ĐẠI HỌC QUY NHƠN

* * *

LUẬN VĂN THẠC SĨ

VÀNH CHOW CỦA ĐA TẠP TORIC

Chuyên ngành: Đại Số Và Lý Thuyết Số

Giáo viên hướng dẫn: **Tiến sĩ Đặng Tuấn Hiệp**
Học viên: **Nguyễn Nho**

Quy Nhơn, tháng 8 năm 2018

Mục lục

Giới thiệu

Lời cảm ơn

Chương 1

Nón đa diện

1.1 Nón đa diện

Định nghĩa 1.1.1. Cho $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ là một tập con hữu hạn các véctơ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^n$. Tập

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r : \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, r\}$$

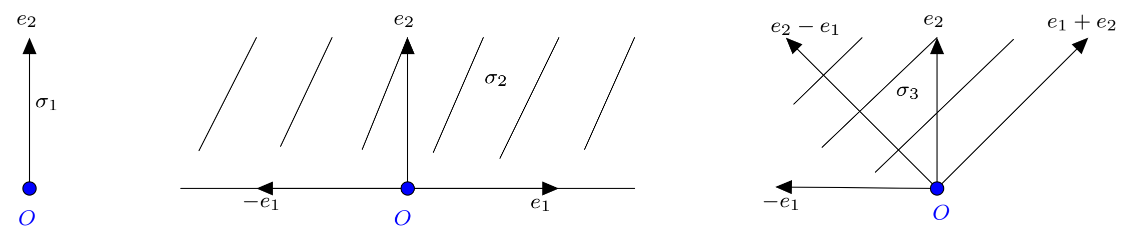
được gọi là một *nón đa diện* trong $\mathbb{R}^n$. Những véctơ $v_1, \dots, v_r$ được gọi là các phần tử sinh của nón σ. Kí hiệu

$$\sigma = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_r).$$

Khi $A = \emptyset$, chúng ta quy ước rằng $\sigma = \emptyset$.

Nhận xét: Từ định nghĩa chúng ta suy ra nón đa diện là tập lồi.

Ví dụ 1.1.2. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ với cơ sở chuẩn tắc (e_1, e_2),



Hình 1.1: Nón đa diện trong $\mathbb{R}^2$

- $\sigma_1 = \mathrm{Conv}(e_2)$.

- $\sigma_2 = \mathrm{Conv}(e_1, -e_1, e_2)$.
- $\sigma_3 = \mathrm{Conv}(-e_1, e_2 - e_1, e_2, e_1 + e_2)$.

Nhận xét rằng, với nón σ_3 chúng ta có thể bỏ đi các véctơ $e_2 - e_1, e_2$, khi đó σ_3 được viết lại $\sigma_3 = \mathrm{Conv}(-e_1, e_1 + e_2)$. Điều này chỉ ra rằng tập các phần tử sinh của một nón đa diện không là duy nhất.

Định nghĩa 1.1.3. ***Số chiều*** của một nón đa diện σ là số chiều của không gian tuyến tính bé nhất chứa σ. Kí hiệu $\dim \sigma$.

Ví dụ 1.1.4. Trong Ví dụ 1.1.2, $dim\sigma_1 = 1, dim\sigma_2 = \dim \sigma_3 = 2$.

Định nghĩa 1.1.5. Cho σ là một nón đa diện trong $\mathbb{R}^n$.

1. σ được gọi là một ***nón đa diện hữu tỉ*** nếu σ được sinh bởi các véctơ trong $\mathbb{Z}^n$.

2. σ được gọi là một ***nón đa diện chặt*** nếu $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Trong Ví dụ 1.1.2, cả ba nón $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ đều là các nón đa diện hữu tỉ, trong đó σ_1, σ_3 là các nón chặt.

Chúng ta kí hiệu $(\mathbb{R}^n)^*$ là không gian đối ngẫu của không gian véctơ $\mathbb{R}^n$. Các véctơ $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Các véctơ $\{e_1^* = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n^* = (0, \ldots, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $(\mathbb{R}^n)^*$. Hai không gian véctơ $\mathbb{R}^n$ và $(\mathbb{R}^n)^*$ là đẳng cấu. Kí hiệu $\langle , \rangle$ là tích vô hướng trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Bổ đề 1.1.6. *Cho σ là một nón đa diện trong $\mathbb{R}^n$, khi đó tập*

$$\{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v\rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

là một nón đa diện trong $(\mathbb{R}^n)^*$.

Xem [5], trang 11.

Định nghĩa 1.1.7. Cho σ là một nón đa diện lồi trong $\mathbb{R}^n$, khí đó tập

$$\{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v\rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

được gọi là nón đối ngẫu của nón σ. Kí hiệu $\overset{\vee}{\sigma}$. Nếu $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_r)$ thì $\overset{\vee}{\sigma}$ có thể viết lại bởi

$$\overset{\vee}{\sigma} = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i\rangle \geq 0, i = 1, \ldots, r\}.$$

Bổ đề 1.1.8. *Nếu σ là một nón đa diện hữu tỉ thì $\overset{\vee}{\sigma}$ cũng là một nón đa diện hữu tỉ.*

Xem [8], trang 7, Proposition 1.3.

Bổ đề 1.1.9. *Bổ đề Farkas. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^n$, cho trước đa diện lồi $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_r)$, với một véctơ $b \in \mathbb{R}^n$, đúng một trong hai trường hợp xả ra:*

1. $b \in \sigma$.
2. *Tồn tại $y \in (\mathbb{R}^n)^*$ sao cho $\langle y, v_i \rangle \geq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$ và $\langle y, b \rangle < 0$.*

Link tham khảo `https://vi.wikipedia.org/wiki/B%E1%BB%95_%C4%91%E1%BB%81_Farkas`

Mệnh đề 1.1.10. *Cho σ là một nón đa diện trong $\mathbb{R}^n$, khi đó đối ngẫu hai lần σ là σ, có nghĩa là $(\overset{\vee}{\sigma})^\vee = \sigma$.*

Chứng minh. Giả sử rằng $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_r)$. Bởi định nghĩa của nón đối ngẫu, chúng ta có

$$(\overset{\vee}{\sigma})^\vee = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq 0, \forall u \in \overset{\vee}{\sigma}\}.$$

Lấy $v \in \sigma$ thì $\langle u, v \rangle \geq 0$ với mọi $u \in \overset{\vee}{\sigma}$, do đó, bởi tính đối xứng của tích vô hướng, ta cũng có $\langle v, u \rangle \geq 0$, điều này chỉ ra rằng $v \in (\overset{\vee}{\sigma})^\vee$, suy ra $\sigma \subseteq (\overset{\vee}{\sigma})^\vee$.

Ngược lại, sử dụng phương pháp phản chứng, chúng ta giả sử rằng tồn tại phần tử $v \in (\overset{\vee}{\sigma})^\vee$ nhưng $v \notin \sigma$. Khi đó, từ Bổ đề 1.1.9, ta suy ra tồn tại véctơ $y \in (\mathbb{R}^n)^*$ sao cho $\langle y, v_i \rangle \geq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$ và $\langle y, v \rangle < 0$. Từ đó suy ra $y \in \overset{\vee}{\sigma}$. Vì $v \in (\overset{\vee}{\sigma})^\vee$ nên $\langle v, y \rangle \geq 0$. Điều này mâu thuẫn với $\langle y, v \rangle < 0$. Từ mâu thuẫn này ta suy ra $v \in \sigma$, do đó $(\overset{\vee}{\sigma})^\vee \subseteq \sigma$. □

Mệnh đề 1.1.11. *Cho $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_r)$ là nón đa diện trong $\mathbb{R}^n$. Mỗi $\tau_i = Conv(v_i)$ là nón sinh bởi véctơ v_i, $i = i, \ldots, r$.. Khi đó ta có*

$$\overset{\vee}{\sigma} = \bigcap_{i=1}^{r} \overset{\vee}{\tau}_i.$$

Chứng minh. Chúng ta có

$$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i,$$
$$\overset{\vee}{\tau}_i = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i \rangle \geq 0\}.$$

Do đó, nón đối ngẫu của σ có thể được biểu diễn như sau

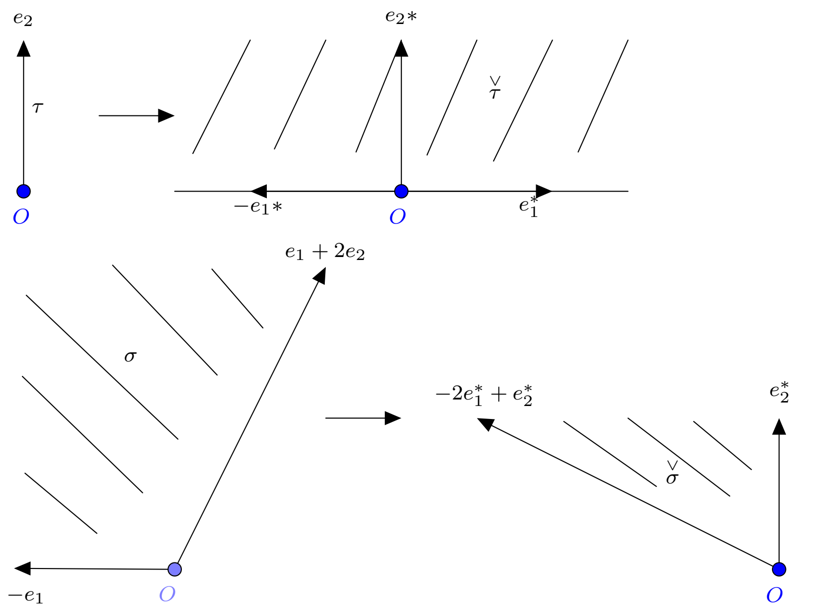
$$\begin{aligned}\overset{\vee}{\sigma} &= \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i \rangle \geq 0, i = 1, \ldots, r\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{r} \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i \rangle \geq 0\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{r} \overset{\vee}{\tau}_i.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.1.12. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, cho các nón $\tau = Conv(e_2), \sigma = Conve(-e_1, e_1 + 2e_2)$, nón đối ngẫu của τ, σ trong $(\mathbb{R}^2)^*$ lần lượt là

$$\overset{\vee}{\tau} = \mathrm{Conv}(-e_1^*, e_1^*, e_2),$$

$$\overset{\vee}{\sigma} = \mathrm{Conv}(-2e_1^* + e_2^*, e_2^*).$$



Hình 1.2: Nón đối ngẫu

Mệnh đề 1.1.13. *Cho hai nón đa diện $\sigma_1 = Conv(a_1, \ldots, a_r)$ và $\sigma_2 = Conv(b_1, \ldots, b_t)$ trong không gian $\mathbb{R}^n$, khi đó*

1. *$\sigma_1 + \sigma_2 = \{a + b : a \in \sigma_1, b \in \sigma_2\}$ là một nón đa diện.*
2. *Giao của hai nón đa diện là một đa diện.*

.

Chứng minh.

1. Đặt $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, khi đó
$$\sigma = Conv(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_t),$$
điều đó chỉ ra rằng σ là một nón đa diện.
2. Chúng ta có
$$\overset{\vee}{\sigma}_1 = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v\rangle \geq 0, \forall v \in \sigma_1\},$$
$$\overset{\vee}{\sigma}_2 = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v\rangle \geq 0, \forall v \in \sigma_2\}.$$
Suy ra
$$\overset{\vee}{\sigma}_1 \cap \overset{\vee}{\sigma}_2 = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v\rangle \geq 0, \forall v \in \sigma_1 + \sigma_2\} = (\sigma_1 + \sigma_2)^\vee.$$
Áp dụng Mệnh đề 1.1.10 và kết quả trên đây, chúng ta có
$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = (\overset{\vee}{\sigma}_1)^\vee \cap (\overset{\vee}{\sigma}_2)^\vee = (\overset{\vee}{\sigma}_1 + \overset{\vee}{\sigma}_2)^\vee.$$
Vì $\overset{\vee}{\sigma}_1 + \overset{\vee}{\sigma}_2$ là một nón đa diện nên $\sigma_1 \cap \sigma_2$ cũng là một nón đa diện.

□

1.2 Các mặt của một nón đa diện

Kí hiệu $v^\perp$ tập các phần tử trong $(\mathbb{R}^n)^*$ trực giao với véctơ v trong $\mathbb{R}^n$.
$$v^\perp = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v\rangle = 0\}.$$

Trong luận văn, chúng tôi kí hiệu $M = Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$. Khi đó chúng ta có M là một tập con của $(\mathbb{R}^n)^*$ và $M \cong \mathbb{Z}^n$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho σ là một nón đa diện trong không gian $\mathbb{R}^n$, lấy λ là một véctơ trong $\overset{\vee}{\sigma} \cap M$. Khi đó tập

$$\tau = \sigma \cap \lambda^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \lambda \rangle = 0\}$$

được gọi một ***mặt*** của nón σ. Kí hiệu $\tau < \sigma$.

Một mặt có số chiều là 1 được gọi là một ***cạnh*** của nón đa diện. Một mặt có đối chiều là 1 được gọi là một ***facet*** của nón đa diện.

Ví dụ 1.2.2. Trong Ví dụ 1.1.12, lấy $\sigma = Conv(-e_1, e_1+2e_2)$, $\overset{\vee}{\sigma} = Conv(-2e_1^*+e_2^*, e_2^*)$, chọn $\lambda = e_2^*$, khi đó $\tau = \sigma \cap \lambda^{\perp} = Conv(-e_1)$ là một mặt của σ.

Bây giờ chúng ta tìm hiểu một số tính chất của các mặt của nón đa diện.

Mệnh đề 1.2.3. *Cho $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_r)$ là một nón đa diện trong không gian $\mathbb{R}^n$.*

1. *Mỗi mặt của σ là một nón đa diện. Số mặt của một nón đa diện là hữu hạn, và bé hơn hoặc bằng 2^r.*
2. *Giao hai mặt của σ là một mặt của σ.*

Chứng minh.

1. Giả sử rằng τ là một mặt của σ, khi đó tồn tại $\lambda \in \overset{\vee}{\sigma} \cap M$ sao cho
$$\tau = \sigma \cap \lambda^{\perp}.$$
Do đó,
$$\tau = \{x \in \sigma : \langle x, \lambda \rangle = 0\}.$$
Lấy I là tập được định nghĩa bởi
$$I = \{t \in \{1, \ldots, r\} : \langle v_t, \lambda \rangle = 0\}.$$
Với mỗi $x \in \tau$, ta có $x \in \sigma$, nên tồn tại các số không âm $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sao cho
$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i.$$
Vì $x \in \tau$ thì $\langle x, \lambda \rangle = 0$, nên ta có
$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle v_i, \lambda \rangle = 0.$$

Vì $\lambda_i, \langle v_i, \lambda\rangle$ là các số không âm nên ta có thể viết lại x như sau

$$x = \sum_{t\in I} \lambda_i v_i.$$

Do đó, ta suy ra rằng

$$x \in Conv(\{v_t : t \in I\}).$$

Ngược lại, nếu lấy $x \in Conv(\{v_t : t \in I\})$, thì tồn tại các số λ_i không âm sao cho

$$x = \sum_{t\in I} \lambda_i v_i.$$

Vì cách chúng ta định nghĩa tập I nên $\langle x, \lambda\rangle = 0$, do đó $x \in \tau$.

Vậy τ là một nón đa diện, và

$$\tau = Conv(\{v_t : t \in I\}).$$

Từ chứng minh trên, chúng ta suy ra rằng mỗi mặt của σ là một nón đa diện, nón này được sinh bởi các véctơ là một tập con của tâp $\{v_1, \ldots, v_r\}$, do tập $\{v_1, \ldots, v_r\}$ có hữu hạn phần tử nên nó có hữu hạn các tập con, vậy số mặt của một đa diện là hữu hạn. Do đó, số mặt của σ bé hơn hoặc bằng 2^r.

