PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

1. Phương trình tuyến tính cấp 2 có hệ số là hằng số

a, Phương trình thuần nhất

Phương trình vi phân có dạng:

$$y" + py' + q = 0$$

$\star$ Giải phương trình: $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$

• Nếu PTĐT có hai nghiệm thực phân biệt $\alpha_1 \neq \alpha_2$ thì NTQ của phương trình là :

$$y = (C_1x + C_2)e^{a_2x}$$

• Nếu PTĐT có nghiệm kép $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ thì NTQ của phương trình là:

$$y = (C_1x + C_2)e^{\alpha x}$$

• Nếu PTĐT có hai nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$ thì NTQ của phương trình là:

$$y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x$$

VD1: Giải PTVP: $y" - 3y' + 2y = 0$

Lời giải:

Ta xét phương trình $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$

Vậy phương trình vi phân có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

VD2: Giải PTVP: $y" + 4y' + 4y = 0$

Lời giải:

Ta xét phương trình $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -2$

Vậy phương trình vi phân có nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-2x}(C_1x + C_2), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b, Phương trình không thuần nhất

NTQ của PT không thuần nhất = NTQ của PT thuần nhất+ một nghiệm riêng

Vế phải $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ là một đa thức cấp n của x.

- Nếu α không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y = e^{\alpha x}Q_n(x)$
- Nếu α là nghiệm đơn của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới sạng $y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$
- Nếu α là nghiệm kép của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$

VD1: Giải PTVP: $y" + 3y' - 4y = x$

Lời giải:

Ta xét phương trình $\alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -4$ Phương trình vi phân thuần chất có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\alpha = 0 \to y = Ax + B$, thay vào ta có:

$$-4Ax + 3A - 4B = x, \forall x \leftrightarrow A = -\frac{1}{4}; B = -\frac{3}{16} \to y = \frac{-x}{4} + \frac{-3}{16}$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} = \frac{x}{4} - \frac{3}{16}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

VD2: Giải PTVP: $y" - 2y' + y = (12x + 4)e^x$

Lời giải:

Ta xét phương trình đặc trưng: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

Phương trình vi phân thuần nhất có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^x + x C_2 e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\alpha = 1 \to y = x^2 e^x (Ax + B) \to y' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx) \to y" = e^x(Ax^3 + Bx^2) + 2e^x(3Ax^2 + 2Bx) + e^x(6Ax + 2B)$, Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$6Ax + 2B = 12x + 4, \forall x \leftrightarrow A = 2; B = 2 \to y = 2x^2 e^x (x + 1)$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x (x + 1), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Vế phải $f(x) = P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x$ với $P_m(x), P_m$là các đa thức cấp m, n tương ứng của x.Đặt $l = \max m, n$.

- Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y = Q_1(x) \cos \beta x + R_1(x) \sin \beta x$$

- Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y = x[Q_1(x) \cos \beta x + R_1(x) \sin \beta x]$$

VD1: Giải PTVP: $y" + y = x \sin x$

Ta xét phương trình $\alpha^2 + 1 = 0 \leftrightarrow \alpha = \pm i$

Phương trình vi phân thuần nhất có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\rightarrow$ nghiệm riêng có dạng:

$$y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

Tính $y', y"$ và thay vào phương trình ban đầu ta có:
$[4Cx + 2(A + D)]\cos x + [-4Ax + 2(C - B)]\sin x = x \sin x.\forall x \in \mathbb{R}$
$\leftrightarrow 4C = 0, 2(A + D) = 0, -4A = 1, 2(C - B) = 0 \leftrightarrow A = -\frac{1}{4}; B = 0; C = 0; D = \frac{1}{4}$
$\rightarrow y = \frac{x}{4}.(x \sin x - x \cos x)$
Vậy nghiệm tổng quát là: $y - C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}(\sin x - \cos x), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

VD2:

$$y" + 9y = \cos 2x$$

Ta xét phương trình $\alpha^2 + 9 = 0 \leftrightarrow \alpha = \pm 3i$
Phương trình vi phân thuần nhất có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Nghiệm riêng có dạng:

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

Tính $y', y"$ và thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$5A\cos 2x + 5B\sin 2x = \cos 2x \leftrightarrow A = \frac{1}{5}vB = 0$$
$$\rightarrow y = \frac{1}{5}\cos 2x$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 2x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Vế phải $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x vi P_m(x), P_m$ là các đa thức cấp m, n tương ứng của x.
Đặt $l = maxm.n$

- Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y = e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + R_1(x)\sin\beta x]$$

- Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y = xe^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + R_1(x)\sin\beta x]$$

VD1: $y" - 3y' + 2y = e^x \sin x$
Xét phương trình tuyến tính thuần nhất: $y" - 3y' + 2y = 0$

$\rightarrow$ Phương trình đặc trưng: $k^2 - 3k + 2 = 0 \leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2 \leftrightarrow y = C_1e^x + C_2e^x$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ta có $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$không là nghiệm của phương trình đặc trưng

$\rightarrow$ Nghiệm riêng có dạng: $y = e^x(A\cos x + B\sin x$

$\rightarrow y' = e^x[(A+B)\cos x + (-A+B)\sin x]$

$\rightarrow y" = e^x(2B\cos x - 2A\sin x)$

Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$e^x[-(A+B)\cos x + (A-B)\sin x] = e^x\sin x, \forall x$$

$\leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1e^x + C_2e^x + \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$$

VD2: $y" + y - 2\cos x\cos 2x$

$\leftrightarrow y" + y = \cos x + \cos 3x(1)$

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất: $y" + y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \leftrightarrow k_1 = i, k_2 = -i \leftrightarrow y = C_1\cos x + C_2\sin x$là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ta có: $\beta_1 = 1; \beta_2 = 3 \leftrightarrow \pm i\beta_1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\pm i\beta_2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng"

$\rightarrow$ Nghiệm riêng có dạng" $y = x(A\cos(x) + B\sin(x)) + C\cos(3x) + D\sin(3x)$

$y' = x(B\cos(x) - A\sin(x)) + A\cos(x) + B\sin(x) - 3C\sin(3x) + 3D\cos(3x)$

$y" = x(-A\cos(x) - B\sin(x)) - 9C\cos(3x) - 9D\sin(3x) + 2B\cos x - 2A\sin x$

Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$2B\cos x - 2A\sin x - 8C\cos 3x - 8\sin 3x = \cos x + \cos 3x\forall x$$
$$\leftrightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}, C = \frac{-1}{8}, D = 0 \rightarrow y = \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$$

c. Phương trình Euler: $x^2y" + axy' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}(1)$

Cách giải:

- Đặt $|x| = e^t \rightarrow t = ln|x|$

- $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

Cần phải xét 2 trường hợp là $x > 0$ và $x < 0$

- Với $x > 0 \to y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} \to x_{y'} = \frac{dy}{dt}$
- $y" = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}) = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) \to$ $x^2y" = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

Thay vào phương trình ban đầu ta có: $\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$
là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi
Tương tự với $x < 0 \to (1) \leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + (1-a)\frac{dy}{dt} + by = 0$" Ví dụ:
1/ $x^2y" + 2xy' - 6y = 0(1)$

- Ta có: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình
- Đặt $|x| = e^t \to t = ln|x|$
- Với $x > 0 \to t = ln|x| \to y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, y" = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$

$\to xy' = \frac{dy}{dt}, s^2y" = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$
Thay vào phương trình ban đầu:
$\to \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0$
$\leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0(2)$
(2) có phương trình đặc trưng là:

$$r^2 + r - 6 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 2 \\ r = -3 \end{array}\right.$$

$\to$Nghiệm tổng quát của (2) là $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\to$ Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1e^{2lnx} + C_2e^{-3lnx} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2}, C_1, C_2\ in\mathbb{R}, x > 0$$

- Với $x > 0 \to t = ln(-x) \to dt = \frac{-1}{x}dx$

Ta có: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \to \frac{dy}{dt} = -xy'$
$y" = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy}{x^2dt} - \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \to x^2y" = \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$
Thay vào (1) $\to \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2\frac{-dy}{dt} - 6y = 0$

$\rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 0(3)$

(3) có phương trình đặc trưng là :$r^2 - r - 6 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 3 \\ r = -2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm tổng quát của (3) là $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Nghiệm tổng quát của (1)là:

$$y = C_1e^{3ln(-x)} + C_2e^{-2ln(-x)} = C_1(-x)^3 + \frac{C_2}{(-x)^2} = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2}, x < 0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2.$x^2y" + xy' + y = x, x > 0$ (1)

