KIẾN TRÚC MÁY TÍNH & HỢP NGỮ

ThS Vũ Minh Trí – vmtri@fit.hcmus.edu.vn

03 – Biểu diễn số thực

Đặt vấn đề

- Biểu diễn số 123.375_{10} sang hệ nhị phân?
- Ý tưởng đơn giản: Biểu diễn phần nguyên và phần thập phân riêng lẻ
  - Với phần nguyên: Dùng 8 bit ($[0_{10}, 255_{10}]$)

    $123_{10} = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 0111\ 1011_2$
  - Với phần thập phân: Tương tự dùng 8 bit

    $0.375 = 0.25 + 0.125 = 2^{-2} + 2^{-3} = 0110\ 0000_2$

→ $123.375_{10} = 0111\ 1011.0110\ 0000_2$

- Tổng quát công thức khai triển của số thập phân hệ nhị phân:

$$\boxed{\underbrace{x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0}.\underbrace{x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-m}} = \underbrace{x_{n-1}.2^{n-1} + x_{n-2}.2^{n-2}\ldots + x_0.2^0} + \underbrace{x_{-1}.2^{-1} + x_{-2}.2^{-2} + \ldots + x_{-m}2^{-m}}}$$

Đặt vấn đề

- Tuy nhiên…với 8 bit:
  - Phần nguyên lớn nhất có thể biểu diễn: 255
  - Phần thập phân nhỏ nhất có thể biểu diễn: $2^{-8} \sim 10^{-3} = 0.001$

→ Biểu diễn số nhỏ như 0.0001 (10^{-4}) hay 0.000001 (10^{-5})?

→ Một giải pháp: Tăng số bit phần thập phân

- Với 16 bit cho phần thập phân: min = $2^{-16} \sim 10^{-5}$
- Có vẻ không hiệu quả…Cách tốt hơn ?

→ Floating Point Number (Số thực dấu chấm động)

Floating Point Number ?

- Giả sử ta có số (ở dạng nhị phân)

  $X = 0.\underbrace{00000000000000}_{14 \text{ số } 0}11_2 = (2^{-15} + 2^{-16})_{10}$

- → $X = 0.11_2 * (2^{-14})_{10} (= (2^{-1} + 2^{-2}).2^{-14} = 2^{-15} + 2^{-16})$
- → Thay vì dùng 16 bit để lưu trữ phần thập phân, ta có thể chỉ cần 6 bit:

  X = 0.11 1110

- → Cách làm: Di chuyển vị trí dấu chấm sang phải 14 vị trí, dùng 4 bit để lưu trữ số 14 này
- → Đây là ý tưởng **cơ bản** của số thực dấu chấm động (floating point number)

Chuẩn hóa số thập phân

- Trước khi các số được biểu diễn dưới dạng số chấm động, chúng cần được chuẩn hóa về dạng: $\pm 1.F * 2^E$
  - *F: Phần thập phân không dấu (định trị - Significant)*
  - *E: Phần số mũ (Exponent)*
- Ví dụ:
  - $+0.09375_{10} = 0.00011_2 = +1.1 * 2^{-4}$
  - $-5.25_{10} = 101.01_2 = -1.0101 * 2^2$

Biểu diễn số chấm động

- Có nhiều chuẩn nhưng hiện nay chuẩn IEEE 754 được dùng nhiều nhất để lưu trữ số thập phân theo dấu chấm động trong máy tính, gồm 2 dạng:

(slide sau)

Biểu diễn số chấm động

- *Số chấm động chính xác đơn (32 bits):*

Sign	Exponent (biased)	Significand
1 bit	8 bits	23 bits

- *Số chấm động chính xác kép (64 bits):*

Sign	Exponent (biased)	Significand
1 bit	11 bits	52 bits

- **Sign:** Bit dấu (1: Số âm, 0: Số dương)
- **Exponent:** Số mũ (Biểu diễn dưới dạng số quá K (Biased) với
  - *Chính xác đơn:* K = 127 ($2^{n-1} - 1 = 2^{8-1} - 1$) với n là số bit lưu trữ Exponent
  - *Chính xác kép:* K = 1023 ($2^{n-1} - 1 = 2^{11-1} - 1$)
- **Significand (Fraction):** Phần định trị (phần lẻ sau dấu chấm)

Ví dụ

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = -5.25**
- **Bước 1:** Đổi X sang hệ nhị phân

  $X = -5.25_{10} = -101.01_2$

- **Bước 2:** Chuẩn hóa theo dạng **$\pm 1.F * 2^E$**

  $X = -5.25 = -101.01 = -1.0101 * 2^2$

- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số âm: bit dấu Sign = 1
  - Số mũ E = 2 → Phần mũ exponent với số thừa K=127 được biểu diễn:

    → Exponent = E + 127 = 2 + 127 = 129_{10} = $1000\ 0001_2$

  - Phần định trị = 0101 0000 0000 0000 0000 000 (Thêm 19 số 0 cho đủ 23 bit)

→ Kết quả nhận được: 1 1000 0001 0101 0000 0000 0000 0000 000

Câu hỏi

- Vì sao phần số mũ exponent không giữ nguyên lại phải lưu trữ dưới dạng số quá K (Dạng biased)?

Đáp án

- Sở dĩ Exponent được lưu trữ dưới dạng Biased vì ta muốn chuyển từ miền giá trị số có dấu sang số không dấu (vì trong biased, số k được chọn để sau khi cộng số bất kỳ trong miền giá trị gốc, kết quả là số luôn dương)

→ Dễ dàng so sánh, tính toán

Câu hỏi

- Khi muốn biểu diễn số 0 thì ta không thể tìm ra bit trái nhất có giá trị = 1 để đẩy dấu chấm động, vậy làm sao chuẩn hóa về dạng **$\pm 1.F * 2^E$?**
- Với số dạng $\pm 0.F * 2^{-127}$ thì chuẩn hóa được nữa không?
- Với K = 127, exponent lớn nhất sẽ là 255

→ Số mũ gốc ban đầu lớn nhất là 255 – 127 = +128

→ **Vô lý** vì với 8 bit có dấu ta không thể biểu diễn được số +128 ?

Đáp án

- Vì đó là những số thực đặc biệt, ta không thể biểu diễn bằng dấu chấm động ☺

Số thực đặc biệt

- Số 0 (zero)
  - Exponent = 0, Significand = 0
- Số không thể chuẩn hóa (denormalized)
  - Exponent = 0, Significand != 0
- Số vô cùng (infinity)
  - Exponent = 111…1 (toàn bit 1), Significand = 0
- Số báo lỗi (NaN – Not a Number)
  - Exponent = 111…1 (toàn bit 1), Significand != 0

Normalized number

- Largest positive normalized number: +1.[23 số 1] * 2^{127}

S	Exp	Significand (Fraction)
-	------------	--
0	1111 1110	1111 1111 1111 1111 1111 111

- Smallest positive normalized number: +1.[23 số 0] * 2^{-126}

S	Exp	Significand (Fraction)
-	------------	--
0	0000 0001	0000 0000 0000 0000 0000 000

- Tương tự cho số negative (số âm)

Denormalized number

- Largest positive denormalized number: +0.[23 số 1] * 2^{-127}

S Exp Significand (Fraction)

S	Exp	Significand (Fraction)
-	------------	--
0	0000 0000	1111 1111 1111 1111 1111 111

Tuy nhiên IEEE 754 quy định là +0.[23 số 1] * 2^{-126} vì muốn tiến gần hơn với "Smallest positive normalized number = +1.[23 số 0] * 2^{-126}"

- Smallest positive denormalized number: +1.[22 số 0]1 * 2^{-127}

S	Exp	Significand (Fraction)
-	------------	--
0	0000 0000	0000 0000 0000 0000 0000 001

