ÔN TẬP CAO HỌC GIẢI TÍCH

Author : **ĐỖ VĂN NHÂN - 0911121**

Course : 2009- 2013

∇ -$\multimap$ ∞ $\leftarrow$ $\triangle$

Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐH QG TPHCM

Khoa Toán

Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 04/ 07/ 2013

PREFACE

Để tiện lợi cho các bạn ôn tập sau Đại học, giáo trình này minh họa lý thuyết thông qua các bài tập trong 4 năm Đại học - các môn Toán với mức độ từ căn bản đến phức tạp. Do giáo trình này chỉ biên soạn riêng cho ngành giải tích nên chỉ đề cập 1 phần của Đại số, thống kê cũng như tối ưu nên ở những lĩnh vực này, tác giả không được chuyên sâu lắm.

Thứ tự kiến thức trong giáo trình được sắp xếp theo trình tự môn đã học chứ không phải theo thứ tự của kiến thức, có thể điều này sẽ gây khó khăn cho các đọc giả khi theo dõi.

Trong quá trình biên soạn, tôi không thể không tránh khỏi một số thiếu sót trong giáo trình, mong các bạn đọc góp ý để hoàn thiện hơn.

Mục lục

Chương 1

Giải tích cơ sở

1.1 Logic, Mệnh đề & ánh xạ

1.1.1 Logic, mệnh đề.

Exercise 1.1. Chứng minh :

$a)\qquad A \cap (A \cup B) = A$

$b)\qquad B \cup (A \cap B) = B$

$c)\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$d)\qquad X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$

$e)\qquad X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$

$f)\qquad (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

$g)\qquad (A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D).$

Chứng minh. Ta có

$a)\forall x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ \text{và } x \in A \end{cases}$. Vậy $x \in A$ nên $A \cap (A \cup B) \subset A$

Tương tự nếu $x \in A$ thì $x \in A \cap B$ hay $\begin{cases} x \in A \cup B \\ \text{và } x \in A \end{cases}$. Do đó $A \subset A \cap (A \cup B)$

$\Rightarrow$ đpcm

——

$b)\forall x \in B \cup (A \cap B)$ thì $\begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{hoặc } x \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ và } x \in B \\ \text{hoặc } x \in B \end{cases}$

Nếu $x \in B$ thì hiển nhiên $B \cup (A \cap B) \subset B$

Nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in B$ do đó $B \cup (A \cap B) \subset B$

Vậy $B \cup (A \cap B) \subset B$

$\forall x \in B$ thì hiển nhiên $x \in B \cap (A \cap B)$ (theo ĐN) $\Rightarrow$ đpcm

———

$c)\forall x \in A \cap (B \cup C)$ thì $\begin{cases} x \in B \cup C \\ \text{và } x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in B \text{ hoặc } x \in C \\ \text{và } x \in A \end{cases}$

Ta viết lại $\begin{cases} x \in B \text{ và } x \in A \\ \text{hoặc } x \in C \text{ và } x \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{hoặc } x \in A \cap C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ngược lại nếu $\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tức $\begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{hoặc } x \in A \cap C \end{cases}$ .thì

$\begin{cases} x \in B \text{ và } x \in A \\ \text{hoặc } x \in C \text{ và } x \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \text{ hoặc } x \in C \\ \text{và } x \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \cup C \\ \text{và } x \in A \end{cases}$.

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

———

$d)\forall x \in X \setminus (A \cup B)$ tức $x \notin (A \cup B)$ hay $\begin{cases} x \notin A \\ \text{và } x \notin B \end{cases}$.

$\Rightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \Rightarrow X \setminus (A \cup B) \subset (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Mặt khác, $\forall x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ hay $\begin{cases} x \notin A \\ \text{và } x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \subset X \setminus (A \cup B)$

———

$e)\forall x \in X \setminus (A \cap B)$ tức $x \notin (A \cap B)$ hay $\begin{cases} x \notin A \\ \text{hoặc } x \notin B \end{cases}$.

$\Rightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \Rightarrow X \setminus (A \cup B) \subset (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

Mặt khác, $\forall x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ hay $\begin{cases} x \notin A \\ \text{và } x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \notin (A \cap B)$

$\Rightarrow (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \subset X \setminus (A \cap B)$

———

$f)$ $\forall z \in (A \times B) \cap (C \times D)$ hay $\begin{cases} z \in (A \times B) \\ \text{và } z \in (C \times D) \end{cases}$.

Khi đó, tồn tại $\begin{cases} a \in A, b \in B \text{ sao cho } z = (a, b) \\ \text{và } c \in C, d \in D \text{ sao cho } z = (c, d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad (*)$

Vậy với $z = (x, y)$ thỏa $(*)$ thì $\begin{cases} x \in A \cap C \\ y \in B \cap D \end{cases} \Rightarrow z \in (A \cap C) \times (B \times D)$

Mặt khác $\forall z = (x, y) \in (A \cap C) \times (B \times D)$ tức $\begin{cases} x \in A \cap C \\ \text{và } y \in B \cap D \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \text{và } (x, y) \in C \times D \end{cases} \Rightarrow (A \cap C) \times (B \times D) \subset (A \times B) \cap (C \times D)$$

——

g)Với $z = (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ thì

$$\begin{cases} x \in A \cup C \\ \text{và } y \in B \cup D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ \text{hoặc } x \in C \end{cases} \\ \text{và} \begin{cases} y \in B \\ \text{hoặc } y \in D \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \text{hoặc } (x, y) \in A \times D \\ \text{hoặc } (x, y) \in C \times B \\ \text{hoặc } (x, y) \in C \times D \end{cases}$$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$

$\Rightarrow (A \cup C) \times (B \cup D) \subset (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$

Mặt khác $\forall z = (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$ tức

$$\begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \text{hoặc } (x, y) \in A \times D \\ \text{hoặc } (x, y) \in C \times B \\ \text{hoặc } (x, y) \in C \times D \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ \text{hoặc } x \in C \end{cases} \\ \text{và} \begin{cases} y \in B \\ \text{hoặc } y \in D \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup C \\ \text{và } y \in B \cup D \end{cases}.$$

$\Rightarrow (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ □

Exercise 1.2. Chứng minh các tính chất sau:

a) $|A| = 0$ khi và chỉ khi $A = \emptyset$

b) Nếu $A \subset B$ thì $|A| \leq |B|$

c) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

d) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Chứng minh. Ta xét

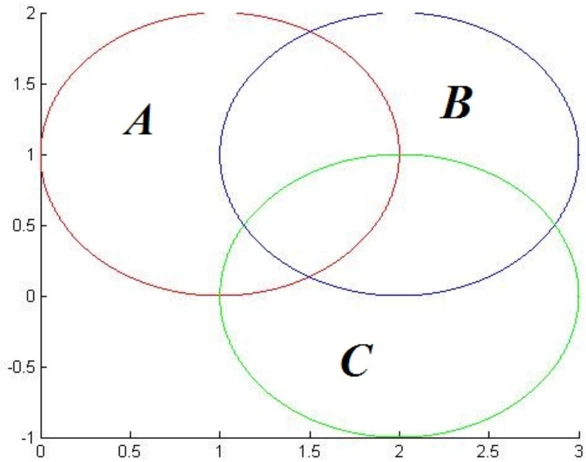
a) Nếu $|A| = 0$ tức A không có phần tử nào trong lực lượng. $A = \emptyset$

Ngược lại nếu$A = \emptyset$ thì $|A| = 0$

——

b) Nếu $A \subset B$. Đặt $C = B \backslash A \Leftrightarrow B = A \cup C$.

Ta có $A \cap C = \emptyset$nên$|B| = |A \cup C| = |A| + |C| \geq |A|$



---

c) Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $|A \cap B| = 0$ nên $|A \cup B| = |A| + |B|$

Nếu $A \cap B \neq \emptyset$ thì $|A \cap B| > 0$.

Đặt $C_1 = A \cap B$, $C_2 = A \backslash (A \cap B)$ và $C_3 = B \backslash (A \cap B)$.

Khi đó $\begin{cases} C_1 \cap C_2 = \emptyset \\ C_1 \cap C_3 = \emptyset \end{cases}$ và $\begin{cases} C_1 \cup C_2 = A \\ C_1 \cup C_3 = B \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} |A| = |C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2| \\ |B| = |C_1 \cup C_3| = |C_1| + |C_3| \end{cases}$

$\Rightarrow |A| + |B| = |C_1| + |C_2| + |C_1| + |C_3| = [|C_1| + |C_2| + |C_3|] + |C_1|$ (1)

Mặt khác vì $\begin{cases} C_1 \cup C_2 \cup C_3 = A \cup B \\ \& \ C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset \end{cases}$ nên

$\Rightarrow |A \cup B| = |C_1 \cup C_2 \cup C_3| = |C_1| + |C_2| + |C_3| = |A| + |B| - |C_1|$ (2)

Từ (1) và (2), kết hợp với $|C_1| = |A \cup B|$ ta được đpcm.

---

d) Từ kết quả câu *c*). Ta có:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|) + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|) + |C| - [|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|] \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$ □

Exercise 1.3. Phủ định các mệnh đề sau:

a) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, x) > 0$ sao cho $\forall y \in \mathbb{R}$ nếu $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \epsilon \Rightarrow f$ liên tục

b) $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) > 0$ sao cho $|x_n - x| < \epsilon, \quad \forall n > n(\epsilon) \Rightarrow (x_n)$ hội tụ

c) $x \leq a, \ \forall x \in A$ và $a \leq b$ nếu $x \leq b, \forall x \in A$

Giải

a) $\exists\epsilon > 0, \forall\delta(\epsilon, x) > 0$ sao cho $\exists y \in \mathbb{R}$ nếu $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| > \epsilon \Rightarrow f$ không liên tục.

b) $\exists\epsilon > 0, \forall n(\epsilon) > 0$ sao cho $|x_n - x| > \epsilon, \quad \forall n > n(\epsilon) \Rightarrow (x_n)$ không hội tụ.

c) Đặt $P =$ ”$x \le a, \ \forall x \in A$”, $Q =$ ”$a \le b$ nếu $x \le b, \forall x \in A$” .

Phủ định của P và Q là $\widetilde{P}$ hoặc $\widetilde{Q}$. Mệnh đề phủ định cần tìm là :

”có $x \in A$ sao cho $x \le a$” hoặc "$\exists b$ sao cho $x \le b \ \forall x \in A$ và $a > b$”

Exercise 1.4. CMR $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

Chứng minh. Sử dụng phản chứng. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ tức là có 2 số nguyên dương m, n sao cho

$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$. Gọi $d =$ ƯCLN(m, n) .Khi đó có $p, q \in \mathbb{N}$ sao cho $\begin{cases} m = dp \\ n = dq \end{cases}$.

Ta có $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} = \sqrt{2}$ và

p, q có UCLN $= 1$.

Do đó $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Vậy $p^2 = 2q^2$. Vậy p^2 chia chẵn cho 2 nên p cũng $\vdots\, 2$.

Điều này suy ra $p^2 = 2q^2$ chia hết cho 4. Tiếp tục

$\Rightarrow q^2$ chia hết cho 2.

Vậy 2 là ước chung của p, q. Vô lý. □

1.1.2 Lực lượng và ánh xạ.

Exercise 1.5. Các khoảng sau $(a, b), (a, b]$ và $[a, b]$ có cùng lực lượng không?

Giải

Do $(0, 1)$ và (a, b) đồng phôi qua song ánh $f(x) = (b - a)x + a$

Không mất tính tổng quát, ta chứng minh $(0, 1), [0, 1]$ và $[0, 1)$ có cùng lực lượng.

Xét $[0, 1] \sim [0, 1)$ qua song ánh f_1: $[0, 1] \to [0, 1)$ như sau:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0, 1] \setminus A \\ f(x) & \text{khi } x \in A \end{cases} \text{.Trong đó } \begin{cases} A = \left\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ... : \quad n \in \mathbb{N}\right\} \\ f(n) = \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

Dễ thấy f_1 là song ánh.

Xét $(0,1) \sim [0,1)$ qua song ánh f_1: $[0,1) \to (0,1)$ như sau:

$$g_1(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0,1] \setminus B \\ g(x) & \text{khi } x \in B \end{cases} \text{.Trong đó } \begin{cases} B = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}, ..., \dfrac{1}{n}, ... : \quad n \in \mathbb{N}\right\} \\ f(n) = \dfrac{n}{n+2} \end{cases}$$

Dễ thấy g_1 là song ánh.

Exercise 1.6. Chứng minh $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$ đếm được trong khi $\mathbb{R}$ thì không.

Ta có $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ xác định bởi $f(n) = \begin{cases} -2n & \text{khi } n \leq 0 \\ 2n-1 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$

Khi đó $f(n)$ là song ánh nên $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ có cùng lực lượng nên đếm được.

Mặt khác vì $\mathbb{N}$ đếm được nên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cũng đếm được qua song ánh $h(n,m) = 2^n 3^m$.

Ta có $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ xác định bởi

$$\begin{array}{cccccccc}
(1,1) & \to & (1,2) & & (1,3) & \to & (1,4) & \\
 & & \swarrow & & & & \swarrow & \\
 & & & \nearrow & & & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & & \\
\downarrow & & & & \swarrow & & & \\
 & \nearrow & & & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & & & & \\
 & & \swarrow & & & & & \\
(4,1) & & & & & & &
\end{array}$$

Vậy g cũng là song ánh nên $\mathbb{Q}$ có cùng lực lượng với $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nên đếm được

—

Xét cho $\mathbb{R}$. Trên đoạn $[0,1] \subset \mathbb{R}$ là vô hạn.

Do lấy $a \in [0,1]$ có biểu diễn dạng thập phân như sau

$a_1 = 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}....$

$a_2 = 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}....$

$a_n = 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}....$

Giả sử $[0,1]$ đếm được, xét

$b = 0.b_1b_2b_3....$ sao cho $\begin{cases} b_1 \neq a_{1,1}; b_2 \neq a_{2,2}; b_3 \neq a_{3,3}, ... \\ b_n \neq \{0,9\} \end{cases}$.

Mà ta có $0.99999... = 1.000000... \Rightarrow b \neq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercise 1.7. Cho $A \neq \emptyset$. CMR tập các tập con của $A = 2^{\mathrm{A}}$ nhỏ hơn lực lượng của nó.

Chứng minh. Đầu tiên, xét nếu có đơn ánh $\{A\} \to 2^A$ tức

$a \to \{a\}$ đơn ánh.

Tiếp theo, xét $\phi : A \to 2^A$ hay $a \to \phi(a) \subset A$.

Giả sử ϕ toàn ánh nên $\exists X \subset A$ nhưng $X \not\subset \phi(A)$

Xét $X = \{a \in A : \ a \notin \phi(A)\}$, lấy $x \in A$ sao cho $\phi(x) = X$.

Nếu $x \in X$ thì "$x \notin \phi(x)$". Vậy "$x \notin X$". Vô lý

Nếu $x \notin X$ thì "$x \in \phi(x)$". Do đó "$x \in X$". Vl

$\Rightarrow$ Vậy X không có tiền ảnh nên ϕ không phải toàn ánh.

Do đó $|A| < \left|2^A\right|$ □

Exercise 1.8. CMR

a) Nếu A vô hạn đếm được và B hữu hạn thì $A \cup B$ đếm được

b) Nếu A hữu hạn, B vô hạn thì $A \cup B$ cùng lực lượng với B

Chứng minh. Ta đặt

a) $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ là tập vô hạn đếm được và

$B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ với $m \in \mathbb{Z}^+$ hữu hạn

Đặt $c_j = \begin{cases} b_i & \text{nếu } j = 1, 2, ..., m \\ a_{j-m} & \text{nếu } j \geq m+1 \end{cases}$

Ta có được toàn ánh từ $\mathbb{Z} \to A \cup B$. Do đó $A \cup B$ đếm được.

---

b) Đặt $C = A \cup B$. Lấy $D \subset B$, D đếm được và vô hạn.

$\Rightarrow A \cup D$ đếm được theo chứng minh của câu $a)$ nên tồn tại song ánh h giữa D và $A \cup D$

Đặt tiếp $g(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in D' \to D' \\ f(x) & \text{khi } x \in A \cup D \to D \end{cases}$

Ta được $g(x) : D' \cup (A \cup D) \to D' \cup D$

hay $g(x) : A \cup B \to B$ với $B = D \cup D'$ □

Exercise 1.9. Cho $f : X \to Y$, và $(A_i), (B_j), C, D \subset X$, $A, B \subset Y$. CMR:

a) $f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$

b) $f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i)$

c) $f(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i) \subset \cap_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$

d) $f^{-1}(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \cap_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i)$

$e)$ $f(C)\setminus f(D) \subset f(C\setminus D)$ và $f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A\setminus B)$

$f)$ Nếu $C \subset D, A \subset B$ thì $f(C) \subset f(D)$ và $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$g)$ $C \subset f^{-1}(f(C))$ dấu $=$ xảy ra nếu f đơn ánh

$h)$ $f(f^{-1}(D)) \subset D$ dấu $=$ xảy ra nếu f toàn ánh

$i)$ $(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j)$

Chứng minh.

$a)$ Xét $f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \{f(a_i) : \quad a_i \in A_i, i \in \mathbb{N}\}$. Khi đó,

$\forall x \in f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ thì có $k \in \mathbb{N}$ sao cho $t \in A_k$ thỏa $x = f(t)$

$\Rightarrow x = f(t) \in f(A_k) \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$ do đó $f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$

Xét chiều nghịch với $x \in \cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$. Lúc đó, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in f(A_m)$

Khi đó có $t \in A_m$ sao cho $x = f(t)$

$\Rightarrow t \in \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \forall t \in A_m$ nên $f(t) \in f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i) \subset f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \Rightarrow$đpcm

---

$b)$ Lấy $y \in f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$. Khi đó $y = f^{-1}(x)$ với $x \in \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in A_m \Rightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(A_m)$ hay

$y \in f^{-1}(A_m) \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i), \ \forall y \in f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \Rightarrow f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i)$

Ngược lại $\forall x \in \cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i), \exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in f^{-1}(A_n)$ tức

$\exists t \in A_n$ sao cho $x = f^{-1}(t)$ hay $x = f^{-1}(t)$ với $t \in A_n \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ nên $\cup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) \subset f^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$

$c)$ Lấy $x \in f(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ tức là $\exists t \in \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ sao cho $x = f(t)$.

$\Rightarrow t \in A_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$ nên

$f(t) \in f(A_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Do đó $x = f(t) \in \cap_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$ hay $f(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i) \subset \cap_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$

—- Hơn nữa nếu f song ánh thì $\forall y \in \cap_{i\in\mathbb{N}} f(A_i) \Rightarrow y \in f(A_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists a_i \in A_i$ sao cho $y = f(a_i) \in f(A_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Do f song ánh nên ảnh là duy nhất $f(a_i) = f(a_j), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, \forall i \neq j$ vậy

$a = a_i = a_j, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, \forall i \neq j$ nên $a \in \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i$

$\Rightarrow y = f(a) \in f(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$. Vậy $\cap_{i\in\mathbb{N}} f(A_i) \subset f(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$

$d)$ Lấy $x \in f^{-1}(\cap A_i) \Rightarrow x = f^{-1}(z)$ với $z \in \cap A_i$ hay $z \in A_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x = f^{-1}(z) \in f^{-1}(A_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Vậy $x \in \cap f^{-1}(A_i)$ hay $f^{-1}(\cap A_i) \subset \cap f^{-1}(A_i)$

Ngược lại $\forall x \in \cap f^{-1}(A_i)$ thì $x \in f^{-1}(A_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$ nên có

$a_i \in A_i$ sao cho $x = f^{-1}(a_i)$, $\quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_i = a_j = f(x)$, $\quad \forall i \in \mathbb{N}$ nên $f^{-1}(a_i) \in f^{-1}(\cap A_n) \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x = f^{-1}(a_i) \in f^{-1}(\cap A_n) \quad \forall i \in \mathbb{N}$ hay

$\Rightarrow \cap f^{-1}(A_i) \subset f^{-1}(\cap A_i)$

———

$e)$ Cho $x \in f(C) \backslash f(D)$ tức là $\begin{cases} x \in f(C) \\ x \notin f(D) \end{cases}$ .Khi đó tồn tại $t \in X$ sao cho

$\Rightarrow x = f(t)$ với $\begin{cases} f(t) \in f(C) \,(\text{ i.e } f(t) \in \{f(c) : c \in C \subset X\}) \\ f(t) \notin f(D) \,(\text{ i.e } f(t) \notin \{f(d) : d \in D \subset X\}) \end{cases} \Rightarrow t \in C \backslash D$

$\Rightarrow f(t) \in f(C \backslash D)$.

— Tương tự lấy $y \in f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$ tức là $\begin{cases} y \in f^{-1}(A) \\ y \notin f^{-1}(B) \end{cases}$.

$\Rightarrow \exists z \in Y$ sao cho $y = f^{-1}(z)$ thỏa $\begin{cases} f^{-1}(z) \in \{a \in X : \ f(a) \in A\} \\ f^{-1}(z) \notin \{b \in X : \ f(b) \in B\} \end{cases}$

$\Rightarrow z \in A \backslash B$ hay $x = f^{-1}(z) \in f^{-1}(A \backslash B)$

———

$f)$ Nếu $C \subset D$, $\forall x \in f(C) \Rightarrow \exists t \in C$ sao cho $x = f(t)$

Mà $t \in C$ nên $t \in D$. Do đó $f(t) \in f(D)$. Vậy $f(C) \subset f(D)$.

Tương tự $A \subset B$, $\forall y \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists z \in A$ sao cho $y = f^{-1}(z)$

Mà $z \in C$ nên $z \in B$. Do đó $f^{-1}(z) \in f^{-1}(B)$. Vậy $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

———

$g)$ Lấy $c \in C$. Khi đó $y = f(c) \in f(C)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(c)) \in f^{-1}(f(C))$, $\quad \forall y \in f(C)$

$\Rightarrow \qquad c \in f^{-1}(f(C))$, $\quad \forall c \in C$ nên $C \subset f^{-1}(f(C))$

—- Nếu f toàn ánh. Cho $z \in f^{-1}(f(C))$ thì có $y \in f(C)$ sao cho $z = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow$Do $y \in f(C)$ nên có $c \in C$ sao cho $y = f(c)$

$\Rightarrow z = f^{-1}(f(c))$ toàn ánh nên $z = c \in C$

Vậy $f^{-1}(f(C)) \subset C$

———

$h)$ $\forall x \in f(f^{-1}(D))$ sao cho $x = f(y)$ với $y \in f^{-1}(D)$

$\qquad \Rightarrow f(y) \in D,$

$\quad \Rightarrow x \in D, \quad \forall x \in f^{-1}(f(D))$ nên $f^{-1}(f(D)) \subset D$

—- Nếu f đơn ánh, khi đó $\forall y \in f(D)$ thì $y = f(d)$, $\quad$ với $d \in D$

Xét $d = f(t), \quad \forall t \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow d \in f\left[f^{-1}(D)\right], \quad \forall d \in D$ nên $D \subset f\left[f^{-1}(D)\right]$

$i)$ Lấy $x \in (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)$ thì $\begin{cases} x \in (\cup_{i\in I} A_i) \\ \text{và } x \in (\cup_{j\in J} B_j) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{tồn tại } m \in I \text{ sao cho } x \in A_m \\ \text{và tồn tại } n \in J \text{ sao cho } x \in B_n \end{cases} \Rightarrow x \in (A_m \cap B_n) \subset \cup_{i\in I, j\in J}(A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) \subset \cup_{i\in I, j\in J}(A_i \cap B_j)$

– Ngược lại lấy $z \in \cup_{i\in I, j\in J}(A_i \cap B_j)$ thì có $(r, s) \in I \times J$ sao cho

$z \in A_r \cap B_s \Rightarrow \begin{cases} z \in A_r \subset (\cup_{i\in I} A_i) \\ \text{và } z \in B_s \subset (\cup_{j\in J} B_j) \end{cases} \Rightarrow z \in (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)$

$\Rightarrow \cup_{i\in I, j\in J}(A_i \cap B_j) \subset (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)$ □

Exercise 1.10. Cho $(A_i), (B_j) \subset X$. Kiểm tra các đẳng thức sau

$a)$ $(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{i\in I} B_j) = \cup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$

$b)$ $\cap_{i\in I}(\cup_{j\in J} A_{i,j}) = \cup_{i\in I}(\cap_{j\in J} A_{i,j})$

Check.

$a)$ Xét $A_1 = (1, 3), B_1 = (4, 6)$. $A_2 = (2, 5), B_2 = (5, 6)$

Ta có : $A_1 \cup A_2 = (1, 5)$. $B_1 \cup B_2 = (4, 6)$ nên $[A_1 \cup A_2] \cap [B_1 \cup B_2] = (4, 5)$

$A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_2 \cap B_2 = \emptyset$ nên $[A_1 \cap B_1] \cup [A_2 \cap B_2] = \emptyset$. Đẳng thức $a)$ Sai

---

$b)$ Xét $I = \{1, 2\}, J = \{1, 2\}$.$A_{11} = (1, 3), A_{12} = [2, 4], A_{21} = [0, 3), A_{22} = (2, 5]$

Ta có : $A_{11} \cup A_{12} = (1, 4]$, $A_{21} \cup A_{22} = [0, 5]$ thì $[A_{11} \cup A_{12}] \cap [A_{21} \cup A_{22}] = (1, 4]$

$A_{11} \cap A_{12} = (2, 3)$, $A_{21} \cap A_{22} = (2, 3)$ thì $[A_{11} \cap A_{12}] \cup [A_{21} \cap A_{22}] = (2, 3)$.

Vậy đẳng thức $b)$ Sai

1.2 Bất đẳng thức & dãy số

1.2.1 Bất đẳng thức & hàm lồi

Exercise 1.11. Cho $x, y \in \mathbb{R}$. CMR *a*) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

b) $\max(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ và $\min(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

Chứng minh. Ta có: $0 < |x + y| \leq |x| + |y|$ nên

a) $|x| \leq |x - y| + |y|$ nên $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Tương tự ta được $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$

Vậy $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

---

b) Chia làm 2 trường hợp $\begin{cases} x \leq y \\ \text{or } x > y \end{cases}$. □

Exercise 1.12. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Chứng minh :

i) $f(t) \leq \dfrac{b - t}{b - a}.f(a) + \dfrac{t - a}{b - a}.f(b), \quad \forall t \in I$

ii) $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(b) - f(t)}{b - t}, \quad \forall t \in \text{int } I$. Minh họa bằng đồ thị.

iii) Giả sử f khả vi thì khi đó

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

Từ đó CM $\begin{cases} f(b) \leq f(a) + f'(a).(b - a) \\ f(a) \geq f(b) + f'(b).(a - b) \end{cases}$.

iv) Nếu f khả vi cấp 2 thì $\begin{cases} f''(a) \geq 0 \\ f''(b) \geq 0 \end{cases}$.

Chứng minh. Ta có : $f(\lambda s + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda) f(x)$

i) Đặt $\lambda = \dfrac{b - t}{b - a}$. Với $t \in [a, b]$ bất kỳ thì $\lambda \in [0, 1]$

Ta có $1 - \lambda = 1 - \dfrac{b - t}{b - a} = \dfrac{b - a - (b - t)}{b - a} = \dfrac{x - a}{b - a}$.

$\Rightarrow t = \dfrac{(b - t)a + (t - a)b}{b - a} = \left(\dfrac{b - t}{b - a}\right)a + \left(\dfrac{t - a}{b - a}\right)b = \lambda a + (1 - \lambda)b \in I$

Vậy $f(t) = f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$

$\Rightarrow f(t) \leq \dfrac{b - t}{b - a}.f(a) + \dfrac{t - a}{b - a}.f(b), \quad \forall t \in I$

ii) Từ *i*) ta được $(b - a) f(t) \leq (b - t) f(a) + (t - a) f(b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b - a) f(t) \leq (t - a) f(b) + [(b - a) - (t - a)] f(a) & (*) \\ (b - a) f(t) \leq [(t - b) + (b - a)] f(a) + (t - a) f(b) & (**) \end{cases}$

Mà : $b-t,\ t-a$ và $b-a>0$ do $t\in[a,b]$ $(***)$.

Với $(*)$, thì $(b-a)\,f(t)\le(t-a)\,f(b)+[-(t-a)\,f(a)+(b-a)\,f(a)]$

$\Rightarrow(b-a)\,[f(t)-f(a)]\le(t-a)\,f(b)-(t-a)\,f(a)$

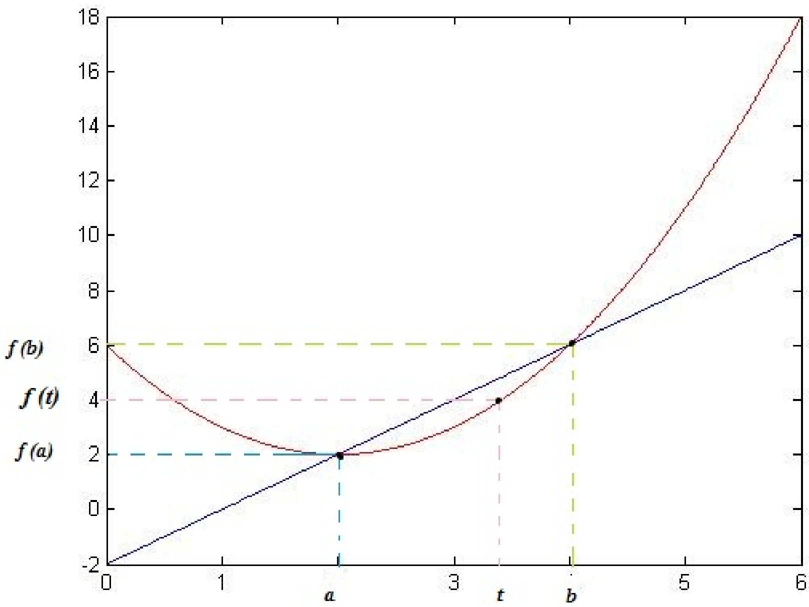
$\Rightarrow(b-a)\,[f(t)-f(a)]\le(t-a)\,[f(b)-f(a)]$ Kết hợp với $(***)$, ta được

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(a)}{t-a}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tương tự với $(**)$, ta có $(b-a)\,f(t)\le(t-a)\,f(b)+[(b-a)\,f(a)-(b-t)\,f(a)]$

$\Rightarrow(b-t)\,[f(b)-f(a)]\le(b-a)\,[f(b)-f(t)]$

$$\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$



$iii)$ Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, trong đó f lồi trên I . Xét Bài toán phụ

g là hàm đơn điệu tăng trên I hay $g(x)<g(y)$, $\forall x<y$

Xét các trường hợp sau

TH1 : Khi $x_0<x<y$. Đặt $x=\lambda x_0+(1-\lambda)\,y$. Xét

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{[\lambda f(x_0)+(1-\lambda)\,f(y)]-f(x_0)}{[\lambda x_0+(1-\lambda)\,y]-x_0}\ \text{(Do } f \text{ lồi)}$$

$$=\frac{(1-\lambda)\,[f(y)-f(x_0)]}{(1-\lambda)\,[y-x_0]}=\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}=g(y)$$

Vậy $g(x)\le g(y)$

TH2 : Khi $x<x_0<y$. Đặt $x=\dfrac{\lambda x_0+(1-\lambda)\,y}{\lambda}$ hay $x_0=\lambda x+(1-\lambda)\,y$.

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\le\frac{[\lambda f(x)+(1-\lambda)\,f(y)]-f(x)}{[\lambda x+(1-\lambda)\,y]-x}$$ (Do f lồi)

$$=\frac{(1-\lambda)\,[f(y)-f(x)]}{(1-\lambda)\,[y-x]}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ (\star)$$

Mà theo kết quả câu $ii)$ với $a = x, b = y, t = x_0$ thì
$\dfrac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ $(\star\star)$
Từ $(\star), (\star\star)$ vậy $g(x) \leq g(y)$

TH3 : Khi $x < y < x_0$. Đặt $y = \lambda x + (1 - \lambda) x_0$. Xét

$$g(y) = \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \geq \frac{f(x_0) - [\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x_0)]}{x_0 - [\lambda x + (1 - \lambda) x_0]}$$

$$= \frac{\lambda [f(x_0) - f(x)]}{\lambda [x_0 - x]} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x). \text{ Vậy } g(y) \geq g(x).$$

Trở lại bài toán, ta có :

$$f'(a) = \lim_{(x-a)\to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \lim_{(b-x)\to 0} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(b)$$

$$\Rightarrow f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

$iv)$ Khi f khả vi cấp 2 và f lồi. Từ đây ta rút ra tính chất tổng quát nếu f lồi thì $\nabla^2 f$ xác định dương, f lõm thì $\nabla^2 f$ xác định âm

Xét nếu f lồi $\Leftrightarrow \nabla^2 f$ xác định dương, vế kia tương tự.

Chiều $\Leftarrow$. Ta có nếu $f''(x) \geq 0$ trên I nên $f'(x)$ đơn điệu tăng trên I

$\Rightarrow \forall a < x < y < b, \forall \lambda \in [0, 1]$ và $z = (1 - \lambda) x + \lambda y$.

$$\text{Khi đó} \begin{cases} f(z) - f(x) = \int_x^z f'(t)\, dt \leq \int_x^z f'(z)\, dt = (z - x) f'(z) \\ f(y) - f(z) = \int_z^y f'(t)\, dt \geq \int_z^y f'(z)\, dt = (z - y) f'(z) \end{cases} \quad (\diamond)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(z) \leq f(x) + (z - x) f'(z) \\ f(z) \leq f(y) - (z - y) f'(z) \end{cases} \quad (\diamond)$$

Mà $z - x = \lambda (y - x)$ và $y - z = (1 - \lambda)(y - x)$ thay vào $(\diamond)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(z) \leq f(x) + f'(z).[\lambda (y - x)] & (1) \\ f(z) \leq f(y) - f'(z)[(1 - \lambda)(y - x)] & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với $(1 - \lambda)$ + (2) với λ, ta được :

$f(z) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$ với $z = (1 - \lambda) x + \lambda y$ nên f là hàm lồi.

Xét chiều $\Rightarrow f$ lồi, giả sử có $(a', b') \subset I$ sao cho $f''(x) < 0$

Khi đó, $f'(x)$ đơn điệu giảm và $a' < x < z < y < b'$.

Lấy $z = (1 - \lambda) x + \lambda y$

$$\begin{cases} f(z) - f(x) = \int_x^z f'(t)\, dt > \int_x^z f'(z)\, dt = (z - x) f'(z) \\ f(y) - f(z) = \int_y^z f'(t)\, dt < \int_y^z f'(z)\, dt = (z - y) f'(z) \end{cases} \quad (\diamond\diamond)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(z) > f(x) + (z - x) f'(x) = f(x) + [\lambda (y - x)] f'(z) \\ f(z) > f(y) - (z - x) f'(x) = f(x) - [(1 - \lambda)(y - x)] f'(z) \end{cases} \quad (\diamond\diamond)$$

$\Rightarrow f(z) > (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$ với $z = (1 - \lambda) x + \lambda y$

$\Rightarrow$Vô lý vì f lồi.

$\Rightarrow f''(x) \geq 0$. □

Exercise 1.13. Cho $h = g \circ f$ với $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. CM

Áp dụng công thức đạo hàm cấp 2 của hàm hợp sau

$$h''(x) = g''[f(x)] . [f'(x)]^2 + g'[f(x)] . f''(x)$$

Từ đó chứng minh

$a)$ Nếu f lồi và g là hàm lồi, không giảm trên $\mathbb{R}$ thì h lồi

$b)$ Nếu f lõm và g là hàm lồi, không tăng trên $\mathbb{R}$ thì h lồi

$b)$ Nếu f lồi và g là hàm lõm, không giảm trên $\mathbb{R}$ thì h lõm

$d)$ Nếu f lồi và g là hàm lõm, không tăng trên $\mathbb{R}$ thì h lõm

Chứng minh. Trước tiên, ta xét công thức đạo hàm cấp 1 của hàm hợp.

$$h'(x) = \frac{\partial g[f(x)]}{\partial x} = (g'[f(x)]) . f'(x)$$

$$\Rightarrow h''(x) = \frac{\partial}{\partial x}\{(g'[f(x)]) . f'(x)\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(g'[f(x)])\right] . f'(x) + g'[f(x)] . f''(x)$$

$$\Rightarrow h''(x) = g''[f(x)] . [f'(x)]^2 + g'[f(x)] . f''(x)$$

Ta chỉ xét 2 câu $a, d)$ các câu còn lại tương tự.

$a)$ Xét f lồi nên $f''(x) > 0$ và g là hàm lồi, không giảm nên $\begin{cases} g'(x) > 0 \\ g''(x) > 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow h''(x) = g''[f(x)] . [f'(x)]^2 + g'[f(x)] . f''(x) > 0$

Theo kết quả (iv) bài 1.12, ta được $h(x)$ lồi

$d)$ Tương tự f lồi nên $f''(x) > 0$ và g là hàm lõm, không tăng nên $\begin{cases} g'(x) < 0 \\ g''(x) < 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow h''(x) = g''[f(x)] . [f'(x)]^2 + g'[f(x)] . f''(x) < 0$. Vậy h lõm . □

Exercise 1.14. Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. CMR:

$a)$ $\quad f$ lồi $\Leftrightarrow \nabla^2 f \succcurlyeq 0$

$b)$ $\quad f$ lồi $\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^{\mathbf{T}} (y - x)$

$c)$ $\quad f$ lồi $\Leftrightarrow [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^{\mathbf{T}} (x - y) \geq 0$

Chứng minh. Ở câu $a)$. ta đã chứng minh cho n =1 chiều.

$a)$ Tiếp theo, xét $n \geq 2$. Đặt $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(tx + (1 - t)y)$

Do g là hàm lồi nên $g''(x) > 0$

Ta có $g'(t) = [\nabla f(tx + (1 - t)y)]^{\mathbf{T}} . (x - y)$

$\Rightarrow g''(t) = (x-y).\left[\nabla^2 f(tx+(1-t)y)\right].(x-y)^{\mathbf{T}} \geq 0$

Mà $(x-y).(x-y)^{\mathbf{T}} \geq 0$ nên

$\Rightarrow \nabla^2 f(tx+(1-t)y) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \nabla^2 f(z) \geq 0 \qquad , \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ với $z = tx + (1-t)y$.

---

b) • Tương tự, ta xét trường hợp đầu tiên là khi $n=1$ thì

$f(y) \geq f(x) + [f'(x)].(y-x)$

Ta có : $f(x)$ lồi nên $f((1-t)x+ty) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Lấy $z = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$, thì $f(z) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Nếu $t=0 \Rightarrow z = x$ nên $f(z) = f(x) + [f'(x)](z-x)$ hiển nhiên

Nếu $t \neq 0$ ta chia 2 vế cho t, ta được $f(y) \geq f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{t}$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}$$

Cho $t \to 0$, ta được $\lim\limits_{t\to 0} f(y) \geq \lim\limits_{t\to 0}\left[f(x) + \dfrac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}\right]$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}$$

Mà $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} = (y-x)\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t(y-x)}\right]$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} = (y-x)f'(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Vậy $f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (\star)$

Xét chiều ngược với $f(y) \geq f(x) + [f'(x)].(y-x)$, cần CM f lồi.

Cho $x \neq y$ và $\theta \in [0,1]$. Đặt $z = \theta x + (1-\theta)y$.

Kết hợp với $f(y) \geq f(x) + [f'(x)].(y-x)$ ta được

$$\begin{cases} f(x) \geq f(z) + [f'(z)](x-z) \\ f(y) \geq f(z) + [f'(z)](y-z) \end{cases} \text{với} \begin{cases} x - z = (1-\theta)(x-y) \\ y - z = -\theta(x-y) \end{cases}.$$

$\Rightarrow \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \geq f(z) + [f'(z)].[\theta(x-z) + (1-\theta)(y-z)]$

$\Rightarrow \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \geq f(z) = f(\theta x + (1-\theta)y)$. Vậy f lồi. $(\star\star)$

• Xét khi $n \geq 2$. Đặt $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(tx + (1-t)y)$

$\Rightarrow g'(t) = (\nabla f(tx+(1-t)y))^{\mathbf{T}}.(y-x)$.

Giả sử nếu f lồi, khi đó $g(t)$ lồi nên

$\Rightarrow g(1) \geq g(0) + (1-0).g'(0)$

$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^{\mathbf{T}}.(y-x)$

Ngược lại nếu $f(r) \geq f(s) + (\nabla f(s))^{\mathbf{T}}.(r-s)$ thì ta cũng lấy x, y bất kỳ và $t, \widetilde{t} \in \mathbb{R}$ sao cho :

$r = ty + (1-t)x$ và $s = \widetilde{t}y + \left(1-\widetilde{t}\right)x \in \mathbf{dom}\ f$, thỏa mãn:

$\Rightarrow f(ty + (1-t)x) \geq f\left(\widetilde{t}y + \left(1-\widetilde{t}\right)x\right) + \left[\nabla f\left(\widetilde{t}y + \left(1-\widetilde{t}\right)x\right)\right]^{\mathbf{T}}\left[(y-x)\left(t-\widetilde{t}\right)\right]$

$\Leftrightarrow g(t) \geq g\left(\widetilde{t}\right) + \left[g'\left(\widetilde{t}\right)\right].\left(t-\widetilde{t}\right) \Rightarrow g$ lồi $\Rightarrow f$ lồi .

---

c) Cũng tương tự, ta xét cho 1 chiều trước.

Nếu f lồi, theo câu a) thì $f'' \geq 0$ hay $f'(t)$ đơn điệu tăng.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x - y \geq 0$. Khi đó $f'(x) - f'(y) \geq 0$

$\Rightarrow (f'(x) - f'(y)).(x-y) \geq 0.$

Ngược lại nếu $(f'(x) - f'(y)).(x-y) \geq 0$ hay

$(f'(x) - f'(y)).(x-y) \geq 0$ thì $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng.

Do đó $f''(t) \geq 0$ nên f là hàm lồi.

Cuối cùng, ta xét cho $n \geq 2$. Đặt $g(t)$ thỏa

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \begin{cases} g(t) = f(tx + (1-t)y) \\ g\left(\widetilde{t}\right) = f\left(\widetilde{t}x + \left(1-\widetilde{t}\right)y\right) \end{cases}.$$

Nếu $f(t)$ lồi thì $g(t)$ lồi do đó $\Rightarrow \left(g'(t) - g'\left(\widetilde{t}\right)\right).\left(t-\widetilde{t}\right) \geq 0$

$\Rightarrow (g'(1) - g'(0)) \geq 0.$

Mà $\left[g'(t) - g'\left(\widetilde{t}\right)\right] = \left[\nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f\left(\widetilde{t}x + \left(1-\widetilde{t}\right)y\right)\right]^{\mathbf{T}}.(x-y) \geq 0$

$\Rightarrow \left[\nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f\left(\widetilde{t}x + \left(1-\widetilde{t}\right)y\right)\right]^{\mathbf{T}}.(x-y) \geq 0$

$\Rightarrow (g'(1) - g'(0)) = [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^{\mathbf{T}}.(x-y) \geq 0$

Ngược lại khi $[\nabla f(r) - \nabla f(s)]^{\mathbf{T}}.(r-s) \geq 0$ thì cũng tương tự câu b). Ta lấy x, y bất kỳ và $t, \widetilde{t} \in \mathbb{R}$. Đặt $r = tx + (1-t)y$ và $s = \widetilde{t}x + \left(1-\widetilde{t}\right)y$. Ta có $r - s = (x-y)\left(t-\widetilde{t}\right)$ sao cho :

$\left[\nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f\left(\widetilde{t}x + \left(1-\widetilde{t}\right)y\right)\right]^{\mathbf{T}}.\left[(x-y)\left(t-\widetilde{t}\right)\right] \geq 0$

$\Rightarrow \left[\nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f\left(\widetilde{t}x + \left(1-\widetilde{t}\right)y\right)\right]^{\mathbf{T}}.\left[(x-y).\left(t-\widetilde{t}\right)\right] \geq 0.$

$\Rightarrow \left[g'(t) - g'\left(\widetilde{t}\right)\right]\left(t-\widetilde{t}\right) \geq 0.$

$\Rightarrow g$ lồi nên f cũng là hàm lồi. □

Exercise 1.15. Cho $h = g \circ f$ với $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n,\ h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. CMR

Áp dụng công thức đạo hàm cấp 2 của hàm hợp sau

$$\nabla^2 h(x) = [\nabla f(x)]\left(\nabla^2 g[f(x)]\right).[\nabla f(x)]^{\mathbf{T}} + \nabla g[f(x)].\nabla^2 f(x)$$

Từ đó chứng minh

a) Nếu f lồi và g là hàm lồi, $\widetilde{g}$ không giảm trên $\mathbb{R}$ thì h lồi

b) Nếu f lõm và g là hàm lồi, $\widetilde{g}$ không tăng trên $\mathbb{R}$ thì h lồi

$b)$ Nếu f lồi và g là hàm lõm, $\widetilde{g}$ không giảm trên $\mathbb{R}$ thì h lõm

$d)$ Nếu f lồi và g là hàm lõm, $\widetilde{g}$ không tăng trên $\mathbb{R}$ thì h lõm

Trong đó, $\widetilde{g}$ là hàm mở rộng của $g(x)$

Chứng minh. Ta cũng chỉ cần chứng minh công thức đạo hàm, việc còn lại tương tự bài trên.

Xét $h'(x) = \nabla h(x) = (\nabla g[f(x)])^{\mathbf{T}} . \nabla f(x)$

$\Rightarrow h''(x) = \nabla^2 h(x) = \nabla f(x) [\nabla (\nabla g[f(x)])] + (\nabla g[f(x)]) . \nabla [\nabla f(x)]$

$\Rightarrow \nabla^2 h(x) = (\nabla f(x)) [\nabla^2 g[f(x)]] (\nabla f(x))^{\mathbf{T}} + (\nabla g[f(x)]) . \nabla^2 f(x)$ □

Exercise 1.16. Chứng minh công thức đạo hàm hàm vector sau:

$$f''(x) = g'(x)^{\mathbf{T}} \nabla^2 h[g(x)] . g'(x) + \nabla h[g(x)]^{\mathbf{T}} . g''(x)$$

Trong đó $f(x) = h(g(x)) = h(g_1(x), ..., g_k(x))$với $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Chứng minh. Ta có $f(x) = h(g(x)) = h(g_1(x), ..., g_k(x))$

Áp dụng tương tự bài 1.15 □

Exercise 1.17. Cho không gian định chuẩn $(X, \|.\|)$ và $x = (x_1, ..., x_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$ với chuẩn Euclide$\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$. Cho $p \geq 1$. CMR chuẩn $\|x\|^p$ là hàm lồi.

Chứng minh. Xét $f(x) = \|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$ có ma trận Hessian

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j \in \overline{1,...,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & .... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & .... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & .... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Mà } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}.2x_j \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1/2}\right]$$

$$= \begin{cases} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1/2}\right] & \text{khi } i \neq j \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_i \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1/2}\right] & \text{khi } i = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left[2x_i\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-3/2}\right] & \text{khi } i \neq j \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_i \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1/2}\right] & \text{khi } i = j \end{cases}.$$

$$= \begin{cases} -x_i x_j \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-3/2} \right] & \text{khi } i \neq j \\ \left(\sum\limits_{i \neq k=1}^{n} x_k^2 \right) \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-3/2} \right] & \text{khi } i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-3/2} \right\} \begin{pmatrix} x_2^2 + ... + x_n^2 & -x_1 x_2 & .... & -x_n^2 \\ -x_2 x_1 & x_1^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 & .... & -x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n x_1 & -x_n x_2 & .... & x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

Ta có $\nabla^2 f \succcurlyeq 0$ do $v^{\mathbf{T}} \nabla^2 f(x) v \geq 0, \forall v$ là dạng toàn phương xác định dương và $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-3/2} \geq 0$ nên $\nabla^2 f(x)$ xác định dương và f là hàm lồi.

Mặt khác $g(t) = t^p$ là một hàm lồi với mọi $p \geq 1, t > 0$

$g(t)$ đơn điệu tăng do $g'(t) = p.t^{p-1} > 0, \quad \forall t > 0, p \geq 1$

Áp dụng kết quả bài 1.15, $h = g \circ f = \|x\|^p$ là hàm lồi. □

Exercise 1.18. Bất đẳng thức Jensen. Cho f là hàm lồi và $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ là dãy trong **dom** f và $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in [0,1]$ thỏa $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. CMR

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f(x_k)$$

Chứng minh. Trước tiên khi $n = 1, 2$. Ta dễ dàng kiểm chứng do tính chất hàm lồi. Để bổ sung đầy đủ bằng quy nạp. (các bạn có thể tìm hiểu thêm ở chương 5), ta cần chứng minh

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathbf{dom}\ f.$$

Nhắc lại do f là hàm lồi nên **dom** f là tập lồi, tiếp theo với $n = 1, 2$ thì $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathbf{dom}\ f$.

Giả sử $m = n - 1$, tổ hợp tuyến tính (THTT) đúng, tức $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k \in \mathbf{dom}\ f$.

Ta cần CM tại $m = n$, THTT vẫn đúng $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathbf{dom}\ f$.

Nếu $\lambda_n = 1$.Ta có $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in [0,1]$ nên $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n-1} = 0$ và $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n = x_n \in \mathbf{dom}\ f$.

Nếu $\lambda_n \neq 1$. Đặt $\lambda'_n = (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1}) = 1 - \lambda_n$ và

$$y_n = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}} x_1 + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}} x_{n-1} \right)$$

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}) \left(\dfrac{\lambda_1 x_1}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}} + ... + \dfrac{\lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}} \right) + \lambda_n x_n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda'_n y_n + \lambda_n x_n$ với $\lambda_n + \lambda'_n = 1, x_n,\ y_n \in \mathbf{dom}\ f$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = (1-\lambda_n)\, y_n + \lambda_n x_n \in \mathbf{dom}\ f$

Trở lại bài toán. Giả sử BĐT đúng khi $m = n-1$,tức

$$f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k . f\left(x_k\right)$$

Với $m = n$. Ta cũng có 2 trường hợp :

Nếu $\lambda_n = 1$ thì $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n-1} = 0$ và $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = x_n$ nên

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k . f\left(x_k\right)$$

Nếu $\lambda_n \neq 1$. Ta có

$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = f\left((1-\lambda_n)\, y_n + \lambda_n x_n\right) \leq (1-\lambda_n)\, f\left(y_n\right) + \lambda_n f\left(x_n\right)$

$\Leftrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1})\, f\left(\dfrac{\lambda_1 x_1}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}} + ... + \dfrac{\lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}}\right) + \lambda_n f\left(x_n\right)$

Áp dụng kết quả bước $m = n-1$,ta được:

$\leq (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}}\right).f\left(x_k\right)\right] + \lambda_n f\left(x_n\right)$

$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k . f\left(x_k\right) + \lambda_n f\left(x_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f\left(x_k\right).$ □

Exercise 1.19. BĐT Cauchy - Schwartz mở rộng, Holder.

Cho (x_i)và (y_i) là 2 dãy trong $D = \mathbf{dom} f$. CMR với $p, q > 0$ thỏa $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|\right)^{1/q}$$

Khi $p = q = 2$. Đấy chính là BĐT Caushy - Schwartz quen thuộc.

Chứng minh. Ta có hàm $-\log x$ với $x \in \mathbb{R}_+$ là hàm lồi do:

$f''\left(x\right) = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x > 0$

Áp dụng BĐT Jensen cho a, b ta được $-\log\left[\theta a + (1-\theta)\, b\right] \leq -\left(\theta \log a + (1-\theta) \log b\right)$

$\Rightarrow \log\left[\theta a + (1-\theta)\, b\right] \geq \left(\theta \log a + (1-\theta) \log b\right)$

$\Rightarrow \left[\theta a + (1-\theta)\, b\right] \geq \exp\left(\theta \log a + (1-\theta) \log b\right)$

$\Rightarrow a^{\theta} b^{(1-\theta)} \leq \theta a + (1-\theta)\, b \ (*)$

Đặt $\theta = \dfrac{1}{p} \in (0,1) \Rightarrow (1-\theta) = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}.$

$a = \dfrac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$ và $b = \dfrac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q}$. Thay vào $(*)$, ta được

$$\left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}\right)^{1/q} \le \frac{1}{p}\left[\frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}\right]+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[\frac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{|x_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}}\frac{|y_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}\left[\frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}\right]+\frac{1}{q}\left[\frac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}\right]$$

Cộng 2 vế theo $i = 1 \to n$, ta được:

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i|\right]}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}\left[\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}\right]+\frac{1}{q}\left[\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \le \left\{\frac{1}{p}\left[\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}\right]+\frac{1}{q}\left[\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}\right]\right\}.\left\{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \le \left\{\frac{1}{p}.1+\frac{1}{q}.1\right\}\left[\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}$$ □

Exercise 1.20. CM BĐT Minkowski:

Cho (a_i)và (b_i) là 2 dãy trong $D = \mathbf{dom}f$. CMR với $1 \le p < \infty$ thì

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^n |a_k|\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n |b_k|\right)^{1/p}$$

Chứng minh. Ta có :

$|a_m+b_m|^p \le |a_m+b_m|^{p-1}.\left[|a_m|+|b_m|\right] = |a_m|\,|a_m+b_m|^{p-1}+|b_m|\,|a_m+b_m|^{p-1}$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p \le \sum_{m=1}^n \left\{\left(|a_m+b_m|^{p-1}\right)\left(|a_m|+|b_m|\right)\right\}$ (1)

Áp dụng BĐT Holder, $r.s \le r^{1/p}s^{1/q}$ cho $r = a_m,\ s = |a_m+b_m|^{p-1}$

$\sum_{m=1}^n |a_m|\,|a_m+b_m|^{p-1} \le \left(\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left(\sum_{m=1}^n |a_m|^p\right)^{1/p}$

Lại có $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q(p-1) = \dfrac{(p-1)}{1-\dfrac{1}{p}} = p$

Vậy $\sum_{m=1}^n |a_m|\,|a_m+b_m|^{p-1} \le \left(\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{m=1}^n |a_m|^p\right)^{1/p}$ (2)

Tương tự $\sum_{m=1}^n |b_m|\,|a_m+b_m|^{p-1} \le \left(\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right)^{1/q}\left(\sum_{m=1}^n |b_m|^p\right)^{1/p}$ (3)

Thay (2) + (3) ta được :

$$\sum_{m=1}^n \left\{|a_m+b_m|^{p-1}.\left[|a_m|+|b_m|\right]\right\} \le \left\{\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right\}^{1/q}\left[\left(\sum_{m=1}^n |a_m|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^n |b_m|^p\right)^{1/p}\right]$$

Mà theo (1) thì $\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p \le \sum_{m=1}^n \left\{|a_m+b_m|^{p-1}\left[|a_m|+|b_m|\right]\right\}$

Vậy $\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p \le \left\{\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right\}^{1/q}\left[\left(\sum_{m=1}^n |a_m|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^n |b_m|^p\right)^{1/p}\right]$

Chia 2 vế cho $\left\{\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right\}^{1/q}$ với $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, ta được :

$\left(\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right).\left(\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right)^{-1/q} \le \left[\left(\sum_{m=1}^n |a_m|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^n |b_m|^p\right)^{1/p}\right]$

$\Rightarrow \left(\sum_{m=1}^n |a_m+b_m|^p\right)^{1/p} \le \left[\left(\sum_{m=1}^n |a_m|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^n |b_m|^p\right)^{1/p}\right].$ □

Exercise 1.21. Cho A là tập lồi, $x \in A$ và $t > 0$. CMR :

$$P^{-1}(A) = \left\{(x,t) \in A \times \mathbb{R}_{++} : \quad \frac{x}{t} \in A, t > 0\right\}$$

là tập lồi.

Chứng minh. Xét với mỗi $(x,t), (y,s) \in P^{-1}(A)$ và $0 \le \theta \le 1$. Ta cần các điều kiện sau:

$\theta(x,t) + (1-\theta)(y,s) \in P^{-1}(A)$ hay $(\theta x + (1-\theta) y, \theta t + (1-\theta) s) \in P^{-1}(A)$

i.e., $\dfrac{\theta x + (1-\theta) y}{\theta t + (1-\theta) s} \in A$ và $\theta t + (1-\theta) s > 0$

Ta có $\forall s, t > 0$ thì $\theta t + (1-\theta) s > 0, \quad \forall \theta \in [0,1]$ hiển nhiên

Mặt khác xét $\dfrac{\theta x + (1-\theta) y}{\theta t + (1-\theta) s} = \mu\left(\dfrac{x}{t}\right) + (1-\mu)\left(\dfrac{y}{s}\right)$

Trong đó $\mu = \dfrac{\theta t}{\theta t + (1-\theta) s} \in [0,1], \quad \forall t, s > 0, \forall \theta \in [0,1]$

Do A lồi nên với mỗi $\left(\dfrac{x}{t}\right), \left(\dfrac{y}{s}\right) \in A$ và $\mu \in [0,1]$ thì $\mu\left(\dfrac{x}{t}\right) + (1-\mu)\left(\dfrac{y}{s}\right) \in A$

Vậy $\dfrac{\theta x + (1-\theta) y}{\theta t + (1-\theta) s} \in A$ nên đủ điều kiện để kết luận $P^{-1}(A)$ lồi. □

Exercise 1.22. Cho f là hàm xác định trên trên $\mathbb{R}^n$ và $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x,t) = tf(x/t)$$

với miền xác định $\mathbf{dom} g = \{(x,t) : \quad x/t \in \mathbf{dom} f, \ t > 0\}$. CMR nếu f lồi thì g lồi và f lõm thì g lõm.

Chứng minh. Áp dụng kết quả bài 1.21 với f lồi nên $\mathbf{dom} f = A$ lồi và $\mathbf{dom} g = P^{-1}(A)$cũng lồi. Do đó g lồi.

Trường hợp không sử dụng trực tiếp kết quả bài 1.21, ta sẽ chứng minh cho f lồi, khi f lõm chỉ làm tương tự.

Lấy $(x,t), (y,s) \in P^{-1}(A)$ và $0 \le \theta \le 1$. Ta có

$$\begin{aligned} g(\theta(x,t) + (1-\theta)(y,s)) &= g(\theta x + (1-\theta) y, \theta t + (1-\theta) s) \\ &= (\theta t + (1-\theta) s) . f\left(\frac{\theta x + (1-\theta) y}{\theta t + (1-\theta) s}\right) \end{aligned}$$

Mặt khác xét $\mu = \dfrac{\theta t}{\theta t + (1-\theta) s} \in [0,1], \quad \forall t, s > 0, \forall \theta \in [0,1]$ như cũ

Ta được $g(\theta(x,t) + (1-\theta)(y,s)) = (\theta t + (1-\theta) s) . f\left(\mu \dfrac{x}{t} + (1-\mu) \dfrac{y}{s}\right)$

Vì f lồi nên $f\left(\mu \dfrac{x}{t} + (1-\mu) \dfrac{y}{s}\right) \le \mu f\left(\dfrac{x}{t}\right) + (1-\mu) f\left(\dfrac{y}{s}\right), \forall \dfrac{x}{t}, \dfrac{y}{s} \in A, \mu \in [0,1]$

$\Rightarrow g(\theta(x,t) + (1-\theta)(y,s)) \le (\theta t + (1-\theta) s) . \left[\mu f\left(\dfrac{x}{t}\right) + (1-\mu) f\left(\dfrac{y}{s}\right)\right]$

$\Rightarrow g(\theta(x,t) + (1-\theta)(y,s)) \le [(\theta t + (1-\theta) s)\mu] f\left(\dfrac{x}{t}\right) + [(1-\mu)(\theta t + (1-\theta) s)] . f\left(\dfrac{y}{s}\right)$

$$\Rightarrow g\left(\theta\left(x,t\right)+\left(1-\theta\right)\left(y,s\right)\right)\leq\left(\theta t\right)f\left(\frac{x}{t}\right)+\left[\left(1-\theta\right)s\right].f\left(\frac{y}{s}\right)$$

Vậy $g\left(\theta\left(x,t\right)+\left(1-\theta\right)\left(y,s\right)\right)\leq\theta\left[tf\left(\frac{x}{t}\right)\right]+\left(1-\theta\right)\left[sf\left(\frac{y}{s}\right)\right]$

$=\theta g\left(x,t\right)+\left(1-\theta\right)g\left(y,s\right)$. Hay $g\left(x,t\right)$ lồi. □

Exercise 1.23. CMR nếu f lồi (hoặc lõm) và đơn điệu trên $I\subset\mathbb{R}$ thì f^{-1} sẽ lõm (hoặc lồi) trên I.

Chỉ ra rằng trường hợp đơn điệu không thể bỏ qua.

Chứng minh. Xét f lồi trên I nên $f''\left(t\right)\geq 0,\ \forall t\in I$. Mặt khác thì theo công thức đạo hàm hàm ngược, ta có

$$\left[f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)\right]'=\frac{1}{f'\left(x\right)}\qquad(*)$$

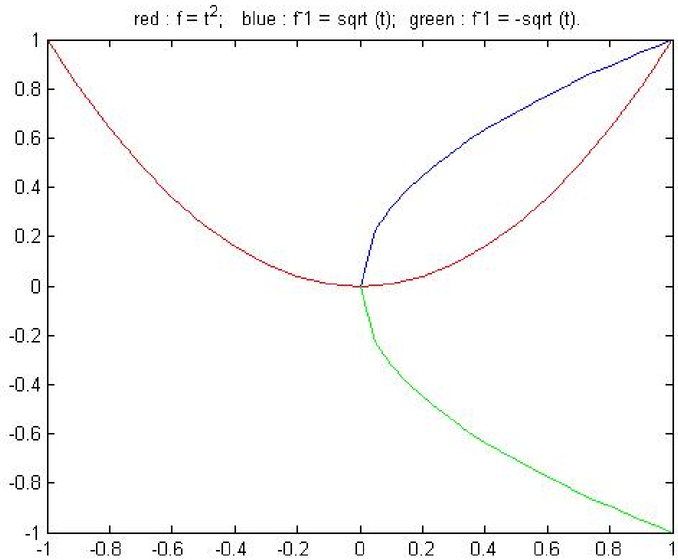
$$\Rightarrow\left[f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)\right]''=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'\left(x\right)}\right]=\frac{-f''\left(x\right)}{\left[f'\left(x\right)\right]^2}\leq 0 \text{ do } f''\left(t\right)\geq 0,\ \forall t\in I.$$

Mà công thức đạo hàm hàm ngược có điều kiện là ánh xạ này phải đơn điệu trên I.

