Chương: Tích phân bội

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 16 tháng 4 năm 2024

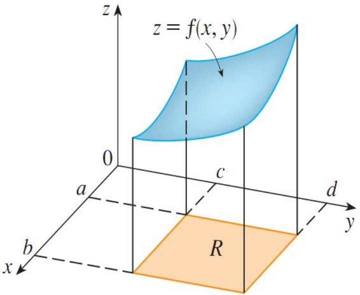
Thể tích của khối vật thể

Cho $z = f(x, y)$ là hàm xác định trên

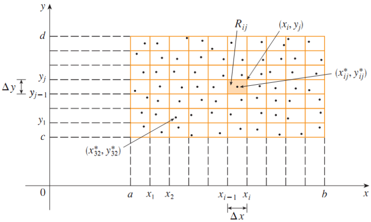
$$R = [a, b] \times [c, d] = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

với $f(x, y) > 0$ trên R. Giả sử ta muốn tính thể tích của khối vật thể sau:

$$E = \{(x, y, z) :\ (x, y) \in R,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

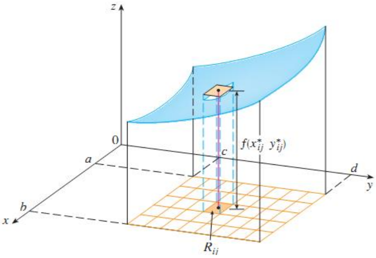


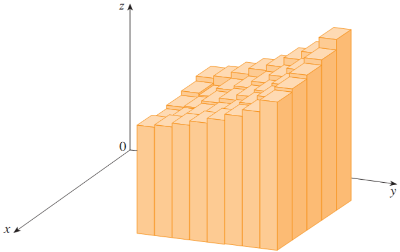
- Ta chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn bằng nhau với độ dài $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ và $[c, d]$ thành n đoạn bằng nhau với độ dài $\Delta y = \frac{d-c}{n}$.



- Ta chọn điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*) bất kỳ trên mỗi hình chữ nhật R_{ij} và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y$$





Như vậy, nếu m và n rất lớn, ta có thể xấp xỉ

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Khi đó

$$V = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Bài toán trên dẫn đến ta cần tính giới hạn

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Từ đó ta có định nghĩa tích phân hai lớp.

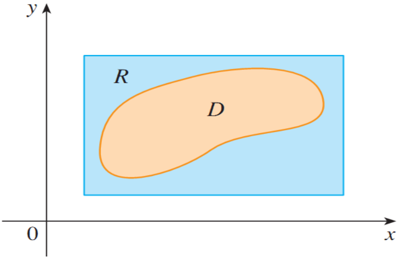
Định nghĩa. Tích phân của hàm $f(x,y)$ trong hình chữ nhật R được định nghĩa là

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Tích phân của hàm $f(x,y)$ trong miền bị chặn D bất kỳ được định nghĩa như sau: ta ký hiệu R là hình chữ nhật chứa D và đặt hàm

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{nếu } (x,y)\in D \\ 0 & \text{nếu } (x,y)\notin D. \end{cases}$$



Khi đó

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f^*(x,y)dxdy.$$

Các tính chất của tích phân hai lớp

- Tính tuyến tính

$$\iint_D [Af(x,y)+Bg(x,y)]dxdy = A\iint_D f(x,y)dxdy + B\iint_D g(x,y)dxdy$$

- Nếu giao của D_1 và D_2 có diện tích bằng 0 thì

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

- Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ trên D thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Cách tính: Trường hợp 1

Nếu D là hình chữ nhật

$$D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Trong trường hợp $f(x,y) = g(x)h(y)$ và D là hình chữ nhật cho ở trên thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint_D x^2 y dxdy, \ \ D = \{0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 3\}.$$

Giải. Ta có

$$I = \left(\int_0^2 x^2 dx\right)\left(\int_0^3 y dy\right) = \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^3\right) = \frac{8}{3}\frac{9}{2} = 12.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint_D x\cos(xy) dxdy, \quad D = \{0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2\}.$$

Giải. Ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 x\cos(xy)dy = \int_0^1 dx \int_0^2 \cos(xy)d(xy)$$
$$= \int_0^1 \sin(xy)\big|_0^2 dx = \int_0^1 \sin(2x)dx = -\frac{\cos(2x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{1-\cos 2}{2}.$$

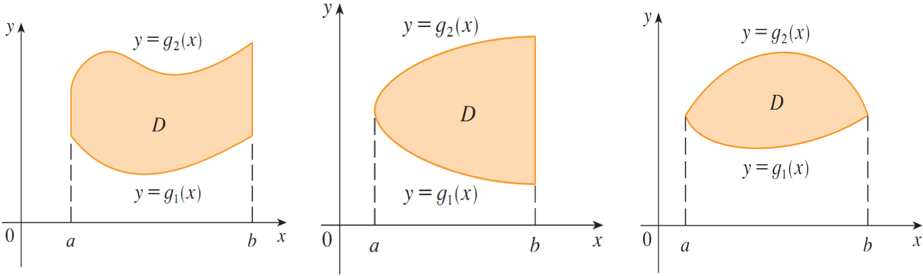
Cách tính: Trường hợp 2

Nếu miền D có biểu diễn

$$D = \{a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

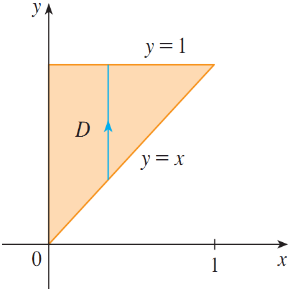


Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint_D (x+2y)dxdy$$

với D là miền bị chặn giới hạn bởi các đường $x=0$, $y=1$ và $y=x$.
Giải. Ta có

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases}$$



Khi đó

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x+2y)dy = \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_x^1 dx$$
$$= \int_0^1 (x+1-2x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{5}{6}.$$

