Đại Học Khoa Học Tự Nhiên - Đại Học Quốc Gia TP HCM

KHOA TOÁN

K24 - Xác suất thống kê

Đỗ Văn Nhân

BÀI TẬP

GIẢI TÍCH HÀM

NÂNG CAO

University of Science - Vietnam National University - Ho Chi Minh City

Faculty of Mathematics

Statistics And Probability - 2014-2016

Nhan Do

Exercises And Solutions on

Functional Analysis

Mục lục

Preface

Future wont depend on the past.

It depends on the passion only.

Studying without thinking is nothing.

Doing without understanding ... no meaning.

Chương 1

KHÔNG GIAN METRIC

1.1 Bài tập

Bài 1. Cho $(X, +, . \|.\|)$ là một không gian định chuẩn. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} d: X \times X &\to \mathbb{R} \\ d(x,y) &= \|x-y\| \quad \forall x, y \in X \end{aligned}$$

Chứng minh rằng d là một metric trên X.

Giải. Dễ dàng bằng cách kiểm tra 3 tính chất của metric. $\square$

Bài 2. Cho (X, d), $a \in X$ và $r > 0$. Chứng minh rằng

i) $B(x, r)$ là một tập mởtrong X

ii) $B'(x, r)$ là một tập đóngtrong X

iii) $\emptyset, X$ là các tập vừa đóng vừa mở trong X

Giải.

i) Lấy $y \in B(x, r)$, ta cần tìm $\mu > 0$ sao cho $B(y, \mu) \subset B(x, r)$

Do $y \in B(x, r)$ nên $d(x, y) < r$

Chọn $\mu = r - d(x, y) > 0$, ta cần chứng minh $B(y, \mu) \subset B(x, r)$.

Lấy $z \in B(y, \mu)$, khi đó $d(y, z) < \mu$, mà

$$\begin{aligned} d(x,z) &\le d(x,y) + d(y,z) \\ \Rightarrow d(x,z) &< d(x,y) + \mu \\ \Rightarrow d(x,z) &< d(x,y) + r - d(x,y) = r \end{aligned}$$

Vậy $d(x, z) < r$ hay $z \in B(x, r)$ với mọi $z \in B(y, \mu)$. $\square$

ii) Ta sẽ chứng minh $X \backslash B'(x, r)$ là tập mở. Ta có

$$X \backslash B'(x,r) = \{t \in X \ : \ d(x,t) > r\}$$

Lấy $z \in X \backslash B'(x,r)$; ta cần tìm $\mu > 0$ sao cho

$$B(z,\mu) \subset X \backslash B'(x,r)$$

Đặt $\mu = d(x,z) - r$, lấy $y \in B(z,\mu)$, khi đó $d(y,z) < \mu$

Ta sẽ chứng minh $y \in X \backslash B'(x,r)$ hay $d(x,y) > r$. Ta có

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq d(x,z) - d(z,y) > d(x,z) - \mu \\ \Rightarrow d(x,y) &> d(x,z) - (d(x,z) - r) = r \end{aligned}$$

Vậy $d(x,y) > r$ hay

$$B(z,\mu) \subset X \backslash B'(x,r)$$

Do đó $X \backslash B'(x,r)$ là tập mở nên $B'(x,r)$ đóng. □

iii) Ta có X là tập mở vì

$$\forall x \in X,\ \exists r > 0 \text{ sao cho } B(x,r) \subset X$$

Vậy X mở trong X nên $X \backslash X = \emptyset$ là tập đóng (trong X). (1)

Mặt khác, $\emptyset$cũng mở trong X vì mệnh đề

" Lấy $x \in \emptyset$, $\exists r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset \emptyset$ thì $\emptyset$ là tập mở"

là mệnh đề đúng.

Vậy $\emptyset$ là tập mở trong X nên X là tập đóng (trong X). (2) .

Bài toán liên quan.

CMR Nếu $A \subset \mathbb{R}$ mà A vừa đóng vừa mở trong $\mathbb{R}$ thì A chỉ có thể $A = \emptyset$ hoặc $A = \mathbb{R}$.

Chứng minh.

Ta đã CM $X = \mathbb{R}$ và $\emptyset$ là các tập vừa đóng vừa mở trong $\mathbb{R}$, ta chỉ cần ch. minh cho trường hợp nếu $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ thì A không thể vừa là tập đóng, vừa là tập mở.

Giả sử khi $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ và A vừa là tập đóng, vừa là tập mở.

Do $A \neq \emptyset$ nên có $a \in A$ và $b \notin A$.

Ta áp dụng kết quả hàm đặc trưng $\chi_A(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ (tham khảo chứng minh ở bài **22** chương này).

Ta có $\chi_A(a) = 1$ và $\chi_A(b) = 0$ nên $[0,1] \subset \chi_A(\mathbb{R})$, i.e. có

$$c \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \chi_A(c) = \frac{1}{2}$$

Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của hàm $\chi_A(x)$ nên ta được đpcm.

Bài 3. CM Định lý *Tính chất duy nhất của giới hạn*

Chứng minh.

Trong KG metric (X, d), lấy dãy (x_n). Giả sử $a, b \in X$ với $a \neq b$ là hai giới hạn của (x_n).

Chọn $\epsilon = \frac{1}{2} d(a, b)$.

Mà $x_n \to a$ nên có $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, a) < \epsilon \qquad \forall n \geq n_1$

(Tương tự)

Vì $x_n \to b$ nên có $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, b) < \epsilon \qquad \forall n \geq n_2$

Lấy $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$khi đó $\forall n \geq n_0$ ta có

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(x_n, a) + d(x_n b) < 2\epsilon \\ \text{hay } d(a, b) &< \qquad\qquad d(a, b) \text{ Vô lý} \end{aligned}$$

Vậy $a = b$ nên giới hạn của $\{x_n\}$ (nếu có) là duy nhất.

$\square$

Bài 4. Cho KG metric (X, d). CMR

i) Mọi dãy hội tụ (trong X) đều là dãy Cauchy

ii) Mọi dãy Cauchy đều là dãy bị chặn.

iii) Tìm phản ví dụ cho chiều ngược lại (không đúng).

Giải.

i) Lấy $(x_n) \subset X$ sao cho $x_n \to x_0 \in X$. Khi đó

$$\forall \epsilon > 0, \text{ có } n_1 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$$

Với mọi $n, \ m \geq n_1$, ta có

$$\forall \epsilon > 0, \text{ có } n_1 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } d(x_n, x_m) < d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_1$$

Vậy (x_n) là dãy Cauchy.

ii) Lấy dãy Cauchy (u_n).

Chọn $\epsilon = 1 > 0$, khi đó $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$d(u_n, u_m) < 1 \quad \forall n, m \geq n_0$$

Chọn tiếp $m = n_0$ thì ta được $d(u_n, u_{n_0}) < 1 \qquad \forall n \geq n_0$. Do đó

$$\begin{aligned} d(u_n, u_{n_0}) &< N \qquad \forall n \text{ trong đó } N = \max\{1, d(u_1, u_{n_0}), ..., d(u_{n_0-1}, u_{n_0})\} \\ \text{hay } (u_n) &\subset B(u_{n_0}, N) \end{aligned}$$

Vậy (u_n) bị chặn.

iii) Trước tiên, ta lấy phản ví dụ cho "*Một dãy Cauchy không hội tụ*"

Chọn $X = (0, 1]$ và $x_n = \dfrac{1}{n}$ với $d(x, y) = |x - y|$

Dễ thấy $d(x_n, x_m) = \left|\dfrac{n-m}{n.m}\right| \to 0$ với $n, m \geq n_0$

Nhưng $x_n \to 0 \notin X$.

Tiếp theo, ta chọn $X = \mathbb{R}$ và $u_n = (-1)^n$ .Ta thấy $(u_n) \subset B(0, 2)$

Nhưng với $\epsilon = 1$

Chọn $n = 2n_0 + 1$ và $m = 2n_0 + 2,\ n_0 \in \mathbb{N}$ thì

$$d(x_n, x_m) = 2 > 1, \quad n, m \geq n_0$$

Bài 5. Cho (X, d) với $X = \mathbb{R}$ và $d(x, y) = |x - y|\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, lấy $Y = (0, 2]$

Khảo sát tính đóng / mở của $A = (0, 1]$ trong (X, d) và trong không gian con $(Y, d_Y.)$ Khảo sát sự hội tụ của dãy $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}}$ trong X và trong Y.

Giải.

Dễ thấy trong X, A không đóng (dãy $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \subset A$ nhưng hội tụ về $0 \notin A$) và A cũng không mở (do $B(1, r) \not\subset A,\ \forall r > 0$).

Nhưng trong Y, có $V \subset X$ sao cho $A = V \cap Y$ (với $V = [0, 1]$ đóng trong X) nên A đóng trong Y. Ngoài ra, $B(1, r) \not\subset A,\ \forall r > 0$ nên A cũng không mở trong Y.

Dãy $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{\mathbb{N}} \to 0$ trong X nhưng không hội tụ trong Y (vì $0 \notin Y$)

□

Bài 6. Cho $(E_i, d_i)\,,\ i = 1, 2, .., k$ là k KG metric. Đặt $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_k$ và $d\,:\, E \times E \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$d(X, Y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + ... + d_n^2(x_k, y_k)}$$

trong đó $X = (x_1, x_2, .., x_k)$ và $X = (y_1, y_2, .., y_k) \in E$.

i) CMR (E, d) là một KG metric

ii) Xét dãy $(X_n) \subset E$ với $X_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k\right),\ x_n^i \in E_i$ với $i = 1, 2, .., k$. CMR

$$\begin{aligned} & (X_n) \text{ là dãy hội tụ, (t. ứ Cauchy, bị chặn) trong } E \\ \Leftrightarrow & \left(x_n^i\right) \text{ đều là dãy hội tụ, (Cauchy, bị chặn) trong } E_i \qquad i = 1, 2, .., k \end{aligned}$$

iii) Xét phép chiếu $pr_i : E \to E_i$ xác định bởi

$$pr_i(X) = x_i \text{ với } X = (x_1, ..., x_i, ..., x_k)$$

CMR :

$$d(pr_i(X), pr_i(Y)) \leq d(X, Y)\,,\ \forall X, Y \in E$$

Từ đó suy ra rằng mọi phép chiếu đều là ánh xạ liên tục trên E.

Chứng minh.

i) Với $d_i(x_i, y_i)$ là metric trên X_i, $\forall i = 1, .., k$; ta dễ dàng kiểm tra 2 tính chất phân biệt dương và đối xứng.

Ta chỉ cần kiểm tra tính chất thứ 3

$$d(X, Y) + d(Y, Z) \geq d(X, Z)?$$

Ta dùng BĐT Minkowski (hoặc nếu chưa học thì áp dụng PP quy nạp với BĐT Bunhiacopski, ta có

$$\left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \leq\right) \qquad \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad \Big)$$

ii) Ta chỉ chứng minh cho trường hợp $\{X_n\}$ hội tụ $\Leftrightarrow$ $\left(x_n^i\right)$ cũng hội tụ. (Cauchy và bị chặn ch.minh tương tự).

Nếu $X_n \to X_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,$ có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(X_n, X) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k} d_j^2\left(x_n^j, x_j\right)} < \epsilon \; \forall n \geq n_0$

trong đó $X_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k\right)$ và $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \text{ có } n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } d\left(x_n^i, x_i\right) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j^2\left(x_n^j, x_j\right)} < \epsilon \; \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \left(x_n^i\right) \to x_i, \quad \forall i = 1, ..., k \; .$$

Ngược lại nếu $\left(x_n^i\right) \to x_i, \quad \forall i = 1, ..., k$ thì

$$\forall \epsilon \;\; > \;\; 0, \text{ có } n_i(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ sao cho } d_i\left(x_n^i, x_i\right) < \frac{\epsilon\sqrt{k}}{k}, \quad \forall n \geq n_i, \quad \forall i = 1, .., k$$

$$\text{Chọn } n_0 \;\; = \;\; \max\{n_1, n_2, .., n_k\} \text{ và chú ý } \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j^2\left(x_n^j, x_j\right)} < \epsilon, \qquad \forall n \geq n_0$$

Hay $\forall \epsilon > 0$, có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(X_n, X) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$, vậy $X_n \to X$.

iii) Hiển nhiên vì

$$d\left(pr_i(X), pr_i(Y)\right) = d(x_i, y_i) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j^2(x_j, y_j)} = d(X, Y)$$

và sử dụng định nghĩa liên tục để chứng minh $pr_i(X)$ liên tục.

$\square$

Bài 7. Cho (X, d) là KG metric, $A \subset X$ và $x_0 \in X$. CMR

i) Nếu A bị chặn thì tồn tại $r > 0$ sao cho $A \subset B(x_0, r)$

ii) Nếu $B \subset A$, A bị chặn thì B bị chặn và nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ bị chặn trong X thì $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ cũng bị chặn.

Chứng minh

i) Từ định nghĩa tập A bị chặn trong X, tồn tại $\omega \in X$ và $\rho > 0$ sao cho $A \subset B(\omega, \rho)$.

Ta có thể chọn $r = d(x_0, \omega) + \rho$ để $A \subset B(x_0, r)$

ii) Dễ thấy $B \subset A \subset B(x_0, r)$ nên B cũng là tập bị chặn.

Do $A_1, A_2, ..., A_n$ bị chặn trong X nên với mỗi $k \in \overline{1, .., n}$, và $x_0 \in X$, theo kết quả câu i), tồn tại $r_k > 0$ sao cho $A_k \subset B(x_0, r_k)$. Vậy $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_0, r_k)$

Tiếp theo, ta sẽ tìm $r > 0$ sao cho $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset B(x_0, r)$.

Chọn $r = \max\{r_1, r_2, ..., r_n\}$, thì $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_0, r_k) \subset B(x_0, r)$ và khi đó ta được đpcm.

□

Bài 8. Cho (X, d) là KG metric và $A \subset X$. CMR

i) Nếu X là KG tiền compact thì không gian con (A, d_A) cũng là KG tiền compact.

ii) Nếu A tiền compact nếu và chỉ nếu $\overline{A}$ cũng tiền compact. [Từ đó suy ra A tiền compact nếu và chỉ nếu $\overline{A}$ tiền compact khi X đầy đủ]

iii) Nếu X compact thì X tiền compact

iv) $B \subset \mathbb{R}^n$ là tiền compact nếu và chỉ nếu nó bị chặn.

Chứng minh.

i) Khi X là KG tiền compact hay X có phủ con hữu hạn.

Với $\epsilon > 0$, tồn tại hữu hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in X$ sao cho

$$X \subset \cup_{i=1}^{n} B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Cần tìm $\{a_1, .., a_n\} \in A$ sao cho $\forall r > 0$ để

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B_A(a_i, r)$$

Mà

$$A = A \cap X \subset \cup_{i=1}^{n} \left(A \cap B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)\right)$$

Lấy $x \in A$ thì $x \in \cup_{i=1}^{n} \left(A \cap B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)\right)$, tức

$$\exists 1 \le j \le n \text{ sao cho } x \in A \cap B_X\left(x_j, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Do đó tồn tại hữu hạn $1 \le k \le n$ sao cho $A \cap B_X\left(x_k, \frac{\epsilon}{2}\right) \ne \emptyset$

Với mỗi $i \in \overline{1, .., n}$ bất kỳ, lấy $a_i \in A \cap B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$,

Dễ dàng chứng minh $d(x, a_i) < \epsilon$ hay $x \in B(a_i, \epsilon) \subset (\cup_{i=1}^{n} B_A(a_i, \epsilon))$. Vậy

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} \left(A \cap B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \subset \cup_{i=1}^{n} B_A(a_i, \epsilon)$$

ii) a. Nếu $\overline{A}$ tiền compact thì $\forall\epsilon > 0$, $\exists\{x_1, x_2, .., x_n\}$ trong $\overline{A}$ sao cho

$$\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{n} B_{\overline{A}}\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Mà $\forall i = \overline{1, .., n}$, nên $x_i \in \overline{A}$ cũng là điểm dính của A, do đó có $y_i \in A$ sao cho $d(x_i, y_i) < \dfrac{\epsilon}{2}$.

$\forall z \in B_{\overline{A}}\left(x_i, \dfrac{\epsilon}{2}\right)$, ta có $d(z, y_i) \leq d(z, x_i) + d(x_i, y_i) < \epsilon$. Vậy $z \in B_A(y_i, \epsilon)$

Ta có $B_{\overline{A}}\left(x_i, \dfrac{\epsilon}{2}\right) \subset B_A(y_i, \epsilon) \quad \forall i = \overline{1, .., n}$ nên tồn tại $\{y_1, .., y_n\}$ trong A sao cho

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B_{\overline{A}}\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset \cup_{i=1}^{n} B_A(y_i, \epsilon) \text{ nên } A \text{ tiền compact}$$

b. Nếu A tiền compact, $\forall\mu > 0$, $\exists\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ trong A sao cho

$$\begin{aligned} A &\subset \cup_{i=1}^{n} B_X\left(\omega_i, \frac{\mu}{2}\right) \subset \cup_{i=1}^{n} B'_X\left(\omega_i, \frac{\mu}{2}\right) \\ \Rightarrow \overline{A} &\subset \cup_{i=1}^{n} B'_X\left(\omega_i, \frac{\mu}{2}\right) \quad \text{do } \overline{A} \text{ là tập đóng nhỏ nhất chứa } A \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$B'_X\left(\omega_i, \frac{\mu}{2}\right) \subset B_X(\omega_i, \mu) \quad \forall i = \overline{1, .., n} \text{ và } \{\omega_1, ..., \omega_n\} \in A \subset \overline{A}$$

Do đó

$$\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{n} B'_X\left(\omega_i, \frac{\mu}{2}\right) \subset \cup_{i=1}^{n} B_X(\omega_i, \mu) \text{ tiền compact.}$$

[**Mở rộng (Bonus)**

A tiền compact $\Rightarrow \overline{A}$ tiền compact $\Rightarrow \overline{A}$ cũng đầy đủ (*) do đó $\overline{A}$ compact

$\overline{A}$ compact $\Rightarrow \overline{A}$ tiền compact $\Rightarrow A$ tiền compact

(*) lấy dãy Cauchy $(x_n) \subset \overline{A}$ thì cũng Cauchy trong X đầy đủ do đó $x_n \to x$. Mà $\overline{A}$ đóng nên $x \in \overline{A}$

]

iii) Ta giả sử X không tiền compact.

Cách 1. Áp dụng Định lý 2.9 (GTH),

"X compact khi và chỉ khi X tiền compact và X đầy đủ" điều đó tương đương với "*Nếu X compact thì X tiền compact và X đầy đủ*". Vậy X tiền compact.

Cách 2. Do X không tiền compact.

Khi đó tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho X không thể phủ bởi hữu hạn các quả cầu mở có bán kính nhỏ hơn ϵ. Hay

$$X \not\subset \cup_{i=1}^{n} B_X\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Ta sẽ xây dựng một dãy (x_n) sau bằng quy nạp :

- Lấy $a_1 \in X$

- Vì $X \backslash B(a_1, \epsilon) \neq \emptyset$ nên tồn tại $a_2 \in X \backslash B(a_1, \epsilon)$.

- Mà $X \backslash [B(a_1, \epsilon) \cup B(a_2, \epsilon)] \neq \emptyset$ nên có $a_3 \in X \backslash [B(a_1, \epsilon) \cup B(a_2, \epsilon)]$.

- Giả sử ta xây dựng được dãy $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ vì

$$X \backslash [B(a_1, \epsilon) \cup B(a_2, \epsilon) \cup ... \cup B(a_n, \epsilon)] \neq \emptyset$$

nên sẽ tồn tại $a_{n+1} \in X \backslash [B(a_1, \epsilon) \cup B(a_2, \epsilon) \cup ... \cup B(a_n, \epsilon)]$.

Vậy $d(a_n, a_m) \geq \epsilon, \quad \forall m \neq n$

Dãy $\{a_n\}$ tạo được không phải dãy Cauchy nên mọi dãy con của nó cũng không phải dãy Cauchy và $\{a_n\}$cũng không có dãy con nào hội tụ.

iv) a. Nếu $A \subset \mathbb{R}^n$ tiền compact thì

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_X(x_i, 1) = B \text{ với } \{x_1, .., x_n\} \in A$$

Do đó B là hội hữu hạn các tập bị chặn nên bị chặn. $A \subset B$ nên cũng bị chặn.

b. Nếu A bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ thì có $r > 0$, sao cho $A \subset B(0, r) \subset B'(0, r)$.

Cách 1. Do đó $\text{Cl}(A) \subset B'(0, r) \subset B(0, 2r)$ nên cũng bị chặn.

Vậy $\text{Cl}(A)$ đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ nên nó compact do đó cũng tiền compact (theo (iii)). Theo kết quả câu ii) A cũng tiền compact.

Cách 2. Hoặc có thể sử dụng (iii) với $X = B'(0, r)$ compact nên tiền compact và $A \subset X$ nên theo (i) A tiền compact.

$\square$

Bài 9. CMR

i) $A \subset \mathbb{R}$ là tập compact nếu và chỉ nếu A đóng và bị chặn.

ii) $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ cũng là tập compact nếu và chỉ nếu A đóng và bị chặn.

Chứng minh

i) Dễ thấy A compact nên A đóng và bị chặn (theo Định lý 2.8 sách GTH).

Mặt khác nếu A đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$

Do A bị chặn nên mọi dãy đều có ít nhất một dãy con hội tụ (theo ĐL Bolzano - Weirstrsass). Vậy sẽ có dãy $(a_{n_k}) \subset (a_n) \subset A$ sao cho $a_{n_k} \to a$ khi $k \to \infty$

Mà A đóng nên có $(a_{n_k}) \subset (a_n) \subset A$ sao cho $a_{n_k} \to a$ thì $a \in A$. Vậy A compact.

ii) Chiều thuận hiển nhiên.

Xét chiều nghịch, khi A bị chặn trong $\mathbb{R}$ thì sẽ có $O = B(a, r)$, hoặc

$$O \text{ có dạng } [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r] \times ... \times [a_n - r, a_n + r]$$

sao cho

$$A \subset O, \text{ mà } A \text{ đóng nên } A \text{ cũng compact}$$

// Chứng minh thêm $O = [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r] \times ... \times [a_n - r, a_n + r]$ compact.

Ta lấy $(X_m) = \{(x_1^m, ..., x_n^m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset O$, thì

$$x_k^m \in [a_k - r, a_k + r] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k = 1, .., n$$

Giả sử $\{X_{m_l}\} \subset (X_m)$ sao cho $X_{m_l} \to (c_1, c_2, ..., c_n) \Leftrightarrow x_k^{m_l} \to c_k, \quad \forall k = 1, .., n$

Vì ta đã C.m ở (i) $[a_k - r, a_k + r] \subset \mathbb{R}$ compact nên $c_k \in [a_k - r, a_k + r], \quad \forall k = 1, .., n$

Vậy $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in O$. Hay (X_m) có dãy con $\{X_{m_l}\}$ hội tụ. //

[Cũng có thể sử dụng tích các tập compact thì compact hay O compact.] □

Bài 10. Một tập con $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ được gọi là *khoảng* trong $\mathbb{R}$ nếu

$$\forall x, y \in I, \; x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

Cho $(I_j)_{j \in J}$ là họ các khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $\cap_{j \in J} I_j \neq \emptyset$.

CMR

$$\cap_{j \in J} I_j \text{ và } \cup_{j \in J} I_j \text{ cũng là các khoảng trong } \mathbb{R}$$

Chứng minh.

◇ Ta có $\forall x, y \in \cap_{j \in J} I_j$ và $x \leq y$ thì

$$x, y \in I_j \text{ và } x \leq y \quad \forall j \in J$$

Mà (I_j) là họ các khoảng trong $\mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} [x, y] &\subset I_j \qquad \forall j \in J \\ \Rightarrow [x, y] &\subset \cap_{j \in J} I_j \end{aligned}$$

Do đó $\cap_{j \in I} I_j$ cũng là khoảng trong $\mathbb{R}$.

◇ Mặt khác, $\forall x, y \in \cup_{j \in J} I_j$ và $x \leq y$ thì tồn tại $l, k \in J$ sao cho

$$x \in I_l, \; y \in I_k \text{ và } x \leq y$$

Vì $\cap_{j \in J} I_j \neq \emptyset$ nên ta chọn được $a \in \cap_{j \in J} I_j$,

Ta xét 3 trường hợp sau :

(i) Nếu $x < a < y$ thì $a \in \cup_{j\in J} I_j$ nên rõ ràng $[x, y] \subset \cup_{j\in J} I_j$

(ii) Nếu $a \leq x$ thì $[x, y] \subset [a, y] \subset I_l \subset \cup_{j\in J} I_j$

(iii) Nếu $y < a$ thì $[x, y] \subset [x, a] \subset I_k \subset \cup_{j\in J} I_j$

Vậy ta được

$$[x, y] \subset \cup_{j\in J} I_j$$

nên $\cup_{j\in J} I_j$ cũng là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

$\square$

Bài 11. i) Cho $(A_j)_J$ là họ các tập con liên thông của (X, d) sao cho $\cap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$. CMR $A = \cup_{j\in J} A_j$ cũng là một tập con liên thông.

ii) Bằng cách viết

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \cup_{n\geq n_0} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \\
(a, b] &= \cup_{n\geq n_0} \left[a + \frac{1}{n}, b\right] \\
[a, b) &= \cup_{n\geq n_0} \left[a, b - \frac{1}{n}\right] \\
\mathbb{R} &= \cup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]
\end{aligned}$$

chứng tỏ rằng các khoảng $(a, b), [a, b)$ và $(a, b]$ với $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, cũng là các tập con liên thông của $\mathbb{R}$.

Chứng minh

i) Giả sử A không liên thông, khi đó A tách được bởi 2 tập mở rời nhau là O_1, O_2 trong X.

Lấy $k \in J$ bất kỳ, không mất tính tổng quát; ta giả sử $A_k \cap O_1 \neq \emptyset$, vì A_k liên thông trong X nên $A_k \cap O_2 = \emptyset$. (2)

Mà $\cap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ nên có ít nhất một phần tử $x \in \cap_{j\in J} A_j \Leftrightarrow x \in A_j \quad \forall j \in J$ do đó $x \in A$.

Mặt khác, A tách được bởi 2 mở rời nhau nên $x \in O_1, x \notin O_2$ hoặc $x \notin O_1, x \in O_2$. Ta đã giả sử ở (2) nên $x \in O_1$ (*)

Vậy $O_1 \cap A_k \neq \emptyset$ với mọi $k \in J$ bất kỳ nên

$O_2 \cap A_j = \emptyset \quad \forall j \in J$ do tính liên thông của (A_j)

$\Rightarrow O_2 \cap A = \emptyset$

Do đó $A \subset O_1$ mâu thuẫn với giả thiết A tách được bởi 2 mở rời nhau.

Vậy A liên thông

(*) Another solution

Trước khi chứng minh A liên thông, ta sẽ chứng minh một bổ đề phụ có liên quan về tính liên thông. *"Cho $C \subset D \subset X$ và C liên thông trong X, nếu D tách được bởi U, V mở rời nhau trong X thì hoặc là $C \subset U$ hoặc là $C \subset V$."*

Prove:

Bằng phản chứng, giả sử $C \not\subset U$ cũng như $C \not\subset V$ (1).

Dễ thấy rằng nếu $(U \cap V = \emptyset)$ và $(C \cap U = \emptyset) \Longrightarrow C \not\subset V$ tương đương với

$$\text{Nếu } (C \not\subset V) \wedge (U \cap V = \emptyset) \Longrightarrow C \cap U \neq \emptyset.$$

Vì (1) nên $C \cap U \neq \emptyset$ và $C \cap V \neq \emptyset$.

Do đó $C = (C \cap U) \cup (C \cap V)$ và $\emptyset = (C \cap V) \cap (C \cap U)$ mâu thuẫn với giả thiết C liên thông.

$\diamond$ Trở lại bài toán, lấy $x \in \cap_{j \in J} A_j \Rightarrow x \in A$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \in O_1$ tức $x \notin O_2$, do $x \in A_j, \quad \forall j \in J$

Theo bổ đề phụ, $A_j \subset A \subset X$, A tách được bởi 2 tập mở rời nhau là O_1, O_2 nên $A_j \subset O_1$ hoặc $A_j \subset O_2, \quad \forall j \in J$.

Mà $x \in O_1, x \notin O_2$ nên $A_j \subset O_1, \quad \forall j \in J$ hay $A \subset O_1$ (Mâu thuẫn với giả thiết A tách được bởi 2 mở rời nhau trong X). Vậy A liên thông

ii) Ta chỉ ch.minh cho (a, b), các khoảng còn lại làm tương tự. Ta có

$$(a, b) = \cup_{n \geq n_0} A_n \text{ với } A_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

Theo **Định lý 2.16** (sách Giải tích hàm Đ.N.T, Đ.Đ.T), A_n là khoảng đóng trong $\mathbb{R}$ nên A_n là tập con liên thông trong $\mathbb{R}$.

Mặt khác $\cap_{n \geq n_0} A_n$ chứa ít nhất hai phần tử $\left\{a + \frac{1}{n_0}; b - \frac{1}{n_0}\right\}$ nên $\cap_{n \geq n_0} A_n \neq \emptyset$.

Do vậy, áp dụng kết quả chứng minh của câu i), ta được

$$\cup_{n \geq n_0} A_n \text{ cũng là tập con liên thông trong } \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (a, b) \text{ cũng là tập con liên thông trong } \mathbb{R}$$

69 - page 351 □

Bài 12. i) Cho (X, d) là một KG metric và $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(x, y) = d(x, y)$. CMR

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y_0, y) \qquad \forall x, y, x_0, y_0 \in X$$

Suy ra rằng φ là hàm liên tục trên $X \times X$.

ii) Cho $(E, \|.\|)$ là một KGĐC và $\varphi : E \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(x) = \|x\|$. CMR

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

Suy ra rằng φ là hàm liên tục trên E.

Chứng minh.

i) $\forall x, y, x_0, y_0 \in X$; ta có

$$\begin{cases} d(x,y) \le d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y,y_0) \\ d(x_0,y_0) \le d(x,x_0) + d(x,y) + d(y,y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(x,y) - d(x_0,y_0) \le d(x,x_0) + d(y,y_0) \\ d(x_0,y_0) - d(x,y) \le d(x,x_0) + d(y,y_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |d(x,y) - d(x_0,y_0)| \le d(x,x_0) + d(y_0,y)$$

$$\Rightarrow |\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)| \le d(x,x_0) + d(y_0,y)$$

Mặt khác, với $\Rightarrow (x_n,y_n) \to (x_0,y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}$ thì

$$|\varphi(x_n,y_n) - \varphi(x_0,y_0)| \le d(x_n,x_0) + d(y_n,y_0) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty$$

ii) Tương tự i)

□

Bài 13. Cho (E,δ) là KG metric và $d : E \times E \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$d(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}$$

i) CMR (E,d) là KG metric

ii) CMR d và δ sinh ra cùng topo trên E.

