2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$

Ta thấy với mọi $x \in [1,+\infty)$ thì $0 < \arctan x \le \frac{\pi}{2}$, mà $\frac{1}{x^2}, \forall x \in [1,+\infty)$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2}.\arctan x \le \frac{1}{x^2}.\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx \le \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2}.\frac{1}{x^2}dx$ (1)

Mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2}.\frac{1}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ vì s=2>1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$ hội tụ.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Ta thấy, khi $x \to +\infty$ thì $x^2 - 2x + 2 \to +\infty$ nên $x^2 - 2x + 2$ là 1 VCL. Khi đó, $x^2 - 2x + 2 \sim x^2$.

Ta chọn $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ta thấy $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2-2x+2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}.\frac{x^2}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x+2} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ với $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ (1)

Ta có $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2}dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ (2)

Mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ vì s=2>1. (3)

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_t^1 = \lim_{t\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{t}\right) = -1+0 = -1$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ hội tụ. (4)

Từ (2), (3) và (4) suy ra $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ. (5)

Từ (1) và (5) suy ra $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ.