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_o nếu

$$lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o).$$

- HS $f(x)$ gọi là gián đoạn tại x_o nếu nó ko liên tục tại x_o. HS $f(x)$ gọi là liên tục trên khoảng K nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_o \in K$.

- Hàm cơ bản: Các hàm lượng giác, lượng giác ngược, hàm lũy thừa, hàm mũ và hàm loga gọi là các hàm cơ bản.

- Hàm sơ cấp: Các hàm cơ bản kết hợp với các phép toán cộng trừ nhân chia tạo thành hàm sơ cấp.

b) TC

- Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên TXĐ D của nó.

- NX: Nếu $lim_{x\to x_o^+} f(x) = lim_{x\to x_o^-} f(x) = f(x_o) = A \to f(x)$ liên tục tại x_o.

- Nếu ngược lại thì $f(x)$ gián đoạn tại x_o.

3. QUY TẮC LOPITAL

- ĐL: Nếu

$$\begin{cases} lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty} \\ lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{cases} \to lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

- GIỚI HẠN DẠNG TÍCH: Ta có

$$lim_{x\to a} f.g = lim_{x\to a}\frac{g}{\frac{1}{f}}.$$

CHƯƠNG 2 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. ĐẠO HÀM

a) ĐN

$$f'(x_o) = lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

- Bảng đạo hàm:

* $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$; $(u+C)' = u'$; $(u.C)' = u'.C$;
* $(x^a)' = ax^{a-1}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{1}{x^a} = x^{-a} \to \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$;
* $(sin\ x)' = cos\ x$; $(cos\ x)' = -sin\ x$; $(tan\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$; $(cot\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;
* $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x\ ln\ a$; $(ln\ x)' = \frac{1}{x}$; $(log_a\ x)' = \frac{1}{x\ ln\ a}$;
* $(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(arctan\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
*** Đạo hàm của hàm hợp:**
$(u^a)' = au^{a-1}.u'$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$; ...; $(sin\ u)' = cos\ u.u'$; ...; $(arctan\ u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

b) ĐẠO HÀM MỘT PHÍA

- ĐN:

$$f'_+(x_o) = lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Và

$$f'_-(x_o) = lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

- TC: Nếu $f'_+(x_o) = f'_-(x_o) = A \to \exists f'(x_o) = A$.

Nếu $f'_+(x_o) = A \neq f'_-(x_o) = B \to$ **ko tồn tại** $f'(x_o)$.

c) ĐẠO HÀM THEO PT THAM SỐ

- ĐL: Nếu đường cong (C): $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \to$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)};\ \ y''(x) = \frac{[y'(x)]'(t)}{x'(t)}.$$

2. VI PHÂN

- ĐN: Nếu HS $f(x)$ **có đạo hàm tại** $x_o \to$ **vi phân**

$$df(x_o) = f'(x_o)dx$$

và ta nói hàm f **là khả vi tại** x_o.

- Nếu HS $f(x)$ **ko có đạo hàm tại** $x_o \to$ **ta nói hàm** f **ko khả vi tại** x_o.

3. ĐẠO HÀM CẤP CAO

- ĐN:

$$f'' := (f')'; f^{(3)} = f''' := (f'')'; \dots; f^{(n)} := \left[f^{(n-1)}\right]'.$$

CHƯƠNG 3 TÍCH PHÂN

1. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

a) ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CONG

- Nếu đường cong (C): $y = y(x)$; $x \in [a, b] \to$ **độ dài**

$$l = l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

- Nếu đường cong (C): $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in [a, b] \to$ **độ dài** $l = l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

- Bảng nguyên hàm:

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$; $\int \frac{dx}{x} = ln\,\lvert x\rvert + C \to \int \frac{dx}{x^a} = \int x^{-a} dx = \cdots$; $\int sin\ xdx = -cos\ x + C$; $\int cos\ xdx = sin\ x + C$; $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tan\ x + C$; $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -cot\ x + C$; $\int e^x dx = e^x + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\ a} + C$. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ ln\ \left\lvert\frac{x-a}{x-b}\right\rvert + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = ln\ \left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$; $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\ arctan\frac{x}{a} + C$; $arctan\ (+\infty) = \frac{\pi}{2}$; $arctan\ (-\infty) = -\frac{\pi}{2}$; $\int \frac{dx}{cos\ x} = ln\ \left\lvert tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$.
$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$; $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{ln\,\lvert ax+b\rvert}{a} + C$; $\int sin\ (ax+b)dx = -\frac{cos\ (ax+b)}{a} + C$; ...; $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$; $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{ln\ a.\ m} + C$.