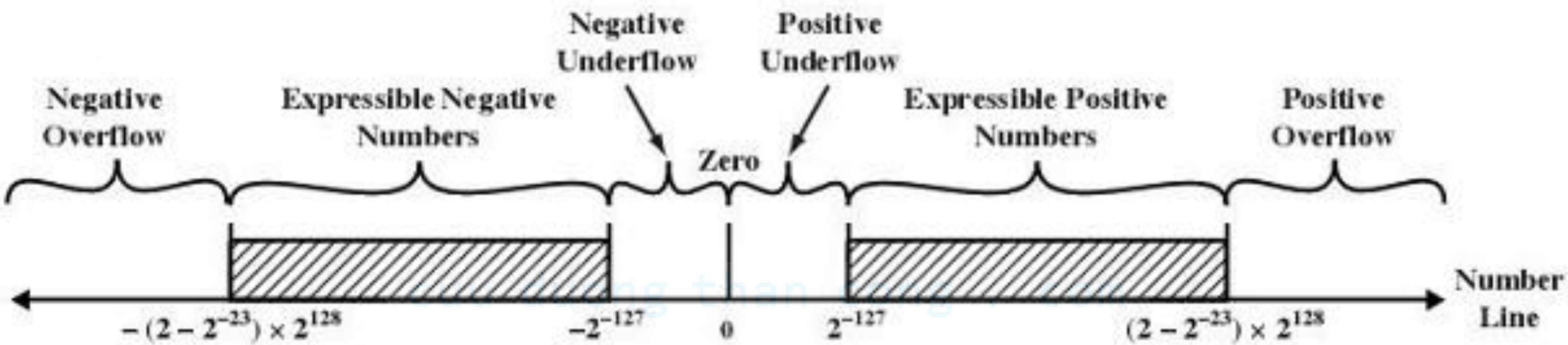
Tuy nhiên IEEE 754 quy định là +0.[22 số 0]1 * 2^{-126}

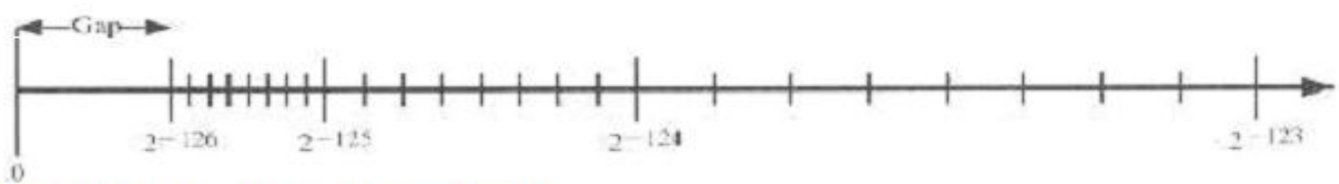
- Tương tự cho số negative (số âm)

Ví dụ: n = 4, m = 3, bias = 7

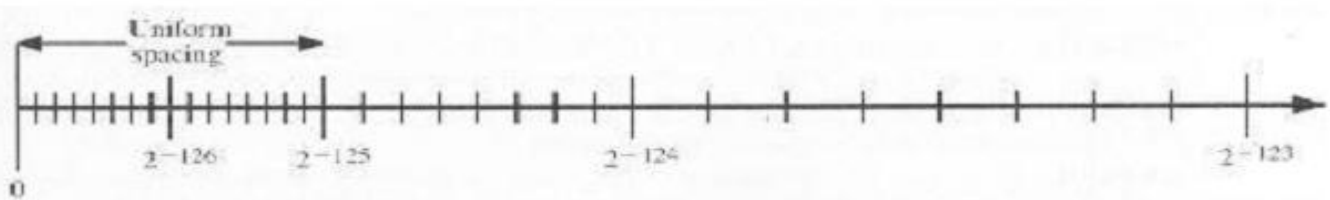
	s	exp	frac	E	Value	
	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	← closest to zero
Denormalized numbers	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	...					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	← largest denorm
	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	← smallest norm
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	...					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	← closest to 1 below
Normalized numbers	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	← closest to 1 above
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	...					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	← largest norm
	0	1111	000	n/a	inf	