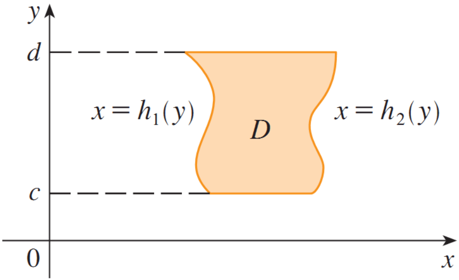
Cách tính: Trường hợp 3

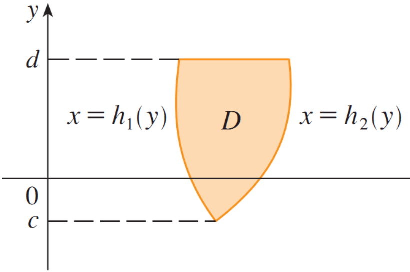
Nếu D có biểu diễn

$$D = \{c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx.$$

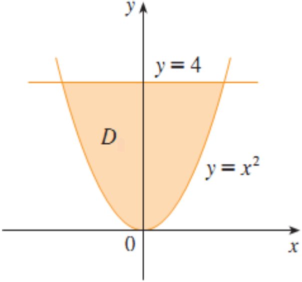




Ví dụ. Tính tích phân sau:

$$I = \iint_D y dx dy,$$

trong đó D là miền bị chặn giới hạn bởi đường $y = x^2$ và $y = 4$.



Giải. Ta có miền D có biểu diễn là

$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y dx = 2\int_0^4 y^{3/2} dy = \frac{2}{5/2} y^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{2^7}{5}.$$

Ví dụ. Đổi thứ tự lấy tích phân

$$I = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy.$$

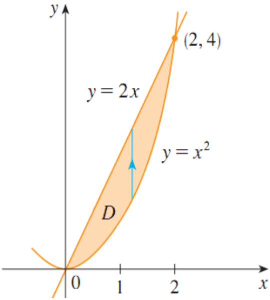
Giải. Miền lấy tích phân

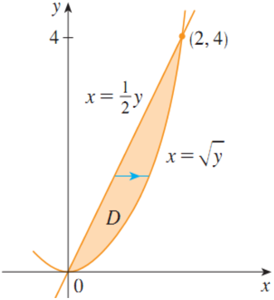
$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2 \le y \le 2x. \end{cases}$$

Miền D được viết lại

$$D = \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ y/2 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

Vậy $I = \int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$



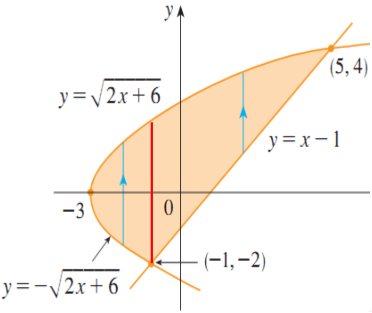


Ví dụ. Đổi thứ tự lấy tích phân

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} f(x,y)dx.$$

Giải. Miền lấy tích phân là

$$D = \begin{cases} -2 \le y \le 4 \\ \frac{y^2}{2} - 3 \le x \le y+1 \end{cases}$$



Ta có $D = D_1 \cup D_2$ trong đó

$$D_1 = \begin{cases} -3 \le x \le -1 \\ -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6} \end{cases}$$

và

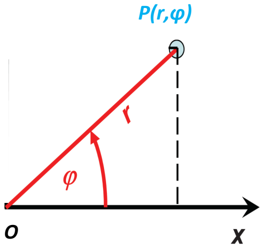
$$D_2 = \begin{cases} -1 \le x \le 5 \\ x - 1 \le y \le \sqrt{2x+6} \end{cases}$$

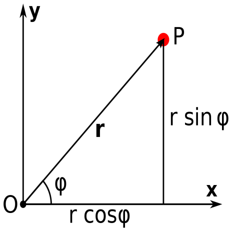
Vậy tích phân được đổi lại

$$I = \int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{5} dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)dy.$$

Tọa độ cực

Lấy điểm O cố định trong mặt phẳng, gọi là gốc cực, tia nằm ngang Ox, gọi là trục cực. Nếu P là một điểm trong mặt phẳng, ta đặt $r = PO$ và $\varphi = \widehat{xOP}$. Khi đó cặp số (r, φ) gọi là tọa độ cực của P.





