MEC8211 – Vérification et Validation en Modélisation Numérique

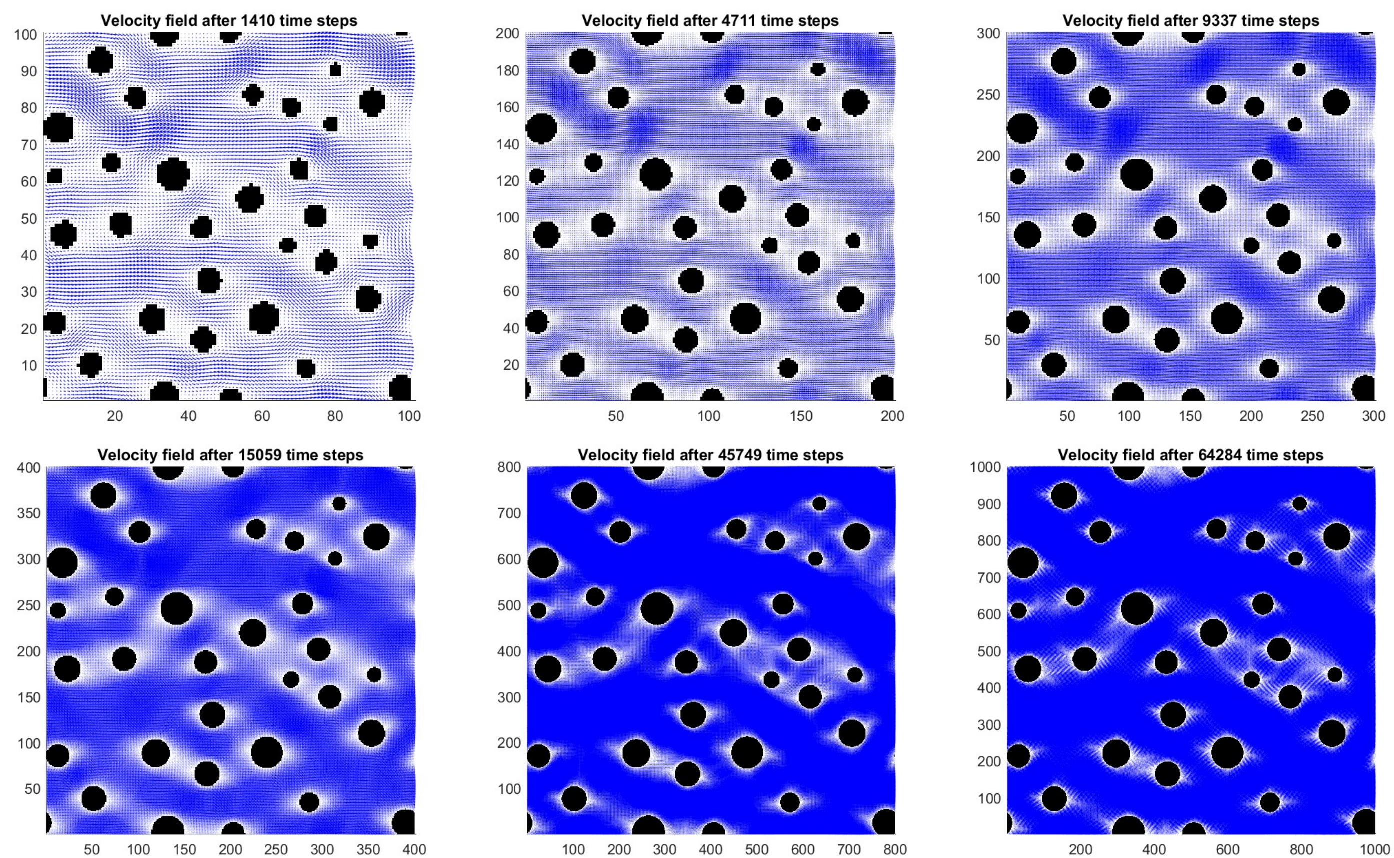
Devoir 3 : Validation

H25

Dorian Stefan Dumitru 2080089
Hieu Nhan Tran 2152473
Jacob Tremblay 2154148

A. Évaluation de l'incertitude numérique u_{num}

- Pour faire une analyse de convergence, on fait varier la taille des éléments Δx tout en gardant le domaine $N_x \times \Delta x$ constant.
- Les figures suivantes montrent des exemples de structures générés pour des N_x de 100, 200, 300, 400, 800 et 1000.
- Plus N_x augmente, plus la représentation géométrique des fibres est meilleure, et son erreur devient moins importante par rapport à l'erreur de discrétisation.
- Tous les résultats qui suivront ont été générés à l'aide de scripts MATLAB disponible sur https://github.com/NhanT2002/MEC8211_Devoir dans le répertoire *src/Devoir3/src_MATLAB*.
- L'analyse des résultats s'est faite avec *python* et se trouve dans le répertoire *src/Devoir3/results*

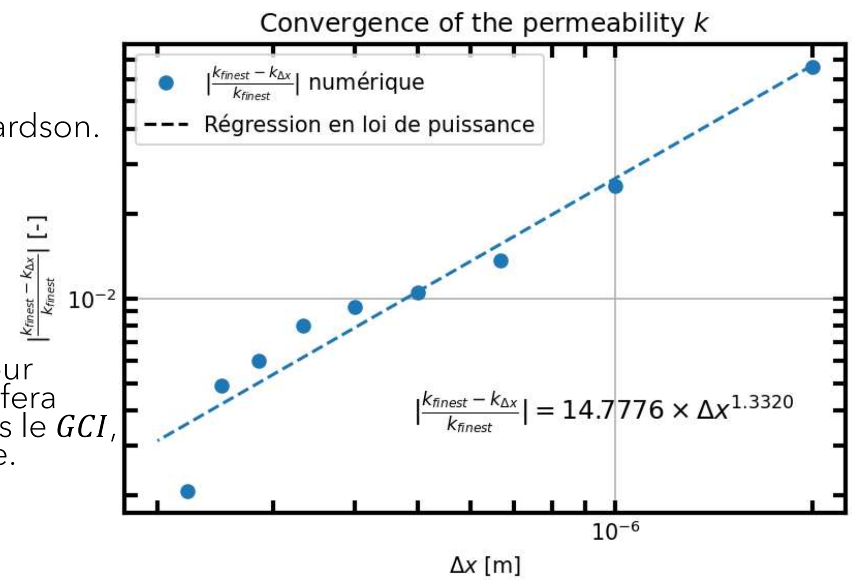


A. Évaluation de l'incertitude numérique u_{num}

- Les simulations précédentes ont été effectuées sur 5 *seeds* différents (101, 102, 103, 104, 105), pour des maillages allant de $N \in [100; 200; \dots; 900; 1000]$.
- L'analyse de convergence est faite sur les valeurs moyennes de ces 5 *seeds*.
