Logic

Khoa CNTT

Trường Đại học Phenikaa

Logic

1. Logic mệnh đề
2. Các phép toán trên mệnh đề
3. Biểu thức logic
4. Các luật logic
5. Logic vị từ
6. Ôn tập

1. Logic mệnh đề: Khái niệm về mệnh đề và chân trị

- Mệnh đề là một phát biểu xác định được rõ tính đúng sai.
- Mệnh đề thường được ký hiệu là: X,Y,Z,... (có thể đi kèm với chỉ số).
- Tính đúng sai được gọi là chân trị của mệnh đề:
  - Đúng (True, T, 1)
  - Sai (False, F, 0)

Ví dụ:

- Mệnh đề A = "19 là số nguyên tố" $\rightarrow$ đúng (True, T, 1)
- Mệnh đề B = "8 lớn hơn 10" $\rightarrow$ sai (False, F, 0)

2. Các phép toán trên mệnh đề

1. Phép tuyển
2. Phép hội
3. Phép phủ định
4. Phép kéo theo
5. Phép kéo theo hai chiều

2.1. Phép tuyển

X	Y	X $\vee$ Y
F	F	?
F	T	?
T	F	?
T	T	?

Mệnh đề X tuyển với mệnh đề Y (ký hiệu X $\vee$ Y) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề X, Y nhận giá trị đúng.
- Nhận giá trị sai khi và chỉ khi cả X, Y đều nhận giá trị sai.

2.1. Phép tuyển

X	Y	X $\vee$ Y
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Mệnh đề X tuyển với mệnh đề Y (ký hiệu X $\vee$ Y) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề X, Y nhận giá trị đúng.
- Nhận giá trị sai khi và chỉ khi cả X, Y đều nhận giá trị sai.

2.2. Phép hội

X	Y	X ∧ Y
F	F	?
F	T	?
T	F	?
T	T	?

Mệnh đề X hội với mệnh đề Y (ký hiệu X ∧ Y) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề X, Y nhận giá trị đúng.
- Nhận giá trị sai khi và chỉ khi ít nhất một mệnh đề nhận giá trị sai.

2.2. Phép hội

X	Y	X ∧ Y
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Mệnh đề X hội với mệnh đề Y (ký hiệu X ∧ Y) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề X, Y nhận giá trị đúng.
- Nhận giá trị sai khi và chỉ khi ít nhất một mệnh đề nhận giá trị sai.

2.3. Phép phủ định

X	$\overline{X}$ **(hoặc** $\neg X$**)**
F	T
T	F

Phủ định mệnh đề X (ký hiệu $\overline{X}$ hoặc $\neg X$) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị sai khi X nhận giá trị đúng.
- Nhận giá trị đúng khi X giá trị sai.

2.4. Phép kéo theo

X	Y	$X \to Y$
F	F	?
F	T	?
T	F	?
T	T	?

Mệnh đề X kéo theo (suy ra) mệnh đề Y (ký hiệu $X \to Y$) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị sai khi và chỉ khi mệnh đề X nhận giá trị đúng, Y nhận giá trị sai.
- Nhận giá trị đúng trong các trường hợp còn lại.

2.4. Phép kéo theo

X	Y	X → Y
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Mệnh đề X kéo theo (suy ra) mệnh đề Y (ký hiệu $X \to Y$) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị sai khi và chỉ khi mệnh đề X nhận giá trị đúng, Y nhận giá trị sai.
- Nhận giá trị đúng trong các trường hợp còn lại.

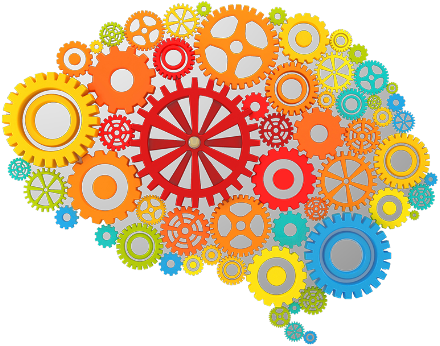
2.5. Phép kéo theo hai chiều

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Mệnh đề X kéo theo hai chiều (tương đương) mệnh đề Y
(ký hiệu $X \leftrightarrow Y$) là mệnh đề được định nghĩa như sau:

- Nhận giá trị đúng khi và chỉ khi mệnh đề X và Y cùng nhận giá trị đúng hoặc cùng nhận giá trị sai.
- Nhận giá trị sai trong các trường hợp còn lại.