2. Giả sử τ_1, τ_2 là hai mặt của σ, khi đó tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma \cap M$ sao cho

$$\tau_1 = \sigma \cap \lambda_1^\perp,$$
$$\tau_2 = \sigma \cap \lambda_2^\perp.$$

Trước tiên, ta cần chứng minh kết quả sau

$$\sigma \cap (\lambda_1^\perp \cap \lambda_2^\perp) = \sigma \cap (\lambda_1 + \lambda_2)^\perp.$$

Lấy $x \in \sigma \cap (\lambda_1^\perp \cap \lambda_2^\perp)$, thì $x \in \sigma$ và

$$\langle x, \lambda_1\rangle = \langle x, \lambda_2\rangle = 0.$$

Do đó, $x \in \sigma$ và $\langle x, \lambda_1 + \lambda_2\rangle = 0$, suy ra $x \in \sigma \cap (\lambda_1 + \lambda_2)^\perp$.

Ngược lại, lấy $x \in \sigma \cap (\lambda_1 + \lambda_2)^\perp$, vì $x \in \sigma$ nên

$$\langle x, \lambda_1\rangle \geq 0, \langle x, \lambda_2\rangle \geq 0,$$

vì $x \in (\lambda_1 + \lambda_2)^{\perp}$ nên

$$\langle x, \lambda_1 + \lambda_2 \rangle = 0.$$

Từ đó suy ra $x \in \sigma$ và

$$\langle x, \lambda_1 \rangle = \langle x, \lambda_2 \rangle = 0.$$

Bởi vây, $x \in \sigma \cap (\lambda_1^{\perp} \cap \lambda_2^{\perp})$.

Như vậy, chúng ta chứng minh được rằng

$$\sigma \cap (\lambda_1^{\perp} \cap \lambda_2^{\perp}) = \sigma \cap (\lambda_1 + \lambda_2)^{\perp}.$$

Quay lại với giao của hai mặt, ta có

$$\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma \cap \lambda_1^{\perp} \cap \sigma \cap \lambda_2^{\perp} = \sigma \cap (\lambda_1^{\perp} \cap \lambda_2^{\perp}) = \sigma \cap (\lambda_1 + \lambda_2)^{\perp}.$$

Vì $\lambda_1 + \lambda_2 \in (\mathbb{R}^n)^* \cap M$, nên $\tau_1 \cap \tau_2$ là một mặt của nón đa diện σ.

□

Mệnh đề 1.2.4. *Nếu $\gamma < \tau < \sigma$ thì $\gamma < \sigma$.*

Mệnh đề 1.2.5. *Cho σ là một nón đa diện. Cho τ là một tập con của σ. Hai mệnh đề sau là tương đương.*

1. *τ là một mặt của σ.*

2. *Lấy bất kì hai véctơ $u, v \in \sigma$, nếu $u + v \in \tau$ thì $u \in \tau$ và $v \in \tau$.*

Xem [11] trang 15, được phát biểu như một bài tập.

Mệnh đề 1.2.6. *Cho τ là một mặt của nón đa diện σ, khi đó tồn tại véctơ $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ sao cho*

$$\overset{\vee}{\tau} = \overset{\vee}{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda).$$

Chứng minh. Vì τ là một mặt của σ nên tồn tại $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^* \cap M$, sao cho

$$\tau = \sigma \cap \lambda^{\perp}.$$

Đầu tiên, chúng ta cần chứng minh rằng

$$\sigma \cap \overset{\vee}{(-\lambda)} = \sigma \cap \lambda^{\perp}.$$

Lấy $v \in \sigma \cap (\overset{\vee}{-\lambda}) =$, do đó $v \in \sigma$ và $v \in (\overset{\vee}{-\lambda})$. Suy ra $\langle \lambda, v \rangle \geq 0$ và $\langle v, -\lambda \rangle \geq 0$, vậy $\langle v, -\lambda \rangle = 0$, có nghĩa là $v \in \sigma \cap \lambda^{\perp}$, nên $\sigma \cap (\overset{\vee}{-\lambda}) \subseteq \sigma \cap \lambda^{\perp}$

Ngược lại, lấy $v \in \sigma \cap \lambda^{\perp}$, dễ thấy là $v \in \sigma$. Vì $\langle \lambda, v \rangle = 0$ nên $\langle -\lambda, v \rangle = 0$, suy ra $v \in (\overset{\vee}{-\lambda})$. Nên ta có $\sigma \cap \lambda^{\perp} \subseteq \sigma \cap (\overset{\vee}{-\lambda})$.

Từ lập luận trên ta được

$$\sigma \cap (\overset{\vee}{-\lambda}) = \sigma \cap \lambda^{\perp} = \tau.$$

Lấy đối ngẫu các vế ta được

$$\overset{\vee}{\tau} = (\sigma \cap (\overset{\vee}{-\lambda}))^{\vee} = \overset{\vee}{\sigma} + Conv(-\lambda) = \overset{\vee}{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq}(-\lambda).$$

□

Hệ quả 1.2.7. *Nếu $\tau \subseteq \sigma$ thì $\overset{\vee}{\sigma} \subseteq \overset{\vee}{\tau}$.*

Định nghĩa 1.2.8. Cho σ là một nón đa diện khác rỗng, ***phần trong tương đối (relative interior)*** của σ là tập được định nghĩa bởi

$$ri(\sigma) = \{x \in \sigma : \forall y \in \sigma, \exists \lambda > 1 : \lambda x + (1-\lambda) y \in \sigma\}.$$

Bổ đề 1.2.9. *Cho $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_r)$ là một nón đa diện trong $\mathbb{R}^n$, giả sử $k = dim\sigma$, khi đó mỗi véctơ trong $ri(\sigma)$ là một biểu diễn tuyến tính dương của k véctơ độc lập tuyến tính trong tập $\{v_1, \ldots, v_r\}$.*

Xem [5], trang 12.

Từ kết quả này, bằng cách xác định số chiều của nón đa diện σ, chúng ta có thể dễ dàng tìm được một véctơ thuộc $ri(\sigma)$. Mệnh đề sau thể hiện tính chất của phần trong tương đối của một nón đa diện.

Mệnh đề 1.2.10. *Cho σ là nón đa diện, các mệnh đề sau là tương đương*

1. $v \in ri(\sigma)$.
2. $\langle u, v \rangle > 0$ *với mọi* $u \in \overset{\vee}{\sigma} \setminus \sigma^{\perp}$.
3. $\overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp} = \sigma^{\perp}$.
4. $\sigma + \mathbb{R}.(-v) = \mathbb{R}.\sigma$.

Mệnh đề 1.2.11. *Cho τ là một mặt của nón đa diện hữu tỉ σ trong không gian $\mathbb{R}^n$, thì $\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}$ là một mặt của $\overset{\vee}{\sigma}$ và*

$$dim(\tau) + dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}) = n.$$

Điều này suy ra sự tương ứng một-một giữa tập các mặt của σ và tập các mặt của $\overset{\vee}{\sigma}$.

$\sigma \cap (-\sigma)$ là mặt nhỏ nhất của σ.

Chứng minh.

1. Chứng minh $\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}$ là một mặt của $\overset{\vee}{\sigma}$.

   Vì σ là nón đa diện hữu tỉ nên các mặt của nó cũng là các nón đa diện hữu tỉ (suy ra từ Mệnh đề 1.2.3), suy ra $ri(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$. Lấy $v \in ri(\tau) \cap \mathbb{Z}^n$, bởi Mệnh đề 1.2.10, chúng ta có $\overset{\vee}{\tau} \cap v^{\perp} = \tau^{\perp}$. Do vậy

   $$\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp} = \overset{\vee}{\sigma} \cap (\overset{\vee}{\tau} \cap v^{\perp}) = (\overset{\vee}{\sigma} \cap \overset{\vee}{\tau}) \cap v^{\perp}.$$

   Vì $\tau \subseteq \sigma$ nên $\overset{\vee}{\sigma} \subseteq \overset{\vee}{\tau}$. Do đó

   $$\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp} = \overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp}.$$

   Do $v \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$ nên $\overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp}$ là một mặt của $\overset{\vee}{\sigma}$. Vậy $\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}$ là một mặt của $\overset{\vee}{\sigma}$.

2. $dim(\tau) + dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}) = n$.

   Tồn tại $\lambda \in \overset{\vee}{\sigma} \cap M$ sao cho $\tau = \overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp}$. Theo Mệnh đề 1.2.6, ta có

   $$\overset{\vee}{\tau} = \overset{\vee}{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda).$$

   Bởi Mệnh đề **??**, chúng ta có $\overset{\vee}{\tau} \cap v^{\perp} = \tau^{\perp}$. Từ các kết quả trên, ta suy ra rằng

   $$\tau^{\perp} = (\overset{\vee}{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda)) \cap v^{\perp}.$$

   Vì $v \in \tau$ nên $\langle \lambda, v \rangle = 0$, do đó $\lambda \in \tau^{\perp}$, suy ra

   $$\mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda) \subseteq v^{\perp}.$$

   Do vậy chúng ta có

   $$\tau^{\perp} = \overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp} + \mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda).$$

Vì $-\lambda \in -\overset{\vee}{\sigma}, -\lambda \in \tau^{\perp}$ nên

$$dim(\tau^{\perp}) = dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp} + \mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda)) = dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp}).$$

Theo 1 ta có

$$dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}) = dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap v^{\perp}).$$

Vậy

$$dim(\tau) + dim(\overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^{\perp}) = dim(\tau) + dim(\tau^{\perp}) = n.$$

Phần còn lại của chứng minh xem [5], trang 12,13.

□

Hệ quả 1.2.12. *Nếu σ là một nón đa diện hữu tỉ chặt trong $\mathbb{R}^n$ thì $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ là một mặt của σ, do đó từ Mệnh đề 1.2.11 ta suy ra $dim(\overset{\vee}{\sigma}) = n$.*

Để thuận tiện cho lập luận, với mỗi nón đa diện σ, chúng tôi kí hiệu $S_\sigma = \overset{\vee}{\sigma} \cap M$, trong mục tiếp theo, chúng ta tìm hiểu một số tính chất của tập S_σ.

1.3 Vị nhóm S_σ

Định nghĩa 1.3.1. Cho tập G khác rỗng và trên G trang bị một phép toán hai ngôi

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x * y. \end{aligned}$$

1. Nếu phép toán $*$ ở trên thỏa mãn tính chất kết hợp thì khi đó tập G cùng với phép toán $*$ được gọi là ***nửa nhóm***.(Ký hiệu là $(G, *)$).

2. Tập G cùng với phép toán $*$ được gọi là một ***vị nhóm*** nếu S là một nửa nhóm, trong G tồn tại phần tử e sao cho với mọi $a \in G$ ta có

$$a * e = e * a = a.$$

Định nghĩa 1.3.2. Một vị nhóm $(G, +)$ được gọi là hữu hạn sinh nếu tồn tại các phần tử $g_1, \ldots, g_s$ sao cho

$$G = g_1\mathbb{Z}_+ + g_2\mathbb{Z}_+ + \cdots + g_s\mathbb{Z}_+.$$

Khi đó tập $\{g_1, \ldots, g_s\}$ được gọi là một tập sinh của G. Kí hiệu $G = FGM(g_1, \ldots, g_s)$.

Mệnh đề 1.3.3. *Cho $\sigma = Conv(v_1, \dots, v_r)$ là một nón đa diện trong $\mathbb{R}^n$, khi đó $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ là một vị nhóm. Từ đó suy ra S_σ cũng là một vị nhóm.*

Chứng minh.

1. Định nghĩa phép toán + trên $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ là phép toán + trên không gian $\mathbb{R}^n$ hạn chế lên $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$. Khi đó hiển nhiên phép toán thỏa mãn tính chất kết hợp. Chú ý rằng rằng véctơ 0 thuộc $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$. Do đó $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ là một vị nhóm với phép toán +.

2. Vì $\overset{\vee}{\sigma}$ cũng là một nón đa diện trong $(\mathbb{R}^n)^*$ nên S_σ cùng với phép toán + trên $(\mathbb{R}^n)^*$ hạn chế lên S_σ là một vị nhóm.

□

Mệnh đề 1.3.4. *Bổ đề Gordon. Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^n$, khi đó vị nhóm $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ là hữu hạn sinh.*

Chứng minh.
Vì σ là nón đa diện hữu tỉ nên tồn tại các véctơ $v_1, v_2, \dots, v_r$ trong $\mathbb{Z}^n$ sao cho

$$\sigma = Conv(v_1, \dots, v_r).$$

Chúng ta xét ánh xạ φ được định nghĩa bởi

$$\varphi : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(t_1, \dots, t_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} t_i v_i.$$

Nhận xét rằng φ là một ánh xạ liên tục. Xét tập

$$K = \varphi([0;1]^r) = \{\sum_{i=1}^{r} t_i v_i : t_i \in [0;1], i = 1, \dots, r\}.$$

Theo định nghĩa của K, chúng ta suy ra K là một tập con của σ, hơn nữa, vì $[0;1]^r$ là tập compact và φ liên tục nên tập K là compact.

Chúng ta xem $\mathbb{R}^n$ như một không gian metric với metric d trên $\mathbb{R}^n$ là khoảng cách thông thường, hình cầu mở tâm x bán kính 1 được định nghĩa bởi

$$B(x, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, x) < 1\}.$$

Dê thấy rằng

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, 1).$$

Vì K là compact nên tồn tại hữu hạn các điểm $x_1, \ldots, x_s$ sao cho

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B(x_i, 1)$$

.

Vì mỗi hình cầu mở $B(x, 1)$ giao với $\mathbb{Z}^n$ tại hữu hạn điểm, nên K giao với $\mathbb{Z}^n$ tại hữu hạn điểm.

Bây giờ chúng ta chứng minh rằng $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ được sinh bởi $K \cap \mathbb{Z}^n$ và các véctơ $v_1, \ldots, v_r$.

Lấy một véctơ $v \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$, khi đó tồn tại các số không âm $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sao cho

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i.$$

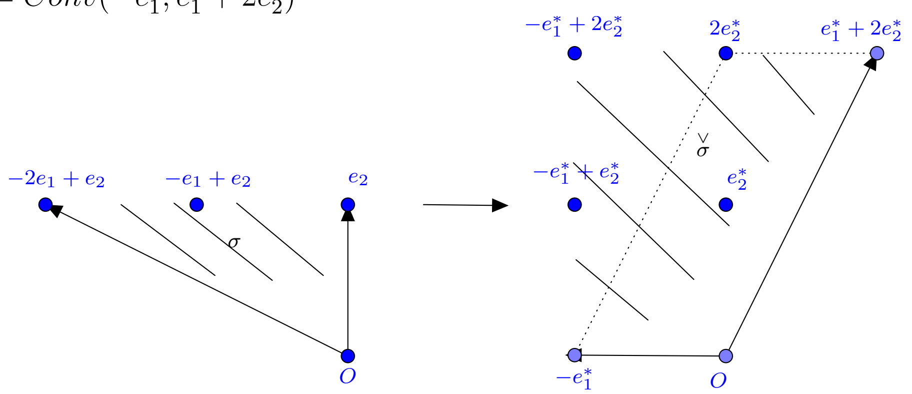
Để ý rằng với mỗi λ_i, tồn tại $n_i \in$ và $t_i \in [0; 1]$ sao cho $\lambda_i = n_i + t_i$. Khi đó ta có thể biểu diễn v lại như sau

$$v = \sum_{i=1}^{r} n_i v_i + \sum_{i=1}^{r} t_i v_i.$$

Do v và $\sum_{i=1}^{r} n_i v_i$ thuộc $\mathbb{Z}^n$ nên $u = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$. Để ý rằng $u \in K$, do đó $u \in K \cap \mathbb{Z}^n$. Vậy mệnh đề được chứng minh xong. □

Hệ quả 1.3.5. *S_σ là vị nhóm hữu hạn sinh.*

Ví dụ 1.3.6. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, cho $\sigma = Conv(-2e_1 + e_2, e_2)$, khi đó $\overset{\vee}{\sigma} = Conv(-e_1^*, e_1^* + 2e_2^*)$



Từ hình vẽ ta thấy được $S_\sigma = FGM(-e_1^*, e_1^* + 2e_2^*, e_2^*)$.

