ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

-----o0o-----

GIÁO TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TS. Cao Thanh Tình (chủ biên)
ThS. Hà Mạnh Linh
ThS. Lê Hoàng Tuấn
ThS. Lê Huỳnh Mỹ Vân

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNHPHỐ HỒ CHÍ MINH - NĂM 2019

LỜI NÓI ĐẦU

Đại số tuyến tính là một môn học quan trọng ở giai đoạn đại cương cho sinh viên nhóm ngành kỹ thuật, công nghệ và khoa học tự nhiên. Nhằm mục đích hỗ trợ sinh viên học tập tốt môn học, chúng tôi đã biên soạn giáo trình này.

Để bạn đọc nắm được những vấn đề liên quan, trong mỗi chương phần lý thuyết sẽ được trình bày trước rồi đến các ví dụ và bài tập liên quan. Hầu hết các bài tập đều có hướng giải quyết gần với ví dụ, có liên quan đến lý thuyết của từng chương và được phân bổ thành nhiều dạng khác nhau.Ngoài ra, để hiểu rõ hơn một số định lý, quý độc giả có thể tham khảo thêm trong các tài liệu tham khảo.

Nội dung chính của giáo trình này bao gồm 7 chương, như sau:

- Chương 1: Ma trận – định thức;
- Chương 2: Hệ phương trình tuyến tính;
- Chương 3: Không gian véc tơ;
- Chương 4: Ánh xạ tuyến tính;
- Chương 5: Không gian Euclide;
- Chương 6: Chéo hóa ma trận;
- Chương 7: Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương.

Thông qua *Giáo trình Đại số tuyến tính* này, chúng tôi hy vọng rằng tủ sách giáo khoa của khối kiến thức giáo dục đại cương sẽ được bổ sung và hoàn thiện, tạo thuận lợi cho sinh viên trong việc học tập và cho giảng viên trong công tác giảng dạy trên hành trình khám phá, tìm tòi và chinh phục tri thức.

Những nội dung được trình bày trong giáo trình này khó tránh khỏi thiếu sót và hạn chế. Nhóm tác giả chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý và phản hồi từ quý bạn đọc gần, xa. Xin trân trọng cảm ơn.

Các tác giả.

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

1.1. MA TRẬN

1.1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. Cho các số nguyên dương m,n. Ta gọi một ma trận thực cỡ $m\times n$ là tập hợp gồm mn hệ số thực được xếp thành bảng gồm m hàng và n cột, như sau:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hệ số a_{ij} đứng ở hàng thứ i và cột thứ j trong A gọi là hệ số (i,j) của ma trận A.

Hàng thứ i trong A bao gồm các hệ số có chỉ số thứ nhất bằng i, ký hiệu $h_iA=(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$.

Cột thứ j trong A bao gồm các hệ số có chỉ số thứ hai bằng j, ký hiệu $c_jA=\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m\times n$ được ký hiệu là $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ma trận $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ còn được viết là $A=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$.

Ma trận có n hàng và n cột được gọi là ma trận vuông cấp

n . Trong ma trận vuông A cấp n, tập hợp các hệ số a_{ii},

n $1 \le i \le n$, được gọi là các hệ số đường chéo của ma trận. Tập hợp các hệ số đường chéo được gọi là đường chéo của ma trận.

Ma trận cỡ $m \times 1$ gồm m hàng và 1 cột gọi là *ma trận cột*.

Ma trận cỡ $1 \times n$ gồm 1 hàng và n cột gọi là *ma trận hàng*.

Ma trận cỡ 1×1 gồm chỉ một hệ số. Ta đồng nhất ma trận với chính hệ số đó.

Ma trận cỡ $m \times n$ có tất cả các hệ số đều bằng 0 được gọi là ma trận không, ký hiệu là O hay $\mathrm{O}_{m \times n}$.

Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ được gọi là ma trận *tam giác trên* (tương ứng, tam giác dưới) nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ (tương ứng, $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$). Ma trận tam giác trên hay tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác trên,

$B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác dưới. (Hệ số ký hiệu bởi "$*$" nhận giá trị thực tùy ý).

Ma trận vuông có mọi hệ số nằm ngoài đường chéo đều bằng 0 gọi là *ma trận đường chéo* (hay gọi tắt là *ma trận chéo*).

Ví dụ:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Như vậy, ma trận chéo vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

Ma trận chéo có mọi hệ số đường chéo đều bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị*. Ma trận đơn vị cấp n được biểu diễn là

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.2. Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và mọi hệ số ở các vị trí tương ứng đều bằng nhau. Ký hiệu $A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ a_{ij} = b_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \end{cases}$$

1.1.2. Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa 1.1.3. Cho các ma trận cùng cỡ $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Tổng của hai ma trận A và B, ký hiệu là $A + B$; tích của số α với ma trận A, ký hiệu là αA, là các ma trận được xác định lần lượt bởi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),\ \alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Tổng $A+(-1)B$ gọi là *hiệu* của ma trận A và ma trận B, ký hiệu là $A-B$. Rõ ràng $A \pm B$ và $\alpha A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó,

(i) . $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+4 & 6 & y+7 \\ -7 & 2x & y+8 \end{pmatrix}$

(ii) . $2C=2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) . $2A-3B=2\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8-3x & 7 & 14-3y \\ -14 & -6x & 16-3y \end{pmatrix}$

Các tính chất của phép cộng hai ma trận và phép nhân một số với ma trận được cho trong định lý sau đây.

Định lý 1.1.5. *Nếu* $A,B,C \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *thì:*

1. $A+B=B+A$ *(tính giao hoán của phép cộng).*
2. $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$

tính kết hợp của phép cộng).

3. *Tồn tại duy nhất một ma trận trong* $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, ký hiệu là* O *sao cho :* $\mathrm{O}+A=A+\mathrm{O}=A, \forall A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
4. *Với mỗi* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, có duy nhất một ma trận trong* $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *, ký hiệu là* $-A$ *sao cho* $A+(-A)=(-A)+A=\mathrm{O}$ *. Ta nói* $-A$ *là ma trận đối của* A.
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
6. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

8. $1.A = A$.

9. $\alpha A = \mathrm{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ A = \mathrm{O} \end{array}\right.$.

Việc chứng minh các tính chất trên tương tự nhau. Để làm ví dụ, ta chứng minh tính chất kết hợp của phép cộng ma trận: $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*)

Giả sử $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ và $C = (c_{ij})$.

- Trước hết, theo định nghĩa phép cộng thì hai ma trận ở vế phải và vế trái của (*) có cùng cỡ.
- Xét hệ số (i, j) ở vế trái của (*): $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$, trong khi hệ số bên vế phải của (*) là $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$. Như vậy, (*) đúng do tính kết hợp của phép cộng trên $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 1.1.6. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm $D = [-A + B - 3(B - 2A + 2C)] - [4(A - B) + 3B - 5C]$.

Trước hết, biến đổi rút gọn như sau:

$$D = [-A + (B - 3B + 6A - 6C)] - [4A - 4B + 3B - 5C]$$
$$= (-A - 2B + 6A - 6C) - (4A - B - 5C)$$
$$= -A - 2B + 6A - 6C - 4A + B + 5C = A - B - C.$$

Thay vào biểu thức của ta có:

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 2x & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x & 4 & 10-y \\ -8 & -2x-2 & 8-y \end{pmatrix}$$

Để định nghĩa phép nhân hai ma trận, trước hết ta đưa ra khái niệm tích của ma trận hàng và ma trận cột như sau:

Định nghĩa 1.1.7. Cho $A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \in \mathrm{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ và

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ .Tích của và là ma trận cỡ 1×1 được cho

bởi: $AB = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$.

Ví dụ 1.1.8. Cho $A = (1 \quad 2 \quad 3)$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Khi đó,

$$AB = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (1.0 + 2(-2) + 3.2) = (2).$$

AC không tồn tạivì cỡ A và C là không thích hợp để lấy tích theo định nghĩa (do A có 3 hệ số và Ccó 2 hệ số).

Định nghĩa 1.1.9. Cho $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Tích của ma trận A và ma trậnB là ma trận $AB = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ có đúng xác định bởi tích của hàng$i$ trong A với cột j trong B:

$$c_{ij} = (h_i A)(c_j B), 1 \le i \le m, 1 \le j \le n .$$

Từ định nghĩa suy ra tích AB chỉ xác định khi và chỉ khi số hệ số có trong mỗihàng của A phải bằng số hệ số có trong mỗi cột của B, nghĩa là số cột của ma trận đứng trước phải bằng số hàng của ma trận đứng sau. Xét cụ thể hệ số *(i, j)*của tích ABta có:

$$c_{ij} = (h_i A)(c_j B) = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}).\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} . \qquad (**)$$

Nếu A là ma trận vuông cấpn thì các tích: AA;AAA; … luôn tồn tại và khi đó ta viết:

$$A^2 = AA ,\ A^3 = AAA ,\ AA...A = A^k .$$

Ta ký hiệu thêm $A^0 = I_n$ và $A^1 = A$.

Như vậy, ta đã định nghĩa $A^k, \forall k \in \mathbb{N}$

Ví dụ 1.1.10. Tính tích AB với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lần lượt tính các hệ số của tích $AB = (c_{ij})$ theo công thức (**) ta có:

$$c_{11} = (h_1A)(c_1B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.3 + 3.1 + 0.2 + 1.0 = 9$$

$$c_{12} = (h_1A)(c_2B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2.1 + 3.2 + 0.3 + 1.5 = 13$$

$$c_{21} = (h_2A)(c_1B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.3 - 1.1 + 2.2 + 1.0 = 15$$

$$c_{22} = (h_2A)(c_2B) = (4 \quad -1 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 4.1 - 1.2 + 2.3 + 1.5 = 13$$

Từ đó $AB = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 1.1.11. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & 7 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Không tính toàn bộ tíchAB hãy tìm $h_2(AB)$ và $c_1(AB)$.

- Có: $h_2(AB) = [(h_2A)(c_1B) \quad (h_2A)(c_2B)] = (5 \quad 1)$, vì:

$$h_2A.c_1B = (-1 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1).4 + 3.7 + (-4).3 = 5$$

$$h_2A.c_2B = (-1 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1).(-6) + 3.1 + (-4).2 = 1$$

- Tương tự, ta tính được $c_1(AB) = \begin{pmatrix} h_1A.c_1B \\ h_2A.c_1B \\ h_3A.c_1B \\ h_4A.c_1B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Định lý 1.1.12. *Nếu* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ *thì:*

1. $c_j(AB) = A(\mathrm{c}_j B)$, *với* $1 \le j \le p$.

2. $h_i(AB) = (h_iA).B$, *với* $1 \le i \le m$.

3. $AB = (A.c_1B \quad A.c_2B \quad \cdots \quad A.c_pB)$.

4. $AB = \begin{pmatrix} (h_1A).B \\ (h_2A).B \\ \vdots \\ (h_mA).B \end{pmatrix}$.

Chứng minh:

1. $c_j(AB) = \begin{pmatrix} h_1A.c_jB \\ h_2A.c_jB \\ \vdots \\ h_mA.c_jB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1A \\ h_2A \\ \vdots \\ h_mA \end{pmatrix}.c_jB = A.c_jB,\ \ 1 \le j \le p.$

2. $h_i(AB) = (h_iA.c_1B \quad h_iA.c_2B \quad \cdots \quad h_iA.c_pB)$

$= (h_iA)(c_1B \quad c_2B \quad \cdots \quad c_pB) = (h_iA)B$, với $1 \le i \le m$.

3. và 4. là hệ quả của 1. và 2.□

Ví dụ 1.1.13. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Không cần tính toàn bộ ma trận tích mà hãy tìm hàng hay cột đã chỉ ra: $c_2(AB), h_3(AB)$, $h_1(AB)C$.

- $c_2(AB) = A.c_2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- $h_3(AB) = h_3A.B = (0 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (-3 \quad 2)$.

- $h_1(AB)C = h_1(AB).C = ((h_1A).B).C = \left((\ 0 \quad 1 \quad 0\ ).\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right).C$

$$= (0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\ -4 \quad 2 \quad 0\ )$$

Định lý 1.1.14. *Cho A, B, C là các ma trận với cỡ thích hợp để các phép toán là có nghĩa và $\alpha \in \mathbb{R}$ .Khi đó:*

1. $(AB)C = A(BC) = ABC$ (tính kết hợp của phép nhân).

2. $A(B+C) = AB + AC$.

3. $(A+B)C = AC + BC$.

4. $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

5. $I_m A = AI_n = A$ với mọi $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Chứng minh: Các chứng minh được tiến hành tương tự, ở đây ta chứng minh tính chất 1. như là một ví dụ minh họa.

Giả sử A có cỡ $m\times n$, B có cỡ $n\times p$ và C có cỡ $p\times q$. Khi đó, AB có cỡ $m\times p$ nên $(AB)C$ có cỡ $m\times q$. Mặt khác, A có cỡ $m\times p$, còn BC có cỡ $n\times p$ nên $A(BC)$ cỡ $m\times q$. Như vậy, các ma trận $(AB)C$ ở vế trái và $A(BC)$ ở vế phải có cùng cỡ $m\times q$.

Xét hệ số (i, j) của *(AB)C* ở vế trái và hệ số (i, j) của *A(BC)* ở vế phải, với mọi $i = 1...m, j = 1...q$. Hệ số (i, j) ở vế trái bằng

$$\sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj} \quad (*).$$

Do tổng hữu hạn các số thực có tính chất phân phối đối với phép nhân nên:

$$\sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj}\right)$$

bằng với hệ số thứ (i, j) của vế phải. □

Chú ý rằng, khác với phép nhân các số thực, *phép nhân các ma trận không thỏa mộtsố tính chất thông thường* mà phép nhân với số vốn có. Cụ thể như sau:

1. *Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán:*

$$\exists A, \exists B : AB \neq BA$$

2. *Phép nhân ma trận không có luật giản ước: Từ* $AB = AC$ *và* $A \neq \mathrm{O}$ *không suy ra được* $B = C$. *Tương tự, từ* $BA = CA$ *và* $A \neq \mathrm{O}$ *không suy ra được* $B = C$.

3. *Nếu tích* $AB = O$ *thì không thể kết luận hoặc* $A = \mathrm{O}$ *hoặc* $B = \mathrm{O}$ *(vì* $\exists A \neq \mathrm{O}$, $\exists B \neq \mathrm{O} : AB = \mathrm{O}$*).*

Ví dụ 1.1.15.

Cho $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Nếu thì , tức là hằng đẳng thức về bình phương của tổng hai số thực sẽ không còn đúng với bình phương của tổng hai ma trận vuông bất kỳ.

Mặc dù phép nhân 2 ma trận không có luật giản ước, nhưng trong trường hợp đặc biệt ta vẫn có quy tắc giản ước sau đây, rất có lợi cho một số áp dụng về sau:

Định lý 1.1.16. *Nếu* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *thỏa mãn* $AX = BX$ *với mọi ma trận cột* $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *thì* $A = B$.

Chứng minh. Vì $AX = BX$ đúng với mọi ma trận cột $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

nên với ma trận cột $X = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ta sẽ có

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1A = c_1B.$$

Lý luận tương tự với $X = E_i$ thì có $c_iA = c_iB$ với mọi $i = 1 \ldots n$

$\Rightarrow A = B$ vì chúng có các cột tương ứng bằng nhau. □

Định nghĩa 1.1.17. Cho ma trận *A*. Ta gọi ma trận chuyển vị của*A* là ma trận thu được từ *A*bằng cách dịch chuyển các hàng (hay cột) trong *A* thành các cột (hay hàng) tương ứng. Ta ký hiệu A^T ma trận chuyển vị của *A*.

Phép biến đổi một ma trận thành ma trận chuyển vị của nó được gọi là phép chuyển vị ma trận.

Từ định nghĩa suy ra nếu $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ thì $A^T = (a'_{ji}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, trong đó, $a'_{ji} = a_{ij}$, khi $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Định lý 1.1.18.

1) $(A^T)^T = A$ *với bất kỳ ma trận* A.

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *với bất kỳ hai ma trận* $A, ,B$ *có cùng cỡ.*

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *với bất kỳ ma trận* A *và bất kỳ số thực* α.

4) $(AB)^T = B^T A^T$ *nếu tích* AB *xác định.*

Chứng minh.

1) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

2) và 3) Độc giả tự chứng minh.

4) Giả sử $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ thì $AB \in \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $(AB)^T \in \mathrm{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$. Do $A^T \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B^T \in \mathrm{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ nên $B^T A^T \in \mathrm{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$. Xét hệ số (i,j) của $(AB)^T$ thì nó bằng hệ số (j,i) của AB, nghĩa là nó bằng hệ số (i,j) của $B^T A^T$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}.$$

Như vậy, $(AB)^T$ và $B^T A^T$ có cùng cỡ và mọi hệ số tương ứng của chúng đều bằng nhau. □

Định nghĩa 1.1.19. Ma trận $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ được gọi là ma trận đối xứng (hoặc phản đối xứng nếu $A^T = A$ (hoặc $A^T = -A$).

Ví dụ 1.1.20. Chứng minh rằng với $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì AA^T và $A + A^T$ là các ma trận đối xứng. Thật vậy, ta có $(AA^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$ nên là ma trận đối xứng.

Ta có $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ nên $A + A^T$ là ma trận đối xứng.

1.2. ĐỊNH THỨC

1.2.1. Khái niệm định thức

Định nghĩa 1.2.1.

(i) Ma trận vuông (a) cấp 1 có định thức được định nghĩa và ký hiệu là $\det(a) = a$.

(ii) Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp 2 có định thức được định nghĩa và ký hiệu như sau:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Định nghĩa 1.2.2. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp. Ma trận con cấp*n-1*của*A*, có được từ *A*bằng cách bỏ đi hàng*i*và cột*j*, được gọi là *ma trận bù* của hệ sốa_{ij}và được ký hiệu làM_{ij}.

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(1-j)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ thì

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \ M_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

***Định nghĩa 1.2.3* (Định thức cấp *n*).** Định thức của ma trận $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ là một số thực, ký hiệu bởi $\det A$, được định nghĩa theo phương pháp quy nạp như sau:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det(M_{ij}) \text{ với } 1 \le i \le n \ (1.1).$$

Để cho gọn, ta thường ký hiệu $D_{ij} = \det(M_{ij})$ và $C_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$ (D_{ij} và C_{ij} gọi lần lượt là *định thức con bù* và *phần phụ đại số của hệ số* a_{ij} trong ma trận A). Khi đó (1.1) có dạng:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \text{ với } 1 \le i \le n \quad (1.2).$$

Công thức (1.1), hoặc (1.2) gọi là *công thức khai triển Laplace của định thức cấp n theo hàng thứ i của ma trận.*

Nhận xét: Ta đã định nghĩa định thức *theo phương pháp quy nạp*. Nghĩa là từ định nghĩa của *định thức cấp hai* đã biết, ta định nghĩa được *định thức cấp ba*. Có định thức cấp 3, ta định nghĩa được *định thức cấp 4*,… Cứ như vậy ta định nghĩa được *định thức cấp n* bất kỳ qua định thức cấp $(n-1)$ đã biết trước đó, theo quy tắc cho bởi công thức (1.1).

Ví dụ. Dùng định nghĩa, tính $\det A$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Áp dụng công thức (1.1), với $i = 1$:

$$\det A = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{1+3}.2.\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}.4.\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Cũng theo (1.1), ta tính được các định thức cấp 3 như sau:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4(0+1) - (0+3) - 3(2-3) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2(0+3) - 4(0+6) - 3(0-12) = 18$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-3) - 4(0-6) + (0-12) = 10$$

Cuối cùng ta có $\det A = 4 + 0 + 2.18 - 4.10 = 0$.

Công thức (1.1) còn gọi là công thức *khai triển định thức cấp n theo hàng thứ nhất*. Ngoài ra ta còn có định lý sau đây cho thấy định thức có thể khai triển theo hàng thứ i hay cột thứ j bất kỳ của ma trận.

Định lý 1.2.4. *Định thức của ma trận vuông A cấp n có thể khai triển theo hàng thứ i bất kỳ bởi công thức:*

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\mathrm{C}_{ij}$ với $1 \le i \le n$ (1.3),

hoặc khai triển theo cột thứ j bất kỳ bởi công thức:

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.D_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.C_{ij}$ với $1 \le i \le n$ (1.4).

Ta công nhận mà không chứng minh định lý này.

Công thức (1.3), (1.4) cũng được gọi là *công thức khai triển Laplace của định thức cấp* n *theo hàng thứ* i *hoặc theo cột thứ* j của ma trận.

Ví dụ. Tính $\det A$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vì hàng 5 có chứa nhiều hệ số 0 nên ta khai triển định thức của A theo hàng 5 như sau:

$$\det A = (-1)^{5+4}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{5+5}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Lại khai triển các định thức mới theo hàng cuối cùng, (có nhiều hệ số 0) ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+3}.5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5(1-0) = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3.5.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.5.1 = 15.$$

$\Rightarrow \det A = -5 + 15 = 10$.