3. Biểu thức logic



3.1. Các định nghĩa cơ bản

- Định nghĩa:
  - Mỗi mệnh đề (ký hiệu X, Y, Z,...) là một biểu thức.
  - Nếu A là một biểu thức thì $\overline{A}$ cũng là một biểu thức
  - Nếu A, B là các biểu thức thì $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ cũng là biểu thức.
- Bảng chân trị: là bảng tính toán chân trị của biểu thức logic theo từng bộ giá trị của từng biến tham gia trong biểu thức.

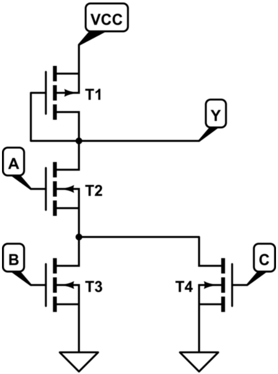
  Bài tập 1.1:

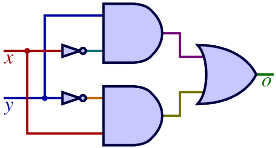
  Lập bảng chân trị của biểu thức: $X \vee (Y \wedge Z)$.

3.2. Chứng minh hai biểu thức tương đương

- Để chứng minh hai biểu thức E và F tương đương:
  - Cách 1: Chứng minh E và F cùng chân trị trong mọi trường hợp.
  - Cách 2: Chứng minh E $\leftrightarrow$ F nhận giá trị đúng với mọi cặp giá trị của E và F.
- Biểu thức **hằng đúng**: Biểu thức E được gọi là hằng đúng nếu E luôn nhận giá trị đúng (E $\leftrightarrow$ 1).
- Biểu thức **hằng sai**: Biểu thức E được gọi là hằng sai nếu E luôn nhận giá trị sai (E $\leftrightarrow$ 0).

4. Các luật logic





4.1. Các luật logic cơ bản

- Các luật về phép phủ định:
  - $\neg\neg P \leftrightarrow P$ (luật phủ định của phủ định)
  - $\neg 1 \leftrightarrow 0$
  - $\neg 0 \leftrightarrow 1$
- Luật giao hoán:
  - $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$
  - $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$
- Luật kết hợp:
  - $P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
  - $P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
- Luật phân bố:
  - $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
  - $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- Luật De Morgan:
  - $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
  - $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

4.1. Các luật logic cơ bản

- Luật về phần tử bù:
  - $P \vee \neg P \leftrightarrow 1$
  - $P \wedge \neg P \leftrightarrow 0$
- Luật kéo theo: $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$
- Luật tương đương: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- Các luật đơn giản của phép tuyển:
  - $P \vee P \leftrightarrow P$ (tính lũy đẳng của phép tuyển)
  - $P \vee 1 \leftrightarrow 1$ (còn được gọi là luật thống trị)
  - $P \vee 0 \leftrightarrow P$ (còn được gọi là luật trung hòa)
  - $P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$ (còn được gọi là luật hấp thụ)
- Các luật đơn giản của phép hội:
  - $P \wedge P \leftrightarrow \ldots$
  - $P \wedge 1 \leftrightarrow \ldots$
  - $P \wedge 0 \leftrightarrow \ldots$
  - $P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow \ldots$

4.1. Các luật logic cơ bản

- Luật đối ngẫu:
  - Giả sử A là một biểu thức chỉ chứa các phép toán $\vee$, $\wedge$, $\neg$, mà không chứa phép toán $\rightarrow$.
  - Tạo biểu thức A* bằng cách thay tất cả các phép toán $\vee$ thành $\wedge$ và thay tất cả các phép toán $\wedge$ thành $\vee$, khi đó A* được gọi là **biểu thức đối ngẫu** của biểu thức A.