Nếu trục cực là tia Ox trong hệ trục vuông góc thì

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Tích phân hai lớp trong tọa độ cực

Để đưa tích phân

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

về tích phân theo biến φ và r ta thực hiện phép đổi biến như sau

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó

$$dxdy = r\,drd\varphi.$$

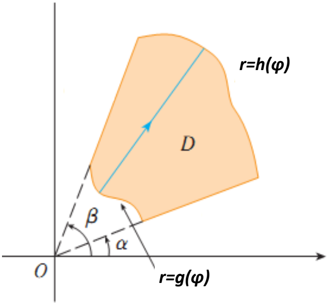
Chú ý với phép đổi biến này ta luôn có $x^2 + y^2 = r^2$.

Nếu f là hàm liên tục trên D và D có biểu diễn

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ g(\varphi) \leq r \leq h(\varphi)\}$$

thì

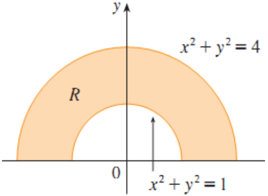
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\, dr.$$



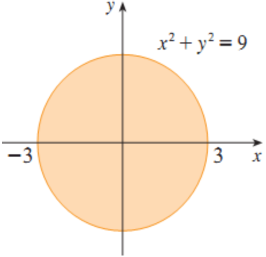
Ví dụ. Biểu diễn các miền dưới đây dưới dạng

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ g(\varphi) \leq r \leq h(\varphi)\}$$

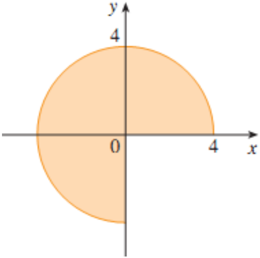
(a)



(b)



(c)



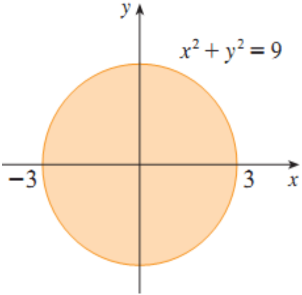
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \\ 0 \leq r \leq 4. \end{cases}$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$K = \iint_D (9 - x^2 - y^2)dxdy$$

trong đó $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Giải. Miền lấy tích phân



Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \end{cases}, \quad dxdy = r\,drd\varphi.$$

Vậy

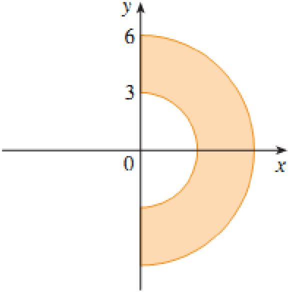
$$\begin{aligned} K &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9 - r^2) r\,dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9r - r^3)dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi \\ &= \frac{81}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{81\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint_D (2x + y)dxdy; \quad D = \{9 \le x^2 + y^2 \le 36, x \ge 0\}.$$

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



Khi đó $dxdy = rdrd\varphi$ và

$$D = \begin{cases} -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \\ 3 \le r \le 6. \end{cases}$$

Khi đó ta có

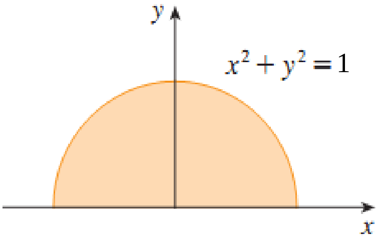
$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_3^6 \left(2r\cos\varphi + r\sin\varphi\right) r\,dr \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_3^6 \left[2\cos\varphi + \sin\varphi\right] r^2 dr \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\cos\varphi + \sin\varphi\right) \frac{r^3}{3}\Big|_3^6 \, d\varphi \\
&= 63(2\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 252.
\end{aligned}
$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

trong đó $D = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

Giải. Miền lấy tích phân là



Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

và $dxdy = r drd\varphi$. Vậy

$$I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr$$

Đặt $\sqrt{1-r^2} = t$ ta có $1 - r^2 = t^2$. Từ đó $-2rdr = 2tdt$ hay $rdr = -tdt$ và

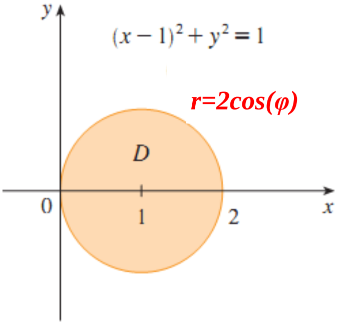
$$I = \int_0^\pi d\varphi \int_1^0 t(-t)dt = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 t^2 dt$$
$$= \int_0^\pi \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau:

$$I = \iint_D y dxdy; \quad D = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \le 1\}.$$

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



Khi đó $dxdy = r drd\varphi$ và

$$D = \begin{cases} -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r \sin\varphi \, r \, dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8(\cos\varphi)^3}{3} \sin\varphi \; d\varphi \\ &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8(\cos\varphi)^3}{3} d\cos\varphi \\ &= -\frac{2(\cos\varphi)^4}{3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

Tọa độ cực suy rộng

- Nếu miền lấy tích phân là $D = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$, khi đó ta có thể đặt

