Tuần 4: Phương trình vi phân cấp một

Phương trình vi phân cấp một là những phương trình có dạng

$$F(x, y, y')$$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số cần tìm.

VD. (Bài toán Cauchy với giá trị ban đầu)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Người ta đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm của bài toán trên nếu $f'_y(x, y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ đang xét.

Trong chương trình Giải tích 3, chúng ta sẽ xét các loại phương trình sau

1 Phương trình khuyết

1.1 Phương trình khuyết y

Gồm những phương trình có dạng $F(x, y') = 0$

- Nếu ta giải được $y' = f(x)$ thì $y = \displaystyle\int f(x)dx$
- Nếu ta giải được $x = f(y')$ thì ta thực hiện đặt $y' = t$. Khi đó $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \displaystyle\int tf'(t)dt \end{cases}$
- Nếu giải được $\begin{cases} x = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ thì $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)f'(t)dt \end{cases}$

1.2 Phương trình khuyết x

Gồm những phương trình có dạng $F(y, y') = 0$

- Nếu ta giải được $y' = f(x)$ thì $x = \displaystyle\int \frac{dy}{f(y)}$
- Nếu ta giải được $y = f(y')$ thì ta thực hiện đặt $y' = t$. Khi đó $\begin{cases} y = f(t) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{t}dt \end{cases}$
- Nếu giải được $\begin{cases} y = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ thì $x = \dfrac{f'(t)}{g(t)}dt$

2 Phương trình biến số phân ly

Gồm phương trình có dạng $f(y)dy = g(x)dx$ hay $y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$. Giải phương trình này rất đơn giản, ta tích phân hai vế của phương trình, khi đó

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \quad \text{hay} \quad F(y) = G(x) + C$$

3 Phương trình dạng đẳng cấp - đưa được về dạng đẳng cấp

3.1 Phương trình dạng đẳng cấp

Gồm những phương trình có dạng $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Thực hiện đặt $u = \dfrac{y}{x}$, khi đó ta đưa được phương trình về dạng biến số phân ly

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{F(u) - u}$$

3.2 Phương trình đưa được về dạng đẳng cấp

Gồm những phương trình có dạng

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Nếu $c_1 = c_2 = 0$ thì

$$y' = F\left(\frac{a_1\frac{x}{y} + b_1}{a_2\frac{x}{y} + b_2}\right)$$

là phương trình đẳng cấp. Ngược lại, khi có một trong hai số c_1, c_2 khác 0, ta xét hai trường hợp

- Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ thì ta có thể chọn α và β thỏa mãn $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$. Khi đó với phép đổi biến $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$, ta thu được phương trình mới có dạng

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = F\left(\frac{a_1\frac{u}{v} + b_1}{a_2\frac{u}{v} + b_2}\right)$$

- Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ thì $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$. Khi đó nếu ta đặt $u = a_1x + b_1y$ thì phương trình có dạng

$$\frac{du}{dx} = F\left(\frac{u + c_1}{\lambda u + c_2}\right) = \varphi(u)$$

Đây là phương trình biến số phân ly

4 Phương trình vi phân tuyến tính

Gồm những phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Công thức tổng quát để giải phương trình trên là

$$y(x) = \exp\left(-\int p(x)dx\right)\left(\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx + C\right)$$

Hơn nữa, bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(x)dx\right)\left(\int_{x_0}^{x} q(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(x)dx\right)dx + C\right)$$

5 Phương trình Bernoulli

Gồm những phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

với $\alpha \neq 0, 1$. Để giải phương trình trên ta đặt $u = y^{1-\alpha}$. Khi đó ta đưa được về phương trình vi phân tuyến tính

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$

6 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình sau

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.1}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho

$$d(u(x,y)) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Khi đó nghiệm của phương trình (5.1) là $u(x,y) = C$

Tiêu chuẩn kiểm tra PTVP toàn phần Phương trình (5.1) là PTVP toàn phần nếu và chỉ nếu P, Q cùng các đạo hàm riêng của nó liên tục và $P'_y = Q'_x$. Khi đó hàm số $u(x, y)$ được tính bởi

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.1) là

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C \quad \text{hoặc} \quad \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Phương trình đưa được về dạng PTVP toàn phần Đối với dạng phương trình (5.1) nhưng $P'_y \neq Q'_x$, nhưng thỏa mãn một trong hai điều kiện

$$\varphi(x) = \frac{Q'_x - P'_y}{Q} \quad (5.2) \quad \text{hoặc} \quad \psi(y) = \frac{Q'_x - P'_y}{P} \quad (5.3)$$

- Nếu thỏa mãn (5.2) thì ta nhân hai vế của (5.1) với thừa số tích phân $\mu(x) = \exp\left(-\int \varphi(x)dx\right)$
- Nếu thỏa mãn (5.3) thì ta nhân hai vế của (5.1) với thừa số tích phân $\mu(y) = \exp\left(\int \psi(y)dy\right)$

Khi đó ta sẽ được PTVP toàn phần