    Ví dụ: biểu thức (X $\vee$ Y) $\wedge$ $\neg$ Z và (X $\wedge$ Y) $\vee$ $\neg$ Z đối ngẫu nhau.

Định lý 1.1

$$A^*(X_1, X_2, ..., X_n) \leftrightarrow \neg A(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n)$$

- Nếu A là mệnh đề sơ cấp thì: $\neg A(\neg X) \leftrightarrow \neg(\neg X) \leftrightarrow X$.
- Nếu A, B là các mệnh đề sơ cấp thì:

  $(A \vee B)^* \leftrightarrow (A^* \wedge B^*) \leftrightarrow \neg A(\neg X) \wedge \neg B(\neg X) \leftrightarrow \neg(A \vee B)(\neg X)$.

4.1. Các luật logic cơ bản

- Luật thay thế:
  - Giả sử A là một biểu thức chứa mệnh đề sơ cấp X, tạo biểu thức B bằng cách thay X bởi một biểu thức E nào đó ta có: A $\rightarrow$ B.
    Ví dụ: Biết rằng: $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ là hằng đúng. Lúc đó, thay Q bằng $(X \wedge Y)$ ta được $((P \rightarrow (X \wedge Y)) \wedge P) \rightarrow (X \wedge Y)$ cũng là hằng đúng.

Bài tập 1.2:

a. Chứng minh rằng: $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
bằng 2 cách: lập bảng chân trị và dùng luật logic.
b. Chứng minh rằng biểu thức: $((P \to Q) \land P) \to Q$ là hằng đúng
bằng 2 cách: lập bảng chân trị và dùng luật logic.
(còn gọi là luật kết luận)
c. Chứng minh rằng biểu thức: $P \land Q \to P$ là hằng đúng
bằng 2 cách: lập bảng chân trị và dùng luật logic.
d. Chứng minh rằng biểu thức: $\neg(P \land Q) \land P \to \neg Q$ là hằng đúng
bằng 2 cách: lập bảng chân trị và dùng luật logic.
e. Chứng minh rằng biểu thức: $(P \to Q \land R) \to ((P \to Q) \land (P \to R))$
là hằng đúng bằng 2 cách: lập bảng chân trị và dùng luật logic.
f. Chứng minh rằng biểu thức: $((P \land Q) \leftrightarrow P) \to (P \to Q)$ là hằng
đúng bằng 2 cách: lập bảng chân trị và dùng luật logic.

4.2. Tuyển và hội sơ cấp

- Tuyển các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là tuyển sơ cấp (TSC).
- Hội các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là hội sơ cấp (HSC).
- Điều kiện cần và đủ để một tuyển sơ cấp **đồng nhất đúng** là trong tuyển đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời chứa cả phủ định của nó.
  Ví dụ: $X \vee \neg X \vee Y$ đồng nhất đúng.
- Điều kiện cần và đủ để một hội sơ cấp **đồng nhất sai** là trong hội đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời chứa cả phủ định của nó.
  Ví dụ: $X \wedge \neg X \wedge Y$ đồng nhất đúng.

4.3. Chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội

Giả sử A là một biểu thức

- Nếu A' $\leftrightarrow$ A mà A' là tuyển của các hội sơ cấp, tức là A' = (HSC1) $\vee$ (HSC2) $\vee \ldots \vee$ (HSCn) thì A' là dạng chuẩn tắc tuyển của A.
- Nếu A'' $\leftrightarrow$ A mà A'' là hội của các tuyển sơ cấp, tức là A'' = (TSC1) $\wedge$ (TSC2) $\wedge \ldots \wedge$ (TSCn) thì A'' là dạng chuẩn tắc hội của A.

Định lý 1.2

Mọi biểu thức đều có thể đưa về dạng chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội.

- Điều kiện cần và đủ để biểu thức A đồng nhất đúng là trong dạng chuẩn tắc hội mỗi tuyển sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.
- Điều kiện cần và đủ để biểu thức A đồng nhất sai là trong dạng chuẩn tắc tuyển mỗi hội sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.