Chú ý: Công thức (1.3) và (1.4) thực sự có lợi khi trong ma trận A có hàng nào đó chứa nhiều hệ số bằng 0. Từ cách giải ví dụ trên, dễ dàng suy ra hệ quả:

Hệ quả 1.2.5. *Định thức của ma trận tam giác bằng tích các hệ số đường chéo.*

Thật vậy, khai triển theo cột 1 trong từng định thức, ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = a_{11}.a_{22}....a_{(n-1)(n-1)}.a_{nn}.$$

Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, phần phụ đại số của hệ số a_{ij} là C_{ij}, là một số thực. Nếu ta lập ma trận gồm các hệ số C_{ij} thì được một ma trận mới, gọi là *ma trận phụ hợp* của ma trận A và ký hiệu bởi $Cof(A)$:

$$Cof(A) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nj} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

Sử dụng ký hiệu $h_iA = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ là hàng i trong A; $h_iC = (C_{i1} \quad C_{i2} \quad \cdots \quad C_{in})$ là hàng i trong $Cof(A) = C$ và gọi tích vô hướng của véc tơ hàng h_iA với véc tơ hàng h_iC là số thực:

$$\langle h_iA, h_iC \rangle = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + \cdots + a_{in}.C_{in}$$

Từ (1.4) ta có ngay:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \langle h_i A, h_i C \rangle . (1.5)$$

Công thức (1.5) có nghĩa là *định thức của ma trận A bằng tích vô hướng của véc tơ hàng thứ i trong A, với véc tơ hàng thứ i trong* $Cof(A)$. Vì vậy, ta gọi (1.5) là *công thức khai triển định thức theo ma trận phụ hợp*, hay *công thức tính định thức nhờ ma trận phụ hợp*.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, viết ra ma trận phụ hợp $Cof(A)$ rồi tính $\det A$ nhờ khai triển theo ma trận phụ hợp.

Giải.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Suy ra $C = Cof(A) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Khai triển $\det A$ theo ma trận phụ hợp ta có: .

$$\det(A) = \langle h_1 A, h_1 C \rangle = 0.(-4) + 2.1 + 1.5 = 7 = \langle h_2 A, h_2 C \rangle = \langle h_3 A, h_3 C \rangle$$

Nhận xét 1.2.6. Theo công thức khai triển Laplace của định thức thì với, ta có

$$\det A = a_{11}.\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+n}.a_{1n}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \quad (1.6).$$

Mỗi hạng tử trong khai triển trên đều có dạng:

$$\pm a_{1k_1}.\det(M), 1 \le k_1 \le \text{n}.$$

trong đó $\det(M)$ là định thức của ma trận vuông M cấp $(n-1)\times(n-1)$, có hàng của thu được từ hàng thứ 2 trở đi của A và M không chứa cột thứ k_1 của A.

Tiếp tục khai triển vế phải của (1.6) theo hàng thứ nhất, ta biểu diễn được $\det A$ thành tổng của $n(n-1)$ số hạng, dạng:

$$\pm a_{1k_1}.a_{2k_2}.\det(M) \text{ với } 1 \le k_2 \le n \text{ và } k_2 \ne k_1$$

trong đó ta lại ký hiệu $\det(M)$ là định thức của ma trận vuông M

cấp $(n-2)\times(n-2)$, có hàng của M thu được từ hàng thứ 3 trở đi của A và M không chứa cột thứ k_1 và cột thứ k_2 của A. Cứ tiếp tục khai triển theo cách trên, ta có:

$\det A = \sum \pm a_{1k_1}.a_{2k_2}....a_{nk_n}$ (1.7), trong đó $(k_1,\ldots,k_n)$ là một hoán vị bất kỳ trong số $n!$ hoán vị của n hệ số $\{1,\ldots,n\}$ còn dấu $\pm$ trong tổng tuỳ thuộc tính chất của hoán vị $(k_1,\ldots,k_n)$.

Như vậy, (1.7) cho thấy *định thức của ma trận vuông A cấp n là tổng (có kèm theo dấu "+" hoặc "-") của $n!$ số hạng, mỗi* *số hạng bằng tích của n hệ số trong A sao cho không có 2 hệ số nào thuộc trong cùng một hàng và cùng một cột*. Do nhận xét vừa nêu mà định thức của ma trận vuông, ngoài định nghĩa theo lối quy nạp như trên, còn được xác định theo "*ngôn ngữ phép thế*" mà độc giả có thể đọc được trong nhiều giáo trình đại số tuyến tính truyền thống khác.

Các tính chất đơn giản của định thức sau đây được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Tính chất 1.2.7. *Nếu A có chứa hàng* 0 *(hay cột* 0*) thì* $\det A = 0$.

Tính chất này là hiển nhiên.

Tính chất 1.2.8. *Nếu A có chứa 2 hàng (hay 2 cột) giống nhau thì* $\det A = 0$.

Chứng minh. Giả sử ma trận A có 2 hàng giống nhau và thực hiện chứng minh bằng phép quy nạp theo cấp n của ma trận.

Với $n = 2$ hiển nhiên có $\det A = 0$: mệnh đề đúng.

Xét $n \geq 3$. Giả sử mệnh đề đúng đối với bất kỳ ma trận có cấp *n-1*. Ta cần chứng minh mệnh đề cũng đúng đối với ma trận A có cấp n. Thật vậy, hãy khai triển det A theo một hàng nào đó khác với 2 hàng giống nhau, thì được một tổng trong đó mỗi hạng tử đều bằng tích của một hệ số thuộc hàng đó với định thức của ma trận bù tương ứng. Do định thức của tất cả các ma trận bù đều là định thức của ma trận vuông cấp $(n-1)$, có 2 hàng giống nhau nên theo giả thiết quy nạp, chúng đều bằng 0, nghĩa là $\det A = 0$. □

Tính chất 1.2.9. *Định thức của ma trận A không thay đổi khi ta thực hiện phép chuyển vị:*

$$\det A^T = \det A$$

Chứng minh. Với $n = 2$ hiển nhiên mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với bất kỳ ma trận vuông cấp $n-1$. Ta cần chứng minh định lý cũng đúng với ma trận vuông A cấp n. Thật vậy, khai triển $\det A$ theo hàng thứ nhất thì có:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}.\det(M_{1j})$, trong đó M_{1j} là ma trận bù của hệ số a_{1j}, cấp $n-1$. Do tính chất của ma trận chuyển vị, nên khai triển định thức $\det A^T$ theo cột thứ nhất ta được

$$\det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}.\det(M^T{}_{1j}) (*).$$

Theo giả thiết quy nạp thì $\det(M_{1j}) = \det(M_{1j}^T)$ kết hợp với (*) suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét:

Các phép toán hàng trên ma trận bao gồm:

+) *phép thay thế*, nghĩa là ta thay thế hàng $h_i \to h_i + \alpha h_j, i \neq j$ trên ma trận A để thu được ma trận B;

+) *phép đổi hàng*, nghĩa là ta thực hiện phép đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j, i \neq j$ trên ma trận A để thu được ma trận B;

+) *phép tỷ lệ hóa,* nghĩa là ta nhân hàng h_i của ma trận A với số $\alpha \neq 0$ để thu được ma trận B.

Tương tự như 3 phép biến đổi sơ cấp trên hàng, ta cũng có 3 phép biến đổi sơ cấp trên cột đối với một ma trận $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Do tính chất 3, một mệnh đề nào đó của định thức, *nếu đã đúng đối với hàng thì nó vẫn đúng đối với cột*. Vì vậy, từ đây ta chỉ phát biểu và chứng minh các mệnh đề của định thức cho hàng, và cần hiểu rằng mệnh đề đó vẫn còn đúng cho cột.

1.2.2. Tính chất của định thức

Nhắc lại rằng các phép toán hàng trên ma trận bao gồm: *phép thay thế, phép đổi hàng và phép tỷ lệ hóa*. Mục này sẽ tìm hiểu thêm ảnh hưởng của phép toán hàng lên định thức để từ đó có thể ứng dụng các ảnh hưởng này để tính định thức của ma trận dễ dàng hơn.

Định lý 1.2.10. *Cho* $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1) Thực hiện phép đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j, i \neq j$ *trên ma trận* A *để thu được ma trận* B *thì* $\det B = -\det A$.

2) Nếu nhân hàng h_i *của ma trận* A *với số* α *để thu được ma trận* B *thì* $\det B = \alpha \det A$.

3) Thực hiện phép thay thế hàng $h_i \to h_i + \alpha h_j, i \neq j$ *trên ma trận* A *để thu được ma trận* B *thì* $\det B = \det A$.

Chứng minh.

1) Giả sử $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$. Sử dụng phép chứng minh quy nạp theo cấp của ma trận A..

Với $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$. Ta có thể dễ dàng kiểm tra được

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det B = -\det A$: định lý đúng.

Giả sử định lý đúng đối với bất kỳ ma trận cấp $n-1$, ta cần chứng minh định lý đúng đối với ma trận A có cấp n. Do trong A, ta đổi hàng i cho hàng j $(j \neq i)$ để được B; nên $h_i A = h_j B$, $h_p A = h_p B, \forall p \neq i, p \neq j$. Khai triển cả A và B theo hàng p bất kỳ $(i \neq p \neq j)$ ta có:

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}.(-1)^{p+k}.\det(B_{pk}) \; (*)$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}(-1)^{p+k}.(-1)^{p+k}.\det(A_{pk})\ (**)$$

Trong đó B_{pk} là ma trận bù của hệ số (p,k) trong B còn A_{pk} là ma trận bù của phần tử (p,k) trong A. Cả hai ma trận này đều có cùng cấp $n-1$, và B_{pk} là ma trận thu được từ A_{pk} bằng chính phép đổi hàng i cho hàng j. Theo giả thiết quy nạp thì $\det(B_{pk}) = -\det(A_{pk})$. Thế kết quả này vào (*) và (**) ta có $\det B = -\det A$: điều phải chứng minh.

2) Giả sử $A \xrightarrow{h_i \to \alpha h_i} B$. Khi đó $h_i B = \alpha h_i A$, $h_p B = h_p A, \forall p \neq i$. Gọi $Cof(A), Cof(B)$ là ma trận phụ hợp của A và của B thì $h_i(Cof(B)) = h_i(Cof(A))$. Khai triển $\det B$ theo hàng i ta có:

$$\det B = \langle h_i B, h_i(Cof(B))\rangle = \langle (\alpha h_i A), h_i(Cof(A))\rangle = \alpha \langle h_i A, h_i(Cof(A))\rangle$$

$$= \alpha.\det A.$$

3) Giả sử $A \xrightarrow{h_i \to h_i + \alpha.h_j} B, i \neq j$. Khi đó $h_i B = h_i A + \alpha h_i A$, $h_p B = h_p A, \forall p \neq i$. Gọi $Cof(A), Cof(B)$ là ma trận phụ hợp của A và của B thì $h_i(Cof(B)) = h_i(Cof(A))$. Khai triển $\det B$ theo hàng i ta có:

$$\det B = \langle h_i B, h_i(Cof(B))\rangle = \langle ((h_i A + \alpha h_j A), h_i(Cof(A))\rangle$$

$$= \langle h_i A, h_i(Cof(A))\rangle + \langle (\alpha h_j A), h_i(Cof(A))\rangle$$

$$= \det A + \alpha \langle h_j A, h_i(Cof(A))\rangle.$$

Đánh giá tích vô hướng $\langle h_i A, h_i(Cof(A))\rangle$ như sau:

Gọi C là ma trận thu được từ A nhờ lấy ra hàng i và thay vào đó là hàng j, tức là C có 2 hàng giống nhau: $h_i C = h_j A = h_j C$ suy ra các ma trận bù của các hệ số thuộc hàng *i* của *C* hoàn toàn giống với các ma trận bù của hệ số thuộc hàng *i* của *A*, nghĩa là $h_i(Cof(C)) = h_i(Cof(A))$. Khai triển det A theo hàng thứ i ta có:

$$\det C = \left\langle h_i C, h_i(Cof(C)) \right\rangle = \left\langle h_j A, h_i(Cof(A)) \right\rangle.$$

Do C có 2 hàng giống nhau nên $\det C = 0$ suy ra

$$\left\langle h_j A, h_i(Cof(A)) \right\rangle = 0.$$

Thay vào trên ta có điều phải chứng minh:

$$\det B = \det A + \alpha \left\langle h_j A, h_i(Cof(A)) \right\rangle = \det A + 0 = \det A. \quad \square$$

Một tổng dạng $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . h_i A$, với $\alpha_i \in \mathbb{R}$ còn $h_i A$ là hàng thứ i trong A, được gọi là *một tổ hợp tuyến tính của các hàng trong ma trận A*. Với cách gọi như vậy, ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.2.11. *Nếu ta cộng vào một hàng nào đó của ma trận, một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức của ma trận mới không thay đổi.*

Nhờ định lý 1.2.10 vừa nêu trên, ta có phương pháp mới để tính định thức của các ma trận vuông với cỡ khá lớn, đó là *sử dụng phép toán hàng để quy ma trận vuông A về dạng có một hàng hay một cột chỉ còn lại duy nhất một hệ số khác* 0 *hoặc dạng tam giác.* Sau đây sẽ trình bày một vài ví dụ mô tả phương pháp đó:

Ví dụ 1.2.12. **(i)** Tính $\det A$, với $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Giải.

Cách 1: Dùng phép rút gọn hàng để quy A về dạng bậc thang (dạng bậc thang của ma trận vuông sẽ là ma trận tam giác) thì có:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{h_4 \to h_4 + h_1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{h_3 \to h_3 - 3h_2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{h_3 \leftrightarrow h_4} (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(2.1.(-3).5) = 30$$

Cách 2: Chọn hàng hay cột có chứa nhiều hệ số 0, thực hiện các phép toán hàng trên ma trận để quy hàng hay cột đó về dạng chỉ chứa duy nhất một hệ số khác rồi áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng hay cột đó.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{h_4 \to h_4 + h_1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{h_2 \to h_2 - 3h_1} 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1.\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.(0+15) = 30$$

.

(ii) Tính định thức: $D = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 \end{pmatrix}$.

Giải.

Nhận xét rằng mọi hàng trong định thức đều có tổng các hệ số là giống nhau nên cộng 3 cột đầu tiên vào cho cột cuối ta có:

$$\det D = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_4 \to c_4 + c_1 + c_2 + c_3}} \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & x+10 \\ 1 & x+2 & 3 & x+10 \\ 1 & 2 & x+3 & x+10 \\ 1 & 2 & 3 & x+10 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_4 \to \frac{1}{x+10}.c_4}} \ (x+10) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & x+2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & x+3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} c_1 \to c_1 - c_4 \\ c_2 \to c_2 - 2c_4 \\ c_3 \to c_3 - 3c_4 \end{matrix}}} \ (x+10) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^3(x+10) \cdot$$

Định lý 1.2.13. *Nếu* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *thì*
$\det(AB) = (\det A).(\det B)$.

Ta công nhận mà không chứng minh định lý này.

1.3. PHÉP TOÁN HÀNG TRÊN MA TRẬN VÀ HẠNG CỦA MA TRẬN

1.3.1. Phép biến đổi trên hàng của ma trận

1. *Phép thay thế hàng*:

Thay hàng i bởi tổng của chính nó với một bội α lần $(\alpha \in \mathbb{R})$ của hàng j khác, ký hiệu : $h_i \to h_i + \alpha . h_j$.

2. *Phép tỷ lệ hóa*:

Nhân tất cả các hệ số của hàng i với cùng một hằng số thực $\alpha \neq 0$, ký hiệu : $h_i \to \alpha . h_i$.

3. *Phép đổi hàng*:

Đổi chỗ 2 hàng i, j bất kỳ cho nhau, ký hiệu : $h_i \leftrightarrow h_j$.

Định nghĩa 1.3.1.

(i) Ba phép biến đổi gồm: phép thay thế hàng, phép tỷ lệ hóa và phép đổi hàng được gọi là các phép biến đổi hàng của ma trận.

(ii) Nếu thực hiện các phép biến đổi hàng trên ma trận A để thu được ma trận B thì B được gọi là tương đương hàng với A, ký hiệu là $B \sim A$.

Vì các phép toán hàng đều có phép toán ngược nên nếu $B \sim A$ thì $A \sim B$.
Do vậy, ta nói A và B tương đương hàng với nhau. Dễ thấy nế u $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

Định nghĩa 1.3.2. Trong ma trận *A*:

a) Hàng có chứa ít nhất một hệ số khác 0 thì được gọi là hàng khác không, hàng chứa tất cả các hệ số đều bằng 0 thì ta gọi là hàng không.

b) Hệ số khác 0 đầu tiên (tính từ trái qua phải) của một hàng, ta gọi là hệ số chính của hàng đó.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ thì : h_2A là hàng 0,

h_1A, h_3A và h_4A là các hàng khác 0. Hệ số chính của hàng h_1A là "9", của h_3A là "7", của h_4A là "1".

Định nghĩa 1.3.3. Ma trận A được gọi là có dạng bậc thang (hay ma trận bậc thang) nếu A thoả mãn 2 tính chất:

a) Hàng 0 (nếu có) ở phía dưới các hàng khác 0.

b) Hệ số chính của hàng dưới luôn đứng trong cột ở về phía phải so với cột chứa hệ số chính của những hàng phía trên nó.

Ví dụ: ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ có dạng bậc thang,

ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ chưa có dạng bậc thang.

Định nghĩa 1.3.4. Ma trận bậc thang có thêm hai tính chất sau được gọi là ma trận dạng bậc thang rút gọn (hay đơn giản là ma trận dạng rút gọn):

a) Mọi hệ số chính đều bằng 1.

b) Trong cột có chứa hệ số chính (bằng 1) thì 1 là hệ số khác không duy nhất của cột.

Ví dụ, ma trận $B=\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ có dạng rút gọn; còn ma trận $C=\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ có dạng bậc thang chưa được rút gọn.

Định nghĩa 1.3.5.

a) Nếu $A \sim B$ và B có dạng bậc thang (hay dạng rút gọn) thì ta nói B là dạng bậc thang (hay dạng rút gọn) của A.

b) Quá trình thực hiện các phép toán hàng để quy ma trận A về dạng bậc thang, được gọi là quá trình rút gọn hàng.

Ví dụ,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&0&-1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&-1&-1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}=B\text{, do }B$$

có dạng bậc thang $A \sim B$ và nên B là dạng bậc thang của A.

Do yêu cầu của dạng bậc thang, *hệ số chính của hàng dưới, luôn đứng trong cột về phía phải so với cột chứa phân tử chính của những hàng phía trên nó*, mà trong ma trận sẽ có những vị trí mà hệ số chính của hàng trước đang đứng ở đó, sẽ có tác dụng như là các "*vị trí mốc*" mà hệ số chính của những hàng sau phải dựa vào đó mà sắp xếp theo. Việc phát hiện ra các vị trí như vậy sẽ là chìa khóa thực hiện thuật toán quy ma trận về dạng bậc thang. Sau đây là ví dụ mô tả chi tiết cách phát hiện các "*vị trí mốc*" và các phép toán cần thực hiện để thu được dạng bậc thang của một ma trận.

Ví dụ, Quy ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ về dạng bậc thang.

Bắt đầu bằng việc xét cột khác 0 (tức cột có chứa ít nhất một hệ số khác 0) đầu tiên tính từ trái sang phải, trong trường hợp này là $c_1 A$. Hệ số $(1,1)$ đứng ở đỉnh cột là hệ số khác 0 nên nó là hệ số chính của hàng thứ nhất. Theo yêu cầu của dạng bậc thang thì các hệ số chính của các hàng từ hàng thứ 2 trở về sau phải đứng lệch sang phải so với cột 1. Do vậy cần phải thực hiện phép thay thế hàng để biến các phân tử đứng phía dưới của hệ số $(1,1)$ thành hệ số 0. Lúc này, vị trí $(1,1)$ là "*vị trí mốc*", căn cứ vào đó mà các hệ số chính của hàng sau phải đứng lệch sang phải. Hơn nữa, giá trị của hệ số $(1,1)$ đóng vai trò quan trọng trong việc phát hiện ra các phép thay thế hàng cần phải thực hiện, vì vậy hệ số $(1,1)$ đang đứng ở "*vị trí mốc*" được gọi là hệ số cơ sở (thứ nhất) của *A*. Các phép toán hàng cần thực hiện để biến các hệ số đứng phía dưới hệ số cơ sở thành hệ số 0 như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 + h_1]{h_3 \to h_3 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix} = B$$

Trong ma trận B *hệ số chính* của hang 2 là hệ số $(2,2)$ bằng "4". Cũng do yêu cầu của dạng bậc thang, các hệ số đứng phía dưới hệ số $(2,2)$ phải được quy về hệ số 0. Lúc này, hệ số "4" đứng ở vị trí (2, 2) cũng đóng vai trò giống như *hệ số cơ sở* thứ nhất ở trên, vì vậy nó lại được gọi là hệ số cơ sở (thứ hai) của *A*.

Nhờ *hệ số cơ sở* (thứ 2) mà phát hiện phép toán cần thực hiện ở bước thứ hai như sau:

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&-3&1\\0&4&8&12&-4\\0&-1&-2&3&-1\\0&1&2&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[h_4\to h_4-(1/4)h_2]{h_3\to h_3+(1/4)h_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-3&1\\0&4&8&12&-4\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&-6&-6\end{pmatrix}=C$$

Trong ma trận C, phát hiện hệ số chính của hàng 3 trong C là hệ số $(3,4)$ bằng "6" đóng vai trò là *hệ số cơ sở* (thứ *3*) của *A*. Nhờ hệ số này ta phát hiện ra phép thay thế hàng cần thực hiện trong bước thứ ba như sau:

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1&-3&1\\0&4&8&12&-4\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&-6&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{h_4\to h_4+h_3}\begin{pmatrix}1&2&1&-3&1\\0&4&8&12&-4\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&0&-8\end{pmatrix}=D$$

Trong D, phát hiện hệ số chính của hàng thứ tư là hệ số $(4,5)$ bằng -8, đóng vai trò hệ số cơ sở (thứ 4) của A. Do phía dưới của *hệ số cơ sở* này không còn hệ số nào khác cần biến thành 0 nên không cần thực hiện thêm phép toán hàng nào nữa. Ma trận D chính là dạng bậc thang của A.

