Chuỗi hàm số

I Chuỗi hàm số hội tụ

Cho dãy hàm số $\{u_n(x)\}$ xác định trên X. Ta định nghĩa chuỗi hàm số

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \tag{1.1}$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ tại x_0 $\Leftrightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ hội tụ.
Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của (1.1) được gọi là **miền hội tụ**. Tổng của chuỗi hàm số là hàm số xác định trong miền hội tụ của nó.

VD. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau: (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$

Giải

(a) Xét tại $x_0 \in \mathbb{R}$ cố định. Ta có

$$\left|\frac{\cos nx_0}{n^2+x_0^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Mà ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ $(\alpha = 2 > 1)$, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx_0}{n^2+x_0^2}$ hội tụ với $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.
Vậy miền hội tụ của chuỗi là $\mathbb{R}$
(b) Xét tại $x_0 \in \mathbb{R}$ cố định. Đặt $a_n = x_0^{n-1}$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_0^n}{x_0^{n-1}}\right| = |x_0|$$

Theo tiêu chuẩn D'alambert:

- Nếu $|x_0| > 1$ thì chuỗi phân kỳ
- Nếu $|x_0| < 1$ thì chuỗi hội tụ
- Nếu $|x_0| = 1$, hay $x_0 = \pm 1$, thay vào chuỗi ban đầu, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$, cả hai chuỗi này đều phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-1, 1)$

II Chuỗi hàm số hội tụ đều

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên tập X nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho với $\forall n > N$ thì $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x$

Tiêu chuẩn Cauchy Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập $X \subset \mathbb{R}$ khi và chỉ khi với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn với $\forall p > q > N$, ta có

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$$

VD. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$

Giải

Đặt $a_n = \frac{1}{n + x^2}$. Khi đó với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$ thì $\{a_n\}$ là dãy dương giảm dần về 0. Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz. Từ đó ta có

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \leq \frac{(-1)^n}{k + 1 + x^2}$$

Xét với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| = \left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n + 1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n + 1}$$

Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, chọn $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$. Khi đó với $\forall n > N$ thì $\frac{1}{n + 1} < \varepsilon$, hay

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$$

Như vậy chuỗi đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

Tiêu chuẩn Weierstrass Nếu ta có $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, x \in X$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên X

VD. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n^2}$

Giải

Với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

III Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý 1: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X, $u_n(x)$ liên tục trên X với $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó $S(x)$ liên tục trên X và

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0), \forall x_0 \in X$$

Định lý 2: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a,b]$, $u_n(x)$ liên tục trên $[a,b]$ với $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(x)dx\right)$$

Định lý 3: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên (a,b), $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a,b) với $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên (a,b) và

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$$