Chứng minh.

i) Ta cần ch.m d là metric trên E.

2 tính chất đầu dễ dàng kiểm tra; ở tính chất thứ 3, ta có thể sử dụng BĐT sau

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \ge \frac{a+b}{1+a+b} \ge \frac{c}{1+c} \quad \forall a+b>c, \forall a,b,c \ge 0$$

ii) Chú ý bảng sau

$B_\delta(y,\alpha) \subset B_d(y,\alpha)$ (1)	$B_d(x,r) \subset B_\delta(x,s)$ (2)
$\forall t \in B_\delta(y,\alpha)$ thì $\delta(y,t) < \alpha$	$\forall z \in B_d(x,r)$ thì $d(x,z) < r$
Mặt khác $1+\delta(y,t) \ge 1$	Nếu$r \ge 1$ thì chọn $s = r$
Do đó, $\dfrac{\delta(y,t)}{1+\delta(y,t)} < \alpha$	$\delta(x,z) \le 1 \le r$
hay $d(y,t) < \alpha$	hay $z \in B_\delta(x,r)$
Vậy $t \in B_d(y,\alpha)$	Nếu $r \in (0,1)$ thì $s = \dfrac{r}{1-r} > 0$
$\Rightarrow B_\delta(y,\alpha) \subset B_d(y,\alpha)$	và $d(x,z) < r$
	$\Rightarrow \delta(x,z) < \frac{r}{1-r} = s$

□

Bài 14. Cho (E, δ) là KG metric. Đặt $d : E \times E \to \mathbb{R}$ với

$$d(x, y) = \min\{1, \delta(x, y)\}$$

i) CMR d là metric trên E

ii) CMR d và δ sinh ra cùng một topo trên E.

Chứng minh.

i) Chú ý tính chất thứ 3 của metric d,

Nếu $\delta(x, y) \leq 1$ và $\delta(y, z) \leq 1$ thì

$$d(x, y) + d(y, z) = \delta(x, y) + \delta(y, z) \geq \delta(x, z) \geq \min\{1, \delta(x, z)\} = d(x, z)$$

Nếu $\delta(x, y) > 1$ hoặc $\delta(y, z) > 1$ thì

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 1 \geq \min\{1, \delta(x, z)\} = d(x, z)$$

ii) Đặt $\Delta(x, y) = \dfrac{\delta(x, y)}{1 + \delta(x, y)}$. Ta có

$B_\delta(y, \alpha) \subset B_d(y, \alpha)$	$B_d(x, s) \subset B_\Delta(x, s) \subset B_\delta(x, r)$
$\forall t \in B_\delta(y, \alpha)$ thì $\delta(y, t) < \alpha$	Ta đã có $B_d\left(x, \dfrac{r}{r+1}\right) \subset B_\Delta\left(x, \dfrac{r}{r+1}\right)$
Mặt khác thì	(Theo kết quả (2) bài 13.)
$\min\{1, \delta(y, t)\} < \delta(y, t)$	Mặt khác $B_\Delta\left(x, \dfrac{r}{r+1}\right) \subset B_\delta(x, r)$
Do đó, $d(y, t) < \alpha$	do $\forall z \in B_\Delta\left(x, \dfrac{r}{r+1}\right)$ thì $\Delta(x, z) < \dfrac{r}{r+1}$
Vậy $t \in B_d(y, \alpha)$	hay $\Delta(x, z) = \dfrac{\delta(x, z)}{1 + \delta(x, z)} < \dfrac{r}{r+1}$
$\Rightarrow B_\delta(y, \alpha) \subset B_d(y, \alpha)$	$\Leftrightarrow \delta(x, z) < r \Rightarrow z \in B_\delta(x, r)$
	Vậy $B_\Delta\left(x, \dfrac{r}{r+1}\right) \subset B_\delta(x, r)$
	Do đó $B_d(x, r) \subset B_\delta(x, s)$

□

Bài 15. Cho (E_i, δ_i) với $i = 1, 2, .., n$ là n KG metric. Đặt $E = E_1 \times ... \times E_n$ và

$$\begin{aligned} d_1(X, Y) &= \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), ..., \delta_n(x_n, y_n)\} \\ d_2(X, Y) &= \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) + ... + \delta_n(x_n, y_n) \\ d(X, Y) &= \sqrt{\delta_1^2(x_1, y_1) + \delta_2^2(x_2, y_2) + ... + \delta_n^2(x_n, y_n)} \end{aligned}$$

trong đó $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $Y = (y_1, .., y_n) \in E$. CMR

i) d_1, d_2 và d là các metric trên E

ii) CMR 3 metric trên sinh ra cùng topo trên E.

Chứng minh.

i) Sử dụng định nghĩa và áp dụng BĐT Minkovski hoặc Bunhiacopski.

ii) Sử dụng định nghĩa metric tương đương với BĐT kẹp sau :

$$d_1(X,Y) \leq d(X,Y) \leq d_2(X,Y) \leq nd_1(X,Y) \quad \forall X,Y \in E$$

□

Bài 16. Cho KG metric (X,d), $\{G_i\}_{i\in I}$ là một bao phủ mở của X, i.e. mỗi G_i là một tập mở và

$$X \subset (\cup_{i\in I} G_i)$$

Ta nói số $\alpha > 0$ là số Lebesgue của họ phủ mở $(G_i)_{i\in I}$ khi với mọi $A \subset X$, nếu

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y) < \alpha \text{ thì } \exists i \in I \text{ sao cho } A \subset G_i.$$

CMR trong một KG metric compact, mọi bao phủ mở đều có số Lebesgue.

Chứng minh.

Bằng phản chứng: Giả sử không tồn tại số Lebesgue của $\{G_i\}_{i\in I}$ tức là

$$\forall \alpha > 0,\ \exists A_n \subset X \text{ sao cho } \operatorname{diam}(A_n) < \alpha, \quad \forall i \in I \text{ nhưng } A_n \not\subset G_i$$

với $\{G_i\}_{i\in I}$ là họ phủ mở của X.

Bằng cách chọn $\alpha = \dfrac{1}{n}$, thì

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists A_n \subset X \text{ sao cho } \operatorname{diam}(A_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall i \in I \text{ nhưng } A_n \not\subset G_i$$

Mà $A_n \neq \emptyset$ nên ta tìm được dãy $\{a_n\}$ với $a_n \in A_n$.

Mặt khác X là KG metric compact nên

$$\exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} \text{ hội tụ về } a \in X$$

Do $\{G_i\}_{i\in I}$ là một họ phủ mở của X nên có tập mở G_β chứa a, suy ra

$$\exists r > 0 \text{ sao cho } B(a,2r) \subset G_\beta$$

Vì $a_{n_k} \to a$ khi $n \to \infty$ nên với m đủ lớn thì

$$a_m \in B(a,r) \text{ và } \frac{1}{m} < r$$

Do diam$(A) < \dfrac{1}{m} < r$ nên

$$\forall x \in A_m \text{ ta có } d(x,a) \leq d(x,a_m) + d(a_m,a) < 2r \quad \text{i.e } A_m \subset B(a,2r) \subset G_\beta$$

Điều này mâu thuẫn vì A_m không chứa trong bất cứ tập mở G_i nào. □

Bài 17. CMR mọi KG metric compact X thì tiền compact.

Chứng minh.

Đã được chứng minh trong câu 8 (iii)$\square$

Bài 18. Chứng minh ĐK cần và đủ để X compact là mọi bao phủ mở của X đều có một phủ con hữu hạn.

Chứng minh.

⋄ ĐK cần, nếu X compact. Áp dụng KQ bài 16.; do X compact nên mọi phủ mở $\{G_i\}_{i\in I}$ đều có số Lebesgue $\alpha > 0$. Mặt khác X compact nên cũng tiền compact; do đó có hữu hạn $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ sao cho

$$X \subset \cup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{\alpha}{3}\right)$$

với diam $\left[B\left(x_k, \frac{\alpha}{3}\right)\right] \leq \frac{2\alpha}{3} < \alpha, \quad \forall k \in \{1, .., n\}$

Do đó với mỗi $k \in \{1, .., n\}$ bất kỳ, tồn tại $j_k \in I$ sao cho $B\left(x_k, \frac{\alpha}{3}\right) \subset G_{j_k}$ nên

$$X \subset \cup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{\alpha}{3}\right) \subset \cup_{k=1}^{n} G_{j_k}$$

Vậy mọi phủ mở $\{G_i\}_{i\in I}$ đều có phủ con hữu hạn.

⋄ ĐK đủ, nếu KG metric X thỏa đk mọi phủ mở đều có phủ con hữu hạn. Ta lấy $\{x_n\} \subset X$, ta cần tìm $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to x$.

Xét $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ta xét 2 trường hợp sau :

- Nếu A hữu hạn, khi đó ta trích được dãy con $\{x_{n_k}\}$ (là dãy hằng) hội tụ.

- Nếu A vô hạn, khi đó A sẽ có điểm tụ, vì giả sử nếu A không có điểm tụ thì $\forall z \in X$, có $r_z > 0$ sao cho

$$B(z, r_z) \cap A \subset \{z\}$$

Mặt khác họ các quả cầu mở $\{B(z, r_z)\}_{z\in X}$ là phủ mở của X nên theo giả thiết, nó sẽ có phủ con hữu hạn

$$X = \cup_{i=1}^{n} B(z_i, r_{z_i}) \supset A$$

nên

$$A = A \cap X = \cup_{i=1}^{n} (A \cap B(z_i, r_{z_i})) \subset \left\{z_i \ : \ i = \overline{1, .., n}\right\}$$

Vô lý vì A là tập vô hạn. Vậy với x là điểm tụ của A thì

$$\left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó với mọi $\alpha > 0$ sẽ có vô hạn $m \in \mathbb{N}$ sao cho $x_m \in B(x, \alpha)$.

Chọn $\alpha = \frac{1}{n}$ và $I_n = \{m \in \mathbb{N} \text{ sao cho } x_m \in B(x, \alpha)\} = \left\{m \in \mathbb{N} \ : \ x_m \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}$ là tập vô hạn.

Lấy $n_1 = \min I_1, ..., n_k = \min(I_1 \setminus [0, n_k]), ...$

Khi đó $\{x_{n_k}\}$ là dãy con của $\{x_n\} \to x$. Vậy X compact. $\square$

Bài 19. Cho $X = \mathbb{R}$ với $d(x, y) = |x - y|$, $A = [0, 1) \cup \{3\}$.

Tìm $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{int}A, \partial A$, A' và điểm cô lập của A (nếu có).

Giải.

Dễ dàng kiểm chứng :$\mathrm{Cl}(A) = [0, 1] \cup \{3\}$; $\mathrm{int}A = (0, 1)$.

3 loại điểm dính : $A' = [0, 1]$, $\partial A = \{0, 1, 3\}$ và điểm cô lập $\{3\}$.

[Sử dụng Định nghĩa để kiểm chứng lại] □

Bài 20/ 292. Cho (E, d) là KG metric và $A \subset E$. CMR

i) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A' = \mathrm{int}A \cup \partial A = A \cup \partial A$

ii) $\mathrm{Cl}(A)$ là tập đóng trong E và là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

iii) $\mathrm{int}A$ là tập mở trong E và là tập mở lớn nhất chứa trong A.

iv) $\partial A = \partial(E \backslash A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A)$ và $E = \mathrm{int}A \cup \partial A \cup \mathrm{int}(E \backslash A)$

v) ∂A là tập đóng trong E và A đóng nếu và chỉ nếu $\partial A \subset A$.

Chứng minh.

i) *a.* Prove $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Ta có $A \subset \mathrm{Cl}(A)$ và A' là tập các điểm tụ (cũng là điểm dính của A) nên $A \cup A' \subset \mathrm{Cl}(A)$ (1)

Mặt khác, lấy $x \in \mathrm{Cl}(A)$ sẽ có 2 trường hợp xảy ra.

TH1 . $x \in A$, hiển nhiên $x \in A$

TH2. $x \notin A$, hay $x \in \mathrm{Cl}(A) \backslash A$, khi đó với mỗi $r > 0$; $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Mà $x \notin A$ nên $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Từ 2 TH trên, ta được $\mathrm{Cl}(A) \subset A \cup A'$ (2)

b. Prove $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{int}A \cup \partial A$.

Ta có $\mathrm{int}A \subset A \subset \mathrm{Cl}(A)$ và ∂A là điểm biên nên $\mathrm{int}A \cup \partial A \subset \mathrm{Cl}(A)$ (3)

Hơn nữa, lấy $x \in \mathrm{Cl}(A)$ sẽ có 2 trường hợp xảy ra.

TH1 . $x \in \partial A$, hiển nhiên $x \in \partial A$

TH2. $x \notin \partial A$, hay $x \in \mathrm{Cl}(A) \backslash \partial A$, khi đó x không phải là điểm dính của $X \backslash A$, tức

$$\begin{aligned} \exists r &> 0 \text{ sao cho } B(x, r) \cap (E \backslash A) = \emptyset \\ \text{hay } \forall x &\in B(x, r) \text{ thì } x \notin (E \backslash A) \\ \Leftrightarrow \exists r &> 0 \text{ sao cho } B(x, r) \subset A \end{aligned}$$

Vậy $x \in \mathrm{int}A$ (4).

c. Prove $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \partial A$.

Hiển nhiên là $A \cup \partial A \subset \mathrm{Cl}(A)$. Chiều ngược lại ta cũng làm tương tự câu *b.* từ (4), ta cũng được $x \in A$.

ii, iii) Dễ dàng kiểm chứng $\mathrm{int}A$ là tập mở trong E; $\overline{A}$ là tập đóng trong E và $\mathrm{int}A \subset A \subset \overline{A}$. Ta chỉ C.m thêm nếu O mở và F đóng sao cho $O \subset A \subset F$ thì $\mathrm{Cl}(A) \subset F$ và $O \subset \mathrm{int}A$.

a. Prove $\mathrm{Cl}(A) \subset F$

Lấy $x \in E \backslash F$; ta có $E \backslash F$ là tập mở nên có $r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset E \backslash F$

Vậy $B(x,r) \cap F = \emptyset$, mà $A \subset F$ nên

$B(x,r) \cap A = \emptyset$, hay x không phải điểm dính của A i.e. $x \in E \backslash \mathrm{Cl}(A)$

Do đó $(E \backslash F) \subset (E \backslash \mathrm{Cl}(A))$ nên $\mathrm{Cl}(A) \subset F$

b. Prove $O \subset \mathrm{int}A$

Ta lấy $x \in O$ và do O mở nên có $\rho > 0$ sao cho $B(x,\rho) \subset O \subset A$.

Vậy x là điểm trong của A, hay $x \in \mathrm{int}A$. Do đó $O \subset \mathrm{int}A$.

iv) Khẳng định $\partial A = \partial (E \backslash A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A)$ dựa trên định nghĩa về điểm biên.

Ta sẽ ch.m $E = \mathrm{int}A \cup \partial A \cup \mathrm{int}(E \backslash A)$.

Dễ thấy $\mathrm{int}A \cup \partial A \cup \mathrm{int}(E \backslash A) \subset A$.

Để C.m chiều còn lại, ta sẽ áp dụng kết quả $\partial A = \partial (E \backslash A)$

Ta có

$$\begin{aligned} E &= A \cup (E \backslash A) \\ &\subset \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(E \backslash A) \\ \Rightarrow E &\subset (\mathrm{int}A \cup \partial A) \cup (\partial (E \backslash A) \cup \mathrm{int}(E \backslash A)) \\ \Rightarrow E &\subset \mathrm{int}A \cup [\partial A \cup \partial (E \backslash A)] \cup \mathrm{int}(E \backslash A) \\ \Rightarrow E &\subset \mathrm{int}A \cup \partial A \cup \mathrm{int}(E \backslash A) \end{aligned}$$

v) Ta có $\partial A = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A)$ là giao của hai tập đóng nên cũng đóng trong E.

Để Cm A đóng nếu và chỉ nếu $\partial A \subset A$.

Ta có A đóng nên $A = \mathrm{Cl}(A)$, từ (i), $\mathrm{Cl}(A) = \partial A \cup A$, ta được $\partial A \subset \mathrm{Cl}(A) = A$.

Mặt khác nếu $\partial A \subset A$,mà $\mathrm{Cl}(A) = \partial A \cup A \ (= A)$ nên A đóng.

□

Bài 21. i) Cho KG metric (X,d), $a \in X$ và $r > 0$. CMR $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$.

ii) CMR nếu X là tập hợp có ít nhất hai phần tử thì $\overline{B_d(a,1)} \neq B'_d(a,1) \quad \forall a \in X$, trong đó

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ 1 & \text{nếu } x \neq y \end{cases}$$

iii) CMR trong mọi KGĐC $(E, \|.\|)$, ta luôn có $\overline{B(a,r)} = B'(a,r)$, $\quad \forall a \in E,\ \forall r > 0$.

Chứng minh.

i) Ta đã c.m $B'(a,r)$ là tập đóng và $B(a,r) \subset B'(a,r)$, mà $\overline{B(a,r)}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa $B(a,r)$. Do đó $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$.

ii) Dễ dàng kiểm chứng d là metric trên X. Ta chỉ chú ý 2 TH nếu $x = y = z$ hoặc $x = y$ hay z khi C.m BĐT tam giác.

Tiếp theo, để c.m $\overline{B_d(a,1)} \neq B'_d(a,1) \quad \forall a \in X$, ta xét

$$B(a,1) = \{v : d(a,v) < 1\} = \{v : d(a,v) = 0\} = \{a\} \text{ nên } \overline{B(a,1)} = \{a\} \quad (1)$$

Mặt khác, X chứa ít nhất hai phần tử nên ta có thể chọn được $u \neq a$ trong X.

$$\text{Khi đó } d(a,u) = 1 \text{ nên } u \in B'(a,r) \text{ nhưng } u \notin \overline{B(a,1)} \qquad (2)$$

iii) Ta đã chứng minh ở câu i) $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$.

Ta cần C.m thêm $B'(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. Lấy $z \in B'(a,r)$ thì $\|z-a\| \leq r \quad \forall a \in E, \forall r > 0$.

Ta xét 2 TH sau.

Nếu $\|z-a\| < r$ thì hiển nhiên $z \in B(a,r)$ nên do đó $z \in \overline{B(a,r)}$

Nếu $\|z-a\| = r$ thì lấy dãy $z_n \in B(a,r)$ với $z_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(z-a)$.

Dễ thấy $(z_n) \subset B(a,r)$ và $\|z_n - z\| = \frac{1}{n}\|z-a\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Ta có $(z_n) \subset B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$ đóng trong E sao cho $z_n \to z$. Vậy $z \in \overline{B(a,r)}$

□

Bài 22. Cho (E,d) là KG metric và $\emptyset \neq A \subset E$. CMR

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$$

liên tục trên E nếu và chỉ nếu A vừa đóng vừa mở trong E.

Chứng minh.

$\Rightarrow$ Giả sử χ_A liên tục trên E, khi đó

Nếu $x \in A$ thì $\chi_A(x) = 1$ nên $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$ là tập đóng trong E (Do $\{1\}$ là tập đóng).

Nếu $x \notin A$ thì $\chi_A(x) = 0$ nên $E \backslash A = \chi_A^{-1}(\{0\})$ là tập đóng trong E nên A mở trong E.

Vậy A vừa đóng vừa mở trong E.

$\Leftarrow$ Ngược lại, giả sử A vừa đóng vừa mở trong E.

Lấy B là tập mở trong $\mathbb{R}$, ta cần C.m $\chi_A^{-1}(B)$ cũng mở trong E.

$$\text{Ta có } \chi_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset \text{ mở trong } E & \text{khi } 0 \notin B, 1 \notin B \\ A \text{ mở trong } E & \text{khi } 0 \notin B, 1 \in B \\ E \backslash A \text{ mở trong } E & \text{khi } 0 \in B, 1 \notin B \\ E \text{ mở trong } E & \text{khi } \{0,1\} \in B \end{cases}$$

Do đó χ_A liên tục trên E.

□

Bài 23. Cho $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$, $A \subset E$ và $a \in A$. Ta định nghĩa ánh xạ thu hẹp của f trên A là $f|_A : A \to F$ xác định bởi $f|_A(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

i) CMR nếu f liên tục tại a thì $f|_A$ cũng liên tục tại a.

ii) Giả sử thêm rằng A là tập con mở của E. CMR nếu $f|_A$ liên tục tại a thì f cũng liên tục tại a. Chỉ ra ĐK A mở không thể bỏ được.

Chứng minh.

i) Ta có $a \in A \subset E$.

Xét chiều thuận. Hiển nhiên do lấy $\{x_n\} \subset A$ hội tụ về $x \in A$ thì

$$\left\{f|_A(x_n)\right\}_{\mathbb{N}} = \{f(x_n)\}_{\mathbb{N}} \text{ hội tụ về } f(x) = f|_A(x) \text{ do } f \text{ liên tục tại } x \in A.$$

Do đó $f|_A$ liên tục tại $x \in A$

ii) Xét chiều nghịch. Do A mở trong E nên có $r > 0$ sao cho $B_E(x,r) \subset A, \quad \forall x \in A$.

Lấy dãy $(x_n) \subset E$ bất kỳ sao cho $x_n \to x \in A$. Khi đó, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t

$$d_E(x_n, x) < r, \quad \forall n \geq n_0$$

Hay $\{x_n\} \subset B_E(x,r) \subset A, \quad \forall n \geq n_0$

Ta đặt $a_m = x_{m+n_0}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$ thì ta được dãy $\{y_m\} \subset A$ s.t $y_m \to x \in A$.

Vì $f|_A$ liên tục tại x nên

$$\begin{aligned} &\{f|_A(y_m)\} \text{ hội tụ về } f|_A(x)\ . \quad \text{Do } f(y_m) = f|_A(y_m)\,, \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow\ &\{f(y_m)\} \text{ hội tụ về } f(x) \\ \Leftrightarrow\ &\{f(x_{m+n_0})\} \text{ hội tụ về } f(x) \end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại x.

iii) Xét trường hợp $E = F = \mathbb{R}$.

Chọn $A = \mathbb{Q}$ và $f = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, khi đó $\mathbb{Q}$ không mở trong $\mathbb{R}$ và f l.t trên $\mathbb{Q}$ nhưng ko l.t trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f|_A$ liên tục nhưng f không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hay $A = \{0\}$ không mở và $f = \chi_{\{0\}}(x)$ thì $f|_A$ liên tục nhưng f không liên tục tại $\{0\}$.

□

Bài 24. Cho A, $B \subset X$ với $A \cup B = X$ và một ánh xạ $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. Giả sử A, B cùng đóng hoặc cùng mở trong X.

CMR nếu $f|_A$ và $f|_B$ là các ánh xạ liên tục thì f cũng liên tục.

Chứng minh

$\forall O \in Y$, ta có

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= \{x \in X \mid f(x) \in O\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in O\} \cup \{x \in B \mid f(x) \in O\} \\ &= \left(A \cap f^{-1}(O)\right) \cup \left(B \cap f^{-1}(O)\right) = (f|_A)^{-1}(O) \cup (f|_B)^{-1}(O) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp A, B cùng đóng (TH còn lại lập luận tương tự).

Nếu $f|_A$ và $f|_B$ liên tục, O đóng trong Y thì $(f|_A)^{-1}(O)$ và $(f|_B)^{-1}(O)$ cũng là tập đóng trong X.

Do đó $(f|_A)^{-1}(O) \cup (f|_B)^{-1}(O)$ là hội 2 tập đóng nên cũng đóng trong X.

Ta có O đóng trong Y và

$$f^{-1}(O) = (f|_A)^{-1}(O) \cup (f|_B)^{-1}(O) \text{ đóng trong } X$$

nên f liên tục.

Hơn nữa, điều kiện $f|_A = f|_B$ $\forall x \in A \cap B$ không thể bỏ được, hay A, B phải cùng đóng hoặc cùng mở.

[Hiển nhiên nếu f liên tục thì 2 ánh xạ thu hẹp của nó cũng liên tục] □

Bài 25. Cho X là một KG metric và $f : E \to E$ là ánh xạ liên tục. CMR tập các điểm bất động của f, i.e

$$A_f = \{x \in E \text{ sao cho } f(x) = x\}$$

là tập con đóng trong E.

Chứng minh.

Cách 1. Sử dụng dãy $y \leftarrow (y_n) \subset A_f, \ \Leftrightarrow y_n = f(y_n) \to y$.

Mà f liên tục nên nếu $y_n \to y$ thì $f(y_n) \to f(y)$. Vậy $y = f(y)$ (Tính duy nhất của giới hạn).

Do đó $y \in A_f$ hay A_f đóng.

Cách 2. Đặt $g(x) = (f - Id_E)(x)$ thì g liên tục trên E.

Mà $\{0\}$ đóng và $A_f = g^{-1}(\{0\})$ nên cũng là tập đóng.

□

Bài 26. Cho (X, d) là KG metric và $\emptyset \neq A \subset X$. Xét ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a), \quad \forall x \in X$$

i) CMR $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X$.

ii) CMR $\forall x \in A, \quad d(x, A) = 0$ nếu và chỉ nếu A đóng.

Chứng minh.

i) Không mất tính tổng quát, giả sử $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(x) - \varphi(y)$

Với mỗi $y \in X$, $\exists a \in X$, sao cho $d(y, A) = d(a, y)$ ta có :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \inf_{t \in A} d(x, t) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \\ \Rightarrow \varphi(x) &\leq d(x, y) + \inf_{b \in A} d(y, b) \\ \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) &\leq d(x, y) \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có
$$\varphi(y) - \varphi(x) \le d(x,y)$$

Vậy
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le d(x,y)$$

[Ta cũng có thể suy ra $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \le d(x_n, x) \to 0$, khi $n \to \infty$ nên φ là hàm liên tục.]

ii) Ta chứng minh chiều thuận, lấy $x \in A$.

Nếu $\varphi(x) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a) = 0$, khi đó cần tìm dãy $(a_n) \subset A$ sao cho $a_n \to x$.

Vậy sẽ có dãy $r_n = d(x, a_n) \to 0$ sao cho

$\forall \epsilon > 0$, có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\varphi(x) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a) \le r_n \to 0$ với mọi $n \ge n_0$

Vậy với $x \in A$, ta tìm dãy $(a_n) \subset A$ sao cho $a_n \to x$, do đó A đóng.

Xét chiều nghịch, với $x \in A$ và A đóng, khi đó tồn tại $(u_n) \subset A$ sao cho $u_n \to x$

Vậy $0 < d(u_n, x) < \epsilon$, khi $n \ge n_0$ đủ lớn.

Do đó
$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) \le d(u_n, x) < \epsilon, \quad \forall n \ge n_0$$

Hay $d(x,A) = 0$.

[Ngoài ra ta cũng có thể sử dụng cách sau :

$\varphi(x) = 0,\ x \in A \Leftrightarrow \exists (a_n) \subset A$ sao cho $d(x, a_n) \to 0 \Leftrightarrow \exists (a_n) \subset A$ s.t $a_n \to x$ i.e A đóng]

Bài 27. Cho (E,d) là một KG metric,

i) Giả sử A là tập đóng trong E và $x \notin A$. CMR tồn tại các tập mở V và W sao cho $x \in V$, $A \subset W$ và $V \cap W = \emptyset$.

ii) Giả sử A, B là các tập đóng trong E sao cho $A \cap B = \emptyset$. CMR tồn tại các tập mở V và W sao cho $A \subset V$, $B \subset W$ và $V \cap W = \emptyset$.

Chứng minh

i) A.dụng kết quả **bài tập 26**, xét $\varphi(t) = d(t, A) : E \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và với $u \in A$ đóng thì $d(u, A) = 0$.

Đặt $\phi : E \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(t) = d(x,t) - \varphi(t)$

Do $\varphi(t)$ liên tục và

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - \phi(t)| &\le |d(x,t_n) - d(x,t)| + |\varphi(t_n) - \varphi(t)| \\ &\le |d(t_n, t)| + |\varphi(t_n) - \varphi(t)| \to 0 \text{ khi } n \to \infty \end{aligned}$$

Vậy, $\phi(t)$ cũng là hàm liên tục theo t,

Lấy $V = \{t \in E \text{ s.t } d(x,t) < d(x,A)\} = \phi^{-1}((-\infty, 0))$ và

$W = \{t \in E \text{ s.t } d(x,t) > d(x,A)\} = \phi^{-1}((0, \infty))$.

Ta có

Với $x \notin A$ ta có $d(x,x) = 0 < d(x,A)$, do đó $x \in V$.

$\forall \omega \in A$ thì $d(\omega, A) = 0$ nên $d(\omega, x) > 0 = d(\omega, A) \Rightarrow \omega \in W$. Do đó $A \subset W$.

V, W là nghịch ảnh các tập mở nên cũng là tập mở trong E.

Dễ thấy $V \cap W = \emptyset$.

ii) Xét $\psi(t) = d(t,A) - d(t,B)$ là hiệu 2 hàm liên tục nên cũng là hàm liên tục,

Đặt $V = \{t \in E \text{ s.t } d(t,A) < d(t,B)\} = \psi^{-1}((-\infty, 0))$ và

$W = \{t \in E \text{ s.t } d(t,A) > d(t,B)\} = \psi^{-1}((0,\infty))$

Dễ dàng kiểm chứng

V, W là các tập mở trong E.

$A \subset V$ vì $A \cap B = \emptyset; \forall z \in A$ i.e $z \notin B$, $d(z,A) = 0 < d(z,B)$.

Tương tự $B \subset W$

$V \cap W = \emptyset$ ($\forall z \in V, \psi(z) < 0$ nên $z \notin W$ hoặc sd phản chứng $\psi(z) > 0$ và $\psi(z) < 0 \Rightarrow$ V.l)

□

Bài 28. Cho f và g là hai ánh xạ liên tục từ (X, d_X) vào (Y, d_Y). Giả sử $\emptyset \neq A \subset X$ sao cho $f(x) = g(x), \quad \forall x \in A$. CMR $f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathrm{Cl}(A)$.

Chứng minh.

Ta cần chứng minh $f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathrm{Cl}(A)$,

Lấy $a \in \mathrm{Cl}(A)$, vì $\mathrm{Cl}(A)$ đóng trong X nên có $(x_n) \subset A$ sao cho $x_n \to a$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $f(x_n) = g(x_n)$. (1)

Mà f, g liên tục và $x_n \to a$. Ta được $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $f(a) = g(a)$ theo tính duy nhất của giới hạn.

Do đó $f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathrm{Cl}(A)$.

□

Bài 29. Cho f là ánh xạ từ (X, d_X) vào (Y, d_Y). CMR f liên tục nếu và chỉ nếu

$$f\left(\bar{A}\right) \subset \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X.$$

Chứng minh.

<u>Ta xét chiều thuận.</u>

Nếu f liên tục, khi đó với $A \subset X$, ta có $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ là tập đóng trong X với $\overline{f(A)}$ đóng trong Y.

Ngoài ra, $A \subset f^{-1}(f(A))$, dễ thấy $f(A) \subset \overline{f(A)}$ nên $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$.