Vai trò quan trọng của *hệ số cơ sở* là ở chỗ: nó là "*mốc*" để dựa vào đó mà sắp xếp các hệ số chính của những hàng sau, đồng thời nó còn được dùng để phát hiện ta các phép toán hàng cần thiết phải thực hiện. *Hệ số cơ sở* thuận lợi nhất là hệ số ±1. Để có *hệ số cơ sở* là ±1, có thể thực hiện phép tỷ lệ hoá, phép đổi hàng hoặc một phép thay thế hàng thích hợp. Thực tế cho thấy việc chọn đúng *hệ số cơ sở* có thể làm giảm bớt khối lượng công việc và giảm bớt các lỗi gặp phải trong quá trình thực hiện các phép toán hàng để quy ma trận về dạng bậc thang.

Qua ví dụ vừa trình bày ở trên, ta rút ra thuật toán gồm 3 bước như sau, gọi là thuật toán rút gọn hàng, để quy được một ma trận bất kỳ về dạng bậc thang:

Bước 1: *Dùng phép đổi hàng (nếu cần) để có hệ số ở đỉnh của cột khác 0 đầu tiên (tính từ trái sang phải) của ma trận là hệ số khác 0. Hệ số này gọi là hệ số cơ sở thứ nhất của ma trận.*

Bước 2: *Dựa vào hệ số cơ sở thứ nhất, dùng các phép toán hàng thích hợp để biến tất cả các hệ số, đứng phía dưới hệ số cơ sở thứ nhất (trong cùng một cột), thành hệ số 0.*

Bước 3: *Lặp lại 2 bước trên đối với ma trận con thu được từ ma trận ban đầu bằng cách bỏ đi hàng và cột chứa hệ số cơ sở thứ nhất và cứ tiếp tục như vậy cho đến hệ số cơ sở cuối cùng.*

Ví dụ. Áp dụng thuật toán rút gọn hàng để quy ma trận sau về dạng bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5 \\ -3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15 \\ -3 & 7 & -8 & 5 & -8 & -9 \end{pmatrix}.$$

Giải

Bước 1: Xét cột khác 0 đầu tiên của A là c_1A, có phần tử ở đỉnh là hệ số 0. Ta cần phải thực hiện phép đổi hàng để có hệ số ở đỉnh của cột là hệ số khác 0. Sau khi đổi hàng, hệ số khác 0 đứng ở đỉnh của cột 1 là "-3", chính là hệ số cơ sở thứ nhất.

$$A\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_2}\begin{pmatrix} -3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5 \\ -3 & 7 & -8 & 5 & -8 & -9 \end{pmatrix}=B.$$

Bước 2: Trong B, nhờ *hệ số cơ sở* thứ nhất, ta phát hiện phép thay thế hàng biến hệ số đứng phía dưới thành 0 như sau:

$$B=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5\\ -3 & 7 & -8 & 5 & -8 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow{h_3\to h_3-h_1}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5\\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6\end{pmatrix}=D.$$

Bước 3: Trong D , ta phát hiện *hệ số cơ sở* thứ 2 là hệ số bằng "-3". Trước hết, cần đơn vị hoá hệ số cơ sở để phép toán hàng tiếp theo là dễ thực hiện. Muốn vậy, ta có thể thực hiện phép thay thế hàng trong D như sau:

$$D=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5\\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{h_2\to h_2-h_3}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6\end{pmatrix}=E.$$

Khi *hệ số cơ sở* là hệ số (2, 2) bằng "-1", ta phát hiện phép thay thế để biến hệ số đứng dưới thành hệ số 0 như sau:

$$E=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{h_3\to h_3-2h_2}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8\end{pmatrix}=G.$$

Trong G, ta phát hiện *hệ số cơ sở* thứ 3 là hệ số $(3,5)$ bằng "2", do dưới hệ số cơ sở này không còn hệ số nào khác cần biến thành hệ số 0, nên thuật toán được kết thúc và G chính là dạng bậc thang của A.

Thuật toán rút gọn hàng luôn quy được một ma trận bất kỳ về dạng bậc thang. Nhưng trong thực tế, có khi ta cần đến dạng rút gọn. Phương pháp chung để quy dạng bậc thang về dạng rút gọn là *phương pháp "khử ngược"* sau đây:

- Trong dạng bậc thang của A, bắt đầu từ hệ số cơ sở cuối cùng (cũng là phần tử chính của hàng cuối cùng trong dạng bậc thang) đơn vị hóa nó rồi phát hiện ra phép thay thế hàng cần thiết để biến các hệ số đứng phía trên nó (trong cùng một cột) thành hệ số 0.
- Lặp lại quy trình trên cho từng cột có chứa hệ số cơ sở tiếp theo ở phía trên cho đến hết.

Ví dụ. Quy ma trận G ở ví dụ trên về dạng rút gọn.

Giải.

Hệ số cơ sở cuối cùng trong G là hệ số $(3,5)$ bằng "2", đơn vị hoá nó nhờ phép tỷ lệ hoá:

$$G=\begin{pmatrix} -3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3\to(1/2)h_3}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=H.$$

Thực hiện phép toán hàng, biến tất cả các hệ số đứng phía trên *hệ số cơ sở* cuối cùng, thành hệ số 0:

$$H=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & -6 & -15\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[h_1\to h_1+6h_3]{h_2\to h_2+2h_3}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & 0 & 9\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=K.$$

Xét *hệ số cơ sở* tiếp theo, đó là hệ số $(2,2)$ bằng “ -1”. Đơn vị hoá nó và biến các hệ số đứng phía trên, thành hệ số 0:

$$K=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -12 & 9 & 0 & 9\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[h_1\to h_1+9h_2]{h_2\to -h_2}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6 & -9 & 0 & 72\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=L$$

Xét *hệ số cơ sở* tiếp theo, đó là hệ số (1, 1) bằng “-3”. Đơn vị hoá nó nhờ phép tỷ lệ hoá:

$$L=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6 & -9 & 0 & 72\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{h_1\to(-1/3)h_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=U$$

Ma trận U thu được sau cùng là dạng rút gọn của A.

Chú ý rằng một ma trận có thể quy được về nhiều dạng bậc thang khác nhau vì các phần tử cơ sở có thể chọn tùy ý. Tuy nhiên nếu quy về dạng rút gọn thì ma trận thu được là duy nhất. Ta công nhận định lý sau đây phản ánh kết quả đó:

Định lý 1.3.7. (Định lý về tính duy nhất của dạng bậc thang rút gọn) *Ma trận bất kỳ A luôn quy được về dạng rút gọn nhờ quá trình rút gọn hàng và dạng rút gọn của A là duy nhất.*

1.3.2. Hạng của ma trận

Định nghĩa 1.3.8. Hạng của ma trận A là số các hàng khác hàng 0 có trong dạng rút gọn của A; ký hiệu là $r(A)$.

Vì trong dạng rút gọn của A, mỗi hàng khác hàng 0 đều có đúng một phần tử chính là phần tử cơ sở mà ta đã phát hiện trong quá trình quy A về dạng bậc thang. Hơn nữa, trong suốt quá trình quy từ dạng bậc thang về dạng rút gọn bằng "***phương pháp khử ngược***" thì các vị trí của những hệ số chính là không bao giờ thay đổi và vị trí của hệ số chính cũng là vị trí của các phần tử cơ sở. Nhờ nhận xét trên, ta còn tìm được hạng của ma trận qua các kết luận sau :

$r(A)$= số hàng khác 0 có trong một dạng bậc thang tùy ý của A.

= số phần tử cơ sở có trong một dạng bậc thang tùy ý của A.

= số các cột có chứa phần tử cơ sở trong một dạng bậc thang tùy ý của A.

Nếu A cỡ $m \times n$ thì từ nhận xét trên, suy ra

$r(A) \le m, r(A) \le n$, nghĩa là $0 \le r(A) \le \min\{m, n\}$.

Khi $A = O$ thì $r(A) = 0$. Khi $A \ne O$ thì $r(A) \ge 1$.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Giải. Vì A đã có dạng bậc thang nên hạng của A bằng số hàng khác 0 có trong A, tức là $r(A) = 3$.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Giải

Ta quy A về dạng bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 + 2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Từ ma trận dạng bậc thang B của A, ta suy ra $r(A) = 3$.

1.4. MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

Trong mục này ta chỉ xét với ma trận vuông cấp n và nghiên cứu tính chất khả nghịch của ma trận vuông. Tương tự như tính chất khả nghịch của số thực khác 0, vấn đề này đóng vai trò quan trọng trong các phép toán trên ma trận.

1.4.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.4.1. Ma trận $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sao cho $AB = I_n = BA$. Ma trận B là duy nhất vì nếu A có 2 ma trận nghịch đảo là B và C thì: $BA = I_n = AB$ và $CA = I_n = AC$, nên $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.

Khi đó ta gọi B là ma trận nghịch đảo của A. Ta ký hiệu $B = A^{-1}$.

Từ định nghĩa suy ra:

Nếu A khả nghịch thì: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Chứng tỏ A khả nghịch và tìm A^{-1}

Giải

A khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại B sao cho $AB = I_2 = BA$.

Dễ thấy B là ma trận vuông cấp 2 nên gọi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c=1 \\ 2b-d=0 \\ -a+c=0 \\ -b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Với $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,có $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Do tồn tại $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ để $AB = I_2 = BA$ nên A khả nghịch và $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Định lý 1.4.2. *Nếu* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ A, B *khả nghịch và* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *thì:*

a. A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.

b. αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

c. AB *khả nghịch và* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

d. A^T *khả nghịch và* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Chứng minh.

a. A^{-1} khả nghịch $\Leftrightarrow$ tồn tại C sao cho: $A^{-1}C = I_n = CA^{-1}$. Dễ thấy ở đây $C=A$ thoả mãn phương trình, suy ra A^{-1} là khả nghịch và nghịch đảo của A^{-1} chính là A.

b. Vì giả thiết khả nghịch nên tồn tại A^{-1} và $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Xét:

$$(\alpha A).\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = \left(\alpha.\frac{1}{\alpha}\right)(AA^{-1}) = 1.\mathrm{I}_n = I_n.$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right).(\alpha A) = \left(\frac{1}{\alpha}.\alpha\right).(A^{-1}A) = 1.I_n = I_n.$$

Chứng tỏ αA khả nghịch và nghịch đảo của αA là $\dfrac{1}{\alpha}A^{-1}$.

c. Hiển nhiên có

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Tương tự ta có $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Như vậy AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

d. Do $AA^{-1} = I_n \Leftrightarrow (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n$. Xét tương tự ta có $A^T(A^{-1})^T = I_n$; nghĩa là A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

1.4.2. Cách tìm ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.4.3. Ma trận E được gọi là sơ cấp nếu nó là ma trận thu được bằng cách thực hiện đúng một lần bởi một phép toán hàng trên ma trận đơn vị I_n.

Do có 3 loại phép toán hàng nên sẽ có 3 loại ma trận sơ cấp tương ứng, đó là: ma trận sơ cấp ứng với phép thay thế hàng, ma trận sơ cấp ứng với phép đổi hàng, ma trận sơ cấp ứng với phép tỉ lệ hóa.

Ví dụ. Ma trận nào dưới đây là ma trận sơ cấp và chỉ ra phép toán hàng tương ứng với nó:

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. E là ma trận sơ cấp, phép toán hàng tương ứng là: $h_1 \to h_1 + \alpha.h_3$ vì nếu ta thực hiện trên I_3 phép toán hàng tương ứng đó thì thu được E. Cụ thể:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \to h_1 + \alpha h_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

b) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. F là ma trận sơ cấp, phép toán hàng tương ứng là: $h_1 \leftrightarrow h_2$ vì nếu ta thực hiện trên I_2 phép toán hàng tương ứng đó thì thu được F. Cụ thể:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = F.$$

c) $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. G không phải là ma trận sơ cấp vì

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \to 2h_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \to h_1 + 3h_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G.$$

Có nghĩa là để thu được G từ I_3 ta cần phải thực hiện hai phép toán hàng. Nếu dùng bất cứ một phép toán hàng nào thì cũng không thể biến I_3 thành G được.

Định lý 1.4.4. *Nếu $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và E là ma trận sơ cấp ứng với phép toán hàng h thì EA là ma trận thu được do thực hiện chính phép toán hàng h đó trên A.*

Nếu $I_m \xrightarrow{h} E$ thì $A \xrightarrow{h} EA$

Chứng minh. Xét hàng thứ *i* của EA ta có $h_i(EA) = (h_i E).A$. Mặt khác, E và I_m chỉ khác nhau đúng một hàng (ứng với phép thay thế hàng hay phép tỷ lệ hóa) hoặc khác nhau đúng hai hàng (ứng với phép đổi hàng). Gọi k là chỉ số mà $h_k E = h_k(I_m)$ thì

$$h_k(EA) = (h_k E).A = (h_k I_m).A = h_k(I_m A) = h_k A.$$

Chứng tỏ với chỉ số *k* này, hàng*k* trong*EA* và hàng*k* tương ứng trong*A*là hoàn toàn giống nhau. Các hàng còn lại trong*EA* và trong*A* phụ thuộc vào loại của ma trận sơ cấp *E*. Giả sử xét hàng thứ $i \neq k$ và E là ma trận sơ cấp ứng với phép thay thế hàng: $h_i \to h_i + \alpha h_j$, nghĩa là có $h_i E = \alpha . h_i I_m + h_j I_m$. Khi đó:

$$h_i(EA) = (h_i E).A = (\alpha . h_i I_m + h_j I_m).A = (\alpha . h_i I_m).A + (h_j I_m).A$$
$$= \alpha . h_i (I_m A) + h_j (I_m A) = \alpha . h_i A + h_j A .$$

Điều này chứng tỏ là hàng*i*trong EA là hàng thu được do thực hiện phép thay thế hàng $h_i \to h_i + \alpha h_j$ trên *A*. Vậy, mọi hàng trong *EA* đều giống với hàng tương ứng trong ma trận thu được từ*A* nhờ thực hiện phép thay thế hàng. Đối với hai phép toán thay thế hàng còn lại được chứng minh tương tự. □

Định lý 1.4.5. *Với bất kỳ ma trận* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, luôn tồn tại một dãy hữu hạn các ma trận sơ cấp* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ *sao cho tích* $E_k.E_{k-1}.\ldots.E_1.A$ *đúng bằng ma trận dạng rút gọn của A.*

Chứng minh. Tồn tại một dãy hữu hạn các phép toán hàng để sau khi thực hiện nó, ma trận A được quy về dạng rút gọn U. Gọi E_1 là ma trận sơ cấp ứng với phép toán hàng thứ nhất, E_2 là ma trận sơ cấp ứng với phép toán hàng thứ hai,… và E_k là ma trận sơ cấp ứng với phép toán hàng cuối cùng. Áp dụng định lý trên, suy ra ngay tích $E_k.E_{k-1}.\ldots.E_1.A = U$ là dạng rút gọn của A.

Định lý 1.4.6. *Ma trận sơ cấp là khả nghịch. Hơn nữa nghịch đảo của một ma trận sơ cấp cũng là một ma trận sơ cấp.*

Chứng minh. Mỗi phép toán hàng đều có phép toán ngược. Do đó nếu thực hiện một phép toán hàng nào đó trên I_n đổi I_n thành ma trận sơ cấp*E* thì cũng có một phép toán hàng cùng loại thực hiện trên *E* để đổi *E* thành I_n. Nghĩa là có một ma trận sơ cấp*F* sao cho $FE = I_n$ (*). Vì *E* và *F* tương ứng với hai phép toán hàng ngược nhau nên $EF = I_n$ (**). Từ (*) và (**) suy ra *E* khả nghịch và $E^{-1} = F$ cũng là ma trận sơ cấp. □

Định lý 1.4.7. $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $A \sim I_n$. *Nếu A khả nghịch thì tích của các ma trận sơ cấp tương ứng với dãy các phép toán hàng khi quy A về I chính là* A^{-1} *.Chứng minh.*

1) Giả sử A khả nghịch. Khi đó phương trình $AX = B$ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$ với mọi ma trận cột $B \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Điều đó có nghĩa là trong dạng rút gọnU củaA, tất cả các cột đều phải chứa hệ số chính bằng 1 và $U = I_n$. Vậy $A \sim U = I_n$. Ngược lại, giả sử $A \sim I_n$, nghĩa là tồn tại dãy các ma trận sơ cấp $E_1, E_2, ..., E_k$ sao cho $E_k.E_{k-1}.....E_1.A = I_n$ (*). Vì mỗi E_i là ma trận sơ cấp nên nó khả nghịch $\forall i = 1..k$. Nhân trái cả hai vế của (*) với E_k^{-1} ta có:

$$E_k^{-1}(E_k.E_{k-1}.....E_1.A) = E_k^{-1}I_n \Leftrightarrow (E_k^{-1}E_k).E_{k-1}.....E_1.A = E_k^{-1}$$

$$\Leftrightarrow E_{k-1}.....E_1.A = E_k^{-1} \text{ (**)}.$$

Lại nhân cả hai vế của (**) với $E_{k-1}^{-1}, \dots$ và tiếp tục quá trình trên cho đến bước thứ k, nhân hai vế của phương trình thu được ở bước thứ $k-1$, với E_1^{-1} thì có:

$$E_1^{-1}(E_1A) = E_1^{-1}(E_2^{-1}...E_k^{-1})I_n \text{ hay } A = E_1^{-1}E_2^{-1}...E_k^{-1}.$$

Vì A bằng tích các ma trận khả nghịch E_i^{-1}, $\forall i = 1..k$ nên A khả nghịch.

2) Do $A = E_1^{-1}E_2^{-1}...E_k^{-1}$ suy ra

$$A^{-1} = (E_1^{-1}E_2^{-1}...E_k^{-1})^{-1} = E_kE_{k-1}...E_1.$$

Như vậy, nếu dãy các phép toán hàng quy A về I_n thì chúng (cũng theo thứ tự cũ) sẽ quy I_n về A^{-1}. Ma trận nghịch đảo của A tìm được theo thuật toán gồm các bước sau:

Bước 1: Lập ma trận gồm hai khối: $(A \mid I_n)$.

Bước 2: Áp dụng thuật toán rút gọn hàng, quy khối trái về I_n. Khi đó, khối phải là A^{-1} cần tìm.

Chú ý rằng thuật toán vừa nêu trên chỉ mới khẳng định trong trường hợp A quy được về I_n (tức A tương đương hàng I_n) thì A^{-1} là khối phải. Trong trường hợp ngược lại *nếu không quy được A về I_n* (tức A không tương đương hàng với I_n) thì định lý ở mục sau sẽ chứng minh được A là không khả nghịch, tức không tồn tại A^{-1}. □

Ví dụ 7. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Giải

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_1 \to h_1 + 2h_3]{h_3 \to (-1)h_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1 \to h_1 - h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Định lý 1.4.8. *Giả sử* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *thì* $A \sim B$ *khi và chỉ khi tồn tại ma trận khả nghịch* $P \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *sao cho* $B = PA$ *.*

Chứng minh. Do $A \sim B$ nên tồn tại dãy các ma trận sơ cấp $E_1, E_2, \ldots.., E_k$ sao cho $E_k.E_{k-1}.....E_1.A = B$. Đặt $P = E_k.E_{k-1}.....E_1$ thìPlà tích các ma trận sơ cấp nênP khả nghịch và $B = PA$. Ngược lại, nếu $B = PA$ vớiP khả nghịch thì P là tích của dãy các ma trận sơ cấp $E_k, E_{k-1}, \ldots, E_1$ nên B được phân tích thành $B = E_k.E_{k-1}.....E_1.A$, tức là $A \sim B$. □

Tổng kết lại các kết quả đã trình bày, ta có định lý sau đây nêu rõ các tính chất của ma trận khả nghịch.

Định lý 1.4.9. *Với* $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*, các mệnh đề sau đây là tương đương:*

1) A khả nghịch.

2) $r(A) = n$.

3) A là tích của một số hữu hạn các ma trận sơ cấp.

4) Hệ thuần nhất $AX = O$ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.

5) Hệ tuyến tính $AX = B$ có nghiệm duy nhất với mọi ma trận cột $B \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

6) Tồn tại $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sao cho $AB = I_n$.

7) Tồn tại $C \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sao cho $CA = I_n$.

8) A^T khả nghịch.

Chứng minh:

- Đã có các chứng minh $(1) \Leftrightarrow (2)$ do định lý (1.4.5).
- $(1) \Leftrightarrow (3)$ vì $(3) \Rightarrow (1)$ là hiển nhiên, do các ma trận sơ cấp là các ma trận khả nghịch. Ngược lại, $(1) \Rightarrow (3)$ do định lý (1.4.5).
- $(2) \Leftrightarrow (4)$ và $(2) \Leftrightarrow (5)$ do định lý Kronecker-Capelli (xem chi tiết [1]).
- Chứng minh $(1) \Leftrightarrow (6)$. Hiển nhiên ta có $(1) \Rightarrow (6)$. Ta cần chứng minh thêm $(6) \Rightarrow (1)$. Thật vậy, do $AB = I_n$ nên B khả nghịch (nếu B không khả nghịch thì hệ thuần nhất $BX = \mathrm{O}$ có nghiệm không tầm thường, nghĩa là tồn tại $X_0 \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $X_0 \neq \mathrm{O}$ sao cho $BX_0 = \mathrm{O}$. Lúc đó $A(BX_0) = (AB)X_0 = I_n X_0 = X_0$ và $A(BX_0) = A.\mathrm{O} = \mathrm{O}$ nên $X_0 = \mathrm{O}$: vô lý). Do B khả nghịch, nên $A = I_n B^{-1}$ là tích hai ma trận khả nghịch, sẽ khả nghịch.
- $(1) \Leftrightarrow (7)$ vì $(1) \Rightarrow (7)$ do định nghĩa. Ngược lại, ta có $(7) \Rightarrow (1)$ vì nếu $CA = I_n$ thì do (6), C khả nghịch. Suy ra $A = C^{-1} I_n$ là khả nghịch vì C^{-1} và I_n đều khả nghịch.
- $(1) \Leftrightarrow (8)$ vì $(1) \Rightarrow (8)$ do định lý (1.4.2). Ngược lại, nếu

  A^T khả nghịch thì $(A^T)^T = A$ khả nghịch. □

Định lý 1.4.10. *Giả sử $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ là ma trận khả nghịch. Khi đó, ta có:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.[Cof(A)]^T.$$

Chứng minh.