Do đó $(*)$ đúng hay f^{-1} lõm khi và chỉ khi f đơn điệu trên I.

Tương tự cho khi f lõm thì f^{-1}lồi.

Cuối cùng, điều kiện đơn điệu không thể bỏ qua do khi xét hàm $f\left(x\right)=x^2$ và $I=\left(-1,1\right)$.

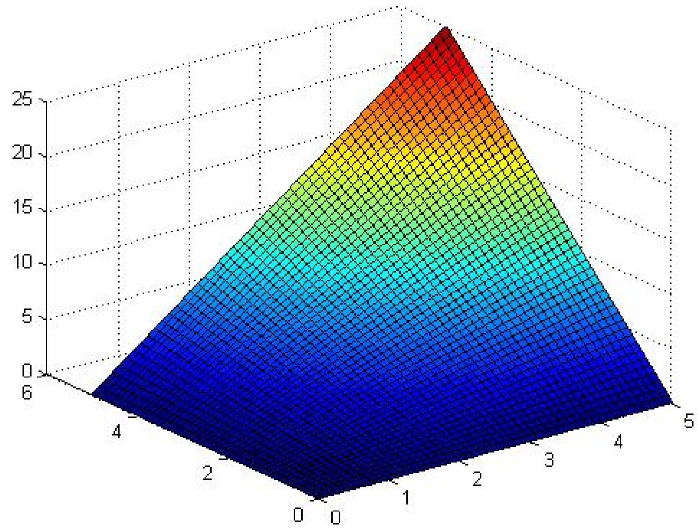


Do f không đơn điệu trên I vì nó giảm khi $t<0$ và tăng khi $t>0$.

Xét $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{x}$ hoặc $f^{-1}\left(x\right)=-\sqrt{x}$ là một hàm lồi khi $x<0$ và lõm khi $x>0$. □

Exercise 1.24. Hàm sau có phải hàm lồi, tựa lồi, lõm hay tựa lõm.

$f\left(x_1,x_2\right)=x_1x_2,\quad\forall\left(x_1x_2\right)\in\mathbb{R}^2_{++}$



Chứng minh. Ta có $\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ có các trị riêng là $-1, 1$ nên nó không lồi cũng không lõm.

Mặt khác, xét tập mức $A_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^2_{++} : \quad x_1 x_2 \geq \alpha\right\}$ là tập lồi nên nó là hàm tựa lõm do:

$\forall x, y \in A_\alpha$ thì $\begin{cases} x_1 x_2 \geq \alpha \\ y_1 y_2 \geq \alpha \end{cases}$. Cần kiểm chứng với $t \in [0, 1]$ thì $tx + (1-t)y \in A_\alpha$

i.e. $(tx_1 + (1-t)y_1) . (tx_2 + (1-t)y_2) \geq \alpha.$

Vì $\begin{cases} x_1 x_2 \geq \alpha & \forall x_1, x_2 > 0 \\ y_1 y_2 \geq \alpha & \forall y_1, y_2 > 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \log x_1 + \log x_2 = \log(x_1 x_2) \geq \log|\alpha| & (1) \\ \log y_1 + \log y_2 = \log(y_1 y_2) \geq \log|\alpha| & (2) \end{cases}$.

Cộng 2 vế của (1) nhân với t và (2) nhân với $(1-t)$, ta được

$t(\log x_1 + \log x_2) + (1-t)(\log y_1 + \log y_2) \geq \log|\alpha|$ hay

$\Leftrightarrow [t \log x_1 + (1-t)\log y_1] + [t \log x_2 + (1-t)\log y_2] \geq \log|\alpha|.$ (3)

Ta có $\log t$ là hàm lõm nên $\log(tx_1 + (1-t)y_1) \geq t \log x_1 + (1-t)\log y_1$. (4)

Tương tự ta cũng được $\log(tx_2 + (1-t)y_2) \geq t \log x_2 + (1-t)\log y_2$. (5)

Cộng (4)và (5) rồi thay vào (3) , ta được :

$\log(tx_1 + (1-t)y_1) + \log(tx_2 + (1-t)y_2) \geq \log|\alpha|$

$\Rightarrow \exp\{\log(tx_1 + (1-t)y_1) + \log(tx_2 + (1-t)y_2)\} \geq |\alpha| \geq \alpha$

Vậy $\exp\{\log(tx_1 + (1-t)y_1)\} . \exp\{\log(tx_2 + (1-t)y_2)\} \geq \alpha$ hay

$(tx_1 + (1-t)y_1) . (tx_2 + (1-t)y_2) \geq \alpha$. *(đpcm)* □

Exercise 1.25. CMR nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm tựa nếu và chỉ nếu thì $g(t) = f(tx + (1-t)y)$ cũng tựa lồi với $x, t \in \mathbf{dom} f$. Tổng quát chứng minh cho làm tỷ số tuyến tính :

$h(z) = \dfrac{a^T z + b}{c^T z + d}$ với $\mathbf{dom} f = \left\{x : c^T x + d > 0\right\}$ là tựa lồi, tựa lõm và tựa tuyến tính.

Chứng minh. Ta chia bài này làm 2 vế.

i) Xét $\forall t, s \in S_{g,\alpha} = \{t \in \mathbf{dom} g : \ g(t) \leq \alpha\}$, với $\theta \in [0,1]$ bất kỳ.

Ta có $g(t) = f(tx + (1-t)y) \leq \alpha$ và $g(s) = f(sx + (1-s)y) \leq \alpha$.

Đặt $r = \theta t + (1-\theta)s \in [0,1]$

•Nếu f tựa lồi. *C.M.* $g(t) = f(tx + (1-t)y)$ tựa lồi với $t \in [0,1]$

hay ta cần CM $g(\theta t + (1-\theta)s) \leq \alpha$

Do $S_{f,\alpha} = \{x \in \mathbf{dom} f : \ f(x) \leq \alpha\}$ lồi nên ta có

$g(r) = f(rx + (1-r)y) \leq \alpha, \quad \forall x, t \in S_{f,\alpha}, \forall r \in [0,1]$

$$\Rightarrow \theta t + (1-\theta)s \in S_{g,\alpha} \text{ nên } S_{g,\alpha} \text{ lồi.}$$

• Nếu $g(t)$tựa lồi, thì $S_{g,\alpha}$ lồi nên $g(r) = f(rx + (1-r)y) \leq \alpha$

$\Leftrightarrow g(r) = f(rx + (1-r)y) \leq \alpha, \ \forall x, y \in S_{f,\alpha}$

$\Rightarrow rx + (1-r)y \in S_{f,\alpha}, \ \forall x, y \in S_{f,\alpha}$.

Do đó $S_{f,\alpha}$lồi hay f tựa lồi,

ii) $h(z) = \dfrac{a^T z + b}{c^T z + d}$ với $\mathbf{dom} f = \left\{x : \ c^T x + d > 0\right\}$ là tựa lồi, tựa lõm, tựa tuyến tính.

$$\begin{aligned}\text{Xét tập mức } S_\lambda &= \left\{z : \ c^T z + d > 0 \text{ và } \frac{a^T z + b}{c^T z + d} \leq \alpha\right\} \\ &= \left\{z : \ c^T z + d > 0 \text{ và } a^T z + b \leq \alpha. \left(c^T z + d\right)\right\} \\ &= \left\{z : \ c^T z + d > 0 \text{ và } \left(a^T - \alpha c^T\right) z \leq (\alpha d - b)\right\} \\ &= \left\{z : \ c^T z + d > 0 \text{ và } (a - \alpha c)^T .z \leq (\alpha d - b)\right\}\end{aligned}$$

$$\forall p, q \in S_\lambda, \mu \in [0,1] \text{ thì } \begin{cases} c^T p + d > 0 \text{ và } (a - \alpha c)^T .p \leq (\alpha d - b) \\ c^T q + d > 0 \text{ và } (a - \alpha c)^T .q \leq (\alpha d - b) \end{cases}.$$

$$c^T [\mu p + (1-\mu) q] + d = \mu \left(c^T p + d\right) + (1-\mu)\left(c^T q + d\right) > 0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}(a - \alpha c)^T . [\mu p + (1-\mu) q] &= \mu \left[(a - \alpha c)^T .p\right] + (1-\mu)\left[(a - \alpha c)^T .q\right] \\ &\leq \mu(\alpha d - b) + (1-\mu)(\alpha d - b) = (\alpha d - b)\end{aligned} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $\mu p + (1-\mu) q \in S_\lambda$nên S_λ lồi.

Tương tự thì với $S_\eta = \left\{z : \ c^T z + d > 0 \text{ và } \dfrac{a^T z + b}{c^T z + d} > \eta\right\}$ cũng lồi nên $h(z)$ tựa lõm do đó cũng tựa tuyến tính. □

Exercise 1.26. Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi. CMR f là hàm tựa lồi nếu và chỉ nếu $\mathbf{dom} f$ lồi và $\forall x, y \in \mathbf{dom} f$ sao cho $f(y) \leq f(x)$ thì $\nabla f(x)^{\mathbf{T}} (y - x) \leq 0$.

Chứng minh. Xét khi $n = 1$, giả sử f là hàm tựa lồi

Khi đó $S_\alpha = \{y \in \mathbf{dom} f : \ f(y) \leq f(x)\}$ lồi với $\alpha = f(x)$.

Ta có $x \in S_\alpha$do $f(x) = f(x)$, với $x \in \mathbf{dom} f$, lấy $\theta \in [0,1]$, ta được :

$[\theta y + (1-\theta)x] \in S_\alpha$ và $f(\theta y + (1-\theta)x) \leq f(x)$

Nếu $\theta = 0$ hoặc $x = y$ thì $\nabla f(x)^{\mathbf{T}}(y-x) = f'(x)(y-x) = 0.$ $\quad (*)$

Nếu $\theta \neq 0$ và $x \neq y$ thì $f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x) \leq 0, i.e.$

$$\frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta} \leq 0,\ \forall \theta \in (0,1]$$

$$\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta}\right) \leq 0,\ \forall \theta \in (0,1]$$

$[f'(x)].(y-x) \leq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ kết hợp với $(*)$

Vậy $[f'(x)].(y-x) \leq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (1.i)$

Tiếp theo xét chiều đảo, ta có nếu $[f'(x)].(y-x) \leq 0$ thì cần chứng minh f tựa lồi hay tập mức của nó là tập lồi

$$\text{Ta có} \begin{cases} [f'(x)] \leq 0, (y-x) > 0 \\ \text{hoặc } [f'(x)] > 0, (y-x) \leq 0 \end{cases} \quad (**)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x > y$ hay $x - y > 0$ thì theo $(**)$, ta được $[f'(x)] \leq 0$

Điều này có nghĩa là $f(t)$ là hàm giảm trên $\mathbf{dom}f$ nên

$$f(x) \leq f(y), \quad \forall x > y.$$

Lấy $\beta = f(y)$ và $x \leq z \leq y$ dưới dạng $z = \theta x + (1-\theta)y$ với $\theta \in [0,1]$ thì

$$f(\theta x + (1-\theta)y) = f(z) \leq f(y), \quad \forall z < y.$$

Vậy $z = \theta x + (1-\theta)y \in S_\beta, \quad \forall x, y \in S_\beta$ hay $S_\beta$là tập lồi.

Tương tự khi $x \leq y$ thì S_α cũng lồi với $\alpha = f(x)$ $\quad (1.ii)$

Từ $(1.i)$ và $(1.ii)$ ta đã chứng minh xong cho trường hợp $n = 1$.

Khi $n \geq 2$, ta đặt $g(t) = f(ty + (1-t)x)$ và $g(\widetilde{t}) = f(\widetilde{t}y + (1-\widetilde{t})x)$ sao cho

$$g(\widetilde{t}) \leq g(t).$$

Ta xét chiều thuận nếu f tựa lồi. Khi đó $g(t)$ cũng là hàm tựa lồi (sử dụng kết quả bài 1.25) và theo trường hợp 1 chiều, ta được

$[g'(t)].(\widetilde{t} - t) \leq 0$. Thay $t = 0$ và $\widetilde{t} = 1$

$[\nabla f(x)]^{\mathbf{T}}.(y-x) \leq 0$ $\quad (2.i)$

Ta xét chiều đảo, giả sử $[\nabla f(a)]^{\mathbf{T}}.(b-a) \leq 0$, với $a = ty + (1-t)x$ và $b = \widetilde{t}y + (1-\widetilde{t})x$, ta được

$$\left\{[g'(t)].(y-x)^{\mathbf{T}}\right\}.(y-x)(t-\widetilde{t}) \leq 0$$

$$\left\{(y-x)^{\mathbf{T}}(y-x)\right\}.[g'(t)].(t-\widetilde{t}) \leq 0$$

Mà $(y-x)^{\mathbf{T}}(y-x) \geq 0$ nên $[g'(t)].(t-\widetilde{t}) \leq 0$.

Do đó $g(t)$ là hàm tựa lồi nên f cũng tựa lồi. $\quad (2.ii)$

Từ $(2.i)$ và $(2.ii)$ thì trường hợp $n \geq 2$ đã được chứng minh. □

Exercise 1.27. Một số hình ảnh hàm lồi, lõm trong KG 3 chiều.

a) $f(x,y) = \log(e^x + e^y)$. Từ đó chứng minh

$$\log\left[\sum_{i=1}^{n} \exp(x_i)\right] \text{ là hàm lồi}$$

Trong đó $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, với $1 \le i \le n$.

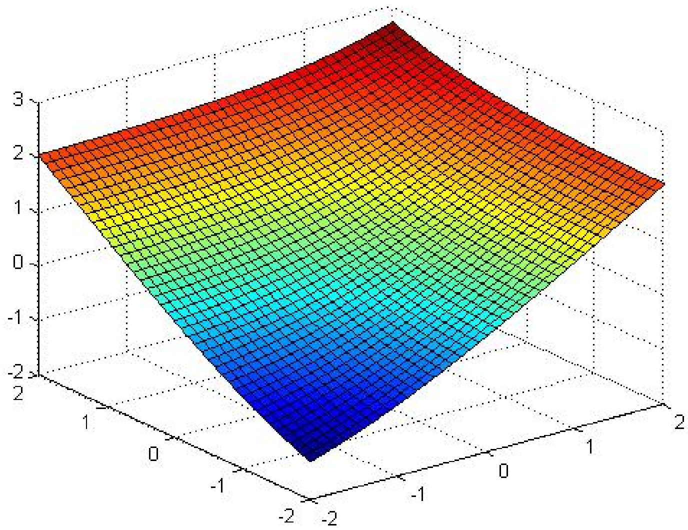
Hàm này được gọi là $\log - sum - \exp$

b) $g(x,y) = \sqrt{x.y}$. Từ đó suy ra $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, với $1 \le i \le n$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \text{ là hàm lõm trên } \mathbb{R}^n_{++}$$

Chứng minh. Với n bất kỳ ta có ma trận Hessian của chúng là:

$$a)\quad \nabla^2 f(x) = \nabla \begin{pmatrix} \dfrac{\exp x_1}{\sum_{i=1}^n \exp(x_i)} \\ \dfrac{\exp x_2}{\sum_{i=1}^n \exp(x_i)} \\ \vdots \\ \dfrac{\exp x_n}{\sum_{i=1}^n \exp(x_i)} \end{pmatrix} = \nabla\left(\left\{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \exp(x_i)}\right\} . \begin{pmatrix} \exp x_1 \\ \exp x_2 \\ \vdots \\ \exp x_n \end{pmatrix}\right)$$



$$\nabla^2 f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \exp(x_i) \begin{pmatrix} \exp x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \exp x_1 \\ \exp x_2 \\ \vdots \\ \exp x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp x_1 \\ \exp x_2 \\ \vdots \\ \exp x_n \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}}{\left(\sum_{i=1}^n \exp(x_i)\right)^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \frac{1}{(\mathbf{1^T} z)^2}\left[(\mathbf{1^T} z)\,\mathbf{diag}(z) - z.z^T\right]$$

Trong đó $z = (\exp x_1, ..., \exp x_n)$, và $\mathbf{1} = \Big(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n \text{ lần}}\Big)$.

Để kiểm chứng $\nabla^2 f \succeq 0$, ta sẽ kiểm tra $v^{\mathbf{T}}.\nabla^2 f v \geq 0,\ \forall v$. Tức là:

$$v^{\mathbf{T}}.\nabla^2 f(x)\, v = v^{\mathbf{T}} \left\{ \frac{1}{(\mathbf{1}^{\mathbf{T}} z)^2} \left[(\mathbf{1}^{\mathbf{T}} z)\, \mathbf{diag}(z) - z.z^T \right] \right\}.v$$

$$= \frac{1}{(\mathbf{1}^{\mathbf{T}} z)^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2.z_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} v_k z_k\right)^2 \right] \geq 0$$

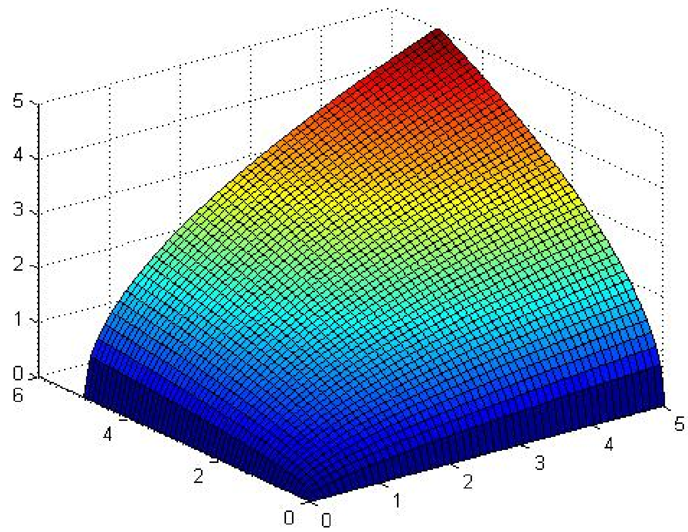
Ta có $(\mathbf{1}^{\mathbf{T}} z)^2 \geq 0$ và áp dụng BĐT Cauchy-Schwartz

$$(a^{\mathbf{T}} a)(b^{\mathbf{T}} b) \geq (a^{\mathbf{T}} b)^2 \text{ với } a_k = v_k \sqrt{z_k} \text{ và } b_k = \sqrt{z_k}, \text{ ta được:}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2.z_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} v_k z_k\right)^2 \geq 0$$

Do đó $\dfrac{1}{(\mathbf{1}^{\mathbf{T}} z)^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2.z_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} v_k z_k\right)^2 \right] \geq 0.$

b)



Ta có $g(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ và $\dfrac{\partial g}{\partial x_k} = \dfrac{\frac{1}{n}.\left(\prod_{k \neq m=1}^{n} x_m\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1-1/n}} = \dfrac{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}}{n.x_k}$ nên ta được

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l} = \dfrac{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}}{n^2 x_k x_l} & \forall k \neq l \\ \text{và } \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} = -(n-1) \dfrac{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}}{n^2 x_k^2} \end{cases}.$$

Ta xét ma trận Hessian của g có dạng :

$$\nabla^2 g(x) = -\frac{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}}{n^2} \left(n.\mathbf{diag}\left(\frac{1}{x_1^2}, ..., \frac{1}{x_n^2}\right) - p.p^{\mathbf{T}} \right) \text{ với } p = (p_i) = \left(\frac{1}{x_i}\right).$$

Để kiểm chứng $\nabla^2 g \preceq 0$ hay $v^{\mathbf{T}} \nabla^2 g.v \leq 0, i.e.$

$$v^{\mathbf{T}}\nabla^2 g(x).v = -\frac{\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n}}{n^2}\left\{\left(n\sum_{k=1}^n \frac{v_k^2}{x_k^2}\right) - \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{v_k^2}{x_k}\right)\right)\right\} \le 0,\ \forall v$$

$\Bigg($Do BĐT Cauchy-Schwartz $\left(a^T a\right)\left(b^T b\right) \ge \left(a^T b\right)^2$ với $a = \mathbf{1} = (1, 1, ..1)$ và $b = (b_i) = \left(\frac{v_i}{x_i}\right)\Bigg)$, ta được *đpcm*. □

Exercise 1.28. Tổng, hiệu, max, min 2 hàm lồi (lõm) có lồi (lõm) không?

Chứng minh. • Ta có với 2 hàm $f, g : D \to \mathbb{R}$ lồi thì

$$\forall x, y \in D \text{ thì } \begin{cases} f(\theta x + (1-\theta) y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \\ g(\theta x + (1-\theta) y) \le \theta g(x) + (1-\theta) g(y) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow [f+g](\theta x + (1-\theta) y) \le \theta [f+g](x) + (1-\theta)[f+g](y)$$

$\Rightarrow [f+g]$ là hàm lồi.

• Tương tự, ta cũng được $[f+g]$ là hàm lõm.

• Nhưng hiệu 2 hàm lồi không thể kết luận là hàm lồi do xét $f(x) = \frac{x^2}{2}$ và $g(x) = x^2$. Khi đó

f, g là các hàm lồi nhưng $[f-g](x) = -\frac{x^2}{2}$ là hàm lõm.

• Tương tự không thể kết luận cho hiệu 2 hàm lõm.

• Xét max 2 hàm lồi $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ với $\mathbf{dom}h = \mathbf{dom}f \cap \mathbf{dom}g$ cũng là tập lồi.

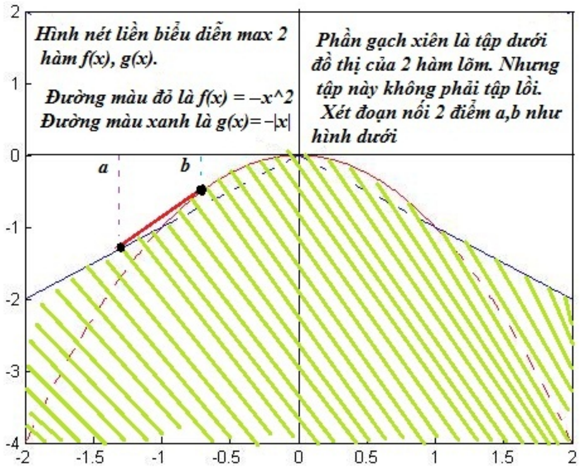
$$\begin{aligned} \forall x, y \in D \text{ thì } h(\theta x + (1-\theta) y) &= \max\{f(\theta x + (1-\theta) y), g(\theta x + (1-\theta) y)\} \\ &\le \max\{\theta f(x) + (1-\theta) f(y), \theta g(x) + (1-\theta) g(y)\} \\ &\le \max\{\theta f(x), \theta g(x)\} + \max\{(1-\theta) f(y), (1-\theta) g(y)\} \\ &\le \theta \max\{f(x), g(x)\} + (1-\theta)\max\{f(y), g(y)\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(\theta x + (1-\theta) y) \le \theta h(x) + (1-\theta) h(y),\ \forall x, y \in D.$$

• Ta không thể kết luận cho hàm lõm do xét ví dụ sau :

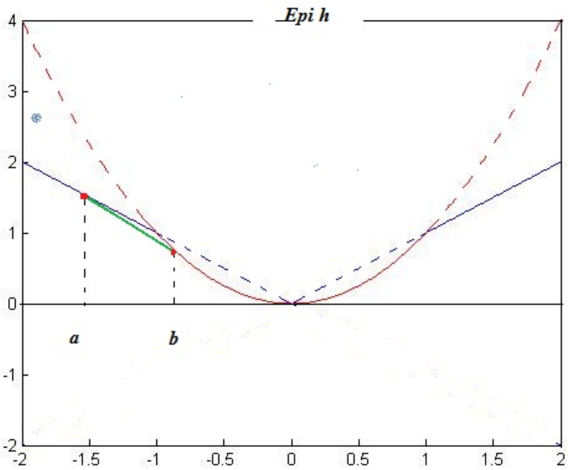
Cho $f(x) = x^2$, $g(x) = -|x|$ là các hàm lõm.

Nhưng $\max\{f(x), g(x)\}$ có *hypograph* là tập không lồi do đoạn nối 2 điểm a, b như hình dưới không nằm trong tập dưới đồ thị đó.



• Xét min 2 hàm lồi chưa thể kết luận là hàm lồi do hình sau:

Lập luận tương tự như trên, với hàm $f(x) = x^2, g(x) = |x|$ và $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$



• Cuối cùng là min 2 hàm lõm là hàm lõm do với giả thiết:

$\max\{f(x), g(x)\}$ lồi với mọi $f(x), g(x)$ lồi.

Khi đó $-f(x)$, $-g(x)$ và $-\max\{f(x), g(x)\}$ là hàm lõm.

Vậy $\min\{-f(x), -g(x)\} = -\max\{f(x), g(x)\}$ là hàm lõm. □

Exercise 1.29. CM các BĐT sau.

i) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $abc(a+b+c) \le a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \le a^4 + b^4 + c^4$.

ii) $\forall a, b, c > 0$ thì $\dfrac{1}{a(1+b)} + \dfrac{1}{b(1+c)} + \dfrac{1}{c(1+a)} \ge \dfrac{3}{1+abc}$ và

iii) $\forall a, b, c > 0$ thì $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \le \dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3+b^3+c^3}$

Chứng minh. Áp dụng BĐT Cauchy-Schwartz $(x^Ty) \le (x^Tx)^{1/2} . (y^Ty)^{1/2}$

i) Với 2 cặp $x = (ab, bc, ca)$ và $y = (ca, ab, bc)$, ta được $abc(a+b+c) \le a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Tương tự áp dụng BĐT Cauchy-Schwartz cho $x = (a^2, b^2, c^2)$ và $y = (b^2, c^2, a^2)$, ta được $abc\,(a + b + c) \leq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

$ii)$ Quy đồng 2 vế, ta cần CM:

$$B = (bc\,(1 + c)\,(1 + a) + ac\,(1 + a)\,(1 + b) + ab\,(1 + b)\,(1 + c))\,((1 + abc))$$
$$-3abc\,(1 + a)\,(1 + b)\,(1 + c) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow B = ab\,(1 + b)\,(1 - ac)^2 + bc\,(1 + c)\,(1 - ab)^2 + ac\,(1 + a)\,(1 - bc)^2 \geq 0$$
$$\forall a, b, c > 0 \text{ (hiển nhiên)}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

$iii)$ Ta có $\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \geq \sqrt{xy},\ \forall x, y > 0$. Với $x = \dfrac{a^5}{b^3c^3}, y = \dfrac{b^5}{a^3c^3}$. Ta được :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3}\right) \geq \frac{ab}{c^3}.$$

Tương tự, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^5}{b^3c^3} + \dfrac{c^5}{a^3b^3}\right) \geq \dfrac{ac}{b^3}$ và $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c^5}{b^3a^3} + \dfrac{b^5}{a^3c^3}\right) \geq \dfrac{bc}{a^3}$.

Cộng 2 vế chúng lại với nhau, ta được :

$$\frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{ba}{c^3} + \frac{bc}{a^3} + \frac{ac}{b^3} \qquad (1).$$

Mặt khác, ta đặt các cặp

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{ab}{c^3}, \frac{bc}{a^3}\right), (x_2, y_2) = \left(\frac{ab}{c^3}, \frac{ac}{b^3}\right) \text{ và } (x_3, y_3) = \left(\frac{ac}{b^3}, \frac{bc}{a^3}\right)$$

Tương ứng ta được $(x_1 + y_1) \geq \dfrac{b}{2ac}, (x_2 + y_2) \geq \dfrac{a}{2bc}$ và $(x_3 + y_3) \geq \dfrac{c}{2ab}$

$$\frac{ba}{c^3} + \frac{bc}{a^3} + \frac{ac}{b^3} \geq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \qquad (2).$$

Cuối cùng với 3 cặp $(x_1, y_1) = \left(\dfrac{b}{ac}, \dfrac{c}{ab}\right), (x_2, y_2) = \left(\dfrac{b}{ac}, \dfrac{a}{bc}\right)$ và $(x_3, y_3) = \left(\dfrac{a}{bc}, \dfrac{c}{ab}\right)$

Ta được $(x_1 + y_1) \geq \dfrac{1}{a}, (x_2 + y_2) \geq \dfrac{1}{c}$ và $(x_3 + y_3) \geq \dfrac{1}{b}$

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad (3)$$

Từ $(1), (2)$ và (3), ta được *đpcm*. □

Exercise 1.30. Cho $a, b, c > 0$. CMR:

$$\max\left\{a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{c}, c + \frac{1}{a}\right\} \geq 2$$

Chứng minh. Đặt $\alpha = a + \dfrac{1}{b}, \beta = b + \dfrac{1}{c}$ và $\gamma = c + \dfrac{1}{a}$.

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6,\ \forall a, b, c > 0$$

Sd phản chứng. Giả sử $\max\{\alpha, \beta, \gamma\} < 2$.

Mà $\alpha, \beta, \gamma > 0$ do $a, b, c > 0$ nên $0 < \alpha, \beta, \gamma < 2$.

Vì $\alpha, \beta, \gamma < 2$. Do đó $\alpha + \beta + \gamma < 6$. Vô lý. □

1.2.2 Dãy & chuỗi.

Exercise 1.31. Cho $\lambda \in \mathbb{R}, (u_n), (v_n)$ là 2 dãy số thực và $l, l' \in \mathbb{R}$. CMR khi $n \to \infty$ thì:

$i)$ Nếu $u_n \to l$ thì $|u_n| \to |l|$

$ii)$ Nếu $\begin{cases} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n \to l + l'$

$iii)$ Nếu $u_n \to l$ thì $\lambda u_n \to \lambda l$

$iv)$ Nếu $\begin{cases} u_n \to l \text{ bị chặn} \\ v_n t \to l' \end{cases} \Rightarrow u_n v_n \to l.l'$

$v)$ Nếu $u_n \to l \neq 0$ thì $1/u_n \to 1/l$. Hơn thế nữa nếu $l = \infty$ thì $1/u_n \to 0$.

$vi)$ Nếu $\begin{cases} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{cases}$ và $\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \leq v_n,\ \forall n \geq m \ \Rightarrow \ l \leq l'$.

$vii)$ Nếu có dãy t_n thỏa $\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \leq t_n \leq v_n,\ \forall n \geq m$ và $l = l'$ thì $t_n \to l$.

Chứng minh. Ta có:

$i)$ Cho $\epsilon > 0$,có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N$ thì $|u_n - l| \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall n > N(\epsilon)$ thì $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq \epsilon$ theo kết quả bài tập 1.11 $a)$

$\Rightarrow \forall n > N(\epsilon)$ thì $||u_n| - |l|| \leq \epsilon$ hay $|u_n| \to |l|$.

$ii)$ Cho $\epsilon_1 > 0$,có $N_1(\epsilon_1) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_1$ thì $|u_n - l| \leq \epsilon_1$ và

Cho $\epsilon_2 > 0$,có $N_2(\epsilon_2) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_2$ thì $|v_n - l'| \leq \epsilon_2$

Chọn $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 > 0,\ N(\epsilon) = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon,\ \forall n > N.$$

Do đó $u_n + v_n \to l + l'$.

$iii)$ Cho $\epsilon_1 > 0$,có $N_1(\epsilon_1) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_1$ thì $|u_n - l| \leq \epsilon_1$

Chọn $\epsilon = |\lambda| \epsilon_1 > 0,\ N(\epsilon) = N_1$. Khi đó

$$|\lambda u_n - \lambda l| \leq |\lambda| |u_n - l| \leq |\lambda| \epsilon_1 = \epsilon,\ \forall n > N.$$

Do đó $\lambda u_n \to \lambda l$.

$iv)$ Cho $\epsilon_1 > 0$,có $N_1(\epsilon_1) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_1$ thì $|u_n - l| \leq \epsilon_1$ và

Cho $\epsilon_2 > 0$,có $N_2(\epsilon_2) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_2$ thì $|v_n - l'| \leq \epsilon_2$

Xét u_n bị chặn nên $\exists M > 0$ sao cho $|u_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$|(u_n v_n) - l.l'| \leq |u_n| |v_n - l'| + |l'| |u_n - l| \leq M.\epsilon_2 + \epsilon_1 |l|.$$

Chọn $\epsilon = M.\epsilon_2 + \epsilon_1 |l| > 0,\ N(\epsilon) = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó

$|(u_n v_n) - l.l'| \leq \epsilon,\ \forall n > N$ nên $u_n v_n \to l.l'$

$v)$ Cho $\epsilon > 0$,có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N$ thì $|u_n - l| \leq \epsilon$

nên có $K \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_n| \geq \dfrac{|l|}{2},\ \forall n \geq K$.

Xét $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l}\right| = \left|\dfrac{u_n - l}{u_n.l}\right| \leq \dfrac{1}{|u_n| . |l|} |u_n - l|$

Mặt khác do $|l| \neq 0$ và $|u_n| \geq \dfrac{|l|}{2}$, $\forall n \geq K$ nên

$\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l}\right| \leq \dfrac{|u_n - l|}{|u_n| . |l|} \leq \dfrac{2|u_n - l|}{|l|^2} \to 0$ khi $u_n \to l$. Vậy $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{l}$

Hơn thế nữa nếu $u_n \to \infty$ thì $\dfrac{1}{l} \to 0$

vi) Cho $\epsilon > 0$,có $N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_1$ thì $|u_n - l| \leq \epsilon$

Cho $\epsilon > 0$,có $N_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$sao cho $\forall n > N_2$ thì $|v_n - l'| \leq \epsilon$ và

$\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \leq v_n$, $\forall n \geq m \;\Rightarrow\; l \leq l'$.

Chọn $k = \max\{N_1, N_2, m\}$

Ta có $l - l' = (l - u_n) + (u_n - v_n) + (v_n - l')$

$\leq |l - u_n| + (u_n - v_n) + |v_n - l'|$, $\forall n \geq k \geq m$

$\Leftrightarrow l - l' \leq 2\epsilon$ hay $l \leq l' + 2\epsilon$ với $\epsilon \to 0$ đủ nhỏ. $\Rightarrow l \leq l'$

vii) Do có dãy t_n thỏa $\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \leq t_n \leq v_n$, $\forall n \geq m$ thì

t_n cũng là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$.

Áp dụng *vi)* ta được $l \leq t_0 \leq l'$ với $l = l'$. Vậy $t_0 = l \Rightarrow\; t_n \to l$. □

Theorem 1.32. *Một dãy tăng (hoặc giảm) và bị chặn trên (t.ư bị chặn dưới) thì hội tụ.*

Exercise 1.33. CMR dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 9 > 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{3} + \dfrac{1}{x_n} \end{cases}$$

đơn điệu và bị chặn. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Chứng minh.

CM tính đơn điệu $\forall n \geq 1$, ta có

$x_2 - x_1 = \left(3 + \dfrac{1}{3}\right) - 9 < 0$

$x_3 - x_2 = \left(\dfrac{10}{9} + \dfrac{3}{10}\right) - \dfrac{10}{3} < 0$

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{2}{3}x_n < 0$ do $x_n < 4$, $\forall n \geq 2$

Vậy dãy (x_n) đơn điệu giảm nên x_1 là chặn trên của dãy.

Dãy x_n dương, giảm và bị chặn nên hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ □

Tóm tắt kiến thức khảo sát hội tụ chuỗi .

Proposition 1.34. ***Chuỗi hình học hay chuỗi lượng giác (Geometric).***

Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$, $a \in \mathbb{R}$. Ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$ hội tụ $\Leftrightarrow |a| < 1$.

Ngoài ra nếu $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là 2 chuỗi hội tụ thì

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n) \text{ hội tụ, } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Chứng minh. Ta đặt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k = \begin{cases} n+1 & \text{khi } a = 1 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{khi } a \neq 1 \end{cases}$.

Để (s_n) hội tụ nếu và chỉ nếu $|a| < 1$.

Tiếp theo, với $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là 2 chuỗi hội tụ về a, b thì

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) + \beta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right)$$

$\Rightarrow \sum (\alpha a_n + \beta b_n) \to \alpha a + \beta b.$ □

Example 1.35. Khảo sát hội tụ của chuỗi sau $\sum 3^{-n} \sin \dfrac{n\pi}{4}$

Giải.

Ta có $\left| 3^{-n} \sin \dfrac{n\pi}{4} \right| \leq \left(\dfrac{1}{3} \right)^n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{-n} \sin \dfrac{n\pi}{4} \right)$ hội tụ.

Tiêu chuẩn Cauchy.

Cho KG Banach X với chuẩn $\|.\|_X$. Ta nói $\sum a_n$ hội tụ trong X nếu và chỉ nếu $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ là dãy Cauchy trong X. Hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m}^{n} a_k \right\| < \epsilon, \ \forall n \geq m \geq n_0.$$

Proposition 1.36. *Tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass.*

Cho $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ và $(b_n) \subset X$,nếu

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ hội tụ trong $\mathbb{R}$

ii) $\|b_n\|_X \leq \alpha_n, \ \forall n > n_0$

thì $\sum b_n$ hội tụ trong X

Corollary 1.37. *Một chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*hội tụ nếu và chỉ nếu dãy tổng riêng phần* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *của nó bị chặn (trên), tức là*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M.$$

Proposition 1.38. ***(Tiêu chuẩn so sánh 1).*** *Xét 2 chuỗi số dương* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *với* $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. *Ta có:*

i) Nếu $\sum b_n$ *hội tụ thì* $\sum a_n$ *hội tụ.*

ii) Nếu $\sum a_n$ *phân kỳ thì* $\sum b_n$ *phân kỳ*

Proposition 1.39. ***(Tiêu chuẩn so sánh 2 - t.ch. tỷ số)*** *Xét 2 chuỗi số dương* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *với* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in [0, \infty]$. *Ta có:*

i) Khi $0 < \alpha < \infty$; *2 chuỗi* $\sum a_n, \sum b_n$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

ii) Khi $\alpha = 0$.

Nếu $\sum b_n$ *hội tụ thì* $\sum a_n$ *hội tụ*

Nếu $\sum a_n$ *phân kỳ thì* $\sum b_n$ *phân kỳ.*

iii)Khi $\alpha = \infty$

Nếu $\sum b_n$ *phân kỳ thì* $\sum a_n$*phân kỳ*

Nếu $\sum a_n$ *hội tụ thì* $\sum b_n$ *hội tụ .*

Example 1.40. Xét tính hội tụ của các chuỗi

i) $\sum \dfrac{n+1}{2^n}$ *ii)* $\sum \dfrac{3^n + n}{2^n + 1}$

Giải.

i). Xét 2 chuỗi $\sum a_n = \sum \dfrac{n+1}{2^n}$ và $b_n = \sum \dfrac{1}{\sqrt{2}^n}$

$$\text{Ta có } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{n+1}{2^n}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2}^n} = 0.$$

$\sum b_n = \sum \dfrac{1}{\sqrt{2}^n} = \sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ hội tụ nên $\sum a_n$ hội tụ

ii). Xét 2 chuỗi $\sum c_n = \sum \dfrac{3^n + n}{2^n + 1}$ và $d_n = \sum \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{d_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + n.3^{-n}}{1 + 2^{-n}} = 1$ và $\sum d_n = \sum \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ phân kỳ.

$\Rightarrow \sum c_n$ phân kỳ.

Theorem 1.41. ***(Tiêu chuẩn Tích phân - Cauchy)*** *Xét hàm* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *liên tục. Giả sử* f *là hàm dương và giảm. Ta có chuỗi* $\sum f(n)$ *và tích phân suy rộng* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Chứng minh. Ta có f là hàm giảm nên $f(x) \leq f(k)$, $\forall x \in [k, k+1]$

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k),\ \forall k \geq 1$$

$$\text{và } \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geq \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k),\ \forall k \geq 2$$

Xét tổng của chúng theo k từ $1 \to n$, ta được :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^2 f(x)\,dx + ... + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = f(1) + \int_1^n f(x)\,dx. \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^2 f(x)\,dx + ... + \int_{n-1}^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \quad (2)$$

- Nếu $\sum f(n)$ phân kỳ, theo (1), ta có $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ.
- Nếu $\sum f(n)$ hội tụ, theo (1), ta có $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ.. □

Exercise 1.42. Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum \dfrac{1}{n(\ln n - 1)}$

Giải.

Khi $n = 2$, $n(\ln n - 1) = 2(\ln 2 - 1)$

Khi $n \geq 3$, $n(\ln n - 1) > 0$ do $\ln n > 1$, $\forall n \geq 3$.

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$, ta có $f'(x) = -\dfrac{(\ln x - 1) + 1}{x^2(\ln x - 1)^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2(\ln x - 1)^2} < 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm giảm trên $[3, \infty)$.

Xét $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \int\limits_3^\infty \dfrac{1}{(\ln x - 1)}.\dfrac{1}{x}dx = \ln(\ln x - 1)\,|_3^\infty$ phân kỳ.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n - 1)}$ phân kỳ. Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n - 1)}$ phân kỳ.

Exercise 1.43. Chuỗi $\sum \dfrac{1}{n}$ có hội tụ không.

Giải.

Ta đặt $f(x) = \dfrac{1}{x}$ có $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ nên $f(x)$ là hàm dương và giảm $\forall x \geq 1$.

Ta có $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x}.dx = (\ln x)\,|_1^\infty$ phân kỳ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Theorem 1.44. ***(Chuỗi điều hòa).*** *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ *hội tụ nếu & chỉ nếu* $p > 1$.

Chứng minh. Ta chia làm các trường hợp sau.

Khi $p \leq 0$ thì $\dfrac{1}{n^p} \not\to 0$ do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ phân kỳ.

Khi $p = 1$, ta đã giải quyết ở bài trên.

Khi $p > 1$, do $\frac{1}{n^p} > 0$, $\forall n \geq 1$. Đặt $f(x) = \frac{1}{x^p}$, ta có

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ phân kỳ $\forall p > 1$. □

Theorem 1.45. ***(Tiêu chuẩn tỷ số).*** *Xét chuỗi số dương* $\sum a_n$ *với* $r = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *và* $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

i) Nếu $R < 1$ *thì* $\sum a_n$ *hội tụ,*

ii) Nếu $r > 1$ *thì* $\sum a_n$ *phân kỳ,*

i) Nếu $r < 1 < R$ *thì không thể kết luận cho* $\sum a_n$ *.*

Corollary 1.46. ***(T.ch.tỷ số theo D'Alembert).*** *Xét chuỗi số dương* $\sum a_n$ *với* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. *Ta có:*

i) Nếu $\alpha < 1$ *thì* $\sum a_n$ *hội tụ,*

ii) Nếu $\alpha > 1$ *thì* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

Example 1.47. Xét tính hội tụ của $\sum p^n n^p$ với $p > 0$.

Giải. Đặt $a_n = p^n n^p$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^{n+1} n^{p+1}}{p^n n^p} = p$.

Khi $p < 1$, thì $\sum p^n n^p$ hội tụ

Khi $p = 1$, thì $\sum p^n n^p = \sum n$ phân kỳ

Khi $p > 1$, thì $\sum p^n n^p$ phân kỳ

Theorem 1.48. ***(Tiêu chuẩn căn số).*** *Xét chuỗi dương* $\sum a_n$ *với* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. *Ta có:*

i) Nếu $\alpha < 1$ *thì* $\sum a_n$ *hội tụ*

ii) Nếu $\alpha > 1$ *thì* $\sum a_n$ *phân kỳ*

iii) Nếu $\alpha = 1$ *thì không có kết luận cho* $\sum a_n$ *.*

Corollary 1.49. *Xét chuỗi dương* $\sum a_n$ *với* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. *Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ *thì* $\sum a_n$ *hội tụ*

ii) Nếu $\alpha > 1$ *thì* $\sum a_n$ *phân kỳ*

iii) Nếu $\alpha = 1$ *thì không có kết luận cho* $\sum a_n$.

Theorem 1.50. ***(Dirichlet).*** *Nếu một chuỗi dương hội tụ thì mọi chuỗi hoán vị của nó cũng hội tụ và có chung một tổng.*

Theorem 1.51. *Nếu 2 chuỗi số dương $\sum a_n, \sum b_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là a, b thì $\sum (a_n + b_n)$ và $\sum a_n b_n$ cũng hội tụ lần lượt về $a + b$ và $a.b$*

Theorem 1.52. ***(T.ch. tỷ số).*** *Đặt $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ và $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối

ii) Nếu $\beta > 1$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

Corollary 1.53. *Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối

ii) Nếu $\alpha > 1$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

Theorem 1.54. ***(T.ch. căn số).*** *Đặt $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ta có*

i) Nếu $\alpha < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối

ii) Nếu $\alpha > 1$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

Theorem 1.55. ***(Dirichlet cho chuỗi không dương).*** *Nếu $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì mọi chuỗi hoán vị cũng hội tụ tuyệt đối.*

Theorem 1.56. ***(Leibnitz).*** *Nếu (a_n) là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 thì chuỗi đan dấu của nó $\sum (-1)^{n+1} a_n$ cũng hội tụ và có tổng riêng phần nằm trong khoảng $(a_1 - a_2, a_1)$.*

Exercise 1.57. Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^2+1}$ và tính tổng của nó.

Giải. Đặt $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ và $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Ta có $a_1 = \dfrac{1}{2}$ và $a_2 = \dfrac{2}{5}$

$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0,\ \forall x \geq 1$. Vậy f là hàm dương, giảm trên $[1, \infty)$ nên $a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \geq 1$.

Mặt khác $a_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy $\sum (-1)^{n+1} a_n$ hội tụ và có tổng nằm trong khoảng $\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Theorem 1.58. ***(T.ch Dirichlet).*** *Nếu (a_n) là dãy dương, giảm và hội tụ về 0. $\sum b_n$ bất kỳ có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum a_n b_n$ hội tụ.*

Theorem 1.59. ***(T.ch Abel).****Nếu (a_n) là dãy dương, giảm , bị chặn dưới (hoặc tăng, bị chặn trên) và $\sum b_n$ hội tụ thì $\sum a_n b_n$ hội tụ.*

Exercise 1.60. CMR $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^2+1} \cos\dfrac{\pi}{n}$ hội tụ

Giải. Đặt $a_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$ và $b_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^2+1}$

Ta có $\sum b_n$ hội tụ đã trình bày ở bài trên. Mặt khác thì

$\sum a_n$ là dãy tăng do $\cos\dfrac{\pi}{n} \leq \cos\dfrac{\pi}{n+1}$ và bị chặn trên bởi 1

Áp dụng T.ch Abel, ta được $\sum a_n b_n$ hội tụ.

Tóm tắt kiến thức miền & bán kính hội tụ .

Proposition 1.61. *Cho $I \subset \mathbb{R}$ $f_n :\to \mathbb{R}$ là dãy hàm. Ta có:*

i) Nếu (f_n) hội tụ đều trên I về f và f_n l.tục tại $x_0 \in I$, $\forall n$ thì f liên tục tại x_0.

ii) Nếu (f_n) hội tụ đều trên I về f và f_n l.tục trên I, $\forall n$ thì f liên tục trên I

iii) Nếu $\sum f_n$ hội tụ đều trên I và có tổng là f. f_n l.t tại $x_0 \in I$, $\forall n$ thì f l.tục tại x_0

iv) Nếu $\sum f_n$ hội tụ đều trên I và có tổng là f. f_n l.t trên $x_0 \in I$, $\forall n$ thì f l. tục trên I.

Example 1.62. Cho $f(x) = \sum \dfrac{x^n}{n}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Giải. Lấy $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, đặt $b_n = \dfrac{1}{n2^n}$ ta có $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n2^n} = b_n$, $\forall n, \forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ và

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\sum b_n$ hội tụ.

Do đó $\sum \dfrac{x^n}{n} \rightrightarrows f$ trên $\left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Mặt khác, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ liên tục trên $\left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ nên f liên tục trên $\left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

Proposition 1.63. *Cho $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$là dãy hàm khả tích. Khi đó*

i) Nếu (f_n) hội tụ đều về f trên $[a,b]$ thì f là hàm khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

ii) Nếu $\sum f_n$ hội tụ đều và có tổng là f trên $[a,b]$ thì f là hàm khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Example 1.64. Nếu $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$. CMR $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2}{(2k+1)^3}$.

Chứng minh. Ta có $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in [0,\pi]$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ hội tụ đều về f trên $[0,\pi]$.

Mặt khác $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$ là hàm khả tích trên $[0,\pi]$nên

$$\int_o^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos nx|_{x=0}^{x=\pi}}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^3} \qquad \square$$

Proposition 1.65. *Cho $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ là dãy hàm trong C^1. Khi đó*

a) Nếu (f_n') hội tụ đều trên $[a,b]$ và có $x_0 \in (a,b)$ sao cho $\{f_n(x_0)\}$ là dãy hội tụ thì có hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả vi trên (a,b) sao cho

i) (f_n) hội tụ đều về f trên $[a,b]$ và

ii) (f_n') hội tụ đều về f' trên (a,b).

b) Nếu $\sum f_n'$ hội tụ đều trên $[a,b]$ và có $x_0 \in (a,b)$ sao cho $\sum f_n(x_0)$ là chuỗi hội tụ thì có hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả vi trên (a,b) sao cho

i) $\sum f_n$ hội tụ đều và có tổng là f trên $[a,b]$ và

ii) $\sum f_n'$ hội tụ đều và có tổng là f'.

Example 1.66. Đặt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$. CMR $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh. Đặt $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$. Ta có $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \text{ hội tụ đều trên } \mathbb{R} \text{ theo t.chuẩn so sánh 1: } \begin{cases} \left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \text{ hội tụ} \end{cases}.$$

Mặt khác $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$ hội tụ. Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3} \rightrightarrows f$ trên $\mathbb{R}$ và

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2} \rightrightarrows f'$ trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$. $\square$

Proposition 1.67. *Nếu chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x = x_0 \in \mathbb{R}$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| < |x_0|$.*

Theorem 1.68. *Xét chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ với $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \in [0,\infty]$. Ta có*

i) Nếu $\alpha = \infty$ thì $\sum a_n x^n$ chỉ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) khi $x = 0$

ii) Nếu $\alpha = 0$ thì $\sum a_n x^n$ chỉ hội tụ (hội tụ tuyệt đối) $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) Nếu $0 < \alpha < \infty$ thì $R = \dfrac{1}{\alpha}$ là bán kính hội tụ của chuỗi $\sum a_n x^n$.

Example 1.69. Tìm miền hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}(x+1)^n$

Giải. Đặt $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Ta có $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ nên $R = 1$

⋆ Khi $|x+1|<1$ hay $-2<x<0$ thì chuỗi $\sum a_n (x+1)^n$ hội tụ.

⋆ Khi $|x+1|>1$ hay $x<-2$ hoặc $x>0$ thì chuỗi phân kỳ.

⋆ Khi $|x+1|=1$ hay :

$x=-2$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo Đ.lý Leibnitz.

$x=0$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Do đó miền hội tụ của chuỗi trên là $-2\le x<0$.

Corollary 1.70. *Gọi R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$. Ta có $\sum a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi khoảng $[-R_1, R_2]$ với $R_2 < R_1$*

Corollary 1.71. *Cho $f(x)$là hàm khả vi trên $(-R,R)$ và*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Hơn nữa, với $-R<\alpha\le\beta<R$, ta có

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\alpha^\beta a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left[\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\right]$$

Example 1.72. Xét $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ Ta có

$(e^x)'=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$ và

$\int_a^b e^x dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\dfrac{x^k}{k!}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]=e^b-e^a.$

Definition 1.73. *Công thức Taylor - MacLaurin.*

Cho $f: D\subset\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp k+1 thì có khai triển trong lân cận $x\in B(x_0,\epsilon)\subset D$ như sau

$$f(x)=\sum_{|j|=0}^{k}\frac{(x-x_0)^j}{j!}D_j f(x_0)+\sum_{|j|=0}\frac{(x-x_0)^j}{j!}D_j f(\theta x+(1-\theta)y)$$

Khi m=1 thì

$$f(x)=\sum_{|j|=0}^{k+1}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

Example 1.74. Khai triển Taylor của $f(x,y) = \sin x.e^y$ trong lân cận $(0,0)$ cấp 2.

Giải.

Ta có các đạo hàm sau:

$f_x(x,y) = e^y \cos x,\ f_y(x,y) = e^y \sin x,$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^y \cos x,\ f_{xx}(x,y) = -e^y \sin x$ và $f_{yy}(x,y) = e^y \sin x$

$f_{xxx}(x,y) = -e^y \cos x,\ f_{yyy}(x,y) = e^y \cos x,\ f_{xxy}(x,y) = -e^y \sin x$ và $f_{yyx}(x,y) = e^y \cos x$.

Áp dụng công thức cho
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) \\ &+\frac{1}{2!}\left[x^2 f_{xx}(0,0) + xyf_{xy}(0,0) + yxf_{yx}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)\right] \\ &+\frac{1}{2!.1!}\left[x^2 y f_{xxy}(\theta x,\theta y) + xy^2 f_{yyx}(\theta x,\theta y)\right] \\ &+\frac{1}{3!}\left[x^3 f_{xxx}(\theta x,\theta y) + y^3 f_{yyy}(\theta x,\theta y)\right] \end{aligned}$$

Thay thế các đạo hàm tìm được vào công thức, ta được
$$f(x,y) = x + xy + \frac{1}{2}\left[xy^2 e^{\theta y}\cos\theta x - x^2 y e^{\theta y}\sin\theta x\right] + \frac{1}{6}\left[\left(y^3 - x^3\right)e^{\theta y}\cos\theta x\right]$$

Các bài tập .

Exercise 1.75. Xét tính hội tụ các dãy sau

i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1.5....(4n-3)}$

iii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{\ln n}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3+n+7}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(2n+1)}$

vi) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$

vii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+5}{3^n(2n^2+1)}$

viii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n.\ln^2 n}$

ix) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n^4}$

x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3....(2n-1)}{1.5....(4n-3)}$

xi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left[(n!)^2\right]}{(2n+2)!}$

Giải.

i) Xét so sánh $\forall n \ge 3$ thì $0 < \ln n < n$ do đó $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$

Mà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ theo kết quả bài 1.42 nên theo *t.c.s.s* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

ii) Đặt $a_n = \frac{1}{1.5....(4n-3)}$, ta có $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4(n+1)-3} = \frac{1}{4n+1} \to 0 < 1$ khi $n \to \infty$.

Áp dụng *t.c.tỷ.số*, thì $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1.5....(4n-3)}$ hội tụ.

iii) Xét $\frac{2n+1}{\ln n} > 2, \forall n \ge 3$. Đặt $a_n = \frac{2n+1}{\ln n}$ và $b_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ nên $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n+1}{\ln n}$ phân kỳ.

iv) Đặt $a_n = \dfrac{2n^2+5}{n^3+n+7}$ và $b_n = \dfrac{1}{n}$. Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+5n}{n^3+n+7} = 2$

Mà $\sum b_n$ phân kỳ nên theo *t.c.s.s* thì $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{n^3+n+7}$ phân kỳ.

v) Đặt $a_n = \dfrac{n}{2^n(2n+1)}$ và $b_n = \dfrac{1}{2^n}$. Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

Mà $\sum b_n$ hội tụ nên $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n(2n+1)}$ cũng hội tụ.

vi) Đặt $a_n = \dfrac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$ và $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4+5n^2}{3n^4+n+9} = \dfrac{2}{3} > 0$

Vì $\sum b_n$ hội tụ nên theo *t.c.s.s* thì $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$ cũng hội tụ.

vii) Đặt $a_n = \dfrac{3n^2+n+5}{3^n(2n^2+1)}$ và $b_n = \dfrac{1}{3^n}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n+5}{2n^2+1} = \dfrac{3}{2}$

T. tự vì $\sum b_n$hội tụ nên $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+n+5}{3^n(2n^2+1)}$ cũng hội tụ.

viii) Đặt $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$ với $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln^2 x} \Rightarrow f'(x) = -\left(\dfrac{1+\ln x}{x^2 \ln^4 x}\right) < 0, \forall x \geq 2$

Ta có $f(x)$là hàm dương, giảm trên $[2,\infty)$ nên theo *t.c tích phân* thì

$\sum f(n)$ và $\int_{[2,\infty)} f(x)\,dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Xét $\int_{[2,\infty)} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 x} \dfrac{dx}{x} = \left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)_2^{\infty} = \dfrac{1}{\ln 2}$ hội tụ

Do đó $\sum f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ hội tụ.

ix) Đặt $a_n = \dfrac{\ln^3 n}{n^4}$ và $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n^{2/3}}\right)^3$

Đặt $u(t) = \ln x$ và $v(t) = t^{2/3}$. Theo Đlý $L'\ Hopital$, thì

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{u(t)}{v(t)}\right)^3 = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{u'(t)}{v'(t)}\right]^3 = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(\ln t)'}{t^{2/3}}\right]^3 = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1/t}{\frac{3}{2} t^{-1/3}}\right]^3 = 0$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n^{2/3}}\right)^3 = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

Mà $\sum b_n$ hội tụ nên $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n^4}$ hội tụ.

x) Đặt $a_n = \dfrac{1.3....(2n-1)}{1.5....(4n-3)}$. Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{4n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$

Theo *t.c.t.s* d' Alembert thì $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3....(2n-1)}{1.5....(4n-3)}$ hội tụ.

xi) Đặt $a_n = \dfrac{[n!]^2.2^n}{(2n+2)!}$. Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+4)} = \dfrac{1}{2} < 1$

Tương tự theo *t.c.t.s* d' Alembert thì $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n [n!]^2}{(2n+2)!}$ hội tụ.

Exercise 1.76. Xét tính hội tụ các dãy sau

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}}$

iv) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

vi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$

vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$

viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$

ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+n+1}$

x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n . \ln(\ln n)}$

xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}$

xii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} e^{-n}$

Giải.

i) Đặt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Khi đó $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} < 0, \forall x \geq 1$ nên

$f(x)$ là hàm dương, giảm trên $[1, \infty)$ nên theo tiêu chuẩn tích phân thì

$\sum f(n)$ và $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Mà $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = (2\sqrt{x})_1^{\infty} = \infty$ nên $\sum f(n)$ phân kỳ.

ii) Đặt $a_n = \sin\frac{1}{n}$ và $b_n = \frac{1}{n^2}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{\frac{1}{n}\to 0} = \frac{\sin t}{t} = 1 > 0$

Mà $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ hội tụ, theo $t.c.t.s\,(t.c.s.s.2)$ thì $\sum a_n = \sin\frac{1}{n}$ phân kỳ.

iii) Ta có $\ln 3 > 1$ nên áp dụng định lý chuỗi điều hòa ta có

$\sum \frac{1}{n^p}$ hội tụ với $p = \ln 3 > 1$.

iv) Đặt $f(x) = \frac{1}{x \ln x} > 0, \forall x \geq 3$. Áp dụng t.c.tích phân $\sum f(n)$ và $\int_3^{\infty} f(x)\,dx$ cùng h tụ hoặc phân kỳ. Ta dễ dàng chứng minh đây là hàm dương, giảm trên $[3, \infty)$, ngoài ra

$\int_3^{\infty} f(x)\,dx = \ln(\ln x)_3^{\infty} = \infty$ nên $\sum f(n) = \sum \frac{1}{n . \ln n}$ phân kỳ .

v) Đặt $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ theo tiêu chuẩn tỷ số do

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1).n!} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

vi) Đặt $a_n = \frac{1}{\ln^n n}$. Ta có $\sum a_n$ là chuỗi số dương $\forall n \geq 2$ và

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$ nên theo t.c căn số $\sum a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ hội tụ.

vii) Đặt $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ và $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0, \forall x \geq 1$ có $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} < 0, \forall x \geq 9$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=9}^{\infty} a_n$ là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 (t.c.Leibnitz)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=9}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ là dãy hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ

$\Rightarrow -\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ.

viii) Đặt $a_n = \dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\sqrt{3}\right]^{-n}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$

$\Rightarrow \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ hội tụ.

ix) Đặt $b_n = \dfrac{n}{n^2+n+1}$ và $a_n = \dfrac{1}{n}$. Ta có $n^2 < n^2+n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ nên

$\Rightarrow b_n = \dfrac{n}{n^2+n+1} > \dfrac{1}{n} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Mà $\sum a_n$ phân kỳ nên theo *t.c.s.s.*1 thì $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+n+1}$ phân kỳ

x) Áp dụng tính chất $\sum \dfrac{1}{n^p}$ hội tụ khi $p > 1$.

Khi đó $n.\ln n.\ln(\ln n) > n$, $\forall n > 81$. Đặt $n.\ln n.\ln(\ln n) = n^p$

$\Rightarrow \ln n^{\ln n} = \exp\left[(\ln n.\ln(\ln n))\right] = (p-1)\ln n$

$\Rightarrow p = 1 + \dfrac{\ln n^{\ln n}}{\ln n} > 1$

Do đó $\sum \dfrac{1}{n^p}$ hội tụ.

xi) Đặt $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$ là dãy dương, hội tụ về 0 và $f(n) = a_n$ là hàm giảm theo n do

$f'(x) = \dfrac{(n+1)^2 - 2n^2}{(n+1)^2} = \dfrac{-n^2+2n+1}{(n+1)^2} < 0$, $\forall n > 3$.

Vậy $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n a_n$ hội tụ.

Do đó $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hội tụ,

xii) Đặt $a_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ và $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. Ta có a_n là dãy dương $\forall n > 2$, hội tụ về 0.

Xét $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} < 0$, $\forall x > 2$ nên a_n là dãy giảm.

Do đó $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ là chuỗi hội tụ.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ là chuỗi hội tụ.

xiii) Đặt $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3n} e^{-n}$ và xét giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} e^{-n}} = e^{-1} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = e^{-1} < 1.$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Exercise 1.77. CMR chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \log \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ hội tụ.

Chứng minh. Đặt $a_n = \frac{1}{n}$ và $b_n = \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \left[\log\frac{n+1}{n} - \log\frac{n+2}{n+1}\right]$.

Khi đó $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vậy (a_n) là dãy số dương, giảm và hội tụ về 0.

Mặt khác thì $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \log\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right] = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\log\frac{k+1}{k} - \log\frac{k+2}{k+1}\right]$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\log\frac{k+1}{k} - \log\frac{k+2}{k+1}\right]$$

$$= \log 2 - \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} - \log\frac{5}{4} + ... + \log\frac{n+1}{n} - \log\frac{n+2}{n+1}$$

$\Rightarrow s_n \le \log 2 - \log\frac{n+2}{n+1} < \log 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Do đó $\sum b_n$ có tổng riêng phần bị chặn

Vậy theo Định lý Dirichlet chuỗi $\sum a_n b_n$ hội tụ. □

Exercise 1.78. Khảo sát hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$

Giải.

Đặt $c_n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$

Xét biến đổi $(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{(k+1)}}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n+1-k)}}$

$\Leftrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k)+1}}$.

Đặt $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ nên $a_{n-k} = \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k)+1}}$.

