Lý thuyết tuần 4

1 Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

1.1 Phép tịnh tiến

Định lí 3.1: Phép biến đổi trên trục S Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với $s > c$ thì tồn tại $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ với $s > a + c$ và có: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$ hay tương đương với:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}.f(t) := e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

Chứng minh: Định lý trên được chứng minh một cách trực tiếp như sau:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t) = F(s-a)$$

VD1: Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{e^{3t}.sin(t+\frac{\pi}{4}\right\}(s)$

Lời giải:

$$\mathcal{L}\left\{e^{3t}.sin(t+\frac{\pi}{4}\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\left\{e^{3t}.\frac{1}{\sqrt{2}}.(sint+cost)\right\}(s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\left[\mathcal{L}\{e^{3t}sint\}(s) + L\{e^{3t}cost\}(s)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\left[\frac{1}{(s-3)^2+1} + \frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right] \quad \text{với } s > 3$$

VD2: Tìm biến đổi Laplace ngược của $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s}\right\}(t)$

Lời giải:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}(t)$$

$$= 1 - cost$$

VD3: Tìm biến đổi Laplace ngược của $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$

Lời giải:

Ta có: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s+3)^2+4} - \dfrac{3}{2}.\dfrac{2}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$

$= e^{-3t}.cos2t - \dfrac{3}{2}.e^{-3t}.sin2t$

VD4:Tìm biến đổi Laplace của $\mathcal{L}\{(e^t+t)^2\}(s)$

Lời giải:

Ta có:
$\mathcal{L}\{(e^t+t)^2\}(s)$

$= \mathcal{L}\{(e^{2t}\}(s) + 2\mathcal{L}\{e^t.t\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s)$

$= \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{s^2}$

1.2 Phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức

Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng có nghiệm là biến đổi Laplace nghịch đảo của hàm hữu tỷ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$. Thật vậy, xét phương trình $y'' + py' + qy = 0, y(0) = a, y'(0) = b$. Tác động phép biến đổi Laplace vào cả 2 vế ta được:

$$(s^2Y(s) - sa - b) + P(s.Y(s) - a) + q.Y(s) = 0$$

Phương trình đại số này có nghiệm là:

$$Y(s) = \frac{(s+p)a+b}{s^2+ps+q}$$

Phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức được đưa về phép biến đổi Laplace ngược của 4 hàm phân thức đơn giản sau:

$$I.\frac{A}{P-a} \qquad II.\frac{A}{(s-a)^k} \qquad III.\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2} \qquad IV.\frac{Ms+N}{[(s-a)^2+b^2]^h}$$

Phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức đơn giản thứ tư, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{Ms+N}{[(s-a)^2+b^2]^2}\}$, sẽ được tính qua công thức:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = (f * g)(t)$$

dựa vào: $L\{t.sinkt\} = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

ta có: $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{s-a}{[(s-a)^2+b^2]^2}\} = e^{at}.\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{s}{(s^2+b^2)^2}\} = \dfrac{1}{2b}.e^{at}.t.sinbt$

VD1: Giải bài toán giá trị ban đầu:

$x^{(4)} - 3x'' - 4x = 0; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; x'''(0) = 1$

Lời giải:

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho để được:

$$[X(s).s^4 - s^3.x(0) - s^2.x'(0) - s.x''(0) - x'''(0)] - 3.[s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0)] - 4X(s) = 0$$

$$\Rightarrow X(s)(s^4 - 3s^2 - 4) = 1$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{20(s-2)} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{5(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{20}.e^{2t} - \frac{1}{20}.e^{-2t} - \frac{1}{5}.sint$$

VD2: Giải bài toán giá trị ban đầu:

$x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t}; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Lời giải:

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình ta được :

$$[s^3.X(s) - s^2.x(0) - s.x'(0) - x''(0)] - [s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0)] - [s.X(s) - x(0)] + X(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow X(s).(s^3 - s^2 - s + 1) = \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{(s-2)(s^3 - s^2 - s + 1)}$$

$$X(s) = \frac{-1}{12(s+1)} + \frac{1}{3(s-2)} - \frac{1}{s(s-1)^2} - \frac{1}{4(s-1)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-1}{12}.e^{-t} + \frac{1}{3}.e^{2t} - \frac{1}{2}.t.e^{t} - \frac{1}{4}.e^{t}$$

VD3: Tìm phép biến đổi Laplace ngược của:$(s) = \frac{s}{(s+3)^2+4}$

Lời giải:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4} - \frac{3}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$$

$$= e^{-3t}.cos2t - \frac{3}{2}.e^{-3t}.sin2t$$

2 Tích chập- phép biến đổi Laplace của tích chập

Định nghĩa : Giả sử f và g là hai hàm liên tục từng khúc trên $[0;+\infty)$
Tích chập của f và g là:

$$f(t).g(t) = \int\limits_0^t (\tau).g(t-\tau)d\tau$$

Định lý: Giả thiết $f(t), g(t)$ liên tục từng khúc và có cấp mũ trên $[0;+\infty)$
Ta có: $\mathcal{L}^{-1}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s).G(s)$
$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(t) * g(t)$

VD1:$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\} = \frac{1}{b}.\mathcal{L}^{-1}\{\frac{b}{s^2+b^2}.\frac{s}{s^2+b^2}\} = \frac{1}{b}.sinbt * cosbt$

$$= \frac{1}{b}\int_0^t sinbu.cosb(t-u)du = \frac{1}{2b}.\int_0^t [sinbt + sinb(2u-t)du$$