Cho

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, C = Cof(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó:

$$A.[Cof(A)]^T = \begin{pmatrix} \langle h_1A, h_1C\rangle & \langle h_1A, h_2C\rangle & \cdots & \langle h_1A, h_nC\rangle \\ \langle h_2A, h_1C\rangle & \langle h_2A, h_2C\rangle & \cdots & \langle h_2A, h_nC\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle h_nA, h_1C\rangle & \langle h_nA, h_2C\rangle & \cdots & \langle h_nA, h_nC\rangle \end{pmatrix}.$$

Nhờ kết quả chứng minh 3) của định lý (1.2.10) ta có

$$\langle h_jA, h_iC\rangle = \begin{cases} \det A & khi \quad i = j \\ 0 & khi \quad i \neq j \end{cases}.$$

Suy ra:

$$A.[Cof(A)]^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A).I_n.$$

Nếu A là khả nghịch thì $\det A \neq 0 \Rightarrow A.\left[\frac{1}{\det A}.[Cof(A)]^T\right] = I_n$

. Suy ra: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.[Cof(A)]^T$ (1.8).

Phương pháp tính A^{-1} bằng công thức (1.8) trên đây được gọi là *phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức.*

Đặc biệt, nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai, khả nghịch thì có công thức tính ma trận nghịch đảo khá thuận tiện sau đây:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(đường chéo chính: đổi chỗ; đường chéo ngược: đổi dấu).

Ví dụ 8.

a. Nếu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ thì ta có ngay $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ bằng phương pháp định thức.

- Công thức: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.[Cof(A)]^T$

- $C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2$, $C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$, $C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$,

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14$, $C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$, $C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$,

$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

$$\Rightarrow Cof(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 14 & -7 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det A = 2.C_{11} + 1.C_{12} + 3.C_{13} = 2.(-2) + 1.3 + 3.5 = 14 \neq 0$.

Suy ra A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.[Cof(A)]^T = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét: Khi tìm A^{-1} ta dùng phương pháp rút gọn hàng sẽ thuận lợi khi $|A|$ có trị tuyệt đối nhỏ. Ta dùng phương pháp định thức sẽ thuận lợi khi $n \leq 3$. Phương pháp nào cũng có ưu và nhược điểm. Tùy theo ma trận mà ta linh hoạt sử dụng phương pháp.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1: Thực hiện phép nhân các ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 11 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bài 2:

a) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tính $(2A + 3B)C$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính $(AB)C$, $(C^T B^T)A^T$.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

d) Tính AB, A^2, $A^T A$, $AB - 3B$.

Bài 3: Tìm các số x, y, z, t nếu

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 4:

Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 100 có các hệ số ở hàng thứ i là $(-1)^i$. Tìm hệ số b_{36} của ma trận $B = A^2$.

Bài 5: Tính A^n $(n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\})$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

Bài 6: Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tính $(I_2 - A)^{2009}$.

Bài 7: a) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Tính $f(A)$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Tìm k để A là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Bài 8: Hai ma trận được gọi là giao hoán nếu $AB = BA$**.**

a) Tìm các ma trận giao hoán với ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Tìm các ma trận giao hoán với ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bài 9: Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 & -3 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & -3 & 4 \\ -5 & -8 & -4 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

c)

e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Bài 10: Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & a+x & x \\ x & x & a+x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \dots & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} n & a & a & \dots & a \\ a & n & a & \dots & a \\ a & a & n & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & a & \dots & n \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & n \\ a & a & a & \dots & n & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ n & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$

Bài 11: Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Bài 12:

a) Không cần tính định thức, hãy chứng minh rằng $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \vdots\, 23$

b) Biết các số 204; 255; 527 đều chia hết cho 17. Không cần tính định thức, hãy chứng minh rằng $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \vdots\, 17$.

Bài 13: Chứng minh rằng $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ chia hết cho $(x-y),(y-z)$ và $(z-x)$, trong đó x,y,z là các số nguyên.

Bài 14: Chứng minh rằng

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{k=i+1}^{n}(x_k - x_i)\right).$$

Áp dụng công thức trên để tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x & 4 \\ 1 & 4 & x^2 & 16 \\ -1 & 8 & x^3 & 64 \end{vmatrix}.$$

Bài 15: Giải phương trình với ẩn số thực x (a và b là các tham số thực)

a) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0 \quad (a^2 \neq b^2)$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & x & x & -2 \\ 3 & 8 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$

Bài 16: Biện luận theo tham số thực a về hạng của các ma trận

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$ b) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

e) $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Bài 17: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của A, nếu có, bằng phương pháp Gauss – Jordan.

Bài 18: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của A, nếu có, bằng cách sử dụng định thức.

Bài 19: Tìm ma trậnX trong các trường hợp sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

b) $X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

g) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Bài 20: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5-m \\ m+1 & 1 & 3 \\ 3 & m-1 & 3 \end{pmatrix}$, với $m \in \mathbb{R}$.

a) Với giá trị nào của m thì tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}.

b) Cho $m = -1$. Tìm A^{-1}.

Bài 21: Tìm hạng của các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 12 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bài 22:Tìm m để hạng của các ma trận sau bằng 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & m+2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & m \end{pmatrix}$$

Bài 23: Tìm m để mỗi ma trận sau khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & m+2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m+1 & 2 & 1 \\ 2 & m-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài 24: Cho $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ và $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm $f(A)$.

Bài 25: Tính các định thức cấp 3 dưới đây:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix};$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix};$$

$$|D| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Bài 26: Giải các phương trình (với x là ẩn số thực, a,b là các tham số thực)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bài 27:Tính các định thức cấp bốn sau:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad |B|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$|C|=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}; \quad |D|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Bài 28:Tìm m để các định thức $\Delta \neq 0$:

$$a)\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix};$$

$$b)\Delta = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bài 29: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Tính $\sum_{n=0}^{2017} 2^n A^n$;

2) Tính B^{2017} với $B = A + I_4$.

Bài 30: Tìm các ma trận nghịch đảo nếu có của các ma trận sau bằng phương pháp rút gọn hàng

$$a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ d.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ f.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 31: Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng phương pháp định thức:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad d)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 32: Tìm hệ số ở dòng 2 cột 3 của A^{-1} trong các trường hợp sau:

$$a.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ b.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 33: Thực hiện các phép tính sau:

$$a.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-2}$$

$$b.\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}.$$

Bài 34: Tìm hệ số b_{38} của ma trận $B = A^2$ trong các trường hợp sau:

1) $A = (a_{ij})_{2017}$ có các hệ số $a_{ij} = (-1)^{ij}$;

2) $A = (a_{ij})_{2017}$ có các hệ số $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

Bài 35:Tính định thức của các ma trận sau:

$$1.\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 7 & 0\\ 7 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 4 & 4 & 0\end{pmatrix};2.\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix};$$

$$3.\begin{pmatrix}7 & 1 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 4 & 6\\ 1 & 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{pmatrix}4.\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$;5.\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 4 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix};6.\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Bài 36:Tìm hạng của các ma trận sau:

$$1.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix};2.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 18 & 36 \end{pmatrix}.$$

Bài 37: Thực hiện các phép tính sau:

$$1.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. $\left[\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]^T$;

6. $\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^T$

Bài 38: Thực hiện các phép tính sau:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^6$; 2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; 4. $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3$; 6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$.

Bài 39: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Thực hiện các phép tính $A^T A; AA^T; A^2 A^T; A^T A^2$.

Bài 40: Cho $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{2017}$.

Bài 41: Biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số m

$$1.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 11 & 13 & 16 \\ 10 & 16 & 22 & 26 & m \end{pmatrix}; 2.\begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2m & 5 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3m & 7 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 5m & 12 & 7 & 2 & 5 & m \end{pmatrix};$$

$$3.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; 4.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 42:Tính các định thức cấp n sau:

1. $\begin{pmatrix} a & x & \dots & x \\ x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & \vdots & n \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & n \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$.

CHƯƠNG 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 2.1.1. Cho các số nguyên dương m và n. Ta gọi hệ phương trình tuyến tính tổng quát là một hệ gồm m phương trình và n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó a_{ij}, b_i $(i = 1...m; j = 1...n)$ là các số thực cho trước, còn x_j $(j = 1..n)$ là các ẩn số thực cần tìm. Các số a_{ij} $(i = 1..m; j = 1..n)$ được gọi là các hệ số của các ẩn, các số b_i ở vế phải $(i = 1...m)$ được gọi là hệ số tự do.

Một nghiệm (*hay một lời giải*) của hệ (2.1) là một bộ gồm n số thực $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ mà khi thế tương ứng vào các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì tất cả các phương trình trong (2.1) đều được thỏa.

Giải hệ (2.1) nghĩa là tìm tập hợp nghiệm của nó.

Cho hệ phương trình tuyến tính (2.1). Ma trận lập bởi các hệ số a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận hệ số của hệ (2.1). Các ma trận cột $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ tương ứng được gọi là cột ẩn và cột hệ số tự do. Khi đó, hệ (2.1) có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$AX = B.$$

Ma trận hệ số có bổ sung thêm cột cuối cùng là cột các hệ số tự do, được gọi là ma trận đầy đủ. Ký hiệu:

$$A^* = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Mỗi cột trong ma trận hệ số A tương ứng với một ẩn.

Định nghĩa 2.1.2. Hai hệ tuyến tính được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng số ẩn và có cùng tập hợp nghiệm.

2.2. HỆ CRAMER

Định nghĩa 2.2.1. Hệ tuyến tính $AX = B$ được gọi là hệ Cramer nếu ma trận hệ số Alà ma trận vuông khả nghịch.

Định lý 2.2.2 **(Quy tắc Cramer)**. *Cho hệ Cramer* $AX = B$ *với* $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *và* $B \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. *Gọi* A_j $(1 \le j \le n)$ *là ma trận thu* *được từ A nhờ thế cột B vào thay cho cột j trong A. Khi đó hệ* $AX = B$ *có nghiệm duy nhất* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. *Trong đó* x_j *được tính bởi:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, j = 1...n$$

Công thức nghiệm $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}, j = 1..n$ *thường gọi là công thức Cramer. Để thuận tiện, ta ký hiệu* $D = \det A$ *với* $D_j = \det A_j$ *thì công thức Cramer có dạng:*

$$x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1...n.$$

Chứng minh.

Gọi $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ và $C = Cof(A) = (C_{ij})$. Do A khả nghịch nên $AX = B$ tương đương với

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} C^T B.$$

Suy ra với bất kỳ $j = 1...n$ thì:

$$x_j = \frac{1}{\det A}(h_j C^T)B = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} C_{kj} b_k \quad (*)$$

Mặt khác, khai triển $\det A_j$ theo cột j, ta có $\det A_j = \sum_{k=1}^{n} b_k C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} C_{kj} b_k$. Thay $\sum_{k=1}^{n} C_{kj} b_k = \det A_j$ vào $(*)$, ta thu được $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$. □

Ví dụ 2.2.3. Tìm ẩn x_3 của hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Giải.

- Ta có $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6.$

- Thay cột 3 trong A bởi cột tự do B, có

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -11.$$

- Áp dụng công thức: $x_3 = \dfrac{D_3}{D} = -\dfrac{11}{6}$.

Ví dụ 2.2.4. Giải hệ $AX = B$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ với $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ với a, b, c là các tham số thực.

Giải

Do $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ nên A khả nghịch và

$X = A^{-1}B$.

- Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}[Cof(A)]^T = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Với $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ thì

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Với $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ thì $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b-c \\ a+b-c \\ a+b+c \end{pmatrix}$

2.3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Định lý 2.3.1. Hai hệ tuyến tính có ma trận đầy đủ tương đương hàng với nhau là hai hệ tương đương.

Do tính chất mọi phép toán hàng đều có phép toán hàng ngược và định nghĩa của hai ma trận tương đương hàng mà định lý trên là hiển nhiên. Vai trò quan trọng của định lý là ở chỗ nó là cơ sở cho *phương pháp giải hệ tuyến tính bằng quá trình rút gọn hàng* trên ma trận đầy đủ (mà sau này gọi là *phương pháp Gauss*). Nội dung cơ bản của phương pháp là *quy ma trận đầy đủ của hệ về dạng rút gọn*, để từ đó tìm ra nghiệm.

Ví dụ 2.3.2. Giải hệ sau: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases}$.

Giải.

Lập ma trận đầy đủ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$

Quy ma trận A^* về dạng rút gọn:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 + 2h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{h_2 \to h_2 - h_3 \\ h_1 \to h_1 - 2h_3}]{h_3 \to (-1)h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_1 \to h_1 + h_2]{h_2 \to (-1)h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1 \to h_1 - h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = U.$$

Do $\mathrm{A}^* \sim \mathrm{U}$ nên hệ đã cho tương đương với hệ nhận U là ma trận đầy đủ:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(0; 2; -1)$.

Khi xét các ví dụ về giải hệ tuyến tính bảng thuật toán rút gọn hàng trên ma trận đầy đủ, ta thấy một hệ tuyến tính bất kỳ có thể có nghiệm hoặc không có nghiệm. Vấn đề tự nhiên đặt ra là cần phải có những dấu hiệu nào đó cho phép nhận biết được hệ nào là có nghiệm, hệ nào không. Thật may mắn, thuật toán rút gọn hàng luôn quy được ma trận đầy đủ A* của hệ về dạng bậc thang, và trên ma trận dạng bậc thang, lại áp dụng được dấu hiệu khá thuận tiện cho bởi định lý sau đây:

Định lý 2.3.3. *Giả sử hệ (2.1) có* $(S \mid C)$ *là dạng bậc thang của ma trận đầy đủ* $A^* = (A \mid B)$. *Khi đó:*

1) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi ma trận $(S \mid C)$ *không chứa hàng dạng:*

$$(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 | \alpha) \text{ với } \alpha \neq 0. \quad (*)$$

2) Khi hệ có nghiệm, chỉ có 2 khả năng xảy ra:

a) Nếu số ẩn chính bằng số ẩn (của cả hệ) thì hệ có nghiệm duy nhất.

b) Nếu số ẩn chính ít hơn số ẩn thì hệ có vô số nghiệm.

(trong đó 'số ẩn chính' là số cột chứa phần tử chính của hệ phương trình).

Chứng minh. 1) Giả sử hệ có nghiệm. Nếu $(S \mid C)$ có chứa hàng $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 | \alpha)$ với $\alpha \neq 0$ thì hệ vô nghiệm vì không thể có bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nào thỏa mãn được phương trình

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \alpha \neq 0$. Do đó $(S \mid C)$ không chứa hàng $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 | \alpha)$ với $\alpha \neq 0$.

Ngược lại, nếu $(S \mid C)$ không chứa hàng nào có dạng thì mỗi hàng của $(S \mid C)$ có dạng $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 | 0)$ hoặc trên hàng có phần tử chính của S. Khi đó, bỏ qua các hàng dạng $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 | 0)$, (vì nó ứng với phương trình $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, thỏa với mọi bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) và chỉ giữ lại các hàng có chứa hệ số chính, để được hệ tuyến tính mới. Ta gán cho các ẩn tự do những giá trị hoàn toàn tuỳ ý, và tính ra được các ẩn chính bằng phép thế ngược. Do đó hệ là *có nghiệm*.

2) Giả sử hệ là có nghiệm. Hiển nhiên rằng số các ẩn chính không thể lớn hơn số các cột của ma trận hệ số A. Xét 2 khả năng sau:

Nếu xảy ra số các ẩn chính bằng số các cột của A thì mọi ẩn đều là ẩn chính và nó được giải ra một cách duy nhất nhờ phép thế ngược đối với hệ có ma trận đầy đủ là $(S \mid C)$.

Ngược lại, nếu số ẩn chính ít hơn số cột, sẽ có một số ẩn là ẩn tự do, giá trị của nó được chọn hoàn toàn tùy ý nên ẩn chính nhận vô số giá trị, tùy thuộc vào việc gán trị cho các ẩn tự do. Như vậy hệ có vô số nghiệm.□

Ví dụ 2.3.4. Hệ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 19 \end{cases}$ có nghiệm hay không?

Giải

Quy ma trận đầy đủ về dạng bậc thang:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 4 & 9 & -3 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 4h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = (S \mid C)\cdot$$

Kết luận ngay được hệ *có nghiệm* vì $(S \mid C)$ có dạng bậc thang và không chứa hàng nào có dạng $[0\ 0 \ldots 0 \,|\, \alpha]$ với $\alpha \neq 0$.. Hơn nữa, hệ có nghiệm duy nhất vì cả 3 ẩn của hệ đều là 3 ẩn chính. Cụ thể là:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{7}{2} \\ x_2 = \dfrac{7}{2} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.5. Hệ: $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -5 \\ x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_4 + 2x_5 = -5 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ có nghiệm hay không?

Giải

Lập ma trận

$$A^* = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Do A^* đã có dạng bậc thang và trong A^* không có hàng dạng $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|\alpha)$ với $\alpha \neq 0$ nên hệ có nghiệm. Hơn nữa, trong ma trận A có 4 cột chứa phần tử chính theo thứ tự là c_1A, c_2A, c_4A, c_5A nên hệ có 4 ẩn chính là x_1, x_2, x_4, x_5. Tổng số ẩn của hệ là 5 nên hệ có 1 ẩn tự do. Ẩn tự do là x_3 tương ứng với cột 3, (là cột không chứa hệ số chính). Áp dụng định lý trên, ta thấy hệ có *vô số nghiệm*. Cụ thể như sau:

Đặt $x_3 = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -5 \\ x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_4 + x_5 = -5 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2a \\ x_2 = -8 - 6a \\ x_4 = -5 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Định lý 2.3.6. *(Định lý Kronecker-Capelli) Cho hệ phương trình tuyến tính:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

có $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận hệ số và $A^* = (A\,|\,B)_{m\times(n+1)}$ là ma trận đầy đủ.

Khi đó:

1) Hệ (2.1) là hệ có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận hệ số A bằng hạng của ma trận đầy đủ A^* : $r(A) = r(A^*)$.

2) Khi hệ (1) là hệ có nghiệm, có 2 khả năng:

a) Nếu $r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

b) Nếu $r(A) < n$, hệ có vô số nghiệm với $n - r(A)$ ẩn tự do.

Chứng minh.

1) Trước hết nhận xét rằng dạng rút gọn của A chính là ma trận tạo bởi n cột đầu tiên trong dạng rút gọn của A^*. Suy ra $r(A^*) \geq r(A)$ (a). Hệ (2.1) *vô nghiệm* khi và chỉ khi trong dạng bậc thang rút gọn của A^* có chứa hàng dạng $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|\alpha)$ với $\alpha \neq 0$. Điều đó tương đương với $r(A^*) > r(A)$. Vậy hệ (2.1) *có nghiệm* khi và chỉ khi $r(A^*) \leq r(A)$ (b). Kết hợp (a) với (b) suy ra (2.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A^*) = r(A)$.

2) Suy ra từ định lý (2.3.3) ở trên. □

Ví dụ 2.3.7. Hệ sau đây có nghiệm hay không?

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Giải

Quy A^* về dạng bậc thang như sau:

$$A^* \xrightarrow[\substack{h_2 \to h_2 - h_1 \\ h_3 \to h_3 - h_1 \\ h_4 \to h_4 - 2h_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 + h_2 \\ h_4 \to h_4 + h_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Do $r(A^*) = r(A) = 2$ nên hệ có nghiệm. Hơn nữa, hệ có vô số nghiệm vì $r(A) < n = 3$. Số ẩn tự do của hệ là $n - r(A) = 3 - 2 = 1$ ẩn tự do.

Đặt $x_3 = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2a \\ x_2 = a - 2 \end{cases}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2.3.8. Hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ có nghiệm hay không?

Giải

Quy ma trận đầy đủ về dạng bậc thang để tìm hạng:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Do $r(A) = 2 < r(A^*)$ nên hệ vô nghiệm.

THUẬT TOÁN GAUSS

Giải hệ tuyến tính bằng cách quy ma trận đầy đủ của hệ về dạng rút gọn được gọi là phương pháp Gauss. Để thuận tiện trong thực hành, phương pháp Gauss thường được tiến hành theo lược đồ gồm 4 bước sau:

Bước 1: *Viết ra ma trận đầy đủ* A^* *của hệ tuyến tính.*

Bước 2: *Dùng thuật toán rút gọn hàng, quy ma trận đầy đủ* A^* *về dạng bậc thang. Khẳng định hệ có nghiệm hay không, nếu hệ có nghiệm, thực hiện bước tiếp theo.*

Bước 3: *Quy dạng bậc thang của* A^* *về dạng rút gọn.*

Bước 4: *Từ dạng rút gọn, viết ra nghiệm của hệ.*

Ví dụ 2.3.9. Giải hệ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$.

Giải

Bước 1: Lập ma trận đầy đủ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right)$.

Bước 2: Quy ma trận A^* về dạng bậc thang:

$$A^* \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 4h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) = B$$

Từ B suy ra $r(A^*) = r(A) = 3$ nên hệ có nghiệm.