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \\ dxdy = r\,drd\varphi \end{cases}$$

- Nếu miền lấy tích phân là $D = \left\{(x, y) : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1\right\}$ ta có thể đặt

$$\begin{cases} x = x_0 + ar\cos\varphi \\ y = y_0 + br\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ dxdy = abr\,drd\varphi \end{cases}$$

Ví dụ. Tính tích phân

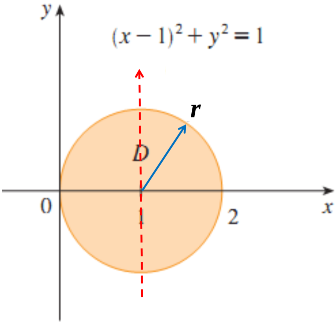
$$I = \iint_D x dx dy; \quad D = \{(x-1)^2 + y^2 \le 1\}.$$

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

khi đó $dxdy = r drd\varphi$ và

$$D = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$$



Từ đó ta có

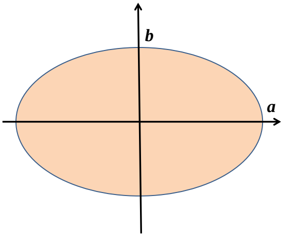
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + r\cos\varphi) r dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r + r^2\cos\varphi) dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}\cos\varphi\right)\Big|_0^1 d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\varphi}{3}\right) d\varphi \\
&= \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân sau:

$$I = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy; \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Giải. Đặt $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. Khi đó $dxdy = abrdrd\varphi$ và

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$



Từ đó ta nhận được được

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) abr\, dr \\
&= ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr \\
&= ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\varphi \\
&= \frac{ab}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{ab\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Đổi biến tổng quát

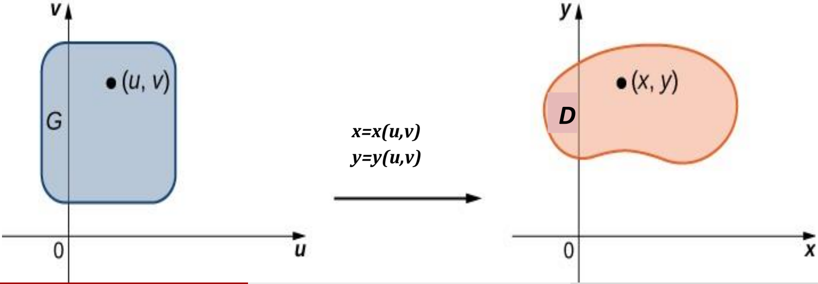
Xét tích phân trên miền D

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Giải sử ta có phép đổi biến tương ứng 1-1

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

biến miền G thành D.



Khi đó $dxdy = |J|dudv$ với

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u.$$

J được gọi là định thức Jacobi. Ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint_D (x+y)^2 dxdy,$$

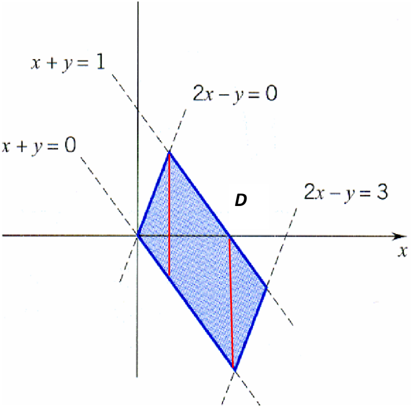
trong đó D được giới hạn bởi các đường $x+y=0$, $x+y=1$, $2x-y=0$, và $2x-y=3$.

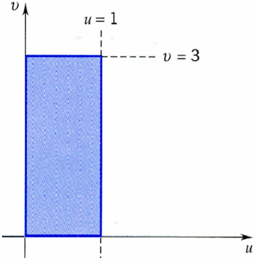
Giải. Đặt

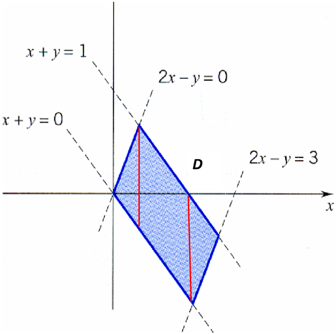
$$\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x-y \end{cases}$$

Giải x, y theo u, v ta được

$$\begin{cases} x = (u+v)/3 \\ y = (2u-v)/3 \end{cases}$$







Khi đó

$$G = \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 3 \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy

$$I = \iint_G u^2 \left| -\frac{1}{3} \right| dudv = \frac{1}{3} \int_0^1 du \int_0^3 u^2 dv = \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{3} \Big|_0^1 \right) \left(v \Big|_0^3 \right) = \frac{1}{3}.$$

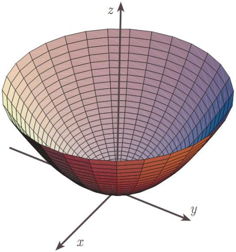
Tích phân của hàm ba biến

Trong phần này chúng ta xét tích phân của hàm ba biến $f(x, y, z)$ trên miền bị chặn $V \subset \mathbb{R}^3$

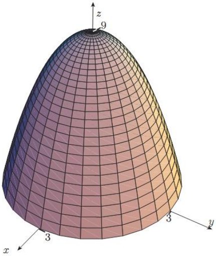
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Trước khi vào định nghĩa tích phân của hàm 3 biến ta nhắc lại đồ thị của một số mặt cong.