Hình 1.3: Tập sinh của vị nhóm S_σ.

Mệnh đề 1.3.7. *Cho σ là một nón đa diện, $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ là một mặt của σ, với $\lambda \in S_\sigma$. Khi đó*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_+.(-\lambda).$$

Chứng minh. Xem [11], trang 13, Mệnh đề 2. $\square$

Chương 2

Hình học đại số

2.1 Đa tạp affine

Cho k là một trường đóng đại số, chúng ta định nghĩa ***không gian affine*** $n-$***chiều*** trên k, kí hiệu $\mathbb{A}_k^n$ hoặc $\mathbb{A}^n$, là tập hợp các bộ n phần tử trong k. Một phần tử $P \in \mathbb{A}^n$ được gọi là một ***điểm***, nếu $P = (a_1, \ldots, a_n)$ với $a_i \in k$, thì a_i được gọi là các ***tọa độ*** của P.

Kí hiệu $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên k. Nếu T là một tập con của A, ***tập nghiệm*** của T được định nghĩa bởi

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0 \text{ với mọi } f \in T\}.$$

Chú ý rằng mỗi tập nghiệm là một tập đóng.

Cho Y là một tập con của $\mathbb{A}^n$, định nghĩa idean của Y trong A bởi

$$I(Y) = \{f \in A : f(P) = 0 \text{ với mọi } P \in Y\}.$$

Định nghĩa 2.1.1. Một tập con Y của $\mathbb{A}^n$ được gọi là một ***tập đại số*** nếu tồn tại một tập $T \subseteq A$ sao cho $Y = Z(T)$.

Mệnh đề 2.1.2. *Hợp của hai tập đại số là một tập đại số. Giao của một họ các tập đại số là một tập đại số.*

Định nghĩa 2.1.3. Chúng ta định nghĩa ***không gian tôpô Zariski*** trên $\mathbb{A}^n$ bởi lấy các tập mở là phần bù của các tập đại số.

Ví dụ 2.1.4. Không gian tôpô Zariski trên đường thẳng affine $\mathbb{A}^1$. Các tập đóng là tập nghiệm của một hệ phương trình đa thức một ẩn nào đó, nên chỉ có thể là tập rỗng, các tập hữu hạn hoặc toàn bộ $\mathbb{A}^1$.

Định nghĩa 2.1.5. Một tập con khác rỗng Y của một không gian tôpô X là bất khả quy nếu nó không thể biểu diễn được là hợp của hai tập con đóng trong Y. Tập rỗng không được xét là tập bất khả quy.

Định nghĩa 2.1.6. Một ***đa tạp affine*** là một tập đại số bất khả quy trong $\mathbb{A}^n$.

Ví dụ 2.1.7. $\mathbb{A}^1$ là một tập bất khả quy, nó không thể là hợp của hai tập đóng, bởi vì các tập đóng trong $\mathbb{A}^n$ là hữu hạn. Do đó $\mathbb{A}^1$ là một đa tạp affine.

Định lý 2.1.8. *(Hilbert's Nullstellensatz). Cho $\mathfrak{a}$ là một iđêan trong $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, cho f là một đa thức triệt tiêu trên $Z(\mathfrak{a})$. Khi đó $f^r \in \mathfrak{a}$ với r là một số nguyên lớn hơn 0 nào đó.*

Xem [10], trang 36.

Mệnh đề 2.1.9.

(a) Nếu $T_1 \subseteq T_2$ là các tập con của A thì $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$.

(b) Nếu $Y_1 \subseteq Y_2$ là các tập con của $\mathbb{A}^n$ thì $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

(c) Nếu $\mathfrak{a}$ là một idean nguyên tố của A thì $I(Z(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$.

Chứng minh. (c) Theo Định lí 2.1.8 thì chúng ta có

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Vì $\mathfrak{a}$ là idean nguyên tố nên $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. Do đó

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}.$$

□

Mệnh đề 2.1.10. *Tồn tại tương ứng một-một giữa các tập đại số của trong $\mathbb{A}^n$ và tập các idean căn trong vành đa thức A. Hơn nữa, một tập đại số là bất khả quy khi và chỉ khi idean của tập đó là một idean nguyên tố.*

Chứng minh. Xem [9], trang 4, hoặc [10], trang 37. □

Hệ quả 2.1.11. *Một idean cực đại $\mathfrak{m}$ của vành đa thức $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ tương ứng với một đa tạp affine tối tiểu của $\mathbb{A}^n$, và đó là một điểm trong $\mathbb{A}^n$. Do đó idean cực đại $\mathfrak{m}$ của A có dạng*

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

với các $a_i \in k$.

Định nghĩa 2.1.12. Cho X là một không gian tôpô, định nghĩa ***số chiều*** của X (kí hiệu $dimX$) là supremum của tất cả các số tự nhiện n sao cho tồn tại dãy lồng nhau $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ các tập đóng bất khả quy phân biệt trong X. Chúng ta định nghĩa ***số chiều*** của một đa tạp affine là số chiều của đa tạp đó trên không gian tôpô Zariski.

Ví dụ 2.1.13. Từ định nghĩa chúng ta suy ra $dim(\mathbb{A}^1) = 1$.

Định nghĩa 2.1.14. Cho vành R, cho $\mathfrak{p}$ là một idean nguyên tố của R. Định nghĩa ***độ cao*** của $\mathfrak{p}$ (kí hiệu $ht(\mathfrak{p})$) là supremun của tất cả các số tự nhiên n sao cho tồn tại một dãy lồng nhau $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ của các idean phân biệt. Chúng ta định nghĩa ***số chiều*** của R (Krull dimension) là supremum của độ cao của tất các các idean nguyên tố trong R.

Bổ đề 2.1.15. $dimA = dim(k[x_1, x_2, \ldots, x_n]) = dim(k) + n = n.$

Định nghĩa 2.1.16. Cho $Y \subseteq$ là một tập đại số của $\mathbb{A}^n$, chúng ta định nghĩa vành tọa độ của Y (kí hiệu $A(Y)$) bởi

$$A(Y) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) = A/I(Y).$$

Nhận xét: nếu Y là một đa tạp affine thì $I(Y)$ là một idean nguyên tố, do đó vành tọa độ $A(Y)$ là một miền nguyên.

Mệnh đề 2.1.17. *Cho Y là một đa tạp affine của $\mathbb{A}^n$, cho $\mathfrak{a}$ là một idean nguyên tố của A. Khi đó*

(a) $dim(Y) = dim(A(Y))$.

(b) $ht(\mathfrak{a}) + dim(A/\mathfrak{a}) = dimA$.

(c) $dimY = n - ht(I(Y))$.

Chứng minh.

(a) Xem [9], trang 6.

(b) Xem [9], trang 6.

(c) Suy ra từ Bổ đề 2.1.15, (a) và (b).

□

Hệ quả 2.1.18. *Từ Mệnh đề 2.1.17 ta suy ra* $dim(\mathbb{A}^n) = n$.

Mệnh đề 2.1.19. *Cho Y là một đa tạp affine trong $\mathbb{A}^n$. Cho U là một tập mở trong Y, khí đó U là bất khả quy và trù mật trong Y, hơn nữa* $dimU = dim\overline{U}$.

Chứng minh. □

2.2 Đa tạp xạ ảnh

Cho không gian affine $\mathbb{A}^{n+1} = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) : a_i \in k\}$. Quan hệ $\sim$ trên $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ được định nghĩa bởi

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \text{ với mọi } \lambda \neq 0, \lambda \in k.$$

Chúng ta có quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương, chúng ta kí hiệu lớp tương đương của $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ là $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$. Tập tất cả các lớp này được gọi là n-***không gian xạ ảnh*** trên trường k. Kí hiệu $\mathbb{P}^n$. Như vậy, $\mathbb{P}^n$ là tập tất cả các đường thẳng đi qua gốc tọa độ trong $(n+1)-$không gian affine $\mathbb{A}^{n+1}$.

Kí hiệu S là vành đa thức $k[x_0, \ldots, x_n]$. Xem S như là một vành phân bậc, định nghĩa S_d tập tất cả các đa thức thuần nhất bậc d, chú ý rằng có tất cả $\binom{n+d}{n}$ đơn thức thuần nhất bậc d. Khi đó S là tổng trực tiếp của các nhóm abel S_d,

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d.$$

Nếu f là một đa thức thuần nhất bậc d trong S, thì với mọi $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ chúng ta có

$$f(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, a_1, \ldots, a_n), \forall \lambda \in k.$$

Một idean $\mathfrak{a}$ của S được gọi là một ***idean thuần nhất*** nếu nó được sinh bởi hữu hạn các đa thức thuần nhất.

Định nghĩa 2.2.1. Một tập con Y của $\mathbb{P}^n$ được gọi là một ***tập xạ ảnh*** nếu tồn tại một idean thuần nhất $\mathfrak{a}$ của S sao cho

$$Y = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n : f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ với mọi } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Kí hiệu $Y = Z_p(\mathfrak{a})$.

Mệnh đề 2.2.2. *Hợp của hai tập xạ ảnh là một tập xạ ảnh. Giao của một họ tùy ý các tập xạ ảnh là một tập xạ ảnh. Tập rỗng và cả không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ là các tập xạ ảnh.*

Định nghĩa 2.2.3. Chúng ta định nghĩa ***tôpô Zariski*** trên $\mathbb{P}^n$ bởi lấy các tập mở là phần bù của các tập xạ ảnh.

Định nghĩa 2.2.4. Một tập xạ ảnh được gọi là một ***đa tạp xạ ảnh*** nếu nó bất khả quy trong $\mathbb{P}^n$.

Trong $\mathbb{P}^n$, chúng ta xét các tập mở

$$U_i = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n : a_i \neq 0\} = \mathbb{P}^n \setminus Z(x_i), i = 0, \dots, n.$$

Chú ý rằng $\overline{U_i} = \mathbb{P}^n$ (vì mọi tập mở của một không gian tôpô bất khả quy là trù mật và bất khả quy).

Mệnh đề 2.2.5. *Xem U_i như là một tôpô không gian con của $\mathbb{P}^n$. Khi đó $U_i, \mathbb{A}^n$ là đồng phôi với nhau.*

Mệnh đề 2.2.6. *Cho Y là một tập xạ ảnh của $\mathbb{P}^n$. Khi đó Y được phủ bởi các tập mở $Y \cap U_i, i = o, \dots, n$.*

Định nghĩa 2.2.7. Với mọi tập con Y của $\mathbb{P}^n$, chúng ta định nghĩa ***idean thuần nhất của*** Y, kí hiệu $I(Y)$, là idean được sinh bởi tập

$$\{f \in S : f \text{ là đa thức thuần nhât và } f(P) = 0 \text{ với mọi } P \in Y\}.$$

Chý ý rằng khi $Y = \emptyset$ thì $I(Y) = S$, nhưng $Z_p(S) = Z_p(S_+) = \emptyset$, trong đó $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$.

Nếu Y là một tập xạ ảnh, chúng ta định nghĩa ***vành tọa độ thuần nhất của*** Y là

$$S(Y) = S/I(Y) = k[x_0, \dots, x_n]/I(Y).$$

Định lý 2.2.8. *Homogeneous Nullstellenzat. Cho a là một idean thuần nhất của S. Cho f là một đa thức thuần nhất bậc dương. Khi đó nếu $f(P) = 0$ với mọi $P \in Z_p(\mathfrak{a})$, thì tồn tại số nguyên dương r sao cho $f^r \in \mathfrak{a}$, tức là $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Chứng minh. Chúng ta có $Z(\mathfrak{a})$ là một tập đại số của không gian $\mathbb{A}^{n+1}$.

Lấy điểm $Q = (q_0, \dots, q_n) \in Z(\mathfrak{a}) \setminus \{O = (0, 0, \dots, 0)\}$, chúng ta có $g(Q) = 0, \forall g \in \mathfrak{a}$. Từ đó suy ra lớp tương đương $(q_0 : \cdots : q_n) \in Z_p(\mathfrak{a})$. Nên chúng ta có $f(Q) = 0$.

Vì $\mathfrak{a}$ là một idean thuần nhất nên $O \in Z(\mathfrak{a})$. Vì f là một đa thức thuần nhất nên $f(O) = 0$. Do đó $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$. Bởi Định lí 2.1.8, chúng ta có $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Hệ quả 2.2.9. *Có một sự tương ứng $1 - 1$ giữa các tập xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n$ và các idean căn của S khác S_+, được cho bởi $Y \mapsto I(Y)$ và $\mathfrak{a} \mapsto Z_p(\mathfrak{a})$. Một tập xạ ảnh là bất khả quy khi và chỉ khi $I(Y)$ là idean nguyên tố, từ đó suy ra $\mathbb{P}^n$ là bất khả quy.*

Định nghĩa 2.2.10. Trong không gian affine $\mathbb{A}^{n+1}$, cho tập đại số $C = Z(\mathfrak{a})$, với $\mathfrak{a}$ là một idean căn của vành tọa độ $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Khi đó C được gọi là một ***nón*** nếu $\mathfrak{a}$ là một iedan thuần nhất.

Như vậy, với mỗi nón của không gian affine $\mathbb{A}^{n+1}$, chúng ta có một tập xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n$. Để xem xét chiều ngược lại, chúng ta đến với mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2.11. *Cho Y là một tập xạ ảnh khác rỗng của không gian $\mathbb{P}^n$, cho ánh xạ θ được định nghĩa như sau*

$$\begin{aligned}\theta : \mathbb{A}^{n+1} - \{O = (0, 0, \dots, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n\\ (a_0, a_1 \dots, a_n) &\mapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_n).\end{aligned}$$

Khi đó tập

$$C(Y) = \theta^{-1}(Y) \cup \{O\}$$

là một tập đại số của $\mathbb{A}^{n+1}$.

Chứng minh. Chú ý rằng $\theta^{-1}(Y) \neq \emptyset$, $I(Y)$ là một idean thuần nhất của vành tọa độ $k[x_0, \dots, x_n]$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $C(Y) = Z(I(Y))$.

Lấy $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, thì

$$\theta^{-1}(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = \{\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} : \text{ với mọi } \lambda \in k \setminus \{0\}\}.$$

Lấy điểm $P = (a_0, \dots, a_n) \in C(Y)$, thì hoặc $P = O$ hoặc $P \in \theta^{-1}(Y)$. Vì $I(Y)$ là một idean thuần nhất nên $O \in Z(I(Y))$. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $P \in \theta^{-1}(Y)$. Khi đó chúng ta có $\theta(P) = (a_0 : \dots : a_n) \in Y$, suy ra $f((a_0, \dots, a_n)) = 0$ với mọi $f \in I(Y)$. Từ đó ta có $P \in Z(I(Y))$.

Ngược lại, nếu lấy điểm $P = (a_0, \dots, a_n) \in Z(I(Y)) \setminus \{O\}$, chúng ta có $f(P) = 0$ với mọi $f \in I(Y)$. Suy ra $(a_0 : \dots : a_n) \in Z_p(I(Y)) = Y$, do đó $P \in \theta^{-1}(Y) \subseteq C(Y)$. Nếu lấy $P = O \in Z(I(Y))$ thì $O \in C(Y)$.

Vậy $C(Y) = Z(I(Y))$ là một tập đại số, hơn nữa là một nón, $C(Y)$ được gọi là ***nón affine của*** Y.