Bước 3: Tiếp tục quy B về dạng rút gọn:

$$B \xrightarrow{h_3 \to -\frac{1}{8}h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_1 \to h_1 - 5h_3]{h_2 \to h_2 + 2h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2 \to -\frac{1}{3}h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \to h_1 - 2h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = U.$$

Bước 4: Từ dạng rút gọn U, ta viết ra nghiệm: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$

Ví dụ 2.3.10. Giải hệ: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}.$

Giải

Khi đã thành thạo các bước của phương pháp Gauss, ta có thể trình bày ngắn gọn lời giải như sau:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - 3h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 \to h_2 - 3h_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 18 & -11 & 16 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4 \to h_4 - 11h_2]{h_3 \to h_3 - 5h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 18 & -11 & 16 \\ 0 & 0 & -89 & 56 & -88 \\ 0 & 0 & -178 & 112 & -174 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4 \to h_4 - 2h_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 18 & -11 & 16 \\ 0 & 0 & -89 & 56 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Hệ vô nghiệm vì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$.

Ví dụ 2.3.11. Giải hệ: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 7x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$.

Giải

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{h_2 \to h_2 - 2h_1 \\ h_3 \to h_3 + h_1 \\ h_4 \to h_4 - 2h_1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_2]{h_3 \to h_3 - 2h_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_3]{h_3 \to (-1)h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 \to h_2 - 4h_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \to h_1 + h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = U .$$

Từ ma trận dạng rút gọn U, ta phát hiện ẩn x_3 ứng với cột là cột không chứa phần tử chính nên x_3 là ẩn tự do, còn x_1, x_2, x_4 là các ẩn chính. Đặt ẩn tự do $x_3 = t \in \mathbb{R}$, ta có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

hay viết ngắn gọn nghiệm là: $(-1-t, t, t, 0), t \in \mathbb{R}$.

Nhận xét về phương pháp Gauss:

Khi thực hiện thuật toán rút gọn hàng trên ma trận, ta gặp điều bất lợi là phải viết lại ma trận nhiều lần; do đó cần phải kết hợp một lúc nhiều phép toán cho một lần đổi ma trận (như các ví dụ trên đã trình bày).

Ngày nay, việc giải hệ tuyến tính được thực hiện trên máy tính đang ngày càng phổ biến do tính hiệu quả của nó. Tuy nhiên, tính chính xác của nghiệm do máy tìm được, đôi khi lại là điều băn khoăn lớn của chúng ta. Hãy xem ví dụ sau như là một minh họa:

Ví dụ 2.3.12. Cho hệ: $\begin{cases} 0,1000x_1 + 0,9990x_2 = 1,000 \\ 0,1000x_1 + 1,000x_2 = 1,006 \end{cases}$.

Các hệ số được cho với 4 chữ só có nghĩa, kết quả nghiệm do máy tìm được là:

$$\begin{cases} x_1 = -49,94 \\ x_2 = 6,000 \end{cases}.$$

Giả sử rằng các hệ số được làm tròn với chữ số có nghĩa, hệ trở thành hệ mới “gần” như hệ cũ:

$$\begin{cases} 0,100x_1 + 0,999x_2 = 1,00 \\ 0,100x_1 + 1,00x_2 = 1,01 \end{cases}$$

nhưng khi đó nghiệm là:

$$\begin{cases} x_1 = -89,9 \\ x_2 = 10 \end{cases}.$$

Qua trên ta thấy, chỉ cần một thay đổi nhỏ trong hệ số ở vế phải của hệ, nghiệm tìm được đã khác rất nhiều so với nghiệm ban đầu. Về mặt hình học, nghiệm của hệ trên chính là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng “gần song song”, chỉ cần thay đổi một chút về vị trí của một trong hai đường thẳng là tức khắc tạo ra sự dịch chuyển lớn về giao điểm của chúng. *Nguyên nhân* *là ở chỗ*: số thực được biểu diễn trên máy tính chỉ với một số hữu hạn các chữ số nên việc làm tròn số hay cắt đi một số chữ số, tất yếu sẽ dẫn đến sai số. Khi làm việc với một số lớn các phép tính số học, các sai số này được gia tăng thêm và chúng gây nên sự khác biệt lớn giữa nghiệm tìm được và nghiệm đúng. Việc giải quyết vấn đề này thuộc phạm vi các giáo trình phương pháp tính, còn ở đây ta chỉ cần ý thức được nguồn gốc của những sai số gặp phải khi tìm nghiệm của hệ tuyến tính bằng máy để có được những giải pháp hợp lý khi thực hành cụ thể.

2.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Định nghĩa 2.4.1. *Hệ tuyến tính có mọi hệ số ở vế phải đều bằng 0 được gọi là hệ tuyến tính thuần nhất, hay đơn giản là hệ thuần nhất.*

Như vậy, hệ thuần nhất là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Việc giải hệ tuyến tính thuần nhất không cần thêm công cụ và kỹ thuật mới. Tuy nhiên do ma trận đầy đủ A^* của hệ có cột cuối cùng là cột 0, sẽ không có gì thay đổi qua các phép toán hàng. Vì vậy khi giải hệ thuần nhất, ta chỉ cần biến đổi trên ma trận hệ số A là đủ. Mặt khác luôn có $r(A^*) = r(A)$ nên hệ thuần nhất luôn có nghiệm. Định lý sau đây là hiển nhiên.

Định lý 2.4.2. *Cho hệ thuần nhất* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0; i = 1..m$ *(2.3)*

với ma trận hệ số $A = (a_{ij})_{m\times n}$*. Khi đó:*

a) Hệ thuần nhất (2.3) luôn có nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0,0,\dots,0)$ *gọi là nghiệm tầm thường.*

b) *Hệ thuần nhất (2.3) có nghiệm duy nhất (là nghiệm tầm thường) khi và chỉ khi* $r(A) = n$*. Nếu* $r(A) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm, với* $n - r(A)$ *ẩn tự do.*

Nghiệm biểu diễn theo các ẩn tự do của hệ thuần nhất thường được gọi là *nghiệm tổng quát*.

Ví dụ 2.4.3. Giải hệ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 13x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}.$

Giải

Quy ma trận hệ số về dạng rút gọn:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 & 3 & 13 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_1 \to h_1 - 2h_2]{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Từ U, ta có 3 ẩn tự do là x_3, x_4 và x_5. Đặt $x_3 = t \in \mathbb{R}, x_4 = u \in \mathbb{R}, x_5 = v \in \mathbb{R}$ thì

nghiệm tổng quát của hệ là: $\begin{cases} x_1 = -u - 2v \\ x_2 = -t - v \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = u \in \mathbb{R} \\ x_5 = v \in \mathbb{R} \end{cases}.$

Ngiệm tổng quát còn được viết dưới dạng:

$$\mathbf{x} = (-u - 2v, -t - v, t, u, v) = t(0,-1,1,0,0) + u(-1,0,0,1,0) + v(-2,-1,0,0,1)$$

Gán lần lượt các giá trị cho các ẩn tự do:

Gán $t=1, u=v=0$ hệ có 1 nghiệm là $(-1, 0, 0, 1, 0)$.

Gán $t=0, u=1, v=0$ hệ có 1 nghiệm là $(-1, 0, 0, 1, 0)$.

Gán $t=0, u=0, v=1$ hệ có 1 nghiệm là $(-2, -1, 0, 0, 1)$.

Tập gồm 3 nghiệm $\{(0, -1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (-2, -1, 0, 0, 1)\}$ gọi là *tập hợp nghiệm cơ bản* của hệ thuần nhất. Sau này, khi học đến không gian véc tơ, tập hợp nghiệm cơ bản chính là *cơ sở* của *không gian nghiệm* của hệ thuần nhất đã cho.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_3 + x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_4 + x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1 \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

Bài 2: Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số thực m, a, b, c và λ :

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_2 = 3 \\ 7x_3 + 5x_1 + 6x_2 = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = m \\ 2x - y + 2z = 2m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ y + mz + 2x = 3 \\ 3z + x + my = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - z + t = m \\ 2x + 2t + 5y - 2z = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$

Bài 3: Xác định các giá trị của tham số thực m sao cho các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ 2x + my + 8z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} mx + 2z = 1 \\ mx + 2y + 2z = -1 \\ -x - mz = 0 \\ 2x + my + 4z = 1 \end{cases}$

i) Vô nghiệm.

ii) Có duy nhất nghiệm.

iii) Có vô số nghiệm.

Bài 4: Tìm điều kiện của tham số thực m, a, b, c để các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2+m)x + my + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y+4z=a \\ 2x+3y-z=b \\ 3x+y+2z=c \end{cases}$

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x_1+x_2+mx_3=1 \\ x_1+mx_2+x_3=a \\ x_1+(1+m)x_2+(1+m)x_3=b \end{cases}$,

với a,b,m là các tham số thực.

a) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất.

b) Tìm a và b để hệ trên có nghiệm với mọi giá trị của m.

Bài 6: Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số thực n,a và b:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=1 \\ x_2+2x_3+3x_4+\cdots+nx_1=2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ x_n+2x_1+3x_2+\cdots+nx_{n-1}=n \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=1 \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=2 \\ bx_1+bx_2+ax_3+\cdots+bx_n=3 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=n \end{cases}$.

Bài 7: Chứng minh hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi số thực a, b, c, d và $a \neq 0$

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d \end{cases}.$$

Bài 8: Cho $a_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \frac{1}{2}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \frac{1}{2}x_2 \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \frac{1}{2}x_n \end{cases}$$

Bài 9: Với những giá trị nào của tham số thực m thì hệ sau có nghiệm không tầm thường? Tìm nghiệm tổng quát của hệ trong trường hợp đó.

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Bài 10: Biện luận và giải theo tham số thực a hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + ax_4 = 0 \end{cases}$$

Bài 11: Cho $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ thỏa điều kiện $a_{ij} + a_{ji} = 0$ và n lẻ. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}.$$

CHƯƠNG 3. KHÔNG GIAN VÉC TƠ

3.1. KHÁI NIỆM VỀ KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ KHÔNG GIAN CON

Cho V là tập khác $\varnothing$ bất kỳ, ánh xạ đặt tương ứng cặp phần tử $(u,v)\in V\times V$ với phần tử ký hiệu là $u+v\in V$ được gọi là *phép cộng* trên V ánh xạ đặt tương ứng cặp phần tử $(\alpha,v)\in\mathbb{R}\times V$ với phần tử ký hiệu $\alpha v\in V$ được gọi là phép nhân phần tử của V *với một vô hướng*, hay đơn giản là *phép nhân với vô hướng*.

Định nghĩa 3.1.1. Ta gọi tập $\mathrm{V}\neq\varnothing$, cùng với hai phép toán: cộng và nhân với một vô hướng lập thành một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ nếu 8 tiên đề sau đây được thỏa mãn:

(V1) Phép cộng có tính chất kết hợp:

$$(u+v)+w=u+(v+w)=u+v+w,\forall u,v,w\in V;$$

(V2) Phép cộng có tính chất giao hoán: $u+v=v+u,\forall u,v\in V$;

(V3) Tồn tại $\mathrm{O}\in V$ (gọi là véc tơ không) sao cho: $v+\mathrm{O}=v,\forall v\in V$;

(V4) Với mỗi phần tử $v\in V$, tồn tại phần tử $-v\in V$ (gọi là phần tử đối của v) sao cho: $v+(-v)=\mathrm{O}$;

(V5) Phép nhân với vô hướng có tính kết hợp:

$$\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall v\in V;$$

(V6) Tính chuẩn hóa: $1v=v,\forall v\in V$.

(V7) Phép nhân véc tơ với vô hướng có tính chất phân phối đối với phép cộng véc tơ: $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v,\forall u,v\in V,\forall\alpha\in\mathbb{R}$;

(V8) Phép nhân véc tơ với vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng các vô hướng:
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$;

Ta gọi (V1), (V2), (V3), (V4) là 4 tính chất của phép cộng; (V5), (V6) là 2 tính chất của phép nhân vô hướng và (V7), (V8) là 2 tính chất liên quan giữa cộng và nhân.

Mỗi phần tử của không gian véc tơ được gọi là một *véc tơ*. Phép cộng trên *V* còn gọi là *phép cộng véc tơ*, còn phép nhân vô hướng gọi là *phép nhân ngoài* hay *phép nhân véc tơ với một vô hướng*. Tổng $v + (-w)$ còn viết là $v - w$ và gọi là hiệu của *v* và *w*.

Từ định nghĩa, ta suy ra một số tính chất đơn giản sau:

1. Véc tơ không của không gian véc tơ V là duy nhất.

Thật vậy, giả sử trong *V* có 2 *véc tơ không* là 0 và $0'$, theo (V2) ta có

$0 + 0' = 0' + 0$, theo (V3) thì có $0 + 0' = 0$ và $0' + 0 = 0'$, suy ra $0' = 0$.

2. $\forall\ v \in V$*, tồn tại duy nhất một véc tơ đối* $-v \in V$.

Thật vậy, giả sử v có 2 véc tơ đối là v_1 và v_2 thì

$$v_1 = v_1 + 0 = v_1 + (v + v_2) = (v_1 + v) + v_2 = 0 + v_2 = v_2.$$

Hiển nhiên -(-v) = v.

3. Trong V, phép cộng véc tơ có luật giản ước:

$$\forall u, v, w \in V,\quad v + u = w + u \Rightarrow v = w.$$

Thật vậy, từ v + u = w + u, ta có

$$(v + u) - u = (w + u) - u \Leftrightarrow v + (u - u) = w + (u - u) \Leftrightarrow v + 0 = w + 0 \Leftrightarrow v = w.$$

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*, ta đều có* $\alpha.0 = 0$.

Thật vậy, $\alpha v = \alpha(v + 0) = \alpha v + \alpha 0$. Suy ra $\alpha.0 = \alpha v - \alpha v = 0$.

5. $\forall v \in V$*, ta có* $0v = 0$.

Vì $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ nên $0v = 0$ do luật giản ước của phép cộng.

6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V: \alpha v = 0 \Rightarrow (\alpha = 0$ *hay* $v = 0)$.

Thật vậy, giả sử $\alpha v = 0$ và $\alpha \neq 0$. Khi đó:

$$v = 1v = (\alpha^{-1}\alpha)v = \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0.$$

Kết hợp 4), 5), và 6) ta có: $\alpha v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ v = 0 \end{array}\right.$.

7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V: -(\alpha v) = (-\alpha)v$*. Đặc biệt* $-v = (-1)v$.

Thật vậy, ta có:

$$(-\alpha)v + \alpha v) = (-\alpha + \alpha).v = 0.v = 0 \text{ nên } (-\alpha)v = -(\alpha.v)$$

.

8. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V: (\alpha - \beta)v = \alpha v - \beta v$.

9. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V: \alpha(v - w) = \alpha v - w$.

Các tính chất 8 và 9 suy ra trực tiếp từ tính chất 7. □

Ví dụ 3.1.2. (i) Với $n \geq 1$, ta định nghĩa:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Hai phần tử $x = (x_1, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, \ldots, y_n)$ được gọi là bằng nhau nếu các thành phần tương ứng của chúng đều bằng nhau, nghĩa là

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, 1 \leq i \leq n$$

Trên $\mathbb{R}^n$, trang bị hai phép toán gồm phép cộng và phép nhân với vô hướng như sau :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n);$$

$$\alpha(x_1,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n).$$

Dễ thử được $\mathbb{R}^n$ cùng với hai phép toán trên là không gian véc tơ, trong đó véc tơ $x=(x_1,\dots,x_n)$ không là $-x=(-x_1,\dots,-x_n)$. véc tơ đối của véc tơ $x=(x_1,\dots,x_n)$ là $-x=(-x_1,\dots,-x_n)$.

Mỗi véc tơ là một bộ gồm *n* số thực có thứ tự.

(ii) Không gian véc tơ vật lý thông thường.

Cho V = {Các đoạn thẳng định hướng trong không gian 3 chiều thông thường}.Coi hai đoạn thẳng định hướng là bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng độ dài, cùng phương và chỉ cùng một hướng. Phép cộng hai đoạn thẳng định hướng được thực hiện theo quy tắc hình bình hành. Phép nhân đoạn thẳng định hướng với một số vô hướng α được một đoạn thẳng định hướng có độ dài bằng $|\alpha|$ lần độ dài đoạn thẳng định hướng ban đầu và cùng hướng nếu $\alpha \geq 0$, hướng ngược lại nếu $\alpha < 0$.

Dễ dàng nghiệm được rằng tập $V \neq \emptyset$ và với hai phép toán trên, V là một không gian véc tơ, trong đó *véc tơ không* là đoạn thẳng định hướng có độ dài bằng 0 (tức là 1 điểm), véc tơ đối của véc tơ x là véc tơ (-1)x. Mỗi véc tơ trong trường hợp này chính là một đoạn thẳng định hướng. Trong Vật lý, không gian véc tơ V được coi là mô hình chung của *không gian các lực biến thiên* trong không gian 3 chiều.

(iii) Không gian véc tơ $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ các ma trận thực cỡ $m\times n$.

Từ Định lý 1.1.5, ta dễ dàng kiểm chứng được rằng, với các số nguyên dương *m*, *n*, tập hợp $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})=\{(a_{ij})_{m\times n}: a_{ij}\in\mathbb{R}\}$ cùng với phép cộng các ma trận cùng cỡ và phép nhân một số với một ma trận lập thành một không gian véc tơ, trong đó véc tơ không là $\mathrm{O} = (0)_{m\times n}$, véc tơ đối của véc tơ $A = (a_{ij})$ là véc tơ $-A = (-a_{ij})$.

Chú ý rằng: Mỗi véc tơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đặt tương ứng 1-1 với một ma trận cột $x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, vì vậy ta còn gọi là *ma trận cột* x^T là *véc tơ cột của véc tơ* $x \in \mathbb{R}^n$. Khi đó ta dễ dàng suy ra mối quan hệ giữa các véc tơ của $\mathbb{R}^n$ với các véc tơ cột của nó như sau:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

- $x = y \Leftrightarrow x^T = y^T$.
- $z = x + y \Leftrightarrow z^T = x^T + y^T$.
- $y = \alpha x \Leftrightarrow y^T = \alpha . x^T$.

Đặc biệt, véc tơ cột của véc tơ $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ là $[0]$ đôi khi còn được viết đơn giản là O. Tập hợp tất cả các véc tơ cột của véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ được ký hiệu là $[\mathbb{R}]^n$

$$[\mathbb{R}]^n = \{x^T : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

(iv) Hiển nhiên $[\mathbb{R}]^n = \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ với 2 phép toán cộng và nhân ma trận với số.

(v) Không gian véc tơ $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức có bậc không quá *n*.

Cho $\mathbb{R}_n[x]$ là tập hợp tất cả các đa thức một biến *x* với hệ số thực, có bậc không vượt quá *n*:

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 1..n\}.$$

Hai đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ và $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $a_i = b_i, i = 1..n$.

Phép cộng và phép nhân ngoài trên $\mathbb{R}_n[x]$ được định nghĩa là phép cộng và phép nhân đa thức với số thực thông thường, nghĩa là:

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_n[x],$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

Phép cộng: $p + q$ là đa thức xác định bởi:

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n;$$

Phép nhân ngoài: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, (αp) là đa thức xác định bởi:

$$(\alpha p)(x) = \alpha.p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \cdots + \alpha a_nx^n.$$

Từ định nghĩa phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số như trên ta thấy giá trị của đa thức tổng và đa thức tích lấy tại x_0 là:

$$(p+q)(x_0) = p(x_0) + q(x_0);$$

$$(\alpha p)(x_0) = \alpha p(x_0).$$

Ta dễ dàng kiểm tra được 2 phép toán trên thỏa mọi tiên đề của không gian véc tơ nên $\mathbb{R}_n[x]$ là một không gian véc tơ, với véc tơ *không* là đa thức không $\mathrm{O}(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n$; véc tơ đối của *p* là *-p* với $-p(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n$. Ta gọi $\mathbb{R}_n[x]$ là *không gian véc tơ các đa thức bậc không quá n*.

(vi) Không gian véc tơ F các hàm số xác định trên tập

$D \subset \mathbb{R}$

Cho tập F = $\{f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)\}$ là tập hợp tất cả các hàm thực một biến số, xác định trên tập . Hai hàm $f \in$ F và $g \in$ F được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $f(x) = g(x)$ $x \in D$. Phép cộng và phép nhân ngoài trên F được định nghĩa là phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với một số thực thông thường, nghĩa là với $f, g \in$ F thì:

$$f + g\colon D \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\alpha f\colon D \to \mathbb{R},\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Dễ dàng kiểm tra được F cùng 2 phép toán vừa định nghĩa, thỏa mãn mọi tiên đề của không gian véc tơ nên F là một không gian véc tơ. Véc tơ *không* là hàm đồng nhất bằng 0, véc tơ đối của f là $-f = (-1)f$. Ta gọi F là không gian véc tơ của các hàm thực xác định trên tập D.

Định nghĩa 3.1.3 **(Không gian con).** Cho V là không gian véc tơ. Ta gọi không gian véc tơ con của không gian véc tơ Vlà một tập

$E \neq \varnothing$, $E \subset V$ sao cho E cùng với hai phép toán trên V cũng là một không gian véc tơ.

Từ định nghĩa trên suy ra V là không gian con của chính nó, tập $\{0\}$ gồm chỉ một phần tử $0 \in V$ cũng là không gian con của V. Ta gọi $\{0\}$ vàV là *các không gian con tầm thường* của V, các không gian con của V và không bằng V được gọi là các không gian con thật sự của V. Dễ thấy $\{0\}$ là không gian con *nhỏ nhất* và V là không gian con *lớn nhất* (theo định nghĩa tập hợp) của V.

Định lý 3.1.4. *(Tiêu chuẩn không gian con) Cho tập $E \neq \varnothing$ và $E \subset V$. Khi đó E là không gian con của V khi và chỉ khi E thỏa mãn hai tiêu chuẩn sau:*

a) (S_1) $\forall u, v \in E,\ u + v \in E.$

b) (S_2) $\forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha u \in E$.

Chứng minh.

$(\Rightarrow)$ Nếu E là không gian con của V thì hiển nhiên (S_1) và (S_2) thỏa mãn.