Vậy $A \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, mà $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A nên $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Do đó

$$f\left(\overline{A}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subset \overline{f(A)}$$

<u>Xét chiều ngược,</u>

Giả sử $f\left(\bar{A}\right) \subset \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X$; ta sẽ chứng minh f liên tục.

Lấy B đóng trong Y, khi đó $f^{-1}(B) \subset X$; ta cần chứng minh $f^{-1}(B)$ đóng trong X.

Mà $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ nên $\overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subset \overline{B}$.

Theo giả thiết ta được

$$\begin{aligned} f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) &\subset \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \text{ where } A = f^{-1}(B) \\ \Rightarrow f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) &\subset \overline{B} = B \text{ do } B \text{ là tập đóng trong } Y \end{aligned}$$

Lấy nghịch ảnh lần nữa, ta được

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) &\subset f^{-1}(B) \\ \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} &\subset f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Mà $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ nên $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ hay $f^{-1}(B)$ đóng trong X.

□

Bài 30. Cho X là KG metric, $A \subset X$ và $G \subset X$ là tập mở. CMR nếu $G \cap A = \emptyset$ thì $G \cap \mathrm{Cl}(A) = \emptyset$.

Chứng minh.

Ta có G mở trong X nên $X \backslash G$ là đóng trong X.

Mặt khác vì $G \cap A = \emptyset$ nên $A \subset (X \backslash G)$

Mà $\mathrm{Cl}(A)$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A nên $\mathrm{Cl}(A) \subset (X \backslash G)$. Do đó $G \cap \mathrm{Cl}(A) = \emptyset$.

□

Bài 31. Cho X, Y là 2 KG metric và $f : X \to Y$ thỏa mãn $f|_K$ liên tục với mọi tập K compact. CMR f liên tục trên X.

Chứng minh.

<u>Xét bài toán phụ</u> *"Cho X là KG metric và có dãy $\{x_n\}$ h.tụ về $x_0 \in X$.*

Khi đó $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ là tập compact".

Ta sử dụng định nghĩa phủ mở của compact, lấy phủ mở của A là

$$W = \cup_{i \in I} W_i$$

<u>Tìm phủ con hữu hạn.</u> Do $x_0 \in A$ nên tồn tại $k \in I$ sao cho $x_0 \in W_k$.

Mà W_k là tập mở nên có tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(x_0, \epsilon) \subset W_k$.

Vì x_n hội tụ về x_0 nên $\forall \epsilon > 0,$ có $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, x_0) < \epsilon, \quad \forall n \geq N_\epsilon$ hay

$$x_n \in B(x_0, \epsilon) \subset W_k, \quad \forall n \geq N_\epsilon$$

Vậy ta đã tìm được tập mở W_k chứa x_0 và $\{x_n | n \geq N_\epsilon\}$.

Còn lại hữu hạn các điểm $\{x_1, x_2, ..., x_{N_\epsilon}\} \in W$ thì

$$\forall j \in \{1, 2, .., N_\epsilon\}\,;\ \text{sẽ tồn tại tương ứng } j_m \in I \text{ sao cho } x_m \in W_{j_m}$$

Vậy

$$A \subset W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_{N_\epsilon} \cup W_k$$

Mọi phủ mở bất kỳ chứa A đều có phủ con h.h. Vậy A compact.

Trở lại bài toán;

Ta lấy dãy $\{x_n\}$ bất kỳ trong X hội tụ về $x \in X$. Khi đó K là tập compact, với $K = \{x_n \,|n \ \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$.

Vì $f\,|_K$ liên tục trên mọi tập K compact nên

$$(f\,|_K)\,(x_n) \to (f\,|_K)\,(x_0)$$

Do đó

$$f\,(x_n) \to f\,(x_0)$$

Với mọi dãy $\{x_n\}$ bất kỳ trong X hội tụ về $x \in X$ thì $f\,(x_n) \to f\,(x_0)$ nên f liên tục.

□

Bài 32. Cho (K_n) là dãy giảm các tập con compact không rỗng của KG metric X. CMR

$$L = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

cũng là một tập con compact không rỗng của X.

Giải.

Dễ thấy giao bất kỳ một họ các tập con compact cũng là tập compact. (Có thể sử dụng compact - dãy để kiểm chứng)

Ta chỉ cần chứng minh

$$L = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$$

Do $K_n \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nên tồn tại dãy $\{x_n\} \in X$ sao cho ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ thì $x_n \in K_n$.

Mặt khác (K_n)là dãy giảm các tập nên

$$K_n \subset K_m, \quad \forall n \geq m$$

Vì $\{x_n\}$ là dãy trong tập K_1 compact nên sẽ có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tại x.

$\forall m \in \mathbb{N}$, dãy $\{x_{n_k}\}_{k\geq m}$ là một dãy trong tập compact K_m (cũng là tập đóng) nên sẽ hội tụ về x và $x \in K_m$.

Vậy $x \in K_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$ nên L chứa ít nhất một phần tử là x.

□

Bài 33. Cho X là KG metric compact và Y là KG metric. Xét A là một tập con đóng trong $X \times Y$. CMR $pr_2(A)$ là tập con đóng trong Y.

$$\begin{aligned} pr_2 : X &\to Y \\ (x,y) &\to y \end{aligned}$$

Chứng minh.

Lấy $\{y_n\}$ là dãy trong $pr_2(A)$ hội tụ tại $y \in Y$, ta sẽ c.m $y \in pr_2(A)$.

Vì $y_n \in pr_2(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nên có dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho $z_n = (x_n, y_n) \in A$.

Mà X compact nên $\{x_n\}$ sẽ trích được dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về $x \in X$. Ta đã có $y_n \to y$ nên $y_{n_k} \to y$.

Vậy $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x,y)$ khi $k \to \infty$

Vì $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ là một dãy trong A hội tụ về (x,y) và A là tập đóng nên $(x,y) \in A$.

Do đó $y \in pr_2(A)$.

$\square$

Bài 34. Cho X, Y là 2 KG metric và f là ánh xạ từ X vào Y, ta định nghĩa tập

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}$$

là đồ thị của f

i) CMR nếu f liên tục trên X thì đồ thị Γ của nó là tập đóng trong $X \times Y$.

ii) Giả sử rằng Y là KG compact. CMR nếu đồ thị Γ của f là tập đóng trong $X \times Y$ thì f liên tục trên X.

Chứng minh

i) Ta lấy dãy $z_n \in \Gamma$ hội tụ về $z = (x,y) \in X \times Y$. Ta sẽ c.m $z \in \Gamma$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \Gamma$ nên sẽ có $x_n \in X$ sao cho $z_n = (x_n, f(x_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì giả thiết $z_n \to z$ nên $x_n \to x$ và $f(x_n) \to y$ khi $n \to \infty$

Mà f liên tục nên $f(x_n) \to f(x)$. Vậy $y = f(x)$ theo tính duy nhất của giới hạn.

Do đó $z \in \Gamma$, hay Γ là tập đóng trong $X \times Y$.

ii) Ta cần chứng minh với A đóng trong Y thì $f^{-1}(A)$ đóng trong X.

Đặt

$$G_A = \Gamma \cap (X \times A) = \left\{(x, f(x)) \in X \times Y \,\middle|\, x \in X \text{ và } f(x) \in A \right\}$$

Ta có G_A đóng (do là vết của Γ đóng) trong $X \times Y$.

Cũng có thể kiểm tra bằng điểm tụ.

Xét phép chiếu lên X như sau

$$\begin{aligned} pr_1 : X \times Y &\to X \\ (x,y) &\to x \end{aligned}$$

Theo kết quả của bài 33 (*), pr_1 cũng là ánh xạ liên tục, G_A đóng trong $X \times Y$ và Y compact. Do đó $pr_1(G_A)$ là tập đóng trong X.

Nhưng $pr_1(G_A) = \{x \in X \,|\, f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$

Do đó $f^{-1}(A)$ đóng với mọi A đóng nên f liên tục

(*) [trong bài 35, phép chiếu lên Y sẽ đòi hỏi ĐK X compact, bài này ngược lại] □

Bài 35. Cho (X, d) là KG metric sao cho mọi quả cầu đóng thì compact. CMR X đầy đủ.

Chứng minh.

Ta lấy (x_n) là dãy Cauchy trong X, khi đó (x_n) là dãy bị chặn nên sẽ chứa trong 1 quả cầu hay $\exists u \in X$, $\exists r > 0$ sao cho $d(x_n, u) < r \Leftrightarrow (x_n) \subset B(u, r) \subset B'(u, r)$

Mà $B'(u, r)$ compact nên sẽ có dãy con (x_{n_k}) sao cho $x_{n_k} \to x \in X$ khi $k \to \infty$.

Ta có

$\forall \epsilon > 0$, có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_m, x_n) < \dfrac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$

Mặt khác $x_{n_k} \to x$ nên sẽ có $K \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_{n_K}, x) < \dfrac{\epsilon}{2}, \quad \forall K \geq n_0$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x) < \epsilon$$

Do đó x_n là dãy Cauchy và hội tụ về $x \in X$ nên X đầy đủ.

□

Bài 36. Cho f là ánh xạ liên tục đều từ (X, d_X)vào (Y, d_Y), i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X,\ d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$$

i) CMR nếu (x_n) Cauchy trong X thì $f(x_n)$ cũng Cauchy trong Y

ii) Nếu A tiền compact trong X thì $f(A)$tiền compact trong Y.

Chứng minh

i) Chú ý f liên tục đều nên với $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tồn tại $K \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall m, n \geq K$

$$d_X(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$$

nên $(f(x_n))$ cũng Cauchy trong Y

ii) Ta có f liên tục đều nên với $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon), \quad \forall x \in X$$

Do A tiền compact nên ta có thể phủ A bởi hữu hạn các quả cầu mở bán kính δ

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$$

Do đó

$$f(A) \subset \cup_{i=1}^{n} f(B(x_i, \delta)) \subset \cup_{i=1}^{n} B(f(x), \epsilon)$$

Vậy $f(A)$ cũng tiền compact trong Y.

$\square$

Bài 37. Cho (X, d) là KG metric. CMR X liên thông nếu và chỉ nếu mọi tập con khác trống A của X, $A \neq X$ đều có phần biên $\partial A \neq \emptyset$.

Chứng minh.

<u>Xét chiều thuận.</u> Nếu X liên thông và $\emptyset \neq A \neq X$.

Bằng phản chứng, ta giả sử $\partial A = \emptyset$, khi đó

$\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{int}A \cup \partial A = \mathrm{int}A$, mà $\mathrm{int}A \subset A \subset \mathrm{Cl}(A)$ nên

$$\mathrm{int}A = A = \mathrm{Cl}(A) \text{ hay } A \text{ vừa đóng vừa mở trong } X$$

Mà $\emptyset \neq A \neq X$. Vậy X không liên thông

<u>Xét chiều nghịch.</u> Nếu $\emptyset \neq A \neq X$ với $\partial A \neq \emptyset$,

Bằng phản chứng, ta cũng giả sử X không liên thông.

Do đó có $\emptyset \neq A \neq X$ sao cho A vừa đóng vừa mở trong X.

Vậy $X \backslash A$ cũng vừa đóng vừa mở trong X và

$$\partial A = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A) = A \cap (X \backslash A) = \emptyset. \text{ Mâu thuẫn}$$

Do đó X liên thông.

$\square$

[Ở chiều thuận, ta còn có cách khác như sau: Giả sử $\partial A = \emptyset$. Do $\emptyset \neq A \neq X$ nên A và $X \backslash A \neq \emptyset$; do đó $\mathrm{int}A \neq \emptyset$ và $\mathrm{int}(X \backslash A) \neq \emptyset$. Mà

$$X = \mathrm{int}A \cup \partial A \cup \mathrm{int}(X \backslash A) = \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}(X \backslash A)$$

là hội của hai mở không rỗng rời nhau nên X không liên thông].

Bài 38. Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ là ánh xạ liên tục. CMR f có điểm bất động trong $[0,1]$.

Chứng minh.

Đặt $g(x) = \left(f - Id_{[0,1]}\right)(x)$, do f liên tục nên g cũng liên tục trên $[0,1]$.

$A = \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \leq x\}$ và $B = \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \geq x\}$.

Ta có :

- $1 \in A$ và $0 \in B$ nên A, B khác trống.

- Mặt khác g l.tục và $A = g^{-1}((-\infty, 0])$ là nghịch ảnh tập đóng nên đóng trong $[0,1]$. Tương tự B cũng là tập đóng.

- Hơn nữa $A \cup B = [0,1]$ mà $[0,1]$ liên thông nên

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ hay tồn tại } x \in [0,1] \text{ sao cho } f(x) = x.$$

Bài 39. Cho (E, d) là KG liên thông không bị chặn. CMR mọi mặt cầu $S(x; r) = \{y \in E \,|d(x,y) = r\}$ đều không rỗng.

Chứng minh.

Giả sử $S(x,r) = \emptyset$, chú ý $E = B(x,r) \cup S(x,r) \cup [E \backslash B'(x,r)]$

Cho $x \in E$ và $\forall r > 0$, vì E không bị chặn nên tồn tại $z \in E$ s.t. $d(x,z) > r$.

Suy ra $z \in \{y \in E \mid d(x,y) > r\} = E \backslash B'(x,r)$ hay $E \backslash B'(x,r) \neq \emptyset$ mà $B(x,r) \neq \emptyset$.

Do đó E tách được bởi 2 tập mở không rỗng rời nhau. Vô lý. Vậy $S(x,r) \neq \emptyset$.

□

Bài 40. Cho A là tập con liên thông trong KG metric E và $A \subset B \subset \overline{A}$. CMR B liên thông.

Chứng minh.

Giả sử B không liên thông, khi đó có O_1, O_2 mở rời nhau, không rỗng trong E sao cho

$$B = (O_1 \cap B) \cup (O_2 \cap B) \text{ và } \emptyset = (O_1 \cap B) \cap (O_2 \cap B).$$

Do $A \subset B$ nên $A = A \cap B$.

Vậy $A = (O_1 \cap A) \cup (O_2 \cap A)$ và $\emptyset = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A)$.

Do A liên thông nên $O_1 \cap A = \emptyset$ hoặc $O_2 \cap A = \emptyset$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $O_1 \cap A = \emptyset$,

Theo kết quả làm được ở bài 30, vậy $O_1 \cap \overline{A} = \emptyset$, mà $A \subset B \subset \overline{A}$.

Do đó $O_1 \cap B = \emptyset$, dẫn đến $O_2 \cap B = B$ hay $B \subset O_2$. Vô lý.

Vậy B liên thông.

□

Bài 41. Cho (A_n) là dãy các tập con liên thông trong KG metric X sao cho $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. CMR $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ liên thông.

Chứng minh

Ta giả sử A không liên thông. Khi đó có O_1, O_2 là 2 mở rời nhau trong X sao cho

$$A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) \text{ và } \emptyset = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2).$$

trong đó $(A \cap O_1)$ và $(A \cap O_2)$ khác rỗng

Mà $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A$ nên $A_n = A_n \cap A$ do đó

$$A_n = (A_n \cap O_1) \cup (A_n \cap O_2) \text{ và } \emptyset = (A_n \cap O_1) \cup (A_n \cap O_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

với $(A_n \cap O_1)$ và $(A_n \cap O_2)$ là các mở trong A_n.

Vì A_n liên thông nên $(A_n \cap O_1) = \emptyset$ hoặc $(A_n \cap O_2) = \emptyset$

Ta xét khi $n = 1$, thì

$$A_1 = (A_1 \cap O_1) \cup (A_1 \cap O_2) \text{ và } \emptyset = (A_1 \cap O_1) \cup (A_1 \cap O_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A_1 \cap O_1 = \emptyset$, tức là $A_1 \subset O_2$.

Mà $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_1 \cap A_2 \subset O_2 \cap A_2$

Do đó $O_2 \cap A_2 \neq \emptyset$, mặt khác A_2cũng liên thông nên $A_2 \subset O_2$.

Bằng quy nạp, ta được $A_n \subset O_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset O_2$, vô lý. Vậy A liên thông.

□

Bài 42. Cho E là KG metric, A và B là các tập con liên thông của E sao cho $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. CMR $C = A \cup B$ liên thông.

Chứng minh.

Ta giả sử C không liên thông, $\exists O_1, O_2$ đóng, rời nhau, khác rỗng trong E sao cho

$$C = (C \cap O_1) \cup (C \cap O_2) \text{ và } \emptyset = (C \cap O_1) \cap (C \cap O_2)$$

Mà $A \subset C$ nên

$$A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) \text{ và } \emptyset = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2)$$

Vì A liên thông nên $A \cap O_1 = \emptyset$ hoặc $A \cap O_2 = \emptyset$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \cap O_2 = \emptyset$, hay $A \subset O_1$ (1)

Mà O_1 là tập đóng chứa A do đó $\overline{A} \subset O_1$.

Ta có $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ và $\overline{A} \subset O_1$ nên $B \cap O_1 \neq \emptyset$ $\left(\text{Do } \emptyset \neq \overline{A} \cap B \subset O_1 \cap B\right)$.

Mặt khác B cũng liên thông nên $B \subset O_1$ (2).

Từ (1) và (2), ta được $C = A \cup B \subset O_1$, mâu thuẫn với giả thiết C tách được bởi 2 đóng không rỗng rời nhau. Vậy C liên thông.

□

Bài 43. Cho A, B là các tập con của KG metric E sao cho $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. CMR không có tập mở F trong E sao cho $B \subset F$ và $A \cap F = \emptyset$.

Chứng minh.

Sử dụng phản chứng, giả sử có F mở trong E sao cho $B \subset F$ và $A \cap F = \emptyset$.

Vì F mở và $A \cap F = \emptyset$ nên $\overline{A} \subset (E \backslash F)$ hay $\overline{A} \cap F = \emptyset$

Mà $B \subset F$ nên $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Mâu thuẫn.

□

Bài 44. Cho A là tập con của KG metric X và B là tập con liên thông của X sao cho $A \cap B \neq \emptyset$ và $B \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$. CMR $B \cap \partial A \neq \emptyset$.

Chứng minh.

Ta có $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$ và $X = \overline{A} \cup \overline{X \backslash A}$

Đặt $O = B \cap \overline{A}$ và $V = B \cap \overline{X \backslash A}$ là giao của các tập đóng trên không gian X xuống B nên cũng đóng trong B.

Ta có

$$\emptyset \neq A \cap B \subset \overline{A} \cap B \text{ nên } O \neq \emptyset, \text{ t.tự } V \neq \emptyset$$
$$B = O \cup V$$

Vì B liên thông nên

$$O \cap V \neq \emptyset$$

Vậy

$$B \cap \partial A = \left(B \cap \overline{A}\right) \cap \left(B \cap \overline{X \backslash A}\right) = O \cap V \neq \emptyset$$

□

Bài 45. Cho E, F là 2 KG metric và f là song ánh, liên tục từ $E \to F$. CMR nếu E compact thì $f^{-1} : F \to E$ liên tục.

Chứng minh.

Lấy $A \in E$ đóng, ta chỉ cần chứng minh $\left[f^{-1}\right]^{-1}(A)$ cũng đóng trong F

Ta có $f(A) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(A)$.

Chú ý A đóng, E compact nên A compact trong E.

f liên tục nên $f(A)$ compact trong F (Xem **câu 6** phần BTBS) do đó đóng trong F.

□

Bài 47

□

Bài 46

□

Một Số Lưu Ý Khi Làm Các Bài Toán Giải Tích Hàm (SV tự chứng minh)

1*a*. Cho $f\ :\ X \to Y\ A, B \subset X,\ V, W \subset Y$ và $(A_i), (B_i)$ lần lượt là họ các tập trong X và Y. Khi đó

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	$f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$	$f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$
$f(A) \backslash f(B) \subset f(A \backslash B)$	$f^{-1}(V \backslash W) = f^{-1}(V) \backslash f^{-1}(W)$

Hơn nữa

$$\begin{array}{rcl} (1) \quad A & \subset & f^{-1}(f(A)) \text{ và } (2) \quad f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B \\ f(A) & = & \left(f^{-1}\right)^{-1}(A) \end{array}$$

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi f là *injective (đơn ánh)* và ở (2) khi f là *surjective (toàn ánh).*

b. Cho $f\ : X \to Y,\ g : Y \to Z$, thì $g \circ f\ :\ X \to Z$ xác định bởi

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

được gọi là ánh xạ hợp nối của g với f. (Nhiều người còn nhầm lẫn cách viết ánh xạ hợp)

c.

◇ Ánh xạ $f\ : X \to Y$ được gọi là *ánh xạ mở* nếu O mở trong X thì $f(O)$ mở trong Y.

◇ Ánh xạ $f\ : X \to Y$ được gọi là *ánh xạ đóng* nếu V đóng trong X thì $f(V)$ đóng trong Y.

◇ Ánh xạ $f\ : X \to Y$ được gọi là *đồng phôi* nếu và chỉ nếu f vừa là *ánh xạ đóng* vừa là *ánh xạ mở.*

◇ Ngoài ra, một song ánh f liên tục trên X là *đồng phôi* nếu và chỉ nếu nó là *ánh xạ mở.*

2.Cho (X, d) và $\emptyset \neq A, B \subset X$, khi đó

◇ $\text{int}A \cup \text{int}B \subset \text{int}(A \cup B)$ nhưng $\text{int}(A \cup B) \not\subset \text{int}A \cup \text{int}B$

◇ $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$

◇ $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$

◇ $\text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B) \subset \text{Cl}(A \cap B)$, chiều ngược lại không hoàn toàn đúng

◇ Nếu $A \subset B$ thì $\text{int}A \subset \text{int}B$ và $\text{Cl}(A) \subset \text{Cl}(B)$

◇ $\text{int}(X \backslash A) = X \backslash \text{Cl}(A)$

◇ $\text{Cl}(X \backslash A) = X \backslash \text{int}A$

1.2 Bài tập bổ sung (các ví dụ cụ thể & trực quan cho lý thuyết).

Câu 1) Tìm $A \subset \mathbb{R}$ sao cho

i) A chứa đúng một điểm tụ

ii) A chứa đúng k điểm tụ

iii) A chứa vô hạn đếm được các điểm tụ

Giải.

i) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$. Dễ thấy nếu $u \in A$, $u \neq 0$ thì u không phải điểm tụ của A vì

Nếu $u > 1$ thì $\left| u - \dfrac{1}{n} \right| > |u - 1| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ nên u _(nt)_

Nếu $u < 0$ thì $\left| u - \dfrac{1}{n} \right| > |u| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nếu $u \in (0, 1)$, ta chia làm 2 trường hợp sau :

<u>TH 1.</u> $u = \dfrac{1}{k}$ (với $k = n$ hoặc $k = n + 1$) thì

Khi $k = 1$, thì $\left| u - \dfrac{1}{b} \right| \geq \dfrac{1}{2} \qquad \forall b \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ nên u không phải điểm tụ của A

Khi $k \geq 2$, thì $\left| u - \dfrac{1}{b} \right| \geq \min \left\{ \left| u - \dfrac{1}{b+1} \right|, \left| u - \dfrac{1}{b-1} \right| \right\} \quad \forall b \in \mathbb{N} \backslash \{k\}$ nên _ (nt)_

<u>TH2.</u> $\dfrac{1}{n+1} < u < \dfrac{1}{n}$ thì

$$\left| u - \frac{1}{b} \right| \geq \min \left\{ \left| u - \frac{1}{n} \right|, \left| u - \frac{1}{n+1} \right| \right\} \quad \forall b \in \mathbb{N} \backslash \{k\}$$

nên u cũng không phải điểm tụ.

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh 0 là điểm tụ của A. Ta có

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{với } \{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

hay $\forall r > 0, \exists n(r) = \left[\dfrac{1}{r} \right] + 1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < r \quad \forall n \geq n(r)$$

Vậy A chỉ có duy nhất một điểm tụ là 0

ii) Lấy $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + m \text{ trong đó } n \geq 1, \ 0 \leq m \leq k-1 \right\} = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \left\{ \dfrac{1}{n} + i \ : \ i \geq 1 \right\} = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} A_{i+1}$

Trong đó $\{i\}$ là điểm tụ duy nhất của $A_{i+1} = \left\{ \dfrac{1}{n} + i \ : \ i \geq 1 \right\}$. A có k điểm tụ

iii) $A = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \left\{ \dfrac{1}{n} + i \ : \ i \geq 1 \right\}$sẽ có vô hạn các điểm tụ.

[SV tự kiểm lại 2 câu cuối.] □

Câu 2. Các hàm số sau có hội tụ đều hay không?

i) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

ii) $f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0,1]$

iii) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+\dfrac{1}{n}}, \quad x \in [0,1]$

Giải.

i) $\lim f_n(x) = 0$ khi $n \to \infty$.

Mặt khác

$$|f_n(x) - f(x)| \le f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$$

nên $f_n \rightrightarrows f, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) Ta có

$$f_n(x) = nx(1-x)^n = \frac{nx}{\left(1+\dfrac{x}{1-x}\right)^n} \le \frac{nx}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \dfrac{x^2}{(1-x)^2}} = \frac{2(1-x)^2}{(n-1)x} = h_n(x), \quad \forall x \ne 0$$

nên

$$\begin{aligned} 0 &\le f_n(x) \le h_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \lim f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0 \end{aligned}$$

Nhưng với $\epsilon = \dfrac{1}{e}$ và $y_n = \dfrac{1}{n} \in [0,1] \to 0$, ta có

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \ge |f_n(y_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \ge \epsilon, \quad \forall n \ge n_0$$

Vậy $f_n \not\rightrightarrows f, \qquad \forall x \in [0,1]$

iii) Tương tự, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Chọn $\epsilon = \dfrac{1}{3}$ và lấy $y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Ta có

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \ge |f_n(y_n)| = \frac{1}{2} > \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy $f_n \not\rightrightarrows f, \qquad \forall x \in [0,1]$

Câu 3. Cho X là KG metric đầy đủ. CMR nếu X đếm được thì X chứa ít nhất 1 điểm cô lập.
Chứng minh

(62 - 346)□

Câu 4. Cho (X, d) là KG metric liên thông có ít nhất 2 phần tử. CMR X không đếm được.

(65 - 348)□

Câu 5. CMR trong KG metric (X, d), mọi KG liên thông đường đều liên thông. Chỉ ra trường hợp phản ví dụ cho chiều ngược lại không đúng. ự

Chứng minh.
Ta có thể sử dụng định lý giá trị trung bình:.

" Nếu X là KG liên thông và có $f : X \to \mathbb{R}$ liên tục, thì $\forall p, q \in f(X)$ thỏa $p \le r \le q$ thì $r \in f(X)$."

Sau đó dùng phản chứng nếu X không liên thông thì không liên thông đường.
Phản ví dụ, lấy $X = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) \middle| x > 0 \right\}$ và .

$f : X \to \mathbb{R}$ với $f(t) = \sin\dfrac{1}{t}$.
$A = \Gamma_f$,

Dễ thấy A và $\mathbb{R}$ đồng phôi với nhau qua song ánh liên tục là ánh xạ chiếu.
Mà $\mathbb{R}$ liên thông nên A liên thông.
$\{(0,0)\}$ là 1 điểm tụ của A nên $X = A \cup \{(0,0)\}$cũng liên thông.
Nhưng không có đường thẳng nào đi từ $(0,0)$ đến bất cứ điểm nào trên A

□

Câu 6. Cho f là ánh xạ liên tục từ 2 KG metric (E, d_E) vào (F, d_F), biết rằng f^{-1}liên tục và f song ánh. CMR.

i) E compact nếu và chỉ nếu F compact.

ii) E liên thông đường nếu và chỉ nếu F liên thông đường.

iii) Hỏi nếu E liên thông, f là đồng phôi thì F có liên thông hay không?.

Chứng minh.
Chú ý đẳng thức $f(E) = F$ và $f^{-1}(F) = E$ và bằng định nghĩa compact, liên thông, liên thông đường. Ta chú ý

i) Vì f liên tục, E compact nên $f(E)$ compact và ngược lại tương tự

ii) CM tương tự câu (i)

iii) Tương tự (i).

□

Câu 7. Trong KG metric (X, d). CMR mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu các dãy con của nó cũng hội tụ.

Giải

Ở chiều thuận, dễ dàng thấy khi $\{x_n\}$ hội tụ thì các dãy con của nó cũng hội tụ.
Xét chiều nghịch, ta thấy

$$\{x_{6n}\} \text{ là dãy con của 2 dãy } \{x_{3n}\} \text{ và } \{x_{2n}\}$$
$$\{x_{6n+3}\} \text{ là dãy con của 2 dãy } \{x_{3n}\} \text{ và } \{x_{2n+1}\}$$

Ta giả sử $x_{3n} \to a$ thì $x_{6n} \to a$ và nếu $x_{2n} \to b$ thì $x_{6n} \to b$. .
Mà giới hạn (nếu có) là duy nhất nên $a = b$ hay $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{3n}\}$ có cùng giới hạn.
Tương tự, ta cũng được $\{x_{2n+1}\}$ và $\{x_{3n}\}$ có cùng giới hạn.
Do đó $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{2n+1}\}$ có cùng giới hạn.
Mà $\{x_n\} = \{x_{2n}\} \cup \{x_{2n+1}\}$ nên dãy $\{x_n\}$ cũng hội tụ.

□

Câu 8. CMR hàm phần nguyên.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ f(x) &= [x] \end{aligned}$$

liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ nhưng không liên tục trên $\mathbb{Z}$.

Chứng minh.

◇ CM f liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Ta lấy $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ thì $[t] \leq t < [t+1]$, đặt $\epsilon = \dfrac{\min\{t - [t]\,; [t] + 1 - t\}}{2}$.

Khi đó $B(t, \epsilon) \subset ([t], [t] + 1)$, ánh xạ thu hẹp của f trên $B(t, \epsilon)$ là hàm hằng và $f\big|_{B(t,\epsilon)} = [t]$ nên f liên tục tại mọi $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

◇ CM f không liên tục trên $\mathbb{Z}$.
Lấy $t \in \mathbb{Z}$ thì $f(u) = \begin{cases} t - 1 & \text{khi } u \in (t-1, t) \\ t & \text{khi } u \in [t, t+1) \end{cases}$

Do đó f không liên tục trên $\mathbb{Z}$.

Câu 9. Cho $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ là hàm liên tục và $A\subset X$. Hỏi .

i) Nếu A bị chặn thì $f(A)$ có bị chặn không?

ii) Câu hỏi tương tự cho mở, đóng, đầy đủ

Giải.

i) K.L không. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t}$ với $X=Y=(0,\infty)$ và $A=(0,1)$.

ii) Không. Cho $X=Y=\mathbb{R}$,

T.H. mở $f=x^2$ và $A=(-1,1)$

T.H đóng $f=\dfrac{1}{x}$. và $A=[1,+\infty)$

T.H đầy đủ $f=\arctan x$ hoặc $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ với $A=X$

$\square$

Câu 10. Hãy cho một ví dụ về ánh xạ mở, ánh xạ đóng.

Giải.

