CHƯƠNG 1. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

1.1. MA TRẬN

1.1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. Cho các số nguyên dương m,n. Ta gọi một ma trận thực cỡ $m\times n$ là tập hợp gồm mn hệ số thực được xếp thành bảng gồm m hàng và n cột, như sau:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hệ số a_{ij} đứng ở hàng thứ i và cột thứ j trong A gọi là hệ số (i,j) của ma trận A.

Hàng thứ i trong A bao gồm các hệ số có chỉ số thứ nhất bằng i, ký hiệu $h_iA=(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$.

Cột thứ j trong A bao gồm các hệ số có chỉ số thứ hai bằng j, ký hiệu $c_jA=\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m\times n$ được ký hiệu là $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ma trận $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ còn được viết là $A=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$.

Ma trận có n hàng và n cột được gọi là ma trận vuông cấp

n . Trong ma trận vuông A cấp n, tập hợp các hệ số a_{ii},

n $1 \le i \le n$, được gọi là các hệ số đường chéo của ma trận. Tập hợp các hệ số đường chéo được gọi là đường chéo của ma trận.

Ma trận cỡ $m \times 1$ gồm m hàng và 1 cột gọi là *ma trận cột*.

Ma trận cỡ $1 \times n$ gồm 1 hàng và n cột gọi là *ma trận hàng*.

Ma trận cỡ 1×1 gồm chỉ một hệ số. Ta đồng nhất ma trận với chính hệ số đó.

Ma trận cỡ $m \times n$ có tất cả các hệ số đều bằng 0 được gọi là ma trận không, ký hiệu là O hay $\mathrm{O}_{m\times n}$.

Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ được gọi là ma trận *tam giác trên* (tương ứng, tam giác dưới) nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ (tương ứng, $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$). Ma trận tam giác trên hay tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác trên,

$B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác dưới. (Hệ số ký hiệu bởi "$*$" nhận giá trị thực tùy ý).

Ma trận vuông có mọi hệ số nằm ngoài đường chéo đều bằng 0 gọi là *ma trận đường chéo* (hay gọi tắt là *ma trận chéo*).

Ví dụ:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Như vậy, ma trận chéo vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

Ma trận chéo có mọi hệ số đường chéo đều bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị*. Ma trận đơn vị cấp n được biểu diễn là

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.2. Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và mọi hệ số ở các vị trí tương ứng đều bằng nhau. Ký hiệu $A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ a_{ij} = b_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \end{cases}$$

1.1.2. Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa 1.1.3. Cho các ma trận cùng cỡ $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Tổng của hai ma trận A và B, ký hiệu là $A + B$; tích của số α với ma trận A, ký hiệu là αA, là các ma trận được xác định lần lượt bởi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),\ \alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Tổng $A+(-1)B$ gọi là *hiệu* của ma trận A và ma trận B, ký hiệu là $A-B$. Rõ ràng $A\pm B$ và $\alpha A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó,

(i) . $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+4 & 6 & y+7 \\ -7 & 2x & y+8 \end{pmatrix}$

(ii) . $2C=2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) . $2A-3B=2\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8-3x & 7 & 14-3y \\ -14 & -6x & 16-3y \end{pmatrix}$

Các tính chất của phép cộng hai ma trận và phép nhân một số với ma trận được cho trong định lý sau đây.

Định lý 1.1.5. *Nếu* $A,B,C\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *thì:*

1. $A+B=B+A$ *(tính giao hoán của phép cộng).*
2. $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$

tính kết hợp của phép cộng).

3. *Tồn tại duy nhất một ma trận trong* $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, ký hiệu là* O *sao cho :* $\mathrm{O}+A=A+\mathrm{O}=A, \forall A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
4. *Với mỗi* $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, có duy nhất một ma trận trong* $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *, ký hiệu là* $-A$ *sao cho* $A+(-A)=(-A)+A=\mathrm{O}$ *. Ta nói* $-A$ *là ma trận đối của* A.
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
6. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

8. $1.A = A$.

9. $\alpha A = \mathrm{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ A = \mathrm{O} \end{array}\right.$.

Việc chứng minh các tính chất trên tương tự nhau. Để làm ví dụ, ta chứng minh tính chất kết hợp của phép cộng ma trận: $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*)

Giả sử $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ và $C = (c_{ij})$.

