Chuỗi lũy thừa (tiếp) - Chuỗi Fourier

I Chuỗi lũy thừa

1 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

1.1 Chuỗi Taylor - Chuỗi Maclaurin

Định lý. Nếu hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa tại điểm $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R \tag{1.1.1}$$

thì các hệ số của chuỗi lũy thừa được xác định bởi công thức

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Lưu ý. $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp tại x_0 chỉ là điều kiện cần để $f(x)$ có thể biểu diễn chuỗi lũy thừa tại x_0. Ví dụ hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{tại } x \neq 0 \\ 0 & \text{tại } x = 0 \end{cases}$$

có đạo hàm mọi cấp tại $x = 0$, nhưng không có khai triển thành chuỗi lũy thừa tại $x = 0$ do $f^{(n)}(0) = 0, \forall n$

Chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm $x = x_0$ chính là chuỗi (1.1.1). Nếu $x_0 = 0$, chuỗi (1.1.1) chuyển thành

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

và được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$

Nếu chuỗi Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ hội tụ đều đến hàm $f(x)$ trong lân cận $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ nào đó của điểm $x = x_0$ thì ta nói $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận đó

1.2 Điều kiện khai triển được thành chuỗi Taylor

Định lý 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm vô hạn cấp trong lân cận $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ của x_0, khi đó hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại lân cận đó khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Định lý 2. Nếu trong lân cận $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ của nghiệm hàm $f(x)$ có đạo hàm vô hạn cấp và tồn tại $M > 0$ sao cho $\left|f^{(n)}(x)\right| < M, \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0), n \in \mathbb{N}$ thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$

2 Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp

- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha + 1 - k) \right) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$

  Với $\alpha = -1$, ta có $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}$

3 Ứng dụng của chuỗi lũy thừa

3.1 Tính giới hạn hàm số

VD. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

Giải

Ứng dụng khai triển Maclaurin

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

Như vậy

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{4}$$

3.2 Tính gần đúng

VD. Tính gần đúng tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

với sai số không quá 10^{-3}

Giải

Ta có

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Như vậy

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!.(2n+1)^2}$$

Sai số không vượt quá 10^{-3} khi

$$|R_n| \le \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!.(2n+1)^2}\right| = \frac{1}{(2n)!.(2n+1)^2} \le 10^{-3} \text{ hay } n \ge 3$$

Do đó

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n)!.(2n+1)^2} = 0.946$$

II Chuỗi Fourier

1 Chuỗi lượng giác - Chuỗi Fourier

1.1 Chuỗi lượng giác

Chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \tag{2.1.1.1}$$

được gọi là chuỗi lượng giác. Nếu như các chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$$

hội tụ, thì chuỗi lượng giác (2.1.1.1) hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$

1.2 Chuỗi Fourier

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[-\pi, \pi]$, tuần hoàn với chu kỳ 2π. Đặt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

Khi đó

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

là khai triển Fourier của hàm số $f(x)$

2 Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về hàm $f(x)$ thì ta nói hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier.

Định lý (Dirichlet) Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$ và tuần hoàn chu kỳ 2π thì chuỗi Fourier của nó hội tụ về $f(x)$ tại các điểm liên tục của $f(x)$ và hội tụ về $\dfrac{f^+(x) + f^-(x)}{2}$ tại các điểm gián đoạn của $f(x)$.

VD. Khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Giải

Ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Vậy khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ **tại các điểm liên tục** là

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\sin nx \tag{2.2.1}$$

Tại $x = 0$ thì chuỗi (2.2.1) hội tụ về $\dfrac{1 + (-1)}{2} = 0$

3 Khai triển Fourier của hàm số chẵn, lẻ

- Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos kx dx \quad , \quad b_k = 0$$

- Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin kx dx \quad , \quad a_k = 0$$

VD. Tìm khai triển Fourier của hàm số $f(x) = x^3$ trong đoạn $[-\pi, \pi]$

Giải

Do $f(x) = x^3$ là hàm số lẻ nên

$$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^3 \sin(\pi x) = (-1)^n\left(-\frac{2\pi^2}{n} + \frac{12}{n^3}\right)$$

Như vậy ta có khai triển Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(-\frac{2\pi^2}{n} + \frac{12}{n^3}\right)\sin nx$$

4 Khai triển Fourier của hàm số có chu kỳ tùy ý

Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2ℓ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\ell, \ell]$. Ta thực hiện phép biến đổi

$$x' = \frac{\pi x}{\ell}$$

Khi đó hàm số

$$F(x') = f\left(\frac{\ell x'}{\pi}\right) = f(x)$$

sẽ tuần hoàn với chu kỳ 2π. Áp dụng công thức khai triển Fourier cho hàm $F(x)$, ta được

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} F(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} F(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

VD. Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\ell = 4$ và $f(x) = |x|$ trên đoạn $[-2, 2]$. Áp dụng khai triển Fourier vừa tìm được để tính tổng

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Giải

Ta có

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x|dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x|\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x|\sin\frac{n\pi x}{2}dx = 0$$

Như vậy

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Tại $x = 0$ thì

$$0 = f(0) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5 Khai triển Fourier của hàm số trên đoạn bất kỳ

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Ta thực hiện các bước sau

- Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ không nhỏ hơn $(b - a)$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$

- Khai triển hàm $g(x)$ thành chuỗi Fourier trên đoạn $[a, b]$. Khi đó tổng chuỗi vừa tìm được sẽ bằng $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ (Có thể trừ những điểm gián đoạn)

Lưu ý. Vì hàm số $g(x)$ ta chọn không duy nhất nên có thể có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$

VD. Khai triển hàm số $f(x) = \sin x$ trên đoạn $[0, \pi]$ thành tổng của các hàm $\cos$

Giải

Chọn hàm $g(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{nếu } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{nếu } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Hàm $g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2\ell = 2\pi$ và $g(x) = f(x)$ trên đoạn $[0, \pi]$. Nhận thấy $g(x)$ là hàm chẵn trên $[-\pi, \pi]$. Do đó

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{2(-1)^{n+1} - 2}{\pi(n^2 - 1)}$$

Như vậy

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} - 2}{\pi(n^2 - 1)} \cos(2nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n)^2 - 1} \tag{2.5.1}$$

Chuỗi (2.5.1) cũng là chuỗi tổng ta cần tìm