$(\Leftarrow)$ Giả sử $E \neq \emptyset$, thỏa mãn cả (S_1) và (S_2), ta cần chứng tỏ E là không gian véc tơ. Vì phép toán trên E cũng là phép toán trên V nên các tiên đề (V1), (V2), (V5), (V6), (V7), V8) là hiển nhiên thỏa mãn.

Tiên đề (V3) thỏa mãn vì từ (S_2) chọn $\alpha = 0$ thì $0u = 0 \in E$.

Tiên đề (V4) thỏa mãn vì với mọi $u \in E$, theo (S_2) thì $(-1)u \in E \Rightarrow -u = (-1)u \in E$.

Vậy E chính là không gian véc tơ. □

Để thuận tiện, nhiều khi ta còn thay thế định lý trên đây bởi định lý sau:

Định lý 3.1.5. *Cho tập $E \neq \emptyset$, $E \subset V$. Khi đó, E là không gian con $\Leftrightarrow \forall u, v \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha u + v) \in E$.*

Dễ chứng minh được 2 định lý tương đương với nhau.

Nhận xét: *Nếu E là không gian con của V thì E phải chứa 0_V.* Thật vậy, với $u \in E$ thì $0u \in E$. Do $0u = 0_v$ nên $0_v \in E$. Suy ra nếu $0_v \notin E$ thì E không thể là không gian con của V.

Ví dụ 3.1.6. Cho $P = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Hãy chứng tỏ rằng P là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Giải

Theo tiêu chuẩn của không gian con, ta cần chứng tỏ $P \neq \emptyset$ và P thỏa mãn các điều kiện (S1) và (S2). Thật vậy:

- $P \neq \varnothing$ vì (0, 0, 0) $\in P$.
- Với bất kỳ $u = (x_1, y_1, 0) \in P$, $v = (x_2, y_2, 0) \in P$, thì có ngay $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$

Đặt $x = x_1 + x_2$ và $y = y_1 + y_2$ thì $u + v = (x, y, 0) \in P$.

- Với α∈ℝ,, ta có $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, 0) = (\alpha x_1, \alpha y_1, 0)$. Đặt $x = \alpha x_1; y = \alpha y_1$ thì ta có $\alpha u = (x, y, 0) \in P$.

Như vậy, P là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Dễ thấy P là mặt phẳng trong không gian. Do Pchứa véc tơ O = (0, 0, 0) nên P là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ. Sau này ta còn chứng tỏ được điều ngược lại; mọi mặt phẳng đi qua tốc độ đều là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tất cả chúng được gọi là không gian con 2 chiều.

Tương tự, ta chứng minh được $D = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ cũng là không gian con của $\mathbf{R}^3$đó là đường thẳng Ox đi qua gốc tọa độ. Ngược lại, mọi đường thẳng đi qua gốc tọa độ đều là không gian con của $\mathbf{R}^3$và chúng được gọi là không gian con 1 chiều. □

Lưu ý rằng $\mathbb{R}^1$ và $\mathbb{R}^2$ không phải là các không gian con của $\mathbb{R}^3$ vì $\mathbb{R}^1$ và $\mathbb{R}^2$ không phải là các tập hợp con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3.1.7. Cho E = {(3t, 5t+2) : t ∈ R}. Xác định xem E có phải là không gian con của $\mathbb{R}^2$ hay không?

Giải

Dễ thấy O = (0, 0) ∉ E vì không tồn tại t ∈ R để . Suy ra E không là không gian con của $\mathbb{R}^2$ vì O ∉ E.

Ví dụ 3.1.8 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$**.** được gọi là ma trận đối xứng nếu $A = A^T$. Gọi $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^T\}$ là tập hợp tất cả các ma trận đối xứng cấp *n*. Chứng minh rằng $S_n(\mathbb{R})$ là không gian con của $M_n(\mathbb{R})$.

Giải

Cần kiểm tra tiêu chuẩn không gian con đối với $S_n(\mathbb{R})$.

- $S_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ vì ma trận không $O \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $O^T = O$, nên $O \in S_n(\mathbb{R})$.

- $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ta cần chứng minh $(\alpha A + B) \in S_n(\mathbb{R})$.

Thật vậy: do $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ nên $A^T = A$, $B^T = B$. Khi đó ta có:

$$(\alpha A + B)^T = (\alpha A)^T + B^T = \alpha(A^T) + B^T = \alpha A^T + B^T = \alpha A + B.$$

Suy ra $(\alpha A + B) \in S_n(\mathbb{R})$.

Cho không gian véc tơ V và tập hợp $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$. Khi đó ta cần vài khái niệm sau:

Tổng bất kỳ dạng:

- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1..p)$ được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_p$ với các hệ số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.
- Nếu có $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ thỏa $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$ thì véc tơ v được gọi là *biểu thị tuyến tính* được qua các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_p$ của S, hay véc tơ v là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ thuộc S với các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

Định nghĩa 3.1.9. Cho E là không gian con của V và $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset E$. S được gọi là một tập sinh của không gian véc tơ E nếu và chỉ nếu mọi véc tơ của E đều biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ của tập S. Khi đó ta viết $E = Sp(S)$ với ý nghĩa E là không gian véc tơ sinh ra bởi S.

$$v \in E = Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \Leftrightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{R}, \exists v_i \in S, i = 1, 2, \ldots, p : v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$$

Từ định nghĩa suy ra một không gian véc tơ hoàn toàn được xác định qua tập sinh của nó vì bất kỳ véc tơ nào của không gian cũng đều biểu diễn được qua các véc tơ thuộc tập sinh.

Định lý 3.1.10. *Với $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ thì tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ thuộc S tạo ra không gian con của V và được gọi là không gian con của V sinh bởi S. Ký hiệu Sp(S) hay $Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Khi đó S là tập sinh của Sp(S).*

$$Sp(S) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in S, i = 1, 2, \ldots, \mathrm{p} \right\}.$$

Chứng minh.

- Hiển nhiên $Sp(S) \subset V$ và $Sp(S) \neq \varnothing$ vì có

$$\mathrm{O} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_p \in Sp(S).$$

- Lấy bất kỳ $u, v \in Sp(S)$ thì

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1.., p),$$

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_p v_p \quad (\beta_i \in \mathbb{R}, i = 1.., p).$$

Khi đó:

$$u + v = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_p v_p)$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_p + \beta_p)v_p.$$

Đặt $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ thì $u + v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_p v_p$ là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ trong S nên $u + v \in Sp(S)$.

Tương tự, với bất kỳ $\lambda \in \mathrm{R}$, $u \in Sp(S)$ thì

$$\lambda u = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p) = (\lambda\alpha_1)v_1 + (\lambda\alpha_2)v_2 + \cdots + (\lambda\alpha_p)v_p$$

lại là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ trong *S* nên $\lambda u \in Sp(S)$. Vậy $Sp(S)$ là không gian con của *V* do nó thỏa mãn tiêu chuẩn của không gian con. □

Định lý 3.1.11. *Nếu S là tập con khác rỗng của V thì Sp(S) là không gian véc tơ con nhỏ nhất trong tất cả các không gian con của V có chứa S (theo nghĩa nếu U là không gian con bất kỳ có chứa S thì phải có Sp(S) ⊂ U).*

Thật vậy, tính nhỏ nhất của $Sp(S)$ thể hiện ở chỗ: $\forall u \in Sp(S)$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1..p : u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$. Do *U* là không gian véc tơ chứa $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ nên *U* cũng chứ $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$. Suy ra $Sp(S) \subset U$. □

Ví dụ 3.1.12. Cho $u = (1,-2,-5), v = (2,5,6)$. Hãy chứng tỏ $w = (7,4,-3) \in Sp\{u,v\}$.

Giải

Theo định nghĩa, $w \in Sp\{u,v\}$ khi và chỉ khi tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\alpha u + \beta v = w$. Phương trình $\alpha u + \beta v = w$

$$\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + 2\beta = 7\\-2\alpha + 5\beta = 4\\-5\alpha + 6\beta = -3\end{cases}.$$

Giải hệ trên ta được $\alpha = 3, \beta = 2$. Như vậy $w = (3u + 2v) \in Sp\{u,v\}$.

Ví dụ 3.1.13. Cho $x = (3,2,1)$. Có thể nói $x \in Sp\{(1,2,1),(-1,1,2)\}$ hay không?

Giải

$x \in Sp\{(1,2,1),(-1,1,2)\}$ khi và chỉ khi phương trình

$\alpha(1,2,1)+\beta(-1,1,2)=x$ (*) (ẩn $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$)

có nghiệm. Viết phương trình dưới dạng véc tơ cột:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} (**)$$

Đặt $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ thì (*) là hệ tuyến tính $AX=B$.

Quy ma trận đầy đủ A^* của hệ (**) về dạng bậc thang:

$$A^*=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&3\\2&1&2\\1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[h_3\to h_3-h_1]{h_2\to h_2-2h_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&3\\0&3&-4\\0&3&-2\end{array}\right)\xrightarrow{h_3\to h_3-h_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&3\\0&3&-4\\0&0&2\end{array}\right)$$

Hệ (**) vô nghiệm nên (*) vô nghiệm và $x \notin Sp\{(1,2,1),(-1,1,2)\}$.

Ví dụ 3.1.14. Cho các đa thức $p(x)=x+1$, $q(x)=2x^2-2x+3$. Cho biết $r(x)=6x^2-10x+5$ có thuộc không gian sinh bởi *p* và *q* hay không?

Giải

Có $r \in Sp\{p,q\}$ khi và chỉ khi $\exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sao cho $r=\alpha p+\beta q$. Ta có

$$r=\alpha p+\beta q \Leftrightarrow r(x)=\alpha p(x)+\beta q(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 10x + 5 = \alpha(x+1) + \beta(2x^2 - 2x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 10x + 5 = 2\beta x^2 + (\alpha - 2\beta)x + \alpha + 3\beta, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 6 \\ \alpha - 2\beta = -10 \\ \alpha + 3\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 3 \end{cases}.$$

Vậy $r = (-4\alpha + 3\beta) \in Sp\{p,q\}$.

Ví dụ 3.1.15. Cho $E = \{(2c - 3d, d - 2c, c, d : c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Hãy chứng tỏ E là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

Giải

Để chứng minh E là một không gian con của $\mathbb{R}^4$ ta có thể kiểm tra E thỏa các tiêu chuẩn không gian con. Tuy nhiên, trong ví dụ này chúng tôi chứng minh E là không gian con của $\mathbb{R}^4$ bằng cách chỉ ra rằng E là không gian véc tơ sinh bởi một hệ véc tơ nằm trong $\mathbb{R}^4$.

$\forall w \in E$, ta đều có

$w = (2c - 3d, d - 2c, c, d) = (2c, -2c, c, 0) + (-3d, d, 0, d)$

$= c(2,-2,1,0) + d(-3,1,0,1)$

$= cu + dv$,

với $u = (2,-2,1,0)$ và $v = (-3,1,0,1) \in \mathbb{R}^4$.

Vậy $E = \{cu + dv \mid c, d \in \mathbb{R}\} = Sp\{u,v\} \le \mathbb{R}^4$ với $\{u,v\} \subset \mathbb{R}^4$.

Nhận xét: Ví dụ vừa nêu trên đã cung cấp một phương pháp thường dùng để tìm tập sinh của không gian con E, đó là hãy phân tích hệ số bất kỳ của E thành dạng tổ hợp tuyến tính của các véc tơ nào đó (các véc tơ này phải thuộc *E*). Tập các véc tơ tìm được sau quá trình phân tích chính là tập sinh cần tìm.

3.2. ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 3.2.1. Cho V là không gian véc tơ.

a) Tập $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu véc tơ O biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ của S với ít nhất một hệ số $\alpha_i \neq 0$ với $1 \leq i \leq p$.

b) Tập *S* không phụ thuộc tuyến tính được gọi là tập độc lập tuyến tính.

Từ định nghĩa, suy ra:

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số thực

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_P$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \text{O}$

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \text{O}$ thức kéo theo $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.

Nếu ta gọi tổ hợp tuyến tính dạng: $0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_p$ (với tất cả các hệ số đều bằng 0) là tổ hợp tuyến tính tầm thường thì:

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mọi tổ hợp tuyến tính của véc tơ* O *theo các véc tơ của S đều là tổ hợp tuyến tính tầm thường.*

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một tổ hợp tuyến tính của véc tơ* O *theo các véc tơ của S, là tổ hợp tuyến tính không tầm thường.*

Ví dụ 3.2.2.

(i) Tập hợp gồm một véc tơ $\{v\} \subset V$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq \mathrm{O}$.

Tập hợp gồm 2 véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi 2 véc tơ đó tỷ lệ (hiểu theo nghĩa, trong 2 véc tơ, có một véc tơ bằng một vô hướng nhân với véc tơ kia). Hai véc tơ phụ thuộc tuyến tính còn gọi là hai véc tơ cùng phương.

(ii) Trong $\mathbb{R}^n$, tập

$\varepsilon = \{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)\}$ là độc lập tuyến tính, vì:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \mathrm{O}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 e_1^T + \alpha_2 e_2^T + \cdots + \alpha_n e_n^T = \mathrm{O}^T$$

$$\Leftrightarrow I_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}.$$

(iii) Trong $\mathbb{R}_n[x]$, tập tập gồm n+1 đa thức $B = \{1, x, x^2,\ldots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy, xét một tổ hợp tuyến tính bất kỳ của véc tơ $\mathrm{O} \in \mathbb{R}_n[x]$ ta có:

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = \mathrm{O}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0.1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Do $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ nên tổ hợp tuyến tính đang xét là tổ hợp tuyến tính tầm thường, theo định nghĩa, B là độc lập tuyến tính.

(iv) Cho các đa thức $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = 3x - 1$, $r(x) = -4x + 1$ là véc tơ của không gian véc tơ $\mathbb{R}_2[x]$. Chứng minh rằng $\{p, q, r\}$ là độc lập tuyến tính.

Xét tổ hợp tuyến tính bất kỳ của $\mathrm{O} \in \mathbb{R}_2[x]$:

$$\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = \mathrm{O}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(x^2 + 1) + \alpha_2(3x - 1) + \alpha_3(-4x + 1) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + (3\alpha_2 - 4\alpha_3)x + \alpha_1 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Do $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ nên tổ hợp tuyến tính đang xét là tổ hợp tuyến tính tầm thường, theo định nghĩa, tập $\{p, q, r\}$ là độc lập tuyến tính.

Định lý 3.2.3. *Cho* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} (p \geq 2) \subset V$ *. Khi đó S phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có véc tơ* $v_i \in S, 1 \leq i \leq p$*, là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.*

Chứng minh. Giả sử S là phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại bộ p số thực $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \mathrm{O}.$$

Chọn $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ thỏa $\alpha_i \neq 0$. Ta suy ra

$\alpha_i v_i = -(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_p v_p)$, nghĩa là

$$v_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_p v_p),$$

và v_i là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

Ngược lại, giả sử có $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ để v_i là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại, nghĩa là:

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_p v_p.$$

Suy ra

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_p v_p = \mathrm{O}.$$

Do $-1 \neq 0$ nên tập *S* phụ thuộc tuyến tính. □

Áp dụng định lý, ta chứng minh được các tính chất sau đây:

1) Nếu S có chưa véc tơ O *thì S phụ thuộc tuyến tính.*

2) Nếu tập có một bộ phận con phụ thuộc tuyến tính thì tập phụ thuộc tuyến tính. Từ đó suy ra nếu một tập đã phụ thuộc tuyến tính, thì thêm vào tập đó bao nhiêu véc tơ đi nữa, ta vẫn được một tập mới phụ thuộc tuyến tính.

3) Nếu tập đã cho là độc lập tuyến tính thì mọi tập con khác rỗng của nó đều độc lập tuyến tính.

4) S là độc lập tuyến tính trong V. Khi đó $\forall v \in V$, *tập* $S \bigcup \{v\}$ *là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* $v \in Sp(S)$.

XÉT TÍNH ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH TRONG $\mathbb{R}^n$ NHỜ MA TRẬN

Phương pháp kiểm tra tập véc tơ $S = \{v_i\}_{1,p}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính thường được bắt đầu bằng việc xét tổ hợp tuyến tính bất kỳ của véc tơ O_V theo các véc tơ của *S:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = O_V \ (3.1)$$

Điều khác nhau cơ bản giữa phương trình (3.1) được xét trong không gian véc tơ tổng quát và xét trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ là trong $\mathbb{R}^n$ phương trình (3.1) có thể được viết dưới dạng hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = O$ với $A = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_p^T)$ còn trong các không gian khác, không có được khả năng như vậy. Nhờ có tính chất đặc biệt đó, ta có cách xét thuận lợi sau :

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ thì tổ hợp tuyến tính bất kỳ của $O \in \mathbb{R}^n$ luôn viết được ở dưới dạng:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = O^T$$

$$\Leftrightarrow (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_p^T)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (3.2)$$

Đặt $A = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_p^T)$ thì (3.2) chứng tỏ

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ là nghiệm của $AX = O$. Nếu (3.2) có duy nhất nghiệm là nghiệm tầm thường $(0, 0, \ldots, 0)$ thì mọi tổ hợp tuyến tính của véc tơ O theo các véc tơ thuộc *S* đều là tổ hợp tuyến tính tầm thường , nên *S* là độc lập tuyến tính. Nếu ngược lại, *S* sẽ phụ thuộc tuyến tính. Từ đó có định lý sau là cơ sở cho phương pháp xét tính độc lập tuyến tính của tập hợp các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$.

Định lý 3.2.4. *Tập* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *của* $\mathbb{R}^n$ *là tập độc lập tuyến tính khi và chỉ khi ma trận* $A = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_p^T)$ *được tạo bởi các véc tơ cột của véc tơ* $v_i \in S$ *có hạng bằng đúng số véc tơ có trong S.*

Ví dụ 3.2.5. Xét tính độc lập tuyến tính của tập hợp các véc tơ $S = \{(3,2,2,1),(1,0,1,0),(1,1,1,0)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

Giải

Lập ma trận A bao gồm các cột là các véc tơ cột của véc tơ trong S rồi quy A về dạng bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3.$$

Do $r(A) = 3$ (bằng số véc tơ trong S) nên S là độc lập tuyến tính.

Từ phương pháp xét tính độc lập tuyến tính của các véc tơ thuộc $\mathbb{R}^n$ vừa nêu trên ta có triển khai như sau.

Định lý 3.2.5. *Trong* $\mathbb{R}^n$ *thì:*

1) *Tập có đúng n véc tơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tập các véc tơ của chúng lập nên ma trận khả nghịch.*
2) *Mọi tập chứa nhiều hơn n véc tơ đều phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh.

Giả sử $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *của* $\mathbb{R}^n$.

Lập $A = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_p^T) \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Khi đó:

1) Khi $p = n$ thì $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ khả nghịch.

2) Nếu $p > n$ thì $A = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_p^T) \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ có $r(A) \le n < p$ nên S phụ thuộc tuyến tính. □

3.3. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Định nghĩa 3.3.1. Tập $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ được gọi là một tập sinh (hệ sinh) của không gian véc tơ V nếu mọi véc tơ trong V đều biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ trong B.

Định nghĩa 3.3.2. Tập $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, gồm n véc tơ có thứ tự, được gọi là cơ sở của không gian véc tơ V nếu B độc lập tuyến tính và là một tập sinh của V.

Hay nói ngắn gọn hơn: *Cơ sở của không gian véc tơ là một tập sinh và độc lập tuyến tính*.

Ví dụ 3.3.3.

(i) Tập $E = \{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và ta gọi *Ev* là *cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$.

Thật vậy:

Tập $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là độc lập tuyến tính (xem ví dụ 1 ở trên).

Tập $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^n$ vì $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,0,\ldots,1)$$

$= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ là một tổ hợp tuyến tính của $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

(ii) Tập $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathbb{R}_n[x]$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_n[x]$ và ta gọi đây là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}_n[x]$.

Thật vậy:

Tập $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính (xem ví dụ 2 ở trên).

Tập $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ là tập sinh vì $\forall p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$ $p(x)$ đều là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ thuộc B:

$$p(x) = a_0.1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

(iii) Tập $B = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, trong đó E_{ij} là ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử (i, j) bằng 1, tất cả các hệ số còn lại đều bằng 0, lập nên cơ sở của $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ và ta gọi là *cơ sở chính tắc* của $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chẳng hạn, $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ có cơ sở chính tắc gồm 4 véc tơ là:

$$B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iv) Tập $S = \{(1,2,-1,1), (0,1,3,1), (2,5,1,3)\}$ có phải là cơ sở của $Sp(S)$ hay không?

Do S là tập sinh nên S là cơ sở khi S độc lập tuyến tính. Ta lập ma trận A gồm các cột là các véc tơ cột của các véc tơ trong S rồi quy A về dạng bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&3&3\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=2.$$

Vì $r(A)=2<|S|=3$ nên S phụ thuộc tuyến tính và S không là cơ sở của $Sp(S)$.

(v) Tập gồm 3 véc tơ $B=\{u=(1,2,-1),v=(2,-1,0),w=(3,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ có phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không?

Kiểm tra tính độc lập tuyến tính của *B*:

$$A=(u^T\quad v^T\quad w^T)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-5&-6\\0&6&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&-7\end{pmatrix}$$

Vì $r(A)=3$ hay $\det A=-14\neq 0$ nên *B* là độc lập tuyến tính.

Kiểm tra *B* là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. Lập $A=(u^T\quad v^T\quad w^T)$. Khi đó $\mathbb{R}^3=Sp(B)$ khi và chỉ khi hệ $AX=x^T$ có nghiệm $\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Tuy nhiên, từ trên ta đã có $r(A)=3$ nên hệ có nghiệm là hiển nhiên.

Kết luận: *B* là tập sinh độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^3$ nên *B* là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Định lý 3.3.4. *Trong $\mathbb{R}^3$ mọi tập gồm n véc tơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset\mathbb{R}^n$ là tập hợp gồm *n* véc tơ độc lập tuyến tính. Để chứng minh *S* là cơ sở, chỉ cần chứng minh thêm S là tập sinh. Thật vậy, đặt $A = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_n^T)_{n\times n}$ là ma trận tạo bởi các véc tơ cột của véc tơ trong S, thì $\forall b \in \mathbb{R}^n$, phương trình $AX = b^T$ luôn có nghiệm (do A khả nghịch). Do đó $\mathbb{R}^n = Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ta hiểu *tập sinh tối tiểu* là tập sinh mà có ít véc tơ nhất. Nếu loại bỏ khỏi tập sinh tối tiểu một véc tơ nào đó, thì tập còn lại không còn là tập sinh nữa. Định lý sau đây cho ta biết *tập sinh tối tiểu chính là cơ sở*, đồng thời còn cho biết cách *xây dựng cơ sở từ một tập sinh* đã có. □

***Định lý 3.3.5* (Định lý về tập sinh).** *Cho không gian véc tơ V và E là không gian con của V sinh bởi $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$. Khi đó:*

1) *Nếu trong S có một véc tơ nào đó, giả sử $v_k, k = 1..p$, là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại thì tập $S \setminus \{v_k\}$ vẫn còn là tập sinh của E.*

2) *Nếu $E \neq \{O\}$ thì E luôn có ít nhất một cơ sở là một tập con nào đó của S.*

Chứng minh.

1) Sắp lại thứ tự, ta luôn giả thiết được véc tơ đứng cuối cùng trong S là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại:

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1} = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i v_i; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Lấy bất kỳ $v \in E = Sp(S)$ thì do S là tập sinh, tồn tại các hệ số β_i, $i = 1..p$ sao cho:

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{p-1} v_{p-1} + \beta_p v_p$$

$$= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{p-1} v_{p-1} + \beta_p \left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i v_i \right)$$

$= \alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \cdots + \alpha'_{p-1} v_{p-1}$ với $\alpha'_i = \beta_i + \beta_p \alpha_i$ khi $1 \le i \le p-1$.

Điều đó chứng tỏ bất kỳ vE đều biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ thuộc $S_1 = S \setminus \{v_p\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ nên S_1 là tập sinh mới của E.

2) Nếu S là độc lập tuyến tính thì hiển nhiên S là cơ sở của $E = Sp(S)$. Ngược lại, nếu S là phụ thuộc tuyến tính thì sẽ có một véc tơ nào đó (không giảm tính tổng quát, ta giả sử đó là v_p) là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại. Khi đó, loại bỏc v_p ra khỏi S ta được $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ là tập sinh mới của E. Nếu S_1 là độc lập tuyến tính thì nó là cơ sở cho E; nếu nó vẫn còn phụ thuộc tuyến tính thì ta lặp lại quá trình như trên đối với S_1, thu được tập sinh mới , S_2 cho E. Cứ tiếp tục như vậy, nhiều nhất là đến bước thứ $p-1$, tập sinh S_{p-1} chỉ còn lại đúng 1 véc tơ, giả sử

đó là $S_{p-1} = \{v_1\}$. Do giả thiết $E \neq \{O\}$ nên $v_1 \neq O$, suy ra S_{p-1} là độc lập tuyến tính và nó là cơ sở cho E. Vậy ta đã chứng minh được trong S có một tập con là cơ sở cho E. □

Nhận xét:

- Nhờ định lý về tập sinh, ta có khả năng xây dựng cơ sở cho không gian véc tơ V từ một tập sinh bất kỳ nào đó bằng cách rút bỏ những véc tơ biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ còn lại. Hiển nhiên, những *véc tơ ứng với hệ số khác 0* trong tổ hợp tuyến tính của véc tơ O là các véc tơ biểu thị được qua các véc tơ còn lại. Ngoài ra, còn một phương pháp khác nữa để xây dựng cơ sở, đó là mở rộng dần một tập độc lập tuyến tính nào đó đã có trong V, sẽ được trình bày ở phần sau:

- Từ phương pháp xây dựng cơ sở cho không gian véc tơ như đã trình bày ở trên, ta thấy rằng việc loại bỏ các véc tơ trong tập sinh phải dừng lại khi tập sinh thu được là độc lập tuyến tính, (ký hiệu bởi B). Nếu ta tiếp tục loại bỏ thêm một véc tơ nào đó nữa, giả sử là w, ra khỏi B thì do w không thể là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại nên tập $B\setminus\{w\}$ không thể là tập sinh được (vì w không thể biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ của tập này). Vậy *cơ sở là tập sinh tối tiểu*. Mặt khác, *cơ sở B là tập độc lập tuyến tính có số véc tơ nhiều nhất (hay còn gọi là độc lập tuyến tính tối đại)*, vì giả sử ta thêm một véc tơ v nào đó vào cho B thì $\{B,v\}$ không còn là độc lập tuyến tính nữa (do v là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ trong B).

Tóm lại: *Cơ sở của không gian véc tơ là một tập độc lập tuyến tính tối đại và cũng là một tập sinh tối tiểu của không gian véc tơ đó.*

Ví dụ: Cho $S=\{u=(1,2,-1,1), v=(0,1,3,1), w=(2,5,1,3)\}$. Hãy tìm một cơ sở cho $Sp(S)$.

Để tìm cơ sở cho $Sp(S)$ ta cần loại bỏ khỏi S các véc tơ biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ còn lại. Muốn vậy, trước hết cần xác định tính độc lập tuyến tính của S. Lập ma trận bao gồm các cột là các véc tơ của cột u,v,w; sau đó quy gọn về dạng bậc thang, ta có:

$$A=(u^T \quad v^T \quad w^T)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Suy ra $r(A) = 2 < |S| = 3$ nên S là phụ thuộc tuyến tính.

Mặt khác, từ ma trận bậc thang B suy ra phương trình:

$x_1u^T + x_2v^T + x_3w^T = O \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Cho $x_3 = -1$ ta có một quan hệ phụ thuộc tuyến tính giữa u, v, w là: $2u + v - w = O$. Suy ra $w = 2u + v$. Loại bỏ w ra khỏi S ta có $S_1 = \{u, v\}$ vẫn còn là tập sinh và ta thấy S_1 độc lập tuyến tính (nhờ xét các cột tương ứng trong ma trận bậc thang B) nên S_1 là cơ sở của $Sp(S)$. (Có thể nhận ra ngay cơ sở cần tìm là các véc tơ của S, ứng với các cột có chứa phần tử chính trong dạng bậc thang B, tức là ứng với cột cơ sở của A).

Định lý 3.3.6. *Nếu không gian véc tơ V có một cơ sở gồm n véc tơ thì:*

a. Mọi tập con của V có chứa nhiều hơn n véc tơ, đều phụ thuộc tuyến tính.

b. Mọi tập con độc lập tuyến tính của V đều có không quá n véc tơ.

Chứng minh.

a. Giả sử một cơ sở của V là $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ và $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ là tập con tùy ý của V có $k > n$. Xét tổ hợp tuyến tính bất kỳ của O theo các véc tơ của S :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = \mathrm{O} \ (*).$$

Do β là cơ sở nên ta có các tổ hợp tuyến tính

$$u_j = t_{1j} v_1 + t_{2j} v_2 + \cdots + t_{nj} v_n, \quad j = 1..k$$

Thay u_j vào (*) ta nhận được

$$\alpha_1(t_{11}v_1 + t_{21}v_2 + \cdots + t_{n1}v_n) + \alpha_2(t_{12}v_1 + t_{22}v_2 + \cdots + t_{n2}v_n) + \cdots + \alpha_k(t_{1k}v_1 + t_{2k}v_2 + \cdots + t_{nk}v_n) = \mathrm{O}$$

Viết lại đẳng thức trên, ta được

$$(t_{11}\alpha_1 + t_{12}\alpha_2 + \cdots + t_{1k}\alpha_k)v_1 + (t_{21}\alpha_1 + t_{22}\alpha_2 + \cdots + t_{2k}\alpha_k)v_2 + \cdots + (t_{n1}\alpha_1 + t_{n2}\alpha_2 + \cdots + t_{nk}\alpha_k)v_n = \mathrm{O}$$

Do $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính nên có hệ:

$$\begin{cases} t_{11}\alpha_1 + t_{12}\alpha_2 + \cdots + t_{1k}\alpha_k = 0 \\ t_{21}\alpha_1 + t_{22}\alpha_2 + \cdots + t_{2k}\alpha_k = 0 \\ \qquad \cdots \\ t_{n1}\alpha_1 + t_{n2}\alpha_2 + \cdots + t_{nk}\alpha_k = 0 \end{cases}$$

Hệ thuần nhất này có ma trận hệ số $A = (t_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ với $k > n$ nên sẽ có nghiệm không tầm thường, tức là (*) xảy ra với ít nhất là một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ không đồng thời bằng 0. Do vậy S phụ thuộc tuyến tính.

b. là hệ quả của a. □

Định lý 3.3.7. *Nếu không gian véc tơ V có một cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở khác của V cũng có đúng n véc tơ.*

Chứng minh. Giả sử V có hai cơ sở khác nhau là $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ và $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Theo hệ quả trên, do β là cơ sở và β' độc lập tuyến tính nên phải có $n \le m$. Tương tự do β' là cơ sở và β độc lập tuyến tính nên $m \le n$. Từ đó suy ra $m = n$. □

Định nghĩa 3.3.8. Cho V là không gian véc tơ.

a) Nếu V có cơ sở gồm n véc tơ thì V gọi là không gian hữu hạn chiều và n gọi là số chiều của V. Ký hiệu $\dim V = n$.

b) Ngược lại, không gian V không có cơ sở nào hữu hạn gồm hữu hạn véc tơ được gọi là không gian vô hạn chiều, ký hiệu $\dim V = \infty$.

Ta thường dùng ký hiệu V_n để chỉ không gian véc tơ V có số chiều bằng n. Không gian con $\{O\}$ *có cơ sở* $\varnothing$ (người ta quy ước $\varnothing$ sinh ra $\{O\}$ và $\varnothing$ độc lập tuyến tính). Ta quy ước nó cũng là không gian hữu hạn chiều và có số chiều bằng 0. Do phạm vi chương trình, *ta chỉ nghiên cứu các không gian véc tơ hữu hạn chiều.*

Ví dụ 3.3.9.

a) $\dim \mathbb{R}^n = n$ vì $\mathbb{R}^n$ có cơ sở chính tắc $\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ gồm n véc tơ.

b) $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$ vì $\mathbb{R}_n[x]$ có cơ sở chính tắc là $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ gồm $(n+1)$ véc tơ.

c) $\dim(\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$ vì $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ có cơ sở chính tắc $\{E_{ij}, i = 1..m, j = 1..n\}$ gồm mn véc tơ.

Định lý 3.3.10. *Giả sử V là không gian véc tơ hữu hạn chiều và E là không gian con của V. Khi đó:*

a) Bất kỳ tập độc lập tuyến tính $S \subset E$ đều có thể mở rộng thành một cơ sở của E.

b) $\dim E \leq \dim V$. *Đặc biệt khi* $\dim E = \dim V$ *thì* $E = V$.

Chứng minh. Xét 2 trường hợp đối với không gian con E

- Trường hợp $E = \{O\}$ thì E chỉ có một tập con độc lập tuyến tính là $\varnothing$ và $\varnothing$ cũng là cơ sở của E. Ta có $\dim E = 0 \leq \dim V$. Khi $\dim E = \dim V = 0$ thì $V = \{O\} = E$.

- Trường hợp $E \neq \{O\}$ thì do $E \neq \{O\}$ nên tồn tại $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset E$ là tập độc lập tuyến tính. Có các khả năng xảy ra như sau:

i) Nếu S là tập sinh của E thì S là cơ sở của E.

ii) Nếu S không là tập sinh của $E(E \neq Sp(S))$ thì tồn tại véc tơ $v_{k+1} \in E$ nhưng $v_{k+1} \in Sp(S)$. Khi đó, tập $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ là độc lập tuyến tính trong E. Nếu S_1 sinh ra E thì S_1 là cơ sở của E, nếu xảy ra trường hợp ngược lại: $E \neq Sp(S_1)$ thì tồn tại $v_{k+2} \in \{E \setminus Sp(S_1)\}$ và ta có được tập độc lập tuyến tính mới là $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\} \subset E$,…Tiếp tục quá trình để mở dần tập S. Quá trình đó phải dừng lại ở bước thứ q nào đó vì số véc tơ độc lập tuyến tính của $S_q = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+q}\}$ không thể vượt qua $\dim V$. Tại đây ta có S_q là tập sinh độc lập tuyến tính của E, tức S_q là cơ sở của E, và hiển nhiên $\dim E \leq \dim V$ vì số véc tơ độc lập tuyến tính trong S_q không thể vượt quá số véc tơ có trong cơ sở của V.

- Đặc biệt khi $\dim E = \dim V$ xảy ra thì cơ sở của E cũng là cơ sở của V nên suy ra $E \equiv V$. □

Nhận xét. Bên cạnh phương pháp xây dựng cơ sở bằng cách rút gọn dần một tập sinh phụ thuộc tuyến tính (xem định lý về tập sinh), nhờ cách chứng minh định lý trên, ta còn có phương pháp xây dựng cơ sở mới rộng dần một tập độc lập tuyến tính bất kỳ trong không gian véc tơ. Ví dụ sau sẽ minh họa cụ thể phương pháp này.

Ví dụ 3.3.11.

Trong $\mathbb{R}^3$, cho $P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ nên nó là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Hãy chọn một cơ sở cho P và sau đó mở rộng nó thành một cơ sở cho $\mathbb{R}^3$.

Giải

Chọn cơ sở cho P: Cho $x_2 = 1$ và $x_3 = 0$ ta có $x_1 = -2$.

Cho $x_2 = 0$ và $x_3 = 1$ ta có $x_1 = 1$.

Ta có một cơ sở của P là $\{v_1 = (-2,1,0), v_2 = (1,1,0)\}$ vì v_1 và v_2 là hai véc tơ chỉ phương độc lập tuyến tính của P.

Mở rộng cơ sở $\{v_1, v_2\}$ của P thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Chọn $v_3 \in \mathbb{R}^3$ sao cho $v_3 \notin P = Sp\{v_1, v_2\}$, (nghĩa là các tọa độ của v_3 không thỏa mãn phương trình mặt phẳng), chẳng hạn ta chọn $v_3 = (0,0,1)$. Khi đó tập $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ sẽ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ và có đúng 3 véc tơ nên β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Định lý 3.3.12. *Giả sử* $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *là tập gồm đúng* n *véc tơ của không gian* n *chiều* V_n. *Hai mệnh đề sau là tương đương:*

a) *S độc lập tuyến tính.*

b) $Sp(S) = V_n$.

Chứng minh.

a)$\Rightarrow$b) Hiển nhiên có $Sp(S) \subset V_n$. Giả sử $V_n \not\subset Sp(S)$ nghĩa là có $v \in V_n$ nhưng $v \notin Sp(S) = Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Khi đó tập gồm $n+1$ véc tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v\}$ là tập độc lập tuyến tính: mâu thuẫn vì $\dim V_n = n$. Suy ra $V_n \subset Sp(S)$. Kết hợp với $Sp(S) \subset V_n$ ta có b).

b)$\Rightarrow$a) Nếu tập S là tập sinh của V_n thì sẽ có tập con của S là S' tạo thành cơ sở cho V_n (do định lý về tập sinh). Vì $\dim V_n = n$ nên số véc tơ có trong S' là n, bằng số véc tơ của S. Chứng tỏ $S \equiv S'$ là độc lập tuyến tính. □

Ý nghĩa thực tiễn của định lý là ở chỗ khi biết số chiều n của không gian véc tơ V_n thì việc tìm cơ sở cho V_n được quy về việc tìm một tập sinh hay một tập độc lập tuyến tính có đúng n véc tơ là đủ. Đặc biệt điều này thực sự có lợi đối với các bài toán áp dụng liên quan đến *phương trình vi phân* hay *phương trình sai phân*, ở đó việc kiểm tra một tập là tập độc lập tuyến tính đơn giản hơn nhiều so với việc kiểm tra tập đó là tập sinh.

3.4. TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI CƠ SỞ

Nếu không gian véc tơ V_n đã chỉ ra được một cơ sở $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (được sắp thứ tự) thì $\forall v \in V_n$, có $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ thỏa:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \qquad (3.3)$$

Mục này sẽ chỉ ra rằng sự phân tích (3.3) là duy nhất, tức là mỗi véc tơ $v \in V_n$ tương ứng duy nhất với một bộ gồm n số thực thuộc $\mathbb{R}^n$. Nghĩa là có một tương ứng một - một giữa V_n với $[\mathbb{R}]^n$ từ đó dẫn đến khả năng "số hóa" cho mọi véc tơ $v \in V_n$.

Từ đây về sau, ta hiểu "cơ sở" chính là "cơ sở được sắp thứ tự".

Định lý 3.4.1. *Giả sử V là không gian véc tơ và $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Khi đó:*

a. Nếu B là một cơ sở của V thì $\forall v \in V$, v được phân tích một cách duy nhất qua các véc tơ của B:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1..n. \tag{3.3}$$

b. Ngược lại, nếu mọi $v \in V$ đều phân tích một cách duy nhất qua các véc tơ của B thì B là một cơ sở của V.

Chứng minh. Trước hết, B là cơ sở của V, nên $\forall v \in V$, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ thỏa:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{3.3}$$

Giả sử v còn có sự biểu diễn khác:

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \qquad (3.4),$$

thì từ (3.3) và (3.4) ta có:

$$v - v = \mathrm{O} = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n \quad (*).$$

Do β độc lập tuyến tính nên từ (*) suy ra:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \quad\vdots \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases};$$

chứng tỏ có duy nhất $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ thỏa (3.3).

Ngược lại, nếu $\forall v \in V$ đều biểu thị một cách duy nhất qua các véc tơ thuộc B dưới dạng (3.3) thì B là cơ sở của V. Thật vậy, B hiển nhiên là một tập sinh của V. Ta chỉ cần chỉ ra B độc lập tuyến tính. Xét một tổ hợp tuyến tính của véc tơ O theo các véc tơ của B:

$$O = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1..n \qquad (**).$$

Do véc tơ O cònđược biểu thị một cách duy nhất dưới dạng: $O = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. Do sự biểu thị là duy nhất nên ta phải có $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, tức là B độc lập tuyến tính. □

Từ định lý vừa nêu, ta có khái niệm tọa độ của véc tơ đối với cơ sở được sắp thứ tự như sau:

Định nghĩa 3.4.2. Cho V là không gian véc tơ có cơ sở $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ được sắp thứ tự. Tọa độ của $v \in V$ là bộ gồm n số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ thỏa mãn sự phân tích:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Ký hiệu $[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, hay $[v]_B^T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ khi ta muốn viết chúng thành hàng.

Tọa độ của véc tơ v đối với cơ sở B còn gọi là B – tọa độ của v. Định lý trên chứng tỏ rằng B tọa độ của véc tơ v là duy nhất. Nếu $v \in V_n$ thì $[v]_B = \mathbb{R}^n$.

Ví dụ 3.4.3. (i) Trong $\mathbb{R}^2$, cho sơ sở $B = \{v_1 = (1,0), v_2 = (1,1)\}$. Hãy xác định B – tọa độ của các véc tơ $x = (3,2)$ và $y = (1,-2)$

(ii) Trong $\mathbb{R}_3[x]$, cho $B = \{(x+1)^3, (x+1)^2, x+1, 1\}$. Hãy tìm B – tọa độ của véc tơ p với $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Giải

(i) Gọi $[x]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, khi đó

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Leftrightarrow x^T = \alpha_1 v_1^T + \alpha_2 v_2^T$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}.$$

Vậy $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Tương tự, nếu đặt $[y]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ thì

$$y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Leftrightarrow y^T = \alpha_1 v_1^T + \alpha_2 v_2^T$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}.$$

Vậy $[y]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(ii) Gọi $[p]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$, khi đó

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = \alpha_1 (x+1)^3 + \alpha_2 (x+1)^2 + \alpha_3 (x+1) + \alpha_4$$

$$= \alpha_1 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + \alpha_2 (x^2 + 2x + 1) + \alpha_3 (x+1) + \alpha_4$$

$$= \alpha_1 x^3 + (3\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$$

Tương đương với,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}.$$

Vậy $[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Nhận xét. B - tọa độ của véc tơ p cho ta biết sự phân tích đa thức p theo các lũy thừa của $(x+1)$ là:

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = 1(x+1)^3 - 2(x+1)^2.$$

Định lý 3.4.4. *Nếu B là một cơ sở của không gian véc tơ V_n thì $\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ta có:*

a) $[v+w]_B = [v]_B + [w]_B$

b) $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$

Chứng minh. Giả sử $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V_n và $[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $[w]_B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$.

a) Theo định nghĩa tọa độ, ta có $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$; $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$.