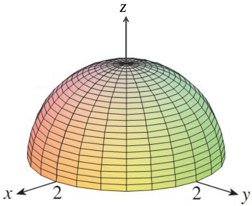
(a) Mặt Paraboloid $z = x^2 + y^2$



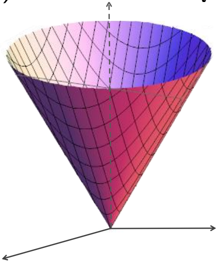
(b) Mặt Paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$



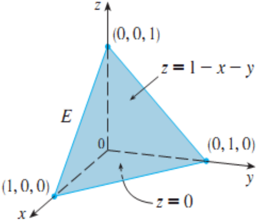
(c) Mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



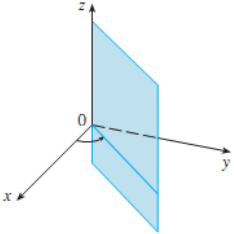
(d) Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



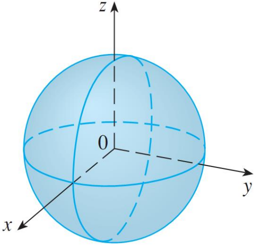
(a) Mặt phẳng $x + y + z = 1$



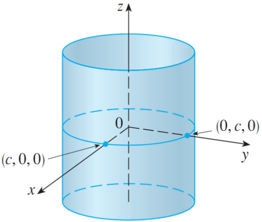
(b) Mặt phẳng $x = y$



(c) Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



(d) Mặt trụ $x^2 + y^2 = c^2$



Định nghĩa

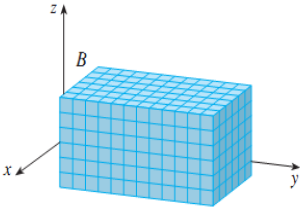
Cho $f(x, y, z)$ xác định trên hình hộp chữ nhật

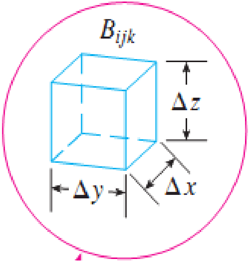
$$B = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

• Ta chia $[a, b]$ thành m phần bằng nhau với độ dài $\Delta x = (b - a)/m$, $[c, d]$ thành n phần với độ dài $\Delta y = (d - c)/n$, và $[r, s]$ thành ℓ với độ dài $\Delta z = (s - r)/\ell$.

• Ta chọn một điểm bất kỳ $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ trong mỗi hình hộp chữ nhật nhỏ

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k].$$





Khi đó tích phân của hàm $f(x, y, z)$ trên B được ký hiệu và định nghĩa là

$$\iiint_B f(x, y, z)dxdydz = \lim_{m,\, n,\, \ell \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta x \Delta y \Delta z$$

nếu giới hạn tồn tại.

Trong trường hợp V không là hình hộp chữ nhật, ta chọn hình hộp chữ nhật B chứa V và định nghĩa hàm số trên B như sau:

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{nếu } (x,y,z) \in V \\ 0 & \text{nếu } (x,y,z) \notin V. \end{cases}$$

Khi đó ta định nghĩa

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz := \iiint_B f^*(x,y,z)dxdydz.$$

Tính chất.

- Tính tuyến tính giống tích phân của hàm 2 biến
- Nếu giao của V và B có thể tích bằng 0 thì

$$\iiint_{V\cup B} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_B f(x,y,z)dxdydz.$$

Cách tính: Trường hợp 1

Nếu V là hình hộp chữ nhật

$$V = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

thì

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_r^s f(x,y,z)dz.$$

Ta cũng có thể đổi thứ tự lấy tích phân theo x hoặc y trước.

- Trong trường hợp $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$ và V là hình hộp chữ nhật ở trên thì

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)\left(\int_r^s k(z)dz\right).$$

Ví dụ. Cho $V = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$. Tính

$$I = \iiint_V (x+y)z\,dxdydz.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x+y)z dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^3 (x+y)\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 dy \\
&= 2\int_0^1 dx \int_0^3 (x+y) dy \\
&= 2\int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3 dx \\
&= \int_0^1 (6x+9)dx = 12
\end{aligned}$$

Ví dụ. Tính

$$J = \iiint_V x^2 yz dx dy dz$$

với $V = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 1\}$.