4.4. Thuật toán nhận biết hằng đúng (sai)

Đầu vào: Biểu thức A

1. Khử phép toán $\rightarrow$ trong A bằng cách áp dụng **luật kéo theo**.
2. Đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan đến từng mệnh đề sơ cấp bằng cách áp dụng **luật De Morgan**.
3. Đưa về dạng **chuẩn tắc hội (tuyển)** bằng cách áp dụng **luật phân bố**.
4. Kiểm tra xem mỗi tuyển (hội) sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó hay không.

Đầu ra: Dạng chuẩn tắc hội (tuyển) và kết luận A có phải hằng đúng (sai) hay không.

4.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

- Trong hệ thống toán học bao gồm các tiên đề (được giả định là đúng), ta có thể suy ra được các định lý (một định lý là một khẳng định được chứng minh là đúng).
- Logic là một công cụ phục vụ cho việc phân tích các chứng minh.
- Một chứng minh bao gồm nhiều bước suy luận mà ở mỗi bước ta đi đến (hay suy ra) một khẳng định mới từ những khẳng định đã biết.
- Trong toán học, ta thường gặp dạng suy diễn sau: nếu A_1 và A_2 và ... và A_n thì B. Dạng suy luận này là hợp lý (chấp nhận là đúng) khi $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ là hằng đúng.
  Trong đó, $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ là giả thiết (tiên đề), B là kết luận (hệ quả logic của giả thiết).

4.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

Mô hình suy diễn của công thức $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge ...A_n) \rightarrow B$ có thể được viết dưới dạng:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array}$$

(đọc là: Nếu A_1 đúng, A_2 đúng,..., A_n đúng thì B đúng).

4.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

- Quy tắc suy diễn rút gọn (Rg):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng: $(A \wedge B) \rightarrow A$.
  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng: $\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A \end{array}$
- Quy tắc suy diễn cộng (Cg):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng: $A \rightarrow (A \vee B)$.
  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng: $\begin{array}{c} A \\ \hline \therefore A \vee B \end{array}$

4.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

- Quy tắc suy diễn khẳng định (Kđ):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng: $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$.
  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng: $\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \\ \hline \therefore B \end{array}$

- Quy tắc suy diễn phủ định (Pđ):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng: $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$.
  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng: $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$

4.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

- Quy tắc suy diễn tam đoạn luận (Tđl):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng:
  $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.

  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng: $\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \\ \hline \therefore A \to C \end{array}$

- Quy tắc suy diễn tam đoạn luận rời (Tđlr):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng: $((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$.

  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng: $\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \\ \hline \therefore B \end{array}$

4.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

- Quy tắc suy diễn mâu thuẫn (Mt):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng:
  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B) \rightarrow 0.$
  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array} \equiv \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \neg B \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

  Công thức này có nghĩa là: Nếu ta thêm vào giả thiết ban đầu một giả thiết phụ $\neg B$ mà dẫn tới mâu thuẫn thì B là hệ quả logic của các giả thiết ban đầu.

- Quy tắc suy diễn theo trường hợp (Th):
  Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng:
  $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$.
  Mô hình suy diễn của công thức này được viết dưới dạng:

  $$\begin{array}{c} A \to C \\ B \to C \\ \hline \therefore (A \vee B) \to C \end{array}$$

  Công thức này có nghĩa là: Nếu một giả thiết có thể tách làm hai trường hợp A đúng hay B đúng, và ta chứng minh được riêng rẽ cho từng trường hợp là kết luận C đúng thì C cũng đúng trong cả hai trường hợp.