Khi đó $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$, mà

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \le \frac{1}{2}\left[(k+1)+(n-k+1)\right] = \frac{n+2}{2}$$

Do đó $a_k.a_{n-k} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \ge \frac{2}{n+2}, \ \forall k = \overline{1,..,n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right| \ge (n+1)\left(\frac{2}{n+2}\right) > 1$$

Vậy $\{|c_n|\} \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi $\sum c_n$ không hội tụ.

Exercise 1.79. Tìm p sao cho

$i)$ Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ

$ii)$ Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^p n}$ hội tụ

Giải.

$i)$ Khi $p \le 0$ thì khi đó $\ln^p n < 1, \ \forall n \ge 3$. Do đó $\frac{1}{n.\ln^p n} > \frac{1}{n}, \forall n \ge 3$

Vì $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ cũng phân kỳ.

Khi $p \geq 0$ thì dãy $a_n = \frac{1}{n.\ln^p n}, \forall n \geq 3$ là dãy dương

Mặt khác $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ có $f'(x) = -\frac{\ln^p x + \ln^{p-1} x}{x^2 \ln^{2p} x} < 0, \forall x \geq 3$ nên a_n giảm

Ngoài ra $\int\limits_3^{\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} \left(\dfrac{\ln^{1-p} x}{1-p}\right)_3^{\infty} \to \infty & \text{khi } p \in (0,1) \\ (\ln[\ln x])_3^{\infty} \to \infty & \text{khi } p = 1 \\ \left(\dfrac{\ln^{1-p} x}{1-p}\right)_3^{\infty} = \dfrac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 3} & \text{khi } p > 1 \end{cases}$

a_n là dãy dương, giảm và có tích phân bị chặn chỉ với $p > 1$ nên $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ hội tụ

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$.

ii) Nếu $p \leq 0$ thì khi đó $\ln^p n < 1, \forall n \geq 3$. Do đó $\frac{1}{\ln^p n} > 1, \forall n \geq 3$

Do đó $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ không hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ không hội tụ.

Khi $p > 0$, đặt $a_n = \frac{1}{\ln^p n}$ và $b_n = \frac{1}{n}$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{1/p}}{\ln x}\right)^p = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\left[x^{1/p}\right]'}{[\ln x]'}\right)^p = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/p}}{p}\right)^p = \infty$$

Mà $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ nên $\sum a_n$ phân kỳ.

Exercise 1.80. CMR với $\theta \neq k2\pi$ thì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}$ hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, phân kỳ khi $p < 0$ và hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$.

Chứng minh.

• Xét $\theta \in [0, 2\pi)$ bất kỳ.

Khi $p > 1$. Ta có $\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right| \leq \left|\frac{1}{n^p}\right|, \forall n \in \mathbb{N}$, mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ với $p > 1$.

Do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} \left(\text{hoặc tương tự } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}\right)$ hội tụ.

Khi $0 < p \leq 1$.

$\star$ Ta xét cho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p}$. Đặt $a_n = \cos n\theta$ và $b_n = \frac{1}{n^p}$

Do b_n giảm và hội tụ về 0 và a_n có tổng riêng phần S_k bị chặn nên

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p}$ hội tụ có điều kiện (nhưng không hội tụ tuyệt đối)

$\star$ Với $\theta = \pi$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ hội tụ tuyệt đối

$\star$Với $\theta \neq \pi$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}$ hội tụ có điều kiện

Khi $p < 0$. Ta có $\begin{cases} \cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \\ \sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta - \cos n\theta\sin\theta \end{cases}$

Giả sử $\cos n\theta \to 0$ thì $|\sin n\theta| \to 1$ và ngược lại.

Do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} \left(\text{hoặc tương tự } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}\right)$ phân kỳ

• Nếu $\theta = k2\pi$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Lúc đó

Khi $p > 1$.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(\text{hoặc tương tự } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p} = 0\right)$hội tụ.

Khi $0 < p \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p} = 0$ hội tụ.

Khi $p < 0$. Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p} = 0$ hội tụ. □

Exercise 1.81. Tìm khai triển chuỗi hàm (tại $x = 0$) và lũy thừa của hàm $\ln x$ tại $x = 1$ và $x = 2$

Chứng minh.

Xét công thức Taylor tổng quát cho hàm $f(x) = \ln x$.

Có các đạo hàm cấp cao là $f'(t) = \frac{1}{t}$

$f''(t) = \frac{-1}{t^2}$, $f^{(3)}(t) = \frac{2}{t^3}$,

$f^{(4)}(t) = \frac{-2.3}{t^4}$

Tổng quát thì $f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{t^n}$, $\forall n \geq 1$.

Áp dụng công thức

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

với các giá trị

$x = 1$ thì $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n$

$x = 2$ thì $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^n.n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n.n}(x-1)^n$

Riêng cho trường hợp $x = 0$, xét $\ln(x+1) = \int \frac{dx}{1+x}$.

Và trong lân cận $x = 0 \in (-1, 1)$ thì $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

Đặt $f_n(t) = \sum_{m=0}^{2n+1} (-t)^m \rightrightarrows f(t)$. Khi đó

$\Rightarrow f(x+1) = \ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$ □

Exercise 1.82. CMR $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n}$

Chứng minh. Xét $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ và khai triển của $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ trong lân cận $t \in (0,1)$

Đặt $g_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} (-t)^{2k}$ thì dãy (g_n) là dãy hàm tăng và khả tích trên $(0,1)$

$g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ khi $n \to \infty$

Theo mệnh đề 1.62, ta được

$\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 g(t)\, dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 g_n(t)\, dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 g_n(t)\, dt$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^1 (-t)^{2n} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n}$ □

Exercise 1.83. Khảo sát hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{a+n^q}$ theo $p, q, a > 0$.

Giải.

Với $p, q > 0$. Đặt $c_n = \frac{n^p}{a+n^q}$ và $d_n = \frac{1}{n^{q-p}}$ thì khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p . n^{q-p}}{a+n^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{a+n^q} = 1.$$

Nếu chuỗi $\sum d_n$ hội tụ (khi đó $q - p > 1$) thì $\sum c_n$ hội tụ.

Exercise 1.84. CMR dãy hàm $(f_n(x)) = nxe^{-nx^2}$ không hội tụ đều về $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ trên $[0,1]$. Hơn thế nữa

$$\int_0^1 f(x)\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

Chứng minh. • Tìm $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Ta có các trường hợp sau

$x = 0$. $f_n(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

$x \neq 0$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{t\to\infty} txe^{-tx^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{tx}{e^{tx^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{dt\,(tx)}{dt\left[e^{tx^2}\right]} = \lim_{t\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{tx^2}} = 0$$

Vậy $f(x) \equiv 0,\ \forall x \in [0,1]$.

• Kiểm tra tính hội tụ đều của $(f_n(x))$ trên $[0,1]$ bằng cách tìm dãy $\{x_n\} \in [0,1] \to 0$. Cần kiểm tra

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f_n(0) = 0$$

Mà ta có với $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\sqrt{n}}e^{-n\frac{1}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-1}\sqrt{n}\right) = \infty$$

Do đó $d(f_n(x), f(x)) = d(f_n(x), 0) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geq |f_n(x)| = e^{-1}\sqrt{n} \to \infty.$

$\Rightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows f(x).$

• Cuối cùng là CM $\int_0^1 f(x)\,dx \neq \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$

Ta có $f(x) = 0$ nên $\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$

Nhưng $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\dfrac{1}{2}\left(e^{-nx^2}\right)_0^1 = \dfrac{1}{2}(1-e^{-n})$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1-e^{-n}) = \dfrac{1}{2} \neq 0.$

Do đó $\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$ □

Exercise 1.85. Cho $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2.\ln^2 n}$ với $x\in[-1,1]$. Tính $f'(x)$.

Giải.

Đặt $a_n = \dfrac{1}{n^2.\ln^2 n}$, ta sẽ khảo sát chuỗi hàm $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$

• $\forall x\in[-1,1]$ và $\forall n\geq 3$. Ta có

$$\left|\frac{x^n}{n^2\ln^2 n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

nhưng vì $\sum\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo *tiêu chuẩn so sánh* thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Vậy $f(x)$ được xác định.

• Tìm bán kính hội tụ. Xét $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\ln^2 n}{\ln^2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln^2(n+1)}$$

Áp dụng ĐL. L'Hopital, ta được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln^2(n+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{d\left[\ln^2 x\right]}{d\left[\ln^2(x+1)\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$$

Tiếp tục, ta có

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$$

Do đó $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nên có bán kính hội tụ $R = 1/\alpha = 1$.

Áp dụng *hệ quả 1.70.* Ta có f khả vi trên $(-1, 1)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.\ln^2 n}$$

Exercise 1.86. Cho $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{an}}{an+m}$ với $x \in (-1, 1.), \forall a, m \in \mathbb{N}$. Tính $f'(x)$.

Giải.

Đặt $c_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \neq \text{ bội của } a \\ \dfrac{1}{an+m} & \text{nếu } n \text{ là bội của } a \end{cases}$. Ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{an} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{an} x^{an} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{an}}{an+m}, \ \forall x \in (-1, 1)$$

Ngoài ra

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{c_n} = 1$$

Xét $\dfrac{x^{an}}{an+m}$ có bán kính hội tụ là $R = 1$ nên hội tụ đều trên $[-1, 1]$.
Tiếp tục áp dụng *hệ quả 1.70*, ta được f khả vi trên $(-1, 1)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an}{an+m} x^{an}$$

Exercise 1.87. Cho $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ với $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$. Kiểm tra f_n có hội tụ đều về f trên $[0, 1]$ không và tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Giải.

$*$ Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$. Tìm $f(x)$.

• Khi $x = 0$, $f_n(x) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ do đó $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

• Khi $x \neq 0$ thì $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\dfrac{1}{nx} + nx^3} = 0$.

Vậy $f(x) = 0,\ \forall x \in [0, 1]$. Do đó $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

$*$ Tính $\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Ta có

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2nxdx}{1+n^2x^4} = \arctan nx^2|_0^1 = \arctan n.$$

Mặt khác thì $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \dfrac{\pi}{2}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{\pi}{2}$.

$*$ CM (f_n) không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

$\Leftrightarrow$ Cần tìm 1 dãy $\{z_n\}$ sao cho $z_n \to f \equiv 0 \in [0,1]$ nhưng $d(f_n, f) \not\to 0$.

Lấy dãy $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Khi đó

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+n^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$
- $d(f_n(x), f(x)) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geq f_n(z_n) = \sqrt{n} \to \infty$, khi $n \to \infty$.

Vậy $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$.

Exercise 1.88. Cho $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. CMR (f_n) hội tụ từng điểm về $f(x) = 0$ nhưng không hội tụ đều. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

Chứng minh.

$*$ Xét CM (f_n) hội tụ từng điểm về f.

Dễ thấy $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Với $x \in (0,1)$ thì xét

$$n^2\left(1-x^2\right)^n = \frac{n^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^n}$$

Đặt $c = \dfrac{1}{1-x^2} - 1 > 0$. Khi đó $1 - x^2 = \dfrac{1}{1+c}$ và

$$n^2(1-x^2)^n = \frac{n^2}{(1+c)^n} \leq \frac{n^2}{1+nc+\dfrac{n(n-1)c^2}{2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}}, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\leq \frac{n^2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Do đó $n^2(1-x^2)^n \to 0$.

$*$Cuối cùng, tính $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Xét $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2x(1-x^2)^n\,dx = \left[\dfrac{n^2}{2}\dfrac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{n^2}{2(n+1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty$. □

Exercise 1.89. Tìm miền hội tụ của các chuỗi và tính tổng của chúng.

i) $\sum_{n=0}^\infty ax^{2n+1}, a \neq 0$

ii) $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{x^n}$

iv) $\sum_{n=0}^\infty 3\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$

v) $\sum_{n=0}^\infty e^{nx}$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a}{(2+x)^n}, a \neq 0$ *vi)* $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x$

Giải.

i) Khi $x = 0$, chuỗi $\sum ax^{2n+1}$ hội tụ và có tổng là 0.

Khi $0 < |x| < 1$, thì theo chuỗi hình học ta có $\begin{cases} x^2 < 1 \\ ax \neq 0 \end{cases}$,

Chuỗi $\sum ax^{2n+1} = \sum [ax]\left(x^2\right)^n$ hội tụ và có tổng là $\dfrac{ax}{1-x^2}$,

ii) Khi $|x| \leq 1$ thì $|x|^n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Khi $|x| > 1$, thì chuỗi hội tụ và có tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \dfrac{1}{x^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{x}} \right) - 1 = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^{n+1}}\right)}{1 - \dfrac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x-1},$$

iii) Tương tự thì nếu $\left|\dfrac{1}{2+x}\right| < 1$ $\big($khi đó $x > -1$ hoặc $x < -3\big)$ thì chuỗi hội tụ.

Khi đó $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a}{(2+x)^n}$ hội tụ và có tổng là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(2+x)^n} = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+x)^n} = a\left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{x+2}}\right) = \frac{a(x+2)}{x+1},$$

iv) Nếu $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| < 1$ $\big($khi đó $x < 0\big)$ thì chuỗi hội tụ.

Khi đó $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$ hội tụ và có tổng là

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 3\left(\frac{1}{1 - \dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{3(x-1)}{2x},$$

v) Tiếp tục $e^x < 1$ $\big($khi đó $x < 0\big)$ thì chuỗi hội tụ.

Khi đó $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$ hội tụ và có tổng là

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^x)^n = \left(\frac{1}{1-e^x}\right),$$

vi) Cuối cùng xét $|\ln x| < 1$ $\left(\text{khi đó } \dfrac{1}{e} < x < e\right)$ thì chuỗi hội tụ.

Khi đó $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x$ hội tụ và có tổng là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n = \left(\frac{1}{1-\ln x}\right).$$

Exercise 1.90. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của

$i)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$ $\quad iv)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ $\quad vii)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n}$

$ii)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ $\quad v)\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n\ln n}$ $\quad viii)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

$iii)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n\frac{x^n}{n+1}$ $\quad vi)\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$ $\quad ix)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

Giải.

$i)$ Đặt $a_n = \left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, cần khảo sát chuỗi $\sum a_n x^n$.

$$* \text{ Xét } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & n = 2k \\ 1 & n = 1+4k \\ 0 & n = 3+4k \end{cases} \qquad (\star)$$

Ta có $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|} = \frac{1}{2}\limsup\limits_{n\to\infty}\left|1+\sin\frac{n\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}.2 = 1$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ là $R = 1$.

$*$ Tìm miền hội tụ, khi $|x| \le 1$

• Nếu $x = 1$, thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sup\left[\frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\sup\left[\sin^2\frac{(n+1)\pi}{4}\right] = 1$$

Kết hợp với $(\star)$ $a_n = 1,\ \forall n = \{1+4k|\ k\in\mathbb{N}\}$. Do đó $\sum a_n$ phân kỳ *(loại)*.

• Nếu $x = -1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Nhưng vì $(-1)^n a_n = -1,\ \forall n = \{1+4k|\ k\in\mathbb{N}\}$ nên $\sum(-1)^n a_n$ phân kỳ *(loại)*.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-1, 1)$

$ii)$ Đặt $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Ta có

$$* \ \alpha = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|$$

$$= \limsup_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ $r = e$.

$*$ Xét miền hội tụ.

$\bullet$Khi $x = e$, thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! e^n}{n^n}$.

Đặt $c_n = \dfrac{n! e^n}{n^n}$ thì $c_1 = e$ và $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \sum c_n$ là chuỗi phân kỳ.

$\bullet$ Khi $x = -e$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$.

Đặt $d_1 = c_2 + (-1)^n c_1 = \dfrac{e^2}{2} - e > 0$

$d_n = c_{2n} + (-1)^{2n-1} c_{2n-1} > 0$ là dãy tăng

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[c_{2k} + (-1)^{2k-1} c_{2k-1}\right] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ phân kỳ.

$\bullet$ Do đó miền hội tụ của chuỗi là $(-e, e)$.

$iii)$ Đặt $a_n = \dfrac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}$. Ta có

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{2n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} = 2$$

Do đó bán kính hội tụ là $R = \dfrac{1}{2}$.

$*$ Xét miền hội tụ, với

$x = \dfrac{1}{2}$ thỉ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

$\bullet$ Đặt $c_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ và $b_n = \dfrac{1}{n+1}$. Xét tỷ số

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Vì chuỗi $\sum b_n$ phân kỳ nên $\sum c_n$ cũng phân kỳ.

$\bullet$ Khi $x = -\dfrac{1}{2}$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$.

Ta có $c_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ là dãy dương $\forall n \geq 1$ và

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1}\right] = 0,$$

Mặt khác thì $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n^n (n+2)^{n+2}}{(n+1)^{2n+2}} > 1$ do

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < (n+2)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

và $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n < (n+2)\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \dfrac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} < \dfrac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{n^n (n+2)^{n+2}}{(n+1)^{2n+2}} > 1$ nên (c_n) là dãy giảm.

Vậy $\{c_n\}$ là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ là $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

iv) Đặt $a_n = \dfrac{1}{n^n}$ có $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \left|\dfrac{1}{n}\right| = 0$ nên

Theo *Đ lý 1.67* miền hội tụ của chuỗi $\sum a_n x^n$ là $\mathbb{R}$.

v) Đặt $a_{n-1} = \dfrac{1}{n.3^n \ln n}$. Khảo sát chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}$.

Xét $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n-1]{|a_n|} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \sup \left| \sqrt[n-1]{\left(\dfrac{1}{3n \ln n}\right)} \right| = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ là $R = 3$.

$*$ Xét miền hội tụ,

• Khi $x = 3$, thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-1} 3^{n-1} = \dfrac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n. \ln n}$

Đặt $c_n = \dfrac{1}{n. \ln n}$. Khi đó do c_n là dãy dương, giảm và có tích phân $\ln(\ln x)|_2^{\infty} \to \infty$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$ phân kỳ $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-1} 3^{n-1}$ phân kỳ.

• Khi $x = -3$, thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-1} (-3)^{n-1} = -\dfrac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n. \ln n}$

Ta có c_n là dãy dương, giảm, hội tụ về 0 nên $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n$ hội tụ (*theo tiêu chuẩn Leibnitz*)

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} a_{n-1} 3^{n-1}$ hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ là $[-3, 3)$

vi) Đặt $a_n = \dfrac{1}{n.5^n}$ thì $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{5} \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n}\right|} = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ là $R = 5$.

$*$ Xét miền hội tụ $|x - 3| \leq 5$.

• Khi $x = 8$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n 5^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

• Khi $x = -2$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n (-5)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

Đặt $c_n = \dfrac{1}{n}$ có c_n là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ là $[-2, 8)$

vii) Đặt $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ thì $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n^2}\right|} = 1$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ là $R = 1$.

$*$ Xét miền hội tụ $|x + 3| \leq 1$.

• Khi $x = -2$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ.

• Khi $x = -4$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ cũng hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ là $[-4, -2]$.

viii) Tương tự *ii*) có bán kính hội tụ là $R = e$.

$*$ Xét miền hội tụ $|x + 3| \leq e$.

Khi $x = e - 3$ và $x = e + 3$ thì chuỗi không hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ là $(e - 3, e + 3)$.

ix) Tương tự bài *vi*), ta có miền hội tụ là $(2, 8]$.

Exercise 1.91. Cho

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < \dfrac{1}{n+1} \\ \sin^2 \dfrac{\pi}{x} & \text{khi } \dfrac{1}{n+1} < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{khi } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

CMR (f_n) hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều.

Chứng minh.

$*$ Đặt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Khi $x = 0$ thì $f_n(x) = 0$ do $0 \in \left(-\infty, \dfrac{1}{n+1}\right)$

Khi $x \neq 0$ thì có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x > \dfrac{1}{n_0}$ thì $f_n(x) = 0$ do

$$\forall n > n_0, \text{ ta có } \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < x$$

Do đó (f_n) hội tụ từng điểm về 0

$*$ Tiếp theo, xét dãy $x_n = \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{2}}$

$$d(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = \left|\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy $f_n \not\rightrightarrows f$. □

Exercise 1.92. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n (x+3)^n$ *iii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$ *v)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ *iv)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$ *vi)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Giải

i) Đặt $a_n = n^n$. Chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n$

Xét $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup n = \infty$.

Do đó chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $|x+3| = 0$ hay $x = -3$.

ii) Áp dụng chuỗi điều hòa, $\sum \dfrac{1}{n^x}$ chỉ hội tụ khi & chỉ khi $x > 1$.

iii) Khi $x = 0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n} = 0$ nên hội tụ.

Khi $x \neq 0$ cố định. Lưu ý tính chất $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$.

Đặt $t = \dfrac{x}{3^n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right|} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right| \frac{x}{3^n}} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right| x} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right| x} = \frac{2}{3}$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^n \sin\dfrac{x}{3^n}\right|} < 1$ nên theo *tiêu chuẩn căn số* thì

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$ hội tụ và có miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

iv) Ta có $\left|\dfrac{\cos nx}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ hội tụ nên theo *tiêu chuẩn so sánh* thì

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$ hội tụ và có miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

v) Khi $x = 0$ thì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{e^{nx}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ nên phân kỳ.

Khi $x \neq 0$, lấy $x < 0$ cố định. Lưu ý tính chất $\cos t = \cos(-t)$.

Đặt $t = -x$. Ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos -nt}{e^{-nt}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} \cos nt$$

Xét $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nt} \cos nt = 0$.

Mặt khác $|e^{nt} \cos nt| > |\cos nt|$ nên $\cos nt \to 0$ khi $t \to \infty$ và

$\cos (n+1)\, t = \cos nt. \cos t - \sin nt. \sin t \Rightarrow \sin nt. \sin t \to 0$ khi $n \to \infty$. (1)

Ngoài ra nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nt = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |\sin nt| = 1$. (2)

Vậy để $\sin t = 0$ thì $t = k\pi$. Lúc đó $\sin nt = \sin nk\pi = 0$ mâu thuẫn với (2)

$\Rightarrow \forall x < 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$ không hội tụ.

Khi $x > 0$, ta có

$$\left| \frac{\cos nx}{e^{nx}} \right| \leq \frac{1}{e^{nx}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Mà $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{e^{nx}}$ hội tụ nên theo *tiêu chuẩn so sánh* thì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$ là $(0, \infty)$.

vi) Ta có $\left| \dfrac{\sin (2n-1)\, x}{(2n-1)^2} \right| \leq \dfrac{1}{(2n-1)^2},\ \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ hội tụ nên theo *tiêu chuẩn so sánh* thì

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin (2n-1)\, x}{(2n-1)^2}$ cũng hội tụ và có miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

Exercise 1.93. CMR chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ không hội tụ tuyệt đối tại $x \in \mathbb{R}$ nhưng hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$

Chứng minh.

$*$ CM chuỗi không hội tụ tuyệt đối $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{x^2+n}{n^2} \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{x^2+n}{n^2}$ phân kỳ.

Do đó $\sum\limits_{n=1}^{m} (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ không hội tụ tuyệt đối $\forall x \in \mathbb{R}$.

$*$ CM hàm hội tụ đều trên mọi khoảng $[a, b]$ bị chặn.

Đặt $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$ là tổng riêng phần, xét

$S_m(x) = x^2 \left[\sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \right] + \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{(-1)^n}{n} = x^2 T_m + V_m$

Nhưng $T_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ và $V_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{(-1)^n}{n}$ là 2 chuỗi hội tụ.

Giả sử $T_m \to T$ và $V_m \to V$. Đặt $S(x) = x^2T + V$.

Vì khoảng $[a,b]$ bị chặn nên $\exists C > 0$ sao cho $x^2 < C,\ \forall x \in [a,b]$.

Ta có

$$d(S_m, S) = \sup_{x\in[a,b]} \left| x^2 (T_m - T) + (V_m - V) \right| \le C\,|T_m - T| + |V_m - V|$$

$\Rightarrow 0 \le \lim\limits_{m\to\infty} d(S_m, S) \le C \lim\limits_{m\to\infty} |T_m - T| + \lim\limits_{m\to\infty} |V_m - V| = 0.$

Theo tính chất giới hạn kẹp, (*tính chất sandwich*) ta có $\lim\limits_{m\to\infty} d(S_m, S) = 0$

Do đó chuỗi hội tụ đều trên $[a,b]$. □

Exercise 1.94. Tìm α để

i) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ từng điểm trên $[0,1]$.

ii) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

Giải.

i) Khi $x = 0$, ta có $f_n(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Khi $x \in (0,1]$ ta có $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{e^{nx}}$

Với $\alpha \le 0$ thì n^α hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Với $\alpha > 0$ thì $e^x > 1$, do đó

$$0 \le \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \le \frac{n^\alpha n}{e^{nx}} = \frac{n^{\alpha+1}}{e^{nx}} \forall n \ge 1$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha+1}}{e^{nx}} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$ hay

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ thì } f_n \text{ hội tụ từng điểm.}$$

ii) Tìm $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Mà theo kết quả câu *i*), ta có $f(x) = 0$.

Do đó để CM $f_n \rightrightarrows f$ thì ta cần CM

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \to 0.$$

Xét khi $\alpha \ge 1$,

Cho dãy $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ thì

$$f_n(x_n) = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-n\frac{1}{n}} = n^{\alpha-1} e^{-1} \ge e^{-1}$$

Do đó

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(x_n) \geq e^{-1} \neq 0$$

Vậy $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

Tiếp theo khi $\alpha < 1$,

Đặt $u(t) = e^t - t$ có $u'(t) = e^t - 1 \geq 0, \forall t \in [0,1]$

Vậy $u(t) \geq u(0) = 1 > 0, \ \forall t \in [0,1] \Leftrightarrow e^{nx} - nx \geq 0, \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$.

Mà $nx \leq e^{nx}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{e^{nx}} \leq \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$$

Vậy $\forall \alpha < 1$ thì dãy hàm $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{e^{nx}}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

1.3 Đạo hàm - Vi , Tích phân - Nguyên hàm.

1.3.1 Các công thức quan trọng - Nhắc lại kiến thức

Theorem 1.95. *Các công thức đạo hàm căn bản*

$(C)' = 0$ $\qquad$ $(ax^n)' = anx^{n-1}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $(e^{ax})' = ae^{ax}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a}.\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $(a^x)' = a^x.\ln a$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

$(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad$ $(\cosh x)' = \sinh x$

Trong đó :

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ *và* $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

Ngoài ra ta còn một số lưu ý khác

Cho các hàm $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *thì*

•$(\alpha u(x) + \beta v(x))' = \alpha u(x) + \beta v(x)$

•$(u[v(x)])' = v'(x).u'[v(x)]$

•$(u(x).v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

•$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

•*Nếu* u *là ảnh ngược của* $v(x)$ *thì* $u'(x) = \dfrac{1}{v'[y]}$ *với* $y = u(x)$

$*$ *Ứng dụng: Định lý L' Hopital: (Sử dụng cho trường hợp mẫu thức có giới hạn bất định.)*

Nếu $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f, g \text{ liên tục trong } [a, b]$$

$$f, g \text{ khả vi } \forall x \in (a, b)$$

Tại $x_0 \in (a, b)$ thỏa $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = L$

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Hoặc

$$f(x_0) = g(x_0) = \pm\infty$$

thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{g^{(k)}(x_0)}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Example 1.96. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{d^2(\ln(\cos x))}{d^2(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}.$$

Example 1.97. CMR $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$.

Chứng minh.

• Ta có $\dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a(1 + x)^{1/x}$. Mà $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{1/x} = e$,

Do đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a\left(\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}\right) = \log_a e$.

• Đặt $t = a^x - 1$, khi đó $\lim\limits_{x \to 0} = \lim\limits_{t \to 0}$ và $x = \log_a(t + 1)$

Mà $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log_a(1 + t)}{t} = \log_a e$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x}{a^x - 1} = \log_a e$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{x}{a^x - 1}\right)^{-1} = (\log_a e)^{-1} = \ln a$.

• Đặt $s = (1 + x)^a - 1$. Khi đó $\ln(1 + s) = a \ln(1 + x)$.

Vậy $\dfrac{(1 + x)^a - 1}{x} = \dfrac{s}{x} a = \dfrac{s}{\ln(1 + s)} a \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$, do đó

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^a - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0, s \to 0} \left[\dfrac{s}{\ln(1 + s)} a \dfrac{\ln(1 + x)}{x}\right]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^a - 1}{x} = a \lim\limits_{s \to 0} \left[\dfrac{s}{\ln(1 + s)}\right] . \lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\ln(1 + x)}{x}\right] = a$.

□

Theorem 1.98. *Special limit*

Cho u, v là các hàm thực liên tục

Tính giới hạn của dạng hàm $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}$, *trong đó* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$. *Khi đó*

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)} = \left(\lim_{x\to x_0}[u(x)]\right)^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\right)},$$

Example 1.99. Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$ và $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x}$.

Giải. • Ta có

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{2-x}{-2}\left(\frac{-2}{2-x}.3x\right)}$$

Đặt $t = \dfrac{-2}{x+2}$, khi đó $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{x+2} = 0$

Mà $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+2}\right)^{\frac{2-x}{-2}} = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ và

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2}{x+2}.3x\right) = 6$

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x+2}\right)^{\frac{2-x}{-2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{2-x}.3x\right)} = e^{-6}$

• Đặt $s = \dfrac{1}{x}$. Khi đó $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0}\sin x = \lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{1}{s}. \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{s\to\infty} s. \end{cases}$

Do đó :$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x} = \lim\limits_{s\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{s}\right)^{s} = e.$

Example 1.100. Tính $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)\left(3x^2+x+2\right)}{4x^2}\right)$.

Giải.

• Đặt $t = \sqrt[4]{x}$, khi đó $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to 3}\dfrac{3-t}{9-t^2} = \lim\limits_{t\to 3}\dfrac{1}{t+3} = \dfrac{1}{6}$

• Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}\right)}{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{14}{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)} = 0.$$

• Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)\left(3x^2+x+2\right)}{4x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x^4-\left(4x^2-1\right)\left(3x^2+x+2\right)}{4x^2(2x+1)}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-5x^2+x+2}{8x^3+4x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Theorem 1.101. *Các công thức nguyên hàm căn bản*

$\int 0dx = C$

$\int adx = ax + C$

$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ *với* $\alpha \neq -1$

và $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sinh x dx = \cosh x + C$

$\int \dfrac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$

$\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \cosh x dx = \sinh x + C$

$\int \dfrac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

Với $f, g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *ta có*

$\int (f(x) + \alpha g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \alpha \int g(x)\, dx$

——————————————————————————————————————

Với 1 số dạng nguyên hàm đặc biệt, ta có các kỹ thuật đổi biến số sau:

(i) $f(x) = f\left(\sqrt{a - x^2}\right)$. *Đặt* $x = |a| \sin t$ *với* $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

hoặc $x = |a| \cos t$ *với* $t \in [0, \pi]$

(ii) $f(x) = f\left(\sqrt{a + x^2}\right)$. *Đặt* $x = |a| \tan t$ *với* $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

hoặc $x = |a| \cot t$ *với* $t \in (0, \pi)$

——————————————————————————————————————

Với dạng hàm đa thức nhân với một hàm bất kỳ, ta có công thức tích phân từng phần

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Cho $P(x)$ *là hàm đa thức,* $Q(x)$ *là hàm bất kỳ và* $R(x) = P(x)Q(x)$ *thì*

Nếu $Q(x) = Q(e^x)$ *thì đặt* $\begin{cases} u(x) = P(x) \\ v(x) = Q(x) \end{cases}$.

Nếu $Q(x) = Q(\cos x)$ *hoặc* $Q(\sin x)$ *thì* $\begin{cases} u(x) = P(x) \\ v(x) = Q(x) \end{cases}$.

Nếu $Q(x) = Q(\ln x)$ *thì* $\begin{cases} u(x) = P(x) \\ v(x) = Q(x) \end{cases}$.

Chẳng hạn tính $\int \dfrac{x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

——————————————————————————————————————

Đối với hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Gọi $d_P = \deg[P(x)]$ *và* $d_Q = \deg[Q(x)]$.

Nếu $d_P \geq d_Q$ *thì sử dụng phép chia đa thức để tách hàm.*

Chẳng hạn như $\int \dfrac{x^2+x+1}{x-1}dx = \int \left[(x+2) + \dfrac{3}{x-1}\right] dx$

Nếu $d_p < d_Q$ thì phân tích nhân tử ở mẫu thức để xuất hiện tổng phân thức (P.pháp chính yếu ở phần này là hệ số bất định).

Chẳng hạn :

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\frac{1}{(x-d)\left[ax^2+bx+c\right]} = \frac{A}{x-d} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \left[\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}\right] + \left[\frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}\right]$$

————————————————————————————————

Đối với dạng hàm vô tỷ như

$\bullet f(x) = R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ *thì đặt* $t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Lúc đó $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f(x) = g\left[t, h\left(t^m, a, b, c, d\right)\right]$

$\bullet f(x) = R\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right)$ *thì đặt* $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$

Lưu ý là $dt = H\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x+a}\sqrt{x+b}}\right]$

$\bullet f(x)$ *là hàm lượng giác.*

Xét các biến đổi sau:

$$*\frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$*\frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$

$$*\frac{1}{\sin(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)}\frac{\cos\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$$

$*$*Nếu* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. *Đặt* $t = \cos x$

$*$*Nếu* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. *Đặt* $t = \sin x$

$*$*Nếu* $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. *Đặt* $t = \tan x$

————————————————————————————————

Phương pháp nguyên hàm phụ

Cho hàm $f(x)$ bất kỳ, ta tìm $g(x)$ sao cho các nguyên hàm của $f \pm g$ xác định đơn giản hơn.

Khi đó với F, G lần lượt là các nguyên hàm của f, g thì

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = A(x) + C_1 \\ F(x) - G(x) = B(x) + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \\ G \end{cases}.$$

1.3.2 Bài tập & ứng dụng

Exercise 1.102. Tính các giới hạn sau

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}$ với $p>0, \alpha\in\mathbb{R}$.

Giải.

Xét • $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{n!} = e^k$

• $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = \exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n}\right] = \exp\lim\limits_{n\to\infty}\left[\alpha\ln n - n\ln(1+p)\right] = 0$

• $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p} = 1.$

Exercise 1.103. Tính các nguyên hàm sau

i) $\int\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ *ii)* $\int\dfrac{\cos x.dx}{\sin x-\cos x}$ *iii)* $\int\dfrac{\sin x.dx}{\cos x+\sin x}$ *iv)* $\int\dfrac{\sin^4 x.dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

v) $\int\dfrac{x^3dx}{x^2-3x+2}$ *vi)* $\int\dfrac{dx}{1+x^3}$ *vii)* $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ *viii)* $\int\dfrac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}$

ix) $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ *x)* $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ *xi)* $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ *xii)* $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}$

Giải.

Exercise 1.104. Tính các giới hạn sau

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{x}\right]^{\frac{x+3}{x}}$ *ii)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{x^2}$ *iii)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ *iv)* $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\sin x\right]^{\frac{1}{x}}$

v) $\lim\limits_{x\to e}\left[\dfrac{\ln x-1}{x-e}\right]$ *vi)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos x+a\sin bx\right]^{\frac{1}{x}}$ *vii)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ *viii)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$

ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$ *x)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}$ *xi)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ *xii)* $\lim\limits_{x\to\infty}x^{(x^x-1)}$

Exercise 1.105. Tính các nguyên hàm sau

i) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ *ii)* $\int\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\dfrac{dx}{x}$ *iii)* $\int\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}\dfrac{dx}{x}$ *iv)* $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$

v) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$ *vi)* $\int\dfrac{\cos 2xdx}{1+\sin x\cos x}$ *vii)* $\int\dfrac{dx}{2\sin x+1}$ *viii)* $\int\dfrac{dx}{\cos x}$

ix) $\int\dfrac{dx}{\sin x}$ *x)* $\int\dfrac{\sin^3 xdx}{\cos x}$ *xi)* $\int\dfrac{dx}{\cos x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ *xii)* $\int(\tan^2 x+\tan^4 x)\,dx$

Exercise 1.106. Tính các tích phân và nguyên hàm sau

i) $\int_2^5\dfrac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ *ii)* $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ *iii)* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$

iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x.dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}$ *v)* $\int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ *vi)* $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$

vii) $\int_0^{2\pi}x^2\sin xdx$ *viii)* $\int_0^1 x^2e^xdx$ *ix)* $\int_1^2 x^3\ln^2 xdx$

$x)\ \int_1^e \ln^3 x dx$ $\quad xi)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx dx$ $\quad xii)\ \int e^{ax}\cos x dx$

$xiii)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$ $\quad xiv)\ \int_{-1}^1 \sqrt{4-|x|}dx$ $\quad xv)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

Lưu ý: Một số tích phân đặc biệt

- *Nếu* $f(x)$ *liên tục và là hàm số lẻ trên* $[-a,a]$ *thì* $\int_{[-a,a]} f(x)\,dx = 0$. *(Type 1)*
- *Nếu* $f(x)$ *liên tục và là hàm số chẵn trên* $[-a,a]$ *thì* $\int_{[-a,a]} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- *Nếu* $f(x)$ *liên tục và là hàm số lẻ trên* $\mathbb{R}$ *và* $\alpha > 0$ *thì* $\int_{[-\alpha,\alpha]} \dfrac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_0^\alpha f(x)\,dx$.
  CM bằng cách
  $$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{a^x+1}dx + \int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}dx = J(x) + K(x)$$
  Tính $J(t)$ *bằng cách đặt* $t = -x$. *(Type 2)*
- *Nếu* $f(x)$ *liên tục, tuần hoàn trên* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *thì*
  $$\int_{-\alpha}^{\alpha} f[\cos x]\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f[\sin x]\,dx$$
  CM bằng cách đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$. *(Type 3)*
- *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *thỏa* $f(a+b-x) = f(x)$*hoặc* $f(a+b-x) = -f(x)$*(Type 4), thì đặt*
  $$t = a+b-x$$

Exercise 1.107. Tính các tích phân dạng đặc biệt sau *(Type 1)*

$i)\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x^7-x^5+x^3-x+1}{\cos^4 x}dx$ $\quad ii)\ \int_{-1}^1 \dfrac{|x|}{x^4-x^2+1}dx$ $\quad iii)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{xdx}{4-\sin^4 x}$

$iv)\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x+\cos x}{2-\cos^4 x}dx$ $\quad v)\ \int_{-1}^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ $\quad vi)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Exercise 1.108. Tính

$i)\ \int_{-1}^1 \dfrac{x^4dx}{2^x+1}$ $\quad ii)\ \int_{-2}^2 \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{1+2^x}dx$ $\quad iii)\ \int_{-1}^1 \dfrac{dx}{(x^2+1)(e^x+1)}$

$iv)\ \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin^2 xdx}{4^x+1}$ $\quad v)\ \int_{-3}^3 \dfrac{x^2+1}{1+2^x}dx$ $\quad vi)\ \int_{-1}^1 \dfrac{dx}{(x^2+1)(a^x+1)}$

$vii)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2\sin xdx}{2^x+1}$ $\quad ix)\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{1+5^x}dx$ $\quad iii)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x\sin 3x\cos 5xdx}{e^x+1}$

Exercise 1.109. Tính

$i)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad ii)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

Exercise 1.110. Tính

$i)\ \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx$ $ii)\ \int_0^{\pi} \frac{x+\cos x}{3-\sin^2 x}dx$ $iii)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

$iv)\ \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$ $v)\ \int_0^{2\pi} x\cos^3 x dx$ $vi)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}dx$

$vii)\ \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{2+\cos x}dx$ $viii)\ \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$ $ix)\ \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$x)\ \int_0^{\pi/4} \sin 4x \ln(1+\tan x)\,dx$ $xi)\ \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$ $xii)\ \int_0^{\pi} x\sin x\cos^4 x dx$

1.4 Đại cương về số phức

Definition 1.111. Số phức

Có dạng đại số là $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. a *là phần thực và* b *là phần ảo.*

0 *là số vừa thực vừa ảo.*

Cho $z_1 = a_1 + b_1 i$ *và* $z_2 = a_2 + b_2 i$.

- *Nếu* $z_1 = z_2$ *thì* $\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$
- $\overline{z_1} = a_1 - ib_1$ *được gọi là số phức liên hợp với* z_1. *Khi đó* $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
- $\overline{z_1 + \alpha z_2} = \overline{z_1} + \alpha\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ *và* $z_1\overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$.
- $\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{a_1 - ib_1}{a_1^2 + b_1^2}$. *Trong đó* $|z_1|$ *được gọi là module của số phức* z_1

Definition 1.112. *Dạng lượng giác của số phức*

Cho $z = a + bi$, *khi đó nó có thể viết dưới dạng*

$$z = r\cos\phi + i\sin\phi = re^{i\phi}$$

Trong đó $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} > 0 \\ \phi = \arctan\frac{b}{a} \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Ta gọi ϕ *là một argument của* z.

Khi đó phép nhân chia các số phức ở dạng này sẽ được tính dễ dàng hơn.

Cho $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}, z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$, *ta có*

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\right]$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right]$

Theorem 1.113. *Công thức Euller, De Moivre và phương pháp lấy căn bậc n của số phức* $z = re^{i\varphi}$

- *Công thức* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *được gọi là công thức Euller.*
- $\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ *gọi là công thức De Moivre.*
- *Khi đó, ta nói phương trình* $z^n = c$ *có căn bậc n là*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., n-1$$

Chương 2

Phương trình vi - tích phân

2.1 Phương trình vi phân

2.2 Tích phân & ứng dụng

2.3 Ứng dụng biến đổi Laplace và Fourier trong giải phương trình vi phân

Chương 3

Giải tích hàm cơ bản

3.1 Metric, chuẩn và topo sinh

3.1.1 Metric

Nhắc lại kiến thức:

Cho không gian X và $x, y \in X$. Một metric trên X là ánh xạ

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

thỏa 3 tính chất

- *Phân biệt dương* $d(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in X.\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Đối xứng* $d(x, y) = d(y, x)$
- *BĐT tam giác* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)\,,\ \forall x, y, x \in X$

Khi đó $d(.,.)$ là một metric trên X và (X, d)được gọi là không gian metric.

Example 3.1. Chứng minh các khoảng cách sau là một metric trên $\mathbb{R}^n$

$d(x, y) = \max\limits_{1 \leq m \leq n} |x_m - y_m|$

3.2 Giải tích lồi và ứng dụng

Phần lý thuyết của hàm lồi và tập lồi,.. đã được trình bày trong chương 1.

Trong phần này ta sẽ giới thiệu sơ lược thuật toán $Largrange$, KKT và một số bài toán cơ bản trong Toán kinh tế cũng như Giải tích.

3.2.1 Một số dạng hàm lồi thông dụng

3.2.2 Các thuật toán tối ưu & ứng dụng

3.3 Không gian hàm liên tục

3.4 Các định lý quan trọng đáng nhớ

Chương 4

Giải tích thực và phức

4.1 Lý thuyết độ đo & tích phân

4.2 Không gian L^p & Hilbert

4.3 Chuỗi số thực & phức

Chương 5

Đại số tuyến tính

5.1 Thuật toán đệ quy & quy nạp

5.1.1 Giải thuyết quy nạp.

Remark 5.1. *(Nguồn gốc của quy nạp). Transfinite induction priciple. Cho tập S được sắp tốt. i.e.*

$\forall A \neq \emptyset$, $A \subset S$ *đều có phần tử nhỏ nhất tức* $\exists a \in A$ *sao cho* $\forall b \in A$ *thì* $a \leq b$.

Một ví dụ đơn cử là $\mathbb{N}$ *được sắp tốt nhưng* $\mathbb{R}$ *thì không.*

Năm 1904, Ernst Zermelo đã CMR bất cứ tập hợp nào cũng có thể được sắp tốt, dựa trên Tiên đề chọn.

Bài toán : Cho A là tập được sắp tốt, đặt $P(a)$ là mệnh đề mà tính đúng của nó là tùy thuộc vào $a \in A$. Nếu

i) $P(a)$ đúng khi a là phần tử nhỏ nhất của A và

ii) Nếu $P(a)$ đúng với mọi $a < b$ thì $P(b)$ đúng

Khi đó ta kết luận $P(a)$ đúng $\forall a \in A$

Exercise 5.2. Cho $n \in \mathbb{N}$ và $x \neq 1$. CMR:

$a)$ $\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}+1\right) = \dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$ $\qquad$ $b)$ $\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right) = \dfrac{x^{3^{n+1}}-1}{x-1}$

Chứng minh. Bằng quy nạp, ta có

$a)$ Khi $n=1$. $\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}+1\right) = (x+1).(x^2+1) = \dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$

Giả sử khi $n=m$ thì $\prod_{k=0}^{m}\left(x^{2^k}+1\right) = \dfrac{x^{2^{m+1}}-1}{x-1}$.

Xét khi $n=m+1$ khi đó $\prod_{k=0}^{m+1}\left(x^{2^k}+1\right) = \left[\prod_{k=0}^{m+1}\left(x^{2^k}+1\right)\right]\left(x^{2^{m+1}}+1\right)$

Mà $\left[\prod_{k=0}^{m+1}\left(x^{2^k}+1\right)\right]\left(x^{2^{m+1}}+1\right) = \left(\dfrac{x^{2^{m+1}}-1}{x-1}\right)\left(x^{2^{m+1}}+1\right)$

$$= \left[\frac{\left(x^{2^{m+1}}-1\right)\left(x^{2^{m+1}}+1\right)}{x-1}\right] = \frac{\left(x^{2^{m+1}}\right)^2-1}{x-1} = \frac{x^{2^{2[m+1]}}-1}{x-1}$$

b) Khi $n=1, \prod_{k=0}^{n}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right) = \left(x^{2.3}+x^3+1\right).\left(x^2+x+1\right) = \dfrac{x^{3^2}-1}{x-1}$

Giả sử $n=m$ thì $\prod_{k=0}^{m}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right) = \dfrac{x^{3^{m+1}}-1}{x-1}$

Xét khi $n=m+1$, thì

$$\prod_{k=0}^{m+1}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right) = \left(x^{2.3^{m+1}}+x^{3^{m+1}}+1\right).\prod_{k=0}^{m}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right)$$

Do đó $\prod_{k=0}^{m+1}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right) = \left(x^{2.3^{m+1}}+x^{3^{m+1}}+1\right).\dfrac{x^{3^{m+1}}-1}{x-1} = \dfrac{x^{3^{m+2}}-1}{x-1}$ □

Exercise 5.3. Cho $a_1, ..., a_n > 0$. CMR : $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Chứng minh. CM bằng quy nạp.

Khi $n=1$, ta có $1+a_1 = 1+a_1$ *(hiển nhiên)*

Giả sử khi $n=m$, BĐT vẫn đúng. Tức $\prod\limits_{k=1}^{m}(1+a_k) \geq 1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k$

Xét khi $n=m+1$, $\prod\limits_{k=1}^{m+1}(1+a_k) = (1+a_{m+1})\prod\limits_{k=1}^{m}(1+a_k)$

$$\geq (1+a_{m+1})\left(1+\sum_{k=1}^{m} a_k\right) \geq 1+\sum_{k=1}^{m+1} a_k, \forall (a_k) > 0$$ □

5.1.2 Thuật toán đệ quy & ứng dụng.

○ **Đệ quy cấp 1**

- Có dạng $\begin{cases} ax_n + bx_{n-1} = f(n) \\ x_0 = K \end{cases}$
- Phương trình có nghiệm tổng quát là $x_n = C.\left(-\dfrac{b}{a}\right)^n$
- Nghiệm riêng nếu $f(n)$ có dạng

1. $f(n) = \lambda^n P_m(n)$ với $\lambda \neq -\dfrac{b}{a}$ và $P_m(n)$ là đa thức bậc m theo n thì nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$x_n = \lambda^n Q_m(n)$$

2. $f(n) = \lambda^n P_m(n)$ với $\lambda = -\dfrac{b}{a}$ và $P_m(n)$ là đa thức bậc m theo n thì

$$x_n = n.\lambda^n Q_m(n)$$

Example 5.4. Tìm công thức tổng quát của

$$a)\begin{cases} x_n + 2x_{n-1} = 4n+1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x_n - 3x_{n-1} = 2^n \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_n - 4x_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(3n^2+2n-\frac{144}{25}\right) \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$a)$ Nghiệm tổng quát là $x_n = K\left(-2\right)^n$,

Nghiệm riêng $x_n = an + b$. Tìm a, b bằng cách xét $x_{n-1} = an + b - a$, ta được

$$x_n + 2x_{n-1} = (an+b) + (an+b-a) = (2a)\,n + (2b-a) = 4n+1$$

Do đó $\begin{cases} 4 = 2a \\ 2b - a = 1 \end{cases}$, ta được $\begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$

Kết hợp với $x_0 = 0$ ta được

$$x_n = K\left(-2\right)^n + 4n + 1 = 0$$

Vậy nghiệm cần tìm là $x_n = -\left(-2\right)^n + 2n + \frac{5}{2}$

$b)$ Nghiệm tổng quát là $x_n = K\left(\frac{3}{2}\right)^n$,

Nghiệm riêng là $x_n = C.2^n$, ta có $x_{n-1} = C.2^{n-1}$. Ta có

$$2x_n - 3x_{n-1} = C\left(2^{n+1} - 3.2^{n-1}\right) = 2^{n-1}\left(4C-3\right) = 2.2^{n-1} = 2^n$$

Do đó $4C - 3 = 2$ hay $C = \frac{5}{4}$.

Kết hợp với $x_2 = 3$ ta được $x_n = K\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{5}{4}.2^n = 4$

Vậy nghiệm cần tìm là $x_n = -\frac{9}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{5}{4}.2^n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + 5.2^{n-2}$.

$c)$ Nghiệm tổng quát $x_n = K\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

Nghiệm riêng có dạng $x_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(an^2+bn+c\right)$.

Ta có $x_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n 4\left[a\left(n-1\right)^3 + b\left(n-1\right)^2 + c\left(n-1\right)\right]$,

$$\Rightarrow x_n - 4x_{n-1} = n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(an^2+bn+c\right) - 4\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n 4\left[a\left(n-1\right)^3 + b\left(n-1\right)^2 + c\left(n-1\right)\right]\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n\left\{\left(an^3+bn^2+cn\right) - 16\left[a\left(n-1\right)^3 + b\left(n-1\right)^2 + c\left(n-1\right)\right]\right\}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n\left\{-15an^3 + (48a-15b)n^2 + (32b-48a-15c)n + 16a - 16b + 16c\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(3n^2+2n-\frac{144}{25}\right).$$

Ta được hệ $\begin{cases} -15a = 0 \\ 48a - 15b = 3 \\ 32b - 48a - 15c = 2 \\ 16a - 16b + 16c = -\dfrac{144}{25} \end{cases}$ ta được $\begin{cases} a = 0 \\ b = -0.2 \\ c = -\dfrac{14}{25} \end{cases}$.

với $x_1 = 1$ thì $x_n = K\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n n\left(-\dfrac{1}{5}n - \dfrac{14}{25}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left[-\dfrac{1}{5}n^2 - \dfrac{14}{25}n + K\right] = 1$

Vậy nghiệm cần tìm có dạng $x_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left[-\dfrac{1}{5}n^2 - \dfrac{14}{25}n + \dfrac{44}{25}\right]$

○ **Đệ quy cấp 2**

- Có dạng $\begin{cases} a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1} = f(n) \\ x_p = R_1, x_q = R_2;\ p, q \in \overline{1, .., n} \end{cases}$
- Có phương trình đặc trưng là $a_0t^2 + a_1t + a_2 = 0$ $\quad(*)$ có các trường hợp

1. Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thì nghiệm tổng quát là

$$x_n = C_1t_1^n + C_2t_2^n$$

2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép t_0 thì nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2).t_0^n$$

3. Phương trình $(*)$ có nghiệm phức thì nghiệm tổng quát là

$$x_n = \exp \alpha n\left[C_1 \cos \beta n + C_2 \sin \beta n\right]$$

- Xét các dạng nghiệm riêng.

1. Nếu $f(n) = \lambda_1^nP_{m1}(n) + ... + \lambda_l^nP_{ml}(n)$ ta sẽ tìm nghiệm riêng theo từng nghiệm $\lambda_k^nP_{mk}(n)$ với $1 \le k \le l$ rồi lấy tổng của chúng.
2. Nếu $f(n) = \lambda^nP_m(n)$ đơn giản thì ta có 3 trường hợp nhỏ như sau:

$i)$ Nếu λ là không phải nghiệm của phương trình đặc trưng, nghiệm riêng có dạng

$$x_n = \lambda^nQ_m(n)$$

$ii)$ Nếu λ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có dạng là

$$x_n = n\lambda^nQ_m(n)$$

iii) Nếu λ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có dạng là

$$x_n = n^2\lambda^n Q_m(n)$$

Example 5.5. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

$i) 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1$

$ii) \begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)\,3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0 \end{cases}.$

$iii) \begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = \left(2n^2 + 19n + 56\right)2^{n-1}; \\ x_0 = 1;\ x_1 = -2 \end{cases}.$

$iv) x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)\,2^{n-2} + 3.4^n$

Giải.

$i)$ Phương trình đặc trưng có nghiệm là $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{1}{2}$

Nghiệm tổng quát là $x_n = C_1 + C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Xét nghiệm riêng có dạng $n(an+b)$, Ta có phương trình

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 2\left(an^2 + bn\right) - 3\left[a(n-1)^2 + b(n-1)\right] + a(n-2)^2 + b(n-2) = 4n + 1$$

Ta tìm được $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ .Do đó nghiệm riêng là $n(2n-1)$.

Vậy nghiệm cần tìm là

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + n(2n-1).$$

$ii)$ Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $t_0 = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát là $x_n = (C_1 + nC_2)\,3^n$.

Vế phải trùng với nghiệm kép của phương trình nên nghiệm riêng có dạng

$$x_n = n^2(an+b)\,3^n$$

Thay vào bài toán, ta được

$$3^n\left\{\left[a(n+1)^3 + b(n+1)^2\right] + 3\left(an^2 + bn + c\right) + \frac{a(n-1)^2 + b(n-1) + c}{3}\right\} = 3^n(18n+12)$$

Do đó, $a = 1, b = 2$ và nghiệm cần tìm là

$$x_n = 3^n\left[n^3 + 2n^2 + C_2 n + C_1\right]$$

Thay $x_0 = 2$ và $x_1 = 0$, ta được

$$x_n = 3^n\left(n^3 + 2n^2 - 5n + 2\right).$$

iii) Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $t_0 = 3/2$.

Do đó nghiệm tổng quát là $x_n = (C_1 + nC_2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

Nghiệm riêng có dạng $2^n\left(an^2 + bn + c\right)$ và thay vào phương trình, ta được

$2^{n-1}\left\{16\left[a\left(n+1\right)^2 + b\left(n+1\right)^2 + c\right] - 24\left[an^2 + bn + c\right] + 9\left[a\left(n-1\right)^2 + b\left(n-1\right)^2 + c\right]\right\}$

$= 2^{n-1}\left(2n^2 + 29n + 56\right)$

Do đó $a = 2, b = 1, c = -1$. Ta được

$$x_n = 2^n\left(2n^2 + n - 1\right) + (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Thay $x_0 = 1, x_1 = -2$, ta được $C_1 = 2, C_2 = -6$. Do đó nghiệm cần tìm là

$$x_n = 2^n\left(2n^2 + n - 1\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n(6n - 2)$$

iv) Bằng lý luận tương tự, ta được nghiệm tổng quát là $x_n = C_1 + C_2.3^n$.

Bài toán có 3 nghiệm riêng là $x_{n1} = an$, $x_{n2} = 2^n\left(bn + c\right)$ và $x_{n3} = K4^n$.

Ta có hệ $\begin{cases} x_{n1} - 4x_{n1-1} + 3x_{n1-2} = 20 \\ x_{n2} - 4x_{n2-1} + 3x_{n2-2} = (2-n)\,2^{n-2} \\ x_{n3} - 4x_{n3-1} + 3x_{n3-2} = 3.4^n \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x_{n1} = -10n \\ x_{n2} = n.2^n \\ x_{n3} = 4^{n+2} \end{cases}$

Nghiệm cần tìm có dạng

$$x_n = 4^{n+2} + C_2.3^n + n.2^n - 10n + C_1.$$

5.2 Ma trận & định thức

5.2.1 Ma trận & các khái niệm liên quan

Definition 5.6. *Ma trận*

Cho A là khối có dạng $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Khi đó, nó được gọi là ma trận loại $m \times n$*, có* m *dòng,* n *cột. Ký hiệu là* $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
Phần tử $a_{ij} \in \mathbb{C}$ *là số hạng được lấy từ dòng* i*, cột* j *của ma trận.* $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

- Nếu $m = n$, ta nói A là *ma trận vuông cấp n*. Ví dụ\

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  được gọi là ma trận vuông cấp 2.

- Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ được gọi là *đường chéo chính*. $(1, 1)$ là đường chéo chính của ma trận trên.

- Nếu $a_{ij} = 0, \forall 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ thì ta nói A là *ma trận 0* loại $m \times n$. Ví dụ

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nếu $a_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{khi } i \ne j, \forall 1 \le i, j \le n = m \\ 0 & \text{khi } i = j, \forall 1 \le i, j \le n = m \end{cases}$. thì A là *ma trận chéo* cấp n. Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận chéo A có các hệ số trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị cấp n*. Ký hiệu là I_n. Ví dụ

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận A là *ma trận tam giác trên* nếu nó là ma trận vuông có các hệ số phía dưới đường chéo chính đều bằng 0. Hay nói cách khác là $a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$. Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Một ma trận gọi là *ma trận tam giác dưới* nếu các hệ số phía trên đường chéo chính đều bằng 0 $a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$. Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Một ma trận gọi là *chuyển vị* của $A_{m\times n}$ nếu nó có dạng $A_{n\times m}$, qua phép biến đổi

$$\varphi(a_{ij}) = a_{ji}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Ký hiệu là A^T. Ví dụ cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

- Ma trận A được gọi là *đối xứng* nếu $A = A^T$.
- Ma trận A được gọi là *phản xứng* nếu $A = -A^T$.

Các phép toán ma trận. Cho các ma trận A, B, C cùng loại $m \times n$

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$
- $A + (-A) = 0_{m\times n}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

Phép nhân ma trận.

2 ma trận A, B có thể nhân được với nhau nếu và chỉ nếu A có dạng $m \times p$ và B có dạng $p \times n$.

Khi đó $C = AB$ là ma trận loại $m \times n$, và xác định bởi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Example 5.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ta có

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, CA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

AB, BC không tồn tại.

Example 5.8. Cho $f :\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, với $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$. CMR

$$f(x) f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính $[f(x)]^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Giải. $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos[x+y] & -\sin[x+y] \\ \sin[x+y] & \cos[x+y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\cos x \cos y - \sin x \sin y] & -[\sin x \cos y + \cos x \sin y] \\ [\sin x \cos y + \cos x \sin y] & [\cos x \cos y - \sin x \sin y] \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = f(x) f(y)$$

Bằng quy nạp với $x = y$, ta được

$$[f(x)]^2 = f(x+x) = f(2x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix},$$

tiếp tục ta được

$$[f(x)]^k = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$$

Các tính chất của phép nhân ma trận.

Cho các ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$, $D \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$ và $E, F \in M_{q\times n}(\mathbb{C})$. Khi đó

- $I_m A = A I_m = A$
- $0_{p\times m} A = 0_{p\times n} \neq 0_{m\times q} = A 0_{n\times q}$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(AB) D = A (BD)$
- $A(B+C) = AB + AC$ và $(E+F) A = EA + FA$.

Lũy thừa của ma trận.

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{khi } k = 0 \\ \underbrace{A.A...A}_{k\,\text{times}} \text{otherwise} \end{cases}$$

$A^n - B^n = (A - B) \sum\limits_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} B^k$

$(A + B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) A^{n-k} B^k$

Definition 5.9. Ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$ được gọi là *lũy đẳng* nếu $A^2 = A$.

Example 5.10. CM nếu $A, B \in M_n(\mathbb{C})$lũy đẳng thì $(A + B)$ lũy đẳng khi và chỉ khi $AB = BA = 0_n$.

Chứng minh.

• Xét chiều nghịch, theo giả thiết, ta có $A^2 = A$ và $B^2 = B$.

Ngoài ra vì $AB = BA = 0_n$ nên

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2 = A + B.$$

Do đó $A + B$ lũy linh.

• Mặt khác, nếu A, B và $A + B$ lũy linh. Tức $A^2 = A$,$B^2 = B$ và $(A + B)^2 = A + B$ hay

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + B = A^2 + B^2$$

Khi đó $AB = BA = 0_n$.

□

Definition 5.11. Ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $A^k = 0_n$.

Example 5.12. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ lũy linh, giao hoán được và $u, v \in \mathbb{C}$ thì $(uA + vB)$ cũng lũy linh $\forall u, v \in \mathbb{C}$.

Chứng minh. Ta có các giả thiết

• $AB = BA$

• $\exists p \in \mathbb{N}$ sao cho $A^p = 0_n$ và

• $\exists q \in \mathbb{N}$ sao cho $B^q = 0_n$

Chọn $k = p.q$, vậy

$$(uA + vB)^k = \sum_{m=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right) (uA)^{k-m} (vB)^m = 0_n$$

Do đó $(uA + vB)$ cũng lũy linh

□

Ma trận khả nghịch

- **Phép biến đổi sơ cấp**

1. Hoán vị 2 dòng (hoặc cột) khác nhau. Ký hiệu là $\begin{cases} d_i \leftrightarrow d_k \\ c_i \leftrightarrow c_k \end{cases}$. Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \to c_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Nhân 2 dòng (hoặc cột) với một số khác 0. Ký hiệu là $\begin{cases} d_i := \alpha d_i \\ c_i := \alpha c_i \end{cases}$. Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 := 2c_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Tổng (hoặc hiệu) 2 dòng (hoặc cột) với nhau. Ký hiệu là $\begin{cases} d_i := d_i + \beta d_k \\ c_i := c_i + \beta c_k \end{cases}$. Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 := d_1 - d_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 2 ma trận A, B được gọi là tương đương dòng (hoặc cột) nếu tồn tại hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hoặc cột) biến A thành B, tức

$$\exists\, (\psi_i)_{0 \le i \le m} : A_{i-1} \to A_i$$

sao cho

$$A = A_0 \xrightarrow{\psi_1} A_1 \xrightarrow{\cdots} A_{k-1} \xrightarrow{\psi_k} A_k \xrightarrow{\cdots} A_m = B$$

5. 2 ma trận được gọi là tương đương dòng (hoặc cột) thì cùng loại (tương đương) với nhau. Ký hiệu là $A \sim B$

Example 5.13. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A, B có tương đương không?

Giải.