VD2: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-cs}}{s^3-2s^2+2s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-cs}}{s}.\frac{1}{s^2-2s+2}\right\} = u(t-c) * (e^t.sint)$

$$= \begin{cases} 0 * e^t.sint, t < c \\ 1 * e^t.sint, t \geq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, t < c \\ \frac{e^t}{2}(sint - cost) + \frac{1}{2}, t \geq c \end{cases}$$

2.1 Vị phân của phép biến đổi

Định lý: Nếu f(t) liên tục từng khúc và có cấp mũ trên $[0,+\infty)$ thì:

$$F'(s) = \mathcal{L}^{-1}\{-tf(t)\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{f(t)=L}^{-1}\{F(s)\} = -\tfrac{1}{t}.\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$$

Mở rộng: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{(-1)^n}{t^n}.\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}$

VD1: $\mathcal{L}^{-1}\{arccot\frac{-1}{s}\}(t)$

$= \frac{-1}{t}.\mathcal{L}^{-1}\{(arccot\frac{1}{s})'\}(t)$

$= \frac{-1}{t}.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{1+(\frac{-1}{s})^2}.(\frac{-1}{s})'\right\}(t)$

$\frac{1}{t}.\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1}{s^2+1}\}(t)$

$= \frac{1}{s}.sint$

VD2: $\mathcal{L}\{t(e^{2t}+3cost)\}(s)$

$= -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{3s}{s^2+1}\right), s>2$

$= \dfrac{1}{(s-2)^2} - \dfrac{3}{s^2+1} + \dfrac{6s^2}{(s^2+1)^2}, s>2$

2.2 Tích phân của phép biến đổi

Định lý:Cho $f(t)$ liên tục từng khúc và có cấp mũ trên $[0,+\infty)$
ta có:

$$\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty}(\sigma)d\sigma\right\}$$

VD1:$\mathcal{L}\{\dfrac{sinht}{t}\}$

$= \displaystyle\int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{sinht\}(\sigma)d\sigma$

$= \displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2-1} = \frac{1}{2}.ln\frac{s+1}{s-1}$

VD2: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}\right\}$

$= t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\displaystyle\int s^{+\infty}\frac{-1}{(\sigma^2-1)^2}d\sigma\right\}$

$$= t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = t.sinht$$

2.3 Phương trình vi phân cấp hai với hệ số biến đổi

Kiến thức:

$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n.Y(s) = s^n.Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}.y^{(k)}(to)$

$\mathcal{L}\{t^n y f(t)\} = (-1)^n.\dfrac{d^n}{ds^n}.(\mathcal{L}\{f(t)\}(s))$

$\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \displaystyle\int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(\sigma)d\sigma$

VD: $y'' + 3ty' - 6y = 2, y(0) = y'(0) = 0$

Lời giải:

Đặt: $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2.Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$

$\mathcal{L}\{ty'\} = \dfrac{-d}{ds}(\mathcal{L}\{\dagger'\}) = \dfrac{-d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -Y(s) - sY'(s)$

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho:

$s^2Y(s) - 3Y(s) - 3sY'(s) - 6Y(s) = \dfrac{2}{s}$

$\Leftrightarrow Y'(s) + \left(\dfrac{3}{8} - \dfrac{8}{3}\right)Y(s) = \dfrac{-2}{3s^2} \qquad (1)$

(1) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có nghiệm $Y(s) = \dfrac{2}{s^3} + C.\dfrac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}$
Nhận xét: khi $s \leftarrow \infty$ thì $Y(s) \leftarrow 0 \quad \Rightarrow C = 0$
với $Y(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow y(t) = t^2$

2.4 Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng số và vế phải gián đoạn

a. Phép tịnh tiến trên trục t:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}.F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad L^{-1}\{e^{-as}.F(s)\} = u(t-a).f(t-a)$$

b. Giải phương trình vi phân

VD1: Cho $f(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t < 3 \\ t, t \geq 3 \end{cases}$

a) Tính $\mathcal{L}\{f(t)\}$
$y'' + 4y = f(t), y(0) = y'(0) = 0$

Lời giải:

a) Ta có: $f(t) = tu(t-3)$
$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-3).(t+3-3)\} = e^{-3s}.\mathcal{L}\{t+3\} = e^{-3s}.(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}), s > 0$

b) Tác động biến đổi Laplace 2 vế ta được:

$$(s^2+4)Y(s) = e^{-3s}.(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s})$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{4}.e^{-3s}.(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+4})$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}.u(t-3)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+4}\}(t-3)$$

$$= \frac{1}{4}.u.(t-3).[t - \frac{1}{2}.sin2(t-3) - 3.cos2(t-3)]$$

VD2: $x'' + x = f(t), x(0) = x'(0) = 0, f(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 1 \\ 0, t \geq 1 \end{cases}$

Lời giải:

Ta có: $(t) = u(t) - u(t-1)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}, s > 0$

Tác động phép biến đổi Laplace vào 2 vế ta được:

$$s^2.X(s) + X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}, s > 0$$

$$\Leftrightarrow X(s) = (1-e^{-s}).\frac{1}{s(s^2+1)} = (1-e^{-s}).(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1})$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\}(t) - u(t-1).\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\}(t-1)$$

$$= t - cost - u(t-1)[t-1-cos(t-1)]$$

$$= \begin{cases} t - cost, t < 1 \\ 1 - cost + cos(t-1), t \geq 1 \end{cases}$$