TUẦN 3. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

1 Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

1.1 Phép biến đổi Laplace

Định nghĩa 1. Phép biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ là hàm số $F(s)$ được định nghĩa:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t \quad (s, f(t) \in \mathbb{R})$$

Ví dụ 1. Tính phép biến đổi Laplace của một số hàm đơn giản

$$\mathfrak{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$\mathfrak{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t = -\frac{-e^{-((s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

Tính chất 1 (Tính tuyến tính)**.** Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $\exists \mathfrak{L}\{f(t)\}(s), \mathfrak{L}\{g(t)\}(s)$. Khi đó

$$\mathfrak{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \mathfrak{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathfrak{L}\{g(t)\}(s)$$

Định nghĩa 2 (Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace)**.** Hàm f được gọi là hàm bậc mũ khi $t \to \infty$ nếu tồn tại các hằng số không âm M, α, T sao cho

$$\left| f(t) \right| \le M e^{at} \quad (\forall t > T)$$

Định lý 1. Nếu hàm f liên tục từng khúc và là bậc mũ khi $t \to \infty$ thì tồn tại

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) \quad (\forall s > \alpha)$$

Bảng biến đổi Laplace		
$f(t)$	$F(s)$	s
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$
$t^n\ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$t^a\ (a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>0$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s>0$
$\sin kt$	$\frac{k}{k^2+s^2}$	$s>0$

Ví dụ 2. Tính.

a) $\mathfrak{L}\{\sin 2t-\cos 4t\}=\mathfrak{L}\{\sin 6t-\sin 2t\}=\dfrac{36}{36+s^2}-\dfrac{4}{4+s^2}$

b) $\mathfrak{L}\{\sinh kt\}=\mathfrak{L}\left\{\dfrac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}\right\}=\dfrac{k}{s^2-k^2}$

1.2 Phép biến đổi Laplace nghịch đảo

Định nghĩa 3. Nếu $F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$ thì ta nói $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của hàm số $F(s)$.

$$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Ví dụ 3. Tìm phép biến đổi Laplace ngược.

a) $F(s)=\dfrac{6}{s}-\dfrac{1}{s-8}+\dfrac{4}{s-3}$ $\quad(f(t)=6-e^{8t}+4e^{3t})$.

b) $F(s)=\dfrac{6s}{s^2+25}+\dfrac{s}{s^2+25}$ $\quad(f(t)=6\cos 5t+\dfrac{3}{5}\sin 5t)$.

Định lý 2. Sự duy nhất của phép biến đổi Laplace nghịch đảo $f(t),g(t)$ thoả mãn để $\exists F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}(s), G(s)=\mathfrak{L}\{g(t)\}(s)$. Nếu $F(s)=G(s)$ $(\forall s>C)$ thì có $f(t)=g(t)$ tại t mà cả hai hàm liên tục.

2 Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

2.1 Phép biến đổi đạo hàm

Định lý 3. Cho $f(t)$ liên tục và trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to \infty$ (tức là tồn tại hằng số không âm c, M, T thoả mãn

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad (t \geq T)$$

Khi đó tồn tại $\mathfrak{L}\{f'(t)\}$, $s > c$ với $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Ví dụ 4. Tính $\mathfrak{L}\{te^{2t}\}$.
Hướng dẫn.

- Đặt $F(s) = \mathfrak{L}\{te^{2t}\}$ và $f(t) = te^{2t}$
- $f'(t) = 2te^{2t} + e^{2t}$
- $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = \mathfrak{L}\{2te^{2t} + e^{2t}\} = 2F(s) + \dfrac{1}{s-2}$
- Lại có $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \longrightarrow sF(s) = 2F(s) + \dfrac{1}{s-2} \longrightarrow F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2}$

Định lý 4. Phép biến đổi Laplace của đạo hàm cấp cao

Giả sử rằng hàm số $f, f', f^{(n-1)}$ liên tục và trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to \infty$. Khi đó $\exists \mathfrak{L}\{f^n(t)\}$ và $s > c$ sao cho

$$\mathfrak{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathfrak{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Ví dụ 5. Tìm nghiệm của bài toán với giá trị ban đầu.

$$x'' + 8x' + 15x = 0 \quad x(0) = 2, x'(0) = 3$$

Hướng dẫn.

- Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \\
&\mathfrak{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 2 \\
&\mathfrak{L}\{x''(s)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 3
\end{aligned}$$

- Phương trình vi phân đã trở thành

$$\begin{aligned}
&s^2X(s) - 2s + 3 + 8(sX(s) - 2) + 15X(s) = 0 \\
\Longleftrightarrow &(s^2 + 8s + 15)X(s) = 2s + 13 \\
\Longleftrightarrow &X(s) = \frac{2s+13}{s^2+8s+15} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{s+3} - \frac{3}{s+5}\right)
\end{aligned}$$

- Vậy $x(t) = \frac{1}{2}\left(7e^{-3t} - 3e^{-5t}\right)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 6x + 3y \\ x(0) = 1\, y(0) = -2 \end{cases}$

- Hướng dẫn.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathfrak{L}\{y(t)\} = Y(s) \\
&\mathfrak{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1 \\
&\mathfrak{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2
\end{aligned}$$

- Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} sX(s) = 2X(s) + Y(s) + 1 \\ sY(s) = 6X(s) + sY(s) - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 1 \\ -6X(s) + (s-3)Y(s) = -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s},\ Y(s) = \frac{-2}{s} \\
&\Longrightarrow x(t) = 1,\ y(t) = -2
\end{aligned}$$

2.2 Phép biến đổi Laplace của tích phân.

Nếu $f(t)$ liên tục, trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to \infty$ thì

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{s}\mathfrak{f}(\mathrm{t}) \quad (s > c)$$

Ví dụ 7. Tìm $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

- Hướng dẫn.

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\} = \int\limits_0^t \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \mathrm{d}t = \int\limits_0^t \sin t \,\mathrm{d}t = 1 - \cos t$$