Tuần 1: Phương trình vi phân cấp hai

1 Đại cương về phương trình vi phân cấp 2

Xét bài toán giá trị hàm ban đầu Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1 Định lý 1 (Sự tồn tại nghiệm duy nhất)

Giả thiết rằng $\begin{cases} f(x, y, y'), \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'} \text{ liên tục trên } D \in \mathbb{R}^3 \\ (x_0, y_0, y'_0) \in D \end{cases}$. Khi đó bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất thuộc D

1.2 Định nghĩa nghiệm tổng quát

Hàm $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ được gọi là NTQ của bài toán

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.2}$$

nếu

- Với mỗi C_1, C_2 thì $\varphi(x, C_1, C_2)$ là một nghiệm của bài toán (1.2)
- $\forall (x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{D}$ thì tồn tại C_1^*, C_2^* sao cho $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*)$ là nghiệm của (1.1)

1.3 Định nghĩa tích phân tổng quát

Phương trình $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (1.2) dưới dạng hàm ẩn được gọi là *tích phân tổng quát*. Với $C_1 = C_1^*; C_2 = C_2^*$ cụ thể, phương trình $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$ được gọi là tích phân riêng

2 Các phương trình khuyết

2.1 Phương trình khuyết y

Xét phương trình $F(x, y', y'') = 0$

- Đặt $y' = u$ để đưa về PTVP cấp 1 $F(x, u, u') = 0$
- Giải PTVP cấp 1 $\rightarrow u = \varphi(x, c)$
- Giải PTVP cấp 1, $y' = \varphi(x, 0) \rightarrow y$

VD1. Giải phương trình vi phân $y'' = y' + x$

Giải

Đặt $y' = u$, khi đó $y'' = u'$. Thay vào phương trình ban đầu ta được

$$u' - u = x$$

Theo công thức tính nghiệm tổng quát

$$u = e^{\left(\int dx\right)}\left(C_1 + \int xe^{\left(-\int dx\right)}dx\right) = -x - 1 - C_1e^x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int udx = -\frac{x^2}{2} - x + C_1e^x + C_2$$

VD2. Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu $\begin{cases} xy'' + xy'^2 = y' \\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1 \end{cases}$

Giải

đặt $u = y' \rightarrow \begin{cases} u(2) = 1 \\ y" = u' \end{cases}$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$xu' + xu^2 = u$$

Vì $u(2) = 1 \rightarrow u \neq 0$

Chia cả 2 vế của phương trình cho u' ta được:

$$\frac{xu'}{u^2} + x - \frac{1}{u} = 0 \ \ (2)$$

Đặt $t = \dfrac{-1}{u} \rightarrow t' = \dfrac{u'}{u^2}$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$xt' + x + t = 0 \rightarrow t' + \frac{t}{x} = -1$$

Áp dụng công thức nghiệm tổng quát ta có:

$$t = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c_1 + \int -e^{\int \frac{1}{x}dx}\right) = e^{-lnx}\left(c_1 + \int -e^{lnx}dx\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-x^2}{2} + c_1\right) = \frac{-x}{2} + \frac{c_1}{x}$$

$\rightarrow \dfrac{-1}{u} = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{c_1}{x} \rightarrow = \dfrac{-1}{\dfrac{-x}{2} + \dfrac{c_1}{x}}$

Vì $u(2) = 1 \rightarrow \dfrac{-1}{\dfrac{-2}{2} + \dfrac{c_1}{2}} = 1 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow u = \dfrac{2}{x} \rightarrow y' = \dfrac{2}{x}$

$\rightarrow y = 2lnx + c_2$

Vì $y(2) = 2 \rightarrow 2ln2 + c_1 = 2 \rightarrow c_2 = 2 - 2lm2 \rightarrow y = 2lnx + 2 - 2ln2$

Vậy phương trình có nghiệm riêng

$$y = 2lnx + 2 - 2ln2$$

2.2 Phương trình khuyết x

Xét phương trình $F(y, y', y") = 0$

đặt $u = y' \rightarrow u = \dfrac{dy}{dx}$ ta có

$y" = \dfrac{du}{dx} = u.\dfrac{du}{dy}$

$\rightarrow$ PT đưa về PTVP cấp 1 $F(y, u, u.\dfrac{du}{dy}) = 0$ ở đây u là hàm của y

Giả sử giải PT này được NTQ $u = \varphi(y, c)$

Giải PTVP cấp 1 $y' = \varphi(y, c) \rightarrow$ được nghiệm cần tìm

VD1. $2yy" = y'^2 + 1$ (1)