□

Chú ý là nếu $Y = \emptyset$ thì $I(Y) = S = k[x_0, \dots, x_n]$, $\theta^{-1}(Y) = \emptyset$, nên $Z(I(Y)) = \emptyset \neq \theta^{-1}(Y) \cup \{O\}$.

Hệ quả 2.2.12. *Nếu Y là bất khả quy thì $I(Y)$ là idean thuần nhất nguyên tố, suy ra $C(Y) = Z(I(Y))$ là bất khả quy. Ngược lại, nếu $C(Y)$ bất khả quy thì $C(Y) \setminus \{O\}$ là bất khả quy. Vì θ là hàm liên tục nên $Y = \theta(C(Y) \setminus \{O\})$ là bất khả quy. θ là liên tục vì nghịch ảnh của tập đóng là tập đóng.*

Chương 3

Đa tạp toric

3.1 Afine toric

3.1.1 Đa tap afine Toric

Chúng ta kí hiệu vành của các đa thức Laurent bởi

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}].$$

Một đơn thức Laurent được kí hiệu bởi

$$\lambda z^\alpha = \lambda z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n},$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, f *là một đa thức Laurent nếu*

$$f = \sum_\alpha \lambda_\alpha z^\alpha,$$

trong đó các $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, *và có hữu hạn các hệ số* λ_α *khác* 0.

Mệnh đề 3.1.1. *Ánh xạ* θ *được được định nghĩa bởi*

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}] \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto z^\alpha. \end{aligned}$$

Khi đó θ *là một đẳng cấu nhóm từ* $(\mathbb{Z}^n, +)$ *tới nhóm nhân của các đơn thức Laurent có hệ số là* 1 *(hay còn gọi là nhóm nhân của các monic).*

Chứng minh.

(i) θ là một đồng cấu nhóm. Với mọi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$, chúng ta có

$$\begin{aligned}\theta(\alpha+\beta) &= \theta(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n) = z^{\alpha_1+\beta_1} \dots z^{\alpha_n+\beta_n} \\ &= z^{\alpha} z^{\beta} = \theta(\alpha)\theta(\beta).\end{aligned}$$

(ii) θ là một đơn cấu. Lấy bất kì $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ sao cho $\theta(\alpha) = z^{\alpha} = 1$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, do đó $\alpha = 0$.

(iii) θ là một toàn cấu. Với mỗi monic $z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, lấy $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Do đó θ là một toàn cấu.

□

Định nghĩa 3.1.2. Cho $f = \sum_{\text{finite}} \lambda_\alpha z^\alpha$ là một đa thức Laurent. Chúng ta định nghĩa ***giá*** (support) của f là tập

$$\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z} : \lambda_\alpha \neq 0\}.$$

Mệnh đề 3.1.3. *Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ lồi, chặt trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó*

$$R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : supp(f) \subseteq S_\sigma\}$$

là một $\mathbb{C}-$đại số được sinh bởi hữu hạn các đơn thức Laurent.

Chứng minh. Theo Hệ quả 1.3.5, S_σ là một vị nhóm hữu hạn sinh, khi đó tồn tại các véctơ $a_1, \dots, a_k \in (\mathbb{R}^n)^*$ sao cho

$$S_\sigma = FGM(a_1, \dots, a_k).$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng R_σ được sinh bởi các monic $z^{a_1}, \dots, z^{a_k}$, có nghĩa là

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_k}].$$

Dễ thấy rằng $\text{supp}(z^{a_i}) = a_i \in S_\sigma, i = 1, \dots, k$, do đó các monic $z^{a_k} \in R_\sigma$. Chúng ta suy ra được rằng

$$\mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_k}] \subseteq R_\sigma.$$

Ngược lại, lấy bất kì $f = \sum \lambda_\alpha z^\alpha \in R_\sigma$, khi đó mỗi đơn thức khác 0 của f có dạng $\lambda_\alpha z^\alpha$ với $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^*, \alpha \in S_\sigma$. Vì thế nên tồn tại các số nguyên $n_1, \ldots, n_k$ sao cho

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} n_i a_i.$$

Suy ra

$$z^\alpha = \prod_{i=1}^{k} (z^{a_i})^{n_i}.$$

Từ đó, mỗi đơn thức của f thuộc $\mathbb{C}[z^{a_1}, \ldots, z^{a_k}]$, suy ra $f \in \mathbb{C}[z^{a_1}, \ldots, z^{a_k}]$. Vậy

$$R_\sigma \subseteq \mathbb{C}[z^{a_1}, \ldots, z^{a_k}].$$

□

Hệ quả 3.1.4. *Kí hiệu lại $u_i = z^{a_i}, i = 1, \ldots, n$. Định nghĩa đồng cấu vành Γ như sau*

$$\Gamma : \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_k] \longrightarrow R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_k]$$
$$\xi_i \mapsto u_i, i = 1, \ldots, n.$$

Với định nghĩa như vậy, chúng ta có Γ là một toàn cấu vành, đinh nghĩa, kí hiệu $I_\sigma = ker(\Gamma)$ là ***idean tương ứng với nón*** *σ trong vành tọa độ $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_k]$. Bởi định lý đẳng cấu vành thứ nhất, chúng ta suy ra*

$$\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_k]/I_\sigma \cong R_\sigma.$$

Idean I_σ được xác định như sau:

(i) Tìm tất cả các quan hệ phụ thuộc tuyến tính giữa các phần tử sinh của S_σ trên $\mathbb{Z}$. Số các quan hệ là hữu hạn, chúng tôi chúng minh vấn đề này trong mệnh đề tiếp theo. Mỗi quan hệ, chúng ta có thể viết lại như sau

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i, \nu_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(ii) Tác động θ vào mỗi vế, chúng ta được quan hệ giữa các tọa độ u_i như sau

$$\prod_{i=1}^{k} u_i^{\nu_i} = \prod_{i=1}^{k} u_i^{\mu_i}.$$

(iii) I_σ được sinh bởi các đa thức

$$\prod_{i=1}^{k} \xi_i^{\nu_i} - \prod_{i=1}^{k} \xi_i^{\mu_i}.$$

Mệnh đề 3.1.5. *Chứng minh kết quả (iii) của Hệ quả 3.1.4.*

Chứng minh. Lấy $f = \sum_\nu \lambda_\nu \xi^\nu \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_k] = \mathbb{C}[\xi]$, chú ý rằng các $\nu \in \mathbb{N}^k$. Chúng ta có

$$\begin{aligned} \Gamma(f) = f(u) &= \sum_\nu \lambda_\nu u^\nu \in \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_k] = \mathbb{C}[u]. \\ &= \sum_\nu \lambda_\nu z^{\nu.S}. \end{aligned}$$

Trong chứng minh, để dễ trình bày hơn, chúng tôi kí hiệu $\nu.S = \sum_{i=1}^{k} \nu_i a_i \in S_\sigma$. Giả sử rằng $\Gamma(f) = 0$. Chúng ta xét hai khả năng. Đầu tiên, nếu tất cả $\lambda_\nu = 0$, hiển nhiên ta có $f = 0$. Và nếu tồn tại $\lambda_v \neq 0$, điều này suy ra rằng phải tồn tại một $\mu \in \mathbb{N}^k$ sao cho $\lambda_\mu = -\lambda_\nu$ và $\nu.S = \mu.S$. Từ đó suy ra f được sinh bởi các đa thức $\xi^\nu - \xi^\mu$, như cách chúng ta đã mô tả ở Hệ quả 3.1.4 □

Hệ quả 3.1.6. *Vì vành của các đa thức Laurent là một miền nguyên, R_σ là một vành con của nó, nên R_σ cũng là một miền nguyên. Từ đẳng cấu trong Hệ quả 3.1.4, suy ra I_σ là một idean nguyên tố.*

Định nghĩa 3.1.7. Cho vành R, tập tất các idean cực đại của R được gọi là maximal spectrum của R, kí hiệu bởi spec R. Với mỗi idean $\mathfrak{a}$ của R, tập

$$V(\mathfrak{a}) = \{m \in \text{spec R} : \mathfrak{a} \subseteq m\}$$

là một tập con đóng của spec R. Tập tất cả các $V(\mathfrak{a})$, với $\mathfrak{a}$ là một idean của R, là một topô trên spec R. Topô này cũng được gọi là topô Zarisky.

Mệnh đề 3.1.8. *Cho V là một đa tạp affine trong $\mathbb{C}^n$, kí hiêu $I_V = I(V)$, chúng ta có tương ứng một-một giữa tập các điểm trong V và tập các idean cực đại trong vành đa thức $R_V = \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]/I_V$.*

Chứng minh. Xem [9], Định lý 3.2, trang 17.

$$V \longleftrightarrow \text{spec } (R_V)$$

□

Hệ quả 3.1.9. *Lấy topô Zarisky hai vế ta được*

$$V \cong spec\ (R_V).$$

Chú ý rằng vì V là một đa tạp, theo định nghĩa nó là bất khả quy, nên I_V là một iedan nguyên tố và $V = Z(I_V)$.

Định nghĩa 3.1.10. Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ, lồi, chặt. Định nghĩa, kí hiệu đa tạp afine toric của σ là

$$X_\sigma = \text{spec }(R_\sigma).$$

Mệnh đề 3.1.11. *Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ, lồi, chặt. Khi đó $X_\sigma = Z(I_\sigma)$, từ đó suy ra Định nghĩa 3.1.10 là một định nghĩa đúng.*

Chứng minh. Theo Hệ quả 3.1.4, chúng ra có

$$R_\sigma \cong \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I_\sigma, \text{ với một nguyên } k > 0 \text{ nào đó.}$$

Do đó, spec $(R_V) \cong$ spec $(\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I_\sigma) \cong Z(I_\sigma)$. Chúng ta suy ra được

$$X_\sigma \cong Z(I_\sigma).$$

Vì I_σ là idean bất khả quy nên $Z(I_\sigma)$ là bất khả quy, đo đó nó là một đa tạp, suy ra X_σ là một đa tạp afine. □

Mệnh đề 3.1.12. *Cho $a_1, \dots, a_k$ là các vectơ trong $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Một quan hệ tuyến tính trên $\mathbb{Z}$ là một bộ các số nguyên $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sao cho*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0.$$

khi đó, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ là một véctơ của một không gian véctơ, không gian véctơ này được sinh bởi hữu hạn các véctơ, mỗi phần tử sinh tương ứng với một quan hệ tuyến tính. Khi đó ta nói $a_1, \dots, a_k$ có hữu hạn các quan hệ tuyến tính trên $\mathbb{Z}$.

Chứng minh. Chúng ta xét trong cơ sở chuẩn tắc, giả sử rằng $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, với mọi $i = 1, \dots, k$. Suy ra $\alpha_i a_i = (\alpha_i a_{i1}, \alpha_i a_{i2}, \dots, \alpha_i a_{in})$, với mọi $i = 1, \dots, k$. Gọi A là ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

Khi đó,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0$$

khi và chỉ khi

$$\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \cdots + \alpha_k a_{ki} = 0, \textit{ với mọi } i = 1, \ldots, n.$$

Điều này tương đương với $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là nghiệm của phương trình

$$AX = 0.$$

Do đó, véctơ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ thuộc kernel(A), là một không gian tuyến tính có số chiều bằng k - rank$(a_1, \ldots, a_k)$. Vì các hệ số của ma trận A thuộc $\mathbb{Z}$ nên tồn tại một cơ sở của không gian con kernel(A) mà tất cả các véctơ sinh có tọa độ nguyên. □

Mệnh đề này có ý nghĩa quan trọng trong việc xây dựng thuật toán tìm Idean I_σ tương ứng với nón σ. Thuật toán như sau:

Hệ quả 3.1.13. *Thuật toán tìm Idean I_σ tương ứng với nón σ.*

Input: Nhập các véctơ sinh của nón σ.

B1: Kiểm tra nón vừa nhập có là một đa diện hữu tỉ lồi, chặt. Nếu sai yêu cầu nhập lại các véctơ của nón, đúng chuyển B 2.

B2: Tìm nón đối ngẫu $\overset{\vee}{\sigma}$ của nón σ vừa nhập. Chuyển B3.

B3: Tìm $\overset{\vee}{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$. Xuất ra các véctơ hàng. Chuyển B4.

B4: Xếp các véctơ vừa có được ở B3 theo cột để được ma trận A. Chuyển B5.

B5: Tìm cơ sở của kernel (A). (Xuất kết quả theo véctơ hàng. Đó là tất cả các quan hệ tuyến tính của các tọa độ.)

Output: Xuất ideal I_σ. (Xem Hệ quả 3.1.4).

Trong luận văn, chúng tôi giới thiệu công cụ SageMath để tính toán. Các chương trình con có sẵn là

(i) *Định dạng nón, ví dụ*

sage: `cone=Cone([(-2,1),(0,1)])`

(ii) *Kiểm tra tính lồi, chặt*

sage: `cone.is_strictly_convex()`

(iii) *Tìm nón đối ngẫu*

sage: `dualcone=cone.dual()`

(iv) $\overset{\vee}{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$.

sage: `dualcone.Hilbert_basis()`

(v) Tìm cơ sở của kernel (A)

sage: `A.right_kernel()`

3.1.2 Xuyến đại số n chiều

Ví dụ 3.1.14. Cho nón $\sigma = \{0\}$ trong không gian $\mathbb{R}^n$, dễ thấy là σ là một nón đa diện lồi chặt, $\overset{\vee}{\sigma} = (\mathbb{R}^n)^*$, do đó $S_\sigma = (\mathbb{R}^n)^* \cap (\mathbb{Z}^n)^*$. Chúng ta có hai cách chọn tập sinh của S_σ.

$$A_1 = \{e_1^*, \ldots, e_n^*, -e_1^*, -e_n^*\}; A_2 = \{e_1^*, \ldots, e_n^*, -e_1^* - e_2^* \cdots - e_n^*\}.$$

Nếu $S_\sigma = FGM(A_1)$, thì

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z_1^1, \ldots, z_n^1, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}].$$

Chúng ta có kernel$(A_1) = 2n - n = n$, theo Mệnh đề 3.1.12, chúng ta có idean $I_\sigma \subseteq \mathbb{C}[\xi_1, \ldots \xi_{2n}]$ được xây dựng trên đúng n quan hệ tuyến tính, đó là

$$I_\sigma = (\xi_1\xi_n - 1, \ldots, \xi_n\xi_{2n} - 1).$$

Theo Mệnh đề 3.1.11, afine toric tương ứng với nón σ là

$$\begin{aligned} X_\sigma &= Z(\xi_1\xi_n - 1, \ldots, \xi_n\xi_{2n} - 1) \subseteq \mathbb{C}^{2n} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}) \in \mathbb{C}^{2n} : (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{C}^*)^n\}. \end{aligned}$$

Phép chiếu π_1 được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{C}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (x_1, \ldots, x_{2n}) &\longmapsto (x_1 \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Chúng ta có $\pi_1(X_\sigma) = (\mathbb{C}^*)^n$, hay $X_\sigma \cong (\mathbb{C}^*)^n$.
Nếu $S_\sigma = FGM(A_2)$, thì

$$R'_\sigma = \mathbb{C}[z_1^1, \ldots, z_n^1, (z_1 \ldots z_n)^{-1}].$$

Chúng ta có kernel$(A_2) = n + 1 - n = 1$, theo Mệnh đề 3.1.12, chúng ta có idean $I'_\sigma \subseteq \mathbb{C}[\xi_1, \ldots \xi_{n+1}]$ được xây dựng trên đúng 1 quan hệ tuyến tính, đó là

$$I'_\sigma = (\xi_1 \ldots \xi_{n+1} - 1).$$

Theo Mệnh đề 3.1.11, afine toric tương ứng với nón σ là

$$X'_\sigma = Z(\xi_1 \dots \xi_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}.$$

Thông qua phép chiếu lên n tọa độ đầu từ $\mathbb{C}^{n+1}$ tới $\mathbb{C}^n$, chúng ta cũng có $X'_\sigma \cong (\mathbb{C}^*)^n$.

