**TẬP MANDELBROT VÀ JULIA**

**1. Nền tảng lịch sử**

**1.1. Gaston Julia và Pierre Fatou**

Lịch sử của các tập Julia bắt đầu vào những năm 1910, trong bối cảnh hậu quả của Thế chiến thứ nhất. Nhà toán học người Pháp Gaston Julia (1893-1978), dù bị thương nặng và mất một phần mặt trong chiến tranh, đã tiếp tục nghiên cứu toán học và xuất bản công trình mang tính đột phá vào năm 1918: "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles" (Luận văn về phép lặp của các hàm hữu tỷ).

Cùng thời điểm, nhà toán học Pháp Pierre Fatou (1878-1929) cũng độc lập nghiên cứu về những chủ đề tương tự. Cả hai nhà khoa học đều tập trung vào hành vi của các hàm phức khi được lặp lại vô hạn lần. Công trình của họ đặt nền móng cho lĩnh vực hệ động lực phức, nhưng trong thời đại đó, họ không thể trực quan hóa được những tập hợp phức tạp mà họ đang nghiên cứu do hạn chế về công nghệ tính toán.

**1.2. Benoît Mandelbrot**

Phải đến những năm 1970-1980, nhà toán học Pháp-Mỹ Benoît Mandelbrot (1924-2010) mới đưa các nghiên cứu này trở lại trọng tâm. Làm việc tại IBM, Mandelbrot có thể sử dụng máy tính để khám phá các tập hợp mà Julia và Fatou đã nghiên cứu về mặt lý thuyết. Năm 1980, ông xuất bản bức ảnh đầu tiên về tập hợp sau này mang tên ông - tập Mandelbrot.

Mandelbrot đã phát triển khái niệm "fractal" (từ tiếng Latin "fractus" có nghĩa là "bị gãy") để mô tả các đối tượng hình học có tính chất tự tương tự ở nhiều mức độ phóng đại khác nhau. Cuốn sách "The Fractal Geometry of Nature" (1982) của ông đã đưa các fractal vào nhận thức đại chúng và trở thành tác phẩm kinh điển trong lĩnh vực này.

**2. Nền tảng toán học**

**2.1. Số phức và mặt phẳng phức**

Để hiểu về tập Mandelbrot và Julia, chúng ta cần bắt đầu với khái niệm về số phức. Một số phức có dạng:

Trong đó a và b là các số thực, và i là đơn vị ảo thỏa mãn i^2 = -1. Mỗi số phức có thể được biểu diễn như một điểm trên mặt phẳng phức, với a là tọa độ theo trục ngang (phần thực) và b là tọa độ theo trục dọc (phần ảo).

Độ lớn của một số phức được tính bằng công thức:

**2.2. Định nghĩa toán học của tập Mandelbrot**

Tập Mandelbrot M được định nghĩa là tập hợp tất cả các số phức c sao cho khi bắt đầu với điểm và lặp đi lặp lại hàm :

dãy số có độ lớn bị giới hạn (không phân kỳ đến vô cùng).

Có thể chứng minh rằng nếu độ lớn của bất kỳ số hạng nào trong dãy vượt quá 2, thì dãy sẽ chắc chắn phân kỳ đến vô cùng. Do đó, một điều kiện để là với mọi n.

**2.3. Định nghĩa toán học của tập Julia**

Cho một hàm bậc hai trong đó c là một số phức, tập Julia J liên quan đến hàm  được định nghĩa là tập hợp biên của các điểm trên mặt phẳng phức mà khi áp dụng hàm lặp đi lặp lại:

dãy số hoặc có độ lớn bị giới hạn (không phân kỳ đến vô cùng) hoặc phân kỳ đến vô cùng.

Mỗi giá trị c khác nhau sẽ tạo ra một tập Julia khác nhau. Tập Julia có thể là một tập liên thông (một mảnh) hoặc không liên thông (nhiều mảnh rời rạc - thường được gọi là "bụi Cantor").

**2.4. Thuật toán tính toán**

Trong thực tế, không thể kiểm tra vô hạn phép lặp, nên người ta thường sử dụng một số lần lặp tối đa (ví dụ: 1000) và một ngưỡng thoát (thường là 2) để quyết định một điểm có thuộc tập hợp hay không. Thuật toán cơ bản như sau:

function belongsToSet(c\_real, c\_image, maxIterations):

z\_real = 0

z\_image = 0

for i from 1 to maxIterations:

// Tính z^2

temp = z\_real\*z\_real - z\_image\*z\_image

z\_image = 2\*z\_real\*z\_image

z\_real = temp

// Cộng với c

z\_real += c\_real

z\_image += c\_image

// Kiểm tra điều kiện thoát

if (z\_real\*z\_real + z\_image\*z\_image > 4):

return i // Số lần lặp trước khi thoát

return maxIterations // Có thể thuộc tập hợp

Thuật toán này cũng được sử dụng để tạo màu sắc cho các hình ảnh fractal, với màu sắc thường dựa trên số lần lặp trước khi một điểm "thoát".

**3. Mối quan hệ giữa tập Mandelbrot và các tập Julia**

**3.1. Tập Mandelbrot như bản đồ các tập Julia**

Tập Mandelbrot có thể được xem như một "bản đồ" chỉ dẫn cho tất cả các tập Julia có thể có:

* Nếu (thuộc tập Mandelbrot), tập Julia $J\_c$ tương ứng sẽ liên thông.
* Nếu (không thuộc tập Mandelbrot), tập Julia J\_c tương ứng sẽ không liên thông (dạng bụi Cantor).

**3.2. Định lý kết nối**

Một định lý quan trọng trong lý thuyết fractal phức là "Định lý kết nối" (Connectivity Theorem) của Fatou và Julia:

*Tập Julia liên thông khi và chỉ khi quỹ đạo của điểm tới hạn 0 dưới ánh xạ bị giới hạn.*

Đây chính là định nghĩa của tập Mandelbrot, khẳng định mối liên hệ mật thiết giữa hai tập hợp.

**4. Kết luận**

Tập Mandelbrot và Julia là những ví dụ kinh điển về cách một công thức toán học đơn giản có thể tạo ra những cấu trúc vô cùng phức tạp và đẹp đẽ. Chúng không chỉ là các đối tượng nghiên cứu hấp dẫn trong toán học mà còn là cầu nối giữa toán học, khoa học máy tính, nghệ thuật và triết học.