- Trước hết, theo định nghĩa phép cộng thì hai ma trận ở vế phải và vế trái của (*) có cùng cỡ.
- Xét hệ số (i, j) ở vế trái của (*): $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$, trong khi hệ số bên vế phải của (*) là $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$. Như vậy, (*) đúng do tính kết hợp của phép cộng trên $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 1.1.6. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm $D = [-A + B - 3(B - 2A + 2C)] - [4(A - B) + 3B - 5C]$.

Trước hết, biến đổi rút gọn như sau:

$$D = [-A + (B - 3B + 6A - 6C)] - [4A - 4B + 3B - 5C]$$
$$= (-A - 2B + 6A - 6C) - (4A - B - 5C)$$
$$= -A - 2B + 6A - 6C - 4A + B + 5C = A - B - C.$$

Thay vào biểu thức của ta có:

$$=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-x & 4 & 10-y \\ -8 & -2x-2 & 8-y \end{pmatrix}$$

Để định nghĩa phép nhân hai ma trận, trước hết ta đưa ra khái niệm tích của ma trận hàng và ma trận cột như sau:

Định nghĩa 1.1.7. Cho $A=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\in \mathrm{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ và $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ .Tích của và là ma trận cỡ 1×1 được cho bởi: $AB=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$.

Ví dụ 1.1.8. Cho $A=(1 \quad 2 \quad 3)$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Khi đó,

$$AB=(1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=(1.0+2(-2)+3.2)=(2).$$

AC không tồn tạivì cỡ *A* và *C* là không thích hợp để lấy tích theo định nghĩa (do *A* có 3 hệ số và *C*có 2 hệ số).

Định nghĩa 1.1.9. Cho $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B\in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Tích của ma trận *A* và ma trận*B* là ma trận $AB=(c_{ij})\in \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ có đúng xác định bởi tích của hàng*i* trong *A* với cột *j* trong *B*:

$$c_{ij}=(h_iA)(c_jB), 1\le i\le m, 1\le j\le n .$$

Từ định nghĩa suy ra tích *AB* chỉ xác định khi và chỉ khi số hệ số có trong mỗihàng của *A* phải bằng số hệ số có trong mỗi cột của B, nghĩa là số cột của ma trận đứng trước phải bằng số hàng của ma trận đứng sau. Xét cụ thể hệ số *(i, j)*của tích *AB*ta có:

$$c_{ij} = (h_i A)(c_j B) = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}).\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} . \qquad (**)$$

Nếu A là ma trận vuông cấpn thì các tích: AA;AAA; … luôn tồn tại và khi đó ta viết:

$$A^2 = AA,\ A^3 = AAA,\ AA...A = A^k .$$

Ta ký hiệu thêm $A^0 = I_n$ và $A^1 = A$.

Như vậy, ta đã định nghĩa $A^k, \forall k \in \mathbb{N}$

Ví dụ 1.1.10. Tính tích AB với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lần lượt tính các hệ số của tích $AB = (c_{ij})$ theo công thức (**) ta có:

$$c_{11} = (h_1A)(c_1B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.3 + 3.1 + 0.2 + 1.0 = 9$$

$$c_{12} = (h_1A)(c_2B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2.1 + 3.2 + 0.3 + 1.5 = 13$$

$$c_{21} = (h_2A)(c_1B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.3 - 1.1 + 2.2 + 1.0 = 15$$

$$c_{22} = (h_2A)(c_2B) = (4 \quad -1 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 4.1 - 1.2 + 2.3 + 1.5 = 13$$

Từ đó $AB = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 1.1.11. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & 7 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Không tính toàn bộ tíchAB hãy tìm $h_2(AB)$ và $c_1(AB)$.

- Có: $h_2(AB) = [(h_2A)(c_1B) \quad (h_2A)(c_2B)] = (5 \quad 1)$, vì:

$$h_2A.c_1B = (-1 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1).4 + 3.7 + (-4).3 = 5$$

$$h_2A.c_2B = (-1 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1).(-6) + 3.1 + (-4).2 = 1$$

- Tương tự, ta tính được $c_1(AB) = \begin{pmatrix} h_1A.c_1B \\ h_2A.c_1B \\ h_3A.c_1B \\ h_4A.c_1B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Định lý 1.1.12. *Nếu $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ thì:*

1. $c_j(AB) = A(\mathrm{c}_j B)$, *với* $1 \le j \le p$.
2. $h_i(AB) = (h_iA).B$, *với* $1 \le i \le m$.
3. $AB = (A.c_1B \quad A.c_2B \quad \cdots \quad A.c_pB)$.
4. $AB = \begin{pmatrix} (h_1A).B \\ (h_2A).B \\ \vdots \\ (h_mA).B \end{pmatrix}$.