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d3 := d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B.$

Vậy $A \sim B$.

- **Ma trận bậc thang**

Có dạng $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \mathbf{a_{1k_1}} & \ldots & \ldots & a_{1k_2} & \ldots & a_{1k_3} & \ldots & a_{1k_s} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{a_{2k_2}} & \ldots & a_{2k_3} & \ldots & a_{2k_s} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{a_{3k_3}} & \ldots & a_{3k_s} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_s k_s} & \ldots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\star)$

Example 5.14. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận bậc thang nhưng $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì không.

- **Ma trận bậc thang rút gọn**

Ma trận A là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu thỏa các tính chất

1. A có dạng bậc thang.
2. Các hệ số khác 0 đầu tiên trên các dòng khác 0 của A đều bằng 1.
3. Ma trận A có dạng như trên $(\star)$ thỏa các hệ số

$$a_{1k_1} = a_{2k_2} = \ldots = a_{sk_s} = 1$$

• Khi đó số dòng khác 0 của ma trận bậc thang (hoặc ma trận bậc thang rút gọn) được gọi là hạng của ma trận. Ký hiệu là $r(A)$ (rank)

Example 5.15. Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có dạng bậc thang rút gọn nhưng $D = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì không.

Exercise 5.16. Tìm dạng bậc thang và bậc thang rút gọn của $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$. Từ đó tính hạng của A.

Giải. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận bậc thang của A là $A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và có hạng là 3.

Ma trận $A' \xrightarrow{d_2:=-\frac{1}{2}(d_2-d_1)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2:=d_2-3d_3]{d_1=d_1-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''$.

Vậy A'' là ma trận bậc thang rút gọn của A.

Exercise 5.17. Biện luận hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & n \\ n & m & 0 & 0 \\ 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix}$ theo m, n.

Giải.

- Xét khi $m = n = 0$, $A = 0_4$ nên $r(A) = 0$.
- Khi $n = 0, n \neq 0$ thì $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ có $r(A) = 4$.
- Khi $m = 0, n \neq 0$ thì $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$ có $r(A) = 4$.
- Cuối cùng nếu $n \neq 0, m \neq 0$ thì

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & n \\ n & m & 0 & 0 \\ 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{n}{m} \\ 0 & m & 0 & -\frac{n^2}{m} \\ 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{n}{m} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{n^2}{m^2} \\ 0 & 0 & m & \frac{n^3}{m^2} \\ 0 & 0 & n & m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{n}{m} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{n^2}{m^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{n^3}{m^3} \\ 0 & 0 & 0 & m-\frac{n^4}{m^3} \end{pmatrix}$$

1. có $r(A) = 3$, khi $m = -\dfrac{n^4}{m^3} \neq 0$

2. có $r(A) = 4$, khi $m \neq -\dfrac{n^4}{m^3}$.

- **Ma trận khả nghịch & định thức.**

Ma trận khả nghịch.

Cho A là ma trận vuông cấp n, khi đó:

1. Ma trận A gọi là *khả nghịch trái (*t ứ là *khả nghịch phải)* nếu có ma trận tồn tại ma trận vuông B sao cho $AB = I_n$.

2. Ma trận A gọi là *khả nghịch* nếu nó vừa khả nghịch trái vừa khả nghịch phải, tức tồn tại B sao cho $AB = BA = I_n$.

3. Nếu ma trận A khả nghịch thì nó là duy nhất và B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, được ký hiệu là $B = A^{-1}$.

4. Nếu A là ma trận khả nghịch thì tồn tại hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hoặc cột) sao cho
$$A \xrightarrow{\psi_1} A_1 \longrightarrow .... \xrightarrow{\psi_k} A_k = I_n$$
thì ma trận nghịch đảo sẽ được xác định bởi
$$I_n \xrightarrow{\psi_1} B_1 \longrightarrow .... \xrightarrow{\psi_k} B_k = A^{-1}$$

5. *Các tính chất của ma trận khả nghịch : Nếu A khả nghịch thì*

- $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$, *với* $\alpha \neq 0$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
- $(A_1 A_2 ... A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} ... A_1^{-1}$, *với* $\{A_i\}_{1\leq i\leq k}$ *là các ma trận khả nghịch.*

Example 5.18. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}, B^{-1} (nếu có).

Giải.

Xét $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Do đó ma trận A không khả nghịch nên A^{-1} không tồn tại.

Xét $(B|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_1:=d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{\substack{d_1:=d_1-7d_3 \\ d_2:=d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_4]{\substack{d_1:=d_1+4d_4 \\ d_2:=d_2-d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(I_4, B^{-1}\right)$$

Vậy ma trận B khả nghịch và $B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercise 5.19. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & 1 & b & \dots & b^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải.

Ta có $(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_n:=d_n]{d_k:=d_k-d_{k+1}:k=\overline{1,..,n-1}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_n:=d_n]{d_k:=d_k-d_{k+1}:k=\overline{1,..,n-1}} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(I_n \left| A^{-1}\right.\right).$$

$$\text{Tiếp tục}(B|I_{n+1}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & b & b^2 & ... & b^n & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & b & ... & b^{n-1} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & b^{n-2} & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_n:=d_n]{d_k:=d_k-b.d_{k+1}:k=\overline{1,..,n-1}} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & -b & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(I_{n+1}|B^{-1}\right)$$

Mở rộng.

- 2 ma trận A, B gọi là tương đương nhau nếu tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $B = PA$ hay $A = P^{-1}B$.
- 2 ma trận A, B gọi là đồng dạng nhau nếu tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $B = P^{-1}AP$ hay $A = PBP^{-1}$.

Exercise 5.20. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Giả sử

$a)$ A là ma trận tam giác thỏa $A.A^T = I_n$. CMR A là ma trận chéo có các hệ số trên đường chéo là ± 1.

$b)$ Giả sử $A = A^T$, $B = -B^T, (A - B)$ khả nghịch và $AB = BA$. CMR $C.C^T = I_n$ với $C = (A + B)(A - B)^{-1}$

Chứng minh.

$a)$ Do A là ma trận tam giác nên có dạng tam giác trên hoặc tam giác dưới.

Tức là $a_{ij} = 0,\ \forall 1 \le j < i \le n$ hoặc $a_{ij} = 0,\ \forall 1 \le i < j \le n$ (1)

$$\text{Vì } A.A^T = I_n \text{ nên } \begin{cases} c_{ii} = \sum\limits_{1\le k\le n} a_{ik}\left(a_{ki}\right)^T = \sum\limits_{1\le k\le n} a_{ik}^2 = 1 \\ c_{ij} = \sum\limits_{1\le k\le n} a_{ik}\left(a_{kj}\right)^T = 0 \quad \forall i \ne j \end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta được } \begin{cases} a_{ij} = \pm 1 & \text{khi } i = j \\ a_{ij} = a_{ji} = 0 & \text{khi } i \ne j \end{cases}.$$

$b)$ Ta có $(A-B)$ khả nghịch và $C=(A+B)(A-B)^{-1}$ nên $C^T=\left[(A-B)^{-1}\right]^T(A+B)^T$.
Do đó $C^T=\left[(A-B)^{-1}\right]^T(A+B)^T=\left[(A-B)^T\right]^{-1}\left(A^T+B^T\right)=\left(A^T-B^T\right)^{-1}\left(A^T+B^T\right)$.
Kết hợp với giả thiết $A=A^T$, $B=-B^T$, ta được
$C^T=(A+B)^{-1}(A-B)$.
Vậy $C.C^T=\left[(A+B)(A-B)^{-1}\right]\left[(A+B)^{-1}(A-B)\right]$,
lưu ý $AB=BA$ nên $(A-B)(A+B)=A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow C.C^T &= \left[C^TC\right]^T=\left\{\left[(A+B)^{-1}(A-B)\right]\left[(A+B)(A-B)^{-1}\right]\right\}^T\\
\Rightarrow C.C^T &= \left\{(A+B)^{-1}\underbrace{(A-B)(A+B)}(A-B)^{-1}\right\}^T\\
\Rightarrow C.C^T &= \left\{\underbrace{(A+B)^{-1}(A+B)}\underbrace{(A-B)(A-B)^{-1}}\right\}^T\\
\Rightarrow C.C^T &= I_n.
\end{aligned}
$$

□

Ngoài ra ta còn 1 phương pháp khác để tìm ma trận nghịch đảo thông qua việc tính định thức.

Định thức & ứng dụng.

- **Hoán vị & chu trình**

Cho $X=\{1,2,...,n\}$và S_n là tập tất cả các song ánh từ $X\longrightarrow X$. Ta nói

1. Mỗi phần tử $\sigma\in S_n$ được gọi là *hoán vị bậc n* (*hay phép thế bậc n*) và được biểu diễn dưới dạng ma trận $2\times n$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n-1) & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

Ví dụ trong nhóm hoán vị S_8, phép hoán vị σ thỏa $\sigma(1)=3,\sigma(2)=5,\sigma(3)=6,\sigma(6)=1$ và $\sigma(5)=2$ được viết là

$$\sigma=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \underline{2} & \mathbf{3} & 4 & \underline{5} & \mathbf{6} & 7 & 8\\ \mathbf{3} & \underline{5} & \mathbf{6} & 4 & \underline{2} & \mathbf{1} & 7 & 8\end{pmatrix}$$

Trong đó $\begin{pmatrix} 2 & 5\end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$ được gọi là phép hoán vị.

2. $\forall 2\le k\in\mathbb{N}$, phép hoán vị $\sigma\in S_n$ được gọi là $k-$ *chu trình*, hay chu trình có chiều dài k. Tức là tồn tại các phần tử phân biệt $j_1,j_2,...,j_k\in X$ sao cho

$$\sigma(j_1)=j_2,...,\sigma(j_p)=j_{p+1},...\sigma(j_{k-1})=j_k,\sigma(j_k)=j_1$$

Khi đó, ta viết chu trình $\sigma=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & ... & j_k\end{pmatrix}$.

3. Ta nói các chu trình $\sigma = (i_1, i_2, ..., i_l)$ và $\tau = (j_1, j_2, ..., j_k)$ *độc lập* (hay *rời nhau*) nếu $(i_1, i_2, ..., i_l) \cap (j_1, j_2, ..., j_k) = \emptyset$.

4. Ta nói 2-*chu trình* $(k = 2)$ của σ được gọi là một *chuyển vị* có dạng $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

5. Phân tích hoán vị, chu trình bằng cách phân tích sự sai khác các vị trí chu trình. Mọi chu trình đều phân tích được thành các chuyển vị và cách phân tích không duy nhất. Nhưng tính chẵn lẻ (sign) của nó là duy nhất.

6. $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ với k là số chuyển vị trong phân tích σ. Nếu $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, thì σ là hoán vị chẵn, còn $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ thì nó là hoán vị lẻ

Example 5.21. Phân tích hoán vị của

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 6 & 9 & 1 & 4 & 8 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

có phân tích thành các chu trình rời nhau là

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

ngoài ra, ta còn có thể viết thành các chuyển vị (do nó không duy nhất)
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 \end{pmatrix}$
hoặc $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix}, ...$
Ta có số các chuyển vị là $k = 6\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k = 1$ nên đây là hoán vị chẵn.

- **Định thức**

Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta nói định thức của A, ký hiệu là $\det(A)$ hay $|A|$ xác định bởi

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} ... a_{n\sigma(n)}$$

Cụ thể

- Khi $n = 2$, với $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ta có $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Khi $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ta có

$$(-1)^{3+3} a_{33}. \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- **Phần bù đại số.** Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ta nói phần bù đại số của số hạng a_{ij} của A là định thức của ma trận A_{ij}–được tạo thành bằng cách bỏ đi dòng i và cột j nhân với dấu của nó
$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$
trong đó c_{ij} chính là phần bù đại số của a_{ij}.

- Khi đó, ta có thể tính định thức của A bằng thuật đệ quy theo phần bù đại số của nó
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ik}$$

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, ta có các công thức chính về định thức như sau:

$$\det(A.B) = \det A. \det B$$

$$\det\left(A^T\right) = \det A, \det A^k = (\det A)^k$$

$$\text{Nếu } A \text{ khả nghịch thì } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Đối với khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp $A \to A'$

$$\text{Nếu } A \text{ có BĐSC } d_i \leftrightarrow d_k \text{ thì } \det(A') = -\det A$$

$$\text{Nếu } A \text{ có BĐSC } d_i := \alpha d_k \text{ thì } \det(A') = \alpha \det A$$

$$\text{Nếu } A \text{ có BĐSC } d_i := d_i + \beta d_k \text{ thì } \det(A') = \det A$$

Example 5.22. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

Xét $A \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 = A'$ cụ thể như sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 = d_4 - d_3]{\substack{d_2 = d_2 - d_1 \\ d_3 = d_3 - d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 = d_4 - d_3]{d_3 = d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 = d_4 - d_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có $\det A' = 1$ và

$\det A = \det A_1 = \det A_2 = \det A'$ do các biến đổi loại 3 : $d_i := d_i + \beta d_k$

Vậy $\det A = 1$.

Exercise 5.23. Tính định thức của

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & -4 & ... & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & ... & 0 \end{pmatrix} \text{ và } C_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{pmatrix}$$

Giải.

Ta có

○ $\det A_1 = 1, \det A_2 = 1, ..., \det A_n = \det A_{n-1}$ nên $\det A_n = 1$.

○ Tiếp tục, $\det B_1 = 1$, $\det B_2 = 2, \det B_3 = 6, \det B_4 = 21, \det B_5 = 120$.

Ta có

$$\det B_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 2 & 6 & ... & 2n \\ 0 & 0 & 3 & ... & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix} = n!$$

Xét $\det C_n$ theo $\det C_{n-1}$.

Ta có $C_2 = 3, C_3 = 4$ và

$$\det C_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{vmatrix}}_{\text{cấp n}} = 2.\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} \text{ với } n \geq 4.$$

Vậy ta được hệ thức

$$\det C_n = 2 \det C_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \det C_n = 2 \det C_{n-1}$$

Ta có nghiệm riêng là $\det C_n = K.2^n$

Do đó $\det C_n = 2^{n-1}$ với $n \geq 3$

Bằng thuật đệ quy cấp 1, ta được

$$\det C_n = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 1 \\ 3 & \text{khi } n = 2 \\ 2^{n-1} & \text{khi } n \geq 3 \end{cases}$$

Exercise 5.24. CMR các định thức sau bằng 0

1) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (c+b)^2 \\ ac & a^2+c^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\beta) \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \sin(\alpha_2+\beta) \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & \sin(\alpha_3+\beta) \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & a+b & a+c & 2 \end{vmatrix}$

Giải.

Ta có

1) Cột 3 bằng 2 * cột 1 + cột 2 nên là tổ hợp tuyến tính, do đó có có định thức bằng 0.

2) Cột 3 bằng $\cos\beta$ * cột 1 + $\sin\beta$* cột 2 nên là tổ hợp tuyến tính, do đó có có định thức bằng 0.

3) Khi $x = 0$ cột 4 bằng 0 do đó có có định thức bằng 0.

Khi $x \neq 0$. Cột 1 bằng $\frac{1}{x}$ * cột 4 + 2* cột 3 nên là tổ hợp tuyến tính, do đó có có định thức bằng 0.

4) Lấy cột 1 = cột 1 + cột 2 + cột 3. Khi đó

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & a+b & a+c & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 1 \\ a+b+c & c & a & 1 \\ a+b+c & a & b & 1 \\ 2(a+b+c) & a+b & a+c & 2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & a & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 2 & a+b & a+c & 2 \end{vmatrix}$$

Do đó $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & a+b & a+c & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Exercise 5.25. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. CMR

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Chứng minh.

Trước tiên, ta xét khi

$\circ A = \varphi(I_n)$ là một ma trận sơ cấp có được từ I_n qua phép biến đổi φ. Khi đó

$$AB = \varphi(I_n).B$$

Ta có các trường hợp sau:

$\diamond$ Nếu φ là biến đổi sơ cấp dạng 1 (hoán vị) thì $\det AB = \det[\varphi(B)]$, $\det\varphi(I_n) = -\det I_n = -1$ và $\det\varphi(B) = -\det B$. Do đó

$$\det AB = \det[\varphi(B)] = \det\varphi(I_n)\det B = (\det A)(\det B)$$

$\diamond$ Nếu φ là biến đổi sơ cấp dạng 2 (vị tự) thì $\det AB = \det[\varphi(B)]$, $\det\varphi(I_n) = \alpha\det I_n = \alpha$ và

$\det \varphi(B) = \det B$. Do đó

$$\det AB = \det[\varphi(B)] = \det \varphi(I_n) \det B = (\det A)(\det B)$$

$\diamond$ Nếu φ là biến đổi sơ cấp dạng 3 (tổ hợp) thì $\det AB = \det[\varphi(B)]$, $\det \varphi(I_n) = \det I_n = 1$ và $\det \varphi(B) = \det B$. Do đó

$$\det AB = \det[\varphi(B)] = \det \varphi(I_n) \det B = (\det A)(\det B)$$

Cuối cùng, ta xét trường hợp A tổng quát và có dạng bậc thang rút gọn là R_A. Khi đó, tồn tại các ma trận sơ cấp $D_1, D_2, ..., D_m$ sao cho

$$A = \left(\prod_{k=1}^{m} S_k\right).R_{A.} \text{ nên } \Rightarrow AB = \left(\prod_{k=1}^{m} S_k\right).(R_{A.}.B)$$

Bằng quy nạp, ta được

$$\det(AB) = \det\left(\prod_{k=1}^{m} S_k\right)\det(R_{A.}.B) \text{ và } \det A = \det\left(\prod_{k=1}^{m} S_k\right).\det R_{A.}.$$

Ta cũng có 2 trường hợp nhỏ :

$\diamond$ Nếu $r(A) = n$ hay A khả nghịch thì $R_A = I_n$ do đó

$$\det(AB) = \det\left(\prod_{k=1}^{m} S_k\right)\det(R_{A.})\det B = \det A.\det B$$

$\diamond$ Nếu $r(A) < n$ thì $\det A = 0$ do đó $\det(R_A) = \det(R_A B) = 0$ do đó

$$\det(AB) = 0 = \det A.\det B$$

$\square$

Exercise 5.26. Tính các định thức cấp n sau

1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & ... & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & ... & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & ... & n^{n-1} \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & a & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & ... & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & ... & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & ... & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \cdot \cdot & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ b_n & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$ với n chẵn

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & x_1y_3+1 & \dots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & x_2y_3+1 & \dots & x_2y_n+1 \\ x_3y_1+1 & x_3y_2+1 & x_3y_3+1 & \dots & x_3y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & x_ny_3+1 & \dots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+1 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$ $\forall m \geq 1$

Giải.

$$1)A_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$$

T/ tự, $\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = (a_2-a_1) \begin{vmatrix} a_3-a_2 & a_3-a_2 & \dots & a_3-a_2 \\ a_3-a_2 & a_3-a_2 & \dots & a_3-a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3-a_2 & a_3-a_2 & \dots & a_n-a_2 \end{vmatrix}$

Bằng quy nạp, ta có $\forall m \geq 2$ thì

$$\det A_m = (a_m - a_{m-1}) \det A_{m-1};$$

Kết hợp với điều kiện $\det A_1 = a_1$;

Do đó $\det A_n = a_1 (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$.

Hay có thể viết lại thành

$$\det A_n = a_1 \left[\prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right]$$

2) Bằng các tính toán căn bản, ta có thể kiểm tra các định thức sau

$$\det A_1 = a, \det A_2 = a^2 - 1, \det A_3 = a^3 - 3a + 2 \text{ và } \det A_4 = a^4 - 6a^2 + 8a - 3$$

Vì $\det A_1 = a$.

Xét định thức $\forall n \geq 2$, ta có

$$\det A_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & a & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix} \overset{d_1:=d_1+\sum d_i}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & ... & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & a & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A_n = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & a & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix}.$$

Sau đó, lấy tất cả các dòng đều trừ cho dòng 1, ta được :

$$(a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)\,(a-1)^{n-1}$$

Vậy

$$\det A_n = (a+n-1)\,(a-1)^{n-1}\,.$$

$$3)\,\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \\ 3 & 4 & ... & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & ... & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Bằng các tính toán căn bản, ta có thể kiểm tra các định thức sau

$$\det A_1 = 1, \det A_2 = -3, \det A_3 = -18, \det A_4 = 160 \text{ và } \det A_5 = 1875$$

Lưu ý rằng ma trận A tương đương dòng qua $[n/2]+1$ phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hoán vị dòng) với ma trận

$$A_n' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ n & 1 & ... & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & ... & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \end{pmatrix}$$

có định thức được xác định bởi

$$\det A_n = (-1)^n \frac{n}{2}\left[b_n + n^{n-3}\right]$$

(sẽ tìm hiểu cụ thể ở phần bài tập của mục sau (Tính ma trận nghịch đảo bằng định thức))

$$4) \det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[d_k:=d_k+d_1,\,\forall k=\overline{1,..,n-1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 2 & 3 & ... & 2n \\ 0 & 0 & 3 & ... & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix} = n!$$

$$5) \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1 & a_2+1 & ... & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & ... & a_n+1 \end{vmatrix} \xlongequal{d_n:=d_n-d_{n-1}} \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & ... & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & ... & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-1}:=c_{n-1}+c_n} \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & ... & a_{n-1}+a_n & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n+1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & ... & a_{n-1}+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n+1 \end{vmatrix}$$

Ta thấy ma trận A với bộ hệ số $(a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ xác định bởi

$$\det A\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) = \det A\left(a_1, ..., a_{n-2}, [a_{n-1} + a_n]\right)$$

Tiếp theo, khử dòng cuối bằng cách trừ đi dòng trên nó, sau đó khử cột áp chót tương tự như bước trên, ta được

$$\det A\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) = \det A\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + 1$$

$$6)\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & ... & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & ... & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[d_k:=d_k-d_1,\,\forall k=\overline{2,.,n}]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ 0 & 2^2-1 & 3^2-1 & ... & n^2-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & ... & n^{n-1}-1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \ \det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ 0 & 3 & 8 & ... & (n-1)(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & ... & (n-1)\left(\sum_{k=0}^{n-2} n^k\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 \\ 3 & 8 & 15 & ... & (n-1)(n+1) \\ 7 & 26 & 63 & ... & (n-1)\left(n^2+n+1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n-2} 2^k\right) & 2\left(\sum\limits_{k=0}^{n-2} 3^k\right) & 3\left(\sum\limits_{k=0}^{n-2} 4^k\right) & ... & (n-1)\left(\sum_{k=0}^{n-2} n^k\right) \end{vmatrix} \text{(ma trận cấp n-1)}$$

$$= (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 3 & 4 & 5 & ... & (n+1) \\ 7 & 13 & 21 & ... & \left(n^2+n+1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n-2} 2^k\right) & \left(\sum\limits_{k=0}^{n-2} 3^k\right) & \left(\sum\limits_{k=0}^{n-2} 4^k\right) & ... & \left(\sum_{k=0}^{n-2} n^k\right) \end{vmatrix}$$

Lấy các dòng $d_k := d_k - d_{k-1}$, $\forall k \geq 2$, ta được

$$= (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 4 & 3^2 & 4^2 & ... & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-2} & 3^{n-2} & 4^{n-2} & ... & n^{n-2} \end{vmatrix} = (n-1)!\det A_{n-1}$$

Ta có

$$\det A_n = \prod_{k=1}^{n} (k-1)!$$

Ta có thể kiểm chứng lại với

$$\det A_1 = \det A_2 = 1, \det A_3 = 12, \det A_4 = 288$$

7) Tương tự, ta có

$$\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = \det A_4 = 1$$

Mặt khác, xét biến đổi từ cấp n sang cấp $n-1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & ... & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & ... & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & ... & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \overset{d_n:=d_n-d_{n-1}}{\underset{d_2:=d_2-d_1}{\overset{\vdots}{===}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & C_2^1 & ... & C_{n-1}^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 & ... & C_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & C_{n-1}^{n-2} & ... & C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix}$$

và lưu ý dòng k với $C_{n+k+1}^k - C_{n+k}^{k-1} = C_{n+k}^k$

Do đó

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & ... & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & ... & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & ... & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = \det A_{n-1} = 1$$

8) Do n chẵn, đặt $n = 2m$.

Ta có $\det A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & ... & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n-1} & ... & a_{n-1} & 0 \\ b_n & 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & ... & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2m-1} & ... & a_{2m-1} & 0 \\ b_{2m} & 0 & ... & 0 & a_{2m} \end{vmatrix}$

Bằng các tính toán cơ bản, ta được

$\det A_2 = a_1a_2 - b_1b_2$

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} b_1b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 + b_1b_2b_3b_4.$$

$$\det A_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_6 & a_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_5 & a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

Do $\det A_6 = a_1a_6 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} - b_1b_6 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_6 & a_6 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$

Vậy $\det A_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_{2m} & a_{2m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & 0 & ... & 0 & b_2 \\ 0 & a_3 & ... & b_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2m-2} & ... & a_{2m-2} & 0 \\ b_{2m-1} & 0 & ... & 0 & a_{2m-1} \end{vmatrix}$

Do đó

$$\det A_n = \prod_{k=1}^{m} \begin{vmatrix} a_k & b_k \\ b_{2m-k} & a_{2m-k} \end{vmatrix}$$

với $2m = n$.

9) $\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & x_1y_3+1 & ... & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & x_2y_3+1 & ... & x_2y_n+1 \\ x_3y_1+1 & x_3y_2+1 & x_3y_3+1 & ... & x_3y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & x_ny_3+1 & ... & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$

Ta có khi $n = 1$ thì $\det A_1 = x_1y_1 + 1$.

Khi $n = 2$ thì $\det A_2 = x_1y_1 + x_2y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1)$

Khi $n \geq 3$, ta có

$$\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & x_1y_3+1 & ... & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & x_2y_3+1 & ... & x_2y_n+1 \\ x_3y_1+1 & x_3y_2+1 & x_3y_3+1 & ... & x_3y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & x_ny_3+1 & ... & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_1:=d_1-d_n} \begin{vmatrix} (x_1-x_n)\,y_1 & (x_1-x_n)\,y_2 & (x_1-x_n)\,y_3 & ... & (x_1-x_n)\,y_n \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & x_2y_3+1 & ... & x_2y_n+1 \\ x_3y_1+1 & x_3y_2+1 & x_3y_3+1 & ... & x_3y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & x_ny_3+1 & ... & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1-x_n) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & ... & y_n \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & x_2y_3+1 & ... & x_2y_n+1 \\ x_3y_1+1 & x_3y_2+1 & x_3y_3+1 & ... & x_3y_n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & x_ny_3+1 & ... & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{d_2:=d_2-x_2.d_1}}{\underset{\substack{d_k:=d_k-x_kd_1\\ \dots\\ d_n:=d_n-x_nd_1}}{===}} (x_1-x_n)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Do đó $\det A_n = \begin{cases} x_1y_1+1 & \text{khi } n=1 \\ x_1y_1+x_2y_2-(x_1y_2+x_2y_1) & \text{khi } n=2 \\ 0 & \text{khi } n\geq 3 \end{cases}$.

10) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$

Tương tự, ta có

$$\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = \det A_4 = 1$$

Mặt khác, xét biến đổi từ cấp n sang cấp $n-1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix} \overset{c_n:=c_n-c_{n-1}}{\underset{\substack{\vdots\\ c_2:=c_2-c_1}}{===}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_m^1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n-1}^{n-1} & C_{m+n}^{n-1} & \dots & C_{m+2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

và lưu ý dòng k các hệ số có dạng $C_{m+k+1}^k - C_{m+k}^k = C_{m+k}^{k-1}$

Tương tự với $(n-1)$bước lặp như vậy, ta được

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ C_{m+n}^1 & C_{m+n+1}^1 \end{vmatrix} = 1$$

- **Tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức.**

Definition 5.27. *Cho A khả nghịch. Ma trận phụ hợp của $A \in M_n(\mathbb{C})$ (adjoint matrix), viết tắt là adj (A) là ma trận xác định bởi*

$$adjA = (c_{ij})^T$$

Trong đó c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.

Definition 5.28. *Khi đó, ma trận nghịch đảo của A xác định bởi công thức*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\ adjA$$

Example 5.29. Tìm ma trận phụ hợp và ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Giải.

- $\det A = 3 - 2 = 1$ và adj $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nên $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Nhưng B không khả nghịch do $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- Xét $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2-d_1}{\underset{d_3:=d_3-d_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1. \Rightarrow C$ khả nghịch.

  Tiếp theo, ta sẽ tìm ma trận phụ hợp của C dưới dạng

$$\text{adj } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T$$

  Trong đó : $c_{11} =(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 10$, $c_{12} =(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = -5$,

$$c_{13} = 1,\ c_{21} = -15,\ c_{22} = 9,\ c_{23} = -15,\ c_{31} = 6,\ c_{32} = -4 \text{ và } c_{33} = 1$$

  Do đó adj$C = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -15 & 9 & -2 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 6 \\ -5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \text{adj } C.$

Exercise 5.30. Tính ma trận nghịch đảo $A_n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ n & 1 & 2 & 3 & ... & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & ... & n-2 \\ n-2 & n-1 & n & 1 & ... & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & ... & 1 \end{pmatrix}$ bằng định thức.

Ta để ý rằng : Khi $n = 2, A_2^{-1} = \frac{1}{\det A_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ hay $\det A_2.A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Tương tự ta có $\det A_3.A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, và $\det A_4.A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 36 & -44 & -4 & -4 \\ -4 & 36 & -44 & -4 \\ -4 & -4 & 36 & -44 \\ -44 & -4 & -4 & 36 \end{pmatrix}$,

$\det A_5.A_5^{-1} = \begin{pmatrix} -350 & 400 & 25 & 25 & 25 \\ 25 & -350 & 400 & 25 & 25 \\ 25 & 25 & -350 & 400 & 25 \\ 25 & 25 & 25 & -350 & 400 \\ 400 & 25 & 25 & 25 & -350 \end{pmatrix}$,

$\det A_6.A_6^{-1} = \begin{pmatrix} 4320 & -4752 & -216 & -216 & -216 & -216 \\ -216 & 4320 & -4752 & -216 & -216 & -216 \\ -216 & -216 & 4320 & -4752 & -216 & -216 \\ -216 & -216 & -216 & 4320 & -4752 & -216 \\ -216 & -216 & -216 & -216 & 4320 & -4752 \\ -4752 & -216 & -216 & -216 & -216 & 4320 \end{pmatrix}$,

Một cách tổng quát, ta được

$$A_n^{-1} = \frac{1}{a_n}\begin{pmatrix} b_n & c_n & d_n & d_n & \dots & d_n \\ d_n & b_n & c_n & d_n & d_n & d_n \\ d_n & d_n & b_n & c_n & d_n & d_n \\ d_n & d_n & d_n & b_n & \dots & d_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & d_n & d_n & d_n & d_n & b_n \end{pmatrix}$$

• Chúng ta sẽ lấy ví dụ với d_n có dãy số hạng $d_1, d_2 = 0$ và $d_3 = 1, d_4 = -4, d_5 = 25$, $d_6 = -216$. Do đó số hạng tổng quát

$$d_n = (-1)^{n-3}\, n^{n-3},\ \forall n \geq 3 \text{ và } d_1 = d_2 = 0.$$

• Với b_n thì $36 = \left(\frac{-5}{1} - 4\right).(-4)$, $-350 = \left(\frac{36}{-4} - 5\right).25$, $4320 = \left(\frac{-350}{25} - 6\right).(-216)$

Do đó

$$b_n = \left(\frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} - n\right) d_n,\ \forall n \geq 3 \text{ với } b_1 = b_2 = 1, b_3 = 5.$$

• Tương tự ta có hệ thức

$$c_n = (d_{n-1} + n)\, d_n,\ \forall n \geq 3,\ \text{ với } c_1 = c_2 = 0, c_3 = 7.$$

• và

$$a_n = \frac{|b_n + d_n|}{2} n.\,(-1)^{n-1}$$

5.2.2 Ứng dụng trong phương trình & hệ phương trình.

Phương trình ma trận.

Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Các biểu thức $AX = B$ và $YA = C$ được gọi là *phương trình ma trận*.
Khi đó

- $AX = B$ có nghiệm $X = A^{-1}B$
- $YA = C$ có $Y = CA^{-1}$.

Example 5.31. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính A^{-1}. Từ đó tính X, Y và X thỏa $AXA = AB, A^2YA^2 = ACA^2, AZA^{-1} = AXYA^{-1}$.
Giải.
∘ Ta có $\det A = -1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

∘ Mặt khác vì $AXA = AB$ nên $XA = B$ do đó $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

∘ Ta có $A^2YA^2 = ACA^2$ nên $A^2Y = AC$ nên $Y = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

∘ Xét $AZA^{-1} = AXYA^{-1}$ do đó $Z = XY = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Corollary 5.32. *Cho các ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.*

- *Nếu $AB = 0 \Rightarrow B = 0$*
- *Nếu $CA = 0 \Rightarrow C = 0$*

Hệ phương trình tuyến tính.

Là một hệ gồm nhiều phương trình tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Ví dụ hệ m phương trình, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{mn}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.2.1}$$

trong đó

- $a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$
- $x_1, ..., x_n$ là các ẩn cần tìm.
- Phương trình (1) còn được viết dưới dạng

$$AX = B. \qquad (5.2.2)$$

Trong đó $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- Hệ (1) và (2) được gọi là *phương trình tuyến tính thuần nhất* nếu $B = 0$ tức $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$.
- Hệ (1) và (2) được gọi là *phương trình tuyến tính không thuần nhất* nếu $B \neq 0$ tức tồn tại $k \in \overline{1, .., m}$ sao cho $b_k \neq 0$.

Example 5.33. Giải các hệ phương trình sau.

$$i)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$ii)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

$$iii)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + \quad +3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Giải.

Ta xét dạng $(A|B)$ lần lượt của các hệ $AX = B$ như sau:

$$i)\ (A\,|B\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2:=d_2-d_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4+5d_2]{d_3:=d_3+4d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=\frac{1}{10}d_3]{d_3\longleftrightarrow d_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10\end{array}\right)\xrightarrow[d_4:=d_4-8d_3]{}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 8 & 10 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6\end{array}\right)$$

hay hệ tương ứng với $\begin{cases} x_1+ \ 2x_2+ \ 3x_3+ \ 4x_4 = 7\\ \quad x_2+ \ 4x_3+ \ 5x_4 = 6\\ \quad x_3+ \ x_4 = 2\\ \quad 2x_4 = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\\ x_2 = 1\\ x_3 = 5\\ x_4 = -3\end{cases}$

Do đó nghiệm của hệ là *duy nhất*.

ii) $(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1\\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4\end{array}\right)\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{d_3:=d_3+d_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

hay hệ tương ứng với $\begin{cases} x_1+ \ 2x_2- \ 3x_3+ \ 5x_4 = 1\\ \quad x_2+ \ 4x_3+ \ 5x_4 = -2\end{cases}$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 10\alpha - 17\beta\\ x_2 = 5 - 17\alpha + 29\beta\\ x_3 = \alpha\\ x_4 = \beta\end{cases}$

Do đó hệ đã cho có *vô số nghiệm* với 2 ẩn tự do α, β tùy ý

iii) $(A\,|B\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2\\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5\\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8\end{array}\right)\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_1]{\substack{d_2:=d_2-3d_1\\ d_3:=d_3+2d_1}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9\\ 0 & -3 & -8 & -11 & 9\\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_2\longleftrightarrow d_3]{}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2\\ 0 & -3 & -8 & -11 & 9\\ 0 & 9 & -14 & -13 & -9\\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[d_4:=d_4+2d_2]{d_3:=d_3+3d_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2\\ 0 & -3 & -8 & -11 & 9\\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18\\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-d_3]{}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 2\\ 0 & -3 & -8 & -11 & 9\\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

hay hệ tương ứng với $\begin{cases} x_1- \ 2x_2+ \ 3x_3- \ 4x_4 = 2\\ \quad 3x_2+ \ 8x_3- \ 11x_4 = 9\\ \quad 10x_3+ \ 20x_4 = 18\\ \quad 0 = 2\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ *vô nghiệm.*

Biện luận nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. (5.2.2)

Theorem 5.34. *Cho $r(A) = r_1$ và $r(A|B) = r_2$. Ta xét các trường hợp sau :*

1. *Nếu $r_1 = r_2 = n$, thì hệ (5.2.2) có nghiệm duy nhất.*
2. *Nếu $r_1 < r_2$ thì hệ (5.2.2) vô nghiệm.*
3. *Nếu $r_1 = r_2 < n$ thì hệ (5.2.2) có vô số nghiệm với bậc tự do $n - r_1$. Tức là có $n - r_1$ ẩn tự do và r_1 ẩn được tính thông qua các ẩn tự do.*

Example 5.35. Biện luận các hệ phương trình sau theo $m \in \mathbb{R}$

$$i)\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2 \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - mx_4 = m^2 - 6m + 4 \end{cases}$$

Giải. Xét dạng $AX = B$ cho các hệ trên. Ta có

$$i)\ (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right) \xrightarrow[d_1:=d_1-d_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-13d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-5d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & 43 & 2m-13 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-4d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-d_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) = 3$,$r(A|B) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } 2m-4=0 \\ 4 & \text{nếu } 2m-4 \neq 0 \end{cases}$

Ngoài ra hệ trên được đơn giản thành

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad -x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ \qquad -x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

◦ Vậy khi $m = 2$ tức $r(A) = r(A|B) = 3 < 4$ thì hệ đã cho có vô số nghiệm với ẩn tự do $x_4 = \alpha$ và có bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(1 - 21\alpha, -1 + 14\alpha, 1 - \alpha, \alpha)\,|\alpha \in \mathbb{R}\}$$

◦ Khi $m \neq 2$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(A|B)$ nên hệ đã cho vô nghiệm.

$ii)$ $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 2 & -1 & m & m^2- \quad 6m+ \quad 4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1\\ d_3:=d_3-d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & m-1 \\ 0 & -1 & 3 & m-8 & m^2-6m \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-4d_2]{d_3:=d_3+2d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & m-6 & m^2-6m+1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4:=d_4-d_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right)$ và hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1+ \quad x_2- \quad x_3+ \quad 2x_4 = & 1 \\ \qquad x_2- \quad 2x_3+ \quad 2x_4 = & 1 \\ \qquad\qquad x_3+ \quad x_4 = & m+1 \\ \qquad\qquad (m-7)\,x_4 = & m^2-7m \end{cases}$$

Ta có: $r(A) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } m-7 \neq 0 \\ 3 & \text{nếu } m-7 = 0 \end{cases}$ và $r(A|B) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } \begin{cases} m-7 \neq 0 \\ m^2-7m \neq 0 \end{cases} \\ 3 & \text{nếu } \begin{cases} m-7 = 0 \\ m^2-7m = 0 \end{cases} \end{cases}$

∘ Nếu $m = 7$ thì $r(A) = r(A|B) = 3$ nên hệ có vô số nghiệm, hay hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

có bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(-8+\alpha, 17-4\alpha, 8-\alpha, \alpha)\,|\alpha \in \mathbb{R}\}$$

∘ Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = r(A|B) = 4$ nên hệ có duy nhất nghiệm theo m và hệ trên trở thành

$$\begin{cases} x_1+ \quad x_2- \quad x_3+ \quad 2x_4 = & 1 \\ \qquad x_2- \quad 2x_3+ \quad 2x_4 = & 1 \\ \qquad\qquad x_3+ \quad x_4 = & m+1 \\ \qquad\qquad (m-7)\,x_4 = & m(m-7) \end{cases}$$

và có nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(-1, -2m, 1, m)\,|m \neq 7\}$$

Exercise 5.36. Giải các hệ phương trình

$$a)\begin{cases} 2x_1- & 5x_2+ & 3x_3+ & x_4 = & 5 \\ 3x_1- & 7x_2+ & 3x_3- & x_4 = & -1 \\ 4x_1- & 6x_2+ & 3x_3- & x_4 = & 8 \\ 5x_1- & 9x_2+ & 6x_3+ & 2x_4 = & 7 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x_1+ & 2x_2- & x_3+ & x_4- & 2x_5 = & 1 \\ 2x_1- & 2x_2+ & x_3- & x_4+ & x_5 = & 1 \\ 2x_1- & 14x_2+ & 7x_3- & 7x_4+ & 11x_5 = & 1 \\ 4x_1- & 10x_2+ & 5x_3- & 5x_4+ & 7x_5 = & -1 \end{cases}$$

Giải.

$a)$ Ta có $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & 3 & -1 & 8 \\ 5 & -9 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -7 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4:=d_4-d_1]{d_1\longleftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & -7 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

$b)$ Ta có $(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_2]{\substack{d_2:=-d_2 \\ d_3:=d_3-3d_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

hay hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_2 = 1 \\ \quad 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 1 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ và $x_5 = \delta$, ta được

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{6}(1 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5) = \dfrac{1}{6}(1 + 3\alpha - 3\beta + 5\delta) \\ x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = \quad \dfrac{1}{3}(\delta + 2) \end{cases}$$

Hay hệ này có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do và có bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left\{ \left(\frac{1}{3}(\delta + 2), \frac{1}{6}(1 + 3\alpha - 3\beta + 5\delta), \alpha, \beta, \delta \right) : \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercise 5.37. Biện luận các hệ phương trình có tham số sau.

$$a)\begin{cases} x_1- & 2x_2+ & x_3+ & 2x_4 = & m \\ x_1+ & x_2- & x_3+ & x_4 = & 2m+1 \\ x_1+ & 7x_2- & 5x_3- & x_4 = & -m \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 3x_1+ & 4x_2+ & 4x_3- & 17x_4 = & 11m+17 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & 2x_3- & 12x_4 = & 8m+5 \\ 5x_1+ & 6x_2+ & 8x_3- & 27x_4 = & 18m+10 \\ 3x_1+ & 5x_2+ & 2x_3+ & (m-20)\,x_4 = & 13m+8 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x_1+ & 2x_2- & 3x_3+ & 4x_4 = & 1 \\ 2x_1+ & 4x_2- & 7x_3+ & 9x_4 = & 2 \\ 5x_1+ & 10x_2- & 17x_3+ & 23x_4 = & 1 \\ 3x_1+ & 6x_2- & 10x_3+ & mx_4 = & 13-m \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x_1- & 2x_2+ & x_3- & x_4+ & x_5 = & m \\ 2x_1+ & x_2- & x_3+ & 2x_4- & 2x_5 = & 3m \\ 3x_1- & 2x_2- & x_3+ & x_4- & x_5 & m+1 \\ 2x_1- & 5x_2+ & x_3- & 2x_4+ & 2x_5 = & m-1 \end{cases}$$

Giải.

Ta có

$$a)\ (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & -m \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m+1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & -2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-3d_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5m-3 \end{array}\right)$$

Khi $m = -\dfrac{3}{5}$ thì hệ này tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -\dfrac{3}{5} \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ và khi đó $\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5} + 2\alpha + \beta\right) \\ x_1 = \dfrac{1}{3}(\alpha - 4\beta - 1) \end{cases}$ hay

Hệ đã cho có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do, có bộ nghiệm là

$$(x_1x_2, x_3, x_4) = \left\{\left(\frac{1}{3}(\alpha - 4\beta - 1), \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + 2\alpha + \beta\right), \alpha, \beta\right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$b)\ (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -7 & 9 & 2 \\ 5 & 10 & -17 & 23 & 1 \\ 3 & 6 & -10 & m & 13-m \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-3d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-5d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & m-12 & 10-m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \longleftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & m-12 & 10-m \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4+2d_3]{d_3:=-d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12-m & m-10 \\ 0 & 0 & 0 & 27-2m & 16-2m \end{array}\right)$$

Nếu $m = \dfrac{27}{2}$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(A|B)$ nên hệ đã cho vô nghiệm.

Khi $m \neq \dfrac{27}{2}$. Ta có hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 6x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + (12 - m)\, x_4 = m - 10 \\ (27m - 2)\, x_4 = 16 - 2m \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3}m + \dfrac{26}{3}\dfrac{m-8}{27m-2} - \dfrac{20}{3}\dfrac{(m-8)(m-12)}{27m-2} - \dfrac{97}{3} \\ x_2 = \dfrac{(m-8)(m-12)}{3(27m-2)} - \dfrac{m-8}{3(27m-2)} - \dfrac{m}{6} + \dfrac{5}{3} \\ x_3 = m - \dfrac{2(m-8)(m-12)}{27m-2} - 10 \\ x_4 = \dfrac{16-2m}{27m-2} \end{cases}$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất khi $m \neq \dfrac{27}{2}$.

c) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 4 & -17 & 11m+7 \\ 2 & 3 & 2 & -12 & 8m+5 \\ 5 & 6 & 8 & -27 & 18m+10 \\ 3 & 5 & 2 & m-20 & 13m+8 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3m+2 \\ 2 & 3 & 2 & -12 & 8m+5 \\ 5 & 6 & 8 & -27 & 18m+10 \\ 3 & 5 & 2 & m-20 & 13m+8 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-5d_1 \\ d_4:=d_4-3d_1}]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3m+2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2m+1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -5m \\ 0 & 2 & -6 & m-5 & 4m+2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3m+2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2m+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -7m-1 \\ 0 & 0 & 2 & m-1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3m+2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 2m+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -7m-1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & 7m+1 \end{array}\right)$

Do đó khi $m = 1$ thì $r\,(A) = 3 < 4 = r\,(A|B)$ nên hệ vô nghiệm.

Khi $m \neq -1$ thì ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3m + 2 \\ x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2m + 1 \\ 2x_3 = -7m - 1 \\ (m - 1)\, x_4 = 7m + 1 \end{cases}$$

Ta được $\begin{cases} x_4 = \dfrac{7m+1}{m-1} \\ x_3 = -\dfrac{7m+1}{2} \\ x_2 = \dfrac{2(7m+1)}{m-1} - 12m - 1 \\ x_1 = 22m + \dfrac{3(7m+1)}{m-1} + 4 \end{cases}$ hay hệ đã cho có bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left\{ \left(22m + \frac{3(7m+1)}{m-1} + 4, \frac{2(7m+1)}{m-1} - 12m - 1, -\frac{7m+1}{2}, \frac{7m+1}{m-1} \right) \middle| \, m \neq -1 \right\}$$

d) $(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3m \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -1 & m+1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -4 & m \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 1-2m \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -m-1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4\longleftrightarrow d_3]{d_2\longleftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -m-1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -4 & m \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 1-2m \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-5d_2 \\ d_4:=d_4-4d_1}]{d_2:=-d_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 1 & -5-4m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-6m \end{array}\right)$

Khi $m \neq -\frac{1}{2}$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(A|B)$ nên hệ vô nghiệm.

Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì ta có hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -\frac{1}{2} \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \\ 8x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

Khi đó, hệ đã cho có 2 ẩn tự do $x_4 = \alpha, x_5 = \beta$ và

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{8}(3 + \beta - \alpha) \\ x_2 = \frac{1}{8}(7\beta - 7\alpha + 1) \\ x_1 = \frac{5}{8}(\beta - \alpha - 1) \end{cases}$$

hay hệ đã cho có vô số nghiệm với bộ nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left\{ \left(\frac{5}{8}(\beta - \alpha - 1), \frac{1}{8}(7\beta - 7\alpha + 1), \frac{1}{8}(3 + \beta - \alpha), \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

QUY TẮC CRAMER.

Được sử dụng để giải hệ phương trình $AX = B$ (5.2.2).

Đặt $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ có định thức là $\triangle_A = \det A$.

Ngoài ra, $\triangle_j$ là định thức được tạo thành từ ma trận A bằng cách thay cột j bằng vector cột B.

Example 5.38. Cho hệ $\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}$.

Ta có $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Do đó

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \triangle_{\mathbf{1}} = \begin{vmatrix} \mathbf{c_1} & b_1 \\ \mathbf{c_2} & b_2 \end{vmatrix}, \triangle_{\mathbf{2}} = \begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{c_1} \\ a_2 & \mathbf{c_2} \end{vmatrix}$$

Theorem 5.39. *Hệ (5.2.2) có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi $\triangle \neq 0$. Khi đó*

$$x_j = \frac{\triangle_j}{\triangle}, \quad \text{với } j \in \overline{1, ..., n}$$

Hệ vô nghiệm nếu và chỉ nếu $\triangle = 0$ và $\exists j \in \overline{1, ..., n}$ sao cho $\triangle_j \neq 0$.

Example 5.40. Giải và biện luận các hệ sau theo quy tắc Cramer.

$$1) \begin{cases} (2m+1)\,x_1 - mx_2 + (m+1)\,x_3 = m-1 \\ (m-2)\,x_1 + (m-1)\,x_2 + (m-2)\,x_3 = m \\ (2m-1)\,x_1 + (m-1)\,x_2 + (2m-1)\,x_3 = m \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (m+2)\,x_1 + 2x_2 + x_3 = m-1 \\ (m-5)\,x_1 + (m-2)\,x_2 + 3x_3 = 2m \\ (m+5)\,x_1 + 2x_2 + (m+3)\,x_3 = 3m \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} mx_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + mx_2 + 2x_3 = m \\ 2x_1 + 2x_2 + mx_3 = m \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (3m+5)\,x_1 - (m+2)\,x_2 + (m+1)\,x_3 = m \\ (4m+5)\,x_1 + (m+2)\,x_2 + (2m+1)\,x_3 = m \\ (3m+5)\,x_1 + (2m+1)\,x_2 + 2x_3 = m \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} (m+1)\,x_1 - x_2 + 2x_3 = m \\ (m-2)\,x_1 + (m-3)\,x_2 + x_3 = -m \\ (m+2)\,x_1 + 3x_2 + (m-1)\,x_3 = 2m \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (2m+1)\,x_1 - (m-2)\,x_2 + (m+2)\,x_3 = m-1 \\ (2m-1)\,x_1 + (2m-5)\,x_2 + mx_3 = m-1 \\ (3m+4)\,x_1 + (m-2)\,x_2 + (2m+5)\,x_3 = m-1 \end{cases}$$

Giải. Ta xét các định thức sau

$$1)\ \triangle = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} \overset{c_1:=c_1-c_3}{===} \begin{vmatrix} m & -m & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m\,(m-1)\,(m+1)$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} m-1 & -m & m+1 \\ m & m-1 & m-2 \\ m & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} \overset{d_3:=d_3-d_2}{===} \begin{vmatrix} m-1 & -m & m+1 \\ m & m-1 & m-2 \\ 0 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)\left(2m^2-2m+1\right)$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2m+1 & m-1 & m+1 \\ m-2 & m & m-2 \\ 2m-1 & m & 2m-1 \end{vmatrix} \overset{c_1:=c_1-c_3}{===} \begin{vmatrix} m & m-1 & m+1 \\ 0 & m & m-2 \\ 0 & 0 & 2m-1 \end{vmatrix} = m^2\,(m+1)$$

$$\text{và } \triangle_3 = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m-1 \\ m-2 & m-1 & m \\ 2m-1 & m-1 & m \end{vmatrix} \overset{d_3:=d_3-d_2}{===} \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m-1 \\ m-2 & m-1 & m \\ m+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\left(2m^2-2m+1\right)(m+1).$$

Áp dụng quy tắc Cramer, ta có

◇ Khi $m = \{0, 1\}$ hệ (1) có $\triangle = 0$ nhưng $\triangle_1 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

⋄ Khi $m=-1$ thì hệ có $\triangle=\triangle_1=\triangle_2=\triangle_3=0$ và hệ trở thành

$$\begin{cases} -x_1-x_2 \qquad\quad =-2\\ -3x_1-2x_2-3x_3=-1\\ -3x_1-2x_2-3x_3=-1\end{cases}$$

có vô số nghiệm với ẩn tự do $x_3=\alpha$ và có bộ nghiệm là

$$(x_1,x_2,x_3)=\{(-3-3\alpha,3+5\alpha,\alpha)\,|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$$

⋄ Khi $m\neq\{0,\pm1\}$ thì hệ có duy nhất nghiệm $x_i=\dfrac{\triangle_i}{\triangle}$ với bộ nghiệm

$$(x_1,x_2,x_3)=\left\{\left(\frac{2m^2-2m+1}{m\,(m-1)},\frac{m}{m-1},-\frac{2m^2-2m+1}{m\,(m-1)}\right)\middle|\; m\neq\{0,\pm1\}\right\}$$

2) $\triangle=\begin{vmatrix} m+2 & 2 & 1\\ m-5 & m-2 & 3\\ m+5 & 2 & m+2\end{vmatrix}\overset{d_3:=d_3-d_1}{\equiv\!\equiv}\begin{vmatrix} m+2 & 2 & 1\\ m-5 & m-2 & 3\\ 3 & 0 & m+2\end{vmatrix}\overset{c_1:=c_1-c_2}{\equiv\!\equiv}\begin{vmatrix} m & 2 & 1\\ -3 & m-2 & 3\\ 3 & 0 & m+2\end{vmatrix}$

$\overset{d_2:=d_2+d_3}{\equiv\!\equiv}\begin{vmatrix} m & 2 & 1\\ 0 & m-2 & m+5\\ 3 & 0 & m+2\end{vmatrix}=m\left(m^2-4\right)+6\,(m+5)-3\,(m-2)=m^3-m+36.$

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} m & 2 & m+1\\ 2m & m-2 & m-2\\ 3m & 2 & 2m-1\end{vmatrix}\overset{d_3:=d_3-d_1}{\equiv\!\equiv}\begin{vmatrix} m & 2 & m+1\\ 2m & m-2 & m-2\\ 2m & 0 & m+2\end{vmatrix}$$

$\overset{\text{cột }1}{\equiv\!\equiv}m\begin{vmatrix} 1 & 2 & m+1\\ 2 & m-2 & m-2\\ 2 & 0 & m+2\end{vmatrix}=m\left[\left(m^2-4\right)-4\,(m-1)-2\,(m-2)\right]=m\left(m^2-6m+4\right)$

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} m+2 & m & 1\\ m-5 & 2m & 3\\ m+5 & 3m & m+2\end{vmatrix}\underset{d_3:=d_3-3d_1}{\overset{(\text{ cột }1\text{ })\; d_2:=d_2-2d_1}{\equiv\!\equiv}}m\begin{vmatrix} m+2 & 1 & m+1\\ -(m+9) & 0 & 1\\ -(2m+1) & 0 & m\end{vmatrix}=m\left(m^2+7m-1\right)$$

và $\triangle_3=\begin{vmatrix} m+2 & 2 & m\\ m-5 & m-2 & 2m\\ m+5 & 2 & 3m\end{vmatrix}\underset{d_3:=d_3-3d_1}{\overset{(\text{ cột }1\text{ })\; d_2:=d_2-2d_1}{\equiv\!\equiv}}m\begin{vmatrix} m+2 & 2 & 1\\ -(m+9) & m-6 & 0\\ -(2m+1) & -4 & 0\end{vmatrix}=m\left(2m^2-7m+30\right).$

Áp dụng quy tắc Cramer, ta có

⋄ Nếu $\triangle=0$ hay $m=m_0\approx-3.402848$ thì hệ (2) vô nghiệm.

⋄ Nếu $\triangle\neq0$ hay $m\neq m_0$ thì hệ (2) có duy nhất nghiệm với bộ nghiệm

$$(x_1,x_2,x_3)=\left\{\left(\frac{m\left(m^2-6m+4\right)}{m^3-m+36},\frac{m\left(m^2+7m-1\right)}{m^3-m+36},\frac{m\left(m^2+7m+30\right)}{m^3-m+36}\right)\middle|\; m\neq m_0\right\}$$

3) $\triangle = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \overset{c_2:=c_2-c_3}{\underset{c_1:=c_1-c_3}{===}} \begin{vmatrix} m-2 & 0 & 2 \\ 0 & m-2 & 2 \\ 2-m & 2-m & m \end{vmatrix} \overset{\text{cột } 1,2}{===} (m-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix}$

$= (m-2)^2 [m+2+2] = (m-2)^2 (m+4)$

$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ m & m & 2 \\ m & 2 & m \end{vmatrix} \overset{c_2:=c_2-c_1}{\underset{c_3:=c_3-c_1}{===}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ m & 0 & 2-m \\ m & 2-m & 0 \end{vmatrix} = 2\left[0-(m-2)^2\right] = -2(m-2)^2$

$\triangle_2 = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2-d_3}{===} \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-m \\ 2 & m & m \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(2-m) \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (m-2)^2 (m+2)$

và $\triangle_3 = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & m \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2-d_3}{===} \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 0 & m-2 & 0 \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} = (m-2)^2 (m+2).$

Áp dụng quy tắc Cramer, ta có

◇ Nếu $m=-4$ thì $\triangle = 0$ nhưng $\triangle_i \neq 0, \forall i = \{1,2,3\}$ nên hệ vô nghiệm

◇ Nếu $m=2$ thì $\triangle = \triangle_i = 0, \forall i = \{1,2,3\}$ thì hệ trở thành $x_1+x_2+x_3=1$ có vô số nghiệm với bộ nghiệm là

$$(x_1,x_2,x_3) = \{(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta) |\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\}$$

◇ Nếu $m \neq \{-4,2\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất theo m

$$(x_1,x_2,x_3) = \left\{ \left(\frac{-2}{m+4}, \frac{m+2}{m+4}, \frac{m+2}{m+4} \right) \middle| \ m \neq \{-4,2\} \right\}$$

4)$\triangle = \begin{vmatrix} 3m+5 & m+2 & m+1 \\ 4m+5 & m+2 & 2m+1 \\ 3m+5 & 2m+1 & 2 \end{vmatrix} \overset{d2:=d_2-d_1}{\underset{d_3:=d_3-d_1}{===}} \begin{vmatrix} 3m+5 & m+2 & m+1 \\ m & 0 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \end{vmatrix}$

$\overset{c_3:=c_3+c_2}{===} \begin{vmatrix} 3m+5 & m+2 & 2m+3 \\ m & 0 & m \\ 0 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(m-1)m(3m+5-(2m+3)) = -m(m-1)(m+2)$

$\triangle_1 = \begin{vmatrix} m & m+2 & m+1 \\ m & m+2 & 2m+1 \\ m & 2m+1 & 2 \end{vmatrix} \overset{d2:=d_2-d_1}{\underset{d_3:=d_3-d_1}{===}} \begin{vmatrix} m & m+2 & m+1 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \end{vmatrix} = -m^2(m-1)$

$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 3m+5 & m & m+1 \\ 4m+5 & m & 2m+1 \\ 3m+5 & m & 2 \end{vmatrix} \overset{d2:=d_2-d_1}{\underset{d_3:=d_3-d_1}{===}} \begin{vmatrix} 3m+5 & m & m+1 \\ m & 0 & m \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = m^2(m-1)$

và $\triangle_3 = \begin{vmatrix} 3m+5 & m+2 & m \\ 4m+5 & m+2 & m \\ 3m+5 & 2m+1 & m \end{vmatrix} \overset{d2:=d_2-d_1}{\underset{d_3:=d_3-d_1}{===}} \begin{vmatrix} 3m+5 & m+2 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = m^2(m-1).$

Áp dụng quy tắc Cramer, ta có

◇ Nếu $m=-2$ thì $\triangle = 0$ nhưng $\triangle_i \neq 0, \forall i = \{1,2,3\}$ nên hệ vô nghiệm

$\diamond$ Nếu $m = 0$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm với ẩn tự do $x_3 = \alpha$ và bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ \left(-\frac{3}{5}\alpha, \alpha, \alpha \right) \middle| \, \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$\diamond$ Nếu $m = 1$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

Khi đó dạng $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 1 \end{array} \right)$

Vậy khi $m = 1$ hệ có vô số nghiệm với ẩn tự do $x_3 = \alpha$ và bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3) = \{ (-\alpha, 1 + 2\alpha, \alpha) | \, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$\diamond$ Khi $m \neq \{-2, 0, 1\}$ thì hệ có duy nhất nghiệm theo m với bộ nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ \left(\frac{m}{m+2}, \frac{-m}{m+2} \frac{-m}{m+2} \right) \middle| \, m \neq \{-2, 0, 1\} \right\}$$

$$5) \triangle = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2 \\ m-2 & m-3 & 1 \\ m+2 & 3 & m-1 \end{vmatrix} \overset{c_1 := c_1 - c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m-3 & 1 \\ m-1 & 3 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 := c_1 - c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} m-2 & 1 & 1 \\ 0 & m-3 & 1 \\ 0 & 3 & m-1 \end{vmatrix} = m\,(m-2)\,(m-4)$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ -m & m-3 & 1 \\ 2m & 3 & m-1 \end{vmatrix} \underset{d_3 := d_3 - 2d_1}{\overset{d2 := d_2 + d_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 3 \\ 0 & 1 & m-5 \end{vmatrix}$$

$$= m\,((m-2)\,(m-5) - 3) = m\left(m^2 - 7m + 7\right)$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} m+1 & m & 2 \\ m-2 & -m & 1 \\ m+2 & 2m & m-1 \end{vmatrix} \underset{d_3 := d_3 - 2d_1}{\overset{d2 := d_2 + d_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} m+1 & m & 2 \\ 2m-1 & 0 & 3 \\ -m & 0 & m-5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}\, m\,((2m-1)\,(m-5) + 3m) = -m\left(2m^2 - 8m + 5\right)$$

và $\triangle_3 = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m \\ m-2 & m-3 & -m \\ m+2 & 3 & 2m \end{vmatrix} \underset{d_3 := d_3 - 2d_1}{\overset{d2 := d_2 + d_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m \\ 2m-1 & m-5 & 0 \\ -m & 1 & 0 \end{vmatrix} = m\,(m-1)\,(m+1).$

Áp dụng quy tắc Cramer, ta có

$\diamond$ Nếu $m = \{2, 4\}$ thì $\triangle = 0$ nhưng $\triangle_i \neq 0, \forall i = \{1, 2, 3\}$ nên hệ vô nghiệm.