Định nghĩa 3.1.15. Tập $\mathbb{T}_n = (\mathbb{C}^*)^n$ được gọi là ***xuyến đại số*** n chiều.

Hệ quả 3.1.16. *$\mathbb{T}_n$ là một tập đóng trong các không gian afine $\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^{n+1}$, nhưng là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$.*

Định lý 3.1.17. *Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ lồi chặt trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó afine toric X_σ chứa xuyến $\mathbb{T}_n$ như một tập mở Zariski trù mật.*

Chứng minh. Giả sử rằng $S_\sigma = FGM(a_1, \dots, a_k)$, và $X_\sigma = Z(I_\sigma) \subseteq \mathbb{C}^k$. Chúng ta giả sử tọa độ của mỗi véctơ a_i có dạng $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$, các tọa độ $a_i^j \in \mathbb{Z}$, với mọi $i = 1, \dots, k$. Lấy phần tử $t = (t_1 \dots, t_n) \in \mathbb{T}_n$, thì $t_i \in \mathbb{C}^*$. Chúng ta viết

$$t^{a_i} = t_1^{a_i^1} \dots t_n^{a_i^n} \in \mathbb{C}^*, \text{với mọi } i = 1, \dots, k.$$

Với mỗi quan hệ tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i, \nu_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

chúng ta có

$$\begin{aligned}(t^{a_1})^{\nu_1} \dots (t^{a_k})^{\nu_k} &= t^{\nu_1 a_1 + \dots \nu_k a_k} = t^{\mu_1 a_1 + \dots \mu_k a_k} \\ &= (t^{a_1})^{\mu_1} \dots (t^{a_k})^{\mu_k}.\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k})$ thõa mãn thức $\xi_1^{\nu_1} \dots \xi_k^{\nu_k} = \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_k^{\mu_k}$. Kết quả đúng với mọi quan hệ tuyến tính, nên $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k})$ thõa mãn mọi đa thức sinh I_σ. Do đó, $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in X_\sigma$.

Phép nhúng h từ $\mathbb{T}$ vào X_σ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} h : \mathbb{T}_n &\longrightarrow X_\sigma \\ t = (t_1 \dots, t_n) &\longmapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_k}). \end{aligned}$$

Vì $t^{a_i} \in \mathbb{C}^*$, nên $h(t) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$.

Lấy $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{T}_n$. Giả sử rằng $h(x) = h(y)$, khi đó ta có

$$(x^{a_1}, \dots, x^{a_k}) = (y^{a_1}, \dots, y^{a_k}).$$

Kí hiệu $\frac{x}{y} = (\frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_n}{y_n})$. Suy ra được rằng

$$((\frac{x}{y})^{a_1}, \dots, (\frac{x}{y})^{a_k}) = (1, \dots, 1).$$

Tồn tại véctơ $b \in S_\sigma$ sao cho $b + e_i^* \in S_\sigma$, với mọi $i = 1, \dots, n$. Lấy $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}_n$ sao cho $h(t) = (t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) = (1, \dots, 1)$. Chúng ta cần chứng minh $t_i = 1$, với mọi i. Vì $t^{a_i} = 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$, chúng ta suy ra được $t^a = 1$ với mọi $a \in S_\sigma$. Do đó

$$t^b = t^{b+e_i^*} = 1, \text{với mọi } i = 1, \dots, n.$$

Vì vậy, chúng ta có

$$t^{b+e_i^*} = t^b t^{e_i^*} = t_i = 1, \text{với mọi } i = 1, \dots, n.$$

Áp dụng kết quả này với x, y, chúng ta có $\frac{x}{y} = (1, \dots, 1)$. Kết luận được $x = y$. Vì vậy h là một đơn ánh.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh rằng $h(\mathbb{T}_n) = X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$. Giả sử rằng

$$b = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_k a_k, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Lấy bất kì $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$, chúng ta tìm $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}n$ sao cho $h(t) = x$, có nghĩa, t là nghiệm của hệ các phương trình $t^{a_i} = x_i$, với mọi $i = 1, \dots, n$. Chúng ta có

$$t^b = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_k} \neq 0.$$

Vì $b+e_i^* \in S_\sigma$ nên chúng ta cũng tính toán được các $t^{b+e_i^*} \neq 0$ theo $x_1, \dots, x_k$. Mặt khác, vì $t^{b+e_i^*} = t^b t_i$, nên ta suy ra được rằng

$$t_i = \frac{t^{b+e_i^*}}{t^b} \neq 0, \text{với mọi } i = 1, \dots, n.$$

Vậy $h : \mathbb{T}_n \longrightarrow X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ là một song ánh. Vì $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ là tập con mở trù mật trong X_σ, nên định lý được chứng minh xong. □

Ví dụ 3.1.18. Chúng ta làm tiếp với Ví dụ 1.3.6, với $\sigma = Conv(-2e_1+e_2, e_2)$, chúng ta đã có $S_\sigma = FGM(-e_1^*, e_1^*+2e_2^*, e_2^*)$. Chúng ta có duy nhất một quan hệ tuyến tính là $-e_1^* + (e_1^* + e_2^*) = 2e_2^*$. Nên

$$I_\sigma = (\xi_1\xi_2 - \xi_3^2).$$

Do đó,

$$X_\sigma = Z(I_\sigma) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1x_2 = x_3^2\}.$$

Ví dụ 3.1.19. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, cho nón đa diện hữu tỉ

$$\sigma = Conv(e_1, \ldots, e_p), \text{với } p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_\sigma &= Conv(e_1^*, \ldots, e_p^*, e_{p+1}^*, -e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*, -e_n^*) \\ &= Conv(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_{p+2(n-p)}) \end{aligned}$$

Từ tập sinh của S_σ, chúng ta suy ra được có $n-p$ quan hệ tuyến tính, và tính được idean tương ứng với σ như sau:

$$I_\sigma = (\xi_{p+1}\xi_{p+2} - 1, \xi_{p+3}\xi_{p+4} - 1, \ldots, \xi_{2n-p-1}\xi_{2n-p} - 1) \subseteq \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_{2n-p}].$$

Do đó, mô tả của afine toric X_σ trong $\mathbb{C}^{2n-p}$ như sau:

$$\begin{aligned} X_\sigma &= Z(I_\sigma) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_{n+p}) \in \mathbb{C}^{n+p} : x_{p+1}x_{p+2} = 1, x_{p+3}x_{p+4} = 1, \ldots, x_{2n-p-1}x_{2n-p} = 1\} \\ &\cong \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_{p+1}, \ldots, x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Vậy $X_\sigma \cong \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$.

3.2 Fan và Toric

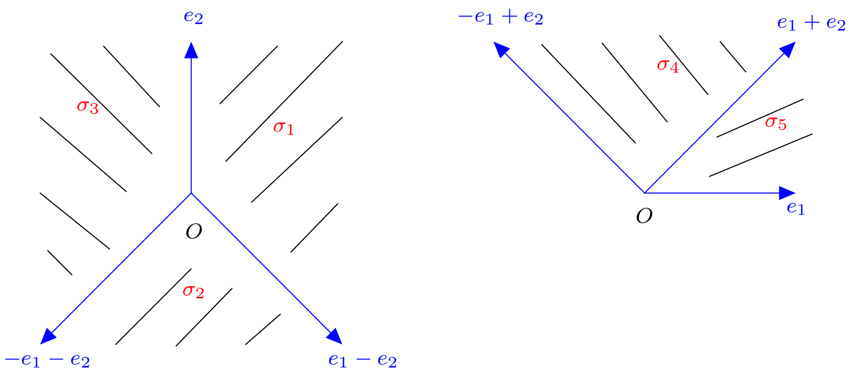
3.2.1 Fan

Định nghĩa 3.2.1. *Fan* Δ là một tập của các nón đa diện hữu tỉ chặt trong không gian $\mathbb{R}^n$ thõa mãn các điều kiện sau:

(i) Mỗi mặt của một nón trong Δ là một nón trong Δ.

(ii) Giao của hai nón trong Δ là một mặt của mỗi nón đó.

Ví dụ 3.2.2. Một số fan trong $\mathbb{R}^2$.



Hình 3.1: Fan trong $\mathbb{R}^2$.

3.2.2 Đa tạp toric

Lấy τ là một mặt của nón σ, khi đó, theo Mệnh đề 1.2.6, tồn $\lambda \in S_\sigma$ sao cho

$$\overset{\vee}{\tau} = \overset{\vee}{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}.(-\lambda).$$

Từ Mệnh đề **??**, chúng ta có

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_+.(-\lambda).$$

Do vậy, nếu chúng ta giả sử rằng

$$S_\sigma = FGM(a_1, \dots, a_k, \lambda),$$

thì

$$S_\tau = FGM(a_1, \ldots, a_k, \lambda, -\lambda).$$

Từ Mệnh đề 3.1.12, chúng ta suy ra được rằng có $k+1-n$ quan hệ tuyến tính trên các véctơ $a_1, \ldots, a_k, \lambda$, và có $k+2-n$ quan hệ tuyến tính trên các véctơ $a_1, \ldots, a_k, \lambda, -\lambda$, dễ thấy rằng một quan hệ trên tập sinh của S_τ mà không có trên tập sinh của S_σ là $\lambda + (-\lambda) = 0$. Do đó, nếu chúng ta giả sử

$$I_\sigma = (f_1, \ldots, f_{k+1-n}) \subset \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}],$$

thì

$$I_\tau = (f_1, \ldots, f_{k+1-n}, \xi_{k+1}\xi_{k+2} - 1) \subset \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_{k+2}].$$

Chúng ta có các afine toric $X_\sigma = Z(I_\sigma) \subseteq \mathbb{C}^{k+1}$ và $X_\tau = Z(I_\tau) \subseteq \mathbb{C}^{k+2}$. Khi đó xét phép chiếu

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C}^{k+2} &\longrightarrow \mathbb{C}^{k+1} \\ (x_1, \ldots, x_{k+2}) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{k+1}) \end{aligned}$$

Và phép chiếu p cho chúng ta ảnh của X_τ trong X_σ,

$$p(X_\tau) = \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in X_\sigma : x_{k+1} \neq 0\} = X_\sigma \setminus \{x_{k+1} = 0\}.$$

Do đó, chúng ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 3.2.3. $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{x_{k+1} = 0\}$.

Hệ quả 3.2.4. *Giả sử rằng τ là một mặt chung của hai nón σ, σ', và $\sigma \cap \sigma' = \tau$. Bởi Ví dụ 3.2.3, chúng ta có một đẳng cấu*

$$\varphi_{\sigma,\sigma'} : X_\sigma \setminus \{x_k \neq 0\} \xrightarrow{\cong} X_\tau \xrightarrow{\cong} X_{\sigma'} \setminus \{x_l \neq 0\}.$$

$\varphi_{\sigma,\sigma'}$ được gọi là ánh xạ dán. Đẳng cấu này cho phép chúng ta dán X_σ và X'_σ với nhau ngang qua X_τ, phép dán này cho ta một đa tạp mới.

Định nghĩa 3.2.5. Cho Δ là một fan trong $\mathbb{R}^n$, kí hiệu tập $X = \coprod_{\sigma \in \Delta} X_\sigma$ hợp rời rạc các afine toric. Chúng ta định nghĩa quan hệ $\equiv$ trên X, lấy hai phần tử x, x' trong X, định nghĩa $x \equiv x'$ nếu tồn tại hai nón $\sigma \ni x, \sigma' \ni x'$ trong Δ sao cho $\varphi_{\sigma,\sigma'}(x) = x'$.

Mệnh đề 3.2.6. *Quan hệ $\equiv$ là một quan hệ tương đương trên* $\coprod_{\sigma\in\Delta} X_\sigma$.

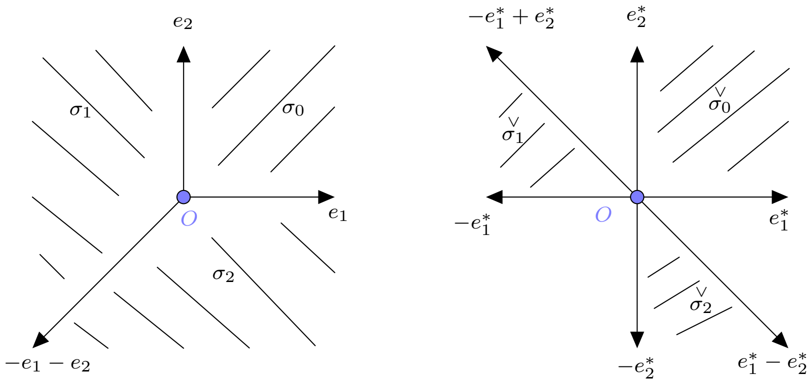
Định nghĩa 3.2.7. Cho Δ là một fan trong $\mathbb{R}^n$, khi đó không gian

$$\coprod_{\sigma\in\Delta} X_\sigma / \equiv$$

được gọi là một *đa tạp toric*, kí hiệu X_Δ. Nó thực sự là một đa tạp vì không gian là kết quả của phép dán các đa tạp với nhau (Bổ đề dán, xem [9], chương II, bài tập 2.12). X_Δ được phủ bởi các tập mở là các affine toric X_σ, với mọi $\sigma \in \Delta$.

3.2.3 Một số ví dụ

Ví dụ 3.2.8. Cho fan trong $\mathbb{R}^2$ được mô tả như hình sau:



Hình 3.2: Fan trong $\mathbb{R}^2$.

Chúng ta có:

$$S_{\sigma_0} = FGM(e_1^*, e_2^*) \Longrightarrow R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2] \Longrightarrow X_{\sigma_0} = \mathbb{C}^2_{(z_1,z_2)},$$
$$S_{\sigma_1} = FGM(-e_1^*, -e_1^* + e_2^*) \Longrightarrow R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2] \Longrightarrow X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2_{(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)},$$
$$S_{\sigma_2} = FGM(-e_2^*, e_1^* - e_2^*) \Longrightarrow R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_2^{-1}, z_1z_2^{-1}] \Longrightarrow X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2_{(z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})}.$$

Đặt $z_1 = \frac{t_1}{t_0}, z_2 = \frac{t_2}{t_0}$, chúng ta có $z_1^{-1} = \frac{t_0}{t_1}, z_1^{-1}z_2 = \frac{t_2}{t_1}$ và $z_2^{-1} = \frac{t_0}{t_2}, z_1z_2^{-1} = \frac{t_1}{t_2}$. Khi đó chúng ta có các đẳng cấu sau:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^2_{(z_1,z_2)} &\cong U_0 = \{(t_0 : t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^2 : t_0 \neq 0\},\\
\mathbb{C}^2_{(z_1^{-1},z_1^{-1}z_2)} &\cong U_1 = \{(t_0 : t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^2 : t_1 \neq 0\},\\
\mathbb{C}^2_{(z_2^{-1},z_1z_2^{-1})} &\cong U_2 = \{(t_0 : t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^2 : t_2 \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Chúng ta sẽ dán X_{σ_0} và X_{σ_1} với nhau ngang qua X_{τ_0}, trong đó $\tau_0 = \sigma_0 \cap \sigma_1 = Conv(e_2)$. Phép dán được mô tả như sau:

$$\begin{aligned}
S_\sigma &= FGM(e_1^*, -e_1^*, e_2)\\
&= S_{\sigma_0} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*)\\
&= S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*)
\end{aligned}$$

.