Cho $X=Y=\mathbb{R}_+$, ngoại trừ ánh xạ đồng nhất, ta có thể có các ví dụ sau

A. xạ mở. Lấy $f=\ln x$, $f((a,b))=(\ln a,\ln b)$. Hoặc sd hàm số mũ.

A. xạ đóng. Lấy $f=a$, ánh xạ hằng.

$\square$

Câu 11. CMR giữa 2 số vô tỷ luôn có 1 số hữu tỷ và ngược lại vẫn đúng.

$\square$

Chương 2

KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN.

2.1 Bài tập

Bài 1. Cho $(E, \|.\|)$ là KG định chuẩn và các ánh xạ $\varphi : E \times E \to E$ và $\Psi : \mathbb{R} \times E \to E$ xác định bởi $\varphi(x, y) = x + y$; $\Psi(\alpha, x) = \alpha x$; $\forall x, y \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

CMR φ và Ψ (lần lượt) là các ánh xạ liên tục trên $E \times E$ và $\mathbb{R} \times E$.

Giải. Áp dụng khái niệm liên tục (dãy).

Bài 2. Cho a là một vector trong KG định chuẩn $(E, \|.\|)$ và $r, s \in (0, \infty)$. CMR

i) $B(a, r) = a + B(0, r) = a + s^{-1} r B(a, s)$

ii) $B'(a, r) = a + B'(0, r) = a + s^{-1} r B(a, s)$

iii) $B(0, 2r) = B(a, r) + B(-a, r)$

iv) $B'(0, 2r) = B'(a, r) + B'(-a, r)$

v) $\forall y \in E,\ \exists x \in B'(0, r)$ s.t $y = r^{-1} \|y\| x$

Giải.

Sử dụng khái niệm lý thuyết tập hợp để kiểm chứng.

Bài 3. Cho $(E, \|.\|_1)$ là một KG Banach và $\|.\|_2$ là một chuẩn trên E sao cho có 2 số thực dương α, β thỏa

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

CMR $(E, \|.\|_2)$ cũng là một KG Banach.

Chứng minh.

Áp dụng BĐT trên, ta lấy dãy (u_n) Cauchy trong $(E, \|.\|_2)$ thì nó cũng Cauchy trong $(E, \|.\|_1)$.

Vì $(E, \|.\|_1)$ Banach nên (u_n) hội tụ về $u \in E$ theo chuẩn $\|.\|_1$

Do đó nó cũng hội tụ về $u \in E$ theo chuẩn $\|.\|_2$, vậy $(E, \|.\|_2)$ là KG Banach.

Bài 4. Cho M là KG vector con của một KG ĐC E và $U = B'(0,r)\,,\ c \in (0,1)\,.$ Giả sử $U \subset M + cU$. CMR $U \subset \overline{M}$ và M dầy đặc trong E.

Chứng minh.

⋄ Bằng quy nạp, ta có thể kiểm chứng $U \subset M + c^n U, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dễ thấy $n = 1$ hiển nhiên đúng, ta giả sử khi $n = k$, thì $U \subset M + c^k U$.

Ta ch.m $U \subset M + c^{k+1}U$, hay $\forall z \in U$ thì $z \in M + c^{k+1}U$.

Do $n = k$; $z \in U \subset M + c^k U$ nên sẽ có $m_1 \in M$ và $u_1 \in U$ sao cho $z = m_1 + c^k u_1$.

Mà $u_1 \in U \subset M + cU$ nên $\exists m_2 \in M$, $\exists u_2 \in U$ .s.t $u_1 = m_2 + cu_2$. Vậy $z = \left(m_1 + c^k m_2\right) + c^{k+1}u_2$

Mặt khác M là KG vector con nên $m_1 + c^k m_2 \in M, \quad \forall m_1, m_2 \in M,\ c^k \in (0,1)\,.$ Do đó

$$z \in M + c^{k+1}U \text{ suy ra } U \subset M + c^{k+1}U \text{ đúng.}$$

Vậy, ta được

$$U \subset M + c^n U, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ hay } U \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (M + c^n U) \qquad (1)$$

⋄ Tiếp theo, ta sẽ kiểm chứng $U \subset \overline{M}$. Vì

$$\overline{M} = \bigcap_{\rho>0} (M + B(0,\rho)) \ \text{ (theo Đlý 1.4}i\text{)sách GTH)}$$

nên với mọi $c \in (0,1)\,;\ n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (M + c^n U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (M + B(0, c^n.r)) \subset= \overline{M} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $U \subset \overline{M}$.

⋄ Cuối cùng, để ch.m M dầy đặc trong E i.e. $\overline{M} = E$.

Ta có $M \subset E$ và E đóng nên $\overline{M} \subset E$.

Mặt khác, lấy $x \in E$, ta sẽ ch.m $z \in \overline{M}$. Ta xét 2 trg hợp sau :

Nếu $x = 0 \in E$, do M là KG vector con nên $\overline{M}$ cũng thế (*Đlý* $1.4iii$) *sách GTH*)

Vì vậy $x = 0 \in \overline{M}$.

Nếu $x \neq 0, x \in E$, ta đặt $y = \dfrac{rx}{\|x\|} \in B'(0,r) = U \subset \overline{M}$

Khi đó $x = \left(\dfrac{\|x\|}{r}\right) y \in \overline{M}$ với $y \in \overline{M}$, $\left(\dfrac{\|x\|}{r}\right) \in \mathbb{R}$ và $\overline{M}$ là KG vector con của E.

Vậy $\overline{M} = E$.

□

Bài 5. Cho A là tập cân bằng trong KGĐC E. Giả sử có $r > 0$ sao cho $B'(0,r) \subset \overline{A}$. Cho $x \in B'(0,r)\,.$ CMR

i) $\forall \epsilon > 0,\ \exists y \in r^{-1}\|x\|\, A$ sao cho $\|x - y\| \leq \epsilon$.

ii) $\exists \left\{ x_n |\, x_n \in r^{-1}2^{1-n}\|x\|\, A \right\} \subset E$ sao cho $\left\| x - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \right\| \leq 2^{-n} \min\{1, r, \|x\|\}$.

Chứng minh.

i) Trường hợp $x = 0$ thì $y = 0 \in \{0\}$ hiển nhiên $\|x - y\| = 0 \le \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$.

Ta xét trường hợp $x \ne 0$,

Đặt $z = \dfrac{rx}{\|x\|}$ thì $z \in B'(0,r) \subset \overline{A}$, khi đó $\exists (x_n) \subset A$ sao cho $x_n \to x$. Tức

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t } \|x_n - z\| \le \epsilon \le \frac{r}{\|x\|}\epsilon \text{ vì } \frac{r}{\|x\|} \ge 1, \quad \forall x \in B'(0,r)$$

Hay tồn tại $y' = x_{n_0} \in \{x_n\} \subset A$ sao cho

$$\|y' - z\| \le \frac{r}{\|x\|}\epsilon \Leftrightarrow \left\| y' - \frac{rx}{\|x\|} \right\| \le \frac{r}{\|x\|}\epsilon \Leftrightarrow \frac{r}{\|x\|} \left\| \frac{\|x\|}{r} y' - x \right\| \le \epsilon$$

Chọn $y = \dfrac{\|x\|}{r} y'$ thì $y \in A$ do $\dfrac{\|x\|}{r} \le 1,\ y' \in A$ với A là tập cân bằng.

Do đó $\forall \epsilon > 0,\ \exists y \in r^{-1}\|x\| A$ sao cho $\|x - y\| \le \epsilon$.

ii) Ta sẽ xây dựng dãy (x_n) bằng quy nạp như sau:

Theo (i), với $\epsilon = 2^{-1}\min\{1, r, \|x\|\}$ ta tìm được $x_1 \in r^{-1}\|x\| A$ s.t.

$$\|x - x_1\| \le 2^{-1}\min\{1, r, \|x\|\} \le 1 \text{ hay } x - x_1 \subset B'(0,1).$$

T.t $\epsilon = 2^{-2}\min\{1, r, \|x\|\}$ ta được $x_2 \in r^{-1}\|x - x_1\| A \subset r^{-1}2^{-1}\min\{1, r, \|x\|\} A \subset r^{-1}2^{-1}\|x\| A \quad (\star)$

$$\|(x - x_1) - x_2\| \le 2^{-1}\min\{1, r, \|x\|\} \le 1 \text{ hay } x - x_1 - x_2 \subset B'(0,1).$$

Giả sử ta đã xây dựng được $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ với $x_k \in r^{-1}2^{1-k}\|x\| A$ sao cho

$$\|x - x_1 - ... - x_n\| \le 2^{-n}\min\{1, r, \|x\|\} \le 1 \text{ hay } x - x_1 - ... - x_n \subset B'(0,1).$$

Do $\left(x - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right) \in B'(0,1)$ nên theo (i) với $\epsilon = 2^{-(1+n)}\min\{1, r, \|x\|\}$ ta tìm được

$$x_{n+1} \in r^{-1}\left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| A \subset r^{-1}2^{-n}\min\{1, r, \|x\|\} A \subset r^{-1}2^{1-n}\|x\| A \text{ sao cho}$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \le 2^{-(n+1)}\min\{1, r, \|x\|\}$$

Vậy ta đã xây dựng được dãy $\{x_n\}$ thỏa đề bài.

$(\star)$ ***<u>Bài toán phụ cho tập cân bằng</u>***

Cho A là tập cân bằng và $0 < a \le b < 1$. CMR $aA \subset bA$.

Prove. *Ta có $0 < \dfrac{a}{b} \le 1$, A là tập cân bằng nên $\dfrac{a}{b}A \subset A$. Do đó $aA \subset bA$.*

$\square$

Bài 6. Cho X, Y là 2 KGĐC và $\Lambda : X \to Y$ là một ánh xạ tuyến tính, $A \subset X$, $B \subset Y$. CMR
i) Nếu A là KGC (hoặc tập lồi, cân bằng) của X thì $\Lambda(A)$ cũng là KGC (lồi, c.bằng) của Y.
ii) Nếu B là KGC (hoặc tập lồi, cân bằng) của Y thì $\Lambda^{-1}(B)$ cũng là KGC (lồi, c.bằng) của X.

Chứng minh

i)

a. Nếu A là KGC của X thì $0 \in A$. Vì là một ánh xạ tuyến tính nên $\Lambda(0) = 0 \in \Lambda(A) \subset Y$.
Mặt khác lấy $a_1, a_2 \in \Lambda(A)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ ta ch.m $\alpha a_1 + a_2 \in \Lambda(A)$.
Vì $a_1, a_2 \in \Lambda(A) \Rightarrow \exists u_1, u_2 \in A$ s.t $a_1 = \Lambda u_1$ và $a_2 = \Lambda u_2$. Do Λ tuyến tính nên

$$\alpha a_1 + a_2 = \alpha \Lambda u_1 + \Lambda u_2 = \Lambda(\alpha u_1 + u_2) \in \Lambda(A)$$

Vậy $\alpha a_1 + a_2 \in \Lambda(A)$ nên $\Lambda(A)$ cũng là KGC của Y.
b. Ta cũng ch.m tương tự cho tính lồi.
c. Nếu A là tập cân bằng, khi đó $\beta A \subset A$ với mọi $|\beta| \le 1$ hay $\beta x \in A, \quad \forall x \in A$.
Lấy $c \in \Lambda(A) \Rightarrow \exists a \in A$ s.t $c = \Lambda a$, ta có $\beta c = \Lambda(\beta a) \in \Lambda(A)$. Vậy $\beta \Lambda(A) \subset \Lambda(A)$.
ii) Ta chỉ cần chú ý công thức $\Lambda\left(\Lambda^{-1}(B)\right) \subset B$
a. Dễ thấy B là KGC nên $0 \in B$. Mà Λ tuyến tính nên

$$\Lambda(0) = 0 \in B \Rightarrow 0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(0)) \in \Lambda^{-1}(B)$$

Vậy $0 \in \Lambda^{-1}(B)$.
Tiếp theo, ta kiểm chứng $\alpha b_1 + b_2 \in \Lambda^{-1}(B), \quad \forall b_1, b_2 \in \Lambda^{-1}(B)$
Lấy $a_1, a_2 \in \Lambda^{-1}(B)$ thì $\Lambda(a_1) \in \Lambda\left(\Lambda^{-1}(B)\right) \subset B$. Đặt $b = \Lambda(a_1)$.
Tương tự ta cũng được $b_2 = \Lambda(a_2) \in B$
Vì B là KGC nên với $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có

$$\alpha b_1 + b_2 \in \Lambda\left(\Lambda^{-1}(B)\right) \subset B$$

Mà $\alpha b_1 + b_2 = \Lambda(\alpha a_1 + a_2)$ suy ra

$$\alpha b_1 + b_2 = \Lambda(\alpha a_1 + a_2) \in B$$

Do đó

$$(\alpha a_1 + a_2) \in \Lambda^{-1}(B) \text{ đpcm}$$

Vậy $\Lambda^{-1}(B)$ cũng là KGC trong X.
Cách ch.minh khi B lồi, cân bằng cũng tương tự như ch.m khi B là KGC.

□

Bài 7. Cho $(E, \|.\|_E)$ là một KGĐC và $\Gamma = \{(x, x) \mid x \in E\}$. CMR Γ là một KG vector con đóng trong $E \times E$.

Chứng minh.

Ta xét ánh xạ $\Lambda : E \times E \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\Lambda(z) = \Lambda(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall z \in E \times E$$

Dễ dàng kiểm chứng :

i) Λ là một ánh xạ liên tục từ $E \times E$ vào $\mathbb{R}$ nên $\Lambda^{-1}(\{0\})$ đóng trong $E \times E$ và

ii) Γ là KGC trong $E \times E$

Mặt khác $\Lambda \not\equiv 0$ vì E là KG vector nên sẽ tồn tại $a, b \in E$; $a \neq b$ sao cho

$$\Lambda(a, b) = \|x - y\| \neq 0.$$

Lại có

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\{0\}) &= \{z \in E \times E \text{ sao cho } \Lambda(z) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in E \times E \text{ sao cho } \Lambda(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in E \times E \text{ sao cho } x = y\} = \Gamma \end{aligned}$$

Vậy Γ là một KG vector con đóng trong $E \times E$.

[Ngoài ra ta còn có thể ch.m Γ là KGC và Γ đóng (bằng tính duy nhất của giới hạn)]

□

Bài 8. Cho $\{B'(a_m, r_m)\}$ là dãy các quả cầu đóng trong KG Banach E.
Giả sử $B'(a_{m+1}, r_{m+1}) \subset B'(a_m, r_m), \quad \forall m \in \mathbb{N}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. CMR

$$\bigcap_{n\geq 1} B'(a_n, r_n)$$

có đúng một phần tử.

Chứng minh.

⋄ Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $r_n < \dfrac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$. Hiển nhiên $r_{n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Khi đó $\forall m, n \geq n_0$ thì $B'(a_m, r_m) \subset B'(a_{n_0}, r_{n_0})$ và $B'(a_n, r_n) \subset B'(a_{n_0}, r_{n_0})$.
Do đó

$$\|a_m - a_n\| \leq \|a_m - a_{n_0}\| + \|a_n - a_{n_0}\| < 2r_{n_0} < \epsilon$$

Vậy $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong E Banach nên sẽ hội tụ. Đặt $a = \lim a_n, \ a \in E$.
⋄ Tiếp theo, ta sẽ ch.m $a \in B'(a_n, r_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Bằng phản chứng, giả sử $a \notin \bigcap\limits_{n\geq 1} B'(a_n, r_n)$, tức $\exists k \in \mathbb{N}$ sao cho $a \notin B'(a_k, r_k)$.
Vậy $a \in E \backslash B'(a_k, r_k)$ mở trong E nên sẽ có $r > 0$ s.t.

$$a \in B(a, r) \subset E \backslash B'(a_k, r_k), \text{ do đó } B'(a_k, r_k) \cap B(a, r) = \emptyset.$$

Mặt khác $B'(a_{m+1}, r_{m+1}) \subset B'(a_m, r_m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$ nên với mọi $n \geq k$ thì

$$B(a,r) \cap B'(a_n, r_n) = \emptyset$$

Do đó

$$a_n \notin B(a,r), \quad \forall n \geq k \qquad (*)$$

Ta đã ch.m $a_n \to a \in E$ nên với $r > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\|a_n - a\| < r, \quad \forall n \geq k_0$.

Chọn $m = \max\{k, k_0\}$; ta được

$$\forall n > m > k \text{ thì } \|a_n - a\| < r$$

Vậy $a_n \in B(a,r)$ mâu thuẫn với giả thiết $(*)$.

Do đó $a \in B'(a_n, r_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

⋄ Cuối cùng, kiểm tra tính duy nhất của a.

Ta giả sử có $b \in E$ sao cho $b \in B'(a_n, r_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $a = b$. Thật vậy,

$$\|a - b\| \leq \|a - a_n\| + \|a_n - b\| \leq 2r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mặt khác $\lim r_n = 0$ nên

$$\|a - b\| = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy a là duy nhất hay $\bigcap\limits_{n\geq 1} B'(a_n, r_n)$ có duy nhất 1 phần tử.

□

Bài 9. Cho $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong KGĐC $(E, \|.\|)$. CMR có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ s.t. $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh.

Do (x_n) là dãy Cauchy nên với mỗi $\epsilon_k = 2^{-k} > 0$, thì có $n_k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|x_m - x_n\| \leq 2^{-k}, \quad \forall m, n \geq n_k$$

Bổ trợ tính chất vô hạn khi xây dựng dãy con bằng PP quy nạp trong B.9 Chap.2

1) ⋄ Ta đặt $I_k = \left\{ l \in \mathbb{N} \,\middle|\, \|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}, \quad \forall m, n \geq n_k \right\}$.

Với mỗi $p \geq n_0$, $\forall m, n \geq p \geq n_0$, ta có

$$\|x_m - x_n\| \leq 2^{-k}$$

Vậy $p \in I_k$ hay $\{n_0, n_0 + 1, ...\} \subset I_k$ nên I_k là tập con vô hạn của $\mathbb{N}$.

⋄ Tiếp theo, ta ch.minh $I_{k+1} \subset I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Lấy $n_0 \in I_{k+1}$, khi đó $\|x_m - x_n\| < 2^{-k-1} \leq 2^{-k}$ do đó $n_0 \in I_k$.

Vậy $I_{k+1} \subset I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

⋄ Đặt

$n_1 = \min I_1$

$n_2 = \min I_2 \backslash \{n_1\}$ thì $n_2 > n_1$

.... bằng quy nạp

$n_k = \min I_k \backslash \{n_1, n_2, ..., n_k\}$

Do $I_{k+1} \subset I_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ nên

$$I_{k+1} \backslash \{n_1, ..., n_k\} \subset I_k \backslash \{n_1, ..., n_{k-1}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

do đó

$$\min \{I_{k+1} \backslash \{n_1, ..., n_k\}\} \geq \min \{I_k \backslash \{n_1, ..., n_{k-1}\}\}$$

Vậy

$$n_{k+1} > n_k > ... > n_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Do đó dãy (x_{n_k}) vừa xây dựng được là một dãy con của (x_n).

Khi đó với mỗi $k \in \mathbb{N}$, vì $n_k \in I_k$; ta được

$$\|x_m - x_n\| < 2^{-k}, \quad \forall m, n \geq n_k$$

Chọn $m = n_k + 1$ và $n = n_k$ thì $m, n \geq n_k$ nên

$$\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| < 2^{-k}, \quad \forall n \geq n_k$$

$\square$

Bài 10. Cho $(E, \|.\|)$ là KGĐC và (a_n) là dãy các phần tử của E. Đặt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, nếu dãy (s_n) hội tụ trong E, ta nói chuỗi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ hội tụ, ký hiệu là $s = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ và khi đó giới hạn của dãy (s_n) được gọi là *tổng riêng phần* của chuỗi. CMR 2 điều sau tương đương với nhau :

i) E là KG Banach .

ii) Mọi chuỗi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ trong E với $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|a_m\| < \infty$ đều hội tụ.

Chứng minh

i) $\Rightarrow$ ii).

Lấy $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ là một chuỗi bất kỳ trong KG Banach E với $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|a_m\| < \infty$, ta ch.m $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ hội tụ.

Ta đặt $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ và $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \|a_k\|$

Do $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|a_m\| < \infty$ nên dãy $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \|a_k\|$ hội tụ do đó Cauchy trong E. Khi đó

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|u_m - u_n\| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$, thì

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| = |u_m - u_n| < \epsilon$$

Do đó (s_n) Cauchy trong KG E Banach nên sẽ hội tụ.

Vậy $\lim s_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ hội tụ.

ii) $\Rightarrow$ i).

Ta lấy (x_n) Cauchy trong E, cần ch.m $x_n \to x \in E$.

Do (x_n) Cauchy trong E nên bị chặn do đó $\|x_{n_1}\| < \infty$

Mặt khác, theo bài 9, ta có dãy con (x_{n_k}) s.t. $\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$.

Lấy dãy (a_k) xác định bởi $a_1 = x_{n_1}$; $a_k = x_{n_k} - x_{n_k-1} \quad \forall k \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|a_j\| &= \|x_{n_1}\| + \sum_{j=2}^{n} \|a_j\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{j=1}^{n-1} \|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| &\leq \|x_{n_1}\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty \\
\Rightarrow \|x_{n_k}\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} a_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| < \infty
\end{aligned}$$

Ta có dãy $\{c_k = \|x_{n_k}\|\}_k$ là dãy tăng và bị chặn trên nên hội tụ về $x \in E$

Dãy (x_n) Cauchy trong E có dãy con (x_{n_k}) hội tụ về $x \in E$.

Vậy x_n cũng hội tụ về $x \in E$ nên E là KG Banach. $\square$

Bài 11. Cho $(E, \|.\|)$ là KGĐC, (x_n) là dãy Cauchy trong E. Đặt $Z = \{(y_n) \in E |\, y_n \to 0\}$, cmr dãy $(\|x_n\|)$ hội tụ trong $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \inf_{y_m \in Z} \sup\{\|x_m - y_m\| \ : \ m \in \mathbb{N}\}$$

Chứng minh.

Ta có (x_n) là dãy Cauchy trong E nên

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\| < \epsilon, \quad \forall m, n \ge n_0$$

nên dãy $(\|x_n\|)$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ nên hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Mặt khác, đặt

$$A = \sup\{\|x_m - y_m\| \ : \ m \in \mathbb{N}\};\ \alpha = \inf_{y \in Z} A \text{ và } \beta = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

(1) Ta ch.m $\beta \le \alpha = \inf A$, hay β là chặn dưới của A; i.e.

$$\beta \le \sup\{\|x_m - y_m\| \ : \ m \in \mathbb{N},\ y \in Z\}$$

Ta có $\|x_m\| \le \|x_m - y_m\| + \|y_m\|$ nên

$$\beta = \lim_{m\to\infty} \|x_m\| \le \lim_{m\to\infty} \|x_m - y_m\| + \lim_{m\to\infty} \|y_m\| \le \sup_{y \in Z; m \in \mathbb{N}} \|x_m - y_m\| = \alpha$$

(2) Tiếp theo, ta ch.m $\alpha \le \beta$, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa

$$z_m = \begin{cases} -x_m & \text{khi } m < n \\ 0 & \text{khi } m \ge n \end{cases}$$

Khi đó $z_m \to 0$ khi $m \to \infty$ do đó $(z_m) \subset Z$.

Ta có $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m - y_m\| = \sup_{m \ge n} \|x_m\|$

Do đó $\sup_{m \ge n} \|x_m\| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m - y_m\| \ge \inf_{y \in Z} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m - y_m\| = \alpha$,

Lại có

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{m \ge n} \|x_m\| = \lim_{m\to\infty} \sup \|x_m - y_n\| \ge \alpha \qquad (*)$$

Mặt khác $\{\|x_n\|\}$ là dãy hội tụ nên

$$\lim_{m\to\infty} \sup \|x_m\| = \sup \|x_m\| = \beta \qquad (**)$$

Vậy từ $(*)$ và $(**)$, ta được

$$\beta \ge \alpha$$

□

Bài 12. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ là một chuỗi hội tụ trong KGĐC E. CMR $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Chứng minh.

Ta xét 2 tr.hợp:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$ thì hiển nhiên $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Đặt $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$; $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ và $f(z) = \|z\|, \quad \forall z \in E$.

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ nên $\lim s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, và f liên tục; do đó

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| = f(s) = \lim f(s_n) = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|$$

Áp dụng BĐT tam giác và bằng PP quy nạp, ta ch.m được

$$\|s_n\| \leq \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

□

Bài 13. Cho (x_n) là dãy trong KG Banach $(E, \|.\|)$. Giả sử không có một dãy con nào của $\{x_n\}$ hội tụ trong E. CMR có một số thực dương r và một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho

$$\left\|x_{n_k} - x_{n_{k'}}\right\| > r, \quad \text{nếu } k \neq k'$$

Chứng minh.

Đặt $A_n = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ thì $(x_n) \subset \overline{A}$

$\overline{A}$ chứa dãy (x_n) không có dãy con nào hội tụ nên $\overline{A}$ không compact

Theo kết quả chứng minh ở bài 8, chương 1. $\overline{A}$ không compact (mà $\overline{A}$ đóng trong E nên $\overline{A}$ đầy đủ) nên cũng không tiền compact (iii); do đó A cũng không tiền compact. Vậy tồn tại $r > 0$ sao cho A không chứa trong hội hữu hạn các quả cầu.

Xây dựng dãy bằng quy nạp như cách 1 bài 8iii. chương 1; ta chọn

$x_{n_1} = a_1 \in X$

$x_{n_2} = a_2 \in X \backslash B(a_1, r)$.... ; $x_{n_k} \in X \backslash \left(\cup_{i=1}^{k-1} B(a_i, r)\right)$

và cũng lập luận tương tự với $X \backslash \left(\cup_{i=1}^{k} B(a_i, r)\right) \neq \emptyset$, ta được

$$\|a_k - a_{k'}\| > r, \quad \forall k \neq k'$$

hay

$$\left\|x_{n_k} - x_{n_{k'}}\right\| > r, \quad \forall k \neq k'$$

□

Bài 14. Cho (x_n) là dãy trong KGĐC $(E, \|.\|)$ và $x \in E$. CMR 2 điều sau tương đương.

i) Có một dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ hội tụ về $x \in E$.

ii) $\forall r > 0$; $I_r = \{n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in B(x, r)\}$ là tập con vô hạn của $\mathbb{N}$.

Chứng minh

Ta xét i) $\Rightarrow$ ii);

Dễ thấy $I_r \subset \mathbb{N}$; mặt khác dãy (x_n) có dãy con hội tụ nên cũng hội tụ về $x \in E$.

Khi đó $\forall r > 0$, $\exists n_r \in \mathbb{N}$ s.t. $\|x_n - x\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_r$.

Do đó $\{n_r, n_r + 1, ...\} \subset I_r$ nên I_r là tập con vô hạn trong $\mathbb{N}$

Xét ch.minh ii) $\Rightarrow$ i);

Ta có I_r là tập con vô hạn của $\mathbb{N}$ nên ta có thể xây dựng được dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ hội tụ về $x \in E$.

Đặt $J_k = I_{2^{-k}} = \left\{n \in \mathbb{N} \quad : \quad \|x_n - x\| < 2^{-k}\right\}$,

Ta đã chứng minh J_k vô hạn trong $\mathbb{N}$ ở bài 9. nên

Giả sử với $n_1 < n_2 < ... < n_k$, ta xây dựng được $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$ sao cho

$$\left\|x_{n_j} - x\right\| < 2^{-j}, \quad \forall j = 1, 2, .., k$$

Vì J_k vô hạn; ta chọn được $n_{k+1} \in J_{k+1} \setminus \{n_1 n_2, ..., n_k\}$ sao cho

$$\|x_{n_k+1} - x\| < 2^{-k-1}$$

Cho $k \to \infty$, thì $x_{n_k} \to x$.

Do đó, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ hội tụ về x.

□

Bài 15. Cho (x_n) là dãy trong KGĐC $(E, \|.\|)$ và $x \in E$. CMR 2 điều sau tương đương.

i) Không có dãy con nào của (x_n) hội tụ về $x \in E$.

ii) $\forall x \in E$; $\exists r \in \mathbb{R}$ sao cho $I_r = \{n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in B(x, r)\}$ là tập con hữu hạn.

Chứng minh.

Áp dụng KQCM ở bài 14 và P.P. đảo đề

□

Bài 16. Cho A là tập con đóng trong KG Banach $(E, \|.\|)$. CM 3 điều sau tương đương :

i) A compact

ii) Không có dãy $\{x_n\} \subset A$ nào sao cho $\forall r > 0$ thì $\|x_n - x_m\| > r, \quad \forall n \neq m$.

iii) $\forall r > 0$, có một tập con hữu hạn $B \subset A$ sao cho $A = \cup_{b \in B} B(b, r)$.

Chứng minh.

(1) . i⇒ii. Sử dụng đảo đề (ch.m ~ii⇒~i) Tức

$$\sim \text{ii} : "\exists r > 0,\ \forall (x_n) \subset A \text{ sao cho } \|x_n - x_m\| > r, \quad \forall n \neq m.$$

Do đó mọi dãy trong A đều không phải dãy Cauchy nên cũng không phải dãy hội tụ.

Mọi dãy (x_n) không hội tụ nên cũng không có dãy con nào hội tụ trong A

Vậy A không compact.

(2) . ii⇒iii. Lại sử dụng đảo đề, nếu

$$\sim \text{iii} : "\exists r > 0,\ \forall B \subset A \text{ sao cho } B \text{ vô hạn thì } A \not\subset \cup_{b \in B} B(b, r)$$

ta cần ch.minh

$$\sim \text{ii} : "\exists r > 0, \quad \forall (x_n) \subset A \text{ sao cho } \|x_n - x_m\| > r, \quad \forall n \neq m.$$

Vì B vô hạn; ta sẽ xây dựng dãy x_n trong A sao cho $\|x_n - x_m\| > r, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Ta lấy $x_1 \in A$, mà $A \not\subset B(x_1, r)$ nên sẽ có

$$x_2 \in A \backslash B(x_1, r)$$

sao cho

$$\|x_1 - x_2\| \geq r$$

Giả sử ta tìm được $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in A$ sao cho

$$\forall i, j \in \overline{1, ..., k} \text{ s.t } i \neq j \text{ thì } \|x_i - x_j\| > r$$

Vì $A \not\subset \cup_{i=1}^{k} B(x_i, r)$ nên $A \backslash \left(\cup_{i=1}^{k} B(x_i, r)\right) \neq \emptyset$, do đó sẽ tồn tại

$$x_{n+1} \in A \backslash \left(\cup_{i=1}^{k} B(x_i, r)\right), \text{ s.t. } \|x_i - x_{n+1}\| > r, \quad \forall i \in \overline{1, ..., n}$$

Vậy tồn tại dãy $(x_n) \subset A$ sao cho $\forall m \neq n$ thì $\|x_m - x_n\| > r$.

Do đó ~ii đúng, ta được đpcm.

(3) . iii⇒i. Theo (iii), thì B hữu hạn nên A được phủ bởi hữu hạn các quả cầu mở $\forall r > 0$.