*** Tọa độ cực: Cho điểm $M(x,y)$. Đặt** $\begin{cases} r = OM = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = (\widehat{Ox,OM}) \to \cos\varphi = \frac{x}{r};\ \sin\varphi = \frac{y}{r}. \end{cases}$ **Thì $M(r,\varphi)$ gọi là tọa độ cực của điểm M.**

- Công thức: Nếu đường cong $(C): r = r(\varphi);\ \varphi \in [a,b] \to$ độ dài

$$l = l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

b) DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

- Cho $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ (Chú ý: Được suy ra từ hình vẽ) thì diện tích hình phẳng

$$S\{y = f(x); y = g(x); a \leq x \leq b\} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

- Nếu $f(y) \geq g(y)\ \forall\ y \in [a,b]$ (Chú ý: Được suy ra từ hình vẽ, bên trái < bên phải) thì diện tích

$$S\{x = f(y);\ x = g(y);\ a \leq y \leq b\} = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy.$$

- Nếu đường cong $(C): r = r(\varphi);\ \varphi \in [a,b] \to$ diện tích

$$S\{(C); Ox; a \leq \varphi \leq b\} = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

c) THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

- Cho $f(x) \geq g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ (Chú ý: Được suy ra từ hình vẽ). Đặt $H = \{y = f(x); y = g(x); a \leq x \leq b\}$ thì thể tích khối tròn xoay quanh Ox là

$$V_{Ox}\{H\} = \pi.\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx.$$

- Nếu $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a,b] \to$ thể tích khối tròn xoay quanh Oy là

$$V_{Oy}\{H\} = 2\pi.\int_a^b x f(x)dx.$$

2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

a) ĐN

- TPSR loại 1 là có dạng $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

- TPSR loại 2 là có dạng $I = \int_a^b f(x)dx$

trong đó hàm lấy tích phân $f(x)$ ko xác định tại cận $x = a$ hoặc $x = b$.

- CÁCH TÍNH: CÔNG THỨC NEWTON - LEIBNITZ:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

b) XÉT SỰ HỘI TỤ - PHÂN KỲ CỦA TPSR

- ĐN: Xét $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Nếu $I < \infty \to$ ta nói I là hội tụ.

Nếu $I = \infty \to$ ta nói I là phân kỳ.

- Tích phân cơ bản: Xét $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$.

Nếu mũ $a > 1 \to I_1$ h tụ.

Nếu mũ $0 < a \leq 1 \to I_1$ ph kỳ.

- Tiêu chuẩn tương đương: Cho $f(x); g(x) \geq 0\ \forall x \geq a$ và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$, tức là $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Khi đó,

- nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\to \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

- nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ph kỳ $\to \int_a^{+\infty} f(x)dx$ ph kỳ.

- QUY TẮC THAY THẾ VCB TƯƠNG ĐƯƠNG TRONG TÍCH THƯƠNG:

- QUY TẮC NGẮT BỎ VCL BẬC THẤP HƠN TRONG TỔNG HIỆU:

- Tiêu chuẩn so sánh: Nếu $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \geq a$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \geq a$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

- CHÚ Ý: Với $x > 9$, ta có $\begin{cases} \ln x < \sqrt{x} \\ \ln x > 1. \end{cases}$

c) TPSR LOẠI 2

- Tích phân cơ bản: Xét $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^a}$.

- Nếu mũ $0 < a < 1 \to I_2$ là h tụ.

- Nếu mũ $a \geq 1 \to I_2$ là ph kỳ.

- TIÊU CHUẨN TƯƠNG ĐƯƠNG: Giả sử $f(x); g(x) \geq 0$ là các hàm ko xác định tại $x = 0$. Nếu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to 0$ thì

* Nếu $\int_0^1 g(x)dx$ h tụ → $\int_0^1 f(x)dx$ h tụ.
* Nếu $\int_0^1 g(x)dx$ ph kỳ → $\int_0^1 f(x)dx$ ph kỳ.

CHƯƠNG 4 CHUỖI

1. CHUỖI SỐ

a) CHUỖI DƯƠNG

- Chuỗi cơ bản 1. Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1} q^n$.
- Nếu $|q| < 1$ → chuỗi h tụ.
- Nếu $|q| \geq 1$ → chuỗi ph kỳ.
- Chuỗi cơ bản 2. Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$.
- Nếu mũ $a > 1$ → chuỗi h tụ.
- Nếu mũ $0 < a \leq 1$ → chuỗi ph kỳ.