$\diamond$ Nếu $m = 0$ thì hệ tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

có $(A|B) == \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$ có 1 ẩn tự do $x_3 = \alpha$ và có bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3) = \{\, (-7\alpha, 5\alpha, \alpha)|\ \alpha \in \mathbb{C}\}$$

⋄ Nếu $m \neq \{0, 2, 4\}$ thì hệ có duy nhất nghiệm theo m với bộ nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ \left(\frac{m^2 - 7m + 7}{(m-2)(m-4)}, \frac{-m^2 + 8m - 5}{(m-2)(m-4)}, \frac{m^2 - 1}{(m-2)(m-4)} \right) \middle|\ m \neq \{0, 2, 4\} \right\}$$

6) $\triangle = \begin{vmatrix} 2m+1 & m-2 & m+2 \\ 2m-1 & 2m-5 & m \\ 3m+4 & m-2 & 2m+5 \end{vmatrix} \overset{d_3:=d_3-d_1}{===} \begin{vmatrix} 2m+1 & m-2 & m+2 \\ 2m-1 & 2m-5 & m \\ m+3 & 0 & m+3 \end{vmatrix}$

$\overset{c_1:=c_1-c_3}{===} \begin{vmatrix} m-1 & m-2 & m+2 \\ m-1 & 2m-5 & m \\ 0 & 0 & m+3 \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} m+1 & m-2 \\ m-1 & 2m-5 \end{vmatrix}$

$\overset{d_1:=d_1-d_2}{===} (m+3)(m-1) \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 0 & m-3 \end{vmatrix} = (m-3)(m-1)(m+3)$

$\triangle_1 = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 & m+2 \\ m-1 & 2m-5 & m \\ m-1 & m-2 & 2m+5 \end{vmatrix} \underset{d3:=d_3-d_1}{\overset{d2:=d_2-d_1}{===}} \begin{vmatrix} m-1 & m-2 & m+2 \\ 0 & m-3 & -2 \\ 0 & 0 & m+3 \end{vmatrix} = (m-1)\left(m^2 - 9\right)$

$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2m+1 & m-1 & m+2 \\ 2m-1 & m-1 & m \\ 3m+4 & m-1 & 2m+5 \end{vmatrix} \underset{d3:=d_3-d_1}{\overset{d2:=d_2+d_1}{===}} \begin{vmatrix} 2m+1 & m-1 & m+2 \\ -2 & 0 & -2 \\ m+3 & 0 & m+3 \end{vmatrix}$

$\underset{\text{dòng } 3}{===} (m-1)(m+3) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

và $\triangle_3 = \begin{vmatrix} 2m+1 & m-2 & m-1 \\ 2m-1 & 2m-5 & m-1 \\ 3m+4 & m-2 & m-1 \end{vmatrix} \underset{d3:=d_3-d_1}{\overset{d2:=d_2-d_1}{===}} \begin{vmatrix} 2m+1 & m-2 & m-1 \\ -2 & m-3 & 0 \\ m+3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(m-1)\left(m^2 - 9\right).$

Áp dụng quy tắc Cramer, ta có

⋄ Nếu $m = \{1, \pm 3\}$ thì $\triangle = \triangle_i = 0, \forall i = \{1, 2, 3\}\, 0$ nên

Khi $m = 1$ hệ tương đương với

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

có $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{array}\right)$ có bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3) = \{\, (-\alpha, 0, \alpha)|\ \alpha \in \mathbb{C}\}\,.$$

Khi $m = 3$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 13x_1 + x_2 + 13x_3 = 2 \end{cases}$$

có $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 13 & 1 & 11 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -4 \\ 0 & -6 & 12 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \{(1, 0, -1)\}.$$

Khi $m = -3$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \\ 7x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

có $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 11 & 3 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right)$ có vô số nghiệm với bộ nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ \left(\frac{4-\alpha}{5}, \frac{-4-4\alpha}{5}, \alpha\right) \middle| \, \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\diamond$ Nếu $m \neq \{1, \pm 3\}$ thì hệ có duy nhất nghiệm với bộ nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = \{\, (1, 0, -1) |\ m \neq \{1, \pm 3\}\}.$$

Example 5.41. Biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số $a, b, c \in \mathbb{C}$.

$$1) \begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ ax_3 = 3 \\ 3x_1 - \ \ x_2 - \ \ ax_3 = 2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ 3x_3 = b \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x_1 + \ \ ax_2 + \ \ bx_3 = 1 \\ bx_1 + \ \ 2x_2 + \ \ ax_3 = 0 \\ ax_1 + \ \ bx_2 + \ \ 3x_3 = c \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$1)\ \triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2+d_1}{\underset{d_3:=d_3-d_1}{===}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3-a \end{vmatrix}$$

$$\underset{c_1:=c_1+c_2}{===} \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3-a \end{vmatrix} = (3-a) - 5a - 10\,(3-a) = 2a - 21.$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 2 & -1 & -a \\ b & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2+d_1}{\underset{d_3:=d_3+d_2}{===}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 1 & 0 \\ b+5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 9 - a(b+5) - 30 = 5a - ab - 21$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & b & 3 \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2+d_1}{\underset{d_3:=d_3-2d_1}{===}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & b-6 & 3-2a \end{vmatrix} = 4ab - 10a - 21$$

và $$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2-3d_1}{\underset{d_3:=d_3-2d_1}{===}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -3 & b-6 \end{vmatrix} = 7(3-b).$$

Biện luận:

◇ Nếu $\triangle \neq 0$ tức $a \neq \dfrac{21}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ \left(\frac{5a - ab - 21}{2a - 21}, \frac{4ab - 10a - 21}{2a - 21}, \frac{-7(b-3)}{2a - 21} \right) \middle| \; a \neq \frac{21}{2} \right\}$$

◇ Nếu $\exists i \in \{1,2,3\}$ sao cho $\triangle_i \neq 0$ và $\triangle = 0$ thì hệ vô nghiệm tức

$$\begin{cases} a = \dfrac{21}{2}, b \neq \dfrac{63}{5} \text{ thì } \triangle_1 \neq 0. \\ a = \dfrac{21}{2}, b \neq 3 \text{ thì } \triangle_2 \neq 0. \\ a = \dfrac{21}{2}, b \neq 3 \text{ thì } \triangle_3 \neq 0. \end{cases}$$

2) $$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ b & 2 & a \\ a & b & 3 \end{vmatrix} \overset{d_2:=d_2-bd_1}{\underset{d_3:=d_3-ad_1}{===}} \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2-ab & a-b^2 \\ 0 & b-a^2 & 3-ab \end{vmatrix} = a^3 - 6ab + b^3 + 6$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ c & b & 3 \end{vmatrix} \overset{d_3:=d_3-cd_1}{===} \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & b-ac & 3-bc \end{vmatrix} = ca^2 - ba - 2bc + 6$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ b & 0 & a \\ a & c & 3 \end{vmatrix} \overset{c_1:=c_1-c_2}{===} \begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ b & 0 & a \\ a-c & c & 3 \end{vmatrix} = a^2 - ca + cb^2 - 3b$$

và $$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 2 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{c_1:=c_1-c_3}{===} \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ b & 3 & 0 \\ a-c & b & c \end{vmatrix} = b^2 - abc - 2a + 2c.$$

Biện luận:

◇ Nếu $\triangle \neq 0$ tức $a^3 - 6ab + b^3 + 6 \neq 0$ thì hệ duy nhất nghiệm.

◇ Nếu $\exists i \in \{1,2,3\}$ sao cho $\triangle_i \neq 0$ và $\triangle = 0$ thì hệ vô nghiệm.

5.3 Không gian vector

5.3.1 Không gian - số chiều - tập sinh & cơ sở.

Các tính chất của không gian vector

Cho không gian vector $V \neq \emptyset$,$a, b, c \in V$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Khi đó:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists 0 \in V$ sao cho $a + 0 = 0 + a = a$
4. $\exists (-a) \in V$ sao cho $a + (-a) = (-a) + a = 0$
5. $(\alpha\beta)\, a = \alpha\, (\beta a)$
6. $(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a$
7. $\alpha\, (a + b) = \alpha a + \alpha b$
8. $1.a = a$.

Definition 5.42. *Tổ hợp tuyến tính.*

Cho các vector $a_1, a_2, ..., a_k \in V$. Ta nói ***tổ hợp tuyến tính*** *của bộ k-vector đó là một vector có dạng*

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$$

với $\alpha_m \in \mathbb{C}$, $\forall m \in \overline{1, ..., k}$

Corollary 5.43. *Cho các vector $a_1, a_2, ..., a_k \in V^n$ với $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{kj})\,, j \in \overline{1, ..., k}$. Khi đó $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ là tổ hợp tuyến tính của $a_1, a_2, ..., a_k$ nếu và chỉ nếu hệ $AX = B$ có nghiệm, trong đó*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nk} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ta quy ước ma trận như sau:

U là ma trận tạo thành bằng cách dựng các vector (a_j) thành các ***cột****.*

B được tạo thành bằng cách dựng b thành các ***cột****.*

Example 5.44. Cho không gian $\mathbb{R}^4$ với các vector sau $u_1 = (1, 1, 1, 1)\,$, $u_2 = (2, 3, -1, 0)\,$, $u_3 = (-1, -1, 1, 1)$ và $u_4 = (1, 2, 1, -1)\,$. Tìm điều kiện để vector $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ là một tổ hợp tuyến tính của:

1) u_1, u_2, u_3

2) u_1, u_2, u_3 và u_4.

Giải.

1) Áp dụng hệ quả trên, để $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 thì $A_1X = B$ có nghiệm. Trong đó

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a_1 \\ 1 & 3 & 2 & a_2 \\ 1 & -1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & -1 & a_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 - a_3 - a_2 + a_1 \end{array}\right)$$

Điều kiện để hệ có nghiệm là

$$a_4 - a_3 - a_2 + a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_4 = a_2 + a_3$$

Vậy điều kiện để a là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 là

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3.$$

2) Tương tự,

⋄ Xét hệ $A_2X = B$ với

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & a_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & a_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7a_1/6 - 2a_2/3 + a_3/3 + a_4/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2a_2/3 - 2a_1/3 - a_3/3 + a_4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_2 - 3a_1/2 + a_4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_2/3 - a_1/3 + a_3/3 - a_4/3 \end{array}\right)$$

Do đó

Hệ luôn có nghiệm nên mọi vector $a \in \mathbb{R}^4$ đều là tổ hợp tuyến tính của bộ 4 vector u_1, u_2, u_3, u_4.

⋄ Ngoài ra ta còn có thể chứng minh bằng quy tắc Cramer ($\det A_2 = -6 \neq 0$)

Độc lập tuyến tính & phụ thuộc tuyến tính.

Definition 5.45. *Cho các vector* $a_1, a_2, ..., a_k \in V^n$ *với* $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{kj}), j \in \overline{1, ..., k}$ *và phương trình*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k u_k = 0 \qquad (5.3.1)$$

1) Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ *thì ta nói bộ các vector* $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ ***độc lập tuyến tính****.*

Khi đó nghiệm $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) = 0$ *được gọi là* ***nghiệm tầm thường*** *của hệ* (5.3.1).

2) Nếu ngoài nghiệm tầm thường như trên, (5.3.1) *còn có nghiệm khác thì ta nói bộ các vector* $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ ***phụ thuộc tuyến tính****.*

Khi đó các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ *không đồng thời bằng* 0.

Example 5.46. Cho các vector $a = (1, 1, 1), b = (1, 2, 1)$ và $c = (0, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$.

Ta có

1) a, b độc lập tuyến tính do

$$\alpha a + \beta b = 0 \Leftrightarrow \alpha (1, 1, 1) + \beta (1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

2) Các vector a, b, c cũng độc lập tuyến tính do

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \Leftrightarrow \alpha (1, 1, 1) + \beta (1, 2, 1) + \gamma (0, 1, -2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Lemma 5.47. *Cho các vector* $a_1, a_2, ..., a_k \in V^n$ *với* $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{kj}), j \in \overline{1, ..., k}$.

Gọi A *là ma trận có được bằng cách sắp xếp* $a_1, a_2, ..., a_k$ *thành các* ***dòng****. Khi đó* $a_1, a_2, ..., a_k$ *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi*

$$A \text{ có hạng } r(A) = k.$$

Thuật toán kiểm tra ĐLTT của các vector.

1. ***Bước 1.*** *Viết ma trận* A *bằng cách sắp xếp* $a_1, a_2, ..., a_k$ *thành các dòng.*
2. ***Bước 2.*** *Xác định hạng của* A *bằng cách đưa nó về dạng bậc thang hoặc tìm định thức của nó.*

- *2a) Nếu* $r(A) = n$ *thì* $a_1, a_2, ..., a_k$ *độc lập tuyến tính.*
- *2b) Nếu* $r(A) < n$ *thì* $a_1, a_2, ..., a_k$ *phụ thuộc tuyến tính.*

Exercise 5.48. Kiểm tra sự độc lập tuyến tính của các vector

$$a_1 = (1, 2, -3, 5, 1)\,;\ a_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$$

$$a_3 = (3, 5, 1, -2, 5)\,; \quad a_4 = (2, 3, 4, -7, 4)$$

trong $\mathbb{R}^5$ bằng cách 1.

và các vector

$$b_1 = (2m+1, -m, m+1)\,; b_2 = (m-2, m-1, m-2) \text{ và } b_3 = (2m-1, m-1, 2m-1)$$

bằng 2 cách

•$a)$ **Cách 1. Sử dung BĐSC đưa về dạng bậc thang**

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nên } r(A) = 2.$$

Do đó các vector độc lập tuyến tính.

•$b)$

◇ **Cách 1. Sử dung BĐSC trên dòng đưa về dạng bậc thang.**

Ta có $B = \begin{pmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_1:=d_1-d_3]{d_3:=d_3-d_2} \begin{pmatrix} m & -m & 0 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[d_2:=d_2-d_1]{d_3:=d_3-d_1} \begin{pmatrix} m & -m & 0 \\ -2 & 2m-1 & m-2 \\ 1 & m & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_1:=d_1-md_3]{d_2:=d_2+2d_3} \begin{pmatrix} 0 & -m-m^2 & -m(m+1) \\ 0 & 4m-1 & 3m \\ 1 & m & m+1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ 0 & -m(m+1) & -m(m+1) \\ 0 & 4m-1 & 3m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ 0 & -m(m+1) & -m(m+1) \\ 0 & 4m-1 & 3m \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ 0 & -m(m+1) & -m(m+1) \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

Ta có $r(A) = 3$ khi và chỉ khi 2 dòng cuối $\neq 0$ hay

$$m(m+1)(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \{0, \pm 1\}\,.$$

Tuy nhiên cách biến đổi sơ cấp trên dòng đưa về ma trận bậc thang có một số hạn chế vì không thể khử cột (biến đổi trên cột). Ví dụ này đã minh họa cho việc đó.

Do đó, ta sẽ sử dụng cách 2 để hạn chế độ phức tạp của nó.

◇ **Cách 2. Tính định thức.**

Ta có $\det B = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} \underset{c_1:=c_1-c_3}{===} \begin{vmatrix} m & -m & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$

$$= m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m\left(m^2-1\right).$$

Do đó, để các vector b_1, b_2, b_3 độc lập tuyến tính thì

$$\det B \neq 0 \text{ hay } m(m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \{0, \pm 1\}.$$

Không gian con. *Cho W là tập con khác trống của V, ta nói W là **không gian vector con** (hay không gian con) của V. Ký hiệu là $W \leq V$. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

i) $W \leq V$.

ii) $W \neq \emptyset$ và $\forall u, v \in W, \alpha \in \mathbb{C}$. Ta có $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$.

iii) $W \neq \emptyset$ và $\forall u, v \in W, \alpha \in \mathbb{C}$. Ta có $\alpha u + v \in W$.

iv) $W \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in W$.

Example 5.49. Cho $V = M_n(\mathbb{C})$ là KG các ma trận vuông cấp n. Các tập sau có phải KGC của V không?

1) $T_1 = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,|A_{11} = 0\}$

2) $T_2 = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) \,\middle|\exists A^{-1}\right\}$

3) $T_3 = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,|\det A = 1\}$.

Giải. Ta có

1) $0 = 0_n \in M_n(\mathbb{C})$ nên $0_{11} = 0$ do đó $0 \in T_1$.

Với mọi $A, B \in T_1$ thì $A_{11} = B_{11} = 0$ và

$$(\alpha A + B) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + b_{11} & \alpha a_{12} + b_{12} & \dots & \alpha a_{1n} + b_{1n} \\ \alpha a_{21} + b_{21} & \alpha a_{22} + b_{22} & \dots & \alpha a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} + b_{n1} & \alpha a_{n2} + b_{n2} & \dots & \alpha a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\alpha A + B)_{11} &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\,[\alpha a + b]_{1\sigma(1)} \dots [\alpha a + b]_{n-1\sigma(n-1)} \\ &= \alpha\left\{\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)}\right\} + \left\{\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \dots b_{n-1\sigma(n-1)}\right\} \\ &= \alpha A_{11} + B_{11} = 0. \end{aligned}$$

Do đó $(\alpha A + B) \in T_1$.

2) Vì $T_2 = \left\{ A \in M_n(\mathbb{C}) \left| \exists A^{-1} \right. \right\}$ là tập các ma trận khả nghịch nên $0_n \notin T_2$.

Do đó T_2 không phải KGC.

3) Tương tự T_3 không phải KGC vì $0 = 0_n \notin T_3$.

Exercise 5.50. Các KG sau, KG nào là KG con?

1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$

2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$

3) $A_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x_1.x_2 = x_n^2\right\}$

4) $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^n | \prod_{k=0}^n x = 0\}$

5) $A_5 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 2x_2 = ... = nx_n\}$

6) $A_6 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \in \mathbb{Q}\}$

7) $U_1 = \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f\left(x^2\right) = [f(x)]^2\right\}$.

8) $U_2 = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(0) = f(1)\}$

9) $U_3 = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(7) = 2f(9)\}$

10) $U_4 = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(1) = 0\}$

11) $U_5 = \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f \text{ khả vi }\right\}$

12) $U_6 = \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, \int_0^1 f(s)\,ds = 1\right\}$

13) $U_7 = \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f \text{ là hàm chẵn (hoặc lẻ)}\right\}$

Giải. Ta có

1) $0 = (0, 0, ..., 0) \in A_1 \subset \mathbb{R}^n$, mặt khác $\forall x, y \in A_1$ thì $x_n, y_n \geq 0$

Ta có $\alpha x + y \in A_1 \Leftrightarrow \alpha x_n + y_n \geq 0$ khi và chỉ khi $\alpha \geq 0$.

Do đó A_1 không phải KGC trong $\mathbb{R}^n$

2) Vì $0 \notin A_2, \forall n \in \mathbb{N}$ do đó A_2 không phải KGC trong $\mathbb{R}^n$.

3) Dễ thấy $0 \in A_3$. Mặt khác, $\forall x, y \in A_3$ thì $x_1x_2 = x_n^2$ và $y_1y_2 = y_n^2$.

$$\begin{aligned}\text{Xét } (\alpha x_1 + y_1)(\alpha x_2 + y_2) &= \alpha^2 x_1x_2 + y_1y_2 + \alpha(x_1y_2 + x_2y_1)\\ &= \alpha^2 x_n^2 + y_n^2 + \alpha(x_1y_2 + x_2y_1)\\ &\neq \alpha^2 x_n^2 + y_n^2 + \alpha x_n y_n = (\alpha x_n + y_n)^2.\end{aligned}$$

Do đó $\alpha x + y \notin A_3$.

4) Dễ thấy $0 \in A_4$. Mặt khác, $\forall x, y \in A_5$ thì $\prod_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^n y_k = 0$.

Xét $\prod_{k=1}^n (\alpha x_k + y_k) = \alpha^n \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right) + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_l y_k$

$= \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_l y_k \neq 0$.

Phản chứng bằng ví dụ sau $n = 3$, $x = (1, 0, 1)$ và $y = (0, 1, 0) \in A_4$. Lấy $\alpha = 1$ thì

$$\alpha x + y = (1, 1, 1) \text{ nhưng } \alpha x + y \notin A_4$$

Do đó A_4 không phải KGC.

5) Dễ thấy $0 \in A_5$. Mặt khác, $\forall x, y \in A_5$ thì $\begin{cases} x_1 = 2x_2 = ... = nx_n \\ y_1 = 2y_2 = ... = ny_n \end{cases}$.

Xét $\alpha x_1 + y_1 = \alpha 2x_2 + 2y_2 = 2(\alpha x_2 + y_2) = ... = n(\alpha x_n + y_n)$

Do đó $\alpha x + y \in A_5$ và A_5 là KGC của $\mathbb{R}^n$.

6) Dễ thấy $0 = \dfrac{0}{m} \in \mathbb{Q}$ và $0 \in \mathbb{R}$ nên $0 \in A_6$.

Mặt khác với $x, y \in A_6$ bất kỳ thì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên tồn tại

$$p, q, s, t \in \mathbb{N} \text{ sao cho } x = \frac{p}{q} \text{ và } y = \frac{s}{t}$$

Ta có $\alpha x+y=\alpha\frac{p}{q}+\frac{s}{t}=\frac{\alpha pt+sq}{q.t}\in\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\alpha pt+sq\in\mathbb{N}\\ qt\in\mathbb{N}\end{cases}$

Mà $p,q,s,t\in\mathbb{N}$ nhưng $\alpha\in\mathbb{R}$ nên $\alpha pt+sq\notin\mathbb{N}$.

Vậy $\alpha x+y\notin A_6\Leftrightarrow A_6$ không phải KGC của $\mathbb{R}$.

7) Khi $f\equiv 0$ thì $f\left(x^2\right)=[f\left(x\right)]^2$ nên $0\in U_1$.

Mặt khác $\forall f,g\in U_1$ thì $f\left(x^2\right)=[f\left(x\right)]^2$ và $g\left(x^2\right)=[g\left(x\right)]^2$.

Ta có $\left(\alpha f+g\right)\left(x^2\right)=\alpha f\left(x^2\right)+g\left(x^2\right)=\alpha\left[f\left(x\right)\right]^2+\left[g\left(x\right)\right]^2\neq\left[\left(\alpha f+g\right)\left(x\right)\right]^2$

$\Rightarrow\alpha f+g\notin U_1$. Do đó U_1 không phải là KGC.

8) Dễ thấy nếu $f\equiv 0$ thì $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$ nên $0\in U_2$.

Mặt khác $\forall f,g\in U_2$ thì $f\left(0\right)=f\left(1\right)$ và $g\left(0\right)=g\left(1\right)$. Ta có:

$$\left(\alpha f+g\right)\left(0\right)=\alpha f\left(0\right)+g\left(0\right)=\alpha f\left(1\right)+g\left(1\right)=\left(\alpha f+g\right)\left(1\right)$$

Vậy $\alpha f+g\in U_2\Rightarrow U_2$ là KGC.

9) Dễ thấy nếu $f\equiv 0$ thì $f\left(7\right)=2f\left(9\right)=0$ nên $0\in U_3$.

Mặt khác $\forall f,g\in U_3$ thì $f\left(7\right)=2f\left(9\right)$ và $g\left(7\right)=2\left(9\right)$. Ta có:

$$\left(\alpha f+g\right)\left(7\right)=\alpha f\left(7\right)+g\left(7\right)=\alpha 2f\left(9\right)+2g\left(9\right)=2\left(\alpha f+g\right)\left(9\right)$$

Vậy $\alpha f+g\in U_3\Rightarrow U_3$ là KGC.

10) Dễ thấy nếu $f\equiv 0$ thì $f\left(1\right)=0$ nên $0\in U_4$.

Mặt khác $\forall f,g\in U_4$ thì $f\left(1\right)=0$ và $g\left(1\right)=0$ Ta có:

$$\left(\alpha f+g\right)\left(1\right)=\alpha f\left(1\right)+g\left(1\right)=0$$

Vậy $\alpha f+g\in U_4\Rightarrow U_4$ là KGC.

11) Dễ thấy nếu $f\equiv 0$ thì f khả vi nên $0\in U_5$.

Mặt khác $\forall f,g\in U_5$ thì f và g đều khả vi Ta có:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\alpha f+g\right)\left(x+h\right)-\left(\alpha f+g\right)\left(x\right)}{h}=\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}$$

Vậy $\alpha f+g$ cũng khả vi hay $\alpha f+g\in U_5$. $\Rightarrow U_5$ là KGC.

12) Vì $f\equiv 0$ thì $\int_0^1 f\left(s\right)ds=0$ nên $0\notin U_6$. Do đó U_6 không phải là KGC.

13a) Nếu f là hàm chẵn, i.e. $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

Ta có với $f\equiv 0$ thì $f\left(-x\right)=f\left(x\right)=0$.

Mặt khác $\forall f,g\in U_6$ thì f và g đều là hàm lẻ. Ta có:

$$\left(\alpha f+g\right)\left(-x\right)=\alpha f\left(-x\right)+g\left(-x\right)=\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)=\left(\alpha f+g\right)\left(x\right)$$

Do đó $\left(\alpha f+g\right)\in U_6\Rightarrow U_6$ là KGC.

13b) Nếu f là hàm lẻ, i.e. $f(-x) = -f(x)$.

Ta có với $f \equiv 0$ thì $f(-x) = -f(x) = 0$.

Mặt khác $\forall f, g \in U_6$ thì f và g đều là hàm lẻ. Ta có:

$$(\alpha f + g)(-x) = -\alpha f(x) - g(x) = -(\alpha f + g)(x)$$

Do đó $(\alpha f + g) \in U_6 \Rightarrow U_6$ là KGC.

Exercise 5.51. Cho V là KG vector trên $\mathbb{C}^n$ và $a, b, c \in V$. CMR $\{a, b, c\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{a + b, b + c, a + c\}$ độc lập tuyến tính.

Giải.

○ Ta xét chiều thuận nếu $\{a, b, c\}$ độc lập tuyến tính.

Xét $\alpha'(a + b) + \beta'(b + c) + \gamma'(a + c) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha' + \gamma'\right) a + \left(\alpha' + \beta'\right) b + \left(\beta' + \gamma'\right) c = 0$$

Chọn $\alpha = \alpha' + \gamma'$, $\beta = \alpha' + \beta'$ và $\gamma = \beta' + \gamma'$.

Do $\{a, b, c\}$ độc lập tuyến tính nên

$$\left(\alpha' + \gamma'\right) = \left(\alpha' + \beta'\right) = \left(\beta' + \gamma'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha' = \beta' = \gamma' = 0$$

Vậy $\{a + b, b + c, a + c\}$ độc lập tuyến tính.

○ Cuối cùng xét chiều nghịch, nếu $\{a + b, b + c, a + c\}$ độc lập tuyến tính.

Khi đó nếu $\epsilon(a + b) + \theta(b + c) + \lambda(a + c) = 0 \Leftrightarrow \epsilon = \theta = \lambda = 0$.

Xét $\epsilon(a + b) + \theta(b + c) + \lambda(a + c) = 0$

$$\Leftrightarrow (\epsilon + \lambda) a + (\epsilon + \theta) b + (\theta + \lambda) c = 0.$$

Tương tự, vì $\epsilon = \theta = \lambda = 0$

Đặt $\alpha = \epsilon + \lambda = 0$, $\beta = \epsilon + \theta = 0$ và $\gamma = \theta + \lambda = 0$. Do đó

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Vậy $\{a, b, c\}$ độc lập tuyến tính.

Exercise 5.52. Các bộ ba vector sau có ĐLTT không?

1) $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 1)$ và $(1, 5, 4)$

2) $(1, -2, 3, 4)$, $(3, 0, 3, -10)$ và $(3, 3, -5, 1)$.

Giải. Ta có

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có $r(A) = 2$ nên không ĐLTT.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & -10 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2:=d_2-3d_1]{d_3:=d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & -22 \\ 0 & 3 & -8 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & -22 \\ 0 & 0 & -2 & -44 \end{pmatrix}$

có $r(A) = 3$ nên bộ $(1, -2, 3, 4)$, $(3, 0, 3, -10)$ và $(3, 3, -5, 1)$ ĐLTT.

Tập sinh. *Là KGC sinh bởi 1 tập:*

Cho $S \subset V$, S (không cần thiết phải là KGC). Gọi $\{W_i\}_{i\in I}$ là họ tất cả các KGC khác trống (vì chứa V khác trống) của V chứa S. Đặt

$$W = \cap_{i\in I} W_i$$

Khi đó, $W-$ giao một họ tùy ý các KGC cả V cũng là KGC của V.

Vậy W là KGC nhỏ nhất của V chứa S.

Ta nói :

- *W là KGC sinh bởi S và ký hiệu là $\langle S\rangle$*
- *S là tập sinh của $\langle S\rangle$*
- *Nếu S hữu hạn, $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thì $\langle S\rangle$được gọi là **KGC hữu hạn sinh bởi** $a_1, a_2, ..., a_n$ và được ký hiệu là $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$.*

Theorem 5.53. *Cho $\emptyset \neq S \subseteq V$. Tất cả các tổ hợp tuyến tính của hữu hạn tùy ý các vector trong S là KGC của V, sinh bởi S. Nghĩa là*

$$\langle S\rangle = \left\{ a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \middle|\, n \in \mathbb{N}, a_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \overline{1,..,n} \right\}$$

Gợi ý CMinh.

1. *W là KGC của V.*
2. *W là KGC nhỏ nhất chứa S.*

Example 5.54. Cho các vector $a = (1, 2, 1)$, $b = (4, 1, 1)$ và $c = (1, 4, 0)$.
Ta có $\langle a, b, c\rangle = \mathbb{R}^3$

Corollary 5.55. *Cho KG vector V.*

i) Nếu $S = \emptyset$ thì $\langle S\rangle = \{0\}$

ii) Nếu $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thì

$$\langle S\rangle = \left\{ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \middle|\, \alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \overline{1,..,n} \right\}$$

iii) Nếu $S \leq V$ *thì* $\langle S \rangle = S$

iv) Cho $S \subseteq V$ *và* $W \leq V$*. Khi đó*

$$S \subseteq W \;\Leftrightarrow\; \langle S \rangle \leq W$$

v) Nếu $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ *thì* $\langle S_1 \rangle \leq \langle S_2 \rangle$*.*

Definition 5.56. ***Cơ sở.***

Cho V *là KG vector. Tập hợp* $\mathcal{B} \subset V$ *được gọi là* ***cơ sở*** *của* V *nếu* $\mathcal{B}$ *là tập sinh của* V *và* $\mathcal{B}$ *độc lập tuyến tính.*

Tập hợp $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset \mathbb{C}^n$ *được gọi là* ***cơ sở chính tắc*** *của* $\mathbb{C}^n$ *trong đó*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

Lemma 5.57. *KG vector* V *sinh bởi* m *vector* $V = \langle v_1, v_2, ..., v_m \rangle$ *. Khi đó mọi tập con ĐLTT của* V *có không quá* m *phần tử.*

Definition 5.58. ***Số chiều.***

Nếu V *có cơ sở* $\mathcal{B}$ *hữu hạn* m *vector* $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ *thì mọi cơ sở khác của* V *cũng hữu hạn và có đúng* m *vector. Khi đó, ta nói KG vector* V *hữu hạn chiều trên* K*;* m *được gọi là số chiều của* V *trên* $\mathbb{C}^n$*.*

Ký hiệu là $\dim_K V$ *hay* $\dim V$*.*

Trong trường hợp KG vector V ***vô hạn chiều*** *thì* $\dim V = \infty$*.*

Lemma 5.59. *Cho* V *là KG vector hữu hạn chiều với* $\dim V = n$*. Ta có*

i) Mọi tập con của V *có nhiều hơn* n *vector đều phụ thuộc tuyến tính*

ii) Mọi tập con của V *có ít hơn* n *vector đều không là tập sinh của* V*.*

iii) Nếu S *là tập con ĐLTT của* V *và có* $u \in V$ *sao cho* $u \notin \langle S \rangle$*. Khi đó*

$$S_1 = S \cup \{u\}$$

độc lập tuyến tính.

Theorem 5.60. *Cho* V *là KG vector hữu hạn chiều với* $\dim V = n$*. Khi đó*

i) Mọi tập con ĐLTT gồm m *vector của* V *đều là cơ sở của* V*.*

ii) Mọi tập sinh của V *gồm* n *vector đều là cơ sở của* V*.*

Exercise 5.61. Trong $\mathbb{R}^3$ CMR KG sinh bởi các vector $a = (1,2,3)$,$b = (-1,-1,2)$ và $c = (-1,1,12)$ trùng với KGC sinh bởi các vector $(0,1,5)$ và $(1,3,8)$.

Giải.

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ và $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$u = (0,1,5)$, $v = (1,3,8)$.

Để kiểm tra u, v có cùng KG sinh bởi a, b, c; ta tìm sự tồn tại các tổ hợp tuyến tính của chúng

$\diamond$ Ta xét $(A|B_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 12 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Chọn $\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -2$ và $\alpha_1 = 0$ nên

$v = (1,3,8) = (-1,1,12) - 2\,(1,-1,2) = c - 2b$.

Tương tự $(A|B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 12 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Chọn $\beta_3 = 0, \beta_2 = 1$ và $\beta_1 = 1$ nên

$u = (0,1,5) = (1,2,3) + (-1,-1,2) = a + b$.

$\diamond$ Ngược lại ta cũng có thể kiểm tra được $\begin{cases} a = u - v \\ b = 2u - v \\ c = 4u - v \end{cases}$

Do đó $\langle a, b, c\rangle = \langle u, v\rangle$.

Exercise 5.62. CMR các vector sau phụ thuộc tuyến tính và tìm KGC sinh bởi chúng trên $\mathbb{R}^4$.

$$a_1 = (1,1,2,4)\,, a_2 = (2,-1,-5,2)\,, a_3 = (1,-1,4,0) \text{ và } a_4 = (2,1,1,6)\,.$$

Giải. Ta lập ma trận A bằng cách sắp xếp a_1, a_2, a_3, a_4 thành các dòng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\diamond$ Ta có: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ phụ thuộc TT.

$\diamond$ Tiếp theo, ta sẽ tìm KGC sinh bởi chúng.

$\diamond$ Đặt $u = (a, b, c, d)$ và tìm điều kiện để u là tổ hợp tuyến tính của $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Xét $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & -1 & -5 & 2 & b \\ 1 & -1 & 4 & 0 & c \\ 2 & 1 & 1 & 6 & d \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -3 & -9 & -6 & b-2a \\ 0 & -2 & 2 & -4 & c-a \\ 0 & -1 & -3 & 2 & d-a \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2 & a-d \\ 0 & -2 & 2 & -4 & c-a \\ 0 & 3 & 9 & 6 & 2a-b \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2 & a-d \\ 0 & 0 & 5 & 0 & c-a+2(a-d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-b-3(a-d) \end{array}\right)$$

Để hệ này có nghiệm thì $2a - b - 3(a-d) = 0$

$$\Leftrightarrow a + b - 3d = 0$$

Do đó $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|x_1 + x_2 = 3x_4 \right\}$.

Cơ sở không toàn vẹn.

Cho V là KG vector hữu hạn chiều và S là một tập con ĐLTT của V.

• *Khi đó, nếu S không phải cơ sở của V thì có thể* ***thêm vào*** *S một số vector để tạo thành cơ sở của V.*

• *Nếu V là KG vector hữu hạn chiều sinh bởi U, khi đó tồn tại cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $\mathcal{B} \subseteq U$. Nói cách khác, nếu U không phải là cơ sở của V thì ta có thể* ***loại bỏ*** *khỏi U một số vector để tìm được cơ sở của V.*

Corollary 5.63. *Mọi KGC W của KG vector V hữu hạn chiều đều là KG hữu hạn chiều. Hơn thế nữa, nếu*

$$W \leq V \text{ và } W \neq V$$

thì

$$\dim W < \dim V.$$

Không gian dòng & không gian tổng.

Definition 5.64. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$, i.e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Đặt

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n});$$
$$u_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n});$$
$$..............................$$
$$u_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$$

và $W_A = \langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle$. Khi đó, ta nói

•$u_1, u_2, ..., u_m$ là các vector dòng của A và

•W_A là không gian dòng của A.

Theorem 5.65. *Nếu A, B là 2 ma trận tương đương dòng thì $W_A = W_B$.i.e. 2 ma trận tương đương dòng thì có cùng KG dòng.*

Example 5.66. Xác định số chiều & cơ sở KG dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có

$\dim A = r(A) = 3$ và cơ sở của W_A là

$$\{(1, 2, -1, 1); (0, 1, 3, 2); (0, 0, 0, 1)\}$$

⋆ **Thuật toán tìm số chiều & cơ sở của KGC.**

Cho $W = \langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle \leq K^n \, (u_1, u_2, ..., u_m)$ - không cần thiết phải ĐLTT.

- **Bước 1.** Lập ma trận A bằng cách sắp xếp $u_1, u_2, ..., u_m$ thành các **dòng.**
- **Bước 2.** Dùng phép BĐSCTDòng đưa A về dạng bậc thang.
- **Bước 3.** Số chiều của W bằng số dòng khác 0 của dạng bậc thang hay $r(A)$ và các vector dòng đó tạo thành **cơ sở** của W.

Example 5.67. Tìm cơ sở cho KGC của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi

$$u_1 = (1,2,1,1)\,;u_2 = (3,6,5,7)\,;u_3 = (4,8,6,8)\,;u_4 = (8,16,12,20)\,.$$

Giải.

Ta có $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó $\dim W = r(W) = 3$ với cơ sở

$$\{(1,2,1,1)\,;(0,0,1,2)\,;(0,0,0,1)\}$$

và do $\{u_1, u_2, u_3\}$ ĐLTT nên nó cũng đồng thời là cơ sở của W.

Exercise 5.68. Tìm CS cho KGC của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector

$$v_1 = (1,-2,-1,3)\,;v_2 = (2,-4,-3,0)\,;v_3 = (3,-6,-4,4)\,.$$

Giải.

Ta có $W = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

có $\dim W = 3$ và cơ sở là $\{u_1, u_2, u_3\}$ trong đó

$$u_1 = (1,-2,-1,3)\,;u_2 = (0,0,-1,-6)\,;u_3 = (0,0,0,1)$$

và do $\{u_1, u_2, u_3\}$ ĐLTT nên nó cũng đồng thời là cơ sở của W.

Definition 5.69. ***Không gian nghiệm.***

Là tập tất cả các nghiệm của hệ PhgTrTT thuần nhất $AX = B$.

Example 5.70. Cho hệ

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 - \ 3x_3 + \ 5x_4 = 0 \\ x_1 + \ 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0 \\ 3x_1 + \ 5x_2 + \ x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + \ 4x_3 + -7x = 0 \end{cases}$$

Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hay hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 + & 5x_4 = 0 \\ & x_2 - & 10x_3 + & 17x_4 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, ta được

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta \end{cases}$$

Do đó hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Vậy $W = \{(-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha(-17, 10, 1, 0) + \beta(29, -17, 0, 1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \langle(-17, 10, 1, 0); (29, -17, 0, 1)\rangle.$

Đặt $u_1 = (-17, 10, 1, 0); u_2 = (29, -17, 0, 1)$.

Ta có $W = \langle u_1, u_2\rangle$, hơn nữa u_1, u_2 ĐLTT do

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \Rightarrow (-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ là CS của W và $\dim W = 2$.

• Khi đó, ta nói $\{u_1, u_2\}$ là một **hệ nghiệm cơ bản** của hệ $AX = 0$.

Theorem 5.71. *Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ và $S_A$là tập tất cả các nghiệm của hệ PTTT thuần nhất : $AX = 0$*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

*Khi đó S_A là KGC của K^n cũng đồng thời là **KG nghiệm** của hệ $AX = 0$.*

⋆ Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của KG nghiệm $\mathbf{AX = 0}$.

⋄ **Bước 1.** Giải hệ $AX = 0$ và tìm nghiệm tổng quát.

⋄ **Bước 2.** Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ AX=0. Nếu nghiệm tổng quát có k ẩn tự do. Ta được nghiệm u_r, khi đó

$$\{u_{r1}, u_{r2}, ..., u_{rk}\}$$

là hệ nghiệm cơ bản;

Không gian nghiệm S_A có

$$\dim S_A = k$$

và nhận $\{u_{r1}, u_{r2}, ..., u_{rk}\}$ làm một cơ sở.

Exercise 5.72. Tìm số chiều & cơ sở của KG nghiệm cho các hệ PTTT sau:

$$1)\begin{cases} 6x_1- \ 3x_2+ \ 4x_3- \ 3x_4 \qquad = 0 \\ 3x_1 \qquad + \ 2x_3 \qquad - \ 3x_5 = 0 \\ 9x_1- \ 3x_2+ \ 6x_3- \ 3x_4- \ 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1+ \ 2x_2+ \ 3x_3+ \ 4x_4+ \ 5x_5 = 0 \\ 2x_1+ \ 3x_2+ \ 4x_3+ \ 5x_4+ \ x_5 = 0 \\ 3x_1+ \ 4x_2+ \ 5x_3+ \ x_4+ \ 2x_5 = 0 \\ x_1+ \ 3x_2+ \ 5x_3+ \ 12x_4+ \ 9x_5 = 0 \\ 4x_1+ \ 5x_2+ \ 6x_3- \ 3x_4+ \ 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 2x_1- \ 3x_2+ \ 4x_3+ \ 3x_4 = 0 \\ 3x_1- \ 6x_2+ \ 4x_3+ \ 2x_4 = 0 \\ 4x_1- \ 3x_2+ \ 17x_3+ \ 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad +x_5 = 0 \\ x_2 \quad -x_4 \quad +x_6 = 0 \\ x_1- \ x_2 \ +x_3 \quad -x_6 = 0 \\ x_1 \quad -x_4 \ +x_5 = 0 \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} 5x_1+ \ 6x_2- \ 2x_3+ \ 7x_4+ \ 4x_5 = 0 \\ 2x_1+ \ 3x_2- \ x_3+ \ 4x_4+ \ 2x_5 = 0 \\ 7x_1+ \ 9x_2- \ 3x_3+ \ 5x_4+ \ 6x_5 = 0 \\ 5x_1+ \ 9x_2- \ 3x_3+ \ x_4+ \ 6x_5 = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nên hệ trở thành

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \mu$ là các ẩn tự do ta được

$$\dim S_A = 3$$

và

$$\begin{cases} x_2 = 2x_5 - x_4 = 2\mu - \beta \\ x_1 = \dfrac{3x_5 - 2x_3}{3} = \dfrac{3\mu - 2\alpha}{3} \end{cases}$$

Do đó $S_A = \left\{ \left(\mu - \dfrac{2}{3}\alpha, 2\mu - \beta, \alpha, \beta, \mu\right) \middle| \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$$\Rightarrow W = \langle (1,0,0,0,1)\,;(-2,0,3,0,0)\,;(0,-1,0,1,0) \rangle$$

Đặt $u_1 = (1, 0, 0, 0, 1)\,; u_2 = (-2, 0, 3, 0, 0)\,; u_3 = (0, -1, 0, 1, 0)\,.$

Ta có $W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ và W nhận $\{u_1, u_2, u_3\}$ làm cơ sở.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ ta được hệ rút gọn

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 15x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 12x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_5 = \beta$ ta được

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = \beta \\ x_2 = -2x_3 - 12x_5 = -2\alpha - 12\beta \\ x_1 = x_3 + 15x_5 = \alpha + 15\beta \end{cases}$$

Vậy hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do và có hệ nghiệm là

$$S_A = \{(\alpha + 15\beta, -2\alpha - 12\beta, \alpha, \beta, \beta)\,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow W = \langle (1, -2, 1, 0, 0)\,; (15, -12, 0, 1, 1) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$

có $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở và có $\dim S_A = 2$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -14 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ta có được hệ

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 - 2x_4 = 0 \\ 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_2 = \alpha$ và $x_4 = \beta$, ta được

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{5}{7}x_4 = -\dfrac{5}{7}\beta \\ x_1 = \dfrac{2}{7}x_4 + 2x_2 = 2\alpha + \dfrac{2}{7}\beta \end{cases}$$

Ta được KG nghiệm là

$$S_A = \left\{ \left(2\alpha + \frac{2}{7}\beta, \alpha, -\frac{5}{7}\beta, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow W = \langle (2, 1, 0, 0)\,; (2, 0, -5, 0) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$

có $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở và có $\dim S_A = 2$.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ có được hệ rút gọn

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_5 = \alpha, x_6 = \beta$, ta được

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = \alpha \\ x_3 = x_4 = \alpha \\ x_2 = x_5 - x_6 = \alpha - \beta \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Ta được KG nghiệm là

$$S_A = \{(0, \alpha - \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \beta)\, |\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow W = \langle (0, 1, 0, 0, 0, -1)\, ; (0, 1, 1, 1, 1, 0) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$

có $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở và có $\dim S_A = 2$.

5) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ta được hệ

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha$ và $x_5 = \beta$, ta được

$$\begin{cases} x_1 = x_4 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{3}x_3 - \dfrac{2}{3}x_5 = \dfrac{1}{3}\alpha - \dfrac{2}{3}\beta \end{cases}.$$

Do đó KG nghiệm là

$$S_A = \left\{ \left(0, \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta, \alpha, 0, \beta\right) |\alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow W = \langle (0, 1, 3, 0, 0)\, ; (0, 2, 0, 0, -3) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$

có $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở và có $\dim S_A = 2$.

Không gian tổng.

Definition 5.73. *Cho V là KG vector và $W_1, W_2, ..., W_n$ là các KGC của V. Đặt*

$$W = \left\{u_1 + u_2 + ... + u_n \left| u_i \in W_i, i \in \overline{1, .., n} \right.\right\}.$$

Khi đó, W là KGC của V sinh bởi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$.

*Ta gọi W là **KG tổng** của $W_1, W_2, ..., W_n$, ký hiệu là $\sum\limits_{i=1}^{n} W_i$.*

Corollary 5.74. *Với $W_1, W_2, ..., W_n$ là các KGC của V, 2 mệnh đề sau tương đương nhau:*

i) $W_1 + W_2 + ... + W_n \leq U$

ii) $W_i \leq U$, $\forall i \in \overline{1, .., n}$

Lemma 5.75. *Cho $W_1, W_2, ..., W_n$ là các KGC của V với $W_i = \langle S_i \rangle$. Khi đó*

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \left\langle \cup_{i=1}^{n} S_i \right\rangle.$$

Đặc biệt, nếu các KGC W_i đều hữu hạn chiều thì KG tổng $W = \sum\limits_{i=1}^{n} W_i$ cũng hữu hạn chiều và

$$\dim W \leq \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$$

Example 5.76. Cho KG $\mathbb{R}^4$ với các vector

$$u_1 = (1, 2, 1, 1)\,; u_2 = (3, 6, 5, 7)\,; u_3 = (4, 8, 6, 8)\,; u_4 = (8, 16, 12, 16)$$

$$\text{và } v_1 = (1, 3, 3, 3)\,; v_2 = (2, 5, 5, 6)\,; v_3 = (3, 8, 8, 9)\,; v_4 = (6, 16, 16, 18)$$

Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ và $W_2 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Tìm một cơ sở và xác định số chiều của các KG $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$.

Giải. Ta có

1) W_1 là KG dòng của

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó W_1 có $\dim W_1 = 2$ và có một cơ sở là $\{(1, 2, 1, 1)\,; (0, 0, 1, 2)\}$.

2) W_2 là KG dòng của

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 6 & 16 & 16 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W_2 có $\dim W_2 = 2$ và có một cơ sở là $\{(1,3,3,3);(0,1,1,0)\}$.

3) KG $W_1 + W_2$ sinh bởi các vector

$$(1,2,1,1);(0,0,1,2);(1,3,3,3);(0,1,1,0).$$

$W_1 + W_2$ là KG dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó $W_1 + W_2$ có $\dim(W_1 + W_2) = 3$ và có một cơ sở là

$$\{(1,2,1,1);(0,1,1,0);(0,0,1,2)\}.$$

4) Xét $\mathcal{W} = W_1 \cap W_2$ và $u \in \mathcal{W}$. Khi đó tồn tại $\mu_i \in \mathbb{R}$ với $i \in \overline{1,2,3,4}$ sao cho

$$\begin{cases} u = & \mu_1 w_1 + \mu_2 wu & \in W_1 \\ u = & \mu_3 w_3 + \mu_4 w_4 & \in W_2 \end{cases}$$

Trong đó $w_1 = (1,2,1,1); w_2 = (0,0,1,2); w_3 = (1,3,3,3)$ và $w_4 = (0,1,1,0)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \mu_1(1,2,1,1) + \mu_2(0,0,1,2) \\ \mu_1 = \mu_3 \\ 2\mu_1 = 3\mu_3 + \mu_4 \\ \mu_1 + \mu_2 = 3\mu_3 + \mu_4 \\ \mu_1 + 2\mu_2 = 3\mu_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \mu_1(1,2,1,1) + \mu_2(0,0,1,2) \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -\mu_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \mu(1,2,2,3) \text{ với } \mu \in \mathbb{R}$$

Do đó $W_1 \cap W_2 = \{\mu(1,2,2,3) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,2,3) \rangle$.

Vậy $W_1 \cap W_2$ có số chiều là 1 và có 1 cơ sở là $\{(1,2,2,3)\}$.

Example 5.77. Gọi W_1, W_2 lần lượt là tập các vector trong $\mathbb{R}^4$ thỏa các hệ PTTT thuần nhất

$$(W_1): \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \end{cases} \qquad \text{và} \qquad (W_4): \ x_1 = x_2 = x_3$$

Tìm một cơ sở & xác định số chiều của mỗi KG $W_1 + W_2$ và $W_1 \cap W_2$.

Giải. Ta có

1) $(W_1): \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta) \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow W_1 = \{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta) \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1, 0); (1, -1, 0, 1) \rangle$.

2) Tương tự với $(W_4): \ x_1 = x_2 = x_3 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \beta) \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow W_1 = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \beta) \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1, 0); (0, 0, 0, 1) \rangle$.

3) Xét $W_1 + W_2$, là KG sinh bởi tập

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 0); (1, -1, 0, 1); (0, 0, 0, 1)\}.$$

$W_1 + W_2$ là KG dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $\mathcal{B}$ ĐLTT và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$.

Ta có $\dim (W_1 + W_2) = 3$.

4) Xét $W_1 \cap W_2$, là KG nghiệm của hệ $\begin{cases} x_1 - \quad x_3 - \quad x_4 = \ 0 \\ x_2 - \quad x_3 - \quad x_4 = \ 0 \\ x_2 = \quad x_2 = \quad x_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, 0) \,|\alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Do đó $W_1 \cap W_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha, 0) \,|\alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1, 0) \rangle$.

Vậy $W_1 \cap W_2$ có $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$ và một cơ sở là $\{(1, 1, 1, 0)\}$.

Example 5.78. Trong KG hàm thực các đa thức bậc 2, ký hiệu là $\mathbb{R}_2[x]$, xét $W_1 = \left\langle x + 1, x^2 - 2x \right\rangle$ và $W_2 = \left\langle x^2 - 1, x^2 + 2x - 1 \right\rangle$.

1) CMR: $W_1 + W_2 = \mathbb{R}_2[x]$

2) Viết đa thức $p(x) = ax^2 + bx + c$ dưới dạng

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) \ \text{ với } p_1(x) \in W_1, p_2(x) \in W_2$$

Giải.

Đặt $q_1(x) = x + 1, q_2(x) = x^2 - 2x, q_3(x) = x^2 - 1$ và $q_4(x) = x^2 + 2x - 1$.

1) $W_1 + W_2$ sinh bởi các vector q_1, q_2, q_3, q_4 nên $p(x) = ax^2 + bx + c \in W_1 + W_2$ khi và chỉ khi

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, ..., 4} \text{ sao cho phương trình}$$

$$\alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x) + \alpha_4 q_4(x) = p(x)$$

có nghiệm. Xét

$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) x^2 + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_4) x + (\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4) = ax^2 + bx + c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = b \\ \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 = c \end{cases}$$

Hệ trên luôn có nghiệm với

$$\begin{cases} \alpha_4 = \mu \\ \alpha_3 = \dfrac{2a + b - c}{3} - 5\mu \\ \alpha_2 = \dfrac{a - b + c}{3} + 2\mu \\ \alpha_1 = \dfrac{2a + b + c}{3} - 2\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Vậy mọi đa thức có dạng $p(x) = ax^2 + bx + c$ đều $\in W_1 + W_2$.

Do đó, ta được

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}_2[x]$$

2) Từ kết quả $p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x) + \alpha_4 q_4(x)$, ta tìm $p_1 \in W_1, p_2 \in W_2$ sao cho

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

Ta có

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2a + b + 2c - 6\mu}{3}(x+1) + \frac{a - b + c + 6\mu}{3}\left(x^2 - 2x\right) + \frac{2a + b - c - 15\mu}{3}\left(x^2 - 1\right) + \\ &+ 3\mu\left(x^2 + 2x\right) - 1 \\ &= \left[\frac{a - b + c + 6\mu}{3}x^2 + (b - 6\mu)x + \frac{2a + b + 2c - 6\mu}{3}\right] + \\ &= + \left[\frac{2a + b - c + 6\mu}{3}x^2 + 6\mu x + \frac{2a + b - c - 6\mu}{3}\right] = p_1(x) + p_2(x) \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} p_1(x) = \dfrac{a - b + c + 6\mu}{3}x^2 + (b - 6\mu)x + \dfrac{2a + b + 2c - 6\mu}{3} \in W_1; \\ p_2(x) = \dfrac{2a + b - c + 6\mu}{3}x^2 + 6\mu x + \dfrac{2a + b - c - 6\mu}{3} \in W_2 \end{cases}$$

Nhận xét, trong các ví dụ trên, ta thấy có mối tương quan sau:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Ta sẽ tổng quát hóa nhận xét trên thành Định lý.

Theorem 5.79. *Cho W_1, W_2 là 2 KGC hữu hạn chiều của V. Khi đó $W_1 + W_2$ là KGC hữu hạn chiều của V và*

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Definition 5.80. *Cho $W_1, W_2, ..., W_n$ là các KGC của V. Ta nói W là **KG tổng trực tiếp** của $W_1, W_2, ..., W_n$. Ký hiệu là*

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + ... + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1,..,n}$

$$W_i \cap \left(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \right) = \{0\}$$

Hơn thế nữa, $W = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ nếu và chỉ nếu

$$\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + ... + \dim W_n$$

và với mọi vector $u \in W$ đều được biểu diễn dưới dạng

$$u = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$

trong đó $u_i \in W_i$ với mọi $i \in \overline{1,..,n}$.

Example 5.81. CMR $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$, trong đó

$$W_1 = \langle u_1 = (2,3,11,5)\,; u_2 = (1,1,5,2)\,; u_3 = (0,1,1,1) \rangle\,;$$
$$W_2 = \langle v_1 = (2,1,3,2)\,; v_2 = (1,1,3,4)\,; u_3 = (5,2,6,2) \rangle\,.$$

Giải. Ta có

1) Số chiều và cơ sở của W_1 là

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy W_1 có $\dim W_1 = 2$ và có cơ sở là

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,4,1)\,; (0,1,1,1)\}$$

2) Số chiều và cơ sở của W_2 là

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -9 & -18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó W_2 có $\dim W_2 = 2$ và có cơ sở là

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0,-2);(0,1,3,6)\}$$

3) Xét KG $W_1 + W_2$ sinh bởi tập $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ nên KG dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vậy $\dim(W_1 + W_2) = 4$ và do đó $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. Mặt khác,

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim W_1 + \dim W_2$$

nên do đó

$$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$$

Exercise 5.82. Trong $V = K^4$, cho

$$u = (1,1,0,-1), v = (1,0,0,-1), w = (1,0,-1,0)$$

Đặt $U = \langle u, v, w \rangle$ và

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

1) CMR W là một KGC của V.

2) Tìm một cơ sở cho mỗi KGC $U, W, U + W$ và $U \cap W$.

Giải. Ta có

1)$0 = (0,0,0,0) \in W$ hay $W \neq \emptyset$.

Mặt khác $\forall x, y \in W$ và $\alpha \in \mathbb{C}$ bất kỳ thì

$$(\alpha x_1 + y_1) + (\alpha x_2 + y_2) - (\alpha x_3 + y_3) + 2(\alpha x_4 + y_4)$$

$$= \alpha(x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4) + (y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4) = 0$$

Do đó $\alpha x + y \in W$ và W là KGC trong $V = K^4$.

2a) Cơ sở cho KGC của $U = \langle u, v, w \rangle$.

Đặt A là ma trận có được bằng cách sắp xếp $\{u, v, w\}$ thành các cột, B, X thỏa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Ta có $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 \\ -1 & -1 & 0 & a_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & a_2 + a_4 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & a_2 + a_4 \end{array}\right)$

Hệ $AX = B$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$a_2 + a_4 = a_2 - a_1 - a_3 \Leftrightarrow a_1 + a_3 + a_4 = 0.$$

Vậy

$$U = \langle u, v, w \rangle = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \,|x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Chọn $x_2 = \alpha, x_3 = \beta, x_4 = \lambda$ ta được $x_1 = -x_3 - x_4 = -\lambda - \beta$

Do đó cơ sở cho KGC U là $\{\,(-\lambda - \beta, \alpha, \beta, \lambda)|\, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$$\Rightarrow \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle (1, 0, 0, -1)\,; (0, 1, 0, 0)\,; (1, 0, -1, 0) \rangle$$

$2b$) Cơ sở cho KG của $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\,|x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

Chọn $x_2 = \alpha, x_3 = \beta, x_4 = \lambda$ ta được $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 = -\alpha - 2\lambda + \beta$.

Do đó cơ sở cho KGC của W là

$$\{\,(-\alpha - 2\lambda + \beta, \alpha, \beta, \lambda)|\, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow W = \langle (1, 0, 1, 0)\,; (1, -1, 0, 0)\,; (2, 0, 0, -1) \rangle$$

$2c$) Cơ sở cho KG của $U + W$ sinh KG dòng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_6 := d_6 - 2d_5 \\ d_5 := d_5 - d_1}]{\substack{d_1 := d_1 + d_2 \\ d_4 := d_4 - d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $U + W$ có cơ sở là

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0)\,; (0, 1, 0, 0)\,; (0, 0, 1, 0)\,; (0, 0, 0, 1)\}$$

$2d$) Cơ sở cho KG của $U \cap W$, lấy $\omega \in U \cap W$, tức

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(-\alpha - \beta, 2\alpha - \beta, \alpha, \beta) \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Do đó

$$U \cap W = \{(-\alpha - \beta, 2\alpha - \beta, \alpha, \beta) \,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 1, 0) \,; (1, 1, 0, -1) \rangle$$

Vậy $U \cap W$ có $\dim (U \cap W) = 2$ và có một cơ sở là

$$\{(1, -2, 1, 0) \,; (1, 1, 0, -1)\}$$

Tọa độ & ma trận chuyển cơ sở.

Theorem 5.83. *Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là cơ sở của KG vector V trên K. Khi đó với mọi $u \in V$, phương trình*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = u$$

luôn luôn có duy nhất nghiệm. Gọi $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0\right)$ là nghiệm của phương trình. Ta đặt

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \vdots \\ \alpha_n^0 \end{pmatrix}$$

và gọi là tọa độ của u trong cơ sở $\mathcal{B}$. Do đó

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \vdots \\ \alpha_n^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + ... + \alpha_n^0 u_n.$$

Lưu ý. Tọa độ của vector trong cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ chỉ ***có nghĩa*** khi đã quy định thứ tự giữa các vector trong cơ sở đó. Ta còn gọi đó là ***cơ sở được sắp*** và thường dùng ký hiệu $(u_1, u_2, ..., u_k)$ để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, ..., u_k$.

Corollary 5.84. *Giả sử $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là một cơ sở của $W \leq K^n$, trong đó*

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_{11}, u_{21}, ..., u_{n1}) \,; \\ u_2 &= (u_{21}, u_{22}, ..., u_{n2}) \,; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &= (u_{k1}, u_{2k}, ..., u_{nk}) \,. \end{aligned}$$

Khi đó với mọi $u = (b_1, b_2, .., b_n) \in W$*, ta có*

$$[u]_{\mathcal{B}} = X \Leftrightarrow UX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

trong đó

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nk} \end{pmatrix}$$

là ma trận có được bằng cách dựng $u_1, u_2, ..., u_k$ *thành các cột.*

Example 5.85. Trong KG $\mathbb{R}^3$, cho các vector $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1)$ và $u_3 = (2, 5, 3)$.

1) CMR $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

1) Tìm tọa độ của vector $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

1) Ma trận A thu được bằng cách sắp xếp u_1, u_2, u_3 thành các dòng có định thức khác 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Do đó, ta có $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Xét $v = (a, b, c)$, ta có

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = v$$

Xét phương trình $UX = B$, trong đó

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp Gauss, ta có

$$(U|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & -2a + b \\ 0 & 0 & 1 & -a + c \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 \quad = -2a + b \\ \alpha_3 \ = -a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4a - b - c \\ \alpha_2 = -a + b - c \\ \alpha_3 = -a + c \end{cases}$$

Do đó, với $v = (a, b, c)$; ta có

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a - b - c \\ -a + b - c \\ -a + c \end{pmatrix}$$

Conjecture 5.86. ***Nhận xét.***

1) *Đối với cơ sở chính tắc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ của không gian K^n, với mọi $u = (b_1, b_2, ..., b_n) \in K^n$. Ta có*

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nói cách khác, tọa độ của vector u trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của K^n chính là ma trận cột tương ứng của u bằng cách dựng các vector $e_1, e_2, ..., e_n$ thành các cột của ma trận cấp n.

2) *Đối với cơ sở chính tắc*

$$\mathcal{B}_0 = (E_{11}, ..., E_{1n}; E_{21}, ..., E_{2n}; ....; E_{m1}, ..., E_{mn})$$

của KG $M_{m\times n}(K)$ các ma trận loại $m \times n$ các hệ số trong K và $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ta có

$$[A]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

3) *Trong trường hợp không gian các đa thức theo x có cấp không quá n - $K_n[x]$, cơ sở chính tắc là*

$$\mathcal{B}_0 = \left(1, x, x^2, .., x^n\right)$$

Khi đó với mọi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0 \in K_n[x]$, có tọa độ

$$[p(x)]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Example 5.87. Trong KG $M_2(\mathbb{R})$, xét $W = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$; trong đó

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) CMR $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3)$ là một cơ sở của W.

2) Kiểm tra xem ma trận $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ có thuộc W không, nếu có hãy tìm tọa độ của A trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

1) Ta cần CM $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3)$ ĐLTT. Xét

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Vậy $\mathcal{B} = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ ĐLTT và do đó là một cơ sở của W.

2) Xét phương trình $\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3 = A$

$$\Leftrightarrow \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 + 2\mu_2 & = -8 \\ \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 & = 0 \\ 2\mu_1 + 3\mu_2 + 2\mu_3 & = 0 \\ -\mu_1 - 2\mu_2 & = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -6 \\ \mu_2 = -1 \\ \mu_3 = \ 5 \end{cases}$$

Vì phương trình trên có nghiệm nên do đó $A \in W$.