Do đó A tiền compact,

Mặt khác $A \subset E$, E đầy đủ và A đóng trong E nên A cũng đầy đủ.

Vậy A đầy đủ và A tiền compact nên sẽ compact.

$\square$

Bài 17. Cho X là tập hợp tất cả các dãy số thực $x = \{x_n\}$; i.e. $X = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Xét các tập con c_c là tập các dãy $x = (x_n)$ có các số hạng $= 0$ trừ một số hữu hạn các x_n, i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $x_n = 0, \quad \forall n \geq n_0$.

c_0 là tập hợp các dãy $x = (x_n)$ hội tụ về 0.

I_∞ là tập các dãy bị chặn và $I_p,\ 1 \leq p < \infty$ là tập các dãy số $x = (x_n)$ s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$

Chú ý rằng $I_\infty = L^\infty(\mathbb{N}; \mu)$ và $I_p = L^p(\mathbb{N}; \mu)$; trong đó μ là độ đo đếm trên $\mathbb{N}$.

CMR c_c và c_0 là các KGC dầy đặc trong $\left(I_p, \|.\|_p\right)$ nhưng không là các KGC dầy đặc trong $(I_\infty, \|.\|_\infty)$.

[Không giải vì kiến thức này trong KG L^p]

Bài 18. Xét KG vector $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Gọi

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là tập các hàm bị chặn.

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là tập các hàm liên tục.

$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là tập các hàm liên tục có giá compact; i.e. tồn tại $K \subset \mathbb{R}^n$ compact sao cho $f(x) = 0, \quad \forall x \notin K$.

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là tập các hàm liên tục sao cho $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$; i.e. $\forall \epsilon > 0$, tồn tại $K \subset \mathbb{R}^n$ compact sao cho $|f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \notin K$.

i) CMR $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ và $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là các KGC của $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

ii) Với $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|, \ f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. CMR $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ là KGC dầy đặc của $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}); \|.\|_\infty)$.

Chứng minh.

i) Ta chỉ kiểm tra 2 tính chất sau :

$f \equiv 0$ có thuộc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ và $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ hay không?

$\alpha f + g$ có thuộc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ và $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\forall f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ và $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (lần lượt)?

ii) Dễ dàng ch.minh

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

và

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ là KGC của } (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$$

Ta chỉ ch.m $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dầy đặc trong $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Lấy $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ta cần ch.m $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ hay tìm hàm

$$f_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ s.t. } \|f_\epsilon - f\|_\infty \le \epsilon', \quad \forall \epsilon' > 0$$

Do $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nên $\forall \epsilon > 0$, $\exists K_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ compact s.t.

$$|f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \notin K_\epsilon \qquad (*)$$

Mà K_ϵ compact nên đóng và bị chặn, do đó

$$\exists r > 0, \text{ s.t. } K_\epsilon \subset B(0, r) \text{ và khi đó } K_\epsilon \cap (\mathbb{R}^n \backslash B(0, r)) = \emptyset$$

Đặt

$$A = K_\epsilon \text{ và } B = \mathbb{R}^n \backslash B(0, r);$$

Ta có A, B là 2 tập đóng rời nhau nên tồn tại ánh xạ từ $A \cup B$ vào $\mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

là hàm liên tục (theo bổ đề Urysohn) và dễ dàng kiểm chứng

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in A \\ 0 & \text{khi } x \in B \end{cases} \quad \text{với } A = K_\epsilon$$

Đặt $f_\epsilon(x) = f(x).\varphi(x)$ cũng là hàm liên tục do f liên tục và $\varphi(x)$cũng liên tục.
Ta có

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A = K_\epsilon \\ 0 & x \in B = \mathbb{R}^n \backslash B((0,r)) \end{cases}$$

$\forall x \in B$, thì $x \notin K_\epsilon$ ta có

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| = |f(x).\varphi(x) - f(x)| \leq |f(x)| < \epsilon \text{ theo } (*)$$

do đó

$$\|f_\epsilon - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_\epsilon(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash K_\epsilon} |f_\epsilon(x) - f(x)| < \epsilon'$$

Chọn $\epsilon = \epsilon'$, ta có

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists f_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ sao cho } \|f_\epsilon - f\|_\infty \leq \epsilon$$

Vậy $f \in \overline{C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$

□

Bài 19. Cho $[a,b]$ là một khoảng đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}$. Xét KG $X = C([a,b], \mathbb{R})$ các hàm số liên tục. CMR $(X, \|.\|_1)$ là KGĐC nhưng không phải là KG Banach với

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Chứng minh.

Ta dễ dàng kiểm chứng $\|.\|_1$ là một chuẩn trên X. Để kiểm tra X không Banach, ta sẽ tìm một dãy hàm Cauchy trên X nhưng không hội tụ trong X.
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $[a,b] = [0,1]$, đặt

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \leq t \leq 2^{-1} \\ 2nt - n & \text{khi } 2^{-1} < t < 2^{-1} + (2n)^{-1} \\ 1 & \text{khi } 2^{-1} + (2n)^{-1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dễ thấy

f_n Cauchy trong X, vì $\|f_n - f_m\|_1 = \dfrac{1}{4}\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right| \to 0$ khi n, m đủ lớn.

f_n hội tụ về hàm $f = \begin{cases} 0 & t \in [0, 2^{-1}] \\ 1 & t \in (2^{-1}, 1] \end{cases}$ vì $\|f_n - f\|_1 \to 0$ nhưng f không liên tục.

Trường hợp a, b bất kỳ thì ta xét thêm ánh xạ hợp nối biến khoảng $[0,1] \to [a,b]$. □

Bài 20. Cho A là tập compact của KGĐC $(E, \|.\|)$, f là một đơn ánh liên tục từ A vào KGĐC $(E, \|.\|)$ và $B = f(A)$. CMR f^{-1} liên tục từ B vào E.

Chứng minh.

Ta có f liên tục và A compact nên $B = f(A)$ compact.

Lấy dãy $(b_n) \subset B$ thì $\exists (b_{n_k}) \subset (b_n)$ sao cho $b_{n_k} \to b \in B$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in B$ thì $\exists a_n \in A$ sao cho $b_n = f(a_n)$;

với mỗi k, $\exists a_{n_k} \in A$ sao cho $b_{n_k} = f(a_{n_k})$ và tương tự $\exists a \in A$ s.t. $b = f(a)$.

Do đó $f(a_{n_k}) \to f(a)$

Mặt khác A compact nên có dãy con $\left(a_{n_{k_l}}\right) \subset (a_{n_k})$ sao cho $a_{n_{k_l}} \to a'$ khi $l \to \infty$.

Vậy $a = a'$ (do f đơn ánh)

Mà $a_n = f^{-1}(b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ nên $f^{-1}\left(b_{n_{k_l}}\right) \to f^{-1}(b)$ hay f liên tục.

□

Bài 21. Cho A là tập con của KGĐC $(E, \|.\|_E)$ và f là ánh xạ từ A vào KGĐC $(F, \|.\|_F)$. Giả sử ứng với mỗi $\eta > 0$, tồn tại ánh xạ g_η liên tục từ A vào F sao cho

$$\|f(x) - g_\eta(x)\|_F \leq \eta, \quad \forall x \in A$$

CMR f liên tục trên A.

Chứng minh.

Với mỗi $x \in A$, ta có : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ sao cho

$$\|x - y\|_E < \delta \Longrightarrow \left\|g_{\frac{\epsilon}{3}}(x) - g_{\frac{\epsilon}{3}}(y)\right\|_F < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall y \in A$$

Mặt khác

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \left\|f(x) - g_{\frac{\epsilon}{3}}(x)\right\|_F + \left\|g_{\frac{\epsilon}{3}}(x) - g_{\frac{\epsilon}{3}}(y)\right\|_F + \left\|g_{\frac{\epsilon}{3}}(y) - f(y)\right\|_F < \epsilon$$

Do đó f liên tục với mọi $x \in A$. □

Bài 22. Cho $(E, \|.\|_E)$ và $(F, \|.\|_F)$ là KGĐC và f là ánh xạ liên tục từ E vào F.

i) Giả sử $\|f(tx)\|_F \leq |t| . \|f(x)\|_F$, $\forall x \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$. CMR $f(0) = 0$ và f liên tục tại 0 nếu và chỉ nếu có $M > 0$ sao cho $\|f(x)\|_F \leq M. \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

ii) Giả sử $\|f(x - y)\|_F \geq \|f(x) - f(y)\|_F$, $\forall x, y \in E$ và $f(0) = 0$. CMR f liên tục trên E nếu và chỉ nếu f liên tục tại 0.

Chứng minh

i) 1. Nếu $t.x = 0$ thì

$$\left[\begin{array}{ll} t = 0 \Leftrightarrow \|f(tx)\|_F \leq |t| . \|f(x)\|_F \Leftrightarrow \|f(0)\|_F \leq 0 \Leftrightarrow \|f(0)\|_F = 0 \\ x = 0 \Leftrightarrow \|f(0)\|_F \leq |t| . \|f(0)\|_F, \ \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \|f(0)\|_F = 0 \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = 0.$$

2. Xét chiều nghịch, nếu có $M > 0$ sao cho $\|f(x)\|_F \leq M.\|x\|_E$, $\forall x \in E$ thì

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{M} \text{ s.t. nếu } \|x\| < \delta \text{ thì } \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E < \epsilon, \ \forall x \in E$$

Do đó f liên tục tại 0.

3. Xét chiều thuận, nếu f l.t. tại 0.

Với $\epsilon = 1 > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $\|y\| < \delta$ thì $\|f(y)\| < 1$.

Lấy $x \in E$,

Nếu $x = 0$ thì $\|f(0)\|_F = 0 = M.\|x\|_E$ với mọi $M > 0$.

Nếu $x \neq 0$, ta đặt $y = \dfrac{\delta}{2\|x\|_E}x \neq 0$ thì $x = \dfrac{2\|x\|_E}{\delta}y$

Khi đó $\|y\| < \dfrac{\delta}{2}$ và $\|f(y)\| < 1$.Xét

$$\|f(x)\|_F = \left\|f\left(\frac{2\|x\|_E}{\delta}y\right)\right\|_F \leq \frac{2\|x\|_E}{\delta}\|f(y)\|_F \leq \frac{2\|f(y)\|_F}{\delta}\|x\|_E < \frac{2}{\delta}\|x\|_E$$

Vậy tồn tại $M = \dfrac{2}{\delta}$ để $\|f(x)\|_F \leq M.\|x\|_E$, $\forall x \neq 0$.

Vậy $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E < \epsilon, \ \forall x \in E$.

ii) Dễ thấy nếu f liên tục trên E thì f liên tục tại 0.

Xét chiều nghịch, vì f liên tục tại 0 nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \|z\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(z)\| < \epsilon, \ \forall z \in E$$

Với mọi $x, y \in E$ sao cho $\|x - y\| < \delta$, đặt $z = x - y$ thì

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|f(x-y)\|_F = \|f(z)\|_F < \epsilon, \ \forall \|x - y\| < \delta$$

Do đó f liên tục trên E.

Bài 23. Cho $\left(E_i, \|.\|_{E_i}\right)$; $i = 1, ..., n$ là n KGĐC. Gọi E là KGĐC tích. Đặt

$$pr_i(X) = x_i, \text{ với } X = (x_1, .., x_i, .., x_n); \text{ i} = 1, .., n$$

i) CMR pr_i là ánh xạ liên tục từ E vào E_i, $\forall i = 1, .., n$.

ii) CMR $\forall i = 1, .., n$; $pr_i(V)$ là tập mở trong E_i với mọi tập mở $V \subset E$.

iii) Cho $A \neq \emptyset$ là tập con trong KGĐC F và f là ánh xạ liên tục từ A vào E. CMR f liên tục trên A nếu và chỉ nếu các ánh xạ hợp

$$f_i = pr_i \circ f \ : \ A \to E_i$$

là liên tục $\forall i = 1, .., n$

Chứng minh

i) Ta có $\|pr_i(Z)\|_{E_i} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|pr_i(Z)\|_{E_i}^2} = \|Z\|_E, \ \forall i = 1,..,n, \ \forall Z \in E.$

Dễ thấy $pr_i(X - Y) = pr_i(X) - pr_i(Y)$ và do đó

$$\|pr_i(X) - pr_i(Y)\|_{E_i} \le \|X - Y\|_E, \ \forall i = 1,..,n, \ \forall X, Y \in E.$$

Vậy pr_i là ánh xạ liên tục từ E vào E_i, $\forall i = 1,..,n$.

ii) Lấy V mở trong E, $X \in V$ thì $\exists r > 0$ s.t. $B_E(X, r) \subset V$

Đặt $U_k = B_{E_k}\left(x_k, \dfrac{r}{\sqrt{n}}\right)$, $\forall k = 1, ..., n$ ta được

$$\prod_{k=1}^{n} U_k \subset B_E(X, r) \subset V$$

Vì $\forall Y \in \prod_{k=1}^{n} U_k$, tồn tại tương ứng $x_k \in U_k$, $\forall k = 1,..,n$.

Khi đó $\|y_k - x_k\|_{E_k} < \dfrac{r}{\sqrt{n}}$, $\forall k = 1,..,n$ và

$$\|Y - X\|_E = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|y_i - x_i\|^2} < \sqrt{n\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2} = r$$

nên $Y \in B_E(X, r)$ và do đó

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} U_k \quad &\subset \quad B_E(X, r) \subset V \\ \Rightarrow pr_i\left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right) \quad &\subset \quad pr_i(V), \qquad \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Mà $pr_i\left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right) = U_i$ nên có tập mở $U_i \subset pr_i(V)$ do đó $pr_i(V)$ mở trong E_i

iii) Ta ch.m 2 chiều

<u>Xét chiều thuận.</u> Vì f_i là các ánh xạ hợp của 2 ánh xạ liên tục f và pr_i.

<u>Xét chiều nghịch.</u>

<u>Cách 1.</u> Ta lấy dãy $(X_m) = \{(x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nm})\}$ hội tụ về $X = (x_1, .., x_n) \in A$.

Đặt $Y_m = f(X_m)$ và $Y = f(X)$. Ta cần ch.m $f(X_m) \to f(X)$ hay $Y_m \to Y$.

Giả sử $Y_m \to Z$, ta ch.m $Y = Z$

Vì f_i liên tục nên $f_i(X_m) \to f_i(X)$ với mọi $X_m \to X \in A$ và

$$pr_i\left(\underbrace{f(X_m)}_{Y_m}\right) \to pr_i\left(\underbrace{f(X)}_{Y}\right), \ \forall i = 1,..,n, \ \text{với } X_m \to X$$

Mà pr_i cũng liên tục và $pr_i(Y_m) \to pr_i(Z)$ hay $pr_i(Z) = pr_i(Y), \quad \forall i = 1, ..., n.$

Vậy $Y = Z$.

Do đó $f(X_m) \to f(X)$ hay f liên tục.

Cách 2. Mặt khác $f(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_n(X))$ nên ta cũng có thể ch.m f hội tụ do các ánh xạ thành phần hội tụ.

□

Bài 24. Cho $M,\ N$ là 2 KG vector con của KG vector E. Nếu $M + N = E$ và $M \cap N = \{0\}$. Ta nói E là *tổng trực tiếp* của M và N, ký hiệu $E = M \oplus N$.

i) Giả sử $E = M \oplus N$. CMR $\exists!$ ánh xạ $\phi : E \to M \times N$ với $\phi = (p(x), q(x))$ sao cho $p(x) + q(x) = x,\ \forall x \in E$.

ii) Cho E là KGĐC và là tổng trực tiếp của M và N. CMR ϕ, ϕ^{-1} liên tục nếu và chỉ nếu $p,\ q$ liên tục trên E và ϕ là một song ánh từ E lên $M \times N$. Khi đó ta nói ϕ là một *đồng phôi* từ E vào $M \times N$.

Chứng minh.

i) $\diamond$ CM tồn tại ánh xạ ϕ,

Vì $E = M \oplus N$ hay $E = M + N$, do đó với mỗi $x \in E$, $\exists p(x) \in M$, $\exists q(x) \in N$ sao cho $x = p + q(x)$. Điều này tương đương với

$$\exists \phi : E \to M \times N,\ \text{where } \phi(x) = (p(x), q(x))\ \text{ s.t. } x = p(x) + q(x)$$

$\diamond$ CM duy nhất, tức nếu có $\varphi : E \to M \times N$ sao cho

$$\varphi(x) = (u(x), v(x))\ \text{ s.t. } x = u(x) + v(x)\ \text{ với } u \in M,\ v \in N$$

thì $\phi(x) = \varphi(x)$.

Thật vậy, ta có $x = p(x) + q(x) = u(x) + v(x)$ nên $(p - u)(x) = (v - q)(x) \qquad (1)$.

Mà M, N là các KGvector con nên $(p - u)(x) \in M$ và $(v - q)(x) \in N. \qquad (2)$

Do đó $(p - u)$ và $(v - q) \in M \cap N = \{0\}$; nên $p = u$ và $q = v$

$$\Rightarrow (u(x), v(x)) = (p(x), q(x))\ \text{ hay } \phi(x) = \varphi(x)$$

ii) $\diamond$ CM ϕ đơn ánh.

$$\forall x, y \in E \text{ nếu } \phi(x) = (p(x), q(x)) = (p(y), q(y)) = \phi(y) \Longrightarrow x = y.$$

$\diamond$ CM ϕ toàn ánh, $\forall (m, n) = (u(x), v(x)) \in M \times N$ với $x \in E$, khi đó $m \in M$ và $n \in N$.

Do $E = M \oplus N$ nên $x = u(x) + v(x) = m + n \in E$ và $\phi(x) = (m, n)$. Vậy

$$\forall (m, n) \in M \times N,\ \exists x \in E \text{ s.t. } \phi(x) = (m, n)\ \text{ và } x = m + n$$

$\diamond$ CM ϕ liên tục, lấy $x_n \to x \in E$. Khi đó

$$\phi(x_n) \to \phi(x) \Leftrightarrow (p(x_n), q(x_n)) \to (p(x), q(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} p(x_n) \to p(x) \\ q(x_n) \to q(x) \end{cases}$$

$\diamond$ CM ϕ^{-1} l.tục, vì ϕ là song ánh nên với mỗi $(m,n) \in M \times N$; $\exists x \in E$ s.t

$$x = \phi^{-1}(m,n) \Leftrightarrow \phi(x) = (p(x), q(x)) = (m,n)$$

và do đó

$$\phi^{-1}(m,n) = x = m + n, \quad \forall (m,n) \in M \times N$$

Lấy $\{(a_n, b_n)\} \subset M \times N$; $(a_n, b_n) \to (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \to a \\ b_n \to b \end{cases}$ khi đó

$$\phi^{-1}(a_n, b_n) \to \phi^{-1}(a,b) \Leftrightarrow a_n + b_n \to a + b \in M \times N$$

Mà M, N là các KG vector con của E nên $a + b \in E$ do đó ϕ^{-1} liên tục.

$\square$

Bài 25. Cho g là ánh xạ liên tục từ $[a,b]\times\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Xét $E = C([a,b])$ - KG các hàm số liên tục trên $[a,b]$ với chuẩn $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Cho $u\in E$, với mỗi $x\in E$, xét ánh xạ $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x)(t) = u(t) + \int_a^b g(t, x(s))\,ds,\ \forall t\in[a,b]$$

CMR f là ánh xạ liên tục từ E vào E.

Chứng minh.

1. CM $f(x)\in E$ hay $f(x)(t)$ liên tục đều trên $[a,b]$ (liên tục theo biến t).

Vì $[a,b]$ compact nên $[a,b]\times[a,b]$ cũng compact.

Mà $u(t)$ và $g(t,x(s))$ liên tục, do đó $u([a,b])$ và $g([a,b]\times[a,b])$compact và liên tục đều.

Do đó $\forall t_1 t_2, s\in[a,b]$; ta có

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta_1>0 \text{ s.t. } \|(t_1,x(s))-(t_2,x(s))\|<\delta_1 \Longrightarrow |g(t_1,x(s))-g(t_2,x(s))|<\frac{\epsilon}{b-a+1}$$

hay

$$\sqrt{(t_1-t_2)^2+(x(s)-x(s))^2} = |t_1-t_2|<\delta_1 \Longrightarrow |g(t_1,x(s))-g(t_2,x(s))|<\frac{\epsilon}{b-a+1}$$

Mặt khác, u cũng liên tục đều nên với $\epsilon>0$ đã cho

$$\exists\delta_2>0 \text{ s.t } \forall s_1,s_2\in[a,b], |s_1-s_2|<\delta_2 \Longrightarrow |u(t_1)-u(t_2)|<\frac{\epsilon}{b-a+1}$$

Chọn $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, khi đó $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ thỏa $|t_1-t_2|<\delta$ thì

$$\begin{aligned}|f(x)(t_1)-f(x)(t_2)| &= \left|u(t_1)+\int_a^b g(t_1,x(s))\,ds - u(t_2)+\int_a^b g(t_2,y(s))\,ds\right|\\ &\le |u(t_1)-u(t_2)|+\int_a^b |g(t_1,x(s))-g(t_2,x(s))|\,ds<\epsilon\end{aligned}$$

2. CM $f(x)(t)$ liên tục theo $x(s)$.

Vì $x\in E$ nên do đó $x([a,b])$ liên tục đều, khi đó

Với $\epsilon>0$; $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ sao cho nếu

$$\begin{aligned}|x(s)-y(s)| &\le \sqrt{(t_1-t_2)^2+(x(s)-y(s))^2}\le\|(t_1,x(s))-(t_2,y(s))\|<\delta_1\\ \sup_{s\in[a,b]}|x(s)-y(s)| &< \delta_1\end{aligned}$$

thì

$$\begin{aligned}|f(x)(t)-f(y)(t)| &\le \int_a^b |g(t,x(s))-g(t,y(s))|\,ds \le \int_a^b\left(\frac{\epsilon}{b-a+1}\right)ds<\epsilon\\ \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| &= \sup_{t\in[a,b]}|f(x)(t)-f(y)(t)|<\epsilon\end{aligned}$$

Bài 26. Cho $M,\ N$ là các KG vector con của KGĐC $(E, \|.\|_E)$. Đặt

$$F = M + N \equiv \{x + y \mid x \in M,\ y \in N\},$$

giả sử $M \cap N = \{0\}$. CMR

i) Tồn tại duy nhất các ánh xạ $f : F \to M$ và $g : F \to N$ s.t. $z = f(z) + g(z)$, $\forall z \in F$.

ii) Nếu M hữu hạn chiều và N đóng trong E thì f, g liên tục trên F.

iii) Nếu M hữu hạn chiều và N đóng trong E thì F đóng trong E.

Chứng minh.

i) Theo ĐN *tổng trực tiếp* ở bài 25, ta thấy $F = M \oplus N$.

⋄ Vấn đề tồn tại.

Ở bài 25, ta đã ch.minh vấn đề tồn tại duy nhất ánh xạ $\phi : F \to M \times N$ với $\phi(z) = (f(z), g(z))$ sao cho $f(z) + g(z) = z$, $\forall z \in F$.

Tương tự với mỗi $z \in F$ thì tồn tại duy nhất $x \in M, y \in N$ sao cho $z = x + y$.

Do đó tồn tại các ánh xạ

$$\begin{aligned} f : F &\to M \text{ và } g : F \to N \\ f(z) &= x \qquad\quad g(z) = y \end{aligned}$$

s.t. $z = f(z) + g(z) = x + y$, $\quad \forall z \in F$.

⋄ Vấn đề duy nhất

Giả sử có $u : F \to M$ và $v : F \to N$ sao cho $z = u(z) + v(z)$ thì $u = f$ và $v = g$.

Ta có với mỗi $z \in F$, sự tồn tại của $x \in M, y \in N$ thỏa $z = x + y$ là duy nhất nên

$$f(z) = x = u(z) \qquad \text{và} \qquad g(z) = y = v(z)$$

do đó

$$f(z) = u(z) \text{ và } g(z) = v(z), \quad \forall z \in F$$

ii) Vì M là KGC h.hạn chiều trong E nên đóng trong E. (*Đ.lý* 2.3 *chap* 2.)

Ta giả sử f không liên tục trên F hay tồn tại $z \in F$ sao cho

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \text{ nếu có } t_\delta \in F \text{ s.t } \|t_\delta - z\| < \delta \Longrightarrow \|f(t_\delta) - f(z)\| < \epsilon$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chọn $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, sẽ có tương ứng $t_n \in F$ s.t

$$\|t_n - z\| < \delta \text{ và } \|f(t_n) - f(z)\| < \epsilon$$

Do $\mathbb{N}$ vô hạn, ta được dãy $(t_n) \subset F$ s.t

$$\|t_n - z\| < \delta \text{ và } \|f(t_n) - f(z)\| < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy $t_n \to z \in F$. Đặt

$$\alpha_n = \|f(t_n) - f(z)\| > \epsilon \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{\epsilon}$$

Do đó dãy $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ bị chặn nên theo Đ.l Bolzano Weirstrass, sẽ có $\left(\frac{1}{\alpha_{n_k}}\right) \subset \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ hội tụ về α.
Khi đó $|\alpha| \le \frac{1}{\epsilon}$, mặt khác thì

$$\left\|\frac{1}{\alpha_{n_k}}(f(t_{n_k}) - f(z))\right\| = 1$$

nên dãy $\left\{\frac{1}{\alpha_{n_k}}(f(t_{n_k}) - f(z))\right\} \subset M$ bị chặn trong M, mà M là KGC đóng nên tồn tại dãy con $\left\{\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(f\left(t_{n_{k_l}}\right) - f(z)\right)\right\}$ hội tụ về $x \in M$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $z,\ t_n \in F$ thì

$$t_n = f(t_n) + g(t_n) \text{ và } z = f(z) + g(z) \Rightarrow t_n - z = [f(t_n) - f(z)] + [g(t_n) - g(z)]$$

do vậy

$$\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(t_{n_{k_l}} - z\right) = \frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(f\left(t_{n_{k_l}}\right) - f(z)\right) + \frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(g\left(t_{n_{k_l}}\right) - g(z)\right), \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

Mà $\left\{\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(f\left(t_{n_{k_l}}\right) - f(z)\right)\right\} \to x$ nên $\left\{\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(g\left(t_{n_{k_l}}\right) - g(z)\right)\right\} \to y \in E$ s.t. $0 = x + y$.
Ta có $\left\{\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(g\left(t_{n_{k_l}}\right) - g(z)\right)\right\} \subset N$, mà N đóng trong E nên $y \in N$.
Mặt khác do $x + y = 0$ nên $y = -x \in M \Rightarrow y \in M \cap N = \{0\} \Rightarrow y = 0$. Vậy $\|x\| = 0$.
Ngoài ra,

$$\left\|\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(f\left(t_{n_{k_l}}\right) - f(z)\right)\right\| = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\|\frac{1}{\alpha_{n_{k_l}}}\left(f\left(t_{n_{k_l}}\right) - f(z)\right)\right\| \to \|x\|$$

Vậy $\|x\| = 1 \neq 0$, vô lý. Do đó f liên tục.
Để ch.m g liên tục; xét $\forall (z_n) \subset F$ s.t. $z_n \to z$, ta có

$$g(z_n) = z_n - f(z_n) \to z - f(z) = g(z)$$

iii) Lấy $(z_n) \subset F$, s.t. $z_k \to z \in E$.
Áp dụng KQ ii) ta được f, g là các ánh xạ liên tục nên ta được

$$f(z_n) \to f(z) \in M \text{ và } g(z_n) \to g(z) \in N$$

Do đó

$$z_n = f(z_n) + g(z_n) \to z = f(z) + g(z) \in M \oplus N$$

Vậy $z \in M \oplus N = F$ nên F đóng.

Bài 27. Cho K là tập con compact trong $\mathbb{R}^n$. CMR có một tập con đếm được A trù mật trong $C(K,\mathbb{R})$.

Chứng minh

Đặt

$$A = \left\{ p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_i^k \ : \ a_k \in \mathbb{Q}, k = 1, ..., n; \ x = (x_1, .., x_n) \in K \right\}$$

Vì $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$, ta xét $f \in C(K,\mathbb{R})$, chứng minh

□

Bài 28. Cho $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ là 2 chuẩn trên KG vector E. Đặt $I(x) = x, \quad \forall x \in E$. CMR I là ánh xạ tuyến tính liên tuc từ $(E, \|.\|_1)$ vào $(E, \|.\|_2)$ nếu và chỉ nếu $\exists \alpha > 0$ s.t.

$$\|x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1, \quad \forall x \in E \qquad (*)$$

Chứng minh.

Dễ thấy I là ánh xạ tuyến tính. Ta chỉ ch.m.

$\diamond$Nếu I là ánh xạ t.t. liên tục thì có $M > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \|I(x)\|_2 &\leq \alpha \|x\|_1, \quad \forall x \in E \\ \Rightarrow \|x\|_2 &\leq \alpha \|x\|_1, \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$\diamond$ Nếu tồn tại $\alpha > 0$ thỏa $(*)$, khi đó

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta = \frac{\epsilon}{2\alpha} \text{ s.t. } \forall x \in E, \ \|x\|_1 < \delta \text{ thì } \|Ix\|_2 \leq \alpha \|x\|_1 < \epsilon$$

Vậy I liên tục tại 0, I tuyến tính nên liên tục trên E.

□

Bài 29. Cho K là ánh xạ liên tục từ $[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$. Đặt $E = C([a,b])$ là KG các hàm số liên tục trên $[a,b]$ với chuẩn $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Với mỗi $x\in E$, đặt

$$T(x)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds, \quad \forall t\in[a,b]$$

CMR T là toán tử tuyến tính liên tục $E\to E$.

Chứng minh.

1. Ta kiểm tra $Tx\in E, \quad \forall x\in E$.

Với mỗi $x\in E$; x l.t. trên $[a,b]$ nên x bị chặn hay $\exists M>0$ s.t.

$$|x(s)|\le M, \quad \forall s\in[a,b] \Rightarrow \|x\|\le M$$

Do K liên tục trên tập compact $[a,b]\times[a,b]$ nên liên tục đều; i.e.

$$\forall\epsilon>0, \delta>0 \text{ s.t. } |t-t_0|<\delta \Longrightarrow |K(t,s)-K(t_0,s)| < \frac{\epsilon}{M(b-a)}$$

Vậy với mọi $t,t_0\in[a,b]$ thỏa

$$\|(t,s)-(t_0,s)\| = |t-t_0| < \delta$$

thì

$$\begin{aligned} |T(x)(t)-T(x)(t_0)| &\le \int_a^b |K(t,s)-K(t_0,s)|\,|x(s)|\,ds \\ &\le \int_a^b |K(t,s)-K(t_0,s)|\,\|x\|\,ds < \epsilon \end{aligned}$$

2. Dễ thấy T tuyến tính $E\to E$, vì

$$T(\alpha x+y)(t) = \alpha T(x)(t) + T(y)(t), \quad \forall x,y\in E, \alpha\in\mathbb{R}$$

3. T liên tục.

K liên tục đều trên tập compact nên K bị chặn và $\exists C>0$ sao cho

$$|K(t,s)| \le \frac{C}{b-a}, \quad \forall s,t\in[a,b]$$

Khi đó với mọi $x\in E$, thì

$$|T(x)(t)| \le \int_a^b |K(s,t)|\,|x(s)|\,ds \le \|x\|\,.\int_a^b |K(s,t)|\,ds \le C\,\|x\|$$

Do đó

$$\|Tx\| = \sup_{t\in[a,b]} |T(x)(t)| \le C\,\|x\|$$

Bài 30. Cho K là ánh xạ liên tục từ $[0,c]\times[0,c]$ vào $\mathbb{R}$. Đặt $E = C([0,c])$ và $\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,c]} |x(t)|$.