Chứng minh:

1. $c_j(AB) = \begin{pmatrix} h_1A.c_jB \\ h_2A.c_jB \\ \vdots \\ h_mA.c_jB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1A \\ h_2A \\ \vdots \\ h_mA \end{pmatrix}.c_jB = A.c_jB, \ \ 1 \le j \le p.$

2. $h_i(AB) = (h_iA.c_1B \quad h_iA.c_2B \quad \cdots \quad h_iA.c_pB)$

$= (h_iA)(c_1B \quad c_2B \quad \cdots \quad c_pB) = (h_iA)B$, với $1 \le i \le m$.

3. và 4. là hệ quả của 1. và 2.□

Ví dụ 1.1.13. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Không cần tính toàn bộ ma trận tích mà hãy tìm hàng hay cột đã chỉ ra: $c_2(AB), h_3(AB)$, $h_1(AB)C$.

- $c_2(AB) = A.c_2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- $h_3(AB) = h_3A.B = (0 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (-3 \quad 2)$.

- $h_1(AB)C = h_1(AB).C = ((h_1A).B).C = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right).C$

$$= (0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\; -4 \quad 2 \quad 0 \;)$$

Định lý 1.1.14. *Cho A, B, C là các ma trận với cỡ thích hợp để các phép toán là có nghĩa và $\alpha \in \mathbb{R}$ .Khi đó:*

1. $(AB)C = A(BC) = ABC$ (tính kết hợp của phép nhân).

2. $A(B+C) = AB + AC$.

3. $(A+B)C = AC + BC$.

4. $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

5. $I_m A = A I_n = A$ với mọi $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Chứng minh: Các chứng minh được tiến hành tương tự, ở đây ta chứng minh tính chất 1. như là một ví dụ minh họa.

Giả sử A có cỡ $m \times n$, B có cỡ $n \times p$ và C có cỡ $p \times q$. Khi đó,ABcó cỡ $m \times p$ nên $(AB)C$ có cỡ $m \times q$. Mặt khác, A có cỡ $m \times p$, còn BC có cỡ $n \times p$ nên $A(BC)$ cỡ $m \times q$. Như vậy, các ma trận $(AB)C$ ở vế trái và $A(BC)$ ở vế phải có cùng cỡ $m \times q$.

Xét hệ số (i, j) của $(AB)C$ ở vế trái và hệ số (i, j) của $A(BC)$ ở vế phải, với mọi $i = 1...m, j = 1...q$. Hệ số (i, j) ở vế trái bằng

$$\sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kh}\right) c_{hj} \quad (*).$$

Do tổng hữu hạn các số thực có tính chất phân phối đối với phép nhân nên:

$$\sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kh}\right) c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{hj}\right)$$

bằng với hệ số thứ (i, j) của vế phải. □

Chú ý rằng, khác với phép nhân các số thực, *phép nhân các ma trận không thỏa mộtsố tính chất thông thường* mà phép nhân với số vốn có. Cụ thể như sau:

1. *Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán:*

$$\exists A, \exists B : AB \neq BA$$

2. *Phép nhân ma trận không có luật giản ước: Từ* $AB = AC$ *và* $A \neq \mathrm{O}$ *không suy ra được* $B = C$. *Tương tự, từ* $BA = CA$ *và* $A \neq \mathrm{O}$ *không suy ra được* $B = C$.

3. *Nếu tích* $AB = O$ *thì không thể kết luận hoặc* $A = \mathrm{O}$ *hoặc* $B = \mathrm{O}$ *(vì* $\exists A \neq \mathrm{O}$, $\exists B \neq \mathrm{O} : AB = \mathrm{O}$*).*

Ví dụ 1.1.15.

Cho $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Nếu thì , tức là hằng đẳng thức về bình phương của tổng hai số thực sẽ không còn đúng với bình phương của tổng hai ma trận vuông bất kỳ.

Mặc dù phép nhân 2 ma trận không có luật giản ước, nhưng trong trường hợp đặc biệt ta vẫn có quy tắc giản ước sau đây, rất có lợi cho một số áp dụng về sau:

Định lý 1.1.16. *Nếu* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *thỏa mãn* $AX = BX$ *với mọi ma trận cột* $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *thì* $A = B$.