Bài tập 1.3:
Sử dụng quy tắc suy diễn trong mệnh đề logic

a. Chứng minh mệnh đề sau là hằng đúng:
$((A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (D \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee E) \wedge \neg E) \to \neg A.$
b. Chứng minh mệnh đề sau là hằng đúng:
$((X_1 \to X_2) \wedge (\neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee X_3)) \to (\neg X_2 \to X_4).$
c. Kiểm tra xem suy luận của đoạn văn sau có đúng hay không?
"Nếu được thưởng cuối năm An sẽ đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An sẽ thăm Thiền Viện. Mà An không thăm Thiền Viện. Vậy An không được thưởng cuối năm"

5. Logic vị từ

- Giả sử Ω là một tập hợp các phần tử (Ω thường gọi là trường hay không gian), xét các mệnh đề trên trường Ω:
  - Mệnh đề gồm một phần tử nói lên tính chất của phần tử đó.
  - Mệnh đề gồm hai phần tử tham gia nói lên quan hệ giữa hai phần tử.

    Ví dụ: $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$, mệnh đề "Số 3 là số nguyên tố", "Số 2 lớn hơn số 3"
- Biểu thức $P(x)$ gọi là vị từ xác định trên trường Ω, nếu khi thay x bởi phần tử bất kỳ của trường Ω thì $P(x)$ sẽ trở thành mệnh đề xác định trên trường Ω.
- Như vậy, $P(x)$ có thể xem như một ánh xạ (hay một hàm) xác định trên trường Ω và nhận giá trị trong tập đúng, sai. Loại vị từ này gọi là vị từ một ngôi, nói lên tính chất của một phần tử thuộc Ω.
- Logic vị từ có thể mô tả được tập hợp rộng so với logic mệnh đề.

5.1. Vị từ nhiều ngôi

- Để nói lên quan hệ giữa các phần tử của trường Ω, người ta cần đưa vào vị từ nhiều ngôi.
- Biểu thức $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gọi là vị từ xác định trên tập $\Omega^n = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, nếu thay x_i bởi phần tử bất kỳ của trường Ω_i thì ta được mệnh đề xác định trên Ω^n. Khi đó $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gọi là vị từ n ngôi.
- Các vị từ thường được ký hiệu bởi chữ P, F, Q, R (có thể có chỉ số đi kèm), cũng gọi là biến vị từ.
- Các mệnh đề thường được ký hiệu bởi chữ X, Y, Z (có thể có chỉ số đi kèm), cũng gọi là biến mệnh đề.

5.2. Lượng từ

1. Mỗi một biến mệnh đề hoặc biến vị từ là một công thức.
2. Nếu A, B là công thức thì $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), \neg A$ cũng là công thức.
3. Nếu A là công thức thì $(\forall x)A$ hoặc $(\exists x)A$ cũng là công thức.
   - $(\forall x), (\exists x)$ gọi là lượng từ.
   - $(\forall x)A$ là một mệnh đề, mệnh đề này đúng khi A đúng với mọi phần tử của trường Ω. $(\exists x)A$ là một mệnh đề, mệnh đề này đúng nếu có một phần tử của trường Ω mà A đúng.
   - $(\forall x)A$ hoặc $(\exists x)A$ chứa biến x và có thể chứa thêm một số biến khác không nằm dưới dấu $\forall, \exists$ thì x gọi là biến ràng buộc, các biến khác gọi là biến tự do.
     Ví dụ: Ví dụ với công thức $(\forall x)A(x) \rightarrow F(x)$ hoặc công thức $(\exists x)A(x) \vee F(x)$, khi đó x có mặt trong A gọi là biến ràng buộc, x trong F gọi là biến độc lập.

Bài tập 1.4:

Cho $P(x)$ là câu "x học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần". Ở đây, không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường:

a. $\exists x P(x)$
b. $\forall x P(x)$
c. $\exists x \neg P(x)$
d. $\forall x \neg P(x)$

5.2.1. Lượng từ 2 biến

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ đúng với mọi cặp (x, y)	Có một cặp (x, y) đối với nó $P(x, y)$ là sai
$\forall x \exists y P(x, y)$	Với mọi x, có một y sao cho $P(x, y)$ là đúng	Có một x sao cho $P(x, y)$ là sai với mọi y
$\exists x \forall y P(x, y)$	Có một x sao cho $P(x, y)$ là đúng với mọi y	Với mọi x, có một y sao cho $P(x, y)$ là sai
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	Có một cặp (x, y) đối với nó $P(x, y)$ là đúng	$P(x, y)$ là sai đối với mọi cặp (x, y)