Khi đó tọa độ của A trong cơ sở $\mathcal{B}$ chính là nghiệm của phương trìh trên, do đó

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Example 5.88. Trong KG các đa thức $\mathbb{R}_2[x]$, xét các vector

$$g_0(x) = 1; \quad g_1(x) = x + 5; \quad g_2(x) = (x+5)^2$$

1) CMR $\mathcal{B} = \langle g_0, g_1, g_2 \rangle$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$

2) Tìm tọa độ của vector $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

1) Ta có $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$. Để CM $\mathcal{B}_0 = (g_0, g_1, g_2)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$, ta chỉ cần CM $\mathcal{B}$ ĐLTT. Ta có:

$$\alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = 0.$$

Khi đó

$$\alpha_0 + \alpha_1(x+5) + \alpha_2(x+5)^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $y = x + 5$ thì y có thể nhận giá trị trong $\mathbb{R}$ nên

$$\alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Do đó $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Vậy $\mathcal{B}$ ĐLTT.

2) Xét $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$. Ta có $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = p(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = a_0 - 5a_1 + 25a_2 \\ \alpha_1 = a_1 - 10a_2 \\ \alpha_2 = a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 - 5a_1 + 25a_2 \\ a_1 - 10a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Example 5.89. Trong KG $\mathbb{R}_3[x]$, xét KGC $W = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$, trong đó

$$p_1(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1;\ p_2(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1;\ p_3(x) = 3x^3 + 3x^2 - x + 2$$

1) CMR $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ là cơ sở của W.

2) Tìm điều kiện để $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$. Tìm $[p(x)]_{\mathcal{B}}$.

Giải. Ta có

$$p(x) \in W \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

sao cho $\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = p(x)$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) x^3 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) +$

$\qquad + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = c \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = d \end{cases}$$

Bằng phương pháp Gauss, ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = a \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2a - b \\ \alpha_3 = b - c - a \\ 0 = d + 2c - 3b - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2a - b + 3c}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{5a - 4b + 3c}{3} \\ \alpha_3 = -a + b - c \end{cases}$$

với điều kiện $d + 2c - 3b - 3a = 0$

1) Chọn $p(x) = 0$, khi đó $a = b = c = d = 0$ thì hệ trên có nghiệm tầm thường.

Vậy $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ ĐLTT và do đó

$$\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x))$$

là cơ sở của W.

2) Điều kiện để hệ có nghiệm hay để $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$ là

$$d + 2c - 3b - 3a = 0$$

Khi đó, tọa độ cần tìm là

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a - b + 3c \\ 5a - 4b + 3c \\ -3a + 3b - 3c \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển cơ sở.

Theorem 5.90. *Cho V là KG vector có $\dim V = n$ và hai cơ sở $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, ..., u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Với mỗi $j \in \overline{1, n}$ bất kỳ, đặt*

$$[v_j]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}, j \in \overline{1, n}$$

và P là ma trận vuông cấp n có các cột lần lượt là $[v_1]_{\mathcal{B}_1}, [v_2]_{\mathcal{B}_1}, ..., [v_n]_{\mathcal{B}_1}$ nghĩa là

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó, P khả nghịch và là ma trận duy nhất thỏa $\forall u \in V$, $[u]_{\mathcal{B}_1} = P[u]_{\mathcal{B}_2}$.

*P được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu là*

$$(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2).$$

Như vậy

$$\forall u \in V,\ [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)\,[u]_{\mathcal{B}_2}.$$

Mệnh đề. *Cho V là KG vector hữu hạn chiều và $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$,$\mathcal{B}_3$ là 3 cơ sở của V. Khi đó*

1) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$

2) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Corollary 5.91. *Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, ..., u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$ là hai cơ sở của KG K^n. Gọi $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ là cơ sở chính tắc của K^n. Ta có*

i) $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)$ *là ma trận cột tạo được bằng cách dựng các vector $u_1, u_2, .., u_n$ thành các cột.*

ii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}$

iii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)$

iv) Nếu qua một số phép BĐSC trên dòng, ma trận $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)$ trở thành ma trận đơn vị I_n thì cũng qua đó nó sẽ biến ma trận $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)$ thành ma trận $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, tức là

$$((\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)\,|(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)) \overset{BDSCTD}{\longrightarrow} (I_n\,|(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2))$$

Example 5.92. Trong KG $\mathbb{R}^3$, cho các vector sau

$$u_1 = (1, 2, 1)\,; u_2 = (1, 3, 1)\,; u_3 = (2, 5, 3)$$

1) CMR $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của $\mathbb{R}^3$

3) Tìm tọa độ vector $u = (1, 2, -3)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải. (Số liệu đã cho giống như các ví dụ trước)

1) Dễ dàng kiểm tra $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Ta xét $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở bằng cách xếp các vector u_1, u_2, u_3 thành các cột.

Do đó ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}_0$ là

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Do $\mathcal{B}_0$ là CS chính tắc của $\mathbb{R}^3$ nên

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)\,[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Các bài tập.

Exercise 5.93. Tìm tọa độ của $v = [2,3]$ trong cơ sở $\mathcal{T} = \langle u_1, u_2 \rangle$ với $u_1 = (2,1)$ và $u_2 = (1,-1)$

Giải.

Ta có (u_1, u_2) là một CS trong $\mathbb{R}^2$ do

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Xét ma trận chuyển cơ sở

$$(\mathcal{T} \to \mathcal{T}_0) = (\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Do đó tọa độ của $v = [2,3]$ trong $\mathcal{T}$ là

$$[v]_{\mathcal{T}} = (\mathcal{T} \to \mathcal{T}_0)\,[v]_{\mathcal{T}_0} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Exercise 5.94. Cho $a = (a_1, a_2)$ và $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ thỏa

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$
$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1$$

CMR $\{a, b\}$ là một CS của $\mathbb{R}^2$. Tìm tọa độ của $c = (c_1, c_2)$ trong CS (a, b).

Exercise 5.95. Các ma trận sau là phụ thuộc TT hay ĐLTT

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Giải.

Xét phương trình $aA + bB + cC = 0$ tương đương với

$$\begin{bmatrix} a + b + 3c & 2a + 3b + 8c & -3a - 4b - 11c \\ 4a + 6b + 16c & 5b + 10c & a + 4b + 9c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+3c &= 0 \\ 2a+3b+8c = 0 \\ 3a+4b+11c = 0 \\ 4a+6b+16c = 0 \\ 5b+10c = 0 \\ a+4b+9c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Do đó các ma trận này phụ thuộc tuyến tính.

Exercise 5.96. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Tìm tọa độ của A trong cơ sở

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Exercise 5.97. Cho các vector $u_1 = (1, 1, -2, 1)$; $u_2 = (3, 0, 4, -1)$; $u_3 = (-1, 2, 5, 2)$ và $v_1 = (4, -5, 9, -7)$; $v_2 = (3, 1, -4, 4)$; $v_3 = (-1, 1, 0, 1)$.

1) CMR $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ ĐLTT

2) Kiểm tra xem tập hợp $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ có phải là cơ sở của KGC W trong K^4 sinh bởi $\{u_1, u_2, u_3\}$ hay không?

Giải.

Ta có

Exercise 5.98. Cho KG $\mathbb{R}^3$ cho các vector phụ thuộc tham số sau

$$u_1 = (1, 1+m, 2)\,;\; u_2 = (1, -1, -m)\,;\; u_3 = (1-m, 2, 3)\,,\; \text{với } m \in \mathbb{R}$$

1) Tìm m để $\mathcal{B}(m) = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Đặt $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(1)$ và $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(-1)$. CMR $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là 2 cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$ và từ $\mathcal{B}_2$ sang $\mathcal{B}_0$. Trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

4) Từ đó tính $[u]_{\mathcal{B}_1}$ và $[u]_{\mathcal{B}_2}$ với $u = (1, 0, 1)$.

Giải. Xét ma trận A tạo thành bằng cách sắp xếp u_1, u_2, u_3 thành các dòng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 2 \\ 1 & -1 & -m \\ 1-m & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Ta có $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1+m & 2 \\ 1 & -1 & -m \\ 1-m & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2+m & 2+m \\ 1 & -1 & -m \\ 1-m & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (m+2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -m \\ 1-m & 2 & 3 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & m-1 & -m \\ 1-m & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)\left[(m-1)^2 - 1\right] = m(m+2)(m-2).$$

Do đó $\mathcal{B}(m)$ là CS của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \{0, \pm 2\}.$$

2) Tại $m = 1, m = -1$ thì $\det A \neq 0$ nên $\mathcal{B}(m)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

3) Ta có

$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(1) = \{(1,2,2);(1,-1,-1);(0,2,3)\}$

$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(-1) = \{(1,0,2);(1,-1,1);(2,2,3)\}$

$$\Rightarrow (\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

và $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

4) Vậy với $u = (1,0,1)$ thì

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$[u]_{\mathcal{B}_2} = (\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_0)[u]_{\mathcal{B}_0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tương tự

$$[u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercise 5.99. Cho W là KGC của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector

$$u_1 = (1,2,2,1);\ u_2 = (0,2,0,1);\ u_3 = (-2,0,-4,3)$$

1) CMR $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là CS của W. Tìm điều kiện để vector $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$. Từ đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

2) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,3)$. CMR $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ là CS của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Giải.

1) Với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$

$$\Leftrightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

có nghiệm. Xét

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x_1 \\ 2 & 2 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & -4 & x_3 \\ 1 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & -6 & x_2 - 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3x_1 - x_2 + 2x_4}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{-6x_1 + 5x_2 - 4x_4}{6} \\ \alpha_3 = \dfrac{-x_2 + 2x_4}{6} \\ x_3 = 2x_1 \end{cases}$$

Nếu chọn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ thì hệ chỉ có 1 nghiệm tầm thường nên $\mathcal{B}$ ĐLTT. Mà $\mathcal{B}$ là tập sinh của W nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

Điều kiện để $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ là $x_3 = 2x_1$. Do đó

$$[u]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 4x_4 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_4 \\ -x_2 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

2) Dễ thấy các vector v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $x_3 = 2x_1$ nên chúng đều thuộc W.

Hơn thế nữa, các vector v_1, v_2, v_3 ĐLTT nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W.

Thay tọa độ các vector v_1, v_2, v_3 lần lượt vào biểu thức

$$[v_i]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 4x_4 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_4 \\ -x_2 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

ta được

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 5.100. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. CMR họ các đa thức

$$\mathcal{C} = \left\{1, t - \alpha, (t - \alpha)^2, ..., (t - \alpha)^n\right\}$$

tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}_n[t]$.

Giải.

Ta có $\dim \mathbb{R}_n[t] = n + 1$. Xét

$$\mu_0 + \mu_1 (t - \alpha) + \mu_2 (t - \alpha)^2 + ... + \mu_n (t - \alpha)^n = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Đặt $x = (t - \alpha)$, ta được

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + ... + \mu_n x^n = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

nên $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0$, do đó $\mathcal{C} = \left\{1, t - \alpha, (t - \alpha)^2, ..., (t - \alpha)^n\right\}$ ĐLTT hay $\mathcal{C}$ tạo thành một cơ sở trong $\mathbb{R}_n[t]$.

Exercise 5.101. Cho $V = \mathbb{R}_2[t]$ và các đa thức

$$g_1(x) = 2;\ g_2(x) = t + a;\ g_3(x) = t^2 + 2at + 3a^2.$$

1) CMR $\mathcal{B} = (g_1, g_2, g_3)$ là một cơ sở của V.

2) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$ nếu $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Giải. Ta có

1) Giả sử $\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 (t + a)^2 + \alpha_2 (t + a) + \left(2\alpha_1 + 2a^2\alpha_3\right) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Đặt $s = a + t, \beta_3 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2$ và $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2a^2\alpha_3$

$$\Leftrightarrow \beta_3 s^2 + \beta_2 s + \beta_1 = 0,\ \forall s \in \mathbb{R}$$

Do đó $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = \beta_3 = 0, \\ \alpha_2 = \beta_2 = 0, \\ \alpha_1 = \dfrac{1}{2}\beta_1 - a^2\alpha_3 = 0 \end{cases}$

Vậy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ hay $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính, $\mathcal{B}$ là cơ sở của V.

2) Ta có $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ nên

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) + \mu_3 g_3(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\mu_1 + a\mu_2 + 3a^2\mu_3 = a_0 \\ \mu_2 + 2a\mu_3 = a_1 \\ \mu_3 = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{2}a_0 - \dfrac{1}{2}a^2 a_2 - aa_1 \\ \mu_2 = a_1 - 2aa_2 \\ \mu_3 = a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [f(x)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_0 - a^2 a_2 - aa_1 \\ a_1 - 2aa_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Exercise 5.102. Cho KG $\mathbb{C}^3$ với các vector sau

$$u_1 = (1, 0, i)\,;\ u_2 = (-2, 1+i, 0)\,;\ u_3 = (-1, 1, 1)\,;\ u_4 = \left(\sqrt{2}, i, 3\right)$$

1) Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2\rangle$ và $W_2 = \langle u_3, u_4\rangle$. Tìm cơ sở và số chiều cho các KGC $W_1 + W_2$ và $W_1 \cap W_2$

2) Kiểm tra xem vector $u_1 \in W = \langle u_2, u_3\rangle$?

3) Tìm một cơ sở cho KGC sinh bởi $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Giải. Ta có

1) Xét W_1 có KG dòng là

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -2 & 1+i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1+i & 2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 2i(1-i) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Ta có $\dim W_1 = 2$ và có cơ sở là $\mathcal{U}_1 = \{(1, 0, i)\,; (0, 1, 1+i)\}$

Tương tự W_2 có KG dòng là

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & i & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ i+\sqrt{2} & 0 & 3-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & (3-i)\left(\sqrt{2}-i\right) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \left(3\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & \left(3+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-i\right) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\right) - i\left(3+\sqrt{2}\right)}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\left(3\sqrt{2}+1\right) - i\left(3-\sqrt{2}\right)}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\right) - i\left(3+\sqrt{2}\right)}{3} \end{pmatrix}$$

Ta có $\dim W_1 = 2$ và có cơ sở là

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ \left(1, 0, \frac{\left(3\sqrt{2}+1\right) - i\left(3-\sqrt{2}\right)}{3}\right); \left(0, 1, \frac{\left(3\sqrt{2}+2\right) - i\left(3+\sqrt{2}\right)}{3}\right) \right\}$$

Xét $W_1 + W_2$ sinh bởi $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ nên có KG dòng là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & -\dfrac{\left(3\sqrt{2}+1\right) - i\left(3-\sqrt{2}\right)}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\right) - i\left(3+\sqrt{2}\right)}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $\dim(W_1 + W_2) = 3$ và có cơ sở là

$$\{(1, 0, i)\,; (0, 1, 1+i)\,; (0, 0, 1)\}$$

Xét $W_1 \cap W_2$. Ta có $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_2 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1$.

Tìm $\omega \in W_1 \cap W_2$, tồn tại $\lambda_i \in \mathbb{R}$ với $i \in \overline{1,4}$ thỏa

$$\begin{cases} \omega = \lambda_1 (1, 0, i) \\ \omega \end{cases}$$

Exercise 5.103. Trong K^4 cho các vector

$$u_1 = (1, 1, -1, 0)\,;\; u_2 = (-2, 3, 4, 1)\,;\; u_3 = (-1, 4, 3, 2)$$

$$v_1 = (1, 1, -1, -1)\,;\; v_2 = (2, 7, 0, 3)\,;\; v_3 = (2, 7, 0, 2)$$

và đặt $W = \langle \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \rangle$.

1) Kiểm tra xem $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ có phải cơ sở của W ?

2) Cho $u = (a, b, c, d) \in K^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và với điều kiện đó, hãy tìm $[x]_{\mathcal{B}}$.

3) Kiểm xem $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ là CS của W và tìm ma trận chuyển CS $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

4) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}, v, [w]_{\mathcal{A}}$ nếu biết

$$u = (a, b, c, d) \in W;\; [v]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ và } [w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.3.2 Ánh xạ tuyến tính

Definition 5.104. ChoV, W là KG vector trên trường K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa các điều kiện sau:

1) $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in V$.

2) $f(\alpha t) = \alpha f(t)$, $\forall \alpha \in K, \forall t \in V$.

Trong trường hợp $W = V$. Ta nói f là một ***toán tử tuyến tính*** trên V, hay f là một ***tự đồng cấu tuyến tính*** (hoặc ***biến đổi tuyến tính***).

Nếu $W = K$ thì ta nói f là một ***phiếm hàm tuyến tính*** trên V.

Tương ứng với khái niệm ánh xạ (đơn ánh, toàn ánh, song ánh), thì ánh xạ tuyến tính cũng có (đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu). 2 KG W và V là đẳng cấu, ký hiệu là $V \simeq W$.

Example 5.105. Các ánh xạ sau là tuyến tính

1. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ với
$$\varphi(x) = (x, 0, ..., 0)$$

2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ với
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x + x_2, 2x_1 - 3x_2)$$

3. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ với
$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 2x_2 - 3x_3, 3x_3 - x_1)$$

4. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ với
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 9x_2, x_1 + x_3)$$

5. $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ với
$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

Theorem 5.106. *Mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ đều **hoàn toàn xác định** bởi các vector của một CS nào đó trong V.*

Chứng minh. Xét họ $\{e_i\}$ là cơ sở chính tắc trong V và các vector $\{f(e_i)\}$, khi đó với mọi $i \in I$ thì mọi vector $x \in V$ đều được biểu diễn dưới dạng duy nhất

$$x = x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + ... + x_{in}e_n$$

do f là ánh xạ tuyến tính và các hệ số $x_{ij} \in K$ nên

$$f(x) = x_{i1}f(e_1) + x_{i2}f(e_2) + ... + x_{in}f(e_n)$$

là vector duy nhất và hoàn toàn xác định.

□

Theorem 5.107. *Mọi KG vector n chiều trên trường K đều đẳng cấu với K^n.*

Chứng minh. Giả sử $\{e_i\}$ được sắp trong V trên K. Khi đó mọi vector $x \in V$ đều được biểu diễn dưới dạng duy nhất

$$x = x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + ... + x_{in}e_n$$

và ánh xạ $\varphi : V \longrightarrow K$ xác định bởi ánh xạ đồng nhất

$$\varphi(x) = Id_V = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

là một đẳng cấu, nên ta được đpcm.

□

Theorem 5.108. *Cho V, W là 2 KG vector trên trường K, $a_1, a_2, ..., a_n$ là các vector ĐLTT của V và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các vector bất kỳ của W. Khi đó, tồn tại một ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ sao cho $f(a_i) = b_i$, $\forall i \in \overline{1, n}$.*

Nhận xét. *Nếu $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ là một CS của V thì ánh xạ f xác định duy nhất.*

Example 5.109. Cho các vector

$$u_1 = (1, -1, 1)\,;\ u_2 = (1, 0, 1)\,;\ u_3 = (2, -1, 3)$$

1) CM $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa

$$f(u_1) = (2, 1, -2)\,;\ f(u_2) = (1, 2, -2)\,;\ f(u_3) = (3, 5, -7)$$

Giải.

1) Do $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ và KG dòng của $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

nên $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là CS của $\mathbb{R}^3$.

2) Xét tọa độ của $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ bất kỳ theo CS $\mathcal{B}$, ta có

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Bằng PP Gauss, ta được

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \alpha_2 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \alpha_3 = -x_1 \quad + x_3 \end{cases} \Rightarrow [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Do đó, ta được

$$f(x) = (x_1 - x_2 - x_3)(2, 1, -2) + (2x_1 + x_2 - x_3)(1, 2, -2) + (x_3 - x_1)(3, 5, -7)$$

Vậy

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ x_2 + 2x_3,\ x_1 - 3x_3)$$

Definition 5.110. Ta nói 1 KG vector W là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính từ V vào W, ký hiệu là $L(V, W)$ nếu nó được trang bị các phép toán sau:

1) $\forall f, g \in L(V, W), \forall x \in V$ thì

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) $\forall f \in L(V, W), \forall x \in V, \forall \alpha \in K$ thì

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Nhân & ảnh của ánh xạ tuyến tính.

Definition 5.111. Cho $f : V \longrightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính.

1) Tập $Kerf = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ được gọi là **nhân** của ánh xạ f.

2) Tập $Imf = \{f(x) \mid x \in V\}$ được gọi là **ảnh** của ánh xạ f.

Example 5.112. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

• Ta tìm $Kerf$, ta có$(x_1, x_2) \in Kerf \Leftrightarrow f(x_1, x_2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Do đó $Kerf = \{0\}$.

• Tiếp theo, ta tìm Imf , ta có $\forall u = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3, u \in Imf$ thì có $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$f(x_1, x_2) = u = (t_1, t_2, t_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = t_1 \\ 2x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 - x_2 = t_3 \end{cases}$$

Hay ta cần tìm điều kiện cho hệ $AX = B$ có nghiệm, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Bằng phương pháp Gauss, ta được

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t_1 \\ 2 & -1 & t_2 \\ 1 & -1 & t_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t_1 \\ 0 & -5 & t_2 - 2t_1 \\ 0 & 0 & 5t_3 - 3t_2 + t_1 \end{array}\right)$$

Hệ này có nghiệm khi và chỉ khi

$$t_1 - 3t_2 + 5t_3 = 0$$

Do đó $Imf = \left\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \,|t_1 - 3t_2 + 5t_3 = 0\right\}$.

Proposition 5.113. *Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$. Ta nói*

1) *f là đơn cấu khi và chỉ khi $Kerf = 0$*

2) *f là toàn cấu khi và chỉ khi $Imf = W$*

3) *f là đẳng cấu khi và chỉ khi $Kerf = 0$ và $Imf = W$*

Theorem 5.114. *f là **đơn cấu** khi và chỉ khi f chuyển mọi tập con ĐLTT của V thành một tập con ĐLTT của W.*

Corollary 5.115. *f là **đơn cấu** khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho*

$$\{\, f(u) \mid u \in \mathcal{B}\}$$

là tập con ĐLTT trong W

Theorem 5.116. *f là **toàn cấu** khi và chỉ khi f biến mọi tập sinh của V thành tập sinh của W. Tức*

$$\langle f\langle S\rangle\rangle = f\langle\langle S\rangle\rangle = f(V) = W$$

hoặc ngược lại là

$$W = \langle f\langle \mathcal{B}\rangle\rangle = f\langle\langle \mathcal{B}\rangle\rangle = f(V)$$

với $\mathcal{B}$ là cơ sở của V.

Corollary 5.117. *f là **toàn cấu** khi và chỉ khi tồn tại một tập sinh S trong V sao cho $f(S)$ là tập sinh của W.*

Theorem 5.118. *Cho $f : V \longrightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính từ KG vector hữu hạn chiều V vào KG vector W. Khi đó Imf là KGC hữu hạn chiều của W và ta có đẳng thức :*

$$\dim V = \dim Kerf + \dim Imf$$

Trong ví dụ trên, ta có

$Kerf = \{0\}$ nên $\dim Kerf = 0$,

$Imf = \left\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \,|t_1 - 3t_2 + 5t_3 = 0\right\}$ nên $\dim Imf = 2$.

$\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

Definition 5.119. ***Hạng & số khuyết của ánh xạ tuyến tính.***

Cho $f : V \longrightarrow W$, khi đó ta định nghĩa

- Imf là ***hạng*** của ánh xạ, ký hiệu là $r(f)$
- $Kerf$ là ***số khuyết*** của ánh xạ, ký hiệu là $d(f)$

Example 5.120. Xây dựng ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ thỏa

$$f(1,-1,1) = (1,0) \text{ và } f(1,1,1) = (0,1)$$

Giải.

Ta đặt $f(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$ thỏa

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + a_{13} = 1 \\ a_{21} - a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_{11} - a_{12} + a_{13} = 1 \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_{21} - a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -a_{22} = -\dfrac{1}{2} \\ a_{13} = \alpha, a_{11} = \dfrac{1}{2} - \alpha \\ a_{23} = \mu, a_{21} = \dfrac{1}{2} - \mu \end{cases}$$

Chọn $\alpha = \mu = 1$, ta được $f(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)$

Xét U là KGC của V trên trường K, ta định nghĩa quan hệ tương đương $\sim$ của phép toán sau

$$\forall x, y \in V,\ x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in U$$

Ngoài ra, ta định nghĩa hiệu V/U là tập thương của V theo quan hệ trên, i.e.

$$V/U = \{\overline{x} := x + U |\, x \in V\}.$$

Ngoài ra, ta còn định nghĩa các phép toán khác trên nó

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y},\ \forall x, y \in V$$
$$\alpha\overline{x} = \overline{\alpha x},\ \forall x \in V, \forall \alpha \in K$$

Dễ dàng kiểm chứng được V/U là một KG vector trên trường K.

Ta định nghĩa V/U là **không gian thương** của V trên K.

Corollary 5.121. *Nếu V là KG vector hữu hạn chiều và U là KGC của V thì*

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$$

Theorem 5.122. *Cho U và W là các KG vector trên K. Nếu $f : V \longrightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính thì*

$$V/Kerf \simeq Imf$$

5.3.3 Ma trận biễu diễn ánh xạ tuyến tính.

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ và các cơ sở $\mathcal{B}$ trong V, $\mathcal{C}$ trong W. Ta nói A là **ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính** theo cặp cơ sở $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ký hiệu là $A = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Example 5.123. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

và cặp CS $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0) ; u_2 = (0, 1, 2) ; u_3 = (1, 1, 1))$, $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3) ; v_2 = (2, 5))$.

Ta có $f(u_1) = (0, 3)$, $f(u_2) = (-1, 3)$ và $f(u_3) = (0, 4)$ nên

$$[f(u_1)]_{\mathcal{B}} = . \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; [f(u_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ và } [f(u_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) = (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ta tìm tọa độ của nó trong $\mathcal{C}$ với cơ sở $\mathcal{B}$ là

$$[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) . [f(u_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) . [f(u_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) . [f(u_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Example 5.124. Xét KG $M_2(K)$ với CS chính tắc $\mathcal{B}_0 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ trong đó

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : M_2(K) &\longrightarrow M_2(K) \\ X &\longmapsto A.X \end{aligned}$$

Ta có

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}$ là

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem 5.125. *Cho V, W là các KG vector với số chiều tương ứng là n, m và $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, c_2, ..., c_m)$ tương ứng trong V, W. Giả sử $f : V \longrightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó $\forall x \in V$, ta có*

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [x]_{\mathcal{B}}$$

Corollary 5.126. *Cho V là KG vector trên K và $\mathcal{B}$ là CS trong V. Giả sử f là toán tử tuyến tính trong V. Khi đó $\forall x \in V$, ta có*

$$[f(x)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}$$

Example 5.127. Tương tự ví dụ trên, cho $x = (1, 2, 3)$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$Y = [f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét.

1. Trong trường hợp f là ánh xạ tuyến tính từ KG $K^n \to K^m$ thì khái niệm ***ma trận chính tắc*** của f được ĐN như sau :

   $$f : K^n \to K^m$$

   với

   $$f(x_1, x_2, .., x_n) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n)$$

Trong đó $a_{ij} \in K$. Lấy $\mathcal{A}_0 = (e_1, e_2, .., e_n)$ và $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, .., e_m)$ lần lượt là các CS chính tắc của K^n và K^m, do f là ánh xạ tuyến tính nên ta có

$$\begin{gathered} f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) \\ f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) \\ \text{.................................} \\ f(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}) \end{gathered}$$

tức là

$$[f(e_1)]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \ [f(e_2)]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; ....; \ [f(e_n)]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Do đó ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp CS chính tắc $\mathcal{A}_0$,$\mathcal{B}_0$ là

$$[f]_{\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ngược lại nếu $f : K^n \to K^m$ là ánh xạ tuyến tính bất kỳ, gọi $A = [f]_{\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0}$ là ma trận biểu diễn của f theo cặp CS chính tắc $\mathcal{A}_0$,$\mathcal{B}_0$ của K^n và K^m. Khi đó, f xác định theo

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n)$$

và biểu thức này tương đương với ***ma trận chính tắc***

$$[f]_{\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0} = (a_{ij})_{m\times n}$$

trong đó $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0$ lần lượt là các CS chính tắc K^m

2. Trong trường hợp đã biết được ma trận chính tắc của f thì ta còn có thể xác định $Kerf$ và Imf theo cách sau:

- Tìm $Ker\,f$: Cho $(x_1, x_2, ..., x_n) \in Kerf \Leftrightarrow f(x_1, x_2, .., x_n) = 0$

$$\Leftrightarrow [f(x_1, x_2, .., x_n)]_{\mathcal{B}_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow A\,[(x_1, x_2, .., x_n)]_{\mathcal{B}_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow AX = 0$$

với

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathbf{T}}.$$

Nói cách khác, $Kerf$ là ***KG nghiệm*** của hệ PTTT thuần nhất $AX = 0$.

- Tìm Imf : Cho $\mathcal{A}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ là CS chính tắc trong K^n, ta có

$$\begin{gathered} f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) \\ f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}) \end{gathered}$$

Mà $Imf = \langle f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\rangle$ nên Imf chính là ***KG cột*** của ma trận A, tức là KG sinh bởi các vector cột của ma trận A. Điều này tương đương với Imf là ***KG dòng*** của ma trận chuyển vị $A^{\mathbf{T}}$.

Example 5.128. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + 2x_3)$$

Tìm CS, số chiều cho $Kerf$ và Imf.

Giải. Ta có ma trận chính tắc của f là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1)$Kerf$: Xét KG nghiệm của hệ PTTT thuần nhất $AX = 0$, có

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó, chọn $x_2 = \alpha, x_3 = \beta$ là 2 ẩn tự do. Ta được

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_4 = 2\beta \end{cases}$$

$Kerf = \{(-\alpha, \alpha, \beta, 2\beta)\,|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle(-1, 0, 1, 0)\,; (0, -1, 0, 2)\rangle$

Vậy $Kerf$ có một CS là $\{(-1, 0, 1, 0)\,; (0, -1, 0, 2)\}$ và có $\dim Kerf = 2$.

2)Imf : Xét KG dòng của ma trận $A^{\mathbf{T}}$ có

$$A^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó Imf có một CS là $\{(1, 1, 2)\,; (0, 1, 1)\}$ và có $\dim Imf = 2$.

Example 5.129. Tìm một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $Imf = \langle (1,0,-1)\,;(2,1,1)\rangle$.
Ta có f là một toán tử trong $\mathbb{R}^3$ và có $Imf = \langle (1,0,-1)\,;(2,1,1)\rangle$ nên nó có dạng

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right) = \left(x_1 + 2x_2 + ax_3,\ x_2 + bx_3,\ -x_1 + x_2 + cx_3\right)$$

có ma trận chính tắc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Vì Imf sẽ có KG cột là

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Ta cần tìm (a,b,c) sao cho nó tạo thành CS của Imf

$$\Leftrightarrow (a,b,c) = \alpha\,(1,0,-1) + \beta\,(2,1,1)$$

Chọn $\alpha = \beta = 1$, ta được 1 toán tử thỏa điều kiện cần tìm là

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right) = \left(x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2\right)$$

Example 5.130. Cho $V = M_n\left(K\right)$ và $A \in V$. CMR $f : V \longrightarrow V$ xác định bởi

$$f\left(X\right) = XA - AX,\ \forall X \in V$$

là toán tử tuyến tính.

Giải. Do ánh xạ $f : V \longrightarrow V$ nên bản thân nó đã là một toán tử.
Ta cần CM thêm f tuyến tính, $\forall X, Y \in V$ và $\alpha \in K$, ta có

$$f\left(\alpha X + Y\right) = \left(\alpha X + Y\right)A - A\left(\alpha X + Y\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\alpha X + Y\right) = \alpha\left(XA - AX\right) + \left(YA - AY\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\alpha X + Y\right) = \alpha f\left(X\right) + f\left(Y\right)$$

Do đó, f là toán tử tuyến tính.

Example 5.131. Cho $K = \mathbb{C}$ và $f :\ K^3 \longrightarrow K^3$ xác định bởi

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right) = \left(x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + 3x_3,\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3\right)$$

1) CMR f là một toán tử tuyến tính trong K.

2)Tìm điều kiện để $a,b,c \in K$ sao cho $(a,b,c) \in Imf$ và tìm CS choImf. Tính $r\left(f\right)$.

3) Tìm điều kiện để $a,b,c \in K$ sao cho $(a,b,c) \in Kerf$ và tìm CS cho$Kerf$.. Tính $d\left(f\right)$.

Giải. Ta có

1) Dễ dàng kiểm chứng $f: K^3 \to K^3$ và $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{C}^3, \forall \alpha \in K$.

2) Đặt $V = \mathbb{C},^3$ để $v = (a, b, c) \in Imf = \{f(v) | v \in V\}$ thì có $(t, s, r) \in V$ sao cho

$$f(t, s, r) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} t - s + 2r = a \\ t - s + 3r = b \\ 3t - 3s + 8r = c \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

có nghiệm với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} t \\ s \\ r \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

có $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 3 & -3 & 8 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c-3a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a-2b \end{array}\right)$

Để hệ có nghiệm thì $a + 2b - c = 0$

Ta có ma trận biểu diễn CS chính tắc của f là A^T có KG cột là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Do đó Imf có một CS là $\{(1, 1, 3); (0, 1, 2)\}$.

3) Ta có $(a, b, c) \in Kerf$ nên

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ a - b + 3c = 0 \\ 3a - 3b + 8c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = \lambda \\ c = 0 \end{cases}$$

Do đó $Kerf = \{(a, b, c) \in V | a = b, c = 0\}$ và có 1 CS là $\{(1, 1, 0)\}$ và có $d(f) = 1$.

Proposition 5.132. *Cho V, W, T là các KG vector hữu hạn chiều trên K với các CS tương ứng lần lượt là $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.Khi đó, với f, g: $V \longrightarrow W; h: W \longrightarrow T$ là các ánh xạ tuyến tính và $\alpha \in K$, ta có*

1) $[f + g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} + [g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$;

2) $[\alpha f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \alpha [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$;

3) $[h \circ f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [h]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

Proposition 5.133. *Cho V, W là các KG vector có số chiều tương ứng là n, m và $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n), \mathcal{C} = (c_1, c_2, ..., c_m)$ lần lượt là các CS của V, W. Với mỗi ánh xạ tuyến tính $f: V \longrightarrow W$, ta có ma trận biểu diễn tương ứng theo cặp CS $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Khi đó $f \longmapsto A$ xác định một đẳng cấu giữa các KG vector $L(V, W)$ và $M_{m \times n}(K)$.*

Corollary 5.134. *Cho V là KG vector hữu hạn chiều trên K và $\mathcal{B}$ là CS bất kỳ của V. Khi đó tương ứng với A là ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính $f \mapsto A$ trong CS $\mathcal{B}$ đều xác định một đẳng cấu giữa vành End(V) tất cả các toán tử tuyến tính trong KG vector V và vành $M_n(K)$.*

Proposition 5.135. *Cho V và W là các KG vector hữu hạn chiều trên K, $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$ và $\{\mathcal{C}, \mathcal{C}'\}$ lần lượt là các cặp CS trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ thì*

$$[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = \left(\mathcal{C} \to \mathcal{C}'\right)^{-1} [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$$

Corollary 5.136. *Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là các CS trong KG vector hữu hạn chiều V trên trường K. Khi đó với mọi toán tử tuyến tính $f \in End(V)$, ta có*

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)^{-1} [f]_{\mathcal{B}} \left(\mathcal{B} \to \mathcal{B}'\right)$$

Example 5.137. Cho các vector

$$u_1 = (1, 1, 0)\,;\, u_2 = (0, 2, 1)\,;\, u_3 = (2, 3, 1)$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3,\; x_1 + 2x_2 - x_3,\; 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1) CMR $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là CS trên $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$

Giải. Ta có

1) $\mathcal{B}$ là một CS trong $\mathbb{R}^3$ do $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

2) Ánh xạ chính tắc của f là $A = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Xét ma trận chuyển CS

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercise 5.138. Cho các vector

$$u_1 = (1, -1, 2)\,;\, u_2 = (3, -1, 4)\,;\, u_4 = (5, -3, 9)$$

1) CMR $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là CS trong $\mathbb{R}^3$.

2) Cho $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính thỏa

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tìm biểu thức của f .

Giải.

1) Ta có $\mathcal{B}$ CS của $\mathbb{R}^3$ do (u_1, u_2, u_3) có KG dòng là $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ và

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

2) Gọi $\mathcal{B}$ là CS chính tắc trong $\mathbb{R}^3$ bằng cách sắp xếp u_1, u_2, u_3 thành các cột.

Ta có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} = B$ có $\det B = 2$ và

$B_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 3,\ B_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7,\ B_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -4;$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3,\ B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -1,\ B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2;$

$B_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$

Do đó

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}(\mathrm{adj}B) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -7 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Từ công thức $[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)$. Vậy

$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -7 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 54 & -70 & -54 \\ -32 & 48 & 34 \\ 97 & -125 & -100 \end{pmatrix}$$

Do $[f]_{\mathcal{B}_0}$ là ma trận chính tắc của f nên nó có biểu thức biểu diễn là

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(54x_1 - 70x_2 - 54x_3,\ -32x_1 + 48x_2 + 34x_3,\ 97x_1 - 125x_2 - 100x_3).$$

Exercise 5.139. Cho các cơ sở sau trong không gian vector $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ sau

$\mathcal{B} = (u_1 = (1,2)\,; u_2 = (3,4))\,;\ \mathcal{B}' = \left(u_1^{'} = (1,3)\,; u_2^{'} = (2,5)\right)$

$\mathcal{C} = (v_1 = (1,0,1)\,; v_2 = (0,1,0)\,; v_3 = (0,1,1))\,; \mathcal{C}' = \left(v_1^{'} = (1,1,2)\,; v_2^{'} = (1,2,1)\,; v_3 = (1,1,1)\right)$

Tính $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ với ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)\,.$$

Giải.

$\diamond$ Gọi P, Q lần lượt là các ma trận chuyển CS từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{C}$ sang $\mathcal{C}'$.

Ta có

$$P = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}')$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$Q = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}') = (\mathcal{C}_{\mathbf{0}} \to \mathcal{C})^{\mathbf{-1}}(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}')$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = (\mathcal{C}' \to \mathcal{C}) = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

$\diamond$ Đặt B là ma trận biểu diễn ánh xạ f theo cặp CS $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$

Ta được

$$[f(u_1)]_{\mathcal{B}} = [f(1,2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ [f(u_2)]_{\mathcal{B}} = [f(3,4)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f(u_1)]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbf{0}})[f(u_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

và tương tự là $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)[f(u_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

Vậy ta được $B = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad (***)$

Từ các kết quả $(*)\,, (**)$ và $(***)$, ta có :

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 6 & 10 \\ -15 & -25 \end{pmatrix}.$$

Exercise 5.140. Trong $\mathbb{R}_2[t]$ các đa thức bậc ≤ 2 trên trường $\mathbb{R}$ có CS $\mathcal{B} = \left(1, t, t^2\right)$ và ánh xạ $\Phi : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ xác định bởi

$$\Phi\left(a + bt + ct^2\right) = (a + 2b) + bt + (a + 2c)\, t^2$$

Xác định ma trận biểu diễn của Φ trong $\mathcal{B}$.

Giải. Trên cơ sở $\mathcal{B}$, ta có

$\Phi(1) = 1 + t^2$, tức $a = 1$, $b = c = 0$. Vậy $\Phi(1)$ có CS là $(1, 0, 1)$

Tương tự, ta được

$\Phi(t) = 2 + t,\ \Phi\left(t^2\right) = 2t^2$ có các CS là $(2, 1, 0)$ và $(0, 0, 2)$

Lập $\left\{\Phi(1), \Phi(t), \Phi\left(t^2\right)\right\}$ thành các cột, do đó

$$[\Phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.141. *Cho V, W là các KG vector n chiều và $f \in L(V, W)$. Khi đó các khẳng định sau tương đương :*

i) f đơn ánh

ii) f toàn ánh

iii) f song ánh

iv) Với mọi CS $\mathcal{A} \in V$ và $\mathcal{B} \in W$, thì ma trận $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ khả nghịch

v) Tồn tại các CS $\mathcal{A} \in V$ và $\mathcal{B} \in W$ sao cho $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ khả nghịch. Khi đó $f^{-1} : W \to V$ cũng là ánh xạ tuyến tính và

$$\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1}$$

Hơn thế nữa, nếu $V = W$ và $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ thì

$$\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Example 5.142. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ phụ thuộc tham số $m \in \mathbb{R}$ xác định bởi

$f(1, 0, 1) = (m, 1, 0)$

$f(0, 1, 0) = (0, m, 1)$

$f(0, 2, 1) = (m, m + 1, m + 2)$

1) Tìm m để f là song ánh.

2) Tìm biểu thức của f. Từ đó tính f^{-1} khi f là song ánh.

Giải. 1) Xét cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ trong $\mathbb{R}^3$, và đặt

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 2, 1)\}$

Xét ma trận A là KG dòng của CS $\mathcal{B}$, ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ là cơ sở trong } \mathbb{R}^3.$$

Mặt khác $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 1 & m & m+1 \\ 0 & 1 & m+2 \end{pmatrix}$ có

$$\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 1 & m & m+1 \\ 0 & 1 & m+2 \end{vmatrix} \overset{c_3:=c_3-c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m & m \\ 0 & 1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m+2 \end{vmatrix}$$

$$= m^2 (m+1) \neq 0 \text{ khi và chỉ khi } m \neq \{0, -1\}.$$

Vậy $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ khả nghịch.

Do đó f là song ánh khi và chỉ khi $m \neq \{0, -1\}$.

2) Áp dụng công thức

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)$$

Ta có $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 1 & m & m+1 \\ 0 & 1 & m+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & m & 1-m \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}$$

do đó f có biểu thức là

$$f(x_1, x_2, x_3) = (mx_3,\ mx_1 + mx_2 + (1-m)x_3,\ -mx_1 + x_2 + mx_3)$$

Hơn thế nữa, khi f là song ánh tức $m \neq \{0, -1\}$, f^{-1} có ma trận biểu diễn là

$$\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B}_0}^{-1} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & m & 1-m \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{có } \det B = m^2(m+1) \text{ và}$$

$B_{11} = \begin{vmatrix} m & 1-m \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 1$; $B_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & m \\ -1 & m \end{vmatrix} = m$; $B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1-m \end{vmatrix} = -m^2$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} m & 1-m \\ -m & m \end{vmatrix} = -m$, $B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & m \\ -m & m \end{vmatrix} = m^2$, $B_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m^2$;

$B_{13} = \begin{vmatrix} m & m \\ -m & 1 \end{vmatrix} = m + m^2$, $B_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = 0$, $B_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ m & m \end{vmatrix} = 0$.

Do đó

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}(\mathrm{adj}B) = \frac{1}{\det B}\left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}\right] = \frac{1}{m^2(m+1)} \begin{pmatrix} m^2+m-1 & m & -m^2 \\ -m & m^2 & m^2 \\ m^2+m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thì biểu thức của f^{-1} là

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{m^2(m+1)} \left(\left(m^2+m-1\right)x_1 + mx_2 - m^2x_3, -mx_1 + m^2x_2 + m^2x_3,\ \left(m^2+m\right)x_1 \right)$$

CÁC BÀI TẬP.

Exercise 5.143. Cho toán tử tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(e_1) = (0, i, 1)\,;\ f(e_2) = (1, 1, 0)\,,\ f(e_3) = (1, 0, i)$$

trong đó (e_1, e_2, e_3) là CS chính tắc trong $\mathbb{C}^3$. Kiểm tra tính khả nghịch của nó.

Giải. Đặt $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ là CS chính tắc trong $\mathbb{C}^3$. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

có định thức là

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{vmatrix} \overset{c_2 := c_2 - c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & -i & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = 0$$

do đó toán tử f không khả nghịch.

Exercise 5.144. Có tồn tại hay không một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ thỏa

$$f(1, -1) = (1, 0)\,;\ f(-1, 2) = (0, 1) \text{ và } f(0, -1) = (1, 1)$$

Giải. Đặt $\mathcal{B}_0$ là CS chính tắc trong $\mathbb{R}^2$;

$u_1 = (1, -1)\,;\ u_2 = (-1, 2)$ và $u_3 = (0, -1)$ và

$v_1 = (1, 0)\,;\ v_2 = (0, 1)$ và $v_3 = (1, 1)$

Ta có $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ tạo thành Cơ sở trên $\mathbb{R}^2$ nên

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dựng $\{v_1, v_2\}$ thành cột.

Xét công thức $[f]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

Nhưng $f(u_3) \neq v_3$ nên không tồn tại toán tử như vậy.

Exercise 5.145. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và các vector

$$u_k, v_k \in \mathbb{R}^n,\ \forall k = \overline{1, .., n},\ u, v \in \mathbb{R}^n \text{ thỏa } T(u_k) = v_k.$$

1) Giả sử có $\alpha_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$. CMR $Tu = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$.

2) Ứng dụng với $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ và các vector

$u_1 = (1, 3, 3, 1)\,; u_2 = (0, 0, 1, 1)\,; u_3 = (1, 0, 1, 2)$ và $u_4 = (0, 1, 0, 1)$

$v_1 = (1, 2, 3, 4)\,; v_2 = (1, 2, 0, 0)\,; v_3 = (1, 4, 0, 0)$ và $v_4 = (1, 2, 0, 1)$

Cho $u = (1, 7, 4, 0)$ và $v = (0, -1, 3, 8)$.

Hỏi có tồn tại T thỏa $T(u_k) = v_k$ và $T(u) = v$ không?

Giải. 1) Do T tuyến tính nên :

Khi $n = 2$ thì $T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Chứng minh bằng quy nạp bằng cách nhóm $\{u_2, .., u_n\}$ và $\{\alpha_2, ..., \alpha_n\}$

2) Dễ dàng kiểm tra được $u = 2u_1 - u_2 - u_3 + u_4$ và tính được $2v_1 - v_2 - v_3 + v_4 = (1, 0, 6, 9) \neq v$.

Do đó không tồn tại toán tử tuyến tính nào trên $\mathbb{R}^4$ như vậy.

Exercise 5.146. Cho các ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ và $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. CMR $g \circ f$ không khả nghịch.

Giải.

Áp dụng công thức $[g \circ f]_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = [g]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ với $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ là CS chính tắc trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathcal{B}$ là CS chính tắc trong $\mathbb{R}^3$.

Ta có ma trận biểu diễn của các ánh xạ f, g lần lượt là các ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_{2\times3}$ và $[g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = B_{3\times2}$.

Vậy $g \circ f$ có ma trận biểu diễn là $C_{2\times2} = A_{2\times3}.B_{3\times2}$ không khả nghịch.

Exercise 5.147. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\, x_1 + x_2,\, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

Kiểm tra tính khả nghịch của f và tính f^{-1}. CMR $\left(f^2 - Id\right)(f - 2Id) = 0$.

Giải.

Ta có ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f là

$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ có $\det A = -2 \neq 0$ nên $\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}_0}$ khả nghịch.

Xét A^{-1} là ma trận biểu diễn của $\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}_0}$, ta có

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1.5 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ nên}$$

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1, -x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3).$$

Ngoài ra, xét ma trận biểu diễn của $\left(f^2 - Id\right)(f - 2Id)$ là

$$\left(A^2 - I_3\right)(A - 2I_3) = (A - I_3)(A + I_3)(A - 2I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 0_3$$

Do đó $\left(f^2 - Id\right)(f - 2Id) = 0$.

Exercise 5.148. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2\, 2x_3 - x_1)$$

1) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp CS chính tắc $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

2) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp CS sau

$\mathcal{B} = (u_1 = (1, 0, -1)\,;\, u_2 = (1, 1, 0)\,;\, u_3 = (1, 0, 0))$ và

$\mathcal{C} = (v_1 = (1, 1)\,; v_2 = (1, 0))$.

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là các CS chính tắc trong $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

1) Khi đó, ma trận biểu diễn của f theo $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ là

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Áp dụng công thức $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)\,[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0}\,(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$.

Ta có $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) = (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})^{-1}$ và $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Mà $(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercise 5.149. V là KG vector 2 chiều trên K và $\mathcal{B}$ là CS của V. CMR nếu f là toán tử tuyến tính trong V và $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn trong $\mathcal{B}$ thì

$$f^2 - (a + d)\, f + (ad - bc)\, Id = 0.$$

Giải. Từ các giả thiết, ta được

$f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_1, cx_1 + dx_2)$ với $ad - bc \neq 0$

Xét $f^2 - (a + d)\, f + (ad - bc)\, Id$ có ma trận biểu diễn là

$$A^2 - (a + d)\, A + (ad - bc)\, I_2$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\,(a + d) & b\,(a + d) \\ c\,(a + d) & d\,(a + d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = 0_2$$

Exercise 5.150. Cho T là toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn trong CS chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tìm một CS cho $KerT$ và ImT.

Giải. Xét A với $KerT$ là KG nghiệm của hệ $AX = 0$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay hệ trở thành $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha,\, x_2 = -\alpha \\ x_1 = \alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow KerT = \{(\alpha, -\alpha, \alpha)\,|\alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle .$$

Vậy $KerT$ có 1 CS là $\{(1, -1, 1)\}$.

Xét KG cột của A là $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó ImT có 1 CS là $\{(1, 0, -1)\,; (0, 1, 5)\}$.

Exercise 5.151. Tìm 2 toán tử tuyến tính f, g trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $g \circ f = 0$ nhưng $f \circ g \neq 0$.

Giải. Ta đặt A, B là 2 ma trận biểu diễn f, g trong $\mathbb{R}^2$.

Để nó thỏa đề bài, ta cần chỉ ra 2 ma trận thỏa $B.A \neq 0$ nhưng $A.B = 0$.

Xét $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó $A.B = 0$ và $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Exercise 5.152. Cho toán tử tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, -2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3)$$

1) Tìm ma trận biểu diễn f trong CS chính tắc của $\mathbb{R}^3$

2) Tìm ma trận biểu diễn f trong CS

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1)\,; u_2 = (0, 1, 1)\,; u_3 = (0, -3, -2))$$

3) CMR f khả nghịch và tính f^{-1}.

Giải.

1) Ta có $A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ với $\mathcal{B}_0$ là CS chính tắc trong $\mathbb{R}^3$.

2) Xét công thức $[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)\,[f]_{\mathcal{B}_0}\,(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$.

Ta có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ nên

xét $(B|I_3)$=$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \,\middle|\, B^{-1}\right)$$

Vậy$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Do đó $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 9 \\ -11 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) Ta có $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -13 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ nên f khả nghịch

Tính f^{-1}, xét $\det A = 9$ và các định thức

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3;\; A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,\; A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4;\; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2;\; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4;\; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 13;\; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A) = \dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}\right]$

$$\left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}_0} = A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \end{pmatrix} \text{ nên}$$

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9}(-3x_1 - 6x_2 + 3x_3,\; 4x_1 + 2x_2 - x_3,\; 8x_1 + 13x_2 - 2x_3)$$

Lưu ý khi lập ma trận cơ sở:

$(\bullet \to \bullet)$: Ma trận chuyển CS $\Rightarrow$ sắp thành cột,

$[\bullet]_*$ Ma trận biểu diễn $\Rightarrow$ sắp thành dòng.

5.3.4 Không gian đối ngẫu.

Definition 5.153. *Cho $V \in K$ là một KG vector và $f : V \to K$ là một phiến hàm tuyến tính.*

Example 5.154. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

là một phiến hàm tuyến tính.

Hoặc tr: $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ với $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ xác định bởi

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

là một phiến hàm tuyến tính.

Definition 5.155. ***KG đối ngẫu.***

◇ *Cho $V \in K$ là KG vector, ta nói $L(V, K)$ là KG đối ngẫu của V và ký hiệu là V^*.*

◇ *Cho $\mathcal{B} = (e_1, e_2, .., e_n)$ là CS của V, ta nói*

$$f_j \text{ là một phiến hàm tuyến tính trên } V \text{ nếu } f_j(e_i) = \begin{cases} 1 & khi\ i = j \\ 0 & khi\ i \neq j \end{cases}$$

f là một phiến hàm tuyến tính bất kỳ, với mọi $x = \sum\limits_{k=1}^{n} e_kx_k \in V$ thì

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_kf(e_k) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) f(e_k)$$

Do đó, $f_1, f_2, ..., f_n$ sinh ra KG đối ngẫu của V, tức là V^*.

◇ *Nếu $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_kf_k = 0$ thì $\forall i \in \overline{1, n}$; ta có*

$$\alpha_i = (\alpha_1f_1 + ... + \alpha_nf_n)(e_i) = 0$$

◇ *Các phiến hàm tuyến tính $f_1, f_2, .., f_n$ lập thành một CS trong V^*.*

Ký hiệu là $\mathcal{B}* = (f_1, f_2, .., f_n) -$ CS đối ngẫu của CS $\mathcal{B}$.

Do đó $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{B}^*$ hay $V \simeq V^*$.

Definition 5.156. Siêu phẳng.

*Cho V là KG vector n chiều, mỗi KGC có $(n-1)$ chiều của V được gọi là một **siêu phẳng** trên V.*

Example 5.157. Trên $\mathbb{R}^2$, mỗi đường thẳng là một siêu phẳng.

Trên $\mathbb{R}^3$, mỗi mặt phẳng là một siêu phẳng.

Proposition 5.158. *Cho W là siêu phẳng trong V, điều này tương đương với $\exists$ phiến hàm tuyến tính $T \neq 0$ trên V sao cho Ker $T = W$.*

Definition 5.159. Linh hóa tử.

Cho $\emptyset \neq S$ trong $V \subset K$, các phiến hàm tuyến tính f trên V thỏa $f(x) = 0, \forall x \in S$ được gọi là linh hóa tử của S, ký hiệu là S°.

Proposition 5.160. *Cho V là KG vector trên K, khi đó*

1) *Nếu $S \neq \emptyset$ là tập con của V thì S° là KGC của V^*.*

2) $\{0\} = V^*$ *và* $V^\circ = \{0\}$.

Theorem 5.161. *Cho W là KG vector hữu hạn chiều trên V, khi đó*

$$\dim V = \dim W \; + \; \dim W^{\circ}.$$

Proposition 5.162. *Cho V là KG vector n chiều trên K. Khi đó*

1) *Nếu W là tập KGC m chiều của V thì W là giao của (n-m) siêu phẳng trongV.*

2) *Nếu W_1, W_2 là các KGC của V thì $W_1 = W_2$ khi và chỉ khi $W_1^{\circ} = W_2^{\circ}$.*

Các bài tập.

Exercise 5.163. Tìm một phiến hàm tuyến tính $f(u)$ với $u = (x_1, x_2, x_3)$. Biết

$u_1 = (1, 0, 1)$; $u_2 = (0, 1, 2)$; $u_3 = (-1, -1, 0)$ và

$f(u_1) = -1$; $f(u_2) = -1$; $f(u_3) = -3$.

Sau đó, tìm phiến hàm tuyến tính T sao cho $Tu_1 = Tu_2 = 0$ nhưng $Tu_3 \neq 0$.

Giải. Ta cần tìm các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sao cho

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = x_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_3) \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{3}(-x_1 - 2x_2 + x_3) \end{cases}$$

Khi đó

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \alpha_3 f(u_3) = -\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{7}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3$$

Tiếp tục, đặt $T(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, ta cần tìm a_1, a_2, a_3 thỏa

$$\begin{cases} Tu_1 = a_1 + a_3 = 0 \\ Tu_2 = a_2 - 2a_3 = 0 \\ Tu_3 = -a_1 - a_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2}a_2 = -a_3 = \mu \neq 0 \\ a_1 \neq -a_2 \end{cases}$$

Cho $\mu = 1$, $T(x) = x_1 + 2x_2 - x_3$.

Exercise 5.164. Cho W là KGC trong $\mathbb{R}^5$ sinh bởi các vector

$u_1 = (1, 2, 1, 0, 0)$; $u_2 = (1, 0, 3, 3, 1)$; $u_3 = (1, 4, 6, 4, 1)$.

Tìm một CS cho KGC W^0.

Giải. Ta có $W^0 = \left\{ f \in \mathbb{R}^5 \mid f(x) = 0, \forall x \in W \right\}$.

Ta có $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ là một phiến hàm tuyến tính, đặt

$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5$.

Ta cần tìm một CS cho các hệ số a_i, $i \in \overline{1, 5}$. Ta có

$$\begin{cases} f(u_1) = a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ f(u_2) = a_1 + 3a_3 + 3a_4 + a_5 = 0 \\ f(u_3) = a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = 0$$

với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$.

Xét $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & -2 & 0 & -3.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Vậy $\begin{cases} 7x_1 \qquad + x_5 = 0 \\ 14x_2 - 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$, Chọn $x_4 = \alpha,\ x_5 = \beta$,thì $\begin{cases} x_3 = -\alpha - \dfrac{2}{7}\beta \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{3}{14}\beta \\ x_1 = \dfrac{1}{7}\beta \end{cases}$

Do đó W^0 có 1 CS là

$$\left\{ \left(\frac{1}{7}\beta, \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{14}\beta, -\alpha - \frac{2}{7}\beta, \alpha, \beta \right) \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\langle (0, 1, -2, 2, 0)\,; \left(1, \frac{3}{2}, -2, 0, 7\right) \right\rangle$$

Exercise 5.165. Cho $\mathcal{B} = (u_1 = (0, -1, 1)\,;\ u_2 = (1, 1, 1)\,;\ u_3 = (2, 0, 2))$ là CS trong $\mathbb{R}^3$. Tìm CS đối ngẫu của $\mathcal{B}$.

Giải. Ta gọi $\mathcal{B}^*$ là CS đối ngẫu của $\mathcal{B}$, khi đó với $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{B}^*$ thì
$$\begin{cases} f_i(u_j) = 1 & \text{nếu } i = j \\ f_i(u_j) = 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

và với $f_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u_1) = a_{12} - \qquad a_{13} = 1 \\ f(u_2) = a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ f(u_3) = a_{11} \qquad + a_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = \ \ 1 \\ a_{12} = \ \ 0 \\ a_{13} = -1 \end{cases}$

Tương tự cho f_2, f_3; ta được
$$\begin{cases} f_2(x) = -x_1 + x_2 + x_3 \\ f_3(x) = 2x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

Do đó CS cần tìm là $\{(1, 0, -1)\,; (-1, 1, 1)\,; (2, -1, -1)\}$.

⋄ Kiểm tra $\dim \mathcal{B}^* = \dim \mathcal{B}$,

Ta có ma trận biểu diễn CS $\mathcal{B}$ có

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_3 := c_3 + c_2}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

nên $\dim \mathcal{B} = 3$, mặt khác CS $\mathcal{B}^*$ có

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{d_3 := d_3 + d_2}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Exercise 5.166. Cho U, W là 2 KGC của KG vector hữu hạn chiều V trên trường K. CMR:
$(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$ và $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

Chứng minh. Chứng minh bằng định nghĩa tập hợp.

□

5.4 Chéo hóa - Các dạng Jordan, chuẩn tắc và chính tắc.

5.4.1 Chéo hóa

Definition 5.167. Trị riêng.

Cho $f \in End_K(V)$, ta nói $v \in V$ là một vector riêng của f nếu

i) $v \neq 0$

ii) $\exists \lambda \in K$, sao cho $f(v) = \lambda v$.

*Khi đó λ là **trị riêng** và v là **vector riêng** ứng với λ.*

***Đa thức đặc trưng** của toán tử f là phương trình xác định bởi định thức*

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

trong đó A là ma trận trong CS chính tắc của f.

Toán tử f có bộ các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$ và k_i là bội (nghiệm bội) của λ_i trong phương trình đặc trưng

***Phổ của toán tử** là*

$$Sp_K(f) = \left\{ \underbrace{\lambda_1, .., \lambda_1}_{k_1}, \underbrace{\lambda_2, .., \lambda_2}_{k_2}, ..., \underbrace{\lambda_p, .., \lambda_p}_{k_p} \right\}$$

Example 5.168. Toán tử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 4x_2)$$

Ma trận f trong CS chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ có

$$P_f(\lambda) = -(1-\lambda)(4+\lambda) + 6 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

và có phổ là $\quad Sp_{\mathbb{R}}(f) = \{-1, -2\}$.

Example 5.169. Cho toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^4$ có ma trận biểu diễn trong CS chính tắc là

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của f là $P_f(\lambda) = |B - \lambda I_4| = (\lambda+1)(\lambda-1)^3$

nên có phổ tương ứng là $\quad Sp_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ -1, \underbrace{1, 1, 1} \right\}$.

Theorem 5.170. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ **chéo hóa được** khi và chỉ khi tồn tại CS của V gồm toàn các vector riêng của f.*

Definition 5.171. *Nếu* λ *là trị riêng của* f *thì*

$$E(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

là một KGC của V *và ta gọi nó là* **KGC riêng** *của* V *ứng với trị riêng* λ.

Khi đó

$$E(\lambda) = \{v \in V \mid (f - Id_V)(v) = 0\} = Ker(f - \lambda Id_V)$$

Nếu $f \in End_K(K^n)$ *có ma trận chính tắc là* A *thì* $E(\lambda)$ *là KG nghiệm của hệ* $(A - \lambda I_n) X = 0$.

Proposition 5.172. *Cho* $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *là các trị riêng khác nhau của* $f \in End_K(V)$. *Khi đó*

$$E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + ... + E(\lambda_p)$$

là một tổng trực tiếp. ()

Corollary 5.173. *Toán tử f chéo hóa được nếu và chỉ nếu V là tổng trực tiếp của các KGC riêng của nó. Hay nói cách khác, giả sử* $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *là các trị riêng khác nhau của f, khi đó f chéo hóa được nếu cà chỉ nếu*

$$V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ...E(\lambda_p)$$

Proposition 5.174. *Cho* $f \in End_K(V)$. *Nếu* λ *là trị riêng có bội* m *của f thì* $\dim E(\lambda) \leq m$.

Theorem 5.175. *Toán tử tuyến tính* $f \in End_K(V)$ *chéo hóa được khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa :*

i) $P_f(\lambda)$ *phân rã trên K, tức là* $P_f(\lambda)$ *có thể phân tích thành dạng*

$$P_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} ... (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

với $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ *và* $m_1 + m_2 + ... + m_p = n$.

ii) $\forall i \in \overline{1, p}$ *thì* $\dim E(\lambda_i) = m_i$.

Corollary 5.176. *Nếu f có n trị riêng khác nhau thì f chéo hóa được.*

Example 5.177. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3,\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ 2x_1 - x_2).$$

Ma trận biểu diễn f trong CS chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

có đa thức đặc trưng là $P_f(\lambda) = (1 - \lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 6\right)$

có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$ và $\lambda_3 = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$

Do đó f chéo hóa được.

Thuật toán tìm ma trận chéo hóa.

Step 1. Chọn một CS bất kỳ $\mathcal{B} \in V$, lập ma trận $A = [f]_{\mathcal{B}}$ biểu diễn toán tử f trong CS $\mathcal{B}$.