Chứng minh. Vì $AX = BX$ đúng với mọi ma trận cột $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

nên với ma trận cột $X = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ta sẽ có

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1A = c_1B.$$

Lý luận tương tự với $X = E_i$ thì có $c_iA = c_iB$ với mọi $i = 1 \ldots n$

$\Rightarrow A = B$ vì chúng có các cột tương ứng bằng nhau. □

Định nghĩa 1.1.17. Cho ma trận *A*. Ta gọi ma trận chuyển vị của*A* là ma trận thu được từ *A*bằng cách dịch chuyển các hàng (hay cột) trong *A* thành các cột (hay hàng) tương ứng. Ta ký hiệu A^T ma trận chuyển vị của *A*.

Phép biến đổi một ma trận thành ma trận chuyển vị của nó được gọi là phép chuyển vị ma trận.

Từ định nghĩa suy ra nếu $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ thì
$A^T = (a'_{ji}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, trong đó, $a'_{ji} = a_{ij}$, khi
$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Định lý 1.1.18.

1) $(A^T)^T = A$ *với bất kỳ ma trận* A.

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *với bất kỳ hai ma trận* $A, ,B$ *có cùng cỡ.*

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *với bất kỳ ma trận* A *và bất kỳ số thực* α.

4) $(AB)^T = B^T A^T$ *nếu tích* AB *xác định.*

Chứng minh.

1) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

2) và 3) Độc giả tự chứng minh.

4) Giả sử $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ thì $AB \in \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $(AB)^T \in \mathrm{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$. Do $A^T \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B^T \in \mathrm{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ nên $B^T A^T \in \mathrm{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$. Xét hệ số (i,j) của $(AB)^T$ thì nó bằng hệ số (j,i) của AB, nghĩa là nó bằng hệ số (i,j) của $B^T A^T$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}.$$

Như vậy, $(AB)^T$ và $B^T A^T$ có cùng cỡ và mọi hệ số tương ứng của chúng đều bằng nhau. □

Định nghĩa 1.1.19. Ma trận $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ được gọi là ma trận đối xứng (hoặc phản đối xứng nếu $A^T = A$ (hoặc $A^T = -A$).

Ví dụ 1.1.20. Chứng minh rằng với $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì AA^T và $A + A^T$ là các ma trận đối xứng. Thật vậy, ta có $(AA^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$ nên là ma trận đối xứng.

Ta có $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ nên $A + A^T$ là ma trận đối xứng.

1.2. ĐỊNH THỨC

1.2.1. Khái niệm định thức

Định nghĩa 1.2.1.

(i) Ma trận vuông (a) cấp 1 có định thức được định nghĩa và ký hiệu là $\det(a) = a$.

(ii) Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp 2 có định thức được định nghĩa và ký hiệu như sau:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Định nghĩa 1.2.2. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp. Ma trận con cấp *n-1* của *A*, có được từ *A* bằng cách bỏ đi hàng *i* và cột *j*, được gọi là *ma trận bù* của hệ số a_{ij} và được ký hiệu là M_{ij}.

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(1-j)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ thì

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \; M_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

***Định nghĩa 1.2.3* (Định thức cấp *n*).** Định thức của ma trận $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ là một số thực, ký hiệu bởi $\det A$, được định nghĩa theo phương pháp quy nạp như sau:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det(M_{ij}) \text{ với } 1 \le i \le n \; (1.1).$$

Để cho gọn, ta thường ký hiệu $D_{ij} = \det(M_{ij})$ và $C_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$ (D_{ij} và C_{ij} gọi lần lượt là *định thức con bù* và *phần phụ đại số của hệ số* a_{ij} trong ma trận A). Khi đó (1.1) có dạng:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \text{ với } 1 \le i \le n \quad (1.2).$$

Công thức (1.1), hoặc (1.2) gọi là *công thức khai triển Laplace của định thức cấp* n *theo hàng thứ i của ma trận.*

Nhận xét: Ta đã định nghĩa định thức *theo phương pháp quy nạp*. Nghĩa là từ định nghĩa của *định thức cấp hai* đã biết, ta định nghĩa được *định thức cấp ba*. Có định thức cấp 3, ta định nghĩa được *định thức cấp 4*,… Cứ như vậy ta định nghĩa được *định thức cấp n* bất kỳ qua định thức cấp $(n-1)$ đã biết trước đó, theo quy tắc cho bởi công thức (1.1).