Giải. Ta có $f(x, y, z) = x^2 yz$ là hàm tách biến do đó:

$$\begin{aligned} J &= \Big(\int_0^2 x^2 dx\Big)\Big(\int_0^3 y dy\Big)\Big(\int_0^1 z dz\Big) \\ &= \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) \cdot \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^3\right) \cdot \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1\right) \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6. \end{aligned}$$

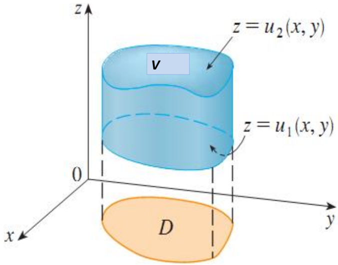
Cách tính: Trường hợp 2

Nếu miền V có biểu diễn

$$V = \left\{(x, y, z) : \ (x, y) \in D, \ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\right\},$$

thì

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right)dydx.$$

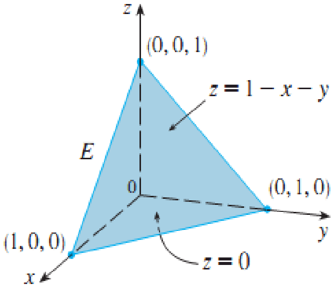


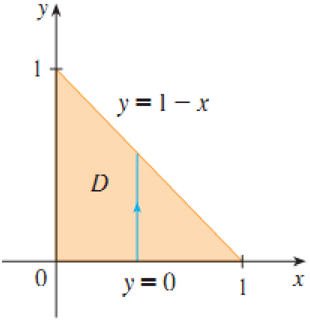
Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iiint_E z dxdydz,$$

trong đó E là miền bị chặn được giới hạn bởi các mặt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, và $x + y + z = 1$.

Giải. Ta có





Ta có

$$E = \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$I = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} z dz \right) dydx = \iint_D \left(\frac{z^2}{2} \bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dydx$$
$$= \frac{1}{2} \iint_D (y + x - 1)^2 dydx$$

Từ biểu diễn miền D ta nhận được

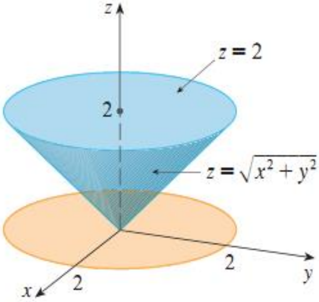
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y + x - 1)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(y + x - 1)^3}{3} \bigg|_0^{1-x} dx$$
$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x - 1)^3 dx = -\frac{1}{6} \frac{(x - 1)^4}{4} \bigg|_0^1 = \frac{1}{24}$$

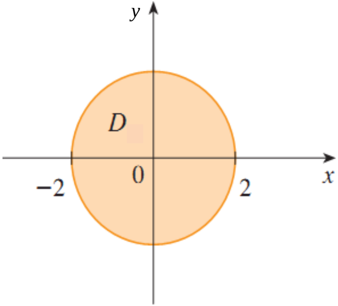
Ví dụ. Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_V z^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

trong đó V là miền bị chặn được giới hạn bởi mặt $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và $z = 2$.

Giải. Miền lấy tích phân:





Ta có

$$V = \begin{cases} (x,y) \in D \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \end{cases}, \quad D = \{x^2+y^2 \leq 2^2\}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} z^2 \sqrt{x^2+y^2}\, dz \right) dydx \\ &= \iint_D \frac{z^3}{3} \sqrt{x^2+y^2} \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dydx \\ &= \frac{1}{3} \iint_D \left[2^3 - (x^2+y^2)^{3/2} \right] \sqrt{x^2+y^2}\, dydx. \end{aligned}$$

Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2. \end{cases}$$

khi đó $dxdy = r drd\varphi$ và

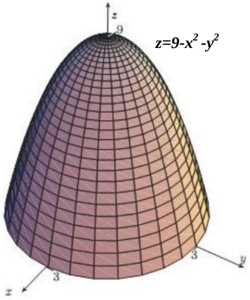
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left[8 - r^3\right] r\, r dr \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (8r^2 - r^5) dr \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{8r^3}{3} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2 d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{6}\right) = \frac{64\pi}{9}. \end{aligned}$$

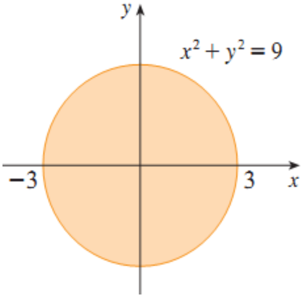
Ví dụ. Tính tích phân

$$K = \iiint_V dxdydz$$

trong đó V là miền được giới hạn bởi $z = 9 - x^2 - y^2$ và $z = 0$.

Giải. Miền lấy tích phân





Ta có

$$V = \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2 \end{cases}, \quad D = \{x^2 + y^2 \le 3^2\}$$

Khi đó

$$K = \iint_D \left(\int_0^{9-x^2-y^2} dz \right) dydx = \iint_D (9 - x^2 - y^2) dydx$$

Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \end{cases}, \quad dxdy = r\,drd\varphi.$$

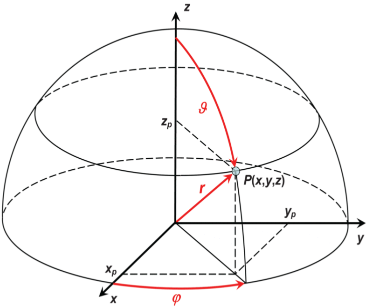
Vậy

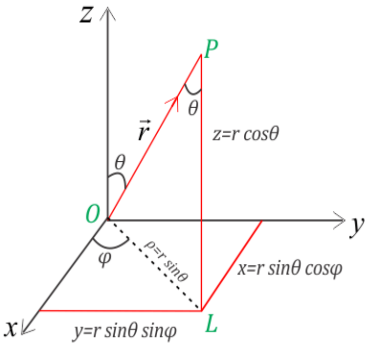
$$K = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9 - r^2) r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9r - r^3) dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^3 d\varphi = \frac{81\pi}{2}.$$