- Le graphique suivant présente $\frac{k_{finest}-k_{\Delta x}}{k_{finest}}$ en fonction de Δx. On remarque que le modèle converge bien vers une valeur, avec une région asymptotique. On y représente toutes les simulations et non seulement celles utilisées pour calculer l'ordre de convergence observé.
- L'ordre de convergence observé s'est calculé avec $N_x = 200\ (f_3); 400\ (f_2); 800\ (f_1)$; afin d'obtenir un ratio entre les maillages de $r = 2$ et d'utiliser la formule suivante:
  - $\hat{p} = \frac{\ln\left(\frac{f_3-f_2}{f_2-f_1}\right)}{\ln(r)} = \frac{\ln\left(\frac{23.20986368-22.88132326}{22.88132326-22.77852717}\right)}{\ln(2)} = 1.366$
- $\left|\frac{\hat{p}-p_f}{p_f}\right| = \left|\frac{1.366-2}{2}\right| = 0.317 > 0.1$ → On ne peut utiliser l'extrapolation de Richardson.
- Ainsi, avec le GCI de P. Roache, $F_S = 3.0$ et $p = \min\left(\max(0.5, \hat{p}), p_f\right) = 1.366$
- $GCI = \frac{F_S}{r^p-1}|f_2 - f_1| = \frac{3.0}{2^{1.366}-1}|23.210 - 24.142| = 1.772\ \mu m^2$
- Ici, on prend la valeur à $N_x = 200$ comme étant le maillage le plus fin (f_1) pour calculer le GCI, car l'évaluation de u_{input} par la méthode de Monte-Carlo se fera avec un maillage 200×200 pour des fins de rapidité de calcul. De plus, dans le GCI, on choisi le $\hat{p}$ pour lequel on a eu le maillage le plus fin pour la convergence.
- Finalement, on trouve $u_{num} = \frac{GCI}{2} = 0.8861\ \mu m^2$