Do đó, $X_{\tau_0} = \mathbb{C}^*_{z_1} \times \mathbb{C}_{z_2}$ trong X_{σ_0}, và $X_{\tau_0} = \mathbb{C}^*_{z_1^{-1}} \times \mathbb{C}_{z_1^{-1}z_2}$ trong X_{σ_1}. Từ đó chúng ta có đẳng cấu

$$X_{\sigma_0} \setminus \{z_1 = 0\} \cong X_{\tau_0} \cong X_{\sigma_1} \setminus \{z_1^{-1} = 0\}.$$

Để ý rằng nếu $z_1 \neq 0$ thì $t_1 \neq 0$ và nếu $z_1^{-1} \neq 0$ thì $t_0 \neq 0$. Chúng ta suy ra được

$$\begin{aligned}
X_{\sigma_0} \setminus \{z_1 = 0\} &\cong U_0 \setminus \{t_1 = 0\} = U_0 \cap U_1,\\
X_{\sigma_1} \setminus \{z_1^{-1} = 0\} &\cong U_1 \setminus \{t_0 = 0\} = U_0 \cap U_1.
\end{aligned}$$

Do đó, $X_{\tau_0} \cong U_0 \cap U_1$, dán X_{σ_0} và X_{σ_1} với nhau ngang qua X_{τ_0} được $U_0 \cup U_1 = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$.

Chứng minh tương tự, chúng ta có

$$X_{\sigma_i \cap \sigma_j} \cong U_i \cap U_j, \text{với mọi } i, j = 0, \ldots, 2.$$

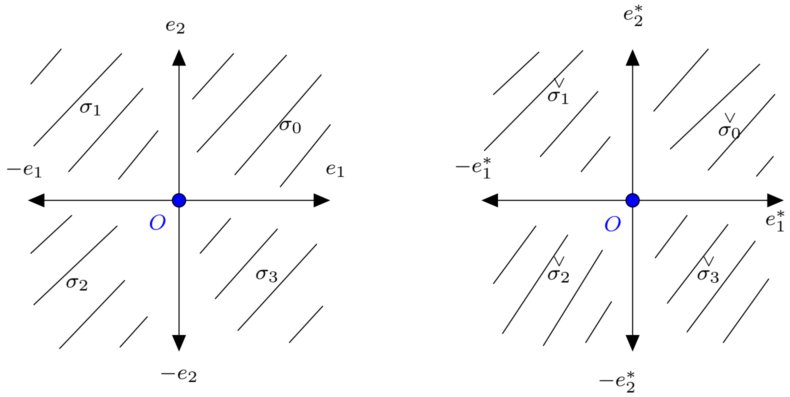
Do đó, chúng ta suy ra được $X_\Delta \cong \mathbb{P}^2$.

Mệnh đề 3.2.9. *Trong $\mathbb{R}^n$, lấy $n+1$ véctơ $v_0, \ldots, v_n$ là một tập sinh của $\mathbb{Z}^n$, thõa mãn rank$(v_0, \ldots, v_n) = n$ và $v_0 + \ldots, v_n = 0$. Lấy Δ là fan gồm tất cả các nón được sinh bởi các tập con thật sự của tập các véctơ $\{v_0, \ldots, v_n\}$. Khi đó $X_\Delta \cong \mathbb{P}^n$.*

Xem [11], trang 22, được phát biểu như một bài tập.

Hệ quả 3.2.10. *Trong Mệnh đề 3.2.9, chúng ta có thể chọn những véctơ $v_1, \ldots, v_n$ là hệ véctơ cơ sở $e_1, \ldots, e_n$, để thõa mãn điều kiền còn lại, chúng ta chọn $v_0 = -(e_1 + \cdots + e_n)$. Khi đó, chúng ta có một ví dụ cụ thể của fan tương ứng với không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$.*

Ví dụ 3.2.11. Trong $\mathbb{R}^2$, cho fan sau:



Hình 3.3: Fan Δ trong $\mathbb{R}^2$.

Chúng ta có $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}^2_{z_1,z_2}, X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2_{z_1^{-1},z_2}$, dán chúng lại với nhau được $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}_{z_2}$. Chúng ta cũng có $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{z_1^{-1},z_2^{-1}}, X_{\sigma_3} = \mathbb{C}^2_{z_1^{}z_2^{-1}}$, dán chúng lại ta được $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}_{z_2^{-1}}$. Cuối cùng, dán $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}_{z_2}$ và $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}_{z_2^{-1}}$ lại với nhau ta được $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Vậy $X_\Delta = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

3.3 Tác động xuyến và quỹ đạo

Định nghĩa 3.3.1. Xuyến $\mathbb{T}_n = (\mathbb{C}^*)^n$ là một nhóm với phép toán nhân. Lấy σ là một nón đa diện hữu tỉ chặt trong $\mathbb{R}^n$, tác động của $\mathbb{T}_n$ lên X_σ được định nghĩa như sau:

Giả sử rằng $S_\sigma = FGM(a_1, \ldots, a_k)$, trong đó a_i là các véctơ trong $(\mathbb{R}^n)^*$ với tọa độ là các số nguyên. Lấy $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}_n$, lấy $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X_\sigma$. Tác động của $\mathbb{T}_n$ lên X_σ là ánh xạ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t.x = (t^{a_1}x_1, \ldots, t^{a_k}x_k). \end{aligned}$$

Chúng ta có $X_\sigma = Z(I_\sigma)$, trong đó I_σ là một idean sinh bởi các đa thức có dạng $\xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_k^{\nu_k} - \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_k^{\mu_k}$, với $\nu_i, \mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Do đó, với bất kì

$x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k) \in X_\sigma$, thì $x.y = (x_1y_1, \ldots, x_ky_k) \in X_\sigma$. Nên X_σ cũng đóng với phép toán nhân.

Để ý rằng $t = (t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}) \in X_\sigma$, với mọi $t \in \mathbb{T}$, (xem phép nhúng h trong chứng minh của Định lý 3.1.17), do đó với bất kì $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X_\sigma$ thì chúng ta có $t.x \in X_\sigma$. Ta được một định nghĩa đúng.

Hệ quả 3.3.2. *Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ lồi chặt, khi đó*

$$X_\sigma = \textit{ spec } \mathbb{C}[S_\sigma] \cong \textit{ Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C}).$$

Trong đó, $Hom_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C})$ là tập của các đồng cấu vị nhóm từ S_σ tới $\mathbb{C}$. Vơi mỗi $x \in X_\sigma$, x tương ứng với một đồng cấu $\varphi \in Hom_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C})$ sao cho $\varphi(a) = z^a(x)$, với mọi $a \in S_\sigma$. Hơn nữa, nếu giả sử rằng S_σ được sinh bởi các véctơ $a_1, \ldots, a_k$ thì $\mathbb{C}[S_\sigma]$ được sinh bởi các đa thức Laurent $z^{a_1}, \ldots, z^{a_k}$, và $\varphi(a_i)$ là tọa độ thứ i của x, điều này có nghĩa là

$$x = (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

Xem [11], trang 16.

Định nghĩa 3.3.3. Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ và X_σ là afine totic liên kết với nón σ. Lấy τ là một mặt bất kì của σ, đồng cấu φ_τ được định nghĩa như sau:

$$\varphi_\tau(a) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } a \in \tau^\perp \\ 0 \text{ trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chúng ta có φ_τ thuộc $\mathrm{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C})$, bởi Hệ quả 3.3.2, φ tương ứng với một điểm trong X_σ. Chúng ta kí hiệu điểm này là x_τ, được gọi là điểm *đặt biệt* trong X_σ liên kết với mặt τ.

Mệnh đề 3.3.4. *Ánh xạ φ_τ trong Định nghĩa 3.3.3 là một đồng cấu vị nhóm từ S_σ tới $\mathbb{C}$.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.2.11, thì $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ là một mặt của $\check{\sigma}$. Lấy hai phần tử bất kì $a, b \in S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$. Chúng ta xét hai trường hợp:

Nếu cả hai véctơ $a, b \in \tau^\perp$, thì $a, b \in \check{\sigma} \cap \tau^\perp$, vì $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ là một mặt của $\check{\sigma}$ nên bản thân nó cũng là một nón đa diện, vì vậy $a + b \in \tau^\perp$. Nên chúng ta có

$$\varphi_\tau(a + b) = 1 = 1.1 = \varphi(a).\varphi(b).$$

Ngược lại, nếu một trong hai không thuộc $\tau^\perp$, không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a \ni \tau^\perp$, theo Mệnh đề 1.2.5, chúng ta suy ra được $a+b \ni \tau^\perp$. Do đó

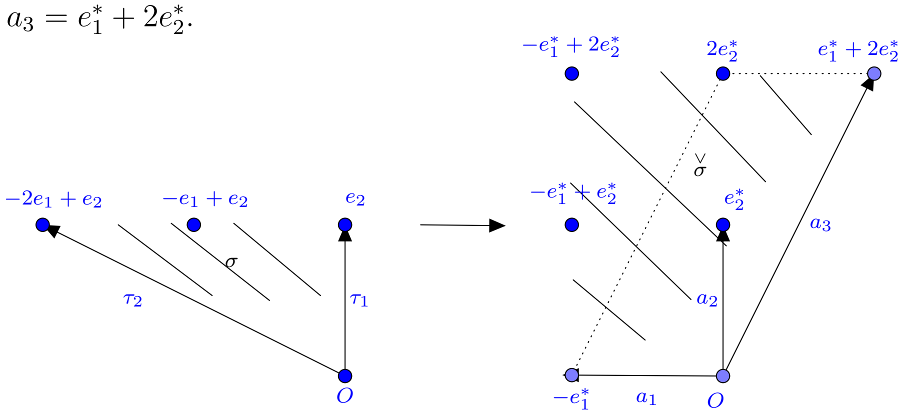
$$\varphi_\tau(a+b) = 0 = 0.\varphi(b) = \varphi(a).\varphi(b).$$

Như vậy, $\varphi_\tau \in \mathrm{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C})$. □

Định nghĩa 3.3.5. Lấy σ là một nón đa diện hữu tỉ chặt trong $\mathbb{R}^n$, lấy τ là một mặt của σ, quỹ đạo của $\mathbb{T}_n$ trong X_σ tương ứng với mặt τ là quỹ đạo của điểm đặt biệt x_τ, kí hiệu O_τ.

$$O_\tau = \{t.x_\tau : t \in \mathbb{T}_n\}.$$

Ví dụ 3.3.6. Trong Ví dụ 1.3.6, S_σ được sinh bởi $a_1 = -e_1^*, a_2 = e_2^*$ and $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$.



Hình 3.4: Nón σ trong trong $\mathbb{R}^2$.

Nón σ có tất cả bốn mặt là $\{0\}, \tau_1 = Conv(e_2), \tau_2 = Conv(-2e_1 + e_2)$ và σ. Chúng ta có $\{0\}^\perp = (\mathbb{R}^n)^*, \tau_1^\perp = \mathbb{R}a_1, \tau_2^\perp = \mathbb{R}a_3, \sigma^\perp = \{0\}$.

(i) Các điểm đặt biệt trong X_σ là:

$$\begin{aligned}
x_{\{0\}} &= (\varphi_{\{0\}}(a_1), \varphi_{\{0\}}(a_2), \varphi_{\{0\}}(a_3)) = (1,1,1),\\
x_{\tau_1} &= (\varphi_{\tau_1}(a_1), \varphi_{\tau_1}(a_2), \varphi_{\tau_1}(a_3)) = (1,0,0),\\
x_{\tau_2} &= (\varphi_{\tau_2}(a_1), \varphi_{\tau_2}(a_2), \varphi_{\tau_2}(a_3)) = (0,0,1),\\
x_\sigma &= (\varphi_{\tau_2}(a_1), \varphi_{\tau_2}(a_2), \varphi_{\tau_2}(a_3)) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

(ii) Các quỹ đạo tương ứng với mỗi mặt là:

$$\begin{aligned} O_{\{0\}} &= \{t.x_{\{0\}} | t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2\} \\ &= \{(t_1^{-1}, t_2, t_1 t_2^2) | (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\} \cong (\mathbb{C}^*)^2, \\ O_\sigma &= \{(0, 0, 0\}, \\ O_{\tau_1} &= \mathbb{C}^*_{\xi_1} \times \{0\} \times \{0\}, \\ O_{\tau_2} &= \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}^*_{\xi_3}. \end{aligned}$$

Bổ đề 3.3.7. *Cho σ là một nón, khi đó:*

(i) Nếu dim $(\sigma) = k$ thì $O_\tau \cong (\mathbb{C}^*)^{n-k}$.

(ii) $O_\sigma = Hom(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$.

Xem [11], trang 51.

Định lý 3.3.8. *Lấy σ là một nón đa diện hữu tỉ chặt trong $\mathbb{R}^n$, khi đó*

$$X_\sigma = \coprod_{\tau < \sigma} O_\tau,$$

trong đó, O_τ là quỹ đạo của điểm đặt biệt x_τ, với mọi mặt τ của σ.

Chứng minh. Bởi định nghĩa của quỹ đạo, chúng ta có $O_\tau \subset X_\sigma$ với mọi $\tau < \sigma$. Do đó chúng ta có

$$\coprod_{\tau < \sigma} O_\tau \subseteq X_\sigma.$$

Ngược lại, lấy bất kì $x \in X_\sigma$, chúng ta có x tương ứng với một đồng cấu vị nhóm $\varphi : S_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ thõa mãn $\varphi(a) = z^a(x)$. Do đó $\varphi(0) = 1(x) = 1$, suy ra được $\varphi^{-1}(\mathbb{C}^*) \neq \emptyset$.

Lấy mọi $a, b \in S_\sigma$ sao cho $a + b \in \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$, thì $\varphi(a+b) = \varphi(a).\varphi(b) \in \mathbb{C}^*$, do đó $a, b \in \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Theo Mệnh đề 1.2.5, tồn tại mặt τ' của $\overset{\vee}{\sigma}$ sao cho $\varphi^{-1}(\mathbb{C}^*) = \tau' \cap M$, bởi Mệnh đề 1.2.11, tồn tại mặt τ của σ sao cho

$$\varphi^{-1}(\mathbb{C}^*) = \overset{\vee}{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M.$$

Giả sử rằng $S_\sigma = FGM(a_1, \ldots, a_k)$, chúng ta có $x = (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$, từ lập luận trên suy ra $\varphi(a_i) = 0$ nếu $a_i \notin \tau^\perp$, và $\varphi(a_i) \neq 0$ nếu $a_i \in \tau^\perp$, với mọi $i = 1, \ldots, k$. Không mất tính tổng quát, chúng ta thay đổi lại thứ tự tọa độ các a_i sao cho $a_1, \ldots, a_s \in \tau^\perp, a_{s+1} \ldots, a_k \notin \tau^\perp$, với một s nào đó. Khi đó chúng ta có

$$x = (x_1, \ldots, x_s, 0, \ldots, 0), x_i \neq 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, s.$$

Chúng ý rằng, với thứ tự các a_i sau khi đã xếp lại, điểm đặt biệt tương ứng với mặt τ là

$$x_\tau = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0),$$

trong đó, $(x_\tau)_i = 1$ với mọi $i = 1, \ldots, s, (x_\tau)_i = 0$ với mọi $i = s+1, \ldots, k$.