Với mỗi $x \in E$, đặt

$$T(x)(t) = \int_0^t K(t,s)\,x(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,c]$$

CMR $T \in \mathcal{L}(E,E)$.

Chứng minh.

$\diamond$. Với mỗi $x \in E$, ch.m $Tx \in E$.

Với mỗi $x \in E$, đặt $f(t) = T(x)(t)$. Khi đó $\forall t \in [0,c]$ ta có

$$f(t) = \int_0^t K(t,s)\,x(s)\,ds = \int_0^c K(t,s).\chi_{(0,t)}(s).x(s)\,ds.$$

Xét dãy (t_n) trong $[0,c]$ hội tụ về t, ta ch.m $f(t_n) \to f(t)$.

Đặt $g_n(s) = K(t_n,s).\chi_{(0,t_n)}(s).x(s)$ và $g(s) = K(t,s).\chi_{(0,t)}(s).x(s)$.

Dễ thấy $x,\ K$ là các hàm liên tục trên tập compact nên

$$\exists A > 0,\ \text{s.t. } |K(y,z)| \le \sqrt{A} \text{ và } |x(y)| \le \sqrt{A}, \quad \forall y,z \in [0,c]$$

Vậy

$$|g_n(s)| = \left|K(t_n,s).\chi_{(0,t_n)}(s).x(s)\right| \le |K(t_n,s).x(s)| \le A \quad \forall s \in [0,c] \qquad (1)$$

Ngoài ra, K liên tục nên với $t_n \to t$ thì $K(t_n,s) \to K(t,s), \quad \forall s \in [0,c] \qquad (a)$.

Mặt khác; với mỗi $s \in (0,t)$ và $t \in (0,c)$. thì (s,c) là lân cận của t, i.e.

$$\forall s \in (0,t),\ t_n \to t \text{ nên } \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t } t_n \in (s,c), \quad \forall n \ge m$$

Suy ra $\forall n \ge m$; $\chi_{(0,t_n)}(s) = 1 \to \chi_{(0,t)}(s)$

Chứng minh tương tự cho trường hợp $s \in (t,c)$ thì $(0,s)$ là lân cận của t.

Vậy $\chi_{(0,t_n)}(s) \to \chi_{(0,t)}(s)$ h.k.n với mọi $s \in (0,c)$. $\qquad (b)$

Từ $(a),(b)$ ta được $g_n(s) \to g(s), \quad \forall s \in (0,t)\cup(t,c) \qquad (2)$

Cuối cùng $g_n(s)$ là dãy hàm khả tích $\qquad (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ theo Đ.l. hội tụ bị chặn, ta được

$$f(t_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^c g_n(s)\,ds = \int_0^c \lim_{n\to\infty} g_n(s)\,ds = \int_0^c g(s)\,ds = f(t)$$

$\diamond$. T tuyến tính. Dễ dàng ch.m

$\diamond$. T liên tục, lập luận tương tự bài 29, ta có :

K liên tục đều, bị chặn nên có $M > 0$ sao cho $|K(t,s)| \le Mc^{-1}, \quad \forall s,t \in [0,c]$

Mặt khác $\forall x \in E$; ta có $|T(x)(t)| \le \int_a^t |K(s,t)|\,|x(s)|\,ds \le \|x\|.\int_0^t |K(s,t)|\,ds$ nên

$$\|T(x)\| \le \|x\|.\int_0^t |K(s,t)|\,ds \le Mc^{-1}\|x\| \sup_{t\in[0,c]} |t| \le M.\|x\|$$

Bài 31. BĐT Holder, phần này không có trong thi giữa kỳ và cuối kỳ môn này.

Bài 32. Cho T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ KGĐC $(E, \|.\|_E)$ vào KGĐC $(F, \|.\|_F)$. Cho $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ lần lượt là 2 chuẩn tương đương với $\|.\|_E$ và $\|.\|_F$. CMR T cũng là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $(E, \|.\|_1)$ vào $(F, \|.\|_2)$.

Chứng minh.

T là a.x.t.t. từ $(E, \|.\|_E)$ vào $(F, \|.\|_F)$ nên cũng là a.x.t.t từ $(E, \|.\|_1)$ vào $(F, \|.\|_2)$.

T liên tục $(E, \|.\|_E)$ vào $(F, \|.\|_F)$ nên có $M > 0$ s.t

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E, \quad \forall x \in E. \qquad (1)$$

$\|.\|_1 \sim \|.\|_E$ nên $\exists \alpha_1, \beta_1 > 0$ sao cho $\alpha_1 \|x\|_E \leq \|x\|_1 \leq \beta_1 \|x\|_E, \quad \forall x \in E. \qquad (2)$

$\|.\|_2 \sim \|.\|_F$ nên $\exists \alpha_2, \beta_2 > 0$ sao cho $\alpha_2 \|x\|_F \leq \|x\|_2 \leq \beta_2 \|y\|_F, \quad \forall y \in E. \qquad (3)$

Do đó

$$\|Tx\|_2 \leq \beta_2 \|Tx\|_F \leq \beta_2 M \|x\|_E \leq \beta_2 M \alpha_1^{-1} \|x\|_1, \quad \forall x \in E$$

Vậy T là a.x.t.t liên tục từ $(E, \|.\|_1)$ vào $(F, \|.\|_2)$.

□

Bài 33. Cho T là song ánh, T tuyến tính từ KGĐC $(E, \|.\|_E)$ vào KGĐC $(F, \|.\|_F)$. Đặt $S = T^{-1}$. CMR

i) S cũng là ánh xạ tuyến tính từ $F \to E$

ii) Nếu S, T liên tục thì $\|S\| \geq \|T\|^{-1}$.

Chứng minh.

i) $\forall y_1, y_2 \in F$, vì T là song ánh nên $\exists!\ x_1, x_2 \in E$ sao cho

$$y_1 = Tx_1 \text{ và } y_2 = Tx_2 \Leftrightarrow x_1 = Sy_1 \text{ và } x_2 = Sy_2$$

Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$S(\alpha y_1 + y_2) = T^{-1}(T(\alpha x_1 + x_2)) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha S y_1 + S y_2$$

Do đó S cũng là ánh xạ tuyến tính từ F vào E.

ii) $\forall x \in E$, ta có T liên tục nên

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|_F \|x\|_E \Rightarrow \|y\|_F \leq \|T\|_F \|Sy\|_E, \text{ với } y = Tx \in F$$

Mặt khác S liên tục do đó

$$\|y\|_F \leq \|T\|_F \|Sy\|_E \leq \|T\| (\|S\| \|y\|_F)$$

Vậy $\|S\| . \|T\| \geq 1$ nên ta được đpcm.

Bài 34. Cho T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ KGĐC $(E, \|.\|_E)$ vào KGĐC $(F, \|.\|_F)$. Giả sử có $a \in E, b \in F$ và $r, s > 0$ sao cho

$$T\left(B'(a,r)\right) \subset B'(b,s).$$

CMR T liên tục trên E và $\|T\| \leq 2r^{-1}.s$.

Chứng minh.

⋄ Từ giả thiết có $a \in E, b \in F$ và $r, s > 0$ sao cho

$$T\left(B'(a,r)\right) \subset B'(b,s)$$

ta có thể ch.minh $T(B'(0,1)) \subset B'\left(0, 2r^{-1}s\right)$.

Thật vậy, lấy $z \in B'(0,1)$ bất kỳ, khi đó $\|z\| \leq 1$

$$\Rightarrow rz + a \in B'(a,r) \text{ và } T(rz+a) \in T\left(B'(a,r)\right) \subset B'(b,s)$$

Do đó

$$\|rTz + Ta - b\| \leq s \Rightarrow \left\|Tz + r^{-1}Ta - r^{-1}b\right\| \leq r^{-1}.s$$

Ta có

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leq \left\|Tz + r^{-1}Ta - r^{-1}b\right\| + \left\|r^{-1}Ta - r^{-1}b\right\| \\ &\leq r^{-1}s + r^{-1}\|Ta - b\| \leq 2r^{-1}s \text{ do } Ta \in B'(b,s)\end{aligned}$$

Vậy $\|Tz\| \in B'\left(0, 2r^{-1}s\right), \quad \forall Tz \in T(B'(0,1))$ nên

$$T\left(B'(0,1)\right) \subset B'\left(0, 2r^{-1}s\right).$$

Do đó tồn tại lân cận $B'(0,1)$ của 0 trong E sao cho $T(B'(0,1))$ bị chặn trong F. Từ đó suy ra T là ánh xạ liên tục trên E hay $T \in \mathcal{L}(E,F)$

⋄ Mặt khác, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ nên ta có

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F$$

Mà $T(B'(0,1)) \subset B'\left(0, 2r^{-1}s\right)$ nên

$$\|Tx\| \leq 2r^{-1}s, \quad \forall \|x\| \leq 1$$

Do đó

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \leq 2r^{-1}s$$

□

Bài 35. Cho E, F và G là 3 KGĐC, (T_n) và (S_n) là các dãy hội tụ về T và S trong $\mathcal{L}(E,F)$ và $\mathcal{L}(F,G)$. Đặt

$$\Psi(U) = S \circ U \text{ và } \Lambda(V) = V \circ T, \quad \forall U \in \mathcal{L}(E,F);\ \forall V \in \mathcal{L}(F,G)$$

CMR

i) Các a.x Ψ, Λ lần lượt thuộc về các KG $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(F,G))$ và $\mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(E,G))$ với chuẩn $\|\Psi\| \le \|S\|$ và $\|\Lambda\| \le \|T\|$.

ii) Các dãy $(S \circ T_n)$ và $(S_n \circ T)$ hội tụ về $S \circ T$ trong $\mathcal{L}(E,G)$.

Chứng minh

i) $\forall x \in E,\ \forall U \in \mathcal{L}(E,F)$, ta có

$$\Psi(U(s)) = (S \circ U)(x) = S(U(x)) \in G$$

Vậy $\Psi(U(x)) \in \mathcal{L}(E,G)$.

$\forall M,\ N \in \mathcal{L}(E,F);\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\alpha M(x) + N(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ nên

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha M(x) + N(x)) &= S \circ (\alpha M + N)(x) \\
&= S(\alpha M(x) + N(x)) = \alpha S(M(x)) + S(N(x)) \\
&= \alpha \Psi(M(x)) + \Psi(N(x))
\end{aligned}$$

nên Ψ là ánh xạ tuyến tính.

Mặt khác, $\|\Psi\| = \sup\limits_{U \neq 0} \dfrac{\|\Psi(U)\|}{\|U\|}$ nên $\forall U \neq 0$, ta có

$$\|\Psi(U)\| = \|S \circ U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|S(U(x))\|}{\|x\|}$$

Với $S \in \mathcal{L}(F,G);\ \forall x \neq 0$, ta có $\|S(U(x))\| \le \|S\| . \|U(x)\| \le \|S\| . \|U\| . \|x\|$. Vậy

$$\frac{\|S(U(x))\|}{\|x\|} \le \|S\| . \|U\|, \quad \forall x \neq 0 \Longrightarrow \|\Psi(U)\| \le \|S\| . \|U\|$$

Vậy Ψ liên tục trên $\mathcal{L}(E,F)$.

Do đó $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(E,G))$ và $\|\Psi\| \le \|S\|$.

Tương tự ta cũng ch.m được $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(E,G))$ và $\|\Lambda\| \le \|T\|$.

ii) Ta có

$$\|S \circ T_n - S \circ T\| = \|\Psi(T_n) - \Psi(T)\| \le \|\Psi\| . \|T_n - T\| \le \|S\| \|T_n - T\| \to 0$$

Vậy

$$S \circ T_n \to S \circ T.$$

Ch.m tương tự cho trường hợp $S_n \circ T \to S \circ T$

Bài 36. Cho E là KGĐC và T là a.x.t.t. $E \to E$. Ta nói $s \in \mathbb{R}$ là *trị riêng* của T nếu và chỉ nếu $\exists x \in E\backslash\{0\}$ sao cho $Tx = sx$. Khi đó x được gọi là *vector riêng* tương ứng của s. Cho $s_1, s_2, ..., s_n$ là n trị riêng khác nhau của T; và $x_1, .., x_n$ là các vector riêng tương ứng. CMR $x_1, x_2, ..., x_n$ ĐLTT.

Chứng minh. Bằng quy nạp.

Khi $n = 1$, hiển nhiên đúng.

Gỉa sử $n = k$, các vector $x_1, x_2, .., x_k$ ĐLTT tức

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i = 0 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T x_i \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k-1} = 0 \qquad (1)$$

Ta ch.m $n = k+1$, các $x_1, ..., x_k, x_{k+1}$ vẫn ĐLTT. Thật vậy.

Giả sử $\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = 0$ thì do T tuyến tính nên

$$T\left(\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i T x_i = 0 = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i s_i x_i = 0 \text{ với } \{s_1, ..., s_{k+1}\} \text{ là các trị riêng}$$

Do đó

$$0 = s_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i s_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (s_{k+1} - s_i) \beta_i x_i \qquad (2)$$

Từ (1) nên ta được

$$\beta_1 (s_{k+1} - s_1) = \beta_2 (s_{k+1} - s_2) = ... = \beta_k (s_{k+1} - s_k) = 0$$

Vì $\{s_1, s_2, ..., s_{k+1}\}$ là các trị riêng khác nhau nên

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$$

Thay vào $\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = 0$ ta được $\beta_{k+1} = 0$.

Do đó các vector $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ĐLTT.

□

Bài 37. Đề thi cao học năm 2014- 2015

Cho$K$ là ánh xạ liên tục từ $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Đặt $E = C([0,1])$ là KG các hàm số liên tục trên $[0,1]$ với chuẩn $\|x\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Với mỗi $x \in E$, đặt

$$T(x)(t) = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

CMR T là toán tử compact

Chứng minh.

Ta đã có $T(x)(t)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục trên E (bài 30)

Ta cần chứng minh thêm $\overline{T(B(0,1))}$ là tập compact với $B(0,1) \subset E$.

Đặt

$$f(t) = T(x)(t) \text{ và } A = \{T(x)(t) \ : \ x \in E \text{ sao cho } \|x\| \leq 1\}$$

ta cần chứng minh A bị chặn trong E.

Áp dụng Định lý Ascoli, với $K = [0,1]$ compact. Ta chỉ cần chứng minh 2 điều sau :

i) $f(t)$ bị chặn từng điểm

ii) $f(t)$ liên tục đồng bậc

$$\forall t \in K$$

Tính chất 2.1.1. Cho $\Lambda \in \mathcal{L}(E,F)$, đặt

$$\|\Lambda\| = \inf\{M > 0 \ : \ \|\Lambda x\| \leq M\|x\|\}$$

khi đó

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|\Lambda x\| = \sup_{\|x\|<1}\|\Lambda x\| = \sup_{\|x\|=1}\|\Lambda x\| = \sup_{\|x\|\neq 0}\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|}$$

và $\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\|.\|x\|$ và $\|\Lambda\|$ là chuẩn trên $\mathcal{L}(E,F)$

Bài 38. CM Tính chất trên.

2.2 Một số công thức quan trọng phải nhớ trong KGĐC.

Định lý 2.2.1. Cho X là KGĐC, khi đó

i) Nếu $A \subset X$ thì $\overline{A} = \bigcap\limits_{r>0} (A + B(0, r))$

ii) Nếu $A, B \subset X$ thì $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$

iii) Nếu Y là KGC (lồi/ cân bằng) của X thì $\overline{Y}$ cũng là KGC (tương ứng lồi/ cân bằng)

iv) Nếu $C \subset X$, C lồi thì $\overset{\circ}{C}$ cũng lồi.

v) Nếu $0 \in \overset{\circ}{C} \subset C \subset X$, C cân bằng thì $\overset{\circ}{C}$ cũng cân bằng.

Định lý 2.2.2. Cho $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ là phiến hàm tuyến tính trên X, giả sử $\Lambda \not\equiv 0$, nghĩa là tồn tại $x \in X$ sao cho $\Lambda x \neq 0$. Khi đó các phát biểu sau tương đương

(i) Λ liên tục

(ii) $\mathcal{N}(\Lambda) = \{x \in X : \Lambda x = 0\}$ là KGC đóng

(iii) $\mathcal{N}(\Lambda)$ không dầy đặc trong X, nghĩa là $\overline{\mathcal{N}(\Lambda)} \neq X$

(iv) Λ bị chặn trong một lân cận V của 0.

Định nghĩa 2.2.1. Một KGĐC đgl *compact địa phương* nếu quả cầu đơn vị đóng

$$B'(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

là tập compact

Bổ đề 2.2.1. Cho Y là KGĐC con của một KGĐC X, nếu Y compact địa phương thì Y là KGC đóng của X.

Định lý 2.2.3. Cho KGĐC X và $Y \subset X$ với $\dim Y = n$, khi đó

i) Mọi song ánh tuyến tính T từ $\mathbb{R}^n$ lên Y đều là các đẳng cấu (tức T và T^{-1} liên tục)

ii) Y là KGC đóng trong X

Hệ quả 2.2.1. Mọi KG vector hữu hạn chiều đều là KGC đóng.

Hệ quả 2.2.2. Mọi KGĐC compact địa phương đều có số chiều hữu hạn

Hệ quả 2.2.3. Mọi chuẩn trên KG vector X hữu hạn chiều ($\dim X = n$) đều tương đương với nhau và

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in X$$

trong đó

$$\|.\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \ \|.\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ và } \|.\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

2.3 Một số kiến thức quan trọng phải nhớ trong KG $\mathcal{C}(K)$

Cho KGĐC $(E, \|.\|_E)$ và $S \neq \emptyset$

$$\mathcal{F}(S,E) = \left\{ f : S \to E \,\middle|\, \text{thỏa } (f+\alpha g)(t) = f(t) + \alpha g(t) \right\}$$

và

$$\mathcal{B}(S,E) = \left\{ x(t) \,\middle|\, x : S \to E \text{ và } x \text{ bị chặn} \right\}$$

Khi đó $\mathcal{B}(S,E)$ là KGC của $\mathcal{F}(S,E)$, với mỗi $x \in \mathcal{B}(S,E)$, đặt

$$\|x\|_{\mathcal{B}(S,E)} = \sup_{t\in S} \|x(t)\|_E$$

Định lý 2.3.1. $\left(\mathcal{B}(S,E), \|.\|_{\mathcal{B}(S,E)}\right)$ là KG Banach khi E là KG Banach

Định lý 2.3.2. Cho $\mathcal{C}(K,E)$ là KG các hàm liên tục từ K vào E, khi đó $\mathcal{C}(K,E)$ là KGC đóng của $\mathcal{B}(S,E)$. Hơn nữa nếu E Banach thì $\mathcal{C}(S,E)$ cũng là KG Banach.

Định lý 2.3.3. Cho K là KG metric compact và $A \subset \mathcal{C}(K)$. Ta có $\overline{A}$ là tập compact trong $\mathcal{C}(K)$ nếu và chỉ nếu A thỏa 2 tính chất sau:

i) A bị chặn từng điểm, nghĩa là ứng với mỗi $t \in K$ thì

$$A(t) = \left\{ x(t) \text{ trong đó } x \in A \right\}$$

là tập bị chặn

ii) A liên tục đồng bậc, tức là với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|x(s) - x(t)| < \epsilon, \quad \forall x \in A,\ \forall s,t \in K \text{ thỏa } d(s,t) < \delta$$

Định lý 2.3.4. ***Định lý Stone - Weiertrass.***

Cho K là KG metric compact và $A \subset \mathcal{C}(K)$ là một đại số (đóng/ bền với phép nhân và phép cộng). Nếu A tách các điểm của K và chứa các hàm hằng thì A dầy đặc trong $\mathcal{C}(K)$.

Hệ quả 2.3.1. Mọi hàm số liên tục trên tập compact $K \subset \mathbb{R}^n$ đều có thể xấp xỉ đều bằng các đa thức theo n biến.

2.4 Một số kiến thức quan trọng phải nhớ trong KG $\mathcal{L}(E, F)$

Cho $(E, \|.\|_E)$ và $(F, \|.\|_F)$ là 2 KGĐC, ta đặt

$$\mathcal{L}(E, F) = \left\{\Lambda \in \mathcal{C}(E, F) \text{ sao cho } \Lambda \text{ tuyến tính}\right\}$$

Khi đó $\mathcal{L}(E, F)$ là KGC của $\mathcal{C}(E, F)$, với mỗi $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$ đặt

$$\|\Lambda\| = \inf\{M > 0 \ : \ \|\Lambda x\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in E\}$$

thì $\mathcal{L}(E, F)$ là KG Banach khi E Banach.

Cho E_1, E_2 và F là 3 KGĐC và $B(x_1, x_2)$ là song tuyến tính từ $E_1 \times E_2 \to F$.

Đặt

$\mathfrak{B}(E_1 \times E_2, F) = \left\{B : E_1 \times E_2 \to F \text{ sao cho } \exists M > 0 \text{ thỏa } \|B(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}\right\}$ và

$$\|B\| = \inf\left\{M > 0 \ : \ \|B(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}\right\}$$

Khi đó $\mathfrak{B}(E_1 \times E_2, F), \|.\|$ là KGĐC, hơn nữa

$$\|B(x_1, x_2)\| \leq \|B\|.\|x_1\|\|x_2\|, \quad \forall x_1 \in E_1, \forall x_2 \in E_2$$

Chương 3

CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN TRONG KGĐC.

3.1 Các kiến thức cần phải biết ở chương III

Định lý 3.1.1. ***Định lý Hahn - Banach.***
Cho M là KGĐC con của KGĐC X, mọi phiến hàm tuyến tính liên tục $f : M \to \mathbb{R}$ đều có thể nới rộng thành một phiến hàm F tuyến tính liên tục trên X sao cho

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{M^*} \text{ và } F\,|_M = f$$

trong đó $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

Hệ quả 3.1.1. Cho X là KGĐC và $0 \neq x_0 \in X$, tồn tại $F \in X^*$ với $\|F\| = 1$ sao cho $F(x_0) = \|x_0\|$

Hệ quả 3.1.2. Với mọi $x \in X$, ta có

$$\|x\| = \sup_{\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1} |\Lambda x|$$

Định lý 3.1.2. Cho M là KG vector con của KGĐC X và $x_0 \in X$. Ta có $x_0 \in \overline{M}$ nếu và chỉ nếu không tồn tại $f \in X^*$ sao cho

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in M \text{ nhưng } f(x_0) \neq 0$$

nói cách khác

$$x_0 \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall f \in X^* \text{nếu } f\,|_M = 0 \text{ thì } f(x_0) = 0$$

Định lý 3.1.3. Cho $C \neq \emptyset$ là một tập con mở, lồi trong KGĐC X và $x_0 \in X \backslash C$. Khi đó tồn tại $F \in X^*$ sao cho

$$F(x) < F(x_0), \quad \forall x \in C$$

Hệ quả 3.1.3. Cho $A, B \neq \emptyset$ là hai tập lồi rời nhau trong KGĐC X. Giả sử A mở, khi đó tồn tại $F \in X^*$ sao cho

$$F(x) < F(y), \quad \forall x \in A, y \in B$$

Định lý 3.1.4. Cho $A, B \neq \emptyset$ là hai tập lồi rời nhau trong KGĐC X. Giả sử A compact và B đóng, khi đó tồn tại $F \in X^*, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$F(x) \leq \alpha \leq \beta \leq F(y), \quad \forall x \in A,\ y \in B$$

Định lý Banach - Steinhaus

Định lý 3.1.5. Định lý Baire. Nếu (X, d) là KG metric đầy đủ thì phần giao của mọi dãy các tập mở không rỗng dầy đặc trong X cũng dầy đặc trong X

Định nghĩa 3.1.1. Trong KG topo (X, τ_X), ta định nghĩa

$$G_\delta = \left\{ \cap O_n \ :\ O_n \text{ mở trong } X \right\} \text{ và } F_\sigma = \left\{ \cup C_n \ :\ C_n \text{ đóng trong } X \right\}$$

với $(O_n); (C_n)$ là dãy các tập trong X.

Hệ quả 3.1.4. Trong KG metric đầy đủ, phần giao của một dãy các tập G_δ dầy đặc cũng là một tập G_δ dầy đặc.

Hệ quả 3.1.5. Cho (X, d) là KG metric đầy đủ và (F_n) là một dãy các tập đóng trong X sao cho

$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Khi đó tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\overset{\circ}{F}_m \neq \emptyset$

Định lý 3.1.6. Định lý Banach - Steinhaus. Cho X là KG Banach, Y là KGĐC và $(\Lambda_i)_{i \in I}$ là một họ các toán tử tuyến tính liên tục từ $X \to Y$.

Ta có một trong hai phát biểu sau được thỏa

1) Tồn tại $M > 0$ sao cho $\sup\limits_{i \in I} \|\Lambda_i\| \leq M$
2) Tập $\left\{ x \in X \text{ s.t } \{ \Lambda_i x |\, i \in I\} \text{ không bị chặn} \right\}$ là tập con G_δ dầy đặc của X

Hệ quả 3.1.6. Cho E là KG Banach, F là KGĐC và (Λ_n) là dãy các ánh xạ tuyến tính liên tục từ $E \to F$. Nếu với mỗi $x \in E$, dãy $\Lambda_n x$ hội tụ về Λx trong F thì

1) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|\Lambda_n x\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$
2) $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$
3) $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

Hệ quả 3.1.7. Cho E là KG Banach và B là tập con không rỗng của E, nếu

$$\Lambda(B) = \{\Lambda x : x \in B\}$$

là một tập bị chặn (trong $\mathbb{R}$) với mọi $\Lambda \in E^*$ thì B là tập bị chặn (trong E).

Hệ quả 3.1.8. Cho E là KG Banach và B^* là tập con không rỗng của E^*, nếu

$$B^*(x) = \{\Lambda x : x \in B^*\}$$

là một tập bị chặn (trong $\mathbb{R}$) với mọi $x \in E$ thì B^* là tập bị chặn (trong E^*).

Định lý ánh xạ mở

Định lý 3.1.7. ***Định lý ánh xạ mở.*** Cho U, V là các quả cầu mở đơn vị trong các KG Banach X và Y. Với mọi toàn ánh tuyến tính liên tục $\Lambda : X \to Y$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\delta V \subset \Lambda(U)$$

Nói cách khác, ứng với mỗi $y \in Y$ sao cho $\|y\| < \delta$ thì tồn tại $x \in X$ sao cho

$$\|x\| < 1 \text{ và } \Lambda x = y$$

Định lý 3.1.8. Nếu X, Y là các KG Banach và Λ là một song ánh tuyến tính liên tục $X \to Y$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|\Lambda x\| \geq \delta \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Nói cách khác, Λ^{-1} là toán tử tuyến tính liên tục từ $Y \to X$.

Hệ quả 3.1.9. Cho $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ là hai chuẩn trên KG vector E sao cho $(E, \|.\|_1)$ và $(E, \|.\|_2)$ là các KG Banach, nếu tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\|x\|_2 \leq C \|x\|_1, \quad \forall x \in E$$

thì tồn tại $k > 0$ sao cho

$$\|x\|_1 \leq k \|x\|_2, \quad \forall x \in E$$

Nói cách khác $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ trở thành hai chuẩn tương đương trên E.

Định lý 3.1.9. ***Định lý đồ thị đóng.***

Cho X, Y là hai KG Banach và Λ là một ánh xạ tuyến tính từ $X \to Y$. Nếu đồ thị của Λ, tức

$$\Gamma_\Lambda = \{(x, \Lambda x) \mid x \in X\}$$

là một tập đóng (trong $X \times Y$) thì Λ liên tục.

3.2 Bài tập

Câu 1. Cho $x_1, ..., x_n$ là n vector độc lập tuyến tính trong KGĐC E. CMR có $f_1, ..., f_n \in E^*$ sao cho

$$f_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

Giải.

Trước tiên ta sẽ chứng minh sự tồn tại cuả $f_1 \in E^*$. Các hàm còn lại hoàn toàn tương tự bởi cách đặt

$$M_i = \langle \{x_1, x_2, .., x_n\} \setminus \{x_i\} \rangle$$

Trở lại bài toán, tìm $f_1 : E \to \mathbb{R}$ sao cho $f_1(x_1) = 1$ và $f_1(x_k) = 0, \quad \forall k = 2, ..., n$

Xét $M_1 = \langle x_2, x_3, ..., x_n \rangle$ nên $\dim M_1 = n - 1$ hữu hạn nên là KGC đóng trong E hay $M = \overline{M}$

Mà các vector $x_2, ..., x_n$ là ĐLTT nên $x_1, x_2, ..., x_n$ cũng ĐLTT do đó $x_1 \notin M = \overline{M}$

Áp dụng Định lý 1.4 chương 3, tồn tại hàm $g_1 \in E^*, x_1 \notin M_1$ sao cho

$$g_1(x_1) = a_1 \neq 0 \text{ và } g_1(x) = 0, \quad \forall x \in M_1$$

Đặt $f_1(t) = \dfrac{g_1(t)}{a_1}$ ta được $f_1(x_1) = 1$ và

$$f_1(x_2) = ... = f_1(x_n) = 0, \quad \forall \{x_2, ..., x_n\} \in M_1$$

Tương tự với $i = 2, .., n$ ta sẽ được $f_2, ..., f_n$ cần tìm.

□

Câu 2. Cho E là KG Banach và $E = M \oplus N$ với M, N là hai KG vector con đóng. CMR E là tổng trực tiếp topo của M và N.

Giải.

Xem lại bài tập 24 - chapter 2, về ch.m sự tồn tại duy nhất của hàm $\Phi : E \to M \times N$ $(*)$

Nhắc lại rằng $E = M \oplus N$ ***tổng trực tiếp topo*** nếu

$$\Phi : E \to M \times N \text{ x.đ bởi } \Phi(x) = (p(x), q(x)) \qquad (*)$$

sao cho $x = p(x) + q(x)$ trong đó Φ là đồng phôi từ E lên $M \times N \Leftrightarrow p, q$ là các hàm liên tục trên E.

Trở lại bài toán, ta đã có Φ là song ánh, nên Φ^{-1} cũng song ánh (1). Mặt khác Φ^{-1} tuyến tính

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(\alpha_1(m_1, n_1) + \alpha_2(m_2, n_2)) &= \Phi^{-1}((\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2, \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)) \\
&= \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \\
&= \alpha_1 \Phi^{-1}(m_1, n_1) + \alpha_2 \Phi^{-1}(m_2, n_2) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Hơn nữa Φ^{-1} liên tục (3).

