Chuỗi số

I Đại cương về chuỗi số

1 Định nghĩa

- Chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với $\begin{cases} a_n & \text{là số hạng tổng quát} \\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n & \text{là tổng riêng thứ n} \end{cases}$

- $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với $\begin{cases} S \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{liên tục và} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \\ \nexists_\infty \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{phân kì} \end{cases}$

- Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ với $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

  $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$

  $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1$

  $\Rightarrow$ Chuỗi hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

  $\bigstar \sum_{n=1}^{\infty} a.q^n \quad (a \neq 0) \begin{cases} \text{hội tụ} \Leftrightarrow |q| < 1 \\ \text{phân kì} \Leftrightarrow |q| \geqslant 1 \end{cases}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a.q^n = \frac{aq}{1-q}$

2 Định lý 1.1: Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- Hệ quả: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ

- Ví dụ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10-3n}{\sqrt{4n^2+2n+7}}$ với $a_n = \dfrac{10-3n}{\sqrt{4n^2+2n+7}}$

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10-3n}{\sqrt{4n^2+2n+7}} = \dfrac{-3}{2} \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ

3 Định lý 1.2: Các phép toán trên chuỗi số hội tụ

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số hội tụ thì chuỗi số

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

- Ví dụ: Chứng minh chuỗi số sau hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2020}{n(n+1)} + \dfrac{2021}{4^n}\right]$

  tính tổng chuỗi số:

  - Xét $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2020}{n(n+1)} = 2020 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\quad a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

    $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$

    $$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{chuỗi hội tụ} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2020}{n(n+1)} = 2020 \end{cases} \quad (1)$$

  - Xét $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2020}{4^n}$

    $$\Rightarrow \begin{cases} \text{chuỗi hội tụ} \qquad (|q| = \dfrac{1}{4} < 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2021}{4^n} = \dfrac{2021.\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{2021}{3} \end{cases} \quad (2)$$

    Thay đổi một số hữu hạn số hạng đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

từ (1)và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2020}{n(n+1)}+\dfrac{2021}{4^n}\right] & \text{hội tụ} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2020}{n(n+1)}+\dfrac{2021}{4^n}\right] & = 2021+\dfrac{2021}{3}=\dfrac{8081}{3} \end{cases}$

II Chuỗi số dương

1 Định nghĩa

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ thỏa mãn $a_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương (Chú ý rằng nếu các phần tử $a_n < 0, \forall n$ thì ta thực hiện bỏ dấu trừ ra ngoài, ta sẽ được một chuỗi dương)

2 Tiêu chuẩn tích phân

- Cho $f(x)$ là một hàm liên tục dương, giảm trên $[1;\infty)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$, $a_n = f(n) \quad \forall n \geqslant 1$.
  Khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- Ví dụ : $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$, $a_n = \dfrac{1}{n\ln n} > 0$
  Xét $f(x) = \dfrac{1}{n\ln n}$ liên tục dương, giảm trên $[2;\infty)$ và $a_n = f(x) \quad \forall n \geqslant 2$
  Mà $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln x} = \int\limits_2^{\infty} \dfrac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty$
  $\rightarrow \int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\ln x}$ phân kỳ $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ phân kỳ theo tính chất tích phân.

  $\bigstar \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} (n>0) \begin{cases} \text{hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ} \Leftrightarrow 0 < \alpha \leqslant 1 \end{cases}$

When you focus on the good, the good gets better.

3 Các tiêu chuẩn so sánh

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ là chuỗi số dương.

- Tiêu chuẩn so sánh 1:

  Nếu $a_n \leqslant b_n$ $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{hội tụ thì} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{hội tụ} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{phân kỳ thì} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{phân kỳ} \end{cases}$

  Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+5^n}$

  Ta có $0 < \frac{2^n}{n+5^n} \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$

  Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ hội tụ $(q = \frac{2}{5} < 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+5^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

- Tiêu chuẩn so sánh 2:

  Giả sử $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$

  – $K = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

  – $K = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

  – $K = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

  Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$, $\quad a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}} > 0$

  Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

  Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1$

  Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$ phân kỳ theo tiêu chẩn so sánh.

4 Tiêu chuẩn D'Alambert:

Cho $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$

- $D < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- $D > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
- $K = 1 \Rightarrow$ chưa có kết luận

Ví dụ 1: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $\qquad a_n = \dfrac{1}{n!} > 0$

Xét $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alambert.

Ví dụ 2: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+4^n}$, $\qquad a_n = \dfrac{2n+1}{n^3+4^n} > 0, \forall n \in N^*$

Xét $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)^3+4^{n+1}}}{\frac{2n+1}{n^3+4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{4} = \infty$

Do $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \Rightarrow a_{n+1} > an$

$\Rightarrow a_n > a_{n-1} > ...a_1 \left(= \dfrac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ nếu có tồn tại thì cũng không thể bằng 0

$\Rightarrow$ Chuỗi số đã cho phân kỳ.

5 Tiêu chuẩn Cauchy:

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$

- $C < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- $C > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
- $C = 1 \Rightarrow$ chưa có kết luận

  Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^n$, $\qquad a_n = \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^n > 0$

  Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arctan \frac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\arctan \frac{1}{n}\right) = 0 < 1$

  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

6 Mối quan hệ giữa tiêu chuẩn D'Alambert và tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nếu tồn tại $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0;\infty)$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

III Chuỗi số dương với số hạng có dấu bất kỳ

1 chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

- Định lý: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$cũng là hội tụ.

  Lưu ý $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không có chiều ngược lại.

  Định nghĩa 1: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là

- hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ là hội tụ
- bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ là phân kỳ.

Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$

- ta có $\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$
- mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ hội tụ

Tiêu chuẩn D'Alambert mở rộng:

Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối
- $L > 1$ thì cả hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng:

Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = L$

- $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối
- $L > 1$ thì cả hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$phân kỳ.

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2}{(1-a^2)^n}$ ta có $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{an^2}{(1-a^2)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{an^2}}{|1-a^2|}$

- $\frac{1}{|1-a^s|} > 1 \Rightarrow 0 < |a| < \sqrt{2} \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn cauchy.
- $\frac{1}{|1-a^s|} < 1 \Rightarrow |a| > \sqrt{2} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn cauchy.
- $|a| = \sqrt{2} \Rightarrow$ chuỗi ban đầu có dạng. $\left[\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty}n^2.\sqrt{2}\\ \sum_{n=1}^{\infty}-n^2.\sqrt{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}n^2.\sqrt{2}\end{array}\right.$

2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa: Cho chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.a_n$ với $a_n > 0$ được gọi là chuỗi đan dấu. Định lý Lebnitz: Nếu $a_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.a_n$là một chuỗi số hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.a_n \leqslant a_1$

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

- Chuỗi là chuỗi đan dấu
- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

  + chuỗi là dãy số giảm.

  $\Rightarrow$ chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

  Nhận xét: ta có $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ do $\frac{1}{2} < 1$

Ví dụ 2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$

- Chuỗi là chuỗi đan dấu
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2^n(n+1)} = 0$

  + chuỗi là dãy số giảm.

  $\Rightarrow$ chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

3 Phép nhân chuỗi

Định nghĩa: Cho $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ là 2 chuỗi bất kỳ. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, ở đó $c_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_k.b_{n+1-k}$. $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ là tích của hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Định lý Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$là các chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A.B$

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$hội tụ tuyệt đối
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$hội tụ tuyệt đối
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) . \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$hội tụ