Giải

đặt $u = y' \rightarrow y" = u\dfrac{du}{dy}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$2yu\frac{du}{dy} = u^2 + 1 \quad (2)$$

Xét $y = 0 \rightarrow y' = 0$ không thỏa mãn phương trình (1)

Xét $u = 0$ không thỏa mãn phương trình (1) $\rightarrow u \neq 0$

Khi đó phương trình (2) $\leftrightarrow \dfrac{2udu}{u^2 + 1} = \dfrac{dy}{y} \leftrightarrow ln(u^2 + 1) = lny + c_1$

$\leftrightarrow u^2 + 1 = y.c \leftrightarrow u = \sqrt{cy - 1}$

$\leftrightarrow y' = \sqrt{cy - 1} \leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{cy - 1}$

$\leftrightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{cy - 1}} = dx \leftrightarrow \dfrac{2}{c}\sqrt{cy - 1} = x + D$

Vậy phương trình có TPTQ là

$$\frac{2}{c}\sqrt{cy - 1} = x + D$$

VD2.

Giải

$yy" - y'^2 = y^4 \;\; (1) \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$
Dễ thấy $y \neq 0$ do $y'(0) = 1$
Chia cả 2 vế của phương trình (1) choy^2 ta được

$$\frac{yy' - y'^2}{y^2} = y^2 \leftrightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)' = y^2 \;\; (2)$$

đặt $\frac{y'}{y} = t \to t' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dy}.ty$
Thay vào (2) ta được

$$\frac{dt}{dy}ty = y^2 \to tdt = ydy \to \frac{t^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1$$

Có $y'(0) = 1, y(0) = 1 \to t(0) = 1 \to c_1 = 0 \to t^2 = y^2 \to t = y \to \frac{dy}{y^2} = dx \to \frac{-1}{y} = x + c_2$
$y(0) = 1 \to c_2 = -1 \to y = \frac{-1}{x-1}$

Phương trình tuyến tính cấp hai

3 Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

3.1 Phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y" + p(x)y' + q(x)y = 0 \ \ (1)$$

được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

3.2 Cách giải

- định lý: Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của (1) thì hàm số $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là một nghiệm của phương trình (1) với C_1, C_2 là các hằng số
  Nghiệm tổng quát của (1) là $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ khi $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính
- Lúc này người ta gọi hệ $y_1(x), y_2(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của (1). Người ta cũng chứng minh được rằng dố nghiệm độc lập tuyến tính lớn nhất cuẩ phương trình đúng bằng 2, tức là mọi hệ 3 nghiệm y_1, y_2, y_3 đều PTTT
- Nếu biết một nghiệm riêng $y_1 \neq 0$của (1) ta tìm được nghiệm y_2 có dạng $y_2(x) = y_1(x).u(x)$ theo công thức
  $y_2 = y_1.\int \frac{1}{y_1^2}.e^{-\int p(x)dx} dx$ (công thức Liouville)
- Cách giải phương trình $y" + py' + qy = 0$
  Nói chung không có phương pháp tổng quát để tìm nghiệm riêng của phương trình (1).Chỉ trong trường hợp đặc biệt ta mới có thể giải các bài toán này.

3.3 VD

VD1. $x^2y" + xy' - y = 0$

Giải

Ta có thể thấy $y_1 = x$ là 1 nghiệm của phương trình trên

Dựa vào công thức Liouville có: $y_2 = x.\int \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{-1}{2x}$

Vậy $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$

VD2. $(2x + 1)y" + 4xy' - 4y = 0$

Giải

$y" + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4y}{2x+1} = 0$

Ta thấy $y_1 = x$ là nghiệm của phương trình. Theo công thức Liouville:

$y_2 = x\int \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{4x}{2x+1}dx}dx = x.\int \frac{1}{x^2}e^{ln(2x+1)-2x}dx = x\int \frac{1}{x^2}\frac{2x+1}{e^{2x}}dx = -e^{-2x}$

Do đó nghiệm của phương trình vi phân là $y = C_1x + C_2e^{-2x}$

3.4 Bài tập

(a) $y" - y' = 0$

(b) $xy" - (2x+1)y' + (x+1)y = 0 \ \ (y_1 = e^x)$

(c) $(x^2+2x)y" - 2(1+x)y' + 2y = 0 \ \ (y_1 = x+1$ là 1 nghiệm)

(d) $y" - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0 \ \ (y_1 = x$ là 1 nghiệm)