Ví dụ. Dùng định nghĩa, tính $\det A$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Áp dụng công thức (1.1), với $i = 1$:

$$\det A = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix} + 0 + (-1)^{1+3}.2.\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ 6 & 3 & 0\end{vmatrix} + (-1)^{1+4}.4.\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

Cũng theo (1.1), ta tính được các định thức cấp 3 như sau:

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 4(0+1) - (0+3) - 3(2-3) = 4$$

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ 6 & 3 & 0\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}0 & -1\\ 6 & 0\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix} = 2(0+3) - 4(0+6) - 3(0-12) = 18$$

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}0 & 1\\ 6 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix} = 2(2-3) - 4(0-6) + (0-12) = 10$$

Cuối cùng ta có $\det A = 4 + 0 + 2.18 - 4.10 = 0$.

Công thức (1.1) còn gọi là công thức *khai triển định thức cấp n theo hàng thứ nhất*. Ngoài ra ta còn có định lý sau đây cho thấy định thức có thể khai triển theo hàng thứ *i* hay cột thứ *j* bất kỳ của ma trận.

Định lý 1.2.4. *Định thức của ma trận vuông A cấp n có thể khai triển theo hàng thứ i bất kỳ bởi công thức:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.C_{ij} \text{ với } 1 \le i \le n \quad (1.3),$$

hoặc khai triển theo cột thứ j bất kỳ bởi công thức:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.D_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.C_{ij} \text{ với } 1 \le i \le n \quad (1.4).$$

Ta công nhận mà không chứng minh định lý này.

Công thức (1.3), (1.4) cũng được gọi là *công thức khai triển Laplace của định thức cấp n theo hàng thứ i hoặc theo cột thứ j* của ma trận.

Ví dụ. Tính $\det A$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vì hàng 5 có chứa nhiều hệ số 0 nên ta khai triển định thức của A theo hàng 5 như sau:

$$\det A = (-1)^{5+4}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{5+5}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Lại khai triển các định thức mới theo hàng cuối cùng, (có nhiều hệ số 0) ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+3}.5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5(1-0) = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3.5.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.5.1 = 15.$$

$\Rightarrow \det A = -5 + 15 = 10$.

Chú ý: Công thức (1.3) và (1.4) thực sự có lợi khi trong ma trận A có hàng nào đó chứa nhiều hệ số bằng 0. Từ cách giải ví dụ trên, dễ dàng suy ra hệ quả:

Hệ quả 1.2.5. *Định thức của ma trận tam giác bằng tích các hệ số đường chéo.*

Thật vậy, khai triển theo cột 1 trong từng định thức, ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = a_{11}.a_{22}\ldots.a_{(n-1)(n-1)}.a_{nn}.$$

Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, phần phụ đại số của hệ số a_{ij} là C_{ij}, là một số thực. Nếu ta lập ma trận gồm các hệ số C_{ij} thì được một ma trận mới, gọi là *ma trận phụ hợp* của ma trận A và ký hiệu bởi $Cof(A)$:

$$Cof(A) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nj} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

Sử dụng ký hiệu $h_iA = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ là hàng i trong A; $h_iC = (C_{i1} \quad C_{i2} \quad \cdots \quad C_{in})$ là hàng i trong $Cof(A) = C$ và gọi tích vô hướng của véc tơ hàng h_iA với véc tơ hàng h_iC là số thực:

$$\langle h_iA, h_iC \rangle = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + \cdots + a_{in}.C_{in}$$

Từ (1.4) ta có ngay:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \langle h_i A, h_i C \rangle . (1.5)$$

Công thức (1.5) có nghĩa là *định thức của ma trận A bằng tích vô hướng của véc tơ hàng thứ i trong A, với véc tơ hàng thứ i trong* $Cof(A)$. Vì vậy, ta gọi (1.5) là *công thức khai triển định thức theo ma trận phụ hợp*, hay *công thức tính định thức nhờ ma trận phụ hợp.*

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, viết ra ma trận phụ hợp $Cof(A)$ rồi tính $\det A$ nhờ khai triển theo ma trận phụ hợp.

Giải.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Suy ra $C = Cof(A) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Khai triển $\det A$ theo ma trận phụ hợp ta có: .

$$\det(A) = \langle h_1 A, h_1 C \rangle = 0.(-4) + 2.1 + 1.5 = 7 = \langle h_2 A, h_2 C \rangle = \langle h_3 A, h_3 C \rangle$$

Nhận xét 1.2.6. Theo công thức khai triển Laplace của định thức thì với, ta có

$$\det A = a_{11}.\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+n}.a_{1n}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \quad (1.6).$$

Mỗi hạng tử trong khai triển trên đều có dạng:

$$\pm a_{1k_1}.\det(M), 1 \le k_1 \le \text{n}.$$

trong đó $\det(M)$ là định thức của ma trận vuông M cấp $(n-1)\times(n-1)$, có hàng của thu được từ hàng thứ 2 trở đi của A và M không chứa cột thứ k_1 của A.

Tiếp tục khai triển vế phải của (1.6) theo hàng thứ nhất, ta biểu diễn được $\det A$ thành tổng của $n(n-1)$ số hạng, dạng:

$$\pm a_{1k_1}.a_{2k_2}.\det(M) \text{ với } 1 \le k_2 \le n \text{ và } k_2 \ne k_1$$

trong đó ta lại ký hiệu $\det(M)$ là định thức của ma trận vuông M

cấp $(n-2)\times(n-2)$, có hàng của M thu được từ hàng thứ 3 trở đi của A và M không chứa cột thứ k_1 và cột thứ k_2 của A. Cứ tiếp tục khai triển theo cách trên, ta có:

$\det A = \sum \pm a_{1k_1}.a_{2k_2}....a_{nk_n}$ (1.7), trong đó $(k_1,\ldots,k_n)$ là một hoán vị bất kỳ trong số $n!$ hoán vị của n hệ số $\{1,\ldots,n\}$ còn dấu $\pm$ trong tổng tuỳ thuộc tính chất của hoán vị $(k_1,\ldots,k_n)$.

Như vậy, (1.7) cho thấy *định thức của ma trận vuông A cấp n là tổng (có kèm theo dấu "+" hoặc "-") của $n!$ số hạng, mỗi* *số hạng bằng tích của n hệ số trong A sao cho không có 2 hệ số nào thuộc trong cùng một hàng và cùng một cột*. Do nhận xét vừa nêu mà định thức của ma trận vuông, ngoài định nghĩa theo lối quy nạp như trên, còn được xác định theo "*ngôn ngữ phép thế*" mà độc giả có thể đọc được trong nhiều giáo trình đại số tuyến tính truyền thống khác.

Các tính chất đơn giản của định thức sau đây được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Tính chất 1.2.7. *Nếu A có chứa hàng* 0 *(hay cột* 0*) thì* $\det A = 0$.

Tính chất này là hiển nhiên.

Tính chất 1.2.8. *Nếu A có chứa 2 hàng (hay 2 cột) giống nhau thì* $\det A = 0$.

Chứng minh. Giả sử ma trận A có 2 hàng giống nhau và thực hiện chứng minh bằng phép quy nạp theo cấp n của ma trận.

Với $n = 2$ hiển nhiên có $\det A = 0$: mệnh đề đúng.

Xét $n \geq 3$. Giả sử mệnh đề đúng đối với bất kỳ ma trận có cấp *n-1*. Ta cần chứng minh mệnh đề cũng đúng đối với ma trận A có cấp n. Thật vậy, hãy khai triển det A theo một hàng nào đó khác với 2 hàng giống nhau, thì được một tổng trong đó mỗi hạng tử đều bằng tích của một hệ số thuộc hàng đó với định thức của ma trận bù tương ứng. Do định thức của tất cả các ma trận bù đều là định thức của ma trận vuông cấp $(n-1)$, có 2 hàng giống nhau nên theo giả thiết quy nạp, chúng đều bằng 0, nghĩa là $\det A = 0$. □

Tính chất 1.2.9. *Định thức của ma trận A không thay đổi khi ta thực hiện phép chuyển vị:*

$$\det A^T = \det A$$

Chứng minh. Với $n = 2$ hiển nhiên mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với bất kỳ ma trận vuông cấp $n-1$. Ta cần chứng minh định lý cũng đúng với ma trận vuông A cấp n. Thật vậy, khai triển $\det A$ theo hàng thứ nhất thì có:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}.\det(M_{1j})$, trong đó M_{1j} là ma trận bù của hệ số a_{1j}, cấp $n-1$. Do tính chất của ma trận chuyển vị, nên khai triển định thức $\det A^T$ theo cột thứ nhất ta được

$$\det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}.\det({M^T}_{1j}) (*).$$

Theo giả thiết quy nạp thì $\det(M_{1j}) = \det(M_{1j}^T)$ kết hợp với (*) suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét:

Các phép toán hàng trên ma trận bao gồm:

+) *phép thay thế*, nghĩa là ta thay thế hàng $h_i \to h_i + \alpha h_j, i \neq j$ trên ma trận A để thu được ma trận B;

+) *phép đổi hàng*, nghĩa là ta thực hiện phép đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j, i \neq j$ trên ma trận A để thu được ma trận B;

+) *phép tỷ lệ hóa,* nghĩa là ta nhân hàng h_i của ma trận A với số $\alpha \neq 0$ để thu được ma trận B.