Step 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\lambda) = |A - \lambda I_n|$.

- Nếu P_f không phân rã trên K thì f không chéo hóa được, khi đó kết thúc thuật toán.
- Nếu P_f phân rã được trên K thì sang bước 3.

Step 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, ..., \lambda_p$ của đa thức đặc trưng P_f và các bội số $m_1, .., m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm số chiều của KGC riêng $E(\lambda_i)$.

- Nếu tồn tại $k \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_k) \neq m_k$, $\forall k \in \overline{1,p}$ thì không chéo hóa được, khi đó kết thúc thuật toán.
- Nếu $\dim E(\lambda_k) = m_k$, $\forall k \in \overline{1,p}$ thì f chéo hóa được, sang bước 4.

Step 4. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một CS cho KGC riêng $E(\lambda_i)$, đặt là $\mathcal{B}_i$.

Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p)$ là CS cho V. Ma trận biểu diễn $[f]_{\mathcal{B}}$ của f trong CS $\mathcal{B}$ là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là các trị riêng được sắp theo CS $\mathcal{B}$.

Example 5.178. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3,\ -6x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Ma trận biểu diễn f trong CS chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

có $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -(4-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) + 4 + 6 - 2(1+\lambda) + 6(1-\lambda) - 2(4-\lambda) = (\lambda-1)^2(2-\lambda).$$

Các trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$.

- Khi$\lambda_2 = 2$ thì $(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có CS

$$E(2) = \left\{\left(\frac{1}{2}\alpha, -\alpha, 0\right) | \alpha \in \mathbb{R}\right\} = (1, -2, 0) \text{ hay } \dim E(2) = 1 = \text{số bội của } \lambda_2$$

- Tiếp tục với $\lambda_1 = 1$, ta có $(A - \lambda_1 I_3) X = (A - I_3) X = 0$ với $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\text{Ta được } (A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (A - I_3)$ có hạng là 2 và CS cho KG nghiệm là

$$E(1) = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = (1, -2, 1) \text{ hay } \dim E(1) = 1 < 2 = \text{số bội của } \lambda_2.$$

Do đó, toán tử không chéo hóa được.

Example 5.179. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3,\ -6x_1 - 4x_2 + 3x_3,\ -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Ta có ma trận biểu diễn của nó là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

có đa thức đặc trưng $P_f(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$ có các trị riêng $\lambda_1 = 2$ (bội 2) và $\lambda_2 = 1$.

KG riêng

• Khi $\lambda_1 = 2$, xét $(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

có CS là $E(2) = \left\{ \left(\frac{1}{2}\beta - \alpha, \alpha, \beta\right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-1, 1, 0)\,; (1, 0, 2) \rangle$.

• Khi $\lambda_1 = 1$, xét $(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

có CS là $E(2) = \left\{ \left(-\frac{1}{3}\alpha, -\alpha, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \langle (1, -3, -3) \rangle$.

Ta có ma trận chuyển CS từ $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}$ bằng cách sắp $E(2), E(1)$ thành các cột là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

có

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -6 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

và ma trận chéo hóa của A xác định bởi

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ứng dụng

Ứng dụng 1. Lũy thừa ma trận.

Từ dạng chéo hóa của ma trận A có dạng $D = P^{-1}AP$ như trên.

Ta có $A = PDP^{-1}$.

Do đó $A^n = PD^nP^{-1}$.

Example 5.180. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n.

Xét $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ có các trị riêng $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Khi $\lambda_1 = 2$, ta có $(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

có $E(2) = \langle(-1, 1)\rangle$

Khi $\lambda_2 = 3$, ta có $(A - 3I_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

có $E(2) = \langle(-1, 2)\rangle$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ có $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

và $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ nên $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Do đó $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$

Ứng dụng 2. Dãy truy hồi nhiều hệ số.

Example 5.181. Cho các dãy (u_n) và (v_n) với các hệ thức

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \text{với} \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Ta xét CT tính số hạng tổng quát theo n của u_n, v_n.

Đặt $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ta có được hệ thức $X_{n+1} = AX_n$ với điều kiện $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Do đó, ta được công thức $X_n = A^nX_0$.

Ta sẽ tính A^n, xét ví dụ ở mục trên ta đã có

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

nên $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

Vậy

$$\begin{cases} u_n = \left(2^{n+2} + 2^n\right) - (2.3^n - 3^n) \\ v_n = \left(-2^{n+2} - 2^n\right) + (4.3^n + 2.3^n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n = 5.2^n - 3^{n+1} \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n \end{cases}$$

Ứng dụng 3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng.

Có dạng $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n; \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{cases}$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, hệ trên trở thành

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Ta xét ma trận chéo của A là $D = P^{-1}AP$ và

nghiệm có dạng $X' = P^{-1}X$ và hệ $\dfrac{dX'}{dt} = D.X'$

nên $X = P.X'$

Example 5.182. Giải hệ PTVP sau $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ có ma trận chéo $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ với $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Do đó $\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = 2x' \\ \dfrac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = C_1e^{2t} \\ y' = C_2e^{3t} \end{cases}$

và $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = PX' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' - y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}$

Ta được

$$\begin{cases} x = -x' - y' = -C_1e^{2t} - C_2e^{3t} \\ y = -x' + 2y' = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t} \end{cases}$$

Các bài tập.

Exercise 5.183. Tìm đa thức đặc trưng của

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Giải. Ta có

1) $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (\lambda+1)(\lambda-4)$.

2) $$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda) - 12 - 6(2+\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 28.$$

3) $$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{c_1:=c_1+c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{cột 1}}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{c_4:=c_4+c_1}{=\!=\!=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - (4-\lambda) - 4(2-\lambda)\right]$$
$$= (1-\lambda)\left[-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 21\lambda + 12\right]$$

Exercise 5.184. Tìm trị riêng, CS cho các KGC riêng của các ma trận sau. Trong số chúng, ma trận nào chéo hóa trên $\mathbb{R}$ được, nếu có tìm dạng chéo và ma trận khả nghịch làm chéo hóa nó.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Giải. Xét

1) $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & \lambda-2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5-\lambda \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)\left[(3-\lambda)(5-\lambda) - 3\right] = (2-\lambda)^2(6-\lambda)$$

• Các trị riêng là $\lambda_1 = 2$, bội 2; và $\lambda_2 = 6$.

• Xét các CS cho các KGC riêng,

$*$ Khi $\lambda_1 = 2$, ta có $(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Xét $(A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Chọn $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ nên $x_1 = -\alpha - \beta$

$E(2)$ có cơ sở là $\mathcal{B}_1 = \{(-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,0);(-1,0,1)\rangle$ có $\dim E(2) = 2$

Chọn $u_1 = (-1,1,0)$ và $u_2 = (-1,0,1)$.

$*$ Khi $\lambda_2 = 6$, ta có $(A - 6I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Xét $(A - 6I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Chọn $x_3 = \alpha$ nên $x_2 = 2x_3 = 2x_1 = 2\alpha$

$E(6)$ có cơ sở là $\mathcal{B}_2 = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(1,2,1)\rangle$ có $\dim E(6) = 1$

Chọn $u_3 = (1,2,1)$.

Vậy ma trận A chéo hóa được

• Dựng $\{u_1, u_2, u_3\}$ thành các cột, ta được ma trận khả nghịch làm chéo hóa A là

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ có } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

và có dạng chéo hóa là $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Xét $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 5 & -3-\lambda & -3-2\lambda \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= \left[(2-\lambda)(3+\lambda)(2+\lambda) - (3+2\lambda) - 5(2+\lambda)\right] = (1+\lambda)^3.$$

• Các trị riêng là $\lambda_1 = -1$, bội 3

• Xét CS cho KGC riêng,

$\lambda_0 = -1$, ta có $(A + I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E(-1)$ có CS là $\mathcal{B}_0 = \langle(\alpha, -\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\rangle$ có $\dim E(-1) = 1 < 3$

nên ma trận A không chéo hóa được.

3) Ta có $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(1-\lambda)$

• Các trị riêng là $\lambda_1 = 0$, bội 2 và $\lambda_2 = 1$

• Xét CS cho các KGC riêng,

$$* \text{ Khi } \lambda_1 = 1 \text{ ta có } (A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E(1)$ có CS là $\mathcal{B}_1 = \langle (\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \rangle$ có $\dim E(-1) = 1$

$$* \text{ Khi } \lambda_2 = 0 \text{ ta có } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E(0)$ có CS là $\mathcal{B}_2 = \left\langle \left(\frac{1}{3}\alpha, \frac{2}{3}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\rangle$ có $\dim E(0) = 1 < 2$

nên ma trận A không chéo hóa được.

4) Ta có $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$

• Trị riêng là $\lambda_0 = 2$, bội 3.

• CS cho KGC riêng,

$$\lambda_0 = 2, \text{ ta có } (A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E(2)$ có CS là $\mathcal{B}_0 = \left\langle \left(\frac{1}{2}\alpha, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\rangle = \{(1,2,0);(0,0,1)\}$ có $\dim E(2) = 2 < 3$

nên ma trận A không chéo hóa được.

5) Ta có $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$

• Các trị riêng là $\lambda_1 = 0$, bội 2 và $\lambda_2 = 1$, bội 2

• Xét CS cho các KGC riêng,

$$* \text{ Khi } \lambda_1 = 0 \text{ ta có } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E(0)$ có CS là $\mathcal{B}_1 = \langle (0, \alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rangle = \{(0,1,0,0);(0,0,1,0)\}$ có $\dim E(0) = 2$

$$* \text{ Khi } \lambda_2 = 1 \text{ ta có } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E(1)$ có CS là $\mathcal{B}_2 = \langle (0,0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \rangle = \{(0,0,0,1)\}$ có $\dim E(0) = 1 < 2$

nên ma trận A không chéo hóa được.

6) Ta có $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$

• Các trị riêng là $\lambda_1 = 0$, bội 2 và $\lambda_2 = 1$, bội 2

• Xét CS cho các KGC riêng,

$*$ Khi $\lambda_1 = 1$ ta có $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E(1)$ có CS là $\mathcal{B}_1 = \langle(\alpha, 0, \alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}\rangle = \{(1,0,1,0);(0,0,0,1)\}$ có $\dim E(0) = 2$

$*$ Khi $\lambda_2 = 0$ ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E(0)$ có CS là $\mathcal{B}_2 = \langle(0, \alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\rangle = \{(0,1,0,0);(0,0,1,0)\}$ có $\dim E(0) = 2$

Vậy ma trận A chéo hóa được

• Dựng $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ thành các cột, ta được ma trận khả nghịch làm chéo hóa A là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Xét $(P|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4 \longleftrightarrow d_3]{d_2 \longleftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(I_n \middle| P^{-1}\right).$

Vậy $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó A có dạng chéo hóa là $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercise 5.185. Các toán tử sau có chéo hóa trên $\mathbb{R}$ được không? Nếu có, tìm CS mà nó có dạng chéo.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ -5x_1 - 2x_2 - 2x_3,\ -3x_1 - 2x_2)$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 3x_3,\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2 + x_3)$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (-9x_1 - 8x_2 - 16x_3,\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3,\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3)$

4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 - x_4,\ x_3 + 4x_4)$

5) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$

Giải.

1)

5.5 Đa thức & ứng dụng

5.5.1 Đa thức bất khả quy

5.5.2 Đa thức đối xứng và ứng dụng

Chương 6

Xác suất thống kê

6.1 Không gian mẫu & biến cố

6.2 Các hàm phân phối thường gặp

6.3 Kiểm định giả thiết thống kê

Chương 7

NONLINEAR ANALYSES

Author :

Đỗ Văn Nhân 0911121

7.1 Ánh xạ co & điểm bất động. (trích chương 8)

8.2.1. Cho A là tập đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}^m$ và g là ánh xạ liên tục từ $A \times \mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^m$ hay $g \in C(A \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Đặt $E = C(A, \mathbb{R}^m)$: không gian các hàm liên tục từ A vào $\mathbb{R}^m$ với chuẩn $\|x\| = \sup\{|x(t)| : \quad t \in A\} \quad \forall x \in E$. Cho $a \in E$, giả sử độ đo Lebesgue $|A|$ của A khác 0 và tồn tại $L \in [0, A^{-1})$ sao cho:

$$|g(s, y) - g(s, z)| \leq L |y - z|$$

CMR có một x duy nhất trong E sao cho

$$x(t) = a(t) + \int_A g(t, x(s))\, ds \quad \forall t \in A$$

Chứng minh:

- Trước tiên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức nếu $g : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ thì

$$\left\| \int_A h(s)\, ds \right\| \leq \int_A \|h(s)\|\, ds \qquad (1)$$

Trong đó $h(t) = g(t, x(t)) \qquad \forall (t, x) \in A \times \mathbb{R}^m$

Ta có $h(t) = (h_1(t), h_2(t), ..., h_m(t))$ và

$\int_A h(r)\, dr = \left(\int_A h_1(r)\, dr, ..., \int_A h_m(r)\, dr\right)$

Xét CM (1) bằng quy nạp:

Khi $m = 1$, hiển nhiên đúng

Khi $m = 2$, ta cần CM:

$$\sqrt{\left[\int_A f_1(s)\,ds\right]^2 + \left[\int_A f_2(s)\,ds\right]^2} \le \int_A \sqrt{f_1^2(s) + f_2^2(s)}ds$$

Ta có: $\left[\int_A f_1(s)\,ds\right]^2 = \int_{A\times A} f_1(s)\,f_1(t)\,dsdt$ và tương tự:
$\left[\int_A f_2(s)\,ds\right]^2 = \int_A f_2(s)\,ds.\int_A f_2(t)\,dt = \int_{A\times A} f_1(s)\,f_1(t)\,dsdt$
$\forall s,t \in A$, ta có:

$$f_1(s)\,f_1(t) + f_2(s)\,f_2(t) \le \sqrt{f_1^2(s) + f_2^2(s)}.\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \quad \forall (s,t) \in A\times A$$

$\Rightarrow \int_{A\times A}[f_1(s)\,f_1(t) + f_2(s)\,f_2(t)]\,dsdt \le \int_{A\times A} \sqrt{f_1^2(s) + f_2^2(s)}.\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}dsdt.$
$\Rightarrow \left[\int_A f_1(s)\,ds\right]^2 + \left[\int_A f_2(s)\,ds\right]^2 \le \left(\int_A \sqrt{f_1^2(s) + f_2^2(s)}ds\right).\left(\int_A \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}dt\right)$
$\Rightarrow \left[\int_A f_1(s)\,ds\right]^2 + \left[\int_A f_2(s)\,ds\right]^2 \le \left(\int_A \sqrt{f_1^2(s) + f_2^2(s)}ds\right)^2 \quad \forall s,t \in A$
$\Rightarrow \sqrt{\left[\int_A f_1(s)\,ds\right]^2 + \left[\int_A f_2(s)\,ds\right]^2} \le \int_A \sqrt{f_1^2(s) + f_2^2(s)}ds\ (*)$
Giả sử $m = k$, BĐT vẫn đúng, tức là

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{k}\left(\int_A f_n(s)\,ds\right)} \le \int_A \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{k} f_n^2(s)}\right) ds \qquad (**)$$

Ta CM cho $m = k+1$, hay cần CM :

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{k+1}\left(\int_A f_n(s)\,ds\right)} \le \int_A \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{k+1} f_n^2(s)}\right) ds$$

Đặt $u(s) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{k} f_n^2(s)}$ và $v(s) = f_{k+1}(s)$

Từ $(*)$ và $(**)$, ta được $\left\|\int_A h(s)\,ds\right\| \le \int_A \|h(s)\|\,ds$.

- Tiếp theo, ta sẽ kiểm tra (E,δ) là KG metric đầy đủ với $\delta = \sup\{\|x(t)\| : \quad t \in A, x \in E\}$

Ta cần CM nếu $\{u_n(t)\}$ Cauchy trong E thì nó sẽ hội tụ trong E.

Xét nếu $E = C([0,1],\mathbb{R})$, trường hợp tổng quát tương tự.

Do $\{u_n(t)\}$ Cauchy nên :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists N(\epsilon_1) \in \mathbb{N} \text{ sao cho } |u_n(t) - u_m(t)| \le \epsilon_1 \quad \forall n > m \ge N(\epsilon_1), \forall t \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon_1 > 0, \exists N(\epsilon_1) \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \delta(u_n(t), u_m(t)) < \epsilon_1 \quad \forall n > m \ge N(\epsilon_1), \forall t \in [0,1]$$

Giả sử $\{u_n\}$ hội tụ về $u(t)$: Cho $p \in [0,1]$

Cho $\epsilon_2 > 0, \exists K(p,\epsilon_2) > 0$ such that $|u_k(p) - u(p)| \leq \epsilon_2 \quad \forall k > K(p,\epsilon_2) \quad (\clubsuit)$

Ta cần CM $u(t) \in E$ hay u liên tục: $\quad (\spadesuit)$

Cho $\epsilon > 0$, tìm $P(p,\epsilon) > 0$ sao cho $|u(p) - u(q)| < \epsilon \quad \forall q \in [0,1]; \forall |p-q| < P(p,\epsilon)$

Xét CM phụ sau

$\forall \epsilon_3 > 0$, tìm $M(\epsilon_3) \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_l(t) - u(t)| < \epsilon_3 \quad \forall t \in [0,1], l \geq M(\epsilon_3)$

Từ $(\clubsuit)$ ta có khi cho $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, thì đã tìm được $N(\epsilon_1)$ và $K(s,\epsilon_2) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|u_l(t) - u(t)| \leq |u_l(t) - u_r(t)| + |u_r(t) - u(t)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \forall l \geq r \geq N(\epsilon_1); \forall t \in [0,1]; \forall r > K(t,\epsilon_2)$$

$$\Rightarrow |u_l(t) - u(t)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \qquad \forall l \geq N(\epsilon_1), \forall r_t > \max\{N(\epsilon_1), K(t,\epsilon_2)\}, \forall t \in [0,1]$$

Cho $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, tìm được $N(\epsilon_1)$, $K(s,\epsilon_2) \in \mathbb{N}$ và $r_t \geq \max\{N(\epsilon_1), K(t,\epsilon_2)\}$ sao cho

$$|u_l(t) - u(t)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \qquad \forall l \geq r_t, \forall t \in [0,1]$$

Chọn $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$, tìm được $M(\epsilon_3) = r_t \geq \max\{N(\epsilon_1), K(t,\epsilon_2)\} > 0$; $M(\epsilon_3) \in \mathbb{N}$ để

$$|u_l(t) - u(t)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \qquad \forall t \in [0,1] \ \forall l \geq r_t$$

Kế tiếp, ta CM $(\spadesuit)$, ta có:

$$|u(p) - u(q)| \leq |u(p) - u_l(p)| + |u_l(p) - u_{l'}(p)| + |u_{l'}(p) - u_{l'}(q)| + |u_{l'}(q) - u_l(q)| + |u_l(q) - u(q)|$$

$$\Rightarrow |u(p) - u(q)| \leq \epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_4 + \epsilon_1 + \epsilon_3 \ \forall l > l' > N(\epsilon_1), l > \max\{r_p, r_q\}; p, q \in [0,1], |p-q| < L(q,\epsilon_4)$$

Trong đó do $u_{l'}(t) \in E$ liên tục nên cho $p \in [0,1]$ bất kỳ thì :

$$\forall \epsilon_4 > 0, \exists L(p,\epsilon_4) > 0 \text{ sao cho } |u_{l'}(p) - u_{l'}(q)| < \epsilon_4 \qquad \forall |p-q| < L(p,\epsilon_4)$$

Vậy cho $\epsilon = \epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_4 + \epsilon_1 + \epsilon_3 = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_3 + \epsilon_4 > 0$, tìm được $P(p,\epsilon) = L(p,\epsilon_4) > 0$ thì

$$|u(p) - u(q)| < \epsilon \qquad \forall |p-q| < P(q,\epsilon_4), p \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ Do đó (E,δ) là KG metric đầy đủ.

- Đặt $f(x)(t) = a(t) + \int_A g(t, x(s))\, ds$, ta kiểm tra f được định nghĩa tốt hay f liên tục

Mà $g(t, x(t))$ liên tục từ $A \times \mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^m$

Đặt $\begin{cases} h_n(s) = g(t_n, x(s)) \\ v(s) = K.\chi_A(s) \quad \text{với } K = \sup\limits_{s \in A} \|h_n(s)\| < \infty \end{cases}$

Lại có : $h : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Trong đó $h(t) = g(t, x(s))$ thỏa

$$\begin{cases} h_n(t) = g(t_n, x(s)) \to g(t, x(s)) = h(t) \\ \|h_n(t)\| \le v(t) \qquad \forall t \in A \\ h_n(t) \text{ khả tích trên } A \times \mathbb{R}^m \\ v(t) \text{ liên tục, khả tích và bị chặn trên } A \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Do $v(t) : B \subset A \times \mathbb{R}^m \to A$, $B = \big\{(t_n, x(s)) : t, s \in A, x \text{ liên tục từ } A \text{ vào } \mathbb{R}^m\big\}$

B bị chặn vì $|B| \le |A| . |x(A)|$, Mà $g(t, x(t))$ liên tục mà A đóng và bị chặn nên A compact và$|A| < \infty$

$\Rightarrow x(A)$ bị chặn nên $|B| \le |A| . |x(A)| < \infty$

Vậy $\int_A v(t)\, dt < \infty$ hay $\big(v(t)$ và $h_n(t)$ khả tích Riemann$\big)$

Theo ĐL hội tụ bị chặn thì $\int_A h_n(s)\, ds \to \int_A h(s)\, ds \quad$ khi $n \to \infty$

$$\text{hay } \int_A g(t_n, x(s))\, ds \to \int_A g(t, x(s))\, ds$$

$$\Rightarrow \int_A \|g(t_n, x(s))\, ds - g(t, x(s))\|\, ds \to 0$$

Tương tự $a(t)$ cũng liên tục nên $\|a(t_n) - a(t)\| \to 0$ khi $t_n \to t$

$$\Rightarrow \|a(t_n) - a(t)\| + \int_A \|g(t_n, x(s))\, ds - g(t, x(s))\|\, ds \to 0 \text{ khi } t_n \to t \qquad (***)$$

Xét $\|f(x)(t_n) - f(x)(t)\| \le \|a(t_n) - a(t)\| + \big\|\int_A [g(t_n, x(s))\, ds - g(t, x(s))]\, ds\big\|$

$\quad \le \|a(t_n) - a(t)\| + \int_A \|g(t_n, x(s))\, ds - g(t, x(s))\|\, ds \to 0$ theo $(***)$

Vậy f được định nghĩa tốt và (E, δ) là KG metric đầy đủ.

- Cuối cùng, ta CM $f(x)(t)$ là ánh xạ co; xét :

$\|f(x) - f(y)\| \qquad = \qquad \sup\{\|f(x)(t) - f(y)(t)\| : \quad t \in A\}$

$= \sup\big\{\big\|a(t) + \int_A g(t, x(s))\, ds - a(t) - \int_A g(t, y(s))\, ds\big\| : \ t \in A\big\}$

$= \sup\big\{\big\|\int_A [g(t, x(s)) - g(t, y(s))]\, ds\big\| : \quad t \in A\big\}$

$\le \sup\big\{\int_A \|g(t, x(s)) - g(t, y(s))\|\, ds : \ t \in A\big\}$

$\le \sup\big\{\int_A L\|x - y\|\, ds : \ t \in A\big\} < L.A\|x - y\| = k.\|x - y\|$

Trong đó $k = L.A < 1$ do $L \in [0, |A|^{-1}]$, Vậy, $\forall x, y \in E$, tìm được $k = L.A \in [0,1)$ sao cho

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k. \|x - y\|$$

Theo Đlý 8.1, f là ánh xạ co từ E vào E nên tồn tại duy nhất $x \in E$ sao cho

$$f(x) = x$$

Bài 8.4.2. Cho A đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, K là ánh xạ liên tục $A \times A \to \mathbb{R}$. Gọi $E = C(A, \mathbb{R}^m)$ với chuẩn $\|x\| = \sup\limits_{t\in A} \|x(t)\|$, cho $a \in E, \mu \in \mathbb{R}$. Giả sử

$$|\mu| \, |A| . \left(\sup_{(t,s)\in A\times A} |K(t,s)| \right) < 1$$

CMR: PT tích phân sau có nghiệm duy nhất trong E:

$$x(t) = a(t) + \mu \int_A K(t,s)\, x(s)\, ds \quad \forall t \in A$$

Chứng minh:

Đặt $v(t) = f(x)(t) = a(t) + \mu \int_A K(t,s)\, x(s)\, ds$, ta sẽ CM : $f(x) = v \in E$ hay v liên tục.

$$\forall \epsilon_1 > 0, \text{ tìm } \delta_1(\epsilon_1, t_0) \text{ sao cho } |v(t) - v(t_0)| < \epsilon_1, \quad \forall t \in A, |t - t_0| < \delta_1(\epsilon_1, t_0)$$

Xét $|v(t) - v(t_0)| \leq |a(t) - a(t_0)| + |\mu| \left| \int_A [K(t,s) - K(t_0,s)]\, x(s)\, ds \right|$
$\leq |a(t) - a(t_0)| + |\mu| \int_A |K(t,s) - K(t_0,s)|\, |x(s)|\, ds$
Do $a \in E$ nên

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists \delta_2(\epsilon_2, t_0) \text{ sao cho } |a(t) - a(t_0)| < \epsilon_2 \quad \forall t \in A, |t - t_0| < \delta_2(\epsilon_2, t_0)$$

Mặt khác do $K(t,s)$ liên tục từ $A \times A \to \mathbb{R}$ nên

$$\forall \epsilon_3 > 0, \exists \delta_3(\epsilon_3) \text{ sao cho } |K(t,s) - K(t_0,s)| < \epsilon_3 \quad \forall t, s \in A, \|(t,s) - (t_0,s)\| < \delta_3(\epsilon_3)$$

$$\Leftrightarrow |K(t,s) - K(t_0,s)| < \epsilon_3 \quad \forall t \in A, \|(t - t_0, s)\| = |t - t_0| < \delta_3(\epsilon_3)$$

Vậy : $|v(t) - v(t_0)| \leq |a(t) - a(t_0)| + |\mu| \left|\int_A [K(t,s) - K(t_0,s)]\, x(s)\, ds\right|$

$$\Leftrightarrow |v(t) - v(t_0)| \leq \epsilon_2 \quad + \quad |\mu| \,.\int_A \epsilon_3 |x(s)|\, ds = \quad \epsilon_2 \quad + \quad |\mu| \,. |A|\, \epsilon_3 \|x\| < \epsilon$$

Chọn $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon_1}{2}$ và $\epsilon_3 = \dfrac{\epsilon_1}{2|\mu| \,. \|x\| \,. |A|}$ hay $\epsilon_1 = \epsilon_2 + \epsilon_3 |\mu| \,. \|x\| \,. |A| > 0$

Tìm được $\delta_1(\epsilon_1, t_0) = \min\{\delta_2(\epsilon_2, t_0), \delta_3(\epsilon_3)\}$ để

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1(\epsilon_1, t_0) > 0 \text{ sao cho } |v(t) - v(t_0)| < \epsilon_2 + \epsilon_3 |\mu| \,. \|x\| \,. |A| < \epsilon$$

$$\forall t \in A, |t - t_0| < \min\{\delta_2(\epsilon_2, t_0), \delta_3(\epsilon_3)\} = \delta_1(\epsilon_1, t_0)$$

Tiếp tục ta chứng minh được $(E, \|.\|)$ là không gian đầy đủ (Như **bài 8.2.1**).

Cuối cùng, ta chứng minh $f(x)$ là ánh xạ co.

Xét $\|f(x) - f(y)\| = \sup\{|f(x)(t) - f(y)(t)| :\ t \in A\}$

$$\forall t \in A \text{ thì } |f(x)(t) - f(y)(t)| = |\mu| \left|\int_A [x(s) - y(s)] \,.K(t,s)\,.ds\right|$$

$$\Rightarrow |f(x)(t) - f(y)(t)| \leq |\mu| \int_A |x(s) - y(s)| \,. |K(t,s)| \,.ds$$

Mà $K(t,s)$ liên tục đều $A \times A \to \mathbb{R}^m$ nên

$$\exists M > 0 \text{ sao cho } |K(t,s)| < M \qquad \forall (t,s) \in A \times A \text{ và}$$

$$|x(s) - y(s)| \leq \|x - y\| \qquad \forall s \in A$$

$$\Rightarrow |f(x)(t) - f(y)(t)| \leq |\mu| \,. |M| \,. |A| \,. \|x - y\|$$

Vì $|\mu| \,. |M| \,. |A| < 1$ nên $f(x)$ là ánh xạ co và có điểm bất động duy nhất.

Bài 8.2.3. Cho K là ánh xạ liên tục từ $[0,c] \times [0,c] \to \mathbb{R}$. Đặt $E = C([0,c], \mathbb{R}^m)$ với chuẩn $\|x\| = \sup\limits_{t \in [0,c]} |x(t)|\ \forall x \in E$.

CMR : PhTr tích phân Voltera tuyến tính sau có nghiệm duy nhất trong E

$$x(t) = a(t) + \mu \int_0^t K(t,s)\, x(s)\, ds \qquad \forall a \in E, \forall t \in [0,c]$$

Chứng minh :

Đặt $f(x)(t) = v(t) = a(t) + \mu \int_0^t K(t,s)\, x(s)\, ds$

và $z(t) = a(t) + \mu \int_A K(t,s)\, x(s)\, ds$

- Trước tiên, ta sẽ cm $v(t)$ liên tục từ $[0,c] \to \mathbb{R}^m$

Áp dụng bài tập **8.2.2** với $A = [0,c]$ đóng và bị chặn trên $\mathbb{R}$, ta đã có:

$$z(t) = a(t) + \mu \int_A K(t,s)\, x(s)\, ds \text{ liên tục} \quad \forall a(t) \in E, \forall (t,s) \in A \times A$$

Vì $A = [0,c], E = C(A, \mathbb{R}^m) = C([0,c], \mathbb{R}^m)$ nên $v(t)$ liên tục từ $[0,c] \to \mathbb{R}^m$

- Dễ thấy $(E, \|.\|)$ là KG đầy đủ như các bài trước.

- Cuối cùng, ta chứng minh f^n là ánh xạ co tức

$$\exists m > 0, k \in [0,1) \text{ sao cho } \|f^m(x) - f^m(y)\| \le k\|x - y\|$$

Trong đó :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ lần}} \text{ là ánh xạ hợp của } f$$

Xét $f(x) - f(y) = f(x)(t) - f(y)(t) = \mu \int_0^t K(t,s)[x(s) - y(s)]\, ds$

Đặt $u(t) = x(t) - y(t)$, ta được $f(x)(t) - f(y)(t) = \mu \int_0^t K(t,s)\, u(s)\, ds \qquad (1)$

Ta có $f^2(x)(t) - f^2(y)(t) = f(f(x))(t) - f(f(y))(t)$

$= \mu \left[\int_0^t K(t,t_1) f(x)(t_1)\, dt_1 - \int_0^t K(t,t_1) f(y)(t_1)\, dt_1\right]$

$= \mu \int_0^t K(t,t_1)[f(x)(t_1) - f(y)(t_1)]\, dt_1$

$= \mu \int_0^t K(t,t_1) \left[\mu \int_0^{t_1} K(t_1,s)\, u(s)\, ds\right] dt_1$

$= \mu^2. \int_0^t K(t,t_1) \left[\int_0^{t_1} K(t_1,s)\, u(s)\, ds\right] dt_1$

$= \mu^2. \int_0^t \int_0^{t_1} K(t,t_1).K(t_1,s).u(s).dsdt_1$

Bằng quy nạp với $n = l > 2$, giả sử

$$f^l(x)(t) - f^l(y)(t) = \mu^l \underbrace{\int_0^t \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{l-1}} K(t,t_{l-1})\, K(t_{l-1},t_{l-2}) ... K(t_1,s)\, u(s)\, dsdt_1...dt_{l-1}}_{l \text{ lần}}$$

Ta CM cho $n = l + 1$.Ta có

$f^{l+1}(x)(t) - f^{l+1}(y)(t) = f\left(f^l(x)\right)(t) - f\left(f^l(y)\right)(t)$

$= \mu \int_0^t K(t,t_l)\left[f^l(x)(t_l) - f^l(y)(t_l)\right] dt_l$

$$= \mu \int_0^t K(t,t_l). \left[\mu^l \underbrace{\int_0^t \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{l-1}} K(t,t_{l-1})\, K(t_{l-1},t_{l-2}) ... K(t_1,s)\, u(s)\, dsdt_1...dt_{l-1}}_{l \text{ lần}}\right] dt_l$$

$$= \mu^{l+1} \underbrace{\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} ... \int_0^{t_l} K(t,t_l) K(t_l,t_{l-1}) K(t_{l-1},t_{l-2}) ... K(t_2,t_1) K(t_1,s) .u(s) dt_1...dt_l}_{l+1 \text{ lần}}$$

Vậy $f^m(x)(t) - f^m(y)(t) = \mu^m \int_0^t \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{m-1}} K(t,t_{l-1}) ... K(t_1,s) u(s) dsdt_1...dt_{m-1}$.

Đặt $P = \sup\{|K(t,s)| : t,s \in [0,c]\}$, ta được :

$\|f(x)(t) - f(y)(t)\| = |\mu| . \left\| \int_0^t K(t,s) .u(s) ds \right\| \le |\mu| . \int_0^t |K(t,s)| . \|u(s)\| ds \le |\mu| .P. \|u\| .t_0$

$\|f^2(x)(t) - f^2(y)(t)\| \le |\mu|^2 . \int_0^t \int_0^{t_1} |K(t,t_1) .K(t_1,s)| . \|u(s)\| dsdt_1$

$\le |\mu|^2 . \int_0^t \int_0^{t_1} P^2 . \|u(s)\| dsdt_1 = P^2\mu^2 \int_0^t \int_0^{t_1} dsdt_1 = \dfrac{t^2\mu^2P^2}{2}$.

Giả sử khi $m = l$, thì

$$\left\|f^l(x)(t) - f^l(y)(t)\right\| \le |\mu|^l .P^l . \frac{t^l}{l!} \|u\|$$

Xét khi $m = l+1$, ta có :

$$\left\|f^{l+1}(x)(t) - f^{l+1}(y)(t)\right\| \le |\mu| . \left\| \int_0^t K(t,t_l) .u(t_l) dt_l \right\|$$

$$= |\mu| . \left\| \int_0^t K(t,t_l) . \left[f^l(x)(t_l) - f^l(y)(t_l)\right] dt_l \right\|$$

$$\le |\mu|^l . \int_0^t |K(t,s)| . \left\|f^l(x)(s) - f^l(y)(s)\right\| ds$$

$$\le |\mu| . \int_0^t |K(t,s)| . \left(|\mu|^l .P^l . \frac{s^l}{l!} \|u\|\right) ds$$

$$= |\mu|^{l+1} P^{l+1} \int_0^t \left(\frac{s^l}{l!}\right) \|u\| ds = \frac{|\mu|^{l+1} P^{l+1} t^{l+1}}{(l+1)!} \|u\|$$

Vậy $\|f^m(x)(t) - f^m(y)(t)\| \le |\mu|^m .P^m . \dfrac{t^m}{m!} \|u\| \qquad \forall x,y \in E$

$\Leftrightarrow \|f^m(x)(t) - f^m(y)(t)\| \le k . \|x-y\|$ với $k = |\mu|^m .P^m . \dfrac{t^m}{m!} \ge 0$

- Để f là ánh xạ co, ta CM thêm $k < 1$ hay $|\mu|^m .P^m . \dfrac{t^m}{m!} < 1$

Đặt $H^m = |\mu|^m .P^m .t^m \ge 0 \qquad \forall t \in [0,c]$. Cần CM $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{H^m}{m!} = 0$

Xét chuỗi $c_m = \sum_{n=1}^m \dfrac{H^m}{m!}$ có tỷ số là

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{H^{m+1}}{(m+1)!} \frac{m!}{H^m} = \lim_{m\to\infty} \frac{H}{m+1} = 0$$

Do đó khi $m \to \infty$ thì $\left(|\mu|^m .P^m.\dfrac{t^m}{m!} \right) \to 0$ hay

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } |\mu|^{m_0} .P^{m_0}.\frac{t^{m_0}}{m_0!} < 1$$

Hay

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}, k = |\mu|^{m_0} .P^{m_0}.\frac{t^{m_0}}{m_0!} < 1 \text{ sao cho } \|f^m(x)(t) - f^m(y)(t)\| \le k.\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$$

Vậy f là ánh xạ co và PT có nghiệm duy nhất

Mở rộng

- Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bài toán phụ sau :

Nếu f là ánh xạ co từ KG metric đầy đủ $(E, d) \to (E, d)$. Giả sử $A = \{d(x, y) : x, y \in E\}$ là tập bị chặn. Đặt

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ lần}} \text{ là ánh xạ hợp của } f$$

Khi đó :

$$\cap_{n=1}^{\infty} f^n(A) \text{ có đúng 1 phần tử}$$

Xét các bước chứng minh sau :

1) CM nếu

$$\exists x_0 \in E \text{ sao cho } f(x_0) = x_0 \text{ thì } f^n \text{ cũng là ánh xạ co nên } f^n(x_0) = x_0$$

Đã CM ở trên

2) If $A \subset B$ then diam$A \le$ diam$B$

3) Show that diam$\left(\cap_{n=1}^{\infty} f^n(A)\right) = 0$

Ta đã có 1)

Xét 2) Bằng BĐT tam giác

Xét 3) Ta đã có 2), mà $\cap_{n=1}^{\infty} f^n(E) \subset f^n(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ nên

$$\text{diam}\left(\cap_{n=1}^{\infty} f^n(A)\right) \le \text{diam}\left(f^n(A)\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vì f là ánh xạ co nên $\exists c \in [0, 1]$ sao cho $d(f(x), f(y)) \le c.d(x, y) \quad \forall x, y \in E$

Mà $d(f(x), f(y)) \le c.d(x, y) \le c.\text{diam}A \quad \forall x, y \in A$

$\Rightarrow \sup\limits_{x,y \in A} d(f(x), f(y)) \le c.\text{diam}A \quad \forall x, y \in A$

hay diam $f(A) \le c.\text{diam}A$

Bằng quy nạp, ta được

$\Rightarrow$ diam $f^n(A) \le c.$diam $f^{n-1}(A) \le ... \le c^n.$diam$A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Xét $\lim\limits_{n\to\infty}$ diam $f^n(A) \le \lim\limits_{n\to\infty} c^n$diam $A = 0$ do $\begin{cases} \text{diam}A \text{ bị chặn} \\ \lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0 \quad \forall c \in [0,1) \end{cases}$.

Do đó diam $f^n(A) = 0$ khi $n \to \infty$ hay

$\Rightarrow$ diam $[\cap_{n=1}^{\infty} f^n(A)] \le$ diam $f^n(A) = 0$ khi $n \to \infty$

$\Rightarrow$ diam $[\cap_{n=1}^{\infty} f^n(A)] = 0$

Vậy $\cap_{n=1}^{\infty} f^n(A)$ có duy nhất 1 phần tử

Bài 8.2.4. Cho g là hàm thực liên tục từ $[0,\infty] \times \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$. CMR: $\exists t_0 > 0$ và có u trong $C([0,t_0),\mathbb{R}) \cap C^1((0,t_0),\mathbb{R})$sao cho:

$$(P): \begin{cases} u'(t) = g(t,u(t)) \quad \forall t \in (0,t_0) \\ u(0) = a \end{cases}$$

Chứng minh:

Đặt $M = \sup\{|g(t,u(t))| : \quad t \in [0,t_0], |u(t) - a| \le 1\}$

$t_0 = \dfrac{1}{1+M} > 0$ và $X = C([0,t_0],[a-1,a+1])$

$f(x)(s) = a + \int_0^s g(t,x(t))\,dt \qquad \forall s \in [0,t_0], \forall x \in X$

Ta định nghĩa $\delta(x,y) = \sup\{|x(s) - y(s)| : \quad s \in [0,t_0]\} \qquad \forall x,y \in X$

Ta cần tìm $u(t) \in X$ sao cho u thỏa (P)

- Ta dễ dàng kiểm chứng được (X,δ) là KG metric đầy đủ (CM tương tự như $(E,\delta) = (C([0,1,\mathbb{R}]),\delta)$ đầy đủ ở **bài 8.2.1**)

- Tiếp theo f là ánh xạ từ (X,δ) vào X do :

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon,r) > 0$ sao cho $|f(s) - f(r)| \le \epsilon \quad \forall s \in [0,t_0], \forall |s-r| < \eta(\epsilon,r)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $r > s$ hay $0 < s - r < \eta(\epsilon,r)$

Xét $|f(s) - f(r)| = \left|\int_s^r g(t,x(t))\,dt\right| \le \int_s^r |g(t,x(t))|\,dt \le M(r-s) < M.\eta(\epsilon,r) = \epsilon$

Chọn $\eta(\epsilon,r) = \dfrac{\epsilon}{M} > 0$, vậy f liên tục trên $[0,t_0]$

Xét $|f(x) - a| = \left|\int_0^s g(t,x(t))\,dt\right| \le \int_0^s |g(t,x(t))| \le M.t_0 = \dfrac{M}{1+M} < 1$

Vậy $f(x) \in [a-1,a+1] \qquad \forall x \in X, \forall s \in [0,t_0]$

Hay f là hàm từ (X,δ) vào X.

- Mặt khác f là ánh xạ co do :

$|f(x) - f(y)| = |f(x)(s) - f(y)(s)| \le \int_0^s |g(t,x(t)) - g(t,y(t))|\,dt$

$\le \int_0^s [|g(t,x(t))| + |g(t,y(t))|]\,dt \le \int_0^s 2M.dt = 2Ms \quad \forall s \in [0,t_0].$

$\Rightarrow \sup\limits_{s\in[0,t_0]} |f(x)(s) - f(y)(s)| \leq 2Ms \qquad \forall s \in [0,t_0]$

$\Rightarrow \sup\limits_{s\in[0,t_0]} |f(x) - f(y)| \leq \sup\limits_{s\in[0,t_0]} 2Ms \qquad \forall s \in [0,t_0]$

$\Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq 2Mt_0 = Mt_0 \sup\limits_{s\in[0,t_0]} |x(s) - y(s)|$

(Do $\sup\limits_{s} |x(s) - y(s)| = 2 \quad \forall s \in [0,t_0], \forall x, y \in [a-1, a+1]$)

$\Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq 2Mt_0 = Mt_0.\delta(x,y) = k.\delta(x,y)$ với $k = Mt_0 \in [0,1)$

- Do f là ánh xạ co từ (X,δ) $\big($ đầy đủ$\big)$ vào X nên có $u \in X$ sao cho

$$f(u)(s) = u(s) \qquad \forall s \in [0,t_0]$$

Vậy $u(s) = f(u)(s) = a + \int_0^s g(t, u(t))\,dt$

Mặt khác $\begin{cases} u'(s) = \dfrac{d}{ds}\left[a + \int_0^s g(t,u(t))\,dt\right] = g(s,u(s)) \quad \forall s \in (0,t_0) \\ u(0) = a + \int_0^0 g(t,u(t))\,dt = a \end{cases}$

Hay $u(s)$ thỏa (P)

- Kiểm chứng $u \in C([0,t_0), \mathbb{R}) \cap C^1((0,t_0), \mathbb{R})$

Ta có $u(s) = f(u)(s) \in C([0,t_0), \mathbb{R})$

và $u'(s) = g(s,u(s)) \in C^1((0,t_0), \mathbb{R})$

Ta được đpcm. ■

Bài thi năm 2008-2009

Nếu f, g là 2 ánh xạ từ KG metric đầy đủ (E,δ) vào E. Giả sử $f \circ g = g \circ f$ và $f \circ g$ là ánh xạ co trong (E,δ). Hỏi f có điểm bất động trong E không?

Chứng minh

- Xét $f \circ g$ là ánh xạ co nên $\exists x_0 \in E$ sao cho $f \circ g(x_0) = x_0$

$$\Rightarrow g[f \circ g(x_0)] = g(x_0)$$

$$\Leftrightarrow g \circ f \circ g(x_0) = g(x_0)$$

- Mà ta đã có $f \circ g = g \circ f$ nên

$$g \circ f \circ g(x_0) = g \circ f[g(x_0)] = g(x_0)$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } g \circ f[g(x_0)] = g(x_0)$$

- Tương tự do $f \circ g = g \circ f$

$$f \circ g \circ g\left(x_0\right) = f \circ g\left[g\left(x_0\right)\right] = g \circ f\left[g\left(x_0\right)\right] = g\left(x_0\right)$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } f \circ g\left[g\left(x_0\right)\right] = g\left(x_0\right)$$

Vậy theo ĐL ánh xạ co, điểm bất động là duy nhất nên

$$\begin{cases} f \circ g\left[g\left(x_0\right)\right] = g\left(x_0\right) \\ f \circ g\left(x_0\right) = x_0 \end{cases} \Rightarrow g\left(x_0\right) = x_0$$

$$\Rightarrow g\left(x\right) \text{ có điểm bất động}$$

Tương tự do $g\left(x_0\right) = x_0$ với x_0 là điểm bất động của g và $f \circ g$ nên

$$\begin{cases} f \circ g\left(x_0\right) = f\left[g\left(x_0\right)\right] \\ g\left(x_0\right) = x_0 \end{cases} \Rightarrow f\left(x_0\right) = x_0 \text{ (Theo ĐL AXC)}$$

Vậy f cũng có điểm bất động.

Bài 8.2.5. Cho a_1, a_2 và F là các hàm thực liên tục trên $[0, \infty)$ và C_0, C_1 là 2 số thực bất kỳ. Tìm nghiệm phương trình vi phân bậc 2 của

$$(Q): \begin{cases} u''\left(s\right) + a_1\left(s\right)u'\left(s\right) + a_2\left(s\right)u\left(s\right) = F\left(s\right) \qquad \forall s > 0 \\ u\left(0\right) = C_0 \text{ và } u'\left(0\right) = C_1 \end{cases}$$

Chứng minh :

- Đặt $\phi\left(s\right) = u''\left(s\right)$. Khi đó :

Xét $\int_0^s \phi\left(t\right)dt = \int_0^s u''\left(t\right)dt = u'\left(s\right) - u'\left(0\right) = u'\left(s\right) - C_1$

$\Rightarrow u'\left(s\right) = C_1 + \int_0^s \phi\left(t\right).dt$

$\Leftrightarrow u'\left(s\right) = C_1 - s.\phi\left(s\right) + s\phi\left(s\right) + \int_0^s \phi\left(t\right).dt$

Lưu ý là $\dfrac{d}{ds}\left[\int_0^s t.\phi\left(t\right).dt\right] = s.\phi\left(s\right)$ và

$\quad \dfrac{d}{ds}\left[s\int_0^s t.\phi\left(t\right).dt\right] = s.\phi\left(s\right) + \int_0^s \phi\left(t\right).dt$

$\Rightarrow u'\left(s\right) = C_1 + \dfrac{d}{ds}\left[s\int_0^s \phi\left(t\right)dt - \int_0^s t.\phi\left(t\right).dt\right]$

$\Rightarrow u'\left(s\right) = C_1 + \dfrac{d}{ds}\left[\int_0^s \left(s-t\right).\phi\left(t\right).dt\right]$

hay $u'\left(t\right) = C_1 + \dfrac{d}{dt}\left[\int_0^t \left(s-r\right)\phi\left(r\right)dr\right]$

Xét $\int_0^s u'(t)\,dt = u(s) - u(0) = u(s) - C_0$

$\Rightarrow u(s) = C_0 + \int_0^s u'(t)\,dt = C_0 + \int_0^s \left[C_1 + \dfrac{d}{dt}\left[\int_0^t (s-r)\,\phi(r)\,dr\right]\right] dt$

$\Rightarrow u(s) = C_0 + C_1 s + \int_0^s \left(\dfrac{d}{dt}\left[\int_0^t (s-r)\,\phi(r)\,dr\right].dt\right)$

$\Rightarrow u(s) = C_0 + C_1 s + \int_0^s (s-r)\,\phi(r)\,dr = C_0 + C_1 s + \int_0^s (s-t)\,\phi(t)\,dt$

Ta có : $\begin{cases} u'' = \phi \\ u'(s) = C_1 + \int_0^s \phi(t)\,.dt \\ u(s) = C_0 + C_1 s + \int_0^s (s-t)\,\phi(t)\,dt \end{cases}$ $\Rightarrow$ thay vào (Q)

Ta được :

$$u''(s) + a_1(s)\,u'(s) + a_2(s)\,u(s) = F(s)$$

$$\Leftrightarrow \phi(s) + a_1(s)\left[C_1 + \int_0^s \phi(t)\,.dt\right] + a_2(s)\left[C_0 + C_1 s + \int_0^s (s-t)\,\phi(t)\,dt\right] = F(s)$$

$$\Rightarrow \phi(s) + [a_1(s) + C_0 a_2(s) + C_1 s.a_2(s)] + \int_0^s [(s-t)\,a_2(s) + a_1(s)]\,.\phi(t)\,dt = F(s)$$

$$\Rightarrow \phi(s) = [F(s) - (a_1(s) + C_0 a_2(s) + C_1 s.a_2(s))] + \int_0^s -[a_1(s) + a_2(s)(s-t)]\,.\phi(t)\,dt$$

Đặt tiếp $\quad K(s,t) = -[a_1(s) + a_2(s)(s-t)]$

$$a(s) = [F(s) - (a_1(s) + C_0 a_2(s) + C_1 s.a_2(s))]$$

$$f(v)(s) = a(s) + \int_0^s K(s,t)\,.v(t)\,dt \qquad (*)$$

.

Áp dụng bài **8.2.3**, ta được ph trình $(*)$ có nghiệm duy nhất trong $E = C([0,\infty),\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists \phi \in E$ sao cho $\phi(s) = f(\phi)(s) = a(s) + \int_0^s K(s,t)\,.\phi(t)\,dt$

$\Rightarrow \phi(s) = a(s) + \int_0^s K(s,t)\,.\phi(t)\,dt$ là điểm bất động của phương trình $(*)$

và $u(s) = C_0 + C_1 s + \int_0^s (s-t)\,\phi(t)\,dt$ là nghiệm của (Q).

Bài 8.3.1. Cho D là mở bị chặn khác trống trong $\mathbb{R}^n$. $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ liên tục. CMR: f là trường vector compact trên $\overline{D}$.

Chứng minh:

- Đặt $T = Id + f$ hay , $f = Id - T$

- Để CM f là trường vector compact trên $\overline{D}$

$$\Leftrightarrow T \text{ liên tục và } \overline{T\left(\overline{D}\right)} \text{ compact trên } \overline{D}$$

Do f liên tục trên $\overline{D}$ nên $Id + f$ cũng liên tục trên $\overline{D} \Rightarrow T$ liên tục trên $\overline{D}$.

Xét cho $\{z_n\} \subset T\left(\overline{D}\right)$ bất kỳ thì có $x_n \in \overline{D}$ sao cho $T(x_n) = z_n$ $(*)$

Mặt khác $\overline{D}$ đóng và D bị chặn nên $\overline{D}$ compact trong $\mathbb{R}^n$ hay

$$\text{Cho } \{x_n\} \in \overline{D} \text{ thì có } \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in \overline{D}$$

Mà T liên tục nên

$$\lim_{k\to\infty} T(x_{n_k}) = T(x)$$

$$\text{Đặt } z_n = T(x_n) \text{ như } (*)$$

$$\Rightarrow z_{n_k} = T(x_{n_k})$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} z_{n_k} = T(x)$$

$\overline{T\left(\overline{D}\right)}$ đóng hay nếu $z_n = T(x_n) \Rightarrow \{T(x_n)\} \subset T\left(\overline{D}\right)$

$$\Leftrightarrow \text{Cho } \{z_{n_k}\} \subset T\left(\overline{D}\right) \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} z_{n_k} = T(x) \text{ thì } T(x) \in \overline{T\left(\overline{D}\right)}$$

Vậy $\overline{T\left(\overline{D}\right)}$ là tập compact do:

Cho $\{z_n\} \subset T\left(\overline{D}\right) \subset \overline{T\left(\overline{D}\right)}$có dãy con $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\} \subset T\left(\overline{D}\right)$ sao cho $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = T(x) \in \overline{T\left(\overline{D}\right)}$

$$\text{Cho } \{z_n\} \subset \overline{T\left(\overline{D}\right)} \text{ thì có dãy con } \{z_{n_k}\} \subset \{z_n\} \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in \overline{T\left(\overline{D}\right)} \qquad \blacksquare$$

Ngoài ra, ta còn có thể dùng ảnh của 1 tập compact là compact qua ánh xạ liên tục
:

T liên tục, $\overline{D}$ compact nên $T\left(\overline{D}\right)$ compact$\Rightarrow \overline{T\left(\overline{D}\right)}$ compact.

Vậy f là trường vector compact trên $\overline{D}$.

Bài 8.3.3. Cho D là mở bị chặn khác trống trong KG Banach E. $f : \overline{D} \to E$ là trường vector compact trên $\overline{D}$. Cho K là tập compact trong E và A là tập đóng trong $\overline{D}$. CMR $f^{-1}(K)$ compact và $f(A)$ đóng trong E.

Chứng minh:

Ta có f là trường vector compact trên $\overline{D} \Rightarrow f = Id_{\overline{D}} - T$ với T là ánh xạ compact $\overline{D} \to E$.

CM 1. $f^{-1}(K)$ **compact.**

Ta có $f^{-1}(K)=\left\{x\in\overline{D}:\quad f(x)\in K\right\}$, ta cần CM

$$\text{Lấy dãy } \{x_n\}\subset f^{-1}(K)\Rightarrow \exists y_n\in K \text{ sao cho } y_n=f(x_n)=x_n-T(x_n)$$

Mà K compact nên với $\{y_n\}\subset K$ thì có dãy con $\{y_{n_k}\}\to y\in K$

Hay $\exists x_{n_k}\in D$ sao cho $f(x_{n_k})=y_{n_k}\to y\in K\qquad$ khi $k\to\infty$ $(*)$

$\Rightarrow y_{n_k}=f(x_{n_k})=x_{n_k}-T(x_{n_k})$

$\Rightarrow x_{n_k}=y_{n_k}+T(x_{n_k})$

Mặt khác, $z_{n_k}=T(x_{n_k})\subset T\left(\overline{D}\right)\subset\overline{T\left(\overline{D}\right)}$compact $\quad\forall x_{n_k}\in D\subset\overline{D}$ nên

$$\text{có dãy con } \left\{z_{n_{k_l}}\right\}\to z\in\overline{T\left(\overline{D}\right)}$$

$$x_{n_{k_l}}=y_{n_{k_l}}+T\left(x_{n_{k_l}}\right)=y_{n_{k_l}}+z_{n_{k_l}}$$

$$\Rightarrow x_{n_{k_l}}=y_{n_{k_l}}+z_{n_{k_l}}\to y+z\quad \text{khi } l\to\infty$$

Ta sẽ CM $y+z\in f^{-1}(K)$

Do f liên tục mà $x_{n_{k_l}}\in\overline{D}$ đóng nên $x_{n_{k_l}}\to y+z\in\overline{D}$ thì $x_{n_{k_l}}\to y+z\in\overline{D}$

Theo $(*)$ ta có $y_{n_k}=f(x_{n_k})\in K$ compact nên với dãy con

$f\left(x_{n_{k_l}}\right)\to f(y+z)$

$\Rightarrow f(y+z)\in K$

$\Rightarrow y+z\in f^{-1}(K)$

Vậy $f^{-1}(K)$ compact.

- CM 2. $f(A)$ **đóng trong** E**, hay cần CM :**

$$\textbf{Lấy dãy } \{r_m\}\in f(A) \textbf{ sao cho } r_m\to r \textbf{ thì CM } r\in f(A)$$

Ta CM như bài toán phụ ở bài **8.4.1.** sau :

Bài 8.4.1. Cho D là tập mở, khác trống trong KG Banach E và f là một trường vector compact từ $\overline{D}\to E$. CMR: $deg(.,f,D)$ là ánh xạ liên tục từ $E\setminus f(\partial D)$ vào $\mathbb{Z}$.

Chứng minh :

- Để CM $deg(.,f,D)$ là ánh xạ liên tục từ $E\setminus f(\partial D)$ vào $\mathbb{Z}$ hay

$$\text{Cho } p\in E\setminus f(\partial D)\,,\ \text{ta ch minh } deg(.,f,D) \text{ liên tục tại } p$$

$\Leftrightarrow$ Cho $\epsilon > 0, \exists \delta(p,\epsilon) > 0$ sao cho nếu $\|p-q\| < \delta \quad \forall q \in E \setminus f(\partial D)$ thì

$$|deg(p,f,D) - deg(q,f,D)| < \epsilon \qquad (*)$$

hay cho $\epsilon < 1$, vd $\epsilon = 0.5 < 1$ thì

$$deg(p,f,D) = deg(q,f,D)$$

- Trước tiên, ta sẽ CM $f(\partial D)$ đóng trong E

$\Leftrightarrow$ hay tổng quát hơn nếu A đóng trong $\overline{D} \subset E$ thì $f(A)$ đóng trong E:

Lấy T sao cho $f = Id_{\overline{D}} - T$, do f là một trường vector compact từ $\overline{D} \to E$ nên $\Rightarrow T$ liên tục và $\overline{T(\overline{D})}$ compact trong E.

Để CM $f(A)$ đóng trong E hay CM:

$$\forall \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A) \text{ sao cho } s_n \to s \text{ thì cần CM } s \in f(A)$$

$$\forall s_n \in f(A), \exists a_n \in A \text{ sao cho } s_n = f(a_n)$$

Xét $f(a_n) = (Id - T)(a_n) = a_n - T(a_n) \Leftrightarrow s_n = f(a_n) = a_n - T(a_n)$

Đặt $b_n = T(a_n) \qquad \forall a_n \in A$ nên $\{b_n\}$ là dãy trong $T(A)$

Mà $\overline{T(\overline{A})}$ là tập compact do $f = Id - T$ trường vector compact, A đóng.

$$\Rightarrow \exists \{b_{n_k}\} \subset \{b_n\} \subset T(A) \text{ sao cho } \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b \in T(A)$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ s}}{s_{n_k}} = f(a_{n_k}) \underset{\substack{\Updownarrow\\ \Updownarrow\\ =}}{=} a_{n_k} - T(a_{n_k}) = \underset{\substack{\downarrow\\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k}}}{a_{n_k}} - \underset{\substack{\downarrow\\ b}}{b_{n_k}}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \quad = \quad s \quad + \quad b$$

Mà A đóng nên $\forall \{a_{n_k}\} \subset A$ sao cho $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = s + b$ thì $(s+b) \in A$

Khi đó $f(s+b) \in f(A)$

Mặt khác f liên tục nên $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(s+b)$ với $f(s+b) \in f(A)$

$\Rightarrow \forall \{s_n\} \subset f(A)$ thì có $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{s_n\}$ thỏa $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = f(s+b) \in f(A)$

Ta có $\begin{cases} s_{n_k} \to s & \text{khi } k \to \infty \\ s_{n_k} \to f(s+b) & \text{khi } k \to \infty \end{cases}$

$\Rightarrow s = f(s+b) \in f(A)$(Theo TC duy nhất của giới hạn)

$\Rightarrow f(A)$ đóng trong E.

——— Trở lại bài toán

Xét khi $A = \partial D$ đóng $\Rightarrow f(\partial D)$ đóng trong E nên $E \setminus f(\partial D)$ mở

Do đó có quả cầu $B(p,r) = \{y \in E : \quad \|y-p\| < r\} \subset E \setminus f(\partial D)$

Trở lại bài toán $(*)$, với $\delta(p,\epsilon) = r$ thì $\forall \|p-q\| < \delta = r$

$$\Rightarrow q \in B(p,r) \subset E \setminus f(\partial D)$$

Ta xét $deg(q,f,D) = deg(q+[p-q], f+[p-q], D)\ \forall p+q \in D$ theo $(D4)$

$\Rightarrow deg(q,f,D) = deg(p,\ f+p-q, D)\ \forall p+q \in D$

Mặt khác $deg(p,f,D) = deg(p, f+p-q, D)\ \forall p+q \in D$ do

Đặt $h(t,x)$ thỏa $\begin{cases} h(0,x) = f(x) \\ h(1,x) = f(x)+p-q \end{cases} \Rightarrow h(t,x) = f(x) + t(p-q)$

Xét $h(t,x) = x - H(t,x) \qquad \forall (t,x) \in [0,1] \times \overline{D}$

Để áp dụng bất biến đồng luân $deg(p, h(0,.), D) = deg(p, h(1,.), D)$ thì :

1) H liên tục từ $[0,1]\times\overline{D}$ và $\overline{H([0,1]\times\overline{D})}$ compact

Do $h(t,x) = x - H(t,x) \Leftrightarrow H(t,x) = x - h(t,x) = x - f(x) - t(p-q)$.

Mà $f(x) = (Id - T)(x) \Rightarrow T(x) = x - f(x)$

$\Rightarrow H(t,x) = T(x) - t(p-q)$

Dễ thấy $H(t,x)$ liên tục do $T(x)$ liên tục f là trường vector compact.

Xét CM $\overline{H([0,1]\times\overline{D})}$ compact trong E

Lấy $z \in H([0,1]\times\overline{D})$ thì có $(t,x) \in [0,1]\times\overline{D}$ sao cho $z = H(t,x)$

$\Rightarrow \forall \{z_n\} \subset H([0,1]\times\overline{D})$ có dãy $\{(t_n,x_n)\} \subset [0,1]\times\overline{D}$ sao cho

$$z_n = H(t_n,x_n) = T(x_n) - t_n(p-q) \qquad \forall \{t_n\} \subset [0,1], \forall \{x_n\} \subset \overline{D}$$

$$\Rightarrow T(x_n) = z_n + t_n(p-q) \qquad \forall \{t_n\} \subset [0,1], \forall \{x_n\} \subset \overline{D}$$

Đặt $b_n = T(x_n) \Rightarrow b_n \in T(\overline{D}) \subset \overline{T(\overline{D})} \qquad \forall x_n \in \overline{D}$

Mà T là ánh xạ compact do f là trường vector compact $\Rightarrow \overline{T(\overline{D})}$ compact.