Tọa độ cầu

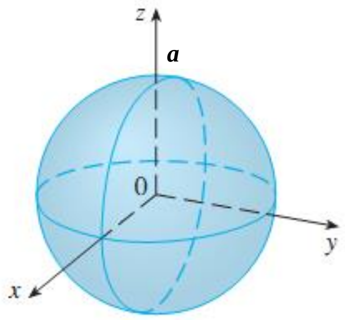
Tọa độ cầu của một điểm P trong không gian là bộ ba số (r, φ, θ), trong đó r là khoảng các từ P tới gốc cầu, φ là góc giữa tia Ox và tia OP', θ là góc giữa tia Oz và tia OP. Miền giới hạn của r, φ, và θ là $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (hoặc $-\pi \leq \varphi < \pi$), and $0 \leq \theta \leq \pi$.

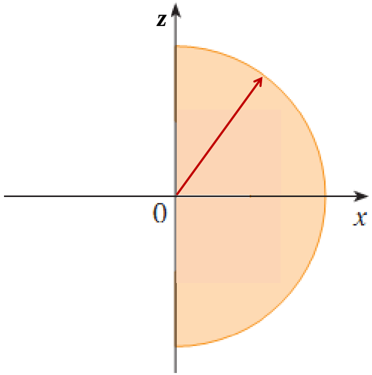




Hình cầu $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$ được biểu diễn trong tọa độ cầu như sau

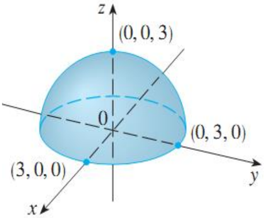
$$V = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le a \end{cases}$$

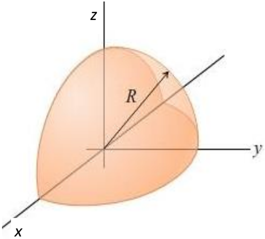


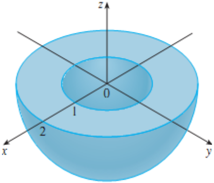


Ví dụ. Biểu diễn các miền sau trong tọa độ cầu:

- $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 3^2,\ z \geq 0\}$
- $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0,\ y \geq 0\}$
- $V = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$







$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq R\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Ta có mối liên hệ giữa tọa độ cầu và tọa độ vuông góc

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Mối liên hệ này có thể coi như một phép đổi biến trong tích phân ba lớp. Khi đó ta luôn có

$$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

và

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Tích phân ba lớp trong tọa độ cầu

Để tính tích phân

$$I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

trong tọa độ cầu ta thực hiện

- Vẽ miền lấy tích phân
- Thực hiện phép đổi biến

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

  khi đó $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$.
- Tìm các cận của φ, θ, r (giả sử trong miền E nào đó)
- Tính tích phân

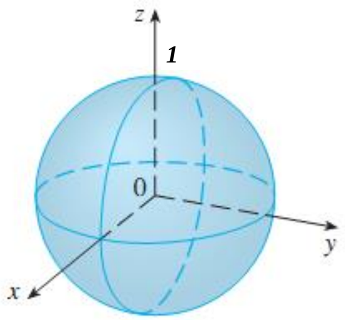
$$I = \iiint_E f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I_1 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$

trong đó $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Giải.



Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

Khi đó ta luôn có $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ và

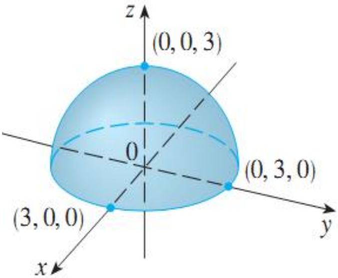
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r^2 \sin\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -\frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \cos\theta\Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I_2 = \iiint_V z dx dy dz,$$

trong đó $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$.

Giải.



Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 3 \end{cases}$$

Ta có $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ và tích phân trở thành

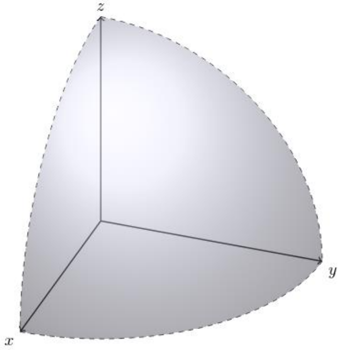
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 r\cos\theta r^2 \sin\theta dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 r^3 \sin(2\theta) dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 \sin(2\theta)d\theta = \frac{81}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)d\theta \\ &= -\frac{81}{16}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{81}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I_3 = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

trong đó $V = \{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x,y,z \ge 0\}$.

Giải.



Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

Ta có $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ và tích phân trở thành

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 r \cdot r^2 \sin\theta dr \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 r^3 \sin\theta dr \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \sin\theta d\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \\ &= -4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\Big|_0^{\pi/2} d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

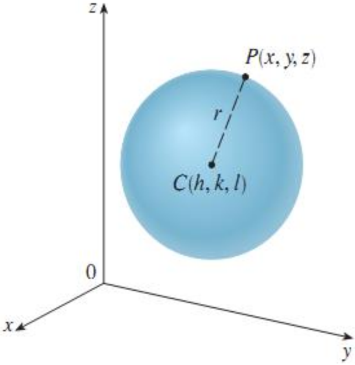
Tọa độ cầu suy rộng

Khi miền lấy tích phân là hình cầu

$$V = \{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 \leq r^2\}.$$

Ta có thể đổi biến

$$\begin{cases} x = h + r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = k + r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = l + r\cos\theta. \end{cases}$$



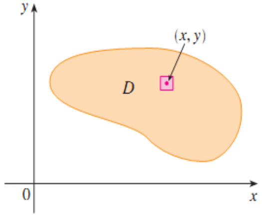
Có nghĩa là ta tịnh tiến gốc cầu về điểm (h, k, l) trong tọa độ vuông góc. Ta có

$$dxdydz = r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Ứng dụng của tích phân hai lớp

- Ứng dụng tìm diện tích của miền D

$$A = \iint_D dxdy.$$

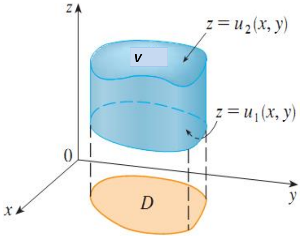


- Ứng dụng tìm thể tích của vật thể

$$V = \{(x, y) \in D,\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

bởi công thức

$$T = \iint_D \left[u_2(x, y) - u_1(x, y)\right] dxdy.$$



Ứng dụng của tích phân ba lớp

- Tìm thể tích T của khối vật thể V

$$T = \iiint_V dxdydz.$$

Chú ý: Nếu ta biểu diễn miền V dưới dạng

$$V = \begin{cases} (x, y) \in D \\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y) \end{cases}$$

ta được công thức tính thể tích như trong phần ứng dụng của tích phân hai lớp.

- Tìm khối lượng M của khối vật thể V với hàm mật độ $f(x, y, z)$:

$$M = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

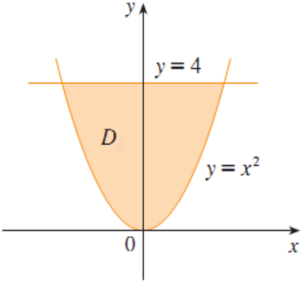
Ví dụ. Tìm diện tích của miền $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 4\}$.

Giải. Ta có diện tích của D là

$$A = \iint_D dxdy.$$

Miền D có biểu diễn là

$$D = \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4 \end{cases}$$



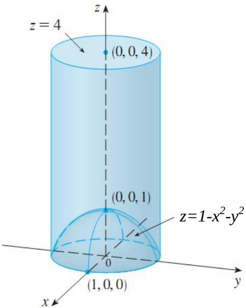
Vậy

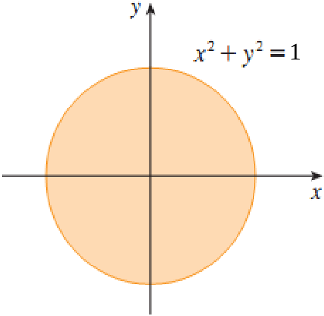
$$A = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy$$
$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Ví dụ. Tính thể tích của khối vật thể

$$V = \{x^2 + y^1 \leq 1,\ 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 4\}.$$

Giải.





Thể tích cần tìm là

$$T = \iint_D (4 - 1 + x^2 + y^2) dxdy$$

Đặt

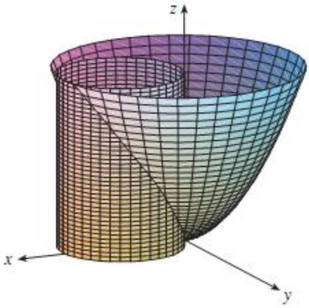
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

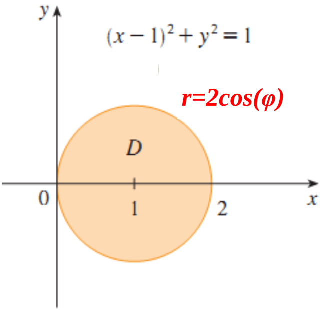
và $dxdy = r drd\varphi$. Vậy

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 + r^2) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3r + r^3) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi \\ &= \frac{7}{4} 2\pi = \frac{7\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm thể tích của khối vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, nằm trên mặt $z = 0$ và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

Giải.





Thể tích cần tính là

$$T = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi. \end{cases}$$

và $dxdy = r\,drd\varphi$. Vậy

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 r\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\ &= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \Big(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\Big)^2 d\varphi \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \Big(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\Big) d\varphi \\ &= 2\Big(\frac{3\varphi}{2} + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

HẾT