- Tiêu chuẩn tương đương: Cho $u_n, v_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ và $u_n \sim v_n$ khi $n \to \infty$, (tức là $lim \frac{u_n}{v_n} = 1$). Khi đó:
- Nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} v_n$ h tụ → $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng h tụ.
- Nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} v_n$ ph kỳ → $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng ph kỳ.
- QUY TẮC THAY THẾ VCB TƯƠNG ĐƯƠNG TRONG TÍCH THƯƠNG:
- QUY TẮC NGẮT BỎ VCL BẬC THẤP HƠN:

- Tiêu chuẩn so sánh: Nếu $0 \leq u_n \leq v_n$ $\forall n \geq 1$ và chuỗi $\sum_{n\geq 1} v_n$ h tụ → $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng h tụ.
- Nếu $u_n \geq v_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ và chuỗi $\sum_{n\geq 1} v_n$ ph kỳ → $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng ph kỳ.

CHÚ Ý: Với $n > 9$, thì $\begin{cases} ln\, n < \sqrt{n} \\ ln\, n > 1. \end{cases}$

b) CHUỖI BẤT KỲ

- Tiêu chuẩn Cosi: Cho chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$. Tính $q = lim \sqrt[n]{|u_n|}$.
- Nếu $q < 1$ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ h tụ.
- Nếu $q > 1$ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ ph kỳ.

Chú ý 1: Tiêu chuẩn Cosi sử dụng khi mọi số hạng trong u_n đều có mũ là n.

Chú ý 2: Giới hạn

$$lim\, u_n^{v_n} = 1^\infty = e^{lim\, v(u-1)}.$$

- Tiêu chuẩn Dalembert: Cho chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$. Tính $q = lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.
- Nếu $q < 1$ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ h tụ.
- Nếu $q > 1$ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ ph kỳ.
- Chú ý:Tiêu chuẩn Dalembert sử dụng khi u_n có chứa $n!$, vì

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1).n!}{n!} = n+1.$$

- Tiêu chuẩn tích phân: Cho $u_n = f(n) \geq 0$ $\forall n \geq 2$. Thay $n = x$ và lập hàm $f(x)$. Xét TPSR $I = \int_2^{+\infty} f(x)dx$.
- Khi đó, nếu I h tụ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ h tụ.
- Nếu I ph kỳ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ ph kỳ.

c) CHUỖI ĐAN DẤU

- ĐN: là chuỗi có dạng

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n.a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

- Tiêu chuẩn Leibnitz đối với chuỗi đan dấu: Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1} (-1)^n.a_n$. Nếu dãy a_n giảm khi n tăng và $lim\, a_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n\geq 1} (-1)^n.a_n$ là hội tụ.

2. HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI - BÁN HỘI TỤ

- ĐN: Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$.
- Nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ hội tụ, vì $u_n \leq |u_n|$ $\forall n \geq 1$ → $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng hội tụ thì ta nói chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là hội tụ tuyệt đối.
- Nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ phân kỳ và $\sum_{n\geq 1} u_n$ hội tụ thì ta nói chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là bán hội tụ.

VD. Chứng minh các chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + ln\, n}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\, ln^2 n}$ h tụ tuyệt đối và các chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\, ln\, n}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$ bán h tụ.

3. CHUỖI HÀM

- Tiêu chuẩn Dalembert: Xét chuỗi hàm $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

Bước 1. Tính $q = lim \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Chuỗi hàm là hội tụ nếu $|q| < 1$.

Bước 2. Xét tại biên $|q| = 1 \to \cdots$ Miền hội tụ của chuỗi hàm là ...

VD. Tìm miền h tụ của các chuỗi hàm $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^n}{n^2.3^n}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+2)^n}{(n+1).4^n}$.

- Tiêu chuẩn Cosi:

Bước 1. Tính $q = lim \sqrt[n]{|u_n|}$. Chuỗi hàm là hội tụ nếu $|q| < 1$.

Bước 2. Xét tại biên $|q| = 1 \to \cdots$ Miền hội tụ của chuỗi hàm là ...

CHÚ Ý: Nếu $lim\, u_n \neq 0$ → chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là phân kỳ.

VD. Tìm miền h tụ của chuỗi hàm $\sum_{n\geq 1} \frac{(3n+1)^n.x^n}{(n+2)^n}$.