$\Rightarrow \forall \{b_n\} \subset \overline{T(\overline{D})}$ thì có dãy con $\{b_{n_k}\} \subset \{b_n\} \subset \overline{T(\overline{D})}$ sao cho $b_{n_k} \to b \in \overline{T(\overline{D})}$

Xét $b_{n_k} = T(x_{n_k}) = z_{n_k} + t_{n_k}.(p-q) \qquad \forall t_{n_k} \in [0,1]$

Vì $\{t_{n_k}\} \subset [0,1]$ bị chặn nên theo ĐL Bolz - Wei, có ít nhất một dãy con

$$\{t_{n_{k_m}}\} \subset \{t_{n_k}\} \text{ sao cho } \lim_{m\to\infty} t_{n_{k_m}} = t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{b_{n_{k_m}}} = z_{n_{k_m}} + (p-q).\underset{\substack{\downarrow \\ t}}{t_{n_{k_m}}}$$

$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} z_{n_{m_k}} = b - t(p-q)$

Ta có $\begin{cases} z_n = H(t_n, x_n) \in H\left([0,1]\times\overline{D}\right) \subset \overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)} & \forall\{(t_n,x_n)\}\subset[0,1]\times\overline{D} \\ \lim\limits_{m\to\infty} z_{n_{m_k}} = b - t(p-q) \in \overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)} & (*) \end{cases}$

CM $(*)$: Lấy $\{z_l\} = \left\{z_{n_{k_m}}\right\} \in H\left([0,1]\times\overline{D}\right)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} z_l = z$

Vì $\overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)}$ đóng nên $z \in \overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)}$

Chọn $z = b - t(p-q) \Rightarrow$ CM $(*)$ xong .

——————— Tiếp tục bài toán

Với dãy $\{z_n\} \subset \overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)}$ bất kỳ, có dãy con $\left\{z_{n_{m_k}}\right\}$ hội tụ về $b - t(p-q)$

$\Leftrightarrow \overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)}$ compact.

2) $p \in E \setminus h([0,1]\times\partial D)$

Xét $\forall t' \in [0,1]$ thì $\|(t'q + (1-t')p) - p\| \le t'\|q-p\| < t'r < r$

$\Rightarrow (t'q + (1-t')p) \in B(p,r) \subset E\backslash f(\partial D) \qquad \forall t' \in [0,1], \forall p, q \in B(p,r)$

- Mà $p \in B(p,r) \subset E \setminus f(\partial D)$ do giả sử nếu $p \in E \setminus h([0,1]\times\partial D)$ thì

$\exists(t',x') \in [0,1]\times\partial D$ sao cho $p = h(t',x') = f(x') + t'(p-q)$

$\Rightarrow f(x') = t'q + (1-t')p \in B(p,r) \subset E\backslash f(\partial D) \qquad \forall t' \in [0,1]$

Mà $f(x') \in f(\partial D) \qquad \forall x' \in \partial D$

$\Rightarrow$ Vô lý $\Rightarrow$ Vậy $p \in E \setminus h([0,1]\times\partial D)$.

Bài 8.4.2. Cho D là tập mở khác trống trong KG Banach E và f là trường vector compact từ $\overline{D}$ vào E. Cho $p \in E\backslash f(\partial D)$ sao cho $deg(p,f,D) \neq 0$. CMR khi q khá gần p thì phg trình $f(x) = q$ có nghiệm trong D.

Chứng minh :

- Do ánh xạ $deg(.,f,D)$ liên tục từ $E\backslash f(\partial D) \to \mathbb{Z}$ đã CM ở **8.4.1**

$\Rightarrow$ Khi q đủ gần $p \in E\backslash f(\partial D)$ thì $deg(q,f,D) = deg(p,f,D)$

- Theo giả thiết, thì $deg(p,f,D) \neq 0$
- Vậy $deg(q,f,D) = deg(p,f,D) \neq 0$
- Áp dụng tính chất $(D1)$ của Đ lý 8.5, với $deg(q,f,D) \neq 0$ ta được :

$$\exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = q$$

Do đó $f(x) = q$ giải được hay có nghiệm trong D.

Notes:

Nếu với $deg\,(p, f, D) \neq 0$ và $f\,(x) = p$ có nghiệm

$\Rightarrow$ Chưa thể KL $f\,(x) = q$ cũng có nghiệm khi q gần p.

Bài 8.4.3. Cho $J = (a, b)$ là khoảng mở chứa 0 và số thực$\alpha \neq 0$. Cho $n \in \mathbb{N}$ bất kỳ và hàm số $f\,(t) = \alpha.t^n \quad \forall t \in J$. Tính $deg\,(0, f, J)$.

Chứng minh:

- Với $J = (a, b)$ với gt $a < 0 < b \Rightarrow \partial J = \{a, b\}$.
Khi đó $f\,(\partial J) = \{\alpha.a^n, \alpha.b^n\}$ và $f^{-1}\,(0) = \{0\}$
Xét f khả vi Frechet liên tục trên J có $f'\,(t) = n\alpha t^{n-1} \Rightarrow f'\,(0) = 0$
$\Rightarrow f^{-1}\,(0) = 0$ nên không khả đảo, do đó không thể tính trực tiếp $deg\,(0, f, J)$ mà ta sẽ tính $deg\,(p, f, J)$ với p là lân cận của 0.
- Xét với $r > 0$ đủ nhỏ sao cho $r < \min\{|a|^n, |b|^n\}$ thì

$$\Rightarrow \alpha.r < \alpha \min\{|a|^n, |b|^n\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha.r \notin f\,(\partial J) \\ \alpha.r \text{ đủ gần } 0 \end{cases}$$

- Ở bài **8.4.1.** ta đã CM được với $D = J$ là tập mở khác trống trong $\mathbb{R}$ đầy đủ. $f\,(t) = \alpha.t^n$ là trường vector compact trên J $(*)\Rightarrow deg\,(., f, J)$ liên tục và

$$deg\,(0, f, J) = deg\,(\alpha.r, f, J)$$

Xét phương trình $f\,(t) = \alpha.r \Leftrightarrow \alpha.t^n = \alpha.r \Rightarrow t^n = r$.
- **Xét khi n chẵn hay $n-1$ lẻ ta được $\mathbf{t_{1,2}} = \pm\sqrt[n]{r}$.**
Ta có $f'\,(t_1)\,.f'\,(t_2) = \left[n\alpha\left(\sqrt[n]{r}\right)^{n-1}\right].\left[n\alpha\left(-\sqrt[n]{r}\right)^{n-1}\right]$

$$= (-1)^{n-1} n^2\alpha^2\left(\sqrt[n]{r}\right)^{2n-2}. < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall\,(n-1)\text{lẻ} \quad \Rightarrow \text{sign}f'\,(t_1) = -\text{sign}f'\,(t_2)$$

Áp dụng $(D7)$, lúc đó

$$deg\,(\alpha r, f, J) = \sum_{t \in f^{-1}(\alpha r)} \text{sign}f'\,(t) = \text{sign}f'\,(t_1) + \text{sign}f'\,(t_2) = 0$$

Khi đó $deg\,(0, f, J) = deg\,(\alpha r, f, J) = 0$
- **Xét khi n lẻ hay $n-1$ chẵn ta được $\mathbf{t} = \sqrt[n]{r}$.**

Mà $n.t^{n-1} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall\,(n-1)\,\vdots\,2$

$\Rightarrow \text{sign}\,(\alpha n.t^{n-1}) = \text{sign}\,(\alpha) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall\,(n-1)\,\vdots\,2$

$$\Rightarrow deg\left(\alpha r, f, J\right) = \sum_{t\in f^{-1}(\alpha r)} \text{sign} f'\left(t\right) = \text{sign} f'\left(t\right) = \text{sign}\left(\alpha n.t^{n-1}\right) = \text{sign}\alpha$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } deg\left(0, f, J\right) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ \text{sign}\alpha & \text{khi } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

——————— CM $(*) f\left(t\right) = \alpha.t^n$ là trường vector compact trên $D = J = (a, b)$

- Lưu ý tính chất " Nếu h, g là ánh xạ liên tục $X \to Y$ thì $h\left(x\right).g\left(x\right)$ cũng là ánh xạ liên tục."

- Áp dụng bằng quy nạp: Khi $n = 1$, Hiển nhiên

Khi $n = 2$, Đặt $f\left(x\right) = \alpha x$ và $g\left(x\right) = x$

Giả sử $n = k$ đúng tức $\alpha.x^k$ liên tục

Xét $n = k + 1$. Lại đặt $f\left(x\right) = \alpha.x^k$ l tục và $g\left(x\right) = x$

$\Rightarrow f\left(t\right) = \alpha.t^n$ liên tục.

- Mặt khác đặt T thỏa $f = Id_{\overline{D}} - T$ liên tục trên $\overline{D}$

$\Rightarrow T$ liên tục trên $\overline{D}$, mà $\overline{D} = [a, b]$ compact trong $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{T\left(\overline{D}\right)}$ cũng compact, T liên tục$\Rightarrow$Vậy f là trường vector compact.

——————————————————————-

Bài 8.4.4. Cho tập $D = (-1, 1)$ mở và $f\left(x\right) = x^2$. CMR:

$i)$ PTr $f\left(x\right) = 0$ giải được trong D

$ii)$ Khi q khá gần 0 thì ph trình $f\left(x\right) = q$ chưa chắc giải được trong D.

Chứng minh :

$i)$ Xét $f\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \in D$

$\Rightarrow$Ph trình $f\left(x\right) = 0$ giải được trong D

$ii)$ Xét $deg\left(0, f, D\right) = deg\left(p, f, D\right)$ do $deg\left(., f, D\right)$ liên tục từ $\mathbb{R}\backslash f\left(\partial D\right) \to \mathbb{Z} \quad \forall p$ gần 0

Mà $p \in \mathbb{R}\backslash f\left(\partial D\right)$ tức là $p \neq 1$

Xét $\begin{cases} p \in \mathbb{R}\backslash f\left(\partial D\right) \\ p \in \mathbb{R}\backslash g\left(\partial D\right) \end{cases}$. Để CM $deg\left(p, f, D\right) = deg\left(p, g, D\right)$ ta sẽ sd bất biến đồng luân.

Đặt $h\left(t, x\right)$ sao cho $\begin{cases} h\left(0, x\right) = f\left(x\right) \\ h\left(1, x\right) = g\left(x\right) = f\left(x\right) + \left(g - f\right)\left(x\right) \end{cases}$

$\Rightarrow h\left(t, x\right) = f\left(x\right) + t\left(g - f\right)\left(x\right)$

$\Rightarrow H\left(t, x\right) = x - h\left(t, x\right) = x - f\left(x\right) - t\left(g - f\right)\left(x\right) = x - x^2 - t\left(1 - x^2\right)$

Dễ thấy $H(t,x)$ liên tục và $\overline{H\left([0,1]\times\overline{D}\right)}$compact

Mặt khác $p\in\mathbb{R}\backslash h([0,1]\times\partial D)$ do .giả sử $p\in h([0,1]\times\partial D)$ thì có $(t_0,x_0)\in[0,1]\times\partial D$ sao cho $h(t_0,x_0)=p$

$\Rightarrow f(x_0)+t_0(g-f)(x_0)=p$

$\Leftrightarrow (1-t_0)x_0^2+t_0=p \qquad \forall t_0\in[0,1], x_0\in\partial D=\{-1,1\}$

Xét $x_0=-1\Rightarrow h(t,-1)=1\neq p$

$x_0=1\Rightarrow h(t,-1)=1\neq p$

$\Rightarrow$ Vô lý nên $p\in\mathbb{R}\backslash h([0,1]\times\partial D)$

Vậy $deg(p,h(0,.),D)=deg(p,h(1,.),D)$

$\Leftrightarrow deg(p,f,D)=deg(p,g,D)$

Ta có $g(x)=1 \qquad \forall x\in\overline{D}$

$\Rightarrow$Ph trình $g(x)=p$ vô nghiệm$\Rightarrow deg(p,g,D)=0$

$\Rightarrow deg(p,f,D)=0$ nên không thể kết luận.

Cụ thể xét $p=-\dfrac{1}{n}$ gần 0 thì $f(x)=p$ không giải được.

Bài 8.4.5. Cho D là tập mở, lồi, bị chặn và khác trống trong $\mathbb{R}^n$. Ánh xạ $f:\ \overline{D}\to\mathbb{R}^n$ liên tục. Giả sử $f(\partial D)\subset D$. CMR : f có điểm bất động trong D.

Chứng minh: (**Do D khác trống nên ta chọn được** $a\in D$)

- Trước tiên ta xét trường hợp f là hàm hằng với :

$$f:\ \overline{D}\to\mathbb{R}^n \quad \text{Trong đó : } f(x)=a \quad \forall x\in\overline{D}$$

Ta có : $deg(a,Id,D)=1$ do $a\in D$ theo tính chất $(D3)$ của ĐL 8.5

Theo tính chất $(D4)$ thì $deg(a,Id,D)=deg(0,Id-a,D) \quad \forall a\in D$

$\Rightarrow deg(0,Id-a,D)=1\neq 0$

Theo tính chất $(D1)$ thì có $x_0\in D$ sao cho $(Id-a)(x_0)=0$

$$\Leftrightarrow \text{ hay } \exists x_0 \text{ sao cho } (Id-a)(x_0)=(Id-f)(x_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \text{ hay } \exists x_0=a \text{ sao cho } f(x_0)=x_0=a\in D.$$

Vậy f có điểm bất động trong D

- Tiếp theo ta xét khi f là ánh xạ bất kỳ thì:

Đặt $g(x)=a \quad \forall x\in\overline{D}$ như phần trên, khi đó :$deg(a,Id,D)=1$

$$\Rightarrow deg(0,Id-a,D)=deg(0,Id-g,D)=1$$

Ta cần tính $deg\left(0, Id - f, D\right)$bằng cách áp dụng bất biến đồng luân $(D5)$:

Đặt $h\left(t, x\right)$ thỏa $\begin{cases} h\left(0, x\right) = \left(Id - f\right)\left(x\right) = x - f\left(x\right) \\ h\left(1, x\right) = \left(Id - g\right)\left(x\right) = x - a \end{cases}$ và

$h\left(t, x\right) = x - H\left(t, x\right) \quad \forall \left(t, x\right) \in [0, 1] \times \overline{D}$

Để chứng minh $deg\left(0, Id - f, D\right) = deg\left(0, Id - g, D\right)$ thì ta cần chứng minh

$a)$ Ánh xạ f được ĐN tốt hay:

$$\begin{cases} \left(Id - f\right) \text{ là trường vector compact } \quad (1a) \\ 0 \in \mathbb{R}^n \setminus \left(Id - f\right)\left(\partial D\right) \qquad (2a) \end{cases}$$

$b)H$ liên tục từ $[0, 1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ sao cho $\overline{H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)}$ compact

$c)$ $0 \in \mathbb{R}^n \setminus h\left([0, 1] \times \partial D\right)$

- Ta sẽ chứng minh lần lượt :

$(1a)$. **Đặt** $T = Id - \left(Id - f\right) = f \Leftrightarrow$ **ta cần CM** T **là ánh xạ compact.**

Ta đã có : f liên tục $\Rightarrow T$ cũng liên tục

Mặt khác $\overline{D}$ đóng và bị chặn (do D bị chặn) trong $\mathbb{R}^n$ nên compact trong $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow T\left(\overline{D}\right)$ compact$\Rightarrow$$T$ là ánh xạ compact (theo ĐN 8.1).

$(2a)$. **Giả sử** $0 \notin \mathbb{R}^n \setminus \left(Id - f\right)\left(\partial D\right)$ **hay** $\exists z \in \partial D$ **sao cho** $0 = \left(Id - f\right)\left(z\right) = z - f\left(z\right)$

$$\Rightarrow f\left(z\right) = z \in \partial D \text{ mà } \begin{cases} f\left(\partial D\right) \subset D \text{ hay } f\left(z\right) \in D \\ D \text{ mở nên } \partial D \cap D = \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ Mâu thuẫn hay } 0 \notin \mathbb{R}^n \setminus \left(Id - f\right)\left(\partial D\right)$$

(b) **Ta có :** $H\left(t, x\right) = x - h\left(t, x\right)$

$$= x - \left[x - \left(1 - t\right) f\left(x\right) - ta\right] = \left(1 - t\right) f\left(x\right) + ta \text{ liên tục do } f\left(x\right) \text{ l.tục}$$

Mặt khác $\overline{D}$ đóng và bị chặn (do D bị chặn) trong $\mathbb{R}^n$ nên compact trong $\mathbb{R}^n$

$[0, 1]$ compact trong $\mathbb{R}$ nên $[0, 1] \times \overline{D}$ cũng compact ma $H\left(t, x\right)$ liên tục

Do đó $\overline{H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)}$ cũng compact

(c) **Giả sử** $0 \notin \mathbb{R}^n \setminus h\left([0, 1] \times \partial D\right)$ **hay** $0 \in h\left([0, 1] \times \partial D\right)$**, tức là**

$$\exists \left(x', t'\right) \in [0, 1] \times \partial D \text{ sao cho } h\left(t', x'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists x' \in \partial D, \exists t' \in [0, 1] \text{ thỏa } x' - \left(1 - t'\right) f\left(x'\right) - t'a = 0$$

$$\Rightarrow x' = \left(1 - t'\right) f\left(x'\right) + t'a \text{ với } x' \in \partial D$$

Mà D lồi nên $(1-t')\,f(x') + t'a \in D$ với $f(x') \in f(\partial D) \subset D$

hay $x' = (1-t')\,f(x') + t'a \in D$ mâu thuẫn với $x' \in \partial D, D$ mở

Vậy $0 \in \mathbb{R}^n \setminus h([0,1] \times \partial D)\, a, b, c$ đã CM xong.

Theo $(D5)$ **thì** $deg(0, h(0,.), D) = deg(0, h(1,.), D)$

hay $deg(0, Id - f, D) = deg(0, Id - g, D) = 1 \neq 0$

Do đó theo $(D1)$, $\exists x_0 \in D$ sao cho $(Id - f)(x_0) = 0$ hay $f(x_0) = x_0$

Vậy f có x_0 là điểm bất động trong D

Bài 8.4.6. Cho X là tập lồi, mở, khác trống trong $\mathbb{R}^n$ và ánh xạ liên tục $g: \overline{X} \to \overline{X}$. Chứng minh rằng g có điểm bất động trong $\overline{X}$.

Chứng minh :

- Nếu $g(x)$ là hàm hằng : $g(x) = a,\ \forall a \in X,\ x \in \overline{X}$

Ta có: $deg(a, Id, X) = 1$ theo tính chất $(D3)$

Theo $(D4)$ thì $deg(a, Id, X) = deg(0, Id - a, X)$ nên $deg(0, Id - a, X) = 1$

hay phương trình $(Id - a)(x) = 0$ có nghiệm trong X

- Nếu $g(x)$ là hàm số bất kỳ và $a \in X$.

Ta có $deg(0, x - a, X) = deg(0, Id - a, X) = 1$

Xét chứng minh $deg(0, x - a, X) = deg(0, x - g(x), X)$

Đặt $h(t,x) : [0,1] \times \overline{X} \to \overline{X}$

$h(0,.) = x - a$

$h(1,.) = x - g(x)$

$\Rightarrow h(t,x) = x - tg(x) - (1-t)\,a$

Để chứng minh $deg(0, h(0,.), X) = deg(0, h(1,.), X)$, ta thì

$i)$ $H(t,x) = x - h(t,x)$ liên tục trên $[0,1] \times \overline{X}$

$ii)$ $\overline{H\left([0,1] \times \overline{X}\right)}$ compact.

$iii)$ $0 \in \mathbb{R}^n \setminus h([0,1] \times \partial X)$

- Ta dễ dàng chứng minh được $H(t,x) = tg(x) + (1-t)\,a$ liên tục với $t \in [0,1], a \in X$
$g(x) : \overline{X} \to \overline{X}$ liên tục (i)

- Tương tự $[0,1] \times \overline{X}$ compact do X bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $[0,1]$ compact. Mà $H(t,x)$ liên tục

Do đó : $\overline{H\left([0,1] \times \overline{X}\right)}$ compact (ii)

- Nếu $0 \in \mathbb{R}^n \setminus h([0,1] \times \partial X)$ thì bài toán được chứng minh.

Xét nếu $0 \in h([0,1] \times \partial X)$

Khi đó $\exists (t_0, x_0) \in [0,1] \times \partial X$ sao cho $h(t_0, x_0) = 0$

hay $x_0 - t_0 g(x_0) - (1 - t_0) a = 0$

$\Rightarrow x_0 = t_0 g(x_0) + (1 - t_0) a$

Xét

Nếu $t_0 = 0$ thì $x_0 = a \in X$. Mâu thuẫn với $x \in \partial X$

Nếu $0 < t_0 < 1$ thì theo bài toán phụ $(*)$ với $x_1 = g(x_0) \in \overline{X}$ và $x_2 = a \in X$

Khi đó $x_0 = t_0 g(x_0) + (1 - t_0) a \in X$

Mâu thuẫn với $x \in \partial X$

Nếu $t_0 = 1$. Khi đó $x_0 = g(x_0)$

Khi đó $x_0$là điểm bất động của $g(x)$ với $x_0 \in \partial X$.

Bài toán phụ : Cho X là tập lồi, khác trống và $x_1 \in \overline{X}$, $x_2 \in \mathring{X}$

CMR $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \mathring{X} \quad \forall \lambda \in (0,1)$

Hơn thế nữa; nếu X mở thì $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in X$

<u>Chứng minh:</u>

Ta có $x_2 \in \mathring{X}$ nên tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho có lân cận mở $B(x_2, \epsilon) \subset X$

Lấy $y \in X$- lồi sao cho $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \qquad \forall \lambda \in (0,1)$ $\qquad (a)$

Để chứng minh $y \in \mathring{X}$, ta sẽ chứng minh $\{z | \, \|z - y\| < \epsilon (1 - \lambda)\} \subset X$

Lấy z thỏa $\|z - y\| < \epsilon (1 - \lambda)$ như hình vẽ

Mà $x_1 \in \overline{X}$ nên $\left\{ x \mid \|x - x_1\| < \dfrac{\epsilon (1 - \lambda) - \|z - y\|}{\lambda} \right\} \cap X \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists z_1 \in X$ sao cho $\|z_1 - x_1\| < \dfrac{\epsilon (1 - \lambda) - \|z - y\|}{\lambda}$ $\qquad (b)$

Lấy $z_2 = \dfrac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda}$kết hợp với $(a), (b)$, ta được

$$\|z_2 - x_2\| = \left\| \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda} - x_2 \right\| = \left\| \frac{(z - \lambda z_1) - (y - \lambda x_1)}{1 - \lambda} \right\| = \frac{1}{1 - \lambda} \|(z - y) + \lambda (x_1 - z_1)\|$$

$\Rightarrow \|z_2 - x_2\| \leq \dfrac{1}{1 - \lambda} (\|z - y\| + \lambda \|x_1 - z_1\|) < \epsilon$

Do đó $z_2 \in X$

Mà $z_2 = \dfrac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda}$ hay $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in X$

Mà X lồi nên $z \in X$

Ta có $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$ và $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$

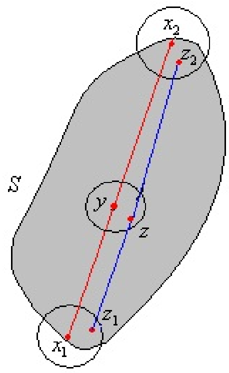
Xét $\|z - y\| \le \lambda \|z_1 - x_1\| + (1 - \lambda) \|z_2 - x_2\|$

$\Rightarrow \|z - y\| < \lambda \left(\dfrac{\epsilon (1 - \lambda) - \|z - y\|}{\lambda} \right) + (1 - \lambda) \epsilon < 2 (1 - \lambda) \epsilon - \|z - y\|$

$\Rightarrow 2 \|z - y\| < 2\epsilon (1 - \lambda)$

Vậy $\{z \in X | \|y - z\| < \epsilon (1 - \lambda)\} \subset X$

Do đó $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \overset{\circ}{X}$



Hơn thế nữa nếu X mở thì $\overset{\circ}{X} = X$

Do đó $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in X$ ■

Bài 8.4.7. Cho$D$ là một tập mở bị chặn khác trống trong N và f là ánh xạ liên tục từ $\overline{D}$ vào N. Giả sử $0 \in D$ và $\langle x, f(x) \rangle > 0$ $\forall x \in \partial D$. CMR: ph trình $f(x) = 0$ giải được trong D.

Chứng minh :

- Nhận xét: $0 \notin f(\partial D)$ do giả sử nếu $0 \in f(\partial D)$ thì có $z \in \partial D$ sao cho $f(z) = 0$.Khi đó

$$\langle z, f(z) \rangle = 0 \text{ với } z \in \partial D \Rightarrow \text{Vô lý}$$

- Theo G Thiết thì f là trường vector compact và N Hibert, ta cần xét.

- Xét trường hợp nếu f là ánh xạ đồng nhất, hay $f(x) = Id = x \quad \forall x \in \overline{D}$.

Khi đó do D mở nên $\forall x \in \partial D$ và $0 \in D$ thì $x \neq 0$

$\Rightarrow \langle x, f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 > 0 \quad \forall x \in \partial D$.

Mặt khác $deg(0, f, D) = deg(0, Id, D) = 1 \quad$ do $0 \in D$ theo $(D3)$

Áp dụng $(D1)$ ta thì $\exists x_0 = 0 \in D$ sao cho $f(x) = Id = 0$ hay f giải được trong D.

- Xét nếu f là ánh xạ bất kỳ,

Tìm hàm $h(t,x)$ sao cho $\begin{cases} h(0,x) = Id = x \\ h(1,x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow h(t,x) = tf(x) + (1-t)x$

Đặt $H(t,x) = x - h(t,x) = t[x - f(x)]$

Ta cần Chứng minh $deg(0, Id, D) = deg(0, f, D) = 1$ hay

$$deg(0, h(0,.), D) = deg(0, h(1,.), D)$$

Để áp dụng bất biến đồng luân $(D5)$ ta cần chứng minh thêm:

$$1) H \text{ liên tục } [0,1] \times \overline{D} \to N \text{ sao cho } \overline{H\left([0,1] \times \overline{D}\right)} \text{ compact}$$

$$2)\ 0 \in N \setminus h([0,1] \times \partial D)$$

Xét $H(t,x) = t[x - f(x)]$ liên tục do f liên tục, với chuẩn $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$

$H(t_0, x_0) - H(s,r) = t_0[x_0 - f(x_0)] - s[r - f(r)] = [t_0 x_0 - s.r] + [f(x_0) - f(r)]$

Mà $[0,1] \times \overline{D}$ compact nên $H\left([0,1] \times \overline{D}\right)$ compact $\Rightarrow \overline{H\left([0,1] \times \overline{D}\right)}$ compact

Tiếp theo, xét $0 \in N \setminus h([0,1] \times \partial D)$. Giả sử $0 \in h([0,1] \times \partial D)$.

$$\Leftrightarrow \exists (t', x') \in [0,1] \times \partial D \text{ sao cho } h(t', x') = 0$$

$$\Rightarrow \exists t' \in [0,1], \exists x' \in \partial D \text{ sao cho } t' f(x') + (1-t') x' = 0$$

$$\Rightarrow \exists t' \in [0,1], \exists x' \in \partial D \text{ sao cho } \langle x', t' f(x') + (1-t') x' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \exists t' \in [0,1], \exists x' \in \partial D \text{ sao cho } (1-t') \langle x', x' \rangle + t' \langle x', f(x') \rangle = 0$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \langle x', f(x') \rangle > 0 & \forall x' \in \partial D \\ \langle x', x' \rangle = \|x'\|^2 > 0 & \forall x' \in \partial D \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-t') \langle x', x' \rangle + t' \langle x', f(x') \rangle > 0 \quad \forall t' \in [0,1], x' \in \partial D$$

$$\Rightarrow \text{ Mâu thuẫn. Vậy } 0 \in N \setminus h([0,1] \times \partial D)$$

- Áp dụng $(D5)$, ta được

$$deg(0, h(0,.), D) = deg(0, h(1,.), D)$$

$$\Leftrightarrow deg(0, Id, D) = deg(0, f, D) = 1$$

- Theo $(D1)$, ta có $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x) = 0$ với $deg(0, f, D) = 1 \neq 0$.

Bài 8.4.8. Cho D là một tập mở bị chặn khác trống trong $\mathbb{R}^n$ và f, g là 2 ánh xạ liên tục từ $\overline{D} \to \mathbb{R}^n$. Giả sử $\|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\| \quad \forall x \in \partial D$. CMR:

$$deg(0, f, D) \text{ và } deg(0, g, D) \text{ xác định và bằng nhau .}$$

Chứng minh :

- Ta có D là mở bị chặn khác trống trong $\mathbb{R}^n$ và f, g là 2 ánh xạ liên tục từ $\overline{D} \to \mathbb{R}^n$ nên
$\Rightarrow f, g$ là các trường vector compact (KQ bài **8.3.1.**) và các ánh xạ $deg(0, f, D), deg(0, g, D)$ xác định, liên tục từ $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial D) \to \mathbb{Z}$.

- Ta đặt $h(t, x) : [0, 1] \times \overline{D}$ sao cho $\begin{cases} h(0, x) = f(x) \\ h(1, x) = g(x) \end{cases}$

$\Rightarrow h(t, x) = tg(x) + (1 - t) f(x)$

$\Rightarrow H(t, x) = x - tg(x) - (1 - t) f(x)$

- Để Chứng minh $deg(0, f, D) = deg(0, g, D)$.

Hay $deg(0, h(0, .), D) = deg(0, h(1, .), D)$ thì cần CM

1) H liên tục và $\overline{H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)}$ là tập compact.

2) $0 \notin h([0, 1] \times \partial D)$.

Xét CM 1). Ta có : f, g là các trường vector compact nên $(x - f(x))$ và $(x - g(x))$ liên tục

$\Rightarrow H(t, x) = t(x - f(x)) + (1 - t)(x - g(x)) = x - tg(x) - (1 - t) f(x)$ liên tục

Mặt khác $\overline{D}$ đóng và D bị chặn nên $\overline{D}$ cũng bị chặn trong $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \overline{D}$ compact trong $\mathbb{R}^n$ và $[0, 1]$ compact trong $\mathbb{R}$

$\Rightarrow [0, 1] \times \overline{D}$ là tập compact, mà $H(t, x)$ liên tục

$\Rightarrow H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)$ compact $\Rightarrow \overline{H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)}$.

Xét CM 2). Giả sử $0 \in h([0, 1] \times \partial D)$

Khi đó $\exists (t', x') \in [0, 1] \times \partial D$ sao cho $h(t', x') = 0$

$\Leftrightarrow (1 - t') f(x') + t' g(x') = 0$

$\Rightarrow f(x') = t' [f(x') - g(x')]$

$\Rightarrow \|f(x')\| = t' \|f(x') - g(x')\| \leq \|f(x') - g(x')\| \quad \forall t' \in [0, 1], \forall x' \in \partial D$

Mà theo giả thiết thì $\|f(x)\| < \|f(x) - g(x)\| \qquad \forall x \in \partial D \Rightarrow$Vô lý

Vậy $0 \notin h([0, 1] \times \partial D)$

- Do đó theo $(D5) deg(0, h(0, .), D) = deg(0, h(1, .), D)$ hay

$$deg(0, f, D) = deg(0, g, D)$$

Exercise 7.1. (Bài 8.4.9.) Cho D là tập mở, bị chặn, khác trống trong $\mathbb{R}^n$. $a \in D$ và f là ánh xạ l. tục từ $\overline{D} \to \mathbb{R}^n$. Cho $\lambda \in \mathbb{R}$ với $|\lambda|$ khá nhỏ, CMR ph trình $x + \lambda f(x) = a$ giải được trong D.

Chứng minh :

———— Ta xét khi $a = 0 \in D$

Khi đó với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ, và $|\lambda| < \epsilon$, ta sẽ CM ph trình $x + f(x) = 0$ giải được trong D.

Theo $(D3)$, $deg(0, Id, D) = 1$ do $0 \in D$,

Áp dụng $(D5)$để CM $deg(0, Id + kf, D) = deg(0, Id, D) = 1$, ta đặt

$$\begin{cases} h(0, .x) = Id = x \\ h(1, x) = Id + k.f(x) \end{cases} \Rightarrow h(t, x) = x + t.k.f(x)$$

$\Rightarrow H(t, x) = x - h(t, x) = -t.k.f(x)$

Do $f(x)$ liên tục $\overline{D} \to \mathbb{R}^n, t \in [0, 1]$ nên $H(t, x)$ liên tục $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \overline{D}$ (1)

Mặt khác D là tập bị chặn $\mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{D}$ compact trong $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow[0, 1] \times \overline{D}$ compact và $H(t, x)$ liên tục

$\Rightarrow H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)$ compact $\Rightarrow \overline{H\left([0, 1] \times \overline{D}\right)}$ compact (2).

Ta kiểm tra $0 \notin h([0, 1] \times \partial D)$. Giả sử $0 \in h([0, 1] \times \partial D)$ tức :

$$\exists (t', x') \in [0, 1] \times \partial D \text{ sao cho } h(t', x') = 0$$

$\Rightarrow x' + t'.k.f(x') = 0 \quad \forall x' \in \partial D$ hay $x' \neq 0$ vì D mở và $0 \in D$

$\Rightarrow \|x'\| = \|t'.k.f(x')\| = |t'| . |k| . \|f(x')\| \leq |k| . \|f(x')\| \quad \forall t' \in [0, 1]$

$\Rightarrow |k| \geq \dfrac{\|x'\|}{\|f(x')\|} \geq \dfrac{r}{\|f(x')\|} \geq \dfrac{r}{M}$

Trong đó: f liên tục trên tập compact nên liên tục đều và $\exists M > 0$ sao cho $\|f(x')\| \leq M \quad \forall x' \in \overline{D}$

Mặt khác do D mở và $0 \in D$ nên có $r > 0$ sao cho $B(0, r) \subset D$

Mà $0 \neq x' \in \partial D \Rightarrow \|x'\| \geq r$.

Ta có $|k| \geq \dfrac{r}{M}$, vì $|k|$ khá nhỏ nên ta có thể chọn k sao cho $|k| < \dfrac{r}{2M}$

$\Rightarrow \dfrac{r}{2M} > |k| \geq \dfrac{r}{M} \Rightarrow$ Vô lý.

$\Rightarrow$ Vậy $0 \in h([0, 1] \times \partial D)$ (3)

Từ $(1), (2), (3) \Rightarrow$ Áp dụng $(D5)$, ta được $deg(0, h(1, .), D) = deg(0, h(0, .), D)$

$\Leftrightarrow deg(0, Id + k.f, D) = deg(0, Id, D) = 1$

$\Rightarrow$ Theo $(D1)$ thì có $x_0 \in D$ sao cho $(Id + k.f)(x_0) = 0$

—— Trường hợp $a \neq 0$, ta xét tập $V = \{x - a : \quad x \in D\}$

Dễ thấy $0 \in V$ do $a \in D$ nên $V \neq \emptyset$

Mặt khác D mở, bị chặn nên V cũng là tập mở, bị chặn qua phép tịnh tiến h_a

$$h_a : \underset{x \to x-a}{D \to V}$$

Đặt $g(x-a) = f(x)$ với $f(x)$ liên tục $\overline{D} \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ với $y = x - a$ thì $g(y)$ cũng liên tục từ $\overline{V} \to \mathbb{R}^n$ với $\overline{V} = \left\{z - a : \quad z \in \overline{V}\right\}$

$\Rightarrow$Ta có V là tập mở, bị chặn, chứa 0 trong $\mathbb{R}^n$ và $g(y)$ liên tục $\overline{V} \to \mathbb{R}^n$ nên theo Tr hợp 1 thì có $y_0 \in V$ sao cho $(Id + k.g)(y_0) = 0$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ sao cho $y_0 = x_0 - a$ để $(Id + k.g)(x_0 - a) = 0$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ sao cho $(x_0 - a) + k.g(x_0 - a) = 0$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ sao cho $x_0 + k.g(x_0 - a) = a$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ sao cho $x_0 + k.f(x_0) = a$

Bài 8.4.13. Cho D là tập mở, lồi, khác trống trong KG Banach E. T là ánh xạ compact từ $\overline{D} \to E$ với $T(\partial D) \subset D$. CMR T có điểm bất động trong D.

Chứng minh :

Ta có T là ánh xạ compact từ $\overline{D} \to E$ nên $f = Id - T$ là trường vector compact.

$\Rightarrow T = Id - f$, mà nên

$\Rightarrow T(\partial D) = (Id - f)(\partial D) \subset D$

Áp dụng Bài **8.4.12.** ta được

Ph trình $f(x) = 0$ giải được trong D

$\Rightarrow \exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = 0$

hay $f(x_0) = x_0 - T(x_0) = 0$

$\Rightarrow x_0 = T(x_0)$

Vậy T có điểm bất động trong D.

Đề thi 2008-2009 phần bậc topo

Câu 2. Cho D là tập mở chứa 0 trong KG Banach E và f là trường vector compact từ $\overline{D} \to E$. Giả sử $0 \notin f(\partial D)$. Hỏi có $(\lambda, x) \in [0, \infty) \times \partial D$ sao cho $f(x) = \lambda.x$?

Câu 3. Cho D là tập mở chứa 0 trong KG Banach E và $\{f_m\}$ là một dãy trường vector compact hội tụ đều về trường vector compact f từ $\overline{D} \to E$. Giả sử $0 \notin f(\partial D)$. Hỏi có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $deg(0, f_m, D)$ xác định và bằng $deg(0, f, D) \quad \forall m \geq N$?

Câu 4. Cho E là KG Hilbert với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$. Đặt $f(x) = \langle x, x \rangle \quad \forall x \in E$. Hỏi f có khả vi tại mọi $x \in E$ không ?

Bài làm.

————**Câu 2.** Do

———— **Câu 3**. Xét $f(\partial D)$là tập đóng và f là một trường vector compact.

Vì $0 \notin f(\partial D)$ nên $0 \in E \backslash f(\partial D)$ hay $\exists r > 0$ sao cho $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset E \backslash f(\partial D)$

Mà $\{f_m\}$ là một dãy trường vector compact hội tụ đều về f từ $\overline{D} \to E$ hay

Cho $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho $\|f_m - f\| < \epsilon \qquad \forall m > N$

$\Rightarrow \|f_m(x) - f(x)\| < \frac{r}{2} \qquad \forall m > N, \forall x \in \overline{D}$ $(*)$

$\Rightarrow \forall x \in \partial D \subset \overline{D}$, ta có $\|f_m(x) - f(x)\| < \frac{r}{2} \qquad \Rightarrow f_m(x) \in B\left(f(x), \frac{r}{2}\right)$

Mà $0 \notin B\left(f(x), \frac{r}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f_m(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial D$

Do vậy $0 \notin f_m(\partial D) \quad \Rightarrow \quad deg(0, f_m(x), D)$ xác định $\forall m > N$

——— Đặt $h_m(t, x)$ thỏa $\begin{cases} h_m(0, x) = f(x) \\ h_m(1, x) = f_m(x) \end{cases}$

$\Rightarrow h_m(t, x) = (1 - t) f(x) + t f_m(x) \qquad \forall m > N$

Đặt $H_m(t, x) = x - h_m(t, x) = x - [(1 - t) f(x) + t f_m(x)] \qquad \forall m > N$

$\Rightarrow H_m(t, x) = (1 - t)[x - f(x)] + t[x - f_m(x)] \qquad \forall m > N$

Do f cũng là trường vector compact nên $f = Id - T$ có $T = x - f(x)$ liên tục.

Tương tự dãy $\{f_m\}$ là dãy trường vector compact nên $f_m = Id - T_m$ có $T_m = x - f_m(x)$ liên tục.

Áp dụng **câu 3.** đề thi 2011-2012 ($f = g \qquad \forall x \in \partial D$, Đặt $H(t, x)$...)

$\Rightarrow H_m(t, x) = (1 - t) T(x) + t T_m(x)$ liên tục và $\overline{H_m([0, 1] \times \overline{D})}$ compact.

—— Xét $0 \notin h_m([0, 1] \times \partial D) \qquad \forall m > N$

Ta có $h(t, x) = (1 - t) f(x) + t f_m(x) = 0$.

Vì $0 \notin f(\partial D)$ và $\{f_m\}$ hội tụ đều về f nên theo GT ở $(*)$, ta có

$$\|f_m(x) - f(x)\| < \frac{r}{2} \qquad \forall m > N, \forall x \in \overline{D}$$

và $\forall x \in \partial D \subset \overline{D}$, $\|f_m(x) - f(x)\| < \dfrac{r}{2} \qquad \Rightarrow f_m(x) \in B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$

$\Rightarrow \|h(t,x) - f(x)\| = \|[f(x) - tf(x) + tf_m(x)] - f(x)\| = |t| \, \|f_m(x) - f(x)\| < t.\dfrac{r}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in \partial D$ thì $h_m(t,x) \in B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$

Do $0 \notin f(\partial D)$nên $0 \notin B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$

$\Rightarrow h_m(t,x) \neq 0$ hay $0 \notin h_m([0,1] \times \partial D) \qquad \forall m > N$

——— Áp dụng $(D5)$, ta được $deg(0, h_m(0,.), D) = deg(0, h_m(1,.), D) \qquad \forall m > N$

$\Rightarrow deg(0, f, D) = deg(0, f_m, D) \qquad \forall m > N$

Đề thi 2011-2012

1. Cho D là một tập mở trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$, f và g là hai trường vectơ compắc từ $\overline{D}$ vào E, và s thuộc khoảng $(0,1)$. Hỏi $sf + (1-s)g$ có là một trường vectơ compắc từ $\overline{D}$ vào E hay không?

2. Cho D là một tập mở trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$, f là một trường vectơ compắc từ $\overline{D}$ vào E, và p trong E. Hỏi $f^{-1}(\{p\})$ có là một tập compắc hay không?.

3. Cho D là một tập mở trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$, f và g là hai trường vectơ compắc từ $\overline{D}$ vào E, và p trong $E \setminus f(\partial D)$. Giả sử

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in \partial D.$$

Hỏi $deg(p, f, D)$ có bằng $deg(p, g, D)$ hay không?.

4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Hỏi hệ phương trình sau đây giải được trong D hay không?

$$\begin{cases} (x^2+y^2)x + (1 - x^2 + y^2)(1 + \cos^2(2 + xy)) = \frac{1}{3}, \\ -y + \sin(1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

5. Cho $(X, ||.||)$là một không gian Banach, E là một tập con đóng của X và T là một ánh xạ co từ E vào E. Đặt

$$f(x) = x - T(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

Hỏi $f(E)$ có là một tập đóng trong X hay không?

Bài làm.

——**Câu 1.** Ta có $f = Id - T_1$ và $g = Id - T_2$ là 2 trường vector compact $\overline{D} \to E$ nên :

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1, T_2 \text{ là 2 ánh xạ liên tục} \\ \overline{T_1\left(\overline{D}\right)} \text{ và } \overline{T_2\left(\overline{D}\right)} \text{ compact} \end{cases}$$

Với $s \in (0,1)$, Đặt $[sf + (1-s)g] = Id - T$ để CM $sf + (1-s)g$ là trường vector compact hay cần CM

$$\begin{cases} T \text{ là ánh xạ liên tục} \\ \overline{T\left(\overline{D}\right)} \text{ compact} \end{cases}$$

Từ $[sf + (1-s)g] = Id - T \quad \Rightarrow T = s(Id - f) + (1-s)(Id - g) = sT_1 + (1-s)T_2$

Mà theo GT thì T_1, T_2 liên tục nên

$\Rightarrow T = sT_1 + (1-s)T_2$ cũng liên tục $\forall s \in (0,1)$ (1)

Mặt khác $\forall \{x_n\} \in T(D)$ thì có $\{a_n\} \in D$ sao cho $x_n = T(a_n)$

$\Rightarrow x_n = T(a_n) = sT_1(a_n) + (1-s)T_2(a_n)$

Đặt $b_n = T_1(a_n)$ và $c_n = T_2(a_n) \qquad \forall a_n \in D \subset \overline{D}$

$\Rightarrow x_n = T(a_n) = sb_n + (1-s)c_n$

$\Rightarrow \{b_n\} \subset T_1\left(\overline{D}\right) \subset \overline{T_1\left(\overline{D}\right)}$ compact (theo G Thiết)

Do đó có dãy con $\{b_{n_k}\}$ hội tụ về $b \in \overline{T_1\left(\overline{D}\right)}$

$\Rightarrow x_{n_k} = sb_{n_k} + (1-s)\, c_{n_k}$

Tương tự ta có $\{c_{n_k}\} \subset T_2\left(\overline{D}\right) \subset \overline{T_2\left(\overline{D}\right)}$ compact nên có dãy con $\left\{c_{n_{k_m}}\right\}$ hội tụ về $c \in \overline{T_2\left(\overline{D}\right)}$

$\Rightarrow x_{n_{k_m}} = sb_{n_{k_m}} + (1-s)\, c_{n_{k_m}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(sb_{n_{k_m}} + (1-s)\, c_{n_{k_m}}\right) = s \lim\limits_{m\to\infty} b_{n_{k_m}} + (1-s) \lim\limits_{m\to\infty} c_{n_{k_m}}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = sb + (1-s)\, c$

Ta có $x_l = x_{n_{k_m}} = T\left(a_{n_{k_m}}\right), \quad \forall a_{n_{k_m}} \in D \subset \overline{D}$ và $\overline{T\left(\overline{D}\right)}$ đóng nên nếu $\{x_l\} \subset T\left(\overline{D}\right)$ có$\{x_l\} \to x$ thì $x \in \overline{T\left(\overline{D}\right)}$

Theo tính duy nhất của giới hạn

$$x = \lim_{l\to\infty} x_l = \lim_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = sb + (1-s)\, c$$

Do đó : $\Rightarrow sb + (1-s)\, c \in \overline{T\left(\overline{D}\right)}$

Vậy với mọi dãy $\{x_n\} \in T\left(\overline{D}\right) \subset \overline{T\left(\overline{D}\right)}$ thì có dãy con $\left\{x_{n_{k_m}}\right\}$sao cho

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = sb + (1-s)\, c = x \in \overline{T\left(\overline{D}\right)}$$

Do đó $\overline{T\left(\overline{D}\right)}$ compact . (2)

Từ (1) và (2),$\Rightarrow$ đpcm

————————————————————**Câu 2.**

Áp dụng kết quả bài 8.3.3.

Ta có với $K = \{p\}$ là tập compact trong E

$\Rightarrow f^{-1}\{p\} = f^{-1}(K)$ cũng compact.

————————————————————**Câu 3.**

- Xét D mở, khác trống trong E. f, g là 2 trường vector compact từ $\overline{D} \to E$ nên theo bài **8.4.1.** có $deg\,(., f, D)$ và $deg\,(., g, D)$ xác định và liên tục lần lượt từ $E \backslash f\,(\partial D)\,,\ E \backslash g\,(\partial D)$ vào $\mathbb{Z}$.

- Do $f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \partial D$ nên nếu $p \in E \backslash f\,(\partial D)$ thì $p \in E \backslash g\,(\partial D)$

———— Kiểm chứng : Ta giả sử $p \in g\,(\partial D)$ hay có $b \in \partial D$ sao cho $g\,(b) = p$

Mà $f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \partial D$ nên $f(b) = g(b) = p \Rightarrow p \in f\,(\partial D) \Rightarrow$Vô lý

- Để chứng minh $deg\,(p, f, D) = deg\,(p, g, D)$

———— Ta sử dụng bất biến đồng luân, tìm $h\,(t, x)$ sao cho

$$\begin{cases} h(0,x) = f(x) \\ h(1,x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow h(t,x) = tg(x) + (1-t)f(x)$$

Hay cần chứng minh $deg(p, h(0,.), D) = deg(p, h(1,.), D)$

Đặt $H(t,x) = x - h(t,x) = x - tg(x) - (1-t)f(x)$

Đặt $\begin{cases} f = Id - T_1 \\ g = Id - T_2 \end{cases}$ như **câu 1.** với f, g là các trường vector compact nên

$tf(x) + (1-t)g(x)$ là trường vector compact $\forall t \in (0,1)$

Khi $t = \{0,1\}$ thì $tf(x) + (1-t)g(x)$ sẽ là $\{f, g\}$ đã là trường vector compact

$\Rightarrow tf(x) + (1-t)g(x)$là trường vector compact $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow T = Id - [tf(x) + (1-t)g(x)] = x - [tf(x) + (1-t)g(x)] = H(t,x)$ liên tục

hay T là ánh xạ compact

Mặt khác $\overline{H([0,1] \times \overline{D})} = \overline{T([0,1] \times \overline{D})}$ compact

Cuối cùng, ta kiểm chứng $p \in E \backslash h([0,1] \times \partial D)$. Giả sử $p \in h([0,1] \times \partial D)$ tức :

$\Rightarrow \exists (t_0, x_0) \in [0,1] \times \partial D$ sao cho $h(t_0, x_0) = p$

$\Leftrightarrow t_0 g(x_0) - (1-t_0) f(x_0) = p$

$\Rightarrow f(x_0) + t_0 [f(x_0) - g(x_0)] = p$

Mà $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial D \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \partial D$

$\Rightarrow f(x_0) = p$ Vô lý do $p \in E \backslash f(\partial D)$, $x_0 \in \partial D$

———— Vậy theo $(D5)$ thì $deg(p, h(0,.), D) = deg(p, h(1,.), D)$

$\Leftrightarrow deg(p, f, D) = deg(p, g, D)$.

————————————————**Câu 4.**

————————————————**Câu 5.**

Đề thi 2009-2010

1. Cho (E, δ)là một không gian metric đầy đủ, cho f và g là hai ánh xạ từ E vào E. Giả sử $f \circ g$ là một ánh xạ co trên E, và $f \circ g = g \circ f$. Hỏi f có điểm bất động trong E hay không.

2. Cho D là một tập mở trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$, T là một một ánh xạ compắc từ $\overline{D}$ vào E, và S là một ánh xạ liên tục từ E vào E. Hỏi $S \circ T$ có là một ánh xạ compắc từ $\overline{D}$ vào E hay không .

3. Cho D là một tập mở trong một không gian định chuẩn $(E, ||.||)$, f là một trường vectơ compắc trên $\overline{D}$, và V là một tập mở trong D. Hỏi tập hợp $f(V)$ có là một tập mở trong E hay không?.

4. Cho $D = (-5, 5) \times (-5, 5)$ trong $\mathbb{R}^2$. Hỏi hệ phương trình sau đây giải được trong D hay không?

$$\begin{cases} \dfrac{15x}{16} + 9\sin[(|x| - 5)(|y| - 5)] = 1, \\ y - \cos(x + y^2) + \dfrac{1}{10^{-2} + x^2 + y^2} = 2. \end{cases}$$

5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\}$. Hỏi hệ phương trình sau đây giải được trong D hay không?

$$\begin{cases} x + \cos(2 + xy) = 0, \\ y + \dfrac{1}{5 + x^2 + y^2} = 1. \end{cases}$$

---**Câu 1**

Áp dụng tương tự như bài đã làm trang 14

---**Câu 2**

---**Câu 3**

---**Câu 4**

---**Câu 5**

Đề thi 2010-2011

1. Cho D là một tập mở trong một không gian Banach E. Cho f là một trường vectơ compắc từ $\overline{D}$ vào E, và K là một tập compắc trong $\overline{D}$. Hỏi tập $f(K)$ có đóng hay không?

2. Cho D là một tập mở trong một không gian Banach E. Cho f là một trường vectơ compắc trên $\overline{D}$, và g là một ánh xạ compắc liên tục từ $\overline{D}$ vào E, và c là một số thực dương. Giả sử $0 \notin f(\partial D)$. Hỏi: bậc tôpô $deg(f + cg, D, 0)$ có xác định và bằng $deg(f, D, 0)$ với mọi c khá nhỏ hay không?

3. Cho U là một tập mở trong một không gian Banach E và f là một ánh xạ khả vi Fréchet từ U vào một không gian Banach F. Giả sử

$$||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y|| \qquad \forall\, x, y \in U.$$

Hỏi kết luận sau đúng hay sai : $||Df(x)|| \leq 1$ với mọi x trong U.

4. Cho U là một tập mở trong một không gian Banach E và f là một ánh xạ liên tục khả vi Fréchet từ U vào một không gian Banach F. Giả sử $||Df(x)|| \leq 2$ với mọi x trong U. Hỏi kết luận sau đúng hay sai :

$$||f(x) - f(y)|| \leq 3||x - y|| \qquad \forall\, x, y \in U.$$

5. Cho E_1 và E_2 là hai không gian Banach, và E là không gian Banach tích $E_1 \times E_2$. Cho U là một tập mở trong E và f là một ánh xạ liên tục khả vi Fréchet từ U vào một không gian Banach F. Hỏi $\dfrac{\partial f}{\partial E_1}$ có xác định và liên tục tại mọi x trong U không?

——————————— Giải

——————— **Câu 1.**

Do K compact trong KG Banach E (xem trang 10 SGK GTH DMD) nên K đóng và bị chặn (*Bài* 1.3.1)

Áp dụng bài **8.3.3.** với $A = K$ đóng nên $f(A) = f(K)$ đóng.

——————— **Câu 2.**

Xét $deg(0, f, D)$ xác định thì $0 \notin (f + cg)(\partial D)$.

Do $0 \notin f(\partial D) \Rightarrow \exists r > 0$ sao cho $B(0, r) \subset E \backslash f(\partial D)$ $(*)$.

Khi đó $f(x) \notin B(0, r) \qquad \forall x \in \partial D$

$\forall x \in \partial D$, xét quả cầu $B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$ thì $0 \notin B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$

Xét $\|[f + cg](x) - f(x)\| = |c| . \|g(x)\|$.

Mà $g(x)$ là ánh xạ compact nên $g(x) \subset \overline{g(\overline{D})}$ compact, do đó

$\Rightarrow \exists M > 0$ sao cho $\|g(x)\| \leq M \qquad \forall x \in \overline{D}$ $(**)$

Vậy $\|[f+cg](x)-f(x)\| \le c.M < \frac{r}{2}$

Chọn $c=\frac{r}{2M}$ thì $[f(x)+cg(x)] \in B\left(f(x),\frac{r}{2}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in \partial D$ thì $[f(x)+cg(x)] \neq 0$

Xét $h(t,x)$ thỏa $\begin{cases} h(0,x)=f(x) \\ h(1,x)=[f+cg](x) \end{cases}$

$\Rightarrow h(t,x)=(1-t)f(x)+t[f+cg](x)$

$\Rightarrow h(t,x)=f(x)+ctg(x)$

Đặt $H(t,x)=x-h(t,x)=x-f(x)-tcg(x)=T(x)-ctg(x)$

Mà f là trường vector compact nên $T=Id-f$ liên tục $(\star)$

—- CM $H(t,x)$ liên tục $[0,1]\times\overline{D}\to E$

Cho $\epsilon>0, \exists\delta(\epsilon,(t_0,x_0))$ sao cho

$$\|H(t_0,x_0)-H(t,x)\|<\epsilon \qquad \forall (t,x)\in[0,1]\times\overline{D}; \|(t,x)-(t_0,x_0)\|<\delta$$

$$(\star)\, T \text{ liên tục } \forall\epsilon_1>0, \exists\delta_1(\epsilon_1,x_0) \text{ sao cho } \|Tx-Tx_0\|<\epsilon_1 \quad \forall x\in\overline{D}, \|x-x_0\|<\delta_1$$

$$(\star)\, g \text{ liên tục } \forall\epsilon_2>0, \exists\delta_2(\epsilon_2,x_0) \text{ sao cho } \|g(x)-g(x_0)\|<\epsilon_2 \quad \forall x\in\overline{D}, \|x-x_0\|<\delta_2$$

$$\text{Xét } \|Tx-ctg(x)-Tx_0+ctg(x_0)\| \le \|Tx-Tx_0\|+|c|\,\|t_0g(x_0)-tg(x)\|$$

$$\text{Xét } \|t_0g(x_0)-tg(x)\| \le |t_0|\,.\,\|g(x_0)-g(x)\|+|t-t_0|\,.\,\|g(x)\|$$

$$\text{Vậy } \|H(t_0,x_0)-H(t,x)\| < \|Tx-Tx_0\|+c\left[|t_0|\,.\,\|g(x_0)-g(x)\|+|t-t_0|\,.\,\|g(x)\|\right]$$

$$\text{hay } \|H(t_0,x_0)-H(t,x)\| < \|Tx-Tx_0\|+c\,|t_0|\,.\,\|g(x_0)-g(x)\|+c\,|t-t_0|\,.\,\|g(x)\|$$

Mà $g(x)$ là ánh xạ compact nên $\overline{g(\overline{D})}$ compact và $g(x)$ bị chặn bởi $M>0$ nên

$\Rightarrow \|H(t_0,x_0)-H(t,x)\|<\epsilon_1+c\epsilon_2+cM\delta=\epsilon$

Chọn $\epsilon_1=\frac{\epsilon}{3}; \epsilon_2=\frac{\epsilon}{3c}$ và $\delta=\frac{\epsilon}{3cM}$

$\Rightarrow$ Cho $\epsilon=\epsilon_1+c\epsilon_2+cM\delta$, tìm được $\delta(\epsilon,(t_0,x_0))=\min\left\{\frac{\epsilon}{3cM},\delta_1(\epsilon_1,x_0),\delta_2(\epsilon_2,x_0),\right\}$

$\Rightarrow H(t,x)$ liên tục

—- CM $\overline{H([0,1]\times\overline{D})}$ compact

Do $H(t,x)$ liên tục và áp dụng tương tự **8.4.1**

—- CM $0\notin h([0,1]\times\partial D)$

Theo G thiết $(*)$ ở trên thì $0\notin f(\partial D)\Rightarrow\exists r>0$ sao cho $B(0,r)\subset E\backslash f(\partial D)$.

Khi đó $f(x)\notin B(0,r) \qquad \forall x\in\partial D$

$\forall x\in\partial D$, xét quả cầu $B\left(f(x),\frac{r}{2}\right)$ thì $0\notin B\left(f(x),\frac{r}{2}\right)$

Xét $\|[f+cg](x)-f(x)\|=t\,|c|\,\|g(x)\|$

Khi $t=0$, khi đó $f(x)+ctg(x)=f(x) \qquad \forall x\in\partial D$

$\Rightarrow f(x) + ctg(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial D$

Khi $t \neq 0$, do $\|g(x)\| < M \qquad \forall x \in \overline{D}$ như $(**)$

Vậy $\|[f + cg](x) - f(x)\| = t\,|c|\,M < \dfrac{r}{2}$

Chọn $c = \dfrac{r}{2M}$, ta được $[f(x) + cg(x)] \in B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$ và kết hợp với $0 \notin B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right)$

Ta được $[f(x) + cg(x)] \neq 0 \qquad \forall x \in \partial D$

7.2 Khả vi

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP

Khả vi Frechet

Cho $f: \quad E \to F$, ta nói f khả vi Frechet tại $x \in E$ nếu :

— Tồn tại ánh xạ $\phi : B_E(0,r) \to F$ sao cho $\lim\limits_{h\to 0} \phi(h) = 0$.

— Tồn tại ánh xạ $Df(x) = Tx : E \to F$ tuyến tính liên tục sao cho

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \|h\| . \phi(h) \qquad \forall h \in B(0,\delta)$$

Khả vi Gateaux.

Cho $f: \quad E \to F$ và $e \in E$, ta nói f khả vi Gateaux tại $x \in E$ nếu :

— f khả vi theo hướng tại x và $Df(x) \in L(E,F)$.

— Khi đó f khả vi theo hướng tại x nếu f có đạo hàm riêng phần theo hướng theo mọi hướng trong E và có 1 ánh xạ tuyến tính $Df(x) : E \to F$ sao cho

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = Df(x)(e) \qquad \forall e \in E$$

– f có đạo hàm riêng phần theo hướng e tại x tức $= \dfrac{\partial f}{\partial e}(x)$ nếu và chỉ nếu :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial e}(x)$$

---.

Theory 7.1 Cho D mở trong KG ĐC E và f là ánh xạ từ D vào KG ĐC F. Giả sử f khả vi Frechet tại 1 điểm $x \in D$. CMR f liên tục tại x.

— Proof —

Theo ĐN : f khả vi Frechet tại $x \in D \subset E$ nếu :

– Tồn tại ánh xạ $\phi : B_E(0, r) \to F$ sao cho $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$.

– Tồn tại ánh xạ $Df(x) = Tx : E \to F$ tuyến tính liên tục sao cho

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \|h\|.\phi(h) \qquad \forall h \in B(0, \delta)$$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + \|h\|.\phi(h) \qquad \forall h \in B(0, \delta)$

$\Rightarrow \|f(y) - f(x)\| = \|Df(x)(y-x) + \|y-x\|.\phi(y-x)\|$

$\Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leq \|T(y-x)\| + \|\phi(y-x)\|.\|y-x\|$

Mà $Df(x) = Tx : E \to F$ tuyến tính liên tục nên

$$\exists C > 0 \text{ sao cho } \|T(y-x)\| \leq C\|y-x\|$$

$\Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leq \|y-x\|(M + \|\phi(y-x)\|)$

$\Rightarrow$ Cho $\epsilon = \|y-x\|.(M + \|\phi(y-x)\|)$, $\delta = \|y-x\|$

Hay tìm được $\delta(\epsilon, x) = \dfrac{\epsilon}{M + \|\phi(y-x)\|}$.\

Lemma 7.2 1 hàm khả vi Frechet thì khả vi Gateaux.

Xét f khả vi Frechet tại $x \in D \subset E$ nếu :

– Tồn tại ánh xạ $\phi : B_E(0, r) \to F$ sao cho $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$.

– Tồn tại ánh xạ $Df(x) = Tx : E \to F$ tuyến tính liên tục sao cho

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \|h\|.\phi(h) \qquad \forall h \in B(0, \delta)$$

- Xét $Df(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x) - \|h\|.\phi(h)}{h}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - \|h\|.\phi(h)}{h} = \left(\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) - \|h\| \left(\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi(h)}{h}\right)$

Chọn $h = ta$ kết hợp với $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$.

$\Rightarrow D_a f(x) = \left(\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) - \|h\| \left(\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi(h)}{h}\right)$

$\Rightarrow D_a f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+ta) - f(x)}{t}$

Ví dụ cho không gian Hilbert H với chuẩn sinh bởi tích vô hướng $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. CMR hàm $f(x) = \|x\|^2$ khả vi Frechet trên H.

Xét $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\langle x+h, x+h\rangle - \langle x, x\rangle}{h}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\langle x, x\rangle + 2\langle x, h\rangle + \langle h, h\rangle) - \langle x, x\rangle}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\langle x, h\rangle + \langle h, h\rangle}{h}$

$\Leftrightarrow \left(2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\langle x, h\rangle}{h}\right) + \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|h\|^2}{h}$

Ví dụ