5.2.1. Lượng từ 2 biến

Bài tập 1.5:
Cho $P(x, y)$ là câu "x đã học môn y", với không gian của x là tập hợp tất cả sinh viên trong lớp bạn, và không gian của y là tập hợp tất cả các môn tin học ở trường bạn. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường:

- a. $\exists x \exists y P(x, y)$
- b. $\exists x \forall y P(x, y)$
- c. $\forall x \exists y P(x, y)$
- d. $\exists y \forall x P(x, y)$
- e. $\forall y \exists x P(x, y)$
- f. $\forall x \forall y P(x, y)$

5.3. Logic mệnh đề và logic vị từ

- Logic vị từ rộng hơn logic mệnh đề, nếu A là biểu thức logic đúng trong logic mệnh đề thì nó cũng là công thức đúng trong logic vị từ. Mọi đồng nhất đúng trong logic mệnh đề cũng đồng nhất đúng trong logic vị từ.
  Ví dụ: các công thức sau vẫn đúng trong logic vị từ:
  $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$
  $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
  ...
- Ngoài ra trong logic vị từ, các mệnh đề sau đúng:
  $\overline{(\forall x)A} \leftrightarrow (\exists x)\overline{A}$
  $\overline{(\exists x)A} \leftrightarrow (\forall x)\overline{A}$

Bài tập 1.6:
Xác định giá trị của các logic vị từ sau:

a. $\forall x P(x)$, với $P(x)$ là câu "$x + 1 > x$" và không gian là tập hợp số thực.
b. $\forall x P(x)$, với $P(x)$ là câu "$x^2 < 10$" và không gian là tập hợp số nguyên dương không vượt quá 4.
c. $\exists x P(x)$, với $P(x)$ là câu "$x > 3$" và không gian là tập hợp số thực.
d. $\exists x P(x)$, với $P(x)$ là câu "$x^2 > 10$" và không gian là tập hợp số nguyên dương không vượt quá 4.

Bài tập 1.7:

a. Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất.
   Giả sử: $B(x, y)$ là câu "y là người bạn tốt nhất của x"
   ...

b. Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó.
   Giả sử:
   $F(x)$ là câu "x là phụ nữ"
   $P(x)$ là câu "x đã sinh đẻ"
   $M(x, y)$ là câu "x là mẹ của y"
   ...

Bài tập 1.7:

a. Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất.
Giả sử: $B(x, y)$ là câu "y là người bạn tốt nhất của x"
Đáp án: $\forall x \exists y \forall z [B(x, y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z))]$

b. Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó.
Giả sử:
$F(x)$ là câu "x là phụ nữ"
$P(x)$ là câu "x đã sinh đẻ"
$M(x, y)$ là câu "x là mẹ của y"
...

5.3.1. Dịch các câu thành biểu thức logic

Bài tập 1.7:

1. Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất.
   Giả sử: $B(x, y)$ là câu "y là người bạn tốt nhất của x"
   Đáp án: $\forall x \exists y \forall z [B(x, y) \land ((z \neq y) \to \neg B(x, z))]$
2. Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó.
   Giả sử:
   $F(x)$ là câu "x là phụ nữ"
   $P(x)$ là câu "x đã sinh đẻ"
   $M(x, y)$ là câu "x là mẹ của y"
   Đáp án: $\forall x [F(x) \land P(x) \to \exists y M(x, y)]$

5.3.1. Dịch các câu thành biểu thức logic

Bài tập 1.8:

a. Tất cả sư tử đều hung dữ.
b. Một số sư tử không uống cafe.
c. Một số sinh vật hung dữ không uống cafe.
   Giả sử:
   $P(x)$ là câu "x là sư tử"
   $Q(x)$ là câu "x hung dữ"
   $R(x)$ là câu "x uống cafe"

5.3.1. Dịch các câu thành biểu thức logic

Bài tập 1.8:

a. Tất cả sư tử đều hung dữ.
b. Một số sư tử không uống cafe.
c. Một số sinh vật hung dữ không uống cafe.