Tương tự như 3 phép biến đổi sơ cấp trên hàng, ta cũng có 3 phép biến đổi sơ cấp trên cột đối với một ma trận $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Do tính chất 3, một mệnh đề nào đó của định thức, *nếu đã đúng đối với hàng thì nó vẫn đúng đối với cột*. Vì vậy, từ đây ta chỉ phát biểu và chứng minh các mệnh đề của định thức cho hàng, và cần hiểu rằng mệnh đề đó vẫn còn đúng cho cột.

1.2.2. Tính chất của định thức

Nhắc lại rằng các phép toán hàng trên ma trận bao gồm: *phép thay thế, phép đổi hàng và phép tỷ lệ hóa*. Mục này sẽ tìm hiểu thêm ảnh hưởng của phép toán hàng lên định thức để từ đó có thể ứng dụng các ảnh hưởng này để tính định thức của ma trận dễ dàng hơn.

Định lý 1.2.10. *Cho* $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1) Thực hiện phép đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j, i \neq j$ *trên ma trận* A *để thu được ma trận* B *thì* $\det B = -\det A$.

2) Nếu nhân hàng h_i *của ma trận* A *với số* α *để thu được ma trận* B *thì* $\det B = \alpha \det A$.

3) Thực hiện phép thay thế hàng $h_i \to h_i + \alpha h_j, i \neq j$ *trên ma trận* A *để thu được ma trận* B *thì* $\det B = \det A$.

Chứng minh.

1) Giả sử $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$. Sử dụng phép chứng minh quy nạp theo cấp của ma trận A..

Với $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$. Ta có thể dễ dàng kiểm tra được

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det B = -\det A$: định lý đúng.

Giả sử định lý đúng đối với bất kỳ ma trận cấp $n-1$, ta cần chứng minh định lý đúng đối với ma trận A có cấp n. Do trong A, ta đổi hàng i cho hàng j $(j \neq i)$ để được B; nên $h_i A = h_j B$, $h_p A = h_p B, \forall p \neq i, p \neq j$. Khai triển cả A và B theo hàng p bất kỳ $(i \neq p \neq j)$ ta có:

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}.(-1)^{p+k}.\det(B_{pk})\ (*)$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}(-1)^{p+k}.(-1)^{p+k}.\det(A_{pk})\,(**)$$

Trong đó B_{pk} là ma trận bù của hệ số (p,k) trong B còn A_{pk} là ma trận bù của phần tử (p,k) trong A. Cả hai ma trận này đều có cùng cấp $n-1$, và B_{pk} là ma trận thu được từ A_{pk} bằng chính phép đổi hàng i cho hàng j. Theo giả thiết quy nạp thì $\det(B_{pk}) = -\det(A_{pk})$. Thế kết quả này vào (*) và (**) ta có $\det B = -\det A$: điều phải chứng minh.

2) Giả sử $A \xrightarrow{h_i \to \alpha h_i} B$. Khi đó $h_i B = \alpha h_i A$, $h_p B = h_p A, \forall p \neq i$. Gọi $Cof(A), Cof(B)$ là ma trận phụ hợp của A và của B thì $h_i(Cof(B)) = h_i(Cof(A))$. Khai triển $\det B$ theo hàng i ta có:

$$\det B = \left\langle h_i B, h_i(Cof(B)) \right\rangle = \left\langle (\alpha h_i A), h_i(Cof(A)) \right\rangle = \alpha \left\langle h_i A, h_i(Cof(A)) \right\rangle$$

$$= \alpha.\det A.$$

3) Giả sử $A \xrightarrow{h_i \to h_i + \alpha.h_j} B, i \neq j$. Khi đó $h_i B = h_i A + \alpha h_i A$, $h_p B = h_p A, \forall p \neq i$. Gọi $Cof(A), Cof(B)$ là ma trận phụ hợp của A và của B thì $h_i(Cof(B)) = h_i(Cof(A))$. Khai triển $\det B$ theo hàng i ta có:

$$\det B = \left\langle h_i B, h_i(Cof(B)) \right\rangle = \left\langle ((h_i A + \alpha h_j A), h_i(Cof(A)) \right\rangle$$

$$= \left\langle h_i A, h_i(Cof(A)) \right\rangle + \left\langle (\alpha h_j A), h_i(Cof(A)) \right\rangle$$

$$= \det A + \alpha \left\langle h_j A, h_i(Cof(A)) \right\rangle.$$

Đánh giá tích vô hướng $\left\langle h_i A, h_i(Cof(A)) \right\rangle$ như sau:

Gọi C là ma trận thu được từ A nhờ lấy ra hàng i và thay vào đó là hàng j, tức là C có 2 hàng giống nhau: $h_iC = h_jA = h_jC$ suy ra các ma trận bù của các hệ số thuộc hàng *i* của *C* hoàn toàn giống với các ma trận bù của hệ số thuộc hàng *i* của *A*, nghĩa là $h_i(Cof(C)) = h_i(Cof(A))$. Khai triển det *A* theo hàng thứ *i* ta có:

$$\det C = \left\langle h_iC, h_i(Cof(C))\right\rangle = \left\langle h_jA, h_i(Cof(A))\right\rangle.$$

Do C có 2 hàng giống nhau nên $\det C = 0$ suy ra

$$\left\langle h_jA, h_i(Cof(A))\right\rangle = 0.$$

Thay vào trên ta có điều phải chứng minh:

$$\det B = \det A + \alpha\left\langle h_jA, h_i(Cof(A))\right\rangle = \det A + 0 = \det A. \quad \square$$

Một tổng dạng $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.h_iA$, với $\alpha_i \in \mathbb{R}$ còn h_iA là hàng thứ *i* trong A, được gọi là *một tổ hợp tuyến tính của các hàng trong ma trận* A. Với cách gọi như vậy, ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.2.11. *Nếu ta cộng vào một hàng nào đó của ma trận, một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức của ma trận mới không thay đổi.*

Nhờ định lý 1.2.10 vừa nêu trên, ta có phương pháp mới để tính định thức của các ma trận vuông với cỡ khá lớn, đó là *sử dụng phép toán hàng để quy ma trận vuông A về dạng có một hàng hay một cột chỉ còn lại duy nhất một hệ số khác* 0 *hoặc dạng tam giác.* Sau đây sẽ trình bày một vài ví dụ mô tả phương pháp đó:

Ví dụ 1.2.12. **(i)** Tính $\det A$, với $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Giải.

Cách 1: Dùng phép rút gọn hàng để quy A về dạng bậc thang (dạng bậc thang của ma trận vuông sẽ là ma trận tam giác) thì có:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{h_4 \to h_4 + h_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_3 \to h_3 - 3h_2}{=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_3 \leftrightarrow h_4}{=\!=\!=} (-1) \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(2.1.(-3).5) = 30$$

Cách 2: Chọn hàng hay cột có chứa nhiều hệ số 0, thực hiện các phép toán hàng trên ma trận để quy hàng hay cột đó về dạng chỉ chứa duy nhất một hệ số khác rồi áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng hay cột đó.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{h_4 \to h_4 + h_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{h_2 \to h_2 - 3h_1}{=\!=\!=\!=} 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1.\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.(0+15) = 30$$

.

(ii) Tính định thức: $D = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 \end{pmatrix}$.

Giải.

Nhận xét rằng mọi hàng trong định thức đều có tổng các hệ số là giống nhau nên cộng 3 cột đầu tiên vào cho cột cuối ta có:

$$\det D = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 \to c_4 + c_1 + c_2 + c_3} \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & x+10 \\ 1 & x+2 & 3 & x+10 \\ 1 & 2 & x+3 & x+10 \\ 1 & 2 & 3 & x+10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 \to \frac{1}{x+10}.c_4} (x+10) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & x+2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & x+3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{c_1 \to c_1 - c_4 \\ c_2 \to c_2 - 2c_4 \\ c_3 \to c_3 - 3c_4}} (x+10) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^3(x+10) \cdot$$

Định lý 1.2.13. *Nếu* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *thì* $\det(AB) = (\det A).(\det B)$.

Ta công nhận mà không chứng minh định lý này.