Bởi định nghĩa của quỹ đạo, chúng ta có

$$\begin{aligned} O_\tau &= \{t.x_\tau : t \in \mathbb{T}_n\} \\ &= \{(t^{a_1}(x_\tau)_1, \ldots, t^{a_s}(x_\tau)_s, t^{a_{s+1}}(x_\tau)_{s+1}, \ldots, t^{a_k}(x_\tau)_k : t \in \mathbb{T}_n\} \\ &= \{(t^{a_1}, \ldots, t^{a_s}, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{T}_n\}. \end{aligned}$$

Để ý rằng phép nhúng $h : \mathbb{T} \longrightarrow X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ là một toàn ánh (phép nhúng h được định nghĩa trong chứng minh của Định lý 3.1.17), lấy $x' = (x_1, \ldots, x_s, 1, \ldots, 1)$, dễ thấy rằng $x' \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$, do đó tồn tại $t \in \mathbb{T}_n$ sao cho $t^{a_i} = x'_i$, với mọi $i = 1, \ldots, k$. Tính $t.x_\tau$, chúng ta có

$$t.x_\tau = (t^{a_1}, \ldots, t^{a_s}, 0, \ldots, 0) = (x'_1, \ldots, x'_s, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_s, 0, \ldots, 0) = x.$$

Vậy $x \in O_\tau$, và chúng ta suy ra được rằng

$$X_\sigma \subseteq \coprod_{\tau < \sigma} O_\tau.$$

$\square$

Chương 4

Vành Chow của đa tạp toric

Trong chương này, chúng tôi làm việc trên trường số phức $\mathbb{C}$, các lược đồ (scheme) loại hữu hạn trên $\mathbb{C}$. Mỗi đa tạp sẽ là một lược đồ nguyên (intergral scheme). Mỗi điểm trong lược đồ là một điểm đóng. Tất cả các đồng cấu giữa các lược đồ là các đồng cấu đa tạp trên $\mathbb{C}$. Tất cả các không gian véctơ và các không gian xạ ảnh được định nhĩa trên $\mathbb{C}$.

4.1 Vành Chow

Chú ý rằng nếu X là một lược đồ nguyên thì X là bất khả quy. Xem [9], Proposition 3.1, trang 82. Để bắt đầu, chúng tôi định nghĩa một chu trình đại số.

4.1.1 Chu trình đại số

Cho X là một lược đồ, một $k-$ **chu trình** trên X là một tổng hình thức hữu hạn $\sum n_i V_i$, với V_i là các đa tạp con $k-$chiều trong X, các n_i là trong $\mathbb{Z}$. Định nghĩa nhóm của các $k-$chu trình trên X, kí hiệu $Z_k(X)$, là một nhóm abel tự do trên trên các đa tạp con $k-$chiều của X. Chúng ta định nghĩa ***nhóm của các chu trình*** trên X là tổng trực tiếp của các nhóm $k-$chu tình trên X, kí hiêu $Z_*(X)$,

$$Z_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{dimX} Z_k(X).$$

Với một đa tạp con $k+1-$chiều bất kì của X, trường của các đa thức hữu tỉ trên W được kí hiệu bởi $R(W)$. Kí hiệu $R(W)^* = R(W) \setminus \{0\}$, chúng ta có

$R(W)^*$ là một nhóm với phép toán nhân. Lấy bất kì một $f \in R(W)^*$, chúng ta định nghĩa một $k-$chu trình của f trên X, kí hiệu $\mathrm{div}(f)$, bởi

$$\mathrm{div}(f) = \sum \mathrm{ord}_V(f)V,$$

trong đó tổng chạy qua tất cả các đa tạp con $k-$chiều của W, và ord_V cấp của hàm f trên $R(W)$ được định nghĩa bởi

$$\mathrm{ord}_V(f) = l_{\mathrm{O}_{W,V}}(\mathcal{O}_{W,V}/(f)),$$

trong đó $l_{\mathcal{O}_{W,V}}(\mathrm{O}_{W,V}/(f))$ là độ dài của $\mathrm{O}_{W,V}/(f)$ như một $\mathrm{O}_{W,V}-$môđun.

4.1.2 Quan hệ tương đương hữu tỷ

Chúng ta nói một $k-$chu trình c là ***quan hệ tương đương hữu tỉ*** với không, kí hiệu c 0 nếu có hữu hạn các đa tạp con $(k+1)-$chiều W_i của X, các $f_i \in R(W_i)^*$ sao cho

$$c = \sum \mathrm{div}(f_i).$$

Vì $\mathrm{div}(f^{-1}) = -\mathrm{div}(f)$, nên tập tất cả các $k-$chu trình sao cho mỗi chu trình là quan hệ tương đương hữu tỉ với 0, là một nhóm con của $Z_k(X)$, kí hiệu $Rat_k(X)$. Khi đó nhóm theo quan hệ hữu tỉ đồng dư của $k-$chu trình trên X là nhóm thương

$$A_k(X) = Z_k(X)/Rat_k(X).$$

4.1.3 Nhóm Chow

Nhóm

$$A_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{dimX} A_k(X)$$

được gọi là ***nhóm Chow*** của X.

Mỗi $k-$chu trình là một phần tử của $Z_*(X)$, mỗi lớp $k-$chu trình là một phần tử của $A_*(X)$. Lấy Y là một lược đồ con đóng của X, và $Y_1, \ldots, Y_t$ là các thành phần bất khả quy của Y. Khi đó mỗi Y_i là một chu trình, kí hiệu $[Y_i]$ là lớp chu trình của Y_i trong $A_*(X)$. ***Bội hình học*** m_i của Y_i trong Y được định nghĩa là độ dài của $\mathcal{O}_{X,Y_i}$ như một $\mathcal{O}_{X,Y_i}$-môđun. Chúng ta định nghĩa ***lớp chu trình cơ bản*** của Y bởi

$$[Y] = \sum_{i=1}^{t} m_i[Y_i].$$

Nếu $\dim(Y_i) = k$ với mọi $i = 1, \dots, t$ thì $[Y] \in A_k(X)$.

Giả sử rằng $dim X = n$ và X là bất khả quy, từ định nghĩa của $Rat_n(X)$, do không tồn tại đa tạp con của X có số chiều là $n+1$ nên $Rat_n(X) = 0$, do đó

$$A_n(X) \cong Z_n(X).$$

Mỗi đa tạp trong X mà khác X thì có số chiều bé hơn n, nên tập các $n-$chu trình chính là $\mathbb{Z}.X$. Do đó

$$A_n(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Để ý rằng nếu $k > n$ và $k < 0$ thì chúng ta có $A_k(X) = 0$. Với mỗi k, chúng ta kí hiệu lại như sau

$$A^k(X) = A_{n-k}(X),$$

và

$$A^*(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(X).$$

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ viết $A(X)$ thay vì $A_*(X)$ hay $A^*(X)$ ở những nơi mà cách biểu diễn của chúng là không quan trọng.

4.1.4 Bậc của một chu trình

Chúng tôi nhắc lại định nghĩa của một số tính chất của đồng cấu trong hình học đại số.

Định nghĩa 4.1.1. Cho X, Y là các lượt đồ và $f : X \longrightarrow Y$ là một đồng cấu từ X đến Y. Chúng ta nói rằng f là ***proper*** nếu nó là separated, của loại hữu hạn, và đóng universally

Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một đồng cấu proper, với mọi đa tạp con $k-$chiều V của X, đặt $W = f(V)$, chúng ta định nghĩa đồng cấu nhóm

$$\begin{aligned} f_* : Z_k(X) &\longrightarrow Z_k(Y) \\ V &\mapsto \begin{cases} [R(V) : R(W)]W & \text{nếu } \dim(W) = k \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại,} \end{cases} \end{aligned}$$

trong đó $[R(V) : R(W)]$ là bậc của mở rộng trường.

Định lý 4.1.2. *Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một đồng cấu proper, lấy c là một $k-$chu trình trên X sao cho c là quan hệ tương đương hữu tỉ với không. Khi đó $f_*(c)$ là một $k-$chu trình, hơn nữa, $f_*(c)$ là quan hệ tương đương hữu tỉ với không.*

Chứng minh. Xem [11], Định lý 1.4. □

Từ định lý này, chúng ta suy ra rằng f_* cảm sinh một đồng cấu nhóm Chow

$$f_* : A_*(X) \longrightarrow A_*(Y),$$

đồng cấu này được gọi là đồng cấu pushforward liên kết với f.

Định nghĩa 4.1.3. Cho lược đồ X là proper trên $Spec(\mathbb{C})$ (đồng cấu cấu trúc lược đồ $p : X \longrightarrow Spec(\mathbb{C})$ là một đồng cấu proper). Lấy c là một lớp $0-$chu trình trên X, ***bậc*** của c, kí hiệu $\int_X c$, được định nghĩa bởi

$$\int_X c = p_*(c).$$

Chú ý rằng $Spec(\mathbb{C}) = \{\text{idean } 0\}$, nên chúng ta có

$$A_0(Spec(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}.[Spec(\mathbb{C})] \cong \mathbb{Z}.$$

Giả sử rằng $c = \sum_i n_i[P_i]$, với các $P_i \in X$, chúng ta có trường các đa thức hữu tỉ $R(P_i) = \mathbb{C}(\frac{1}{(t-P_i)^{-1}})$, do đó, $[R(P_i) : \mathbb{C}] = 1$, ta kết luận rằng

$$p_*(c) = \sum_i n_i[R(P_i) : \mathbb{C}]p_*([P_i]).$$

Vì $p_*([P_i]) = [Spec(\mathbb{C})]$ với mọi i nên chúng ta có thể đồng nhất kết quả trên $\mathbb{Z}$ như sau

$$\int_X c = \sum_i n_i.$$

Hệ quả 4.1.4. *Tồn tại một đồng cấu nhóm f_0 từ lớp các 0-chu trình của X tới $\mathbb{Z}$ được định nghĩa bởi*

$$f_0 : A_0(X) \to \mathbb{Z}$$
$$\sum_{i=1}^{k} n_i[P_i] \mapsto \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Và dĩ nhiên là $f_0([0]) = 0$, điều này chỉ ra rằng nếu lớp chu trình $\sum_{i=1}^{k} n_i[P_i] = [0]$ thì $\sum_{i=1}^{k} n_i = 0$.

4.1.5 Vành Chow

Định nghĩa 4.1.5. Cho X là một đa tạp

(i) Chúng ta nói rằng hai lược đồ đồ con bất khả quy A và B là ***dimensionally transverse*** nếu với mọi thành phần bất khả quy C của $A \cap B$ chúng ta có

$$codim(C) = codim(A) + codim(B).$$

(ii) Chúng ta nói rằng hai đa tạp con A và B của X là ***transverse*** tại điểm P nếu tất cả chúng là trơn tại P, và không gian tiếp tuyến của A và B tai điểm P sinh ra không gian tiếp tuyến tại P của X.

(iii) Chúng ta nói rằng hai đa tạp con A và B của X là ***intersect transversely*** nếu chúng là transverse tại mọi điểm của $A \cap B$.

(iv) Chúng ta nói rằng hai đa tạp con A và B của X là ***generically transverse*** nếu chúng là transverse tại mọi điểm chung của mỗi thành phần bất khả quy của $A \cap B$.

(v) Chúng ta nói rằng hai chu trình $\sum m_i A_i$ và $\sum n_i A_i$ là ***dimensionally transverse (generically) transverse*** nếu A_i, B_i là dimensionally (generically) transverse với mọi i, j.

Định lý 4.1.6. *Hai đa tạp bất khả quy A và B của X là generically transverse nếu và chỉ nếu chúng là dimensionall transverse và mỗi thành phần bất khả quy của $A \cap B$ là reduced, chứa các điểm trơn của X.*

Chứng minh. Xem [12], Mệnh đề 5.2. □

Bổ đề 4.1.7. *(Bổ đề Moving) Cho X là một quasi-xạ ảnh trơn.*

(i) Cho $\alpha \in A(X), \{B_i \subset X\}$ là một họ hữu hạn các đa tạp con, khi đó tồn tại chu trình $A = \sum m_i A_i$ sao cho $[A] = \alpha$ và A_i, B_i generically transverse với mọi i, j.

(ii) Với mọi j, lớp chu trình

$$\sum_i m_i [A_i \cap B_j] \in A(X)$$

không phụ thuộc và cách chọn của A.

Định lý 4.1.8. *Nếu X là một đa tạp quansi-projective trơn, thì tồn tại duy nhất cấu trúc tích trên $A^*(X)$ thõa mãn*

$$[A].[B] = [A \cap B],$$

trong đó A và B là các đa tạp con generically transverse. Với cấu trúc này, $A^*(X)$ là một vành giao hoán, kết hợp với đơn vị là $[X]$. Vành này được phân bậc bởi đối chiều.

Chứng minh. Với mọi $\alpha, \beta \in A(X)$, theo Bổ đề 4.1.7, tồn tại các chu trình $A = \sum m_i A_i, B = \sum n_i B_i$ sao cho $[A] = \alpha, [B] = \beta$, và A, B là generically transverse.

Chúng ta định nghĩa tích $\alpha\beta$ là lớp chu trình

$$\alpha\beta = \sum_{i,j} m_i n_j [A_i \cap B_j].$$

Phần đầu của Bổ đề Moving cho ta sự tồn tại các chu trình, trong khi phần thứ hai của bổ đề cho ta một định nghĩa đúng.

Sự giao hoán, kết hợp của tích, xem phần còn lại của chứng minh trong [12], Định lý 5.3. □

Định nghĩa 4.1.9. Cho X là một đa tạp quansi-xạ ảnh trơn, vành ***Chow*** của X là vành được mô tả như trong Định lý 4.1.7.

4.1.6 Một số ví dụ

Trong mục này, chúng tôi mô tả lại một số ví dụ cơ bản của vành Chow, đó là vành Chow của một đa tạp xạ ảnh, của tích hai đa tạp xạ ảnh.

Xem $\mathbb{P}^i$ như là một đa tạp xạ ảnh con của $\mathbb{P}^{i+1}$, với đa tạp xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, chúng ta có

$$\{P\} = \mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{P}^n.$$

Bổ đề 4.1.10. *$A_k(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, là nhóm được sinh bởi lớp chu trình $[\mathbb{P}^k]$, với mọi k là các số nguyên từ 0 đến n.*

Kết quả này được suy ra từ [12], Mệnh đề 1.20.

Bổ đề 4.1.11. *Cho l, m là các số nguyên từ 0 đến n, khi đó*

$$[\mathbb{P}^{n-m} \cap \mathbb{P}^{n-l}] = \begin{cases} [0] & \text{nếu } m + l > n \\ [\mathbb{P}^{n-l-m}] & \text{nếu } m + l \leq n. \end{cases}$$

Định lý 4.1.12. *Tồn tại đẳng cấu vành* $A_*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$.

Chứng minh. Lấy φ là một đồng cấu vành được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[h] &\to A_*(\mathbb{P}^n) \\ h &\mapsto [\mathbb{P}^{n-1}] \\ k \in \mathbb{Z} &\mapsto k[\mathbb{P}^n]. \end{aligned}$$

Chúng ta có

$$\varphi(h^2) = [\mathbb{P}^{n-1}].[\mathbb{P}^{n-1}] = [\mathbb{P}^{n-1} \cap \mathbb{P}^{n-1}] = [\mathbb{P}^{n-2}].$$

Với mọi $i = 0, \dots, n$, từ Bổ đề 4.1.11, bằng cách tính toán quy nạp tăng dần theo i, chúng ta có

$$\varphi(h^i) = [\mathbb{P}^{n-i}].$$

Từ Bổ đề 4.1.11, chúng ta suy ra được

$$\varphi(h^{n+1}) = \varphi(h^n.h) = [\mathbb{P}^{n-n}].[\mathbb{P}^{n-1}] = [0].$$

Từ tính toán trên, chúng ta suy ra φ là một toàn cấu và Ker $\varphi = (h^{n+1})$. Từ định lý đẳng cấu thứ nhất chúng ta suy ra

$$A_*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1}).$$

□

Định lý 4.1.13. *Với m, n là các số nguyên dương, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ là một đa tạp xạ ảnh, và vành Chow của nó là*

$$A(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong A(\mathbb{P}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} A(\mathbb{P}^m).$$

Hơn nữa, tồn tại đẳng cấu

$$A(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^{n+1}, \beta^{n+1}).$$

Chứng minh. Xem [12], Định lý 1.27.

Có lẽ chúng ta có thể sử dụng Định lý 4.1.11 để chứng minh ý thứ hai???.