- Vì $x > 0 \rightarrow$ Đặt $x = e^t \rightarrow t = lnx$

$\rightarrow xy' = \dfrac{dy}{dt}, x^2y" = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$

$\rightarrow (1) \leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^t$

$\leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + y = e^t(2)$

Xét phương trình thuần nhất $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0(3)$ có phương trình đặc trưng là: $k^2 + 1 = 0(4) \rightarrow k = \pm i$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (3) là:

$$\overline{y} = e^{0t}(C_1 \cos x + C_2 \sin t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Ta có: $f(t) = e^t \rightarrow a = 1$ không là nghiệm của (4)
  $\rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình (2) là: $Y = ae^t$
  Ta có:

$$Y' = ae^t$$
$$Y" = ae^t$$
$$Y = ae^t$$
$$\leftrightarrow Y" + Y = 2ae^t = e^t \text{ (Theo (2))}, \forall t$$
$$\rightarrow 2a = 1 \leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Nghiệm riêng của phương trình (2) là $Y = \dfrac{e^t}{2}$.

Nghiệm tổng quát của (2) là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^t}{2}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là: $y = C_1 \cos lnx + C_2 \sin lnx + \dfrac{x}{2}, x > 0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

(chỉ dành cho nhóm ngành 1)

1. Định nghĩa"

Hệ n phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 có dạng: $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n) \\ y_2' = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n) \\ ... \\ y_n' = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n) \end{cases}$

- Khi n =2, hệ có dạng $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$
- Điều kiện có nghiệm: Nếu $y_i' = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n)$ liên tục và $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, ...y_n)$ liên tục trên $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất/
- Ta nói $(y_1, y_2, ...y_n)$với $y_i = \phi_i(x, c_1, c_2, ...c_n)$ là nghiệm tổng quát của hệ.
- Với $y_i = \phi_i(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ là nghiệm riêng của hệ.

2. Cách giải: Ta dùng cách khử những hàm số chưa biết từ các phương trình của hệ xong sâu đó phương trìnhvi phân cấp cao

3. Hệ ptvp tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số

Hệ ptvp cấp 2: $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$

- Phương pháp 1: Giải phương trình đặc trưng (tham khảo)
- Phương pháp 2: Phương trình toán tử (tham khảo)
- Phương pháp 3: Phương pháp khử (Dùng nhiều nhất)

Ví dụ về phương pháp khử:

1.$\begin{cases} y' = y + 2z(1) \\ (*)z' = 4y + 3z(2) \end{cases}$ Từ (1) $\rightarrow y' = y' + 2z'$ Từ (*) $\begin{cases} y" = y' + 2z' \\ z' = 4y + 3z \\ z = \dfrac{1}{2}(y' - y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y" = y' + 2(4y + \dfrac{3}{2}(y' - y)) \\ z = \dfrac{1}{2}(y' - y) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} y" - 4y' - 5y = 0(3) \\ z = \dfrac{1}{2}(y' - y) \end{cases}$ (3) có phương trình đặc trưng: $r^2 - rl - 5 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} r = -1 \\ r = 5 \end{array} \right.$

Phương trình (3) có nghiệm tổng quát là y = $C_1e^{-x} + C_2e^{5x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\rightarrow z = \dfrac{1}{2}(y' - y) = \dfrac{1}{2}(-C_1e^{-x} + 5C_2e^{5x} - C_1e^{-x} - C_2e^{5x}) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{5x}$

$\to$ Phương trình có nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$ (1) $\leftrightarrow \begin{cases} x" = 2x' + y' \\ y' = 3x + 4y \\ y = x' - 2x \end{cases}$

$\to \begin{cases} x" = 2x' + 3x + 4(x' - 2x) \\ y = x' - 2x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x" - 6x' + 5x = 0(2) \\ y = x' - 2x(3) \end{cases}$

(2) có phương trình đặc trưng $r^2 + 6r + 5 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 1 \\ r = 5 \end{array}\right.$

(2) có nghiệm tổng quát: $x = C_1e^t + C_2e^{5t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(3)$\to$ $y = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2C_2e^{5t} = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t} \end{cases}$$