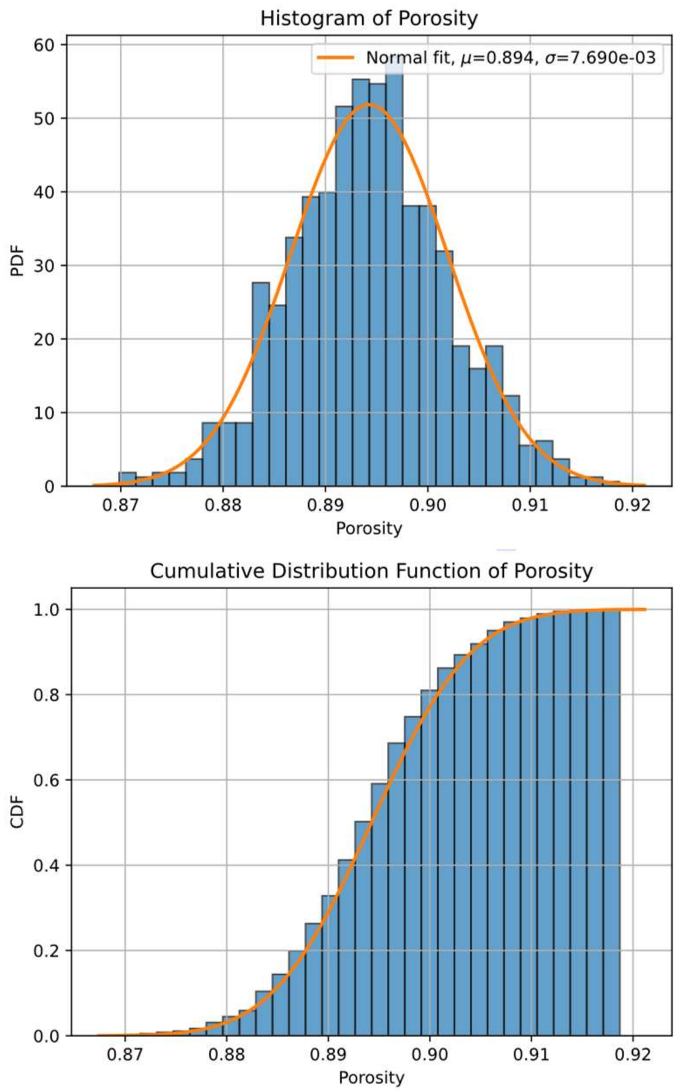
Perméabilité moyenne des 5 *seeds* pour différentes tailles de maillage

N_x	$k\ [\mu m^2]$
100	24.14167485
200	23.20986368
400	22.88132326
800	22.77852717



B. Évaluation de l’incertitude des données d’entrée u_{input}

- On fait une propagation de l’incertitude des données d’entrée à l’aide d’un maillage 200×200.
- Le code fournit génère déjà une distribution gaussienne du diamètre des fibres.
- On génère donc une distribution gaussienne de la porosité de moyenne 0.9 et d’écart type 7.50×10^{-3}. Un échantillon de 1000 porosités a été généré.
- Les figures suivantes présentent l’histogramme ainsi que l’histogramme cumulatif des porosités effectives utilisées en entrée. On remarque que cette dernière suit bien environ une loi gaussienne de moyenne 0.9 et d’écart type 7.50×10^{-3}.