Giả sử:
$P(x)$ là câu "x là sư tử"
$Q(x)$ là câu "x hung dữ"
$R(x)$ là câu "x uống cafe"

Đáp án:
$\forall x(P(x) \to Q(x))$
$\exists x(P(x) \to \neg R(x))$ đúng hay $\exists x(P(x) \land \neg R(x))$ đúng?
$\exists x(Q(x) \to \neg R(x))$ đúng hay $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ đúng?

5.3.1. Dịch các câu thành biểu thức logic

Bài tập 1.9:

a. Tất cả chim ruồi đều có màu sắc sặc sỡ.
b. Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong.
c. Các chim lớn không sống bằng mật ong đều có màu xám.
d. Chim ruồi đều nhỏ.
   $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ là gì?

5.3.1. Dịch các câu thành biểu thức logic

Bài tập 1.9:

a. Tất cả chim ruồi đều có màu sắc sặc sỡ.
b. Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong.
c. Các chim lớn không sống bằng mật ong đều có màu xám.
d. Chim ruồi đều nhỏ.

   Giả sử:
   $P(x)$ là câu "x là chim ruồi"
   $Q(x)$ là câu "x lớn"
   $R(x)$ là câu "x sống bằng mật ong"
   $S(x)$ là câu "x có màu sặc sỡ (không xám)"
   Đáp án:
   ...

5.3.1. Dịch các câu thành biểu thức logic

Bài tập 1.10:
Cho $L(x, y)$ là câu "x yêu y", với không gian của của x và y là tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. Mọi người đều yêu Jerry.
b. Mọi người đều yêu một ai đó.
c. Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.
d. Không có ai yêu tất cả mọi người.
e. Có một người ế. (Gợi ý: Họ không yêu ai hoặc không ai yêu họ)
f. Có một người mà Lyndia không yêu.
g. Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.
h. Có đúng hai người mà Lynn yêu.

5.3.2. Một số quy tắc suy diễn trong logic vị từ

- Quy tắc thay đổi thứ tự lượng từ hóa hai biến:
  $\forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$
  $\exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$
- Quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng:
  Giả sử một mệnh đề có lượng từ, trong đó biến x với miền xác định Ω bị ràng buộc bởi lượng từ phổ dụng ($\forall$) và mệnh đề đúng. Khi đó, nếu thay x bởi giá trị cụ thể $a \in \Omega$ thì ta được mệnh đề đúng.
- Quy tắc tổng quát hóa phổ dụng:
  Cho mệnh đề có lượng từ hóa $(\forall x)P(x)$ trên trường Ω. Nếu ta lấy $x = a$ là phần tử bất kỳ trong Ω mà $P(a)$ đúng thì mệnh đề lượng từ hóa $(\forall x)P(x)$ là mệnh đề đúng.

5.3.2. Một số quy tắc suy diễn trong logic vị từ

- Cho $P(x), Q(x)$ là các vị từ theo biến x trên trường Ω nào đó, a là một phần tử cố định tùy ý thuộc Ω. Khi đó, ta có mô hình suy diễn:
$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ \quad P(a) \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

- Cho $P(x), Q(x), R(x)$ là các vị từ theo biến x trên trường Ω nào đó. Khi đó, ta có mô hình suy diễn:
$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)(Q(x) \to R(x)) \\ \hline \therefore (\forall x)(P(x) \to R(x)) \end{array}$$

5.3.2. Một số quy tắc suy diễn trong logic vị từ

- Cho $P(x)$ là vị từ theo biến x trên trường Ω nào đó, a là một phần tử tùy ý cho trước thuộc Ω. Khi đó, ta có mô hình suy diễn:
$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(a)} \equiv \frac{(\forall x)P(x)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$
- Cho $P(x)$ là các vị từ xác định trên $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_n$. Khi đó, ta có mô hình suy diễn:
$$\begin{array}{c} (\forall x \in X_1)P(x) \\ (\forall x \in X_2)P(x) \\ \vdots \\ (\forall x \in X_n)P(x) \\ \hline \therefore (\forall x \in X)P(x) \end{array}$$

Bài tập 1.11:
Chỉ ra suy luận sau là đúng:
“Mọi sinh viên CNTT đều học môn Toán rời rạc. Minh là sinh viên CNTT. Vậy Minh học môn Toán rời rạc."
Gợi ý:
$P(x) =$ “x là sinh viên CNTT”
$Q(x) =$ “x học môn Toán rời rạc”
Mô hình suy diễn có dạng nào?