Vậy Φ^{-1} là song ánh tuyến tính, liên tục từ $M \times N \to E$ nên theo Định lý 3.2 - chapter 3 ta được Φ là song ánh tuyến tính liên tục do đó là một đồng phôi. □

Câu 3. Cho M là KG vector hữu hạn chiều của KGĐC E. CMR có một KG vector đóng N trong E sao cho E là tổng trực tiếp topo của M và N.

Giải.

Đặt $A = \{x_1, ..., x_n\}$ là cơ sở của M, áp dụng KQ bài 1, ta *tìm được* $f_1, ..., f_n \in E^*$ sao cho $f_i(x_j) = \delta_i^j$ với $i, j = 1, ..., n$. Đặt $p : E \to M$ xác định bởi

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x), \quad \forall x \in E$$

Dễ dàng kiểm chứng p là ánh xạ tuyến tính do $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$p(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{n} x_i [\alpha f_i(x) + \beta f_i(y)] = \alpha p(x) + \beta p(y)$$

và liên tục (vì $\lim\limits_{x_n \to x} p(x_n) = p(x)$) từ $E \to M$, hay $p \in \mathcal{L}(E, M)$

Mặt khác, với mọi $x \in E$, ta có

$$\begin{aligned}
p^2(x) = p(p(x)) &= p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} f_i(x_j) f_j(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \delta_i^j f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_i^i f_i(x) + \sum_{i \neq j} x_i \delta_i^j f_j(x) = p(x)
\end{aligned}$$

Từ đây, ta có $p^2(x) = p(x), \quad \forall x \in E$, nên

$$p[x - p(x)] = 0 \Rightarrow x - p(x) \in N = p^{-1}(\{0\}) \qquad (1)$$

Do p liên tục nên N đóng trong $E \qquad (2)$.

Ta cần chứng minh $E = M \oplus N$. Từ (1) ta được $E = M + N$, cần ch.m thêm $M \cap N = \{0\}$

Ta lấy $x \in M \cap N$, thì $\exists a_i \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} p(x) = 0 \\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \end{cases} \Rightarrow p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_j f_i(x_j) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_j f_j(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_j \delta_j^i = 0, \quad \forall j = 1, .., n \Leftrightarrow a_j = 0, \quad \forall j
\end{aligned}$$

Vậy $x = 0$ do đó $E = M \oplus N$ với M, N là KGC đóng trong E.

Theo kết quả chứng minh ở câu 2, thì E là tổng trực tiếp topo của M và N. $\square$

Câu 4. Cho M và N là hai KG vector con của KGĐC E. Giả sử M hữu hạn chiều và N đóng sao cho $E = M \oplus N$. CMR E là tổng trực tiếp topo của M và N.

Giải.

Dễ thấy do M là KGC hữu hạn chiều trong E nên đóng trong E.

Ta có $E = M \oplus N$ với M, N là 2 KG vector con đóng (trong E) nên theo KQ chứng minh ở câu 2, ta được E là tổng trực tiếp topo của M và N.

□

Câu 5. Cho A là tập con lồi đóng, cân bằng và hấp thụ trong KG Banach E.

CMR có số thực $s > 0$ sao cho $B(0, s) \subset A$.

Giải.

Ta sẽ nhắc lại các khái niệm sau : A là tập hấp thụ nên

$$E = \underset{t>0}{\cup}(tA) \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset \underset{t>0}{\cup}(tA) & (*) \\ tA \subset E \quad \forall t > 0 & (**) \end{cases}$$

A là tập cân bằng tức

$$\gamma A \subset A, \quad \forall |\gamma| <\leq 1$$

step 1.

do đó ta sẽ ch.m bài toán phụ thứ nhất

Nếu A đóng và cân bằng thì nA cũng đóng trong E

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $nA = \{na \,|a \in A\}$,

Lấy dãy $(y_m) \subset nA$ sao cho

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y$$

Cần ch.m $y \in nA$.

Với mỗi $m \in \mathbb{N}$, $y_m \in nA$; $\exists x_m \in A$ sao cho

$$y_m = nx_m \Leftrightarrow x_m = \frac{y_m}{n}$$

Ta có A đóng nên nếu tồn tại $x \in E$ sao cho $x_m \to x$ thì $x \in A$

Mà $y_m \to y$ nên

$$x_m = \frac{y_m}{n} \to \frac{y}{n}$$

Theo tính duy nhất của giới hạn thì $x = \dfrac{y}{n} \in A$. Do đó

$$y = nx \in nA \text{ với } x \in A$$

Vậy nA là tập đóng trong E với mọi $n \in \mathbb{N}$

Đặt $F_n = nA, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ta có (F_n) là dãy các tập đóng trong E. (1)

step 2.

Tiếp theo, ta sẽ xét bài toán phụ thứ 2

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \left(= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (nA) \right) \qquad (2)$$

Từ $(**)$, ta có

$$F_n = nA \subset E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset E \qquad (3)$$

Hơn nữa với mỗi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $t \in [n, n+1)$ thì

$$tA \subset nA = F_n, \quad \forall t \in [n, n+1)$$

Vậy

$$E = \bigcup_{t\in[n,n+1)} (tA) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) , ta được

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Mặt khác $(E, \|.\|_E)$ là KG Banach nên (E, d_E) là KG metric đầy đủ với

$$d_E(x, y) = \|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in E$$

step 3.

Từ (1) và (2) . Theo hệ quả 2.3 chapter 3, ta có (E, d_E) là KG metric đầy đủ và F_n là dãy các tập đóng trong E sao cho

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$

Ta có

$$\overset{\circ}{F}_{n_0} = \{u \in E \,|\, \exists r > 0 \text{ sao cho } B(u, r) \subset n_0 A = F_{n_0}\} \neq \emptyset$$

Do đó tồn tại $a \in \overset{\circ}{F}_{n_0}$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a, r) \subset n_0 A$

Mà A là tập cân bằng nên nA cũng là tập cân bằng vì

$$\gamma(nA) = n(\gamma A) \subset nA, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó $n_0 A$ cân bằng và với $B(a, r) \subset n_0 A$ thì với $\gamma = -1$, ta được $-B(a, r) \subset n_0 A$

Xét

$$-B(a, r) = \{-x \,|\, \|x - a\| < r\} = \{y \,|\, \|-(y + a)\| < r\} = B(-a, r)$$

nên $B(a,r)$ và $B(-a,r) \subset n_0 A$, mà A là tập lồi do đó

$$tB(a,r) + (1-t)B(-a,r) \subset n_0 A, \quad \forall t \in [0,1]$$

Chọn $t = \frac{1}{2}$, ta được

$$\frac{1}{2}B(a,r) + \frac{1}{2}B(-a,r) \subset n_0 A$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được

$$B(0,2r) \subset \frac{1}{2}B(a,r) + \frac{1}{2}B(-a,r) \subset n_0 A$$

step 4.

Do đó bằng phép vị tự tâm 0, tỷ số $\frac{1}{n_0}$, ta được

$$B\left(0, \frac{2r}{n_0}\right) \subset A$$

Vậy tồn tại $s = \frac{2r}{n_0} > 0$ thì ta được

$$B(0,s) \subset A$$

Câu 6. Cho E là KG Banach và f là ánh xạ liên tục từ $[a,b] \to E$,Với phân hoạch $\sigma_n = (a_0, a_1, ..., a_{2^n})$ của $[a,b]$ cho bởi

$$a_j = a + \frac{j}{2^n}(b-a), \quad j = 0,1,...,2^n$$

chọn nhãn (label) $c_n = (c_1^n, c_2^n, ..., c_{2^n}^n)$ nghĩa là $c_j^n \in (a_{j-1}, a_j), \quad \forall j = 0,1,...,2^n$. Đặt

$$S(f, \sigma_n, c_n) = \frac{b-a}{2^n}\sum_{j=1}^{n} f\left(c_j^n\right)$$

(i) CMR dãy $\{S(f,\sigma_n,c_n)\}_{\mathbb{N}}$ hội tụ về một vector trong E, ký hiệu là $\int\limits_a^b f(t)\,dt$, độc lập với cách chọn nhãn c_n cho các σ_n.

(ii) Cho F là KG Banach và $\Lambda \in \mathcal{L}(E,F)$, CMR

$$\int_a^b (\Lambda \circ f)(t)\,dt = \Lambda\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$

(iii) CMR

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E\,dt$$

Chứng minh,

(i) Ta có E Banach, ta sẽ ch.m dãy $\{S(f,\sigma_n,c_n)\}_{\mathbb{N}}$ Cauchy trong E.

Vì f liên tục đều trên $[a,b] \to E$ nên

Cho $\epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in [a, b]$ nếu

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại $N_k \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{b-a}{2^{N_k}} < \delta$ và

$$\begin{aligned} \left|c_i^n - c_j^{n+k}\right| &\leq \frac{b-a}{2^n} \leq \delta, \quad \forall i = 1, ..., 2^n;\ j = (i-1)\,2^k + 1, ..., i.2^k, \forall n \geq N_k \\ \Leftrightarrow \left|f\left(c_j^n\right) - f\left(c_j^{n+k}\right)\right| &\leq \frac{\epsilon}{b-a}, \quad \forall i = 1, ..., 2^n;\ j = (i-1)\,2^k + 1, ..., i.2^k, \forall n \geq N_k \quad (1) \end{aligned}$$

Vậy với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned} |S(f, \sigma_n, c_n) - S(f, \sigma_{n+k}, c_{n+k})| &= \frac{b-a}{2^{n+k}}\left|2^k \sum_{i=1}^{2^n} f\left(c_i^n\right) - \sum_{j=1}^{2^{n+k}} f\left(c_j^{n+k}\right)\right| \\ &= \frac{b-a}{2^{n+k}}\left|f\left(c_1^n\right) - f\left(c_1^{n+k}\right) + ... + f\left(c_1^n\right) - f\left(c_{2^k}^{n+k}\right) + \right. \\ &\left. ... \quad + f\left(c_1^n\right) - f\left(c_1^{n+k}\right) + ... + f\left(c_1^n\right) - f\left(c_{2^k}^{n+k}\right)\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2^{n+k}}\left(\left|f\left(c_1^n\right) - f\left(c_1^{n+k}\right)\right| + ... + \left|f\left(c_1^n\right) - f\left(c_{2^k}^{n+k}\right)\right| + ...\right. \\ &\left. ... \quad + \left|f\left(c_{2^n}^n\right) - f\left(c_{2^{n+k}-2^{k+1}}^{n+k}\right)\right| + ... + \left|f\left(c_{2^n}^n\right) - f\left(c_{2^{n+k}}^{n+k}\right)\right|\right) \\ &\leq \frac{b-a}{2^{n+k}}.\left[2^k.2^n\left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)\right] = \epsilon, \quad \forall n \geq N_k \quad (2) \end{aligned}$$

Do đó dãy $\{S(f, \sigma_n, c_n)\}$ Cauchy trong E Banach nên hội tụ.

Mặt khác, với hai nhãn c_n, d_n bất kỳ cho σ_n, ta có

$$|c_i^n - d_i^n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall c_i^n, d_i^n \in (a_{i-1}, a_i) \text{ trong đó } a_i = a + \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall i = 0, 1, ..., 2^n$$

và tương tự như (2), ta được

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |S(f, \sigma_n, c_n) - S(f, \sigma_n, d_n)| &\leq \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(c_i^n\right) - f\left(d_i^n\right)\right|\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{2^n}\left[n\frac{\epsilon}{b-a}\right]\right] \text{ theo (1)} \\ &= \epsilon.\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} \to 0 \end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} |S(f, \sigma_n, c_n) - S(f, \sigma_n, d_n)| = 0, \quad \forall c_n, d_n$

Vậy dãy $\{S(f, \sigma_n, c_n)\}$ và $\{S(f, \sigma_n, d_n)\}$ hội tụ về cùng một giới hạn trong E là

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

và giới hạn này độc lập với cách chọn các c_n.

(ii) Ta có $\Lambda \in \mathcal{L}(E,F)$ nên $S(\Lambda \circ f, \sigma_n, c_n) = \Lambda(S(f,\sigma_n,c_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S(\Lambda \circ f, \sigma_n, c_n) &= \lim \Lambda(S(f,\sigma_n,c_n)) &&= \Lambda\left(\lim_{n\to\infty} S(f,\sigma_n,c_n)\right) \\
\Leftrightarrow \int_a^b (\Lambda \circ f)(t)\,dt &= &&\Lambda\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

(iii) Với mọi $\Lambda \in E^*$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\Lambda\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\right| = \left|\int_a^b \Lambda[f(t)]\,dt\right| &\le \int_a^b |\Lambda(f(t))|\,dt \\
&\le \|\Lambda\| \int_a^b \|f(t)\|_E\,dt \qquad (3)
\end{aligned}$$

Áp dụng hệ quả 1.3 với $x = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, từ (3) ta được $\|x\| = \sup\limits_{\|\Lambda\|\le 1} \|\Lambda x\|$

$$\Leftrightarrow \left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \le \int_a^b \|f(t)\|_E\,dt$$

□

Bài 7. Cho E là KG Banach và $\Lambda \in \mathcal{L}(E,E)$, giả sử có số thực dương δ sao cho

$$\delta\|u\| \le \|\Lambda u\|, \quad \forall u \in E$$

CMR (i) $\Lambda(E)$ là KG vector con đóng của E

(ii) Λ là đồng phôi từ E vào $\Lambda(E)$

Chứng minh.

(i) Ta có $\Lambda \in \mathcal{L}(E,E)$ nên dễ dàng kiểm chứng $\Lambda(E)$ là KG vector con của E i.e.

$$\alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y) = \Lambda(\alpha x + \beta y) \in \Lambda(E) \text{ và } 0 = \Lambda(0) \in \Lambda(E) \qquad (*)$$

Mặt khác lấy dãy $(y_n) \subset \Lambda(E)$ sao cho $y_n \to y \in E$ (1)

$\Rightarrow (y_n)$ Cauchy trong $\Lambda(E) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|y_m - y_n\| \le \epsilon, \quad \forall m,n \ge n_0$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in E$ sao cho $y_n = \Lambda x_n$ do đó

$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|\Lambda(x_m - x_n)\| \le \epsilon, \quad \forall m,n \ge n_0$$

Theo giả thiết, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\delta\|u\| \le \|\Lambda u\|, \quad \forall u \in E$ nên

$$\|x_m - x_n\| \le \delta^{-1}\|\Lambda(x_m - x_n)\| \le \delta^{-1}\epsilon, \quad \forall m,n \ge n_0$$

Do đó (x_n) là dãy Cauchy trong E.

Mà E Banach nên $x_n \to x \in E$ suy ra $\Lambda x_n \to \Lambda x \in \Lambda(E)$. (2)

Từ (1) và (2), nên theo tính duy nhất của giới hạn ta được

$$y = \Lambda x \in \Lambda(E)$$

Do đó $\Lambda(E)$đóng trong E $(**)$

Vậy từ $(*)$ và $(**)$ ta được $\Lambda(E)$ là KG vector con đóng trong E.

(ii) (3) Ta có Λ toàn ánh từ $E \to \Lambda(E)$ vì

$$\forall y \in \Lambda(E), \exists x \in E \text{ sao cho } y = \Lambda(x)$$

(4) Mặt khác, Λ đơn ánh vì với mọi $y_1, y_2 \in \Lambda(E)$, tồn tại $x_1, x_2 \in E$ sao cho

$$y_1 = \Lambda x_1 \text{ và } y_2 = \Lambda x_2$$

Giả sử $y_1 = y_2$, ta cần chứng minh $x_1 = x_2$. Thật vậy

$$0 \le \delta \|x_1 - x_2\| \le \|\Lambda(x_1 - x_2)\| = \|y_1 - y_2\| = 0$$

với $\delta > 0$ do đó $\|x_1 - x_2\| = 0$

(5) Mà $\Lambda \in \mathcal{L}(E, E)$ nên Λ là ánh xạ tuyến tính liên tục

Từ $(3), (4)$ và (5), ta được Λ là song ánh tuyến tính liên tục từ $E \to \Lambda(E)$

Mà $\Lambda(E)$ là KGC đóng trong E Banach nên $\Lambda(E)$ cũng Banach và do đó theo định lý 3.2, chương 3 ta được Λ^{-1} tuyến tính liên tục từ $\Lambda(E) \to E$

Do đó Λ là một đồng phôi $E \to \Lambda(E)$.

□

Câu 8. Cho $E,\ F$ là 2 KG Banach và Λ là toàn ánh tuyến tính liên tục từ $E \to F$.
Đặt $K = \Lambda^{-1}(\{0\})$. CMR có $c > 0$ sao cho

$$\inf_{y \in K} \|x - y\|_E \le c \|\Lambda x\|_F, \quad \forall x \in E$$

Chứng minh.

Ta có $E,\ F$ là 2 KG Banach và Λ là toàn ánh tuyến tính liên tục từ $E \to F$ nên theo định lý ánh xạ mở, tồn tại $c > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}
\text{nếu } \|y\|_F &< c \text{ thì có } x \in E \text{ thỏa } \|x\|_E < 1 \text{ và } \Lambda x = y \\
\Rightarrow B_F(0,1) &\subset \Lambda(B_E(0,c)) \subset \Lambda\left(B'_E(0,c)\right) \\
\Rightarrow B'_F(0,1) &\subset \Lambda\left(B'_E(0,c)\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

TH 1. Ta xét nếu $x \in K$ thì hiển nhiên $\Lambda x = 0$ do đó

$$\inf_{y \in K} \|x - y\|_E = 0 = c\|\Lambda x\|_F, \quad \forall x \in K \tag{1}$$

TH2. Nếu $x \in E \backslash K$, thì $\Lambda x \neq 0$, đặt $t = \dfrac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|_F}$ ta được

$$t \in B'_F(0,1) \Longrightarrow \exists z \in B'_E(0,c) \text{ sao cho } \Lambda z = t$$

Chọn $y = x - \|\Lambda x\|_F\, z \in K$ $\left(\text{dễ thấy } \Lambda y = 0\right)$ ta được $\|x - y\|_E = \|\Lambda x\|_F \|z\|_E \le c\|\Lambda x\|_F$

$$\inf_{y \in K} \|x - y\|_E \le c\|\Lambda x\|_F, \quad \forall x \notin K \tag{2}$$ □

Câu 9. Cho E, F là 2 KGĐC và $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$. Ta nói Λ là một ***toán tử compact*** nếu và chỉ nếu $\overline{\Lambda(A)}$ compact trong F với mọi tập A bị chặn trong E. CMR

(i) Λ compact nếu và chỉ nếu có quả cầu $B(a, r) \subset E$ sao cho $\overline{\Lambda(B(a, r))}$ compact trong F.

(ii) Nếu F là một KG Banach và (Λ_n) là ánh xạ compact hội tụ về $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$ thì Λ cũng compact.

Chứng minh.

(i) Xét chiều thuận, giả sử Λ compact. Ta có :

$B(a, r)$ là tập bị chặn trong E do đó theo Định nghĩa ta được $\overline{\Lambda(B(a, r))}$ compact trong F.

Xét chiều nghịch, giả sử

$$\exists B(a, r) \subset E \text{ sao cho } \overline{\Lambda B(a, r)} \text{ compact (1). Cần ch.m } \Lambda \text{ compact.}$$

Lấy A bị chặn trong E, để ch.m Λcompact ta sẽ ch.m $\overline{\Lambda(A)}$ compact trong F.

Thật vậy, vì A bị chặn trong E nên có $z \in E,\ \delta > 0$ sao cho

$$A \subset B(z, \delta) \Rightarrow \overline{\Lambda(A)} \subset \overline{\Lambda(B(z, \delta))} \qquad (2)$$

Với mọi $x \in E,\ s > 0$ ta có

$$\begin{aligned} B(x, s) &= (x - a) + sr^{-1} B(a, r) \\ \Rightarrow \Lambda(B(x, s)) &= \Lambda(x - a) + sr^{-1} \Lambda(B(a, r)) \\ &\subset \Lambda(x - a) + sr^{-1} \overline{\Lambda(B(a, r))} \end{aligned}$$

Mà $\overline{\Lambda(B(a, r))}$ compact trong F (1) nên

$$\Lambda(x - a) + sr^{-1} \overline{\Lambda(B(a, r))}$$

cũng compact trong F (do có một phép hợp nối giữa phép tịnh tiến $T_{\Lambda(x-a)}$ và phép vị tự $M_{a, sr^{-1}}$ là một đẳng cấu giữa 2 tập). Vậy

$$\Lambda(x - a) + sr^{-1} \overline{\Lambda(B(a, r))}$$

compact nên cũng là tập đóng trong F nên

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda(B(x, s))} &\subset \Lambda(x - a) + sr^{-1} \overline{\Lambda(B(a, r))}, \quad \forall x \in E,\ s > 0 \\ \Rightarrow \overline{\Lambda(B(x, s))} & \quad \text{là tập con đóng trong tập compact nên cũng compact trong } F, \quad \forall x \in E,\ s > 0 \end{aligned}$$

Do đó $\overline{\Lambda(B(z, \delta))}$ là tập compact $\Rightarrow$ (2) được thỏa. Vậy Λ compact.

(ii) Ta có $\Lambda_n \to \Lambda$ nên

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \|\Lambda_n - \Lambda\|_F < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Mà Λ_n compact nên với $B(0, 1) \subset E$ thì $\overline{\Lambda_n(B(0, 1))}$ là tập compact do đó tiền compact $\forall n \in \mathbb{N}$

Vậy $\overline{\Lambda_{n_0}(B(0,1))}$ là tập compact do đó tiền compact do đó

$$\Lambda_{n_0}(B(0,1)) \subset \overline{\Lambda_{n_0}(B(0,1))}$$

cũng tiền compact (xem lại chương I. $\overline{A}$ tiền compact thì A tiền compact)
Do đó tồn tại $y_1, ..., y_n \in \Lambda_{n_0}(B_E(0,1))$ sao cho

$$\Lambda_{n_0}(B_E(0,1)) \subset \cup_{i=1}^n B_F(y_i, \epsilon)$$

tức $\exists x_1, ..., x_n \in B_E(0,1)$ sao cho $y_i = \Lambda_{n_0} x_i, \quad \forall i = 1, ..., n$ và khi đó

$$\Lambda_{n_0}(B_E(0,1)) \subset \cup_{i=1}^n B_F(\Lambda_{n_0} x_i, \epsilon) \qquad (3)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{n_0} x - \Lambda x\|_F \quad &\leq \quad \|\Lambda_{n_0} - \Lambda\|_F \|x\|_E \quad < \quad \epsilon, \quad \forall x \in B_E(0,1) \\ \Rightarrow \Lambda x \in B_F(\Lambda_{n_0} x, \epsilon) \quad &; \quad \forall x \in B_E(0;1) \qquad (4) \end{aligned}$$

Do đó với $x_1, ..., x_n \in B_E(0,1)$ ta có

$$\forall z \in \Lambda(B_E(0,1)) \text{ thì } z \in \cup_{i=1}^n B_F(\Lambda x_i, 2\epsilon)$$

Thật vậy,

$$\forall z \in \Lambda(B_E(0,1)) \text{ thì } \exists t \in B_E(0,1) \text{ sao cho } z = \Lambda t$$

Hơn nữa, theo (4) thì

$$z = \Lambda t \in B_F(\Lambda_{n_0} x, \epsilon) \Rightarrow \|\Lambda_{n_0} x - \Lambda t\| < \epsilon \qquad (*)$$

Mặt khác vì $t \in B_E(0,1)$ nên theo (3); tồn tại $k = 1, .., n$ sao cho

$$\Lambda t \in B_F(\Lambda_{n_0} x_k, \epsilon) \Leftrightarrow \|\Lambda t - \Lambda_{n_0} x_k\| < \epsilon \qquad (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$, ta được

$$\|z - \Lambda x_k\| \leq \|\Lambda t - \Lambda_{n_0} x_k\| + \|\Lambda_{n_0} x_k - \Lambda x_k\| < 2\epsilon$$

hay

$$\forall z \in \Lambda(B_E(0,1)) \text{ thì } z \in \cup_{i=1}^n B_F(\Lambda x_i, 2\epsilon) \Leftrightarrow \Lambda(B_E(0,1)) \subset \cup_{i=1}^n B_F(\Lambda x_i, 2\epsilon)$$

$\Rightarrow \Lambda(B_E(0,1))$ là tập con tiền compact trong F. Do đó

$$\overline{\Lambda(B_E(0,1))}$$

là tập con đóng, tiền compact trong KG đầy đủ F nên là tập compact. □

Câu 10. Cho E là KGĐC và Λ là ánh xạ compact trong $\mathcal{L}(E,F)$. Đặt $v = \mathrm{Id}_E - \Lambda$. CMR

(i) $B'(0,r) \cap v^{-1}(K)$ compact với mọi tập K compact trong E, $\quad \forall r > 0$

(ii) $v^{-1}(0)$ là KG vector hữu hạn chiều.

Chứng minh.

(i) Ta lấy dãy $(x_n) \subset B'(0,r) \cap v^{-1}(K)$, thì

$$\begin{cases} (x_n) \subset B'(0,r) \Rightarrow \|x_n\| \le r \text{ và } (\Lambda x_n) \subset \Lambda(B'(0,r)) \\ (x_n) \subset v^{-1}(K) \Rightarrow v(x_n) = x_n - \Lambda x_n \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Do đó

$$v(x_n) + \Lambda x_n = \underset{\in K}{(x_n - \Lambda x_n)} + \underset{\in \Lambda(B'(0,r))}{(\Lambda x_n)} = x_n \in B'(0,r) \cap v^{-1}(K) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Vì Λ là ánh xạ compact $\Rightarrow \overline{\Lambda(B(0,r))}$ compact $\Rightarrow \overline{\Lambda(B'(0,r))}$ compact. Mà

$$(\Lambda x_n) \subset \Lambda\left(B'(0,r)\right) \subset \overline{\Lambda(B'(0,r))}$$

Hơn nữa K và $\overline{\Lambda(B'(0,r))}$ là các tập compact nên có dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho

$$\begin{cases} \Lambda x_{n_k} \to y \in \overline{\Lambda(B'(0,r))} \subset F \\ (x_{n_k} - \Lambda x_{n_k}) \to z \in K \end{cases} \qquad (2)$$

Ta có $x_{n_k} = (x_{n_k} - \Lambda x_{n_k}) + \Lambda x_{n_k} \to (y+z)$ nên theo (1) và (2) ta được

$$y + z \in B'(0,r) \cap v^{-1}(K)$$

Vậy có $x = y + z$ sao cho $x_{n_k} \to x$. Do đó $B'(0,r) \cap v^{-1}(K)$ là tập compact $\forall r > 0$

(ii) Đặt

$$A = v^{-1}(0) \subset E,\ B'_A(0,1) = B'(0,1) \cap A \text{ và } \Lambda\left(B'_A(0,1)\right) = A \cap \Lambda\left(B'(0,1)\right).$$

Mà $\Lambda \in \mathcal{L}(E,F)$ nên $v = (\mathrm{Id}_E - \Lambda) \in \mathcal{L}(E,F)$ do đó $\{0\} \subset F$ đóng nên A đóng trong E.

$\Rightarrow \Lambda(B'_A(0,1))$ đóng trong $\Lambda(B'(0,1))$,

Khi đó

$$\forall x \in A \text{ thì } 0 = v(x) = x - \Lambda x \Leftrightarrow x = \Lambda x \Leftrightarrow \Lambda\left(B'_A(0,1)\right) = B'_A(0,1)$$

Vì Λ là ánh xạ compact nên $\overline{\Lambda(B'(0,1))}$ compact

$\Rightarrow \Lambda(B'_A(0,1)) \subset \overline{\Lambda(B'(0,1))}$ là tập con đóng trong tập compact nên compact

$\Rightarrow \Lambda(B'_A(0,1)) = B'_A(0,1)$ compact.

$\Rightarrow B'_A(0,1) = \{x \in A \,|\, \|x\| \le 1\}$ compact.

$\Rightarrow (A, \|.\|_A)$ là KGĐC có quả cầu đơn vị đóng là tập compact nên A compact địa phương.

Do đó; theo Định lý 2.5 chapter 2, ta có A hữu hạn chiều $\square$

Câu 11. Cho Λ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ KGĐC E vào KG hữu hạn chiều F.

(i) CMR Λ là ánh xạ compact.

(ii) Nếu E là KG hữu hạn chiều còn F là KGĐC chưa biết số chiều thì kết quả còn đúng không?

Chứng minh

(i) Đặt $A = B'(0,1)$ thì A là tập đóng và bị chặn trong E.

Để ch.m Λ là ánh xạ compact $\Leftrightarrow$ ch.m $\overline{\Lambda(A)}$ compact.

Thật vậy, do Λ liên tục nên có $M > 0$ sao cho

$$\|\Lambda x\| \leq M \|x\|, \quad \forall x \in E$$

Do đó $\|\Lambda x\| \leq M \|x\| \leq M, \quad \forall x \in A \Rightarrow \Lambda(A)$ bị chặn trong F

$$\Rightarrow \overline{\Lambda(A)} \text{ đóng và bị chặn trong KG hữu hạn chiều } F \text{ nên là tập compact}$$

(ii) Đặt $A = B'(0,1)$ thì A là tập đóng và bị chặn trong E, mà E hữu hạn chiều nên A compact.

Mặt khác Λ liên tục nên $\Lambda(A)$ compact do đó cũng là tập đóng trong F

$$\Leftrightarrow \Lambda(A) = \overline{\Lambda(A)}$$

Vậy $\overline{\Lambda(A)}$ là tập compact nên Λ là ánh xạ compact.

$\square$

Câu 12. Cho E, F, G và H là các KGĐC, $S \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(F,G)$ và $U \in \mathcal{L}(G,H)$.

Giả sử T là ánh xạ compact. CMR $T \circ S$ và $U \circ T$ là ánh xạ compact.

Chứng minh

1. CM $T \circ S$ là ánh xạ compact; cần ch.m $\overline{(T \circ S)(A)}$ compact với mọi A bị chặn.

Ta lấy A bị chặn trong E, khi đó $\exists C > 0$ sao cho $\|x\| \leq C, \quad \forall x \in A$

Mặt khác, $S \in \mathcal{L}(E,F)$ nên

$$\|Sx\| \leq \|S\| \|x\| \leq C \|S\|, \quad \forall x \in A \Rightarrow S(A) \text{ bị chặn trong } F$$

Mà $T \in \mathcal{L}(F,G)$ và là ánh xạ compact nên

$$\overline{(T \circ S)(A)} = \overline{T(S(A))} \text{ compact trong } G \text{với } S(A) \text{ bị chặn trong } F$$

2. CM $U \circ T$ là ánh xạ compact; cần ch.m $\overline{(U \circ T)(B)}$ compact với mọi B bị chặn.

T là ánh xạ compact nên $\forall B \subset F$ bị chặn thì $\overline{T(B)}$ compact trong G

Ta có $U \in \mathcal{L}(G,H)$ nên $U\left(\overline{T(B)}\right)$ compact trong H do đó đóng trong H. $\quad (*)$

Mặt khác,

$$\overline{U[T(B)]} \subset \overline{U\left[\overline{T(B)}\right]} \overset{(*)}{=\!=} U\left(\overline{T(B)}\right) \qquad (1)$$

Với mỗi $x \in U\left(\overline{T(B)}\right)$ thì có $z \in \overline{T(B)}$ sao cho $x = U(z)$

Vì $z \in \overline{T(B)}$ nên $\exists (z_n) \subset T(B)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, khi đó

$$\{U(z_n)\} \subset U(T(B)) \subset \overline{U(T(B))}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} U(z_n) = U(z) = x$$

do đó

$$x \in \overline{U(T(B))}, \quad \forall x \in U\left(\overline{T(B)}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) , ta được

$$\overline{U(T(B))} = U\left(\overline{T(B)}\right)$$

Vậy $\overline{U(T(B))}$ compact trong H.