Phân bố các số thực (32 bits)





Without denormalized numbers



With denormalized numbers

Chuẩn IEEE 754

Parameter	Format: Single	Single Extended	Double	Double Extended
Word width (bits)	32	≥ 43	64	≥ 79
Exponent width (bits)	8	≥ 11	11	≥ 15
Exponent bias	127	unspecified	1023	unspecified
Maximum exponent	127	≥ 1023	1023	≥ 16383
Minimum exponent	–126	≤ –1022	–1022	≤ –16382
Number range (base 10)	10^{-38}, 10^{+38}	unspecified	10^{-308}, 10^{+308}	unspecified
Significand width (bits)*	23	≥ 31	52	≥ 63
Number of exponents	254	unspecified	2046	unspecified
Number of fractions	2^{23}	unspecified	2^{52}	unspecified
Number of values	1.98×2^{31}	unspecified	1.99×2^{63}	unspecified

* not including implied bit

Bài tập 1

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = +12.625**
- **Bước 1:** Đổi X sang hệ nhị phân

  $X = -12.625_{10} = -1100.101_2$

- **Bước 2:** Chuẩn hóa theo dạng **$\pm 1.F * 2^E$**

  $X = -12.625_{10} = -1100.101_2 = -1.100101 * 2^3$

- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số dương: bit dấu Sign = 0
  - Số mũ E = 3 → Phần mũ exponent với số thừa K=127 được biểu diễn:

    → Exponent = E + 127 = 3 + 127 = 130_{10} = $1000\ 0010_2$
  - Phần định trị = 1001 0100 0000 0000 0000 000 (Thêm 17 số 0 cho đủ 23 bit)

→ Kết quả nhận được: 0 1000 0010 1001 0100 0000 0000 0000 000

Bài tập 2

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **X = -3050**
- **Bước 1:** Đổi X sang hệ nhị phân

  $X = -3050_{10} = -1011\ 1110\ 1010_2$
- **Bước 2:** Chuẩn hóa theo dạng **$\pm 1.F * 2^E$**

  $X = -3050_{10} = -\ 1011\ 1110\ 1010_2 = -1.01111101010 * 2^{11}$
- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số âm: bit dấu Sign = 1
  - Số mũ E = 11 → Phần mũ exponent với số thừa K=127 được biểu diễn:

    → Exponent = E + 127 = 11 + 127 = 138_{10} = $1000\ 1010_2$
  - Phần định trị = 0111 1101 0100 0000 0000 000 (Thêm 12 số 0 cho đủ 23 bit)

→ Kết quả nhận được: 1 1000 1010 0111 1101 0100 0000 0000 000

Bài tập 3

- Biểu diễn số thực sau theo dạng số chấm động chính xác đơn (32 bit): **$X = +1.1 * 2^{-128}$**
- **Lưu ý:**
  - Số X: positive number
  - X < Smallest positive normalized number: $+1.[23 \text{ số } 0] * 2^{-126}$
  - → số X là số không thể chuẩn hóa (denormalized number)
  - → **Chuyển X về dạng: $X = +0.011 * 2^{-126}$**
- **Bước 3:** Biểu diễn Floating Point
  - Số dương: bit dấu Sign = 0
  - Vì đây là số không thể chuẩn hóa → Phần mũ exponent được biểu diễn: $0000\ 0000_2$
  - Phần định trị = 0110 0000 0000 0000 0000 000

→ Kết quả nhận được: 0 0000 0000 0110 0000 0000 0000 0000 000

Homework

- Sách W.Stalling – Computer Arithmetic, đọc chương 9
- Đọc file 04_FloatingPoint.doc
- Trả lời các câu hỏi:
  - Overflow, underflow?
  - Cộng trừ nhân chia trên số thực?
  - Quy tắc làm tròn?
  - NaN: nguyên tắc phát sinh?
  - Quiet NaN và Signaling NaN?