B. Évaluation de l'incertitude des données d'entrée u_{input} (suite)

- Les figures suivantes présentent l'histogramme ainsi que l'histogramme cumulatif des perméabilités en sortie du code. On remarque que cette dernière suit un loi log-normale de paramètre $\mu = 3.216$ et $\sigma = 0.367$.

- La médiane et le FVG de l'échantillon sont alors :

  - $Median = e^{\mu} = 24.9294\ \mu m^2$

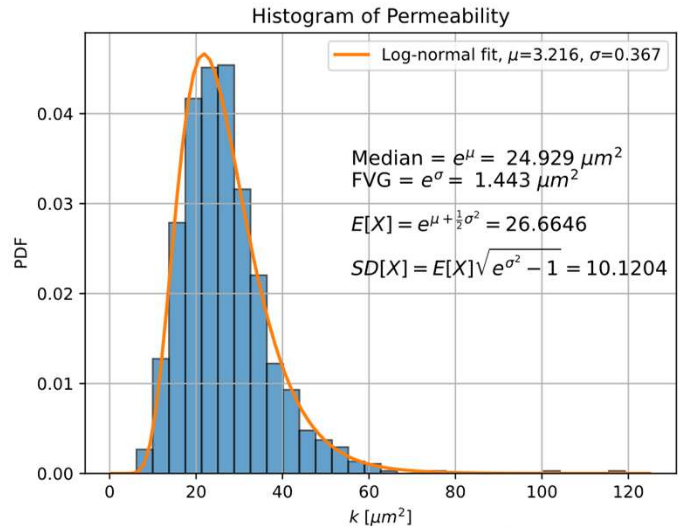
  - $FVG = e^{\sigma} = 1.4431\ \mu m^2$

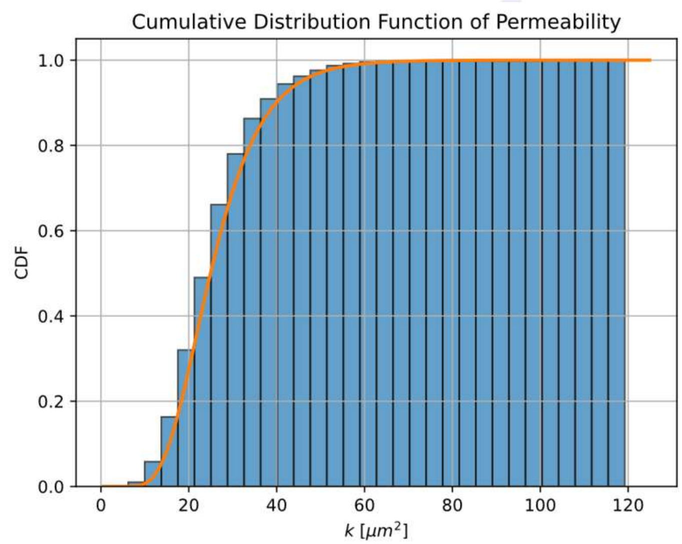
- En suivant la précision « 5 » de l'énoncé sur l'incertitude des distributions log-normales, il est possible de trouver un intervalle de la valeur d'incertitude qui tient compte de l'asymétrie de la distribution log-normale autour de la médiane.