□

4.2 Vành Chow của đa tạp toric

4.2.1 Fan trơn và đầy đủ

Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ lồi, chặt, các mặt một chiều của σ được gọi là các cạnh, (Định nghĩa 1.2.1,) lấy τ là một cạnh của σ, vì σ là lồi chặt, $\dim \tau = 1$, nên τ là một tia (nửa đường thẳng). Vì τ cũng là nón đa diện hữu tỉ nên $\tau \cap \mathbb{Z}^n$ được sinh bởi một véctơ duy nhất v_τ, chúng ta gọi v_τ là *véctơ sinh tia* (generator ray) của τ, chúng ta có kết quả sau.

Bổ đề 4.2.1. *Một nón đa diện hữu tỉ lồi chặt là được sinh bởi các véctơ sinh tia của các cạnh của nó.*

Xem [13], Bổ đề 1.2.15.

Định nghĩa 4.2.2. Cho σ là một nón đa diện hữu tỉ lồi chặt, *tập sinh tối tiểu* của nón σ là tập các véctơ sinh tia của tất cả các cạnh của σ. Nếu S là tập sinh tối tiểu của σ thì $\sigma = Conv(S)$.

Định nghĩa 4.2.3. Cho σ là nón đa diện hữu tỉ lồi chặt trong.

(i) σ được gọi là *trơn* hay *chính quy* nếu tập sinh tối tiểu của nó là một phần của $\mathbb{Z}$-cơ sở.

(ii) σ được gọi là *đơn giản* (simplicial) nếu tập sinh tối tiểu của σ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Hệ quả 4.2.4. *Nếu σ là trơn thì σ là đơn giản.*

Định nghĩa 4.2.5. Cho Δ là một fan trong $\mathbb{R}^n$.

(i) Δ là *trơn* nếu tất cả các nón trong Δ là trơn.

(ii) Δ là *đơn giản* nếu tất cả các nón trong Δ là đơn giản.

(iii) Δ được gọi là *đầy đủ* nếu $|\Delta| = \mathbb{R}^n$, trong đó $|\Delta| = \bigcup_{\sigma\in\Delta} \sigma$.

Định nghĩa 4.2.6. Cho Δ là một fan, *tập sinh tối tiểu của* fan Δ là hợp của các tập sinh tối tiểu của tất cả các nón khác 0 trong Δ. Nó cũng là tập các véctơ sinh tia của tất cả các nón một chiều (các cạnh) trong Δ.

Hệ quả 4.2.7. *Một nón bất kì trong Δ được sinh bởi một tập con của tập sinh tối tiểu của fan Δ, nhưng ngược lại nói chung không đúng.*

4.2.2 Vành Chow trên Toric

Trong mục này, chúng ta chỉ tìm hiểu trên các Toric liên kết với các fan trơn và đầy đủ. Các định nghĩa tương tự như trong [13], chương VII.

Định nghĩa 4.2.8. Cho Δ là một fan trơn và đầy đủ trong $\mathbb{R}^n$, tập các nón một chiều trong Δ là $\{\tau_1, \dots, \tau_r\}$, với mỗi nón τ_i chúng ta có duy nhất một véctơ sinh tia v_i, nên tập sinh tối tiểu của Δ là $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{Z}^n$. Với mỗi τ_i, chúng ta kí hiệu lại là biến X_i. Với mỗi nón $\sigma = Conv(v_{i_1}, \dots, v_{i_s})$, với các $v_{i_k} \in \{v_1, \dots, v_r\}$, chúng ta định nghĩa đơn thức *square-free* $P_\sigma = X_{i_1} \dots X_{i_s}$. Trong vành đa thức $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]$, chúng ta định nghĩa các idean

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \langle P_\sigma | \sigma \notin \Delta \rangle, \\ \mathcal{J} &= \langle \langle m, v_1 \rangle X_1 + \dots + \langle m, v_r \rangle X_r | m \in M \rangle. \end{aligned}$$

Khi đó, vành *tổ hợp Chow* liên kết với fan Δ , kí hiệu $Ch(\Delta)$, được định nghĩa bởi

$$Ch(\Delta) = \frac{\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]}{\mathcal{I} + \mathcal{J}}.$$

Chúng ta kí hiệu lại các lớp tương đương $[X_i]$ là x_i, các $[P_\sigma]$ là p_σ trong $Ch(\Delta)$.

Mệnh đề 4.2.9. *Cho fan Δ như trong Định nghĩa 4.2.8, cho σ là một nón khác 0, nếu $\sigma < \sigma' \in \Delta$ thì tồn tại các nón $\sigma_i \in \Delta$, các số nguyên c_i, $i = 1, \dots, q$, với q là một số nguyên dương nào đó, sao cho $dim\sigma = dim\sigma_i$, $\sigma_i \not< \sigma'$ với mọi i và*

$$p_\sigma = c_1 p_{\sigma_1} + \dots + c_q p_{\sigma_q}.$$

Chứng minh.
Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $\sigma = Conv(v_1, \dots, v_s), \sigma' = Conv(v_1, \dots, v_d)$, với $1 \leq s \leq d \leq r$. Vì Δ là trơn, nên σ' là trơn, do đó $v_1, \dots, v_d$ là một bộ phận của một $\mathbb{Z}-$cơ sở nào đó, do đó, chúng ta có thể mở rộng thành một $\mathbb{Z}$-cơ sở $u_1, \dots, u_n$, trong đó, $u_i = v_i$, với mọi $i = 1, \dots, d$. Từ hệ cở này, chúng ta có được một hệ cơ sở đối ngẫu $u_1^*, \dots, u_n^*$ của $(\mathbb{R}^n)^*$, mà mỗi véctơ thuộc $M = Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, chúng ta lấy véctơ u_1^* để tính toán.

Vì $u_1^* \in M$ nên đa thức

$$\langle u_1^*, v_1 \rangle X_1 + \dots + \langle u_1^*, v_r \rangle X_r \in \mathcal{J},$$

do đó

$$\langle u_1^*, v_1 \rangle x_1 + \dots + \langle u_1^*, v_r \rangle x_r = 0 \in Ch(\Delta).$$

Theo tính chất của cơ sở đối ngẫu, chúng ta có $\langle u_1^*, u_1\rangle = \langle u_1^*, v_1\rangle = 1, \langle u_1^*, u_i\rangle = \langle u_1^*, v_i\rangle = 0$, với mọi $i = 2, \ldots, d$. Do vậy, chúng ta có thể biểu diễn x_1 như sau

$$x_1 = \langle u_1^*, -v_{d+1}\rangle x_{d+1} + \cdots + \langle u_1^*, -v_r\rangle x_r.$$

Để ý rằng $p_\sigma = x_1 \ldots x_s$, thay x_1 bởi biểu diễn trên, chúng ta được

$$\begin{aligned} p_\sigma &= \langle u_1^*, -v_{d+1}\rangle x_{d+1}x_2 \ldots x_s + \cdots + \langle u_1^*, -v_r\rangle x_r x_2 \ldots x_s \\ &= c_{d+1}p_{\sigma_{d+1}} + \cdots + c_r p_r. \end{aligned}$$

Trong đó, $\sigma_i = Conv(v_{d+1}, v_2, \ldots, v_s), c_i = \langle u_1^*, -v_i\rangle$, với mọi $i = d+1, \ldots, r$. Các $\sigma_i \not< \sigma'$ vì $v_i \notin \sigma'$, với mọi $i = d+1, r$. Dễ thấy rằng $dim\sigma_i = dim\sigma = s$. Cuối cùng, nếu $\sigma_i \notin \Delta$ thì $p_{\sigma_i} = 0$. $\square$

Hệ quả 4.2.10. *Cho $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_s) \in \Delta$, chúng ta có $p_\sigma = x_1 \ldots x_s$, gọi $\tau = Conv(v_1), p_\tau = x_1$, dễ thấy là τ là một mặt của σ, theo Mênh đề 4.2.9, tồn tại các số nguyên $c_{s+1}, \ldots, c_r$, các mặt một chiều $\tau_{s+1}, \ldots, \tau_r$ tương ứng với các véc tơ $v_{s+1}, \ldots, v_r$ sao cho*

$$p_\tau = c_{s+1}p\tau_{s+1} + \ldots c_r p\tau_r,$$

hay

$$x_1 = c_{s+1}x_{s+1} + \ldots c_r x_r.$$

Hệ quả 4.2.11. *Cho fan Δ tương tự như Định nghĩa 4.2.8, chúng ta có một số nhận xét sau:*

(i) $r > n$.

(ii) $p_{\{0\}} = 1$.

(iii) *Vì mỗi nón trong Δ là trơn, nên chúng có tối đa n mặt một chiều. Nên nón $\sigma = Conv(v_1, \ldots, v_{n+1}) \notin \Delta$, do đó $p_\sigma = x_1 \ldots x_{n+1} = 0$.*

Mệnh đề 4.2.12. *Lấy một đơn thức $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}$ trong vành $Ch(\Delta)$. Nếu $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \geq n+1$ thì $f = 0$.*

Chứng minh.
Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $a_1, \ldots, \alpha_s$ là các số khác 0, và $\alpha_{s+1} = \cdots = \alpha_r = 0$, với $0 < s \leq r$. Nếu $s \geq n+1$ thì $f = 0$ (Hệ quả 4.2.11-(*iii*)). Nếu $s < n+1$, vì tổng các số nguyên dương $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s \geq n+1$

nên tồn tại ít nhất một số $\alpha_i > 1$, không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử là $\alpha_1 > 1$. Khi đó

$$f = x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} = x_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_s^{\alpha_s}.$$

Lấy nón $\sigma = Conv(v_1, \dots, v_s)$, nếu $\sigma \notin \Delta$ thì $f = 0$, ngược lại, $\sigma \in \Delta$, sử dụng Hệ quả **??**, chúng ta có

$$\begin{aligned} f &= (c_{s+1}x_{s+1} + \dots c_r x_r) x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_s^{\alpha_s} \\ &= c_{s+1} f_{s+1} + \dots c_r f_r, \end{aligned}$$

trong đó $f_j = x_j x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_s^{\alpha_s}$, $j = s+1, \dots, r$. Nhận xét, $f_j = 0$ hoặc $deg(f_j) = deg(f) \geq n+1, j = j = s+1, \dots, r$. Số biến trong mỗi $f_j \neq 0$ nhiều hơn 1 so với f. Nếu số biến trong mỗi $f_j \neq 0$ vẫn còn nhỏ hơn $n+1$, chúng ta tiến hành biểu diễn các $f_j \neq$ tương tự như cách chúng ta đã làm với f, ta được các đơn thức cùng bậc nhưng số biến của chúng lại tăng thêm 1. Quá trình này tiếp tục cho đến khi f được biểu diễn tuyến tính bởi các đơn thức cùng bậc, mỗi đơn thức có số biến là $n+1$, nên $f = 0$. □

Định nghĩa 4.2.13. Cho Δ là một fan trơn và đầy đủ, kí hiệu $Ch^{(s)}(\Delta)$ là một nhóm con của $Ch(\Delta)$ được sinh bởi các đơn thức square-free bậc s.

$$Ch^{(s)}(\Delta) = \langle p_\sigma | \sigma \in \Delta, dim\sigma = s \rangle.$$

Do đó $s = 0, \dots, n$, và $Ch^{(0)}(\Delta) = \mathbb{Z}$.

Định lý 4.2.14. *Cho fan Δ là mặt được mô tả như trong Định nghĩa 4.2.8, khi đó*

$$Ch(\Delta) = Ch^{(0)}(\Delta) \oplus \dots \oplus Ch^{(n)}(\Delta).$$

Chứng minh.
Cho $f = x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} \in Ch(\Delta)$, với $0 < s \leq n, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ là các số nguyên dương, $d = \alpha_1 + \dots + \alpha_s \leq n$. Chúng ta chỉ cần chứng minh rằng f được biểu diễn tuyến tính qua các đơn thức square-free bậc d.

Chú ý là chúng ta có $d \geq s$, nếu $d = s$ thì $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 1$, do đó $f \in Ch^{(d)}(\Delta)$. Nếu $d > s$, vì $d = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$ nên tồn tại một số $i = 1, \dots, s$ sao cho $a_i > 1$, chúng ta có thể giả sử là $a_1 > 1$. Lấy nón $\sigma = Conv(v_1, \dots, v_s)$, nếu $\sigma \notin \Delta$ thì $f = 0$, ngược lại, $\sigma \in \Delta$, sử dụng Hệ quả **??**, chúng ta có

$$\begin{aligned} f &= (c_{s+1}x_{s+1} + \dots c_r x_r) x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_s^{\alpha_s} \\ &= c_{s+1} f_{s+1} + \dots c_r f_r, \end{aligned}$$

trong đó $f_j = x_j x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_s^{\alpha_s}$, $j = s+1, \dots, r$. Chúng ta có các $f_j = 0$ hoặc $f_j \neq 0, deg(f_j) = d$.
Chúng ta tiếp tục phân tích các $f_j \neq 0$ tương tự f, và cứ phân tích như vậy cho đến khi mỗi đơn thức trong phân tích là tích của d biến khác nhau, mỗi đơn thức có dạng $x_1 \dots x_s x_{i_{s+1}} \dots x_{i_d}$. Do đó $f \in Ch^{(d)}(\Delta)$ hoặc $f = 0$.

Vậy, mỗi đa thức $f \neq 0$ trong trong $Ch(\Delta)$ là một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức bậc từ 0 đến n, mỗi đơn thức bậc d là một biểu diễn tuyến tính của các đơn thức square-free bậc d, nên f được biểu diễn tuyến tính bởi các đơn thức square-free, do đó định lý được chứng minh xong. □

Hệ quả 4.2.15. *Với bất kì phần tử f trong $Ch(\Delta)$, tồn tại các nón $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ trong Δ, các số nguyên $c_1, \dots, c_q$ sao cho*

$$f = c_1 p_{\sigma_1} + \dots + c_q p_{\sigma_q}.$$

Định lý 4.2.16. *(Định nghĩa) Cho Δ là một fan trơn và đầy đủ, X_Δ là đa tạp toric liên kết với fan Δ, $A^*(X_\Delta)$ là vành Chow của X_Δ, khi đó*

$$A^*(X_\Delta) \cong Ch(\Delta).$$

Chứng minh. Xem [14], Định lý 10.8. □

4.3 Một số ví dụ

Tài liệu tham khảo

[1] **J.-P Brasselet** *Introduction to Toric Varieties*, IML Luminy Case 907, Marseille, France.

[2] **Đặng Tuấn Hiệp** *Intersection Theory with Applications to the Computation of Gromov-Witten Invariants,* 2014.

[3] **L. Birbrair, J.-P Brasselet and A. Fernandes** *The separation set for toric varieties.* Preprint, Nov. 2013.

[4] **M. Barthel, J.-P Brasselet et K.-H. Fieseler** *Classes de Chern des variétés toriques singulières.* c.R.Acad.Sci. Paris 315 (1992), 187-192.

[5] **W. Fulton** *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press 1993.

[6] **G. Ewald** *Combinatorial convexity and Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. 168. 1996.

[7] **I.R. Shafarevich** *Basic Algebraic Geometry*, Study Edition, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[8] **T.Oda** *Convex Bodies and Algebraic Geometry.* Ergebn. Math.Grenwgb. (3.Folge), Bd.15, Springer-Verlag, Berlin etc.,1988.

[9] **Robin Hartshrone** *Algebraic Geometry*

[10] **Ngô Việt Trung** *Nhập Môn Đại Số Giao Hoán Và Hình Học Đại Số*

[11] **W.Fulton** *Intersection theory, second edition,* 1997.

[12] **David Eisenbud and Joe Harris** *Intersection Theory in Algebraic Geometry,* 2011.

[13] **David Cox, John Little, Hal Schenck** *Toric Varieties,* 2010.

[14] **V. Danilov** *The Geometry Of Toric Varieties* , Rusian, 1978.