5.4. Chứng minh tồn tại với mọi

- Chứng minh tồn tại:
  $P(x)$ là một vị từ, cần chứng minh $\exists x P(x)$ đúng.
  - Chứng minh kiến thiết: Tìm một ví dụ a sao cho $P(a)$ đúng.
  - Chứng minh không kiến thiết (phản chứng): Chỉ ra rằng $\neg\exists x P(x)$ dẫn đến mâu thuẫn.
- Chứng minh với mọi:
  $P(x)$ là một vị từ, cần chứng minh $\forall x P(x)$ đúng.
  - Chứng minh bằng các trường hợp: Cần chứng minh $P(x)$ đúng với mọi ví dụ. Tuy nhiên, cách làm này rất khó khăn trong trường hợp có rất nhiều ví dụ phải xét. Chia ví dụ thành các nhóm và chứng mình cho từng nhóm có thể là một chiến lược tốt.
  - Chứng minh quy nạp (cho một số trường hợp nhất định):
    1. Bước cơ sở: Chứng minh $P(1)$ đúng.
    2. Bước quy nạp: Chứng minh $P(n) \rightarrow P(n+1)$ đúng $\forall n$
       hoặc $(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1)$ đúng $\forall n$.

Bài tập 1.13:

Chứng minh bằng quy nạp rằng:

a. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
b. $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n - 1)2^{n+1} + 2$
c. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bài tập 1.14:
Chứng minh rằng:

a. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ và $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ là không tương đương.
b. $\neg P \leftrightarrow Q$ và $P \leftrightarrow \neg Q$ là tương đương.
c. $\neg(P \leftrightarrow Q)$ và $\neg P \leftrightarrow Q$ là tương đương.
d. $\neg \exists x \forall y P(x, y)$ và $\forall x \exists y \neg P(x, y)$ là tương đương.
e. $(\forall x P(x)) \wedge A$ và $\forall x (P(X) \wedge A)$ là tương đương, trong đó A là mệnh đề không có liên quan với lượng từ nào.
f. $(\exists x P(x)) \wedge A$ và $\exists x (P(X) \wedge A)$ là tương đương, trong đó A là mệnh đề không có liên quan với lượng từ nào.

Bài tập 1.15:

a. Suy luận dưới đây có đúng không?

$$\begin{array}{c} (\neg X_1 \vee X_2) \rightarrow X_3 \\ X_3 \rightarrow (X_4 \vee X_5) \\ \neg X_4 \wedge \neg X_6 \\ \neg X_6 \rightarrow \neg X_5 \\ \hline \therefore X_1 \end{array}$$

b. Dùng mô hình suy diễn, kiểm tra xem biểu thức logic sau đúng hay sai?
$((P \rightarrow ((Q \vee R) \wedge S)) \wedge P) \rightarrow ((Q \vee R) \wedge S)$

Ôn tập

Bài tập 1.16:
Cho $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ tướng ứng với các câu "x là một đứa bé", "x tư duy logic", "x có khả năng cai quản một con cá sấu", "x bị coi thường". Giả sử rằng không gian là tập hợp tất cả mọi người. Hãy dùng các lượng từ, cá liên từ logic cùng với $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ để diễn đạt các câu sau:

a. Những đứa trẻ không tư duy logic.
b. Không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu.
c. Những người không tư duy logic hay bị coi thường.
d. Những đứa bé không cai quản được cá sấu.
e. (d) có suy ra được từ (a), (b) và (c) không?