  - $u_{input}^{-} = Median - {}^{Median}/_{FVG} = 24.9294 - 17.2739 = 7.6554\ \mu m^2$

  - $u_{input}^{+} = Median \cdot FVG - Median = 35.9776 - 24.9294 = 11.0482\ \mu m^2$

- Ainsi, l'incertitude des données d'entrée : $u_{input} = [7.655\ ;11.048]\ \mu m^2$





C. Évaluation de l'incertitude des données expérimentales u_D et D. Erreur de simulation

- L'incertitude sur les mesures expérimentales de perméabilité comporte des composantes aléatoires s_r (soit selon la distribution supposée gaussienne des mesures) et épistémiques b_r (soit celles données par le manufacturier).
  - $u_D = \sqrt{s_r^2 + b_r^2} = \sqrt{14.7^2 + 10.0^2} = 17.7789\ \mu m^2$

- On calcul l'erreur de simulation à partir des valeurs médianes de la perméabilité obtenue numériquement et expérimentalement:
  - $E = S - D = 24.929 - 80.6 = -55.6706\ \mu m^2$

E. Erreur et adéquation du modèle numérique

- Tel que mentionné en B), la valeur d'incertitude du modèle sera bornée en prenant compte des bornes de l'incertitude des données d'entrées u_{input}^{-} et u_{input}^{+}, suivant une distribution log-normale de nature asymétrique:
  - $u_{val}^{-} = \sqrt{(u_{input}^{-})^2 + u_{num}^2 + u_D^2} = \sqrt{7.6554^2 + 0.8861^2 + 17.7789^2} = 19.3773\ \mu m^2$
  - $u_{val}^{+} = \sqrt{(u_{input}^{+})^2 + u_{num}^2 + u_D^2} = \sqrt{11.0482^2 + 0.8861^2 + 17.7789^2} = 20.9508\ \mu m^2$
- $\delta_{model} \in [E - ku_{val}^{-}, E + ku_{val}^{+}]$. On prend $k = 2.0$ pour avoir un intervalle de confiance de 95.4%.
- $\delta_{model} \in [-55.6706 - 2.0 \times 19.3773, -55.6706 + 2.0 \times 20.9508]$
- $\delta_{model} \in [-55.6706 - 38.7547, -55.6706 + 41.9017]$
- $\delta_{model} \in [-94.4253, -13.7689]\ \mu m^2$
  - Si $u_{input} = 0$, alors $\delta_{model} \in [-91.2726, -20.0686]\ \mu m^2$
- On peut ainsi voir que la qualité de l'évaluation de la validation peut être améliorée en améliorant tout d'abord la qualité des expérimentations pour ainsi venir diminuer u_D, et ensuite la qualité des simulations pour ainsi diminuer u_{input}. On remarque que l'incertitude numérique u_{num} est quant à elle bien contrôlée (à 95% du temps) et presque négligeable lorsque comparée à u_D et u_{input}.

E. Erreur et adéquation du modèle numérique (suite)

- Le graphique à droite représente l'erreur relative du modèle pour un maillage 200×200, avec et sans u_{input} dans le modèle. Ainsi, selon la norme *V&V20-2009*, on se situe dans le Cas 3a, où le signe de E est le même que celui de δ_{model}.
- On peut voir aussi qu'en négligeant u_{input}, on remarque une diminution de l'intervalle qui borne l'erreur du modèle, mais pas de manière significative, indiquant que l'incertitude expérimentale est toujours la plus influençable.
- Afin de valider davantage le modèle et de voir si l'on se rapproche potentiellement du Cas 1, il serait intéressant de quantifier l'incertitude des données d'entrée du modèle pour un maillage plus fin afin de voir l'effet sur le contrôle de l'erreur du modèle et de la sensibilité des données d'entrées de porosité sur celui-ci, à voir si l'on peut diminuer u_{input}.
- Le modèle suppose que le milieu filtrant peut être représenté par un ensemble de fibres toutes parallèles et que le problème se simplifie en un problème 2D.
- Dans la réalité, on peut imaginer que les fibres utilisées pour mesurer les données expérimentales ne sont pas toutes parallèles. De plus, en 3D, l'influence des bords du filtre peuvent être non négligeable.
- Ces différents éléments pourraient expliquer pourquoi l'erreur de simulation E est aussi grande. Une révision des hypothèses du modèle numérique pourrait contribuer à diminuer l'erreur de simulation E.