□

C

C

Chương 4

HIBERT SPACE

4.1 Các kiến thức trọng tâm

C

C

C

C

4.2 Bài tập

Câu 1. Cho $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$. Đặt

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$$

với $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ và $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$. CMR :

(i) $\langle\langle ., .\rangle\rangle$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$ và $(\mathbb{R}^n, \langle\langle ., .\rangle\rangle)$ là một KG Hibert.

(ii) $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là họ trực giao và $\left\{\dfrac{e_1}{\sqrt{\alpha_1}}, ..., \dfrac{e_n}{\sqrt{\alpha_n}}\right\}$ là họ trực chuẩn với tích vô hướng này.

Chứng minh.

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$\langle\langle ax + by, z\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (ax_i + by_i) z_i = a\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i z_i + b\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i z_i = a\langle\langle x, z\rangle\rangle + b\langle\langle y, z\rangle\rangle$$

Tương tự $\langle\langle x, ay + bz\rangle\rangle = a\langle\langle x, y\rangle\rangle + b\langle\langle x, z\rangle\rangle$

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i x_i = \langle\langle y, x\rangle\rangle$$

$$\langle\langle x, x\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \geq 0, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}, i = 1, .., n$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i = 0, \forall i = 1, .., n \Leftrightarrow x = 0$

Do đó $\langle\langle ., .\rangle\rangle$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$.

Hơn nữa $\|x\| = \langle\langle x, x\rangle\rangle^{1/2}$ là chuẩn sinh bởi tích vô hướng và $\mathbb{R}^n$ với chuẩn này là KG metric đầy đủ nên $(\mathbb{R}^n, \langle\langle ., .\rangle\rangle)$ là KG Hibert.

(ii) $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là họ trực giao vì với mỗi $i = 1, .., n$

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_i^k e_k \text{ trong đó } \delta_i^k = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = k \\ 0 \text{ khi } i \neq k \end{cases}$$

Do đó với mỗi $k = 1, .., n$ thì $\delta_i^k \delta_j^k = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = j \\ 0 \text{ khi } i \neq j \end{cases}$ và

$$\langle\langle e_i, e_j\rangle\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_i^k \delta_j^k = \begin{cases} \alpha_k > 0 \text{ khi } i = j \\ 0 \text{ khi } i \neq j \end{cases}$$

với mọi $i, j = 1, .., n$

Mặt khác họ $\left\{\alpha_1^{-1} e_1, ..., \alpha_n^{-1} e_n\right\}$ là họ trực chuẩn vì

$$\left\langle\left\langle \frac{e_i}{\sqrt{\alpha_i}}, \frac{e_j}{\sqrt{\alpha_j}}\right\rangle\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} \langle\langle e_i, e_j\rangle\rangle = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = j \\ 0 \text{ khi } i \neq j \end{cases}$$

Câu 2. Xét $l^2 = L^2(\mathbb{N}, \mu)$ trong đó μ là độ đo đếm trên $\mathbb{N}$.

(i) CMR l^2 là KG Hibert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \forall x = (x_n)\,;\; y = (y_n) \in l^2$$

(ii) Đặt $e_j = \left(\delta_n^j\right)$ với δ_n^j là các số Kronecker. CMR (e_n) là dãy trực chuẩn tối đại trong l^2.

Chứng minh. Nhắc lại rằng nếu $x \in l^2$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0 \text{ hay } s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \text{ là dãy hội tụ}$$

(i) Với mọi $x, y, z \in l^2,\; a, b \in \mathbb{R}$; ta có

$$\langle ax + by, z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + by_n)\, z_n = a\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + b\sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$$

Tương tự cho trường hợp còn lại của tính chất song tuyến tính.

Dễ dàng kiểm tra tính đối xứng và xác định dương.

Vậy $\langle ., .\rangle$ là tích vô hướng.

Mà l^2 đầy đủ do với mọi dãy Cauchy $x_k = (x_{nk}) \subset \left(l^2, \|.\|\right)$ thì

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \;>\; 0,\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t } 0 \le \|x_k - x_l\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_{nk} - x_{nl})^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t } |x_{nk} - x_{nl}| \le \text{ nt } < \epsilon, \quad \forall k, l \ge n_0 \end{aligned}$$

vậy (x_{nk}) là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ đầy đủ nên hội tụ về $x_k \in \mathbb{R}$

Đặt $x = (x_k) \Rightarrow x_k \to x$, cần CM $x \in l^2$, ta có

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} = \|X\| \le \|X_k - X\| + \|X_k\| < \infty$$

Do đó $x \in l^2 \Longrightarrow l^2$ là KG Hibert.

(ii) Dễ dàng kiểm tra (e_n) là dãy trực chuẩn trong l^2 vì $\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^i e_n^j = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = j \\ 0 \text{ khi } i \neq j \end{cases}$

Giả sử họ (e_n) không tối đại, hay $\exists u = (u_k) \in l^2$ sao cho $\langle u, e_n\rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ và $\langle u, u\rangle = 1$. Khi đó $u_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$Vô lý hay $\langle u, u\rangle = 0$ và (e_n) là dãy trực chuẩn tối đại trong l^2.

Ngoài ra để ch.m tính tối đại; ta cũng có thể kiểm tra Định lý 3.6 chapter 5 (tính chất iv)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n)\,\widehat{y}(n)\,, \quad \forall x, y \in l^2$$

trong đó $\widehat{x}(n) = \langle x, u_n\rangle = x_n$ và $\widehat{y}(n) = \langle y, u_n\rangle = y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Câu 3. (i) CMR $L^p(\Omega,\mu)$ là KG Banach với chuẩn

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \text{ khi } 1 \le p < \infty$$

và

$$\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 \text{ sao cho } |f(x)| \le C \text{ h.k.n } \forall x \in \Omega\},$$

(ii) Cho μ là độ đo trên Ω, cmr $L^2(\Omega,\mu)$ là KG Hibert với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(t)\, g(t)\, d\mu, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega,\mu)$$

Chứng minh. Có thể xem thêm Đlý 6.11 chapter 2 để hiểu rõ,

(i) ở đây với mọi $1 \le p < \infty$, dễ dàng kiểm tra $\|.\|_p$ là chuẩn trên $L^p(\Omega,\mu)$. Tiếp theo ta sẽ kiểm chứng khi $p = \infty$.

Ta có $|f(x)| \le \|f\|_\infty, \quad \forall x \in \Omega$ vì với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n > 0$ s.t.

$$\|f\|_\infty \le M_n \le \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$$

mà $\forall x \in \Omega$ thì

$$|f(x)| \le M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x)| \le \|f\|_\infty \text{ (cho } n \to \infty)$$

Trở lại bài toán,

$\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 \text{ sao cho } |f(x)| \le C \text{ h.k.n } \forall x \in \Omega\} \ge 0,$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \Leftrightarrow f \equiv 0.$

$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ vì

$|\lambda f(x)| = |\lambda|\, |f(x)| \le |\lambda|\, \|f\|_\infty, \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty \le |\lambda|\, \|f\|_\infty$

$\forall \lambda \ne 0$, ta có

$|f(x)| = \dfrac{1}{|\lambda|} |\lambda f(x)| \le \dfrac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty, \quad \forall x \Rightarrow |\lambda|\, \|f\|_\infty \le \|\lambda f\|_\infty$

$\|f+g\|_\infty \le \|f(x)\|_\infty + \|g(x)\|_\infty$ vì $|(f+g)(x)| = |f(x)| + |g(x)| \le \|f(x)\|_\infty + \|g(x)\|_\infty$

Tiếp theo, ta sẽ ch.m $L^p(\Omega,\mu)$ là KG đầy đủ.

Khi $1 \le p < \infty$, ta lấy dãy (f_n) Cauchy trong L^p thì tồn tại dãy con $\left(f_{n_j}\right)$ sao cho

$$\left\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right\| < 2^{-j}, \quad j = 1, 2, 3, ... \qquad (1)$$

Đặt

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} \left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| \text{ và } g = \sum_{j=1}^{\infty} \left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| \qquad (2)$$

Từ (1) , áp dụng BĐT Minkowski ta được

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \left\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right\| < \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} < 1, \quad k = 1, 2, ...$$

Áp dụng bổ đề Fatou cho $\left(g_k^p\right)$, ta được $\|g\|_p < 1$ và do đó $g(x) < \infty$ h.k.n tức là chuỗi

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_1}(x)\right) \qquad (3)$$

hội tụ tuyệt đối h.k.n $x \in \Omega$. Khi đó đặt f là tổng của chuỗi (3) và

$$\begin{aligned} Z &= \left\{x \in \Omega \ : \ \text{chuỗi (3) hội tụ về } f \text{ và } f(x) \neq 0\right\} \\ &= \cup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \Omega \ : \ \text{chuỗi (3) hội tụ về } f \text{ và } |f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} \end{aligned}$$

tức $f(x) = 0, \quad \forall x \notin Z$, và

$$\mu(Z^c) = 0$$

Mặt khác vì

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

nên

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \text{ h.k.n.}$$

Tiếp theo, ta ch.m $f_n \rightrightarrows f$ trong L^p, thật vậy

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|f_n - f_m\|_p < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0$$

Với mỗi $n \geq n_0$, theo bổ đề Fatou thì

$$\int_{\Omega} |f - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega} |f_{n_1} - f_m|^p \, d\mu < \epsilon^p$$

dẫn đến $f - f_m \in L^p$ do đó $f \in L^p$ vì $f = (f - f_m) + f_m$

Cho $m \to \infty$, ta được

$$\|f - f_m\|_p \to 0$$

Cuối cùng, xét chứng minh L^∞ Banach, lấy dãy (f_n) Cauchy trong L^∞. Đặt

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in \Omega : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \\ B_{m,n} &= \{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} \text{ và} \\ E &= \cup_{k,m,n=1}^{\infty} (A_k \cup B_{m,n}) \end{aligned}$$

Ta có

$$\mu(E) = 0, \text{ và } \exists f \text{ sao cho } f_n \rightrightarrows f \quad \forall x \notin E$$

Lấy $f(x) = 0, \quad \forall x \in E$ thì $f \in L^{\infty}(\Omega)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

(ii) Dễ dàng kiểm chứng $\langle .,. \rangle$ là tích vô hướng vì với mọi $f, g, h \in L^2, a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$\langle af + bg, h \rangle = a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle$ và $\langle f, ag + bh \rangle = a\langle f, g \rangle + b\langle f, h \rangle$

$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle,$

$\langle f, f \rangle \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$

Mặt khác L^2 Banach với chuẩn $\|.\|_2$ sinh bởi tích vô hướng này do đó $L^2(\Omega, \mu)$ là KG Hibert.

□

Câu 4. Cho $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là họ trực giao các vector khác 0 trong một KG Hibert E. CMR

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |e_i|^2$$

Chứng minh.
Vì $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là họ trực giao các vector khác 0 trong KG Hibert E nên

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n$$

do đó

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i, \sum_{i=1}^{n} e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i|^2$$

□

Câu 5. Cho $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là họ trực chuẩn trong E và $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ là dãy số thực. CMR
(i) $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2$
(ii) $\{e_1, .., e_n\}$ độc lập tuyến tính.
Chứng minh.
(i) Ta có $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là họ trực chuẩn nên $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \forall 1 \leq i \neq j \leq n \\ 1 & \forall 1 \leq i = j \leq n \end{cases}$

Do đó

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \alpha_i \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

(ii) Xét dãy số thực$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ ta có nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ thì

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Do đó ta được $\{e_1, .., e_n\}$ độc lập tuyến tính.

$\square$

Câu 6. Cho (e_n) là dãy trực chuẩn các vector trong KG Hibert E và (α_n) là dãy các số thực sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. CMR

(i) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ hội tụ trong E.

(ii) $\left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$

Chứng minh

(i) Đặt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ là tổng riêng phần của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ và

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$ là tổng riêng phần của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$

Cho $n > m$, áp dụng KQ ở câu 5 (i), ta có

$$|s_n - s_m|^2 = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k \right|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 = |a_n - a_m|$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ nên dãy tổng riêng phần (a_n) hội tụ do đó cũng Cauchy nên dãy (s_n) cũng Cauchy trong KG Hibert E vì

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho } 0 < |s_n - s_m|^2 = |a_n - a_m| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow &\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho } |s_n - s_m| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0 \end{aligned}$$

nên (s_n) hội tụ xề $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ trong E.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ hội tụ trong E.

(ii) Ta có

$$\begin{aligned} |s|^2 &= \lim_{n\to\infty} |s_n|^2 \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

Bài 7. Cho $(e_i)_{i\in I}$ là họ trực chuẩn các vector trong KG Hibert E và $x \in E$.

Đặt $\widehat{x}(i) = \langle x, e_i \rangle, \quad \forall i \in I$. CMR

(i) $x - \sum\limits_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j$ vuông góc e_i, $\quad \forall i \in J$ và $\sum\limits_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2 \le |x|^2$ với J là tập con hữu hạn của I.

(ii) Tập $I(x) = \{i \in I : \widehat{x}(i) \ne 0\}$ quá lắm đếm được.

(iii) $\sum\limits_{i\in I(x)} |\hat{x}(j)|^2 \le |x|^2$

(iv) y xác định và $\langle x - y, e_i\rangle = 0$, $\quad \forall i \in I$ với $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{x}(i_k)\, e_{i_k}$ nếu $I(x) = \{i_1, ..., i_m\}$ và $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}(i_k)\, e_{i_k}$ nếu $I(x) = (i_k)$ là dãy trong I.

Chứng minh.

(i) Với mỗi $i \in J$, $\hat{x}(j) = \langle x, e_i\rangle$, mà $(e_i)_{i\in I}$ là họ trực chuẩn các vector nên

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j, e_i \right\rangle &= \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in J} \hat{x}(j) \langle e_j, e_i\rangle \\ &= \langle x, e_i\rangle - \hat{x}(i) \langle e_i, e_i\rangle = 0\end{aligned}$$

Vậy $x - \sum\limits_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j$ vuông góc e_i, $\quad \forall i \in J$.

$$\Rightarrow \left| x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 = \left\langle x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j, x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right\rangle = \sum_{j\in J} \hat{x}(i) \left\langle x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j, e_i \right\rangle = 0$$

Mặt khác với mọi tập J hữu hạn (sd KQ câu 5i), ta có

$$\left| \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 = \sum_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2$$

nên

$$\begin{aligned}|x|^2 &= \left| x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j + \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 \\ &= \left| x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 + 2\left\langle x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j, \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right\rangle + \left| \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 \\ &= \left| x - \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 + \left| \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 \ge \left| \sum_{j\in J} \hat{x}(j)\, e_j \right|^2 = \sum_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2\end{aligned}$$

(ii) Đặt $I_n(x) = \left\{ i \in I : |\hat{x}(i)| > \dfrac{1}{n} \right\}$ thì $I(x) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(x)$

Thật vậy, với $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(x)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $i \in I_n \Rightarrow |\hat{x}(i)| > \dfrac{1}{n} \Rightarrow \hat{x}(i) \ne 0 \Rightarrow i \in I$

Ngược lại, lấy $j \in I(x) \Rightarrow \hat{x}(j) \ne 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $x_j > \dfrac{1}{m} \Rightarrow j \in I_m(x) \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(x)$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, nếu $I_n(x)$ là tập vô hạn, ta lấy J là tập con hữu hạn bất kỳ trong $I_n(x)$

Áp dụng KQ (i), ta có $\sum_{j\in J}|\hat{x}(j)|^2 \le |x|^2$, mặt khác

$$\sum_{j\in J}|\hat{x}(j)|^2 \ge \sum_{j\in J}\frac{1}{n^2} = \frac{|J|}{n^2} \Rightarrow |J| \le n^2|x|^2 \qquad (*)$$

Chọn J là tập con hữu hạn của $I_n(x)$ sao cho $|I| = [n^2|x|^2] + 1 > n^2|x|^2 \Rightarrow$ mâu thuẫn $(*)$

Do đó $I_n(x)$ là tập hữu hạn, $\forall n \in \mathbb{N}$

Vậy $I(x)$ là hội đếm được các tập hữu hạn nên là tập quá lắm đếm được.

(iii) Đặt $s_n = \sum_{1\le j\le n}|\hat{x}(j)|^2$, vì I là tập quá lắm đếm được;

Nếu $I(x)$ hữu hạn thì theo (i) $\Rightarrow \sum_{i\in I(x)}|\hat{x}(j)|^2 \le |x|^2$

Nếu $I(x)$ vô hạn (đ.đ.) thì $I(x) = \{i_m : m \in \mathbb{N}\}$ nên

$$\sum_{i\in I(x)}|\hat{x}(i)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\hat{x}(i_k)|^2$$

mà

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}|\hat{x}(i)|^2 \le |x|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta có (s_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $|x|^2$ nên hội tụ và $\exists s$ sao cho

$$s = \lim_{n\to\infty}s_n \le |x|^2$$

Do đó $\sum_{i\in I(x)}|\hat{x}(j)|^2 \le |x|^2$

(iv) Ta đã ch.m được tổng $\sum_{i\in I(x)}|\hat{x}(j)|^2$ là hữu hạn và cũng chính là $\left\|\sum_{i\in I(x)}x(i)e_i\right\|^2$ hữu hạn.

Do đó theo cách đặt $y = \sum_{k=1}^{m}\hat{x}(i_k)e_{i_k}$ là hoàn toàn xác định. $\forall i \in I$, ta có

$$\langle x-y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in I(x)}\hat{x}(j)\langle e_j, e_i\rangle, \text{ trong đó}$$

$$\sum_{j\in I(x)}\hat{x}(j)\langle e_j, e_i\rangle = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m}\hat{x}(i_k)\langle e_{i_k}, e_i\rangle & \text{nếu } I(x) = \{i_1, ..., i_m\} \\ \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\hat{x}(i_k)\langle e_{i_k}, e_i\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{x}(i_k)\langle e_{i_k}, e_i\rangle & I(x) = \{(i_k) \subset I\} \end{cases}$$

Nếu $i \in I(x)$ thì

$$\langle x-y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \hat{x}(i) = 0$$

Nếu $i \notin I(x)$ thì

$$\langle x-y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle = \hat{x}(i) = 0$$

Do đó $\langle x-y, e_i\rangle = 0, \quad \forall i \in I$ hay $(x-y) \perp e_i, \quad \forall i \in I$.

Câu 8. Cho M là KGC đóng trong KG Hibert E, đặt

$$N = M^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0, \quad \forall y \in M\}$$

CMR (i) $\exists P \in \mathcal{L}(E, M)$ s.t $x - P(x) \in N$ và $|x|^2 = |P(x)|^2 + |x - P(x)|^2, \quad \forall x \in E$

(ii) E là tổng trực tiếp topo của M và N.

Chứng minh

(i) Vì M là KGC $(0 \in M)$ đóng trong E do đó

Với mỗi $x \in M$ thì $x + M$ là tập con không rỗng $(x \in (x + M))$ và đóng trong E (phép tịnh tiến là đẳng cấu)

Mặt khác, $\forall a_1, a_2 \in (x + M), \ \forall t \in [0, 1]$ thì

$$\begin{aligned} ta_1 + (1-t)a_2 &= t(x + m_1) + (1-t)(x + m_2) \\ &= x + [tm_1 + (1-t)m_2] \in x + M \ (M\text{- KGC}) \end{aligned}$$

nên $x + M$ cũng là tập lồi.

Theo định lý 1.4, tồn tại phần tử có chuẩn nhỏ nhất, đặt là $Q(x)$.

Lấy $P(x) = x - Q(x)$, ta có

$Q(x) \in x + M \Rightarrow P(x) = x - Q(x) \in M$ hay $P(x) \in M, \quad \forall x \in E$.

Mặt khác, $\forall x \in E$ thì $Px \in M$ nên $Q(x) \in N$ vì

$$\begin{aligned} \forall y \in M \text{ s.t } \quad |y| = 1 \quad \text{thì } \langle Qx, Qx\rangle = |Qx|^2 \le |Qx - ay|^2, \quad \forall a \\ \Leftrightarrow \ 0 \le -2a\langle Qx, y\rangle + a^2, \quad \forall a \end{aligned}$$

Do đó

$$\langle Qx, y\rangle = 0, \quad \forall y \in M$$

Do vậy tồn tại $P : E \to M$ sao cho $x - P(x) = Q(x) \in N, \quad \forall x \in E$ (1)

Dễ thấy $M \cap N = \{0\}$ (2)

Mà $E = M \cup N$ do đó $E = M \oplus N$.

Mặt khác theo định nghĩa $N = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}$ là giao các đóng nên cũng đóng trong E.

Xét $x = x' + x”$ với $x' \in M$ và $x” \in N$, ta có

$$x' - Px = Qx - x”$$

Vì $x' - Px \in M$, $Qx - x” \in N$ và theo (2) ta được $x' = Px, \ x” = Qx$ nên sự tồn tại của các ánh xạ P, Q là duy nhất.

$\forall x, y \in E, a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} ax + by &= P(ax + by) + Q(ax + by) \\ a[Px + Qx] + b[Py + Qy] &= P(ax + by) + Q(ax + by) \end{aligned}$$

dẫn đến

$$P(ax+by) - aPx - bPy = Q(ax+by) - aQx - bQy \in M \cap N = \{0\}$$

Do đó $P(ax+by) = aPx + bPy$ và $Q(ax+by) = aQx + bQy$

Lại có

$$|Px_1 - Px_2| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in E$$

do đó P là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $E \to M$, $Qx = x - Px$ nên cũng liên tục.

Vậy $P \in \mathcal{L}(E, M), Q \in \mathcal{L}(E, N)$.

Cuối cùng với mọi $x \in E$, ta có

$$\begin{aligned} |x|^2 = |Px + Qx|^2 &= |Px|^2 + |Qx|^2 + 2\langle Px, Qx\rangle \\ &= |P(x)|^2 + |1 - P(x)|^2 \end{aligned}$$

(ii) Ta đã có $E = M \oplus N$ và

$\exists! \Phi(x) = (Px, Qx)$ với $P \in \mathcal{L}(E, M), Q \in \mathcal{L}(E, N)$ sao cho $x = Px + Qx$

Vì Φ^{-1} là song ánh tuyến tính liên tục (xem chứng minh ở chương 3) nên áp dụng Định lý 3.2 chap 3 ta được Φlà đồng phôi do đó E là tổng trực tiếp topo của M và N.

$\square$

Câu 9. Cho $S = \{v_1, ..., v_n\}$ là họ độc lập tuyến tính trong E. CMR có một họ trực chuẩn $T = \{u_1, ..., u_n\}$ trong E sao cho

$$\langle\{v_1, ..., v_m\}\rangle = \langle\{u_1, ..., u_m\}\rangle, \quad \forall m \leq n$$

trong đó $\langle U\rangle$ chỉ KGC sinh bởi U i.e. tập các tổ hợp tuyến tính hữu hạn các vector của U.

Chứng minh.

Bằng quy nạp. Khi $n = 1$, đặt $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ thì $\|u_1\| = 1$ và $\langle u_1\rangle = \langle v_1\rangle$

Giả sử có $n-1$ vector $u_1, ..., u_{n-1}$ sao cho $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ là họ trực chuẩn và

$$\langle u_1, ..., u_{n-1}\rangle = \langle v_1, ..., v_{n-1}\rangle$$

Ta tìm u_n sao cho $\{u_1, ..., u_n\}$ là họ trực chuẩn và $\langle u_1, ..., u_n\rangle = \langle v_1, ..., v_n\rangle$

Đặt $x_i = \langle v_n, u_i\rangle$ với mỗi $i = \{1, ..., n-1\}$ và

$$u_n = \left\| v_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \right\|^{-1} \left(v_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \right)$$

thì $\|u_n\| = 1$, hơn nữa vì $\langle u_i, u_k\rangle = \delta_i^k, \quad \forall i, k = 1, ..., n-1$

Với mỗi $k = \{1, ..., n-1\}$, ta có

$$\langle u_n, u_k \rangle = \left\| v_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \right\|^{-1} \left[\langle u_n, u_k \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i, u_k \right\rangle \right] = 0$$

Do đó $\{u_1, ..., u_n\}$ là họ trực chuẩn.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\langle u_1, ..., u_n \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$.

Thật vậy,

$$\forall x \in \langle u_1, ..., u_n \rangle ; \exists (a_k)_{1 \le k \le n} \text{ s.t. } x = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k = a_n u_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k u_k$$

Mà ta đã giả sử $\langle u_1, ..., u_{n-1} \rangle = \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle$ nên với $(a_k)_{1 \le k \le n-1} \in \mathbb{R}$

$$\exists (b_k)_{1 \le k \le n-1} \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \sum_{k=1}^{n-1} a_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k v_k$$

Xét $\langle v_n, u_k \rangle = x_k$ nên cũng tồn tại $c_k = x_k \in \mathbb{R}, \quad \forall 1 \le k \le n-1$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k u_k$$

Vậy

$$x = a_n u_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k u_k = a_n \left\| v_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \right\|^{-1} \left(v_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \right) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k v_k$$

Đặt $b_n = a_n \left\| v_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i \right\|^{-1}$, khi đó tồn tại $(b_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k \Leftrightarrow \langle u_1, ..., u_n \rangle \subset \langle v_1, ..., v_n \rangle$$

Bằng lập luận tương tự, ta cũng được $\langle v_1, ..., v_n \rangle \subset \langle u_1, ..., u_n \rangle$

Do đó $\langle u_1, ..., u_n \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ □

Câu 10. Cho (v_n) là dãy các vector độc lập tuyến tính trong E. CMR có một dãy trực chuẩn (u_n) trong E sao cho

$$\langle \{v_1, ..., v_m\} \rangle = \langle \{u_1, ..., u_m\} \rangle, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Chứng minh.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ở câu 9, ta đã chứng minh với $\{v_1, ..., v_n\}$ tồn tại họ trực chuẩn $\{u_1, .., u_n\}$ trong E sao cho

$$\langle \{v_1, ..., v_m\} \rangle = \langle \{u_1, ..., u_m\} \rangle, \quad \forall m \le n$$

Do đó có một dãy trực chuẩn (u_n) trong E sao cho

$$\langle \{v_1, ..., v_m\} \rangle = \langle \{u_1, ..., u_m\} \rangle, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Câu 11. Cho $\{e_n\}$ là dãy dãy vector trực chuẩn trong E. CMR $\lim\limits_{n\to\infty} \langle e_n, x\rangle = 0, \quad \forall x \in E$.

Chứng minh.

Đặt $x_n = \langle e_n, x\rangle\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Câu 12. Cho E là KG Hibert vô hạn chiều. CMR E khả ly nếu và chỉ nếu có một dãy vector trực chuẩn tối đại (e_n) trong E.

Chứng minh

Nhắc lại rằng KG metric E khả ly khi tồn tại tập con D đếm được dầy đặc.

i) Xét chiều thuận : *"Nếu E khả ly CM có một dãy vector trực chuẩn tối đại (e_n) trong E."*

Do E khả ly nên có tập con D (vô hạn) đếm được dầy đặc trong E.

Vậy có dãy $\{u_n\}$ ĐLTT trong D, áp dụng KQ câu 10, ta được

$\Rightarrow \exists$ dãy trực chuẩn (e_n) trong D sao cho

$$\langle\{e_1, ..., e_m\}\rangle = \langle\{u_1, ..., u_m\}\rangle, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Đặt $S = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R},\ n \text{ hữu hạn}\right\}$ và với mỗi $x \in D$, $\exists n_0$ s.t. $x = \sum\limits_{k=1}^{n_0} e_k$

Do đó $x \in S$

$\Rightarrow \overline{S} = \overline{D}$ suy ra S dầy đặc trong E, theo định lý 3.6 chapter 4, ta được

(e_n) là dãy trực chuẩn tối đại trong E.

ii) Ngược lại, nếu *"có một dãy vector trực chuẩn tối đại (e_n) trong E."*

Khi đó, theo Đlý 3.6 ta có $S = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R},\ n \text{ hữu hạn}\right\}$ là dầy đặc trong E

Mà S có lực lượng bằng $\mathbb{N}$ vì có song ánh

$$f : \mathbb{N} \to S \text{ x.đ bởi } f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

với dãy số thực (a_n) cho trước.

Do đó S đếm được mà S cũng dầy đặc nên khả li trong E.

□

Câu 13. Cho (x_n) là dãy bị chặn trong E. CMR có một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset (x_n)$ và $x \in E$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} \langle y, x_{n_k}\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall y \in E$$

Chứng minh.

Trước khi chứng minh bài này, ta sẽ sử dụng các kiến thức liên quan sau

(i) Cho K hay Φ là trường số thực hoặc phức.

Cho $(E, \|.\|)$ là KGĐC, E hữu hạn chiều hữu hạn thì E compact địa phương.

(ii)

(iii) Định lý Banach - Alaogu

Trở lại bài toán, ta chia làm 2 trường hợp sau

Nếu E hữu hạn chiều

Câu 14. Cho E là KG Hibert và (x_n) là dãy hội tụ về $x \in E$. CMR

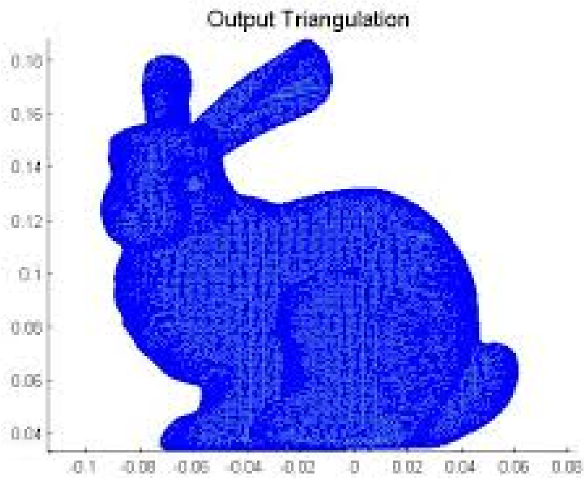
(i) $(|x_n|)$ bị chặn trong $\mathbb{R}$

(ii) $|x| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |x_n|$

(iii) Nếu $(|x_n|)$ hội tụ về $|x|$ thì $x_n \to x$.

Chứng minh.

(i)


Output Triangulation
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08