4 Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

4.1 Dạng phương trình

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất có dạng:

$$y" + p(x)y' + q(x)y = f(x) \ \ (2)$$

Nếu $f(x) = 0$, (2) thành phương trình VPTT cấp 2 thuần nhất

4.2 Cách giải

- Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (2) có dạng $y = \overline{y} - +Y$ trong đó $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và Y là 1 nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (2)

- Nguyên lý chồng chất nghiệm
  Nếu y_1 là nghiệm của phương trình $y" + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$
  $y_2$là nghiệm của phương trình $y" + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$

thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm của $y" + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

4.3 Ví dụ

VD1. Giải $x^2y" + xy' - y = 1$

Giải

Như ở phần ví dụ PTVPTT thuần nhất, pt $x^2y" + xy' - y = 0$ có hệ nghiệm cơ sở là $y_1 = x, y_2 = \dfrac{1}{x}$
Một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y = -1$
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} - 1$
VD2. $(2x+1)y" + 4xy' - 4y = 2x^2 + 2x + 1$

Giải

Phương trình VPTT thuần nhất
$(2x+1)y" + 4xy' - 4y = 0$ có 2 nghiệm cơ sở là $y_1 = x; y_2 = e^{-2x}$ (đã chứng minh ở phần PTVPTT thuần nhất)
Ta có thể nhẩm được 1 nghiệm riêng của phương trình là $y = \dfrac{x^2}{2}$
Do đó, NTQ của phương trình là: $y = C_1x + C_2e^{-2x} + \dfrac{x^2}{2}$
Trong thực tế và trong các bài thi, thông thường ít dạng giải PTVPTT không thuần nhất bằng cách mò nghiệm riêng của nó (rất khó, thậm chí không tìm được). Do đó bài tập phần này ta chuyển xuống cùng bài tập phần giải Langrange ở phần sau

5 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Việc giải PTVPTT cấp 2 không thuần nhất không phải lúc nào cũng giải được theo phương pháp giải PTVPTT thuần nhất và nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Phương pháp Lagrange giúp ta giải phương trình không thuần nhất thông qua NTQ của phương trình thuần nhất

- Đầu tiên, ta phải có NTQ của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

- Cho C_1, C_2 biến thiên, $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$
  Ta có $y' = (C_1'y_1 + C_2'y_2) + (C_1y_1' + C_2y_2')$
  Lúc này giải hệ: $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$

Với y_1, y_2 đã biết dựa vào phương trình thuần nhất ta tìm được $C_1(x), C_2(x)$

5.1 Ví dụ

VD1. Giải PTVP $xy" - y' = x^2$

Giải

Xét PTVP thuần nhất $xy" - y' = 0$ có thể viết dưới dạng $\dfrac{y"}{y'} = \dfrac{1}{x}$

Do đó $y' = C_1 x, y = \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$

Hệ nghiệm cơ bản của phương trình là $y_1(x) = 1, y_2(x) = x^2$

Theo pp Lagrange, ta giải HPT: $\begin{cases} 1.C_1'(x) + x^2 C_2'(x) = 0 \\ 0.C_1'(x) + 2xC_2'(x) = x \end{cases} \to \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{-x^3}{6} \\ C_2(x) = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Do đó $y^* = \dfrac{x^3}{3}$ và nghiệm tổng quát của pt là $y = C_1 + C_2 x^2 + \dfrac{x^3}{3}$

VD2. $x^2 y" - xy' = 3x^3$

Giải

Xét pt tuyến tính thuần nhất

$$x^2 y" - xy' = 0 \to y" - \frac{y'}{x} = 0$$

Một nghiệm cơ bản ta có thể thấy ngay là $y_1(x) = 1$

Ta có

$$y_2(x) = 1.\int \frac{1}{1^2} e^{-\int \frac{-1}{x} dx} dx = \frac{x^2}{2}$$

Do đó ta tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất dưới dạng $y^*(x) = C_1(x).1 + C_2(x)\dfrac{x^2}{2}$

Ta có: $\begin{cases} C_1'(x).0 + C_2'(x).x = 3x \\ C_1'(x).1 + C_2'(x)\dfrac{x^2}{2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_2(x) = 3x \\ C_1(x) = \dfrac{-x^3}{2} \end{cases} \to y^*(x) = x^3$

Vậy NTQ của pt không thuần nhất là

$$y = C_1 + C_2 \frac{x^2}{2} + x^3$$

Bài tập

Giải các PTVP sau:

(a) $y" - y' = \dfrac{2-x}{x^3} e^x$

(b) $x^2y" + xy' - y = x^2$

(c) $y" + 3y' + 2y = e^x$

(d) $y" - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$