Suy ra $v+w=(\alpha_1+\beta_1)v_1+(\alpha_2+\beta_2)v_2+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)v_n$.
Từ đó:

$$[v+w]=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=[v]_B+[w]_B.$$

b) Ta có
$\alpha v=\alpha(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha\alpha_1v_1+\alpha\alpha_2v_2+\cdots+\alpha\alpha_nv_n$.
Suy ra

$$[\alpha v]_B=\begin{bmatrix}\alpha\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\alpha[v]_B. \quad \square$$

Mở rộng định lý cho trường hợp tổng của một số hữu hạn gồm $k\geq 2$ véc tơ:

$$\left[\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+...+\alpha_kv_k\right]_B=\alpha_1[v_1]_B+\alpha_2[v_2]_B+...\alpha_k[v_k]_B.$$

Định lý 3.4.5. *Trong không gian véc tơ V_n với cơ sở B, tập gồm k véc tơ $\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}\subset V_n$ là độc lập tuyến tính trong V_n khi và chỉ khi tọa độ của chúng $\{[u_1]_B,[u_2]_B,\ldots,[u_k]_B\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.*

Chứng minh. Giả sử $\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ là độc lập tuyến tính trong V_n. Xét $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_k\in\mathbb{R}$ thỏa

$$\alpha_1[u_1]_B+\alpha_2[u_2]_B+\cdots+\alpha_k[u_k]_B=\mathrm{O}$$

$\Rightarrow\ \left[\alpha_1u_1+\alpha_{22u}+\alpha_3u_3+...+\alpha_ku_k\right]_B=\mathrm{O}$

$\Rightarrow\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k=\mathrm{O}$.

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, tức là $\{[u_1]_B, [u_2]_B, \ldots, [u_k]_B\}$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, giả sử $\{[u_1]_B, [u_2]_B, \ldots, [u_k]_B\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Xét $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$ thỏa

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = O$$

$\Rightarrow [\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k]_B = O$

$\Rightarrow \alpha_1 [u_1]_B + \alpha_2 [u_2]_B + \cdots + \alpha_k [u_k]_B = O$.

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ nghĩa là $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ là độc lập tuyến tính trong V.

Nhận xét. *Ý nghĩa quan trọng của định lý là ở chỗ nó phép chuyển việc xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của tập véc tơ trong không gian véc tơ tổng quát V_n, về việc xét các tính chất đó của tập véc tơ trong không gian véc tơ quen thuộc $\mathbb{R}^n$, nơi mà công cụ ma trận tỏ ra rất có hiệu quả.*

Ví dụ 3.4.6. Xét tính độc lập tuyến tính của

$S = \{u(x) = x^2 - 3x + 2, v(x) = 3x^2 + 5x - 4, w(x) = 7x^2 + 21x - 16\}$ trong $\mathbb{R}_2[x]$.

Giải

Chọn cơ sở trong $\mathbb{R}_2[x]$ là cơ sở chính tắc $B = \{1, x, x^2\}$, khi đó

$$[u]_B = [x^2 - 3x + 2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [v]_B = [3x^2 + 5x - 4]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$[w]_B = [7x^2 + 21x - 16]_B = \begin{bmatrix} -16 \\ 21 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Xét tính độc lập tuyến tính của S, ta các cần xét tính độc lập tuyến tính của tập các véc tơ tọa độ $\{[u]_B, [v]_B, [w]_B\}$ trong $\mathbb{R}^3$. Lập ma trận $A = ([u]_B \quad [v]_B \quad [w]_B)$ và quy về bậc thang hoặc tính $\det A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -16 \\ -3 & 5 & 21 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 14 & 42 \\ 0 & -10 & -30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Từ đó suy ra $r(A) = 2 < |S| = 3$ nên $\{[u]_B, [v]_B, [w]_B\}$ là phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ nghĩa là S là phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}_2[x]$.

CÔNG THỨC TÌM B - TỌA ĐỘ TRONG $\mathbb{R}^n$

Giả sử $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, đặt $[x]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. Khi đó ta nhận được $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, nghĩa là

$$x^T = \alpha_1 v_1^T + \alpha_2 v_2^T + \cdots + \alpha_n v_n^T = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_n^T)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Đặt $P = (v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_n^T)$ thì $x^T = P[x]_B$. Do P là khả nghịch nên ta có:

$$[x]_B = P^{-1}.x^T \qquad (3.5)\ .$$

Ngoài ra, với E là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ thì $[x]_E \equiv x^T$.

Ví dụ 3.4.7. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$B = \{x_1 = (1,2,3), x_2 = (2,-1,0), x_3 = (3,0,1)\}$. Hãy tìm B - tọa độ của các véc tơ $x = (-2,-4,6), y = (4,5,6)$ và $z = (2,3,4)$.

Giải

Lập ma trận P gồm các véc tơ cột của các véc tơ thuộc cơ sở B

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x_1^T \quad x_2^T \quad x_3^T)$ và ta tìm được

$P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -8 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

Áp dụng công thức (3.5) ta có:

$$[x]_B = P^{-1}x^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -8 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$[y]_B = P^{-1}y^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -8 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$[z]_B = P^{-1}z^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -8 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét: Công thức (3.5) $[x]_B = P^{-1}.x^T$ đôi khi tỏ ra bất lợi khi phải tìm P^{-1}. Để tránh tình huống này, ta có thể tìm nhờ việc giải hệ phương trình tuyến tính $P[x]_B = x^T$ bằng phương pháp Gauss. Sau đây là ví dụ minh họa.

Ví dụ 3.4.8. Tìm tọa độ của véc tơ $x = (1,2,-2)$ đối với cơ sở

$$B = \{x_1 = (1,1,1), x_2 = (1,2,0), x_3 = (1,0,1)\} \text{ trong } \mathbb{R}^3.$$

Giải

Lập ma trận P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x_1^T \quad x_2^T \quad x_3^T).$$

Giải hệ tuyến tính $P[x]_B = x^T$, bằng phương pháp Gauss như sau:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Từ đó, suy ra $[x]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Giả sử trong không gian véc tơ V đã cho hai cơ sở B và C. Vấn đề xét ở đây là tìm mối quan hệ giữa các tọa độ $[v]_B$ và $[v]_C$ của $v \in V$.

Định lý 3.4.9. *Không gian véc tơ V có các cơ sở là $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Khi đó, $\forall v \in V$, tồn tại duy nhất một ma trận vuông cấp n, khả nghịch P_{BC} sao cho:*

$$[v]_B = P_{BC}[v]_C \qquad (3.6)$$

Ma trận P_{BC} được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở C. Công thức (3.6) *được gọi là công thức đổi tọa độ.*

Chứng minh.

$$\forall v \in V \text{, đặt } [v]_C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ thì}$$

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Lấy B – tọa độ véc tơ v ta có:

$$[v]_B = [\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n]_B = [\alpha_1 [w_1]_B + \alpha_2 [w_2]_B + \cdots + \alpha_n [w_n]_B]$$

$$= ([w_1]_B \quad \cdots \quad [w_n]_B) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Đặt: $$P_{BC} = ([w_1]_B \quad \cdots \quad [w_n]_B) \qquad (3.7)$$

Thì $[v]_B = P_{BC}[v]_C$ và P_{BC} là ma trận vuông cấp n khả nghịch vì tập các véc tơ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ là độc lập tuyến tính. Ma trận

P_{BC} là duy nhất do tính duy nhất của B – tọa độ của các véc tơ $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Nhận xét. Do P_{BC} khả nghịch nên từ (3.6) suy ra $[v]_C = (P_{BC})^{-1}[v]_B$. Chứng tỏ $(P_{BC})^{-1}$ chính là ma trận chuyển tọa độ từ cơ sở C sang cơ sở B, tức là

$$P_{CB} = (P_{BC})^{-1} \tag{3.8}$$

Ví dụ 3.4.10.

Trong $\mathbb{R}_2[x]$ cho 2 cơ sở là

$B = \{x^2 - x, 2x^2 - 2x + 1, x^2 - 2x\}$ và $C = \{x^2, x, 1\}$. Hãy tìm:

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ C sang B.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang C.

c) Tìm tọa độ của véc tơ p với $p(x) = 2x^2 + 3x - 1$ đối với cơ sở B.

Giải

Áp dụng (3.7) thì

$$P_{CB} = ([x^2 - x]_C \quad [2x^2 - 2x + 1]_C \quad [x^2 - 2x]_C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

b) Áp dụng (3.8) thì

$$P_{BC} = (P_{CB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Áp dụng (3.6) ta có:

$$[p]_B = P_{BC}.[p]_C = P_{BC}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ý nghĩa của véc tơ $[p]_B$ làở chỗ nó cho biết sự phân tích đa thức $p(x) = 2x^2 + 3x - 1$ theo các đa thức có trong cơ sở B như sau:

$$2x^2 + 3x - 1 = 9(x^2 - x) - (2x^2 - 2x + 1) - 5(x^2 - 2x).$$

THUẬT TOÁN TÌM MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ TRONG $\mathbb{R}^n$

Giả sử trong $\mathbb{R}^n$ cho trước cơ sở $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (gọi là cơ sở cũ) và lấy thêm một cơ sở mới bất kỳ $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Đặt $P_B = [v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_n^T]$ và $P_C = [w_1^T \quad w_2^T \quad \cdots \quad w_n^T]$. Theo công thức tìm B - tọa độ của véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ thì

$$[w_1]_B = (P_B)^{-1} w_1^T \,;\, [w_2]_B = (P_B)^{-1} w_2^T \,;\, \dots \,;\, [w_n]_B = (P_B)^{-1} w_n^T .$$

Thế vào (3.4) ta có:

$$P_{BC} = [[w_1]_B \quad [w_2]_B \quad \cdots \quad [w_n]_B] = [(P_B)^{-1} w_1^T \quad (P_B)^{-1} w_2^T \quad \cdots \quad (P_B)^{-1} w_n^T]$$

$$= (P_B)^{-1}[w_1^T \quad w_2^T \quad \cdots \quad w_n^T].$$

Gọi ẩn là ma trận $X = P_{BC} = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]$ thì có: $X = (P_B)^{-1} P_C$ hay nhân trái 2 vế với P_B ta có:

$$P_B X = P_C \Leftrightarrow [P_B X_1 \quad P_B X_2 \quad \cdots \quad P_B X_n] = [w_1^T \quad w_2^T \quad \cdots \quad w_n^T] \Leftrightarrow \begin{cases} P_B X_1 = w_1^T \\ P_B X_2 = w_2^T \\ \quad \vdots \\ P_B X_n = w_n^T \end{cases} (*).$$

Để tìm X, cần giải (*) với mỗi phương trình là một hệ phương trình tuyến tính có ma trận hệ số là P_B. Ví dụ, giải hệ $P_B X_1 = w_1^T$ bằng cách quy ma trận đầy đủ về $(I_n \mid w'^T_1)$ và có $X_1 = w'^T_1$ là cột đầu tiên của X,… và cứ tiếp tục như vậy cho đến khi tìm đủ n cột cho ma trận X.

Tuy nhiên, để có kết quả nhanh hơn, thay vì giải riêng lẻ từng hệ, ta kết hợp giải đồng thời n hệ bằng cách lặp ma trận đầy đủ chung là ma trận khối $[P_B \mid w_1^T \quad w_2^T \quad \cdots \quad w_n^T]$ rồi dùng phép toán hàng quy nó về dạng $[I_n \mid w'^T_1 \quad w'^T_2 \quad \cdots \quad w'^T_n]$. Ma trận thu được từ khối bên phải là ma trận X cần tìm. Tóm lại, ta có thể tìm ma trận chuyển tọa độ trong $\mathbb{R}^n$ theo lược đồ gồm 2 bước sau :

Bước 1 : *Lập ma trận khối có khối bên trái là cột các véc tơ có trong cơ sở cũ còn khối bên phải là cột các véc tơ có trong cơ sở mới:*

$$\left(v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_n^T \mid w_1^T \quad w_2^T \quad \cdots \quad w_n^T\right) \tag{3.9}$$

[cơ sở cũ | cơ sở mới]

Bước 2 : *Dùng phép toán hàng, quy ma trận khối bên trái của (3.9) về ma trận đơn vị I_n:*

$$\left(v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_n^T \mid w_1^T \quad w_2^T \quad \cdots \quad w_n^T\right) \to [I_n \mid P].$$

Khi đó ma trận P ở khối bên phải chính là ma trận chuyển tọa độ P_{BC} cần tìm .

Ví dụ 3.4.11. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở là $B=\{x_1=(1,1,0), x_2=(2,0,1), x_3=(1,-1,0)\}$ và $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc. Tìm ma trận chuyển tọa độ từ cơ sở B sang cơ sở E và B- tọa độ của $v=(2,3,4)$.

Giải

Tìm P_{BE}

Cách 1: sử dụng thuật toán gồm 2 bước:

Bước 1: Lập ma trận khối theo công thức (3.9) ta có

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Bước 2: Thực hiện phép rút gòn hàng quy khối bên trái về I_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \Rightarrow P_{BE} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cách 2: Vì E là cơ sở chính tắc nên từ (3.7) ta có:

$$P_{EB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ([x_1]_E \quad [x_2]_E \quad [x_3]_E)$$

Từ (3.8) ta có

$$P_{BE} = (P_{EB})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng công thức (3.6) ta có

$$[v]_B = P_{BE}.[v]_E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1: Xét xem các tập hợp cùng với phép cộng và phép nhân vô hướng cho sau đây có phải là không gian véc tơ trên không?

a) $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

b) $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 : (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$,

$(\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\})$.

c) $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 : (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$,

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x_1, x_2) = (x_1^\lambda, x_2^\lambda)$.

Bài 2: Kiểm tra các tập sau đây có là không gian véc tơ con của các không gian véc tơ tương ứng không?

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0, i = 1, 2, 3\}$.

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$.

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 = 1\}$.

d) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

e) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

f) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$.

g) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \middle| b + c = 0 \right\}$.

h) $W = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t] \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$.

Bài 3: Cho các véc tơ $u = (1,-3,2)$ và $v = (2,-1,1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

a) Hãy biểu diễn tuyến tính véc tơ $w = (1,7,-4)$ qua các véc tơ u và v.

b) Xác định m để $w = (1,m,5)$ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ u và v.

c) Tìm điều kiện của a,b,c để $w = (a,b,c)$ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ u và v.

Bài 4: Hãy biểu diễn véc tơ x thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ u,v và w dưới đây:

a) $x = (7,-2,15), u = (2,3,5), v = (3,7,8), w = (1,-6,1)$.

b) $x = 5 + 9t + 5t^2, u = 2 + t + 4t^2, v = 1 - t - 3t^2, w = 3 + 2t + 5t^2$

Bài 5: Hãy xác định λ sao cho véc tơ x là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ u,v và w dưới đây:

a) $x = (7,-2,\lambda), u = (2,3,5), v = (3,7,8), w = (1,-6,1)$.

$x = \lambda + 9t + 5t^2, u = 2 + 2t + 4t^2, v = 1 - t - 3t^2, w = 3 + 3t + 6t^2$

Bài 6: Xét sự độc lập tuyến tính của các hệ gồm các véc tơ sau trong không gian véc tơ V tương ứng:

a) $a_1 = (3,2,-1), a_2 = (2,3,5), a_3 = (-1,1,2)$ $(V = \mathbb{R}^3)$.

b) $b_1 = (2,1,1,-1), b_2 = (1,-1,2,1), b_3 = (3,4,5,1), b_4 = (1,2,-1,-2)$ $(V = \mathbb{R}^4)$.

c) $c_1 = (1,2,-1,3), c_2 = (3,7,9,13), c_3 = (-2,-4,2,-6)$ $(V = \mathbb{R}^4)$.

d) $d_1=(6,3,5,7), d_2=(5,9,8,11), d_3=(13,17,25,31), d_4=(25,18,19,41),$
$d_5=(33,79,81,1)$ $(V=\mathbb{R}^4)$.

e) $e_1=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$
$V=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

f) $f_1(x)=x^3-2x+2, f_2(x)=x^2-1, f_3(x)=x^3+2x^2-2x, f_4(x)=x^3+1$
trong $\mathbb{R}_3[x]$.

Bài 7: Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véc tơ sau theo tham số thực m:

a) $S=\{x^2+x+1, 2x^2+x+2, 3x^2+mx+3\}$ trong $\mathbb{R}_2[x]$.

b) $S=\left\{A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 4 & m \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$
trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Bài 8: Cho x, y, z là ba véc tơ độc lập tuyến tính trong không gian véc tơ V. Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véc tơ sau:

a) $S=\{u=x+y-2z, v=x-y, w=3y+z\}$.

b) $S=\{u=x+y-3z, v=x+3y-z, w=y+mz\}$ (m là tham số thực).

Bài 9: Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véc tơ sau trong các không gian véc tơ tương ứng. Tìm hạng cũng như hệ véc tơ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ véc tơ đó.

a) $\{u_1=(1,2,3,4), u_2=(2,3,4,1), u_3=(3,4,5,6), u_4=(4,5,6,7)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $\{u_1=(1,0,0,0), u_2=(0,1,0,0), u_3=(0,0,a,0)\}$ trong $\mathbb{R}^4$ (a là tham số thực).

Bài 10: Các hệ véc tơ sau có sinh ra không?

a) $\{u_1=(1,1,1), u_2=(2,2,0), u_3=(3,0,0)\}$.

b) $\{u_1=(2,-1,3), u_2=(4,1,2), u_3=(8,-1,8)\}$

c) $\{u_1=(3,1,4), u_2=(2,-3,5), u_3=(5,-2,9), u_4=(1,4,-1)\}$.

d) $\{u_1=(1,3,3), u_2=(1,3,4), u_3=(1,4,3), u_4=(6,2,1)\}$.

Bài 11: Hệ véc tơ nào sau đây là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$?

a) $S=\{u_1=(3,2,2), u_2=(4,8,1)\}$.

b) $S=\{u_1=(4,1,2), u_2=(2,0,1), u_3=(1,3,2), u_4=(1,1,3)\}$.

c) $S=\{u_1=(1,0,0), u_2=(2,2,0), u_3=(3,3,3)\}$.

Bài 12: Xác định m để:

a) $S=\{u_1=(0,1,1), u_2=(1,2,1), u_3=(1,3,m)\}$ sinh ra $\mathbb{R}^3$.

b) $S=\{u_1=(1,2,-1), u_2=(0,3,1), u_3=(1,5,0), u_4=(3,9,m)\}$ không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

c) $S=\{u_1=(m,3,1), u_2=(0,m-1,2), u_3=(0,0,m+1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Bài 13: Tìm một cơ sở của không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ gồm các véc tơ sau, rồi chỉ ra số chiều của không gian con đó.

a) $\alpha_1=(1,2,-1,3), \alpha_2=(2,-1,2,4), \alpha_3=(0,-5,4,-2)$.

b)
$\beta_1 = (-1,0,1,2), \beta_2 = (1,1,0,-3), \beta_3 = (2,1,-1,-5), \beta_4 = (-2,3,1,-3),$
$\beta_5 = (1,-1,1,2)$.

Bài 14: Cho các véc tơ

$u_1 = (1,2,-1,2,0), u_2 = (2,3,4,1,2), u_3 = (0,2,-12,6,-4), u_4 = (1,-1,a,7,b),$ và các không gian với a và b là các tham số thực:

$$L_1 = Span\{u_1, u_2, u_3\}, L_2 = Span\{u_1, u_2, u_3, u_4\}.$$

a) Tìm một cơ sở và số chiều của L_1.

b) Biện luận theo a và b tìm số chiều của L_2. Khi nào $L_1 \equiv L_2$?

Bài 15: Trong $\mathbb{R}^3$, cho không gian con

$L_1 = Span(S)$ với

$S = \{u_1 = (1,-3,2), u_2 = (2,-1,1), u_3 = (1,m,5)\} \subset \mathbb{R}^3$

(m là tham số thực).

a) Với giá trị nào của m thì $L \equiv \mathbb{R}^3$?

b) Cho $m = -8$. Tìm điều kiện của a,b,c để $x = (a,b,c) \in L$.

Bài 16: Tập nào là không gian con của $\mathbb{R}^4$? Tìm một cơ sở của nó nếu nó là không gian con.

a) $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4\}$.

b) $L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 = x_2\}$.

c) $L_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$.

d) $L_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 2x_3$ và $x_1 - x_2 = 2x_4\}$.

Bài 17: Tìm một cơ sở và chỉ ra số chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình dưới đây:

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

e) $AX = O$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

Bài 18: Tìm nghiệm tổng quát và một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 - 17x_4 = 0 \end{cases}$$

(Một hệ nghiệm cơ bản là một cơ sở của không gian nghiệm)

Bài 19: Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ véc tơ:

$$A = \{\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,1,2), \alpha_3 = (1,2,3)\},$$

$$B = \{\beta_1 = (2,1,-1), \beta_2 = (3,2,-5), \beta_3 = (1,-1,m)\}.$$

a) Chứng minh rằng A là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $u = (2,3,1)$ đối với cơ sở A.

c) Tìm m để B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

d) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ A sang B với $m = 1$.

e) Cho $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, [y]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. Tìm x, $[3x + 2y]_B$ và $[x]_A$.

Bài 20: Chứng minh rằng hệ $E = \{1 + x + x^2, 1 + 2x, 1 + 3x + 2x^2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$ và tìm tọa độ của véc tơ $u(x) = 3x^2 - x + 7$ đối với cơ sở E.

Bài 21: Cho $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và các véc tơ v_1, v_2, v_3 có tọa độ đối với cơ sở B lần lượt là

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [v_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [v_3]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Chứng minh $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Biểu diễn v_1, v_2, v_3 theo u_1, u_2, u_3.

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở E sang B.

Bài 22: Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ:

$u_1 = (1,-1,-4,0), u_2 = (1,1,2,4), u_3 = (2,1,1,6), u_4 = (2,-1,-5,2)$.

Đặt $W = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ (W là không gian véc tơ sinh bởi hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$).

a) Tìm hạng của hệ véc tơ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

b) Tìm một cơ sở và chỉ ra số chiều của W.

c) Véc tơ $u = (6,2,0,16)$ có thuộc W không? Nếu $u \in W$ thì tìm tọa độ của u đối với cơ sở vừa tìm được ở câu b.

d) Hãy bổ sung vào cơ sở ở câu b để được một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Bài 23: Cho $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V trên $\mathbb{R}$, đặt

$$F = \{v_1 = mu_1 + u_2 + 3u_3, v_2 = mu_1 - 2u_2 + u_3, v_3 = u_1 - u_2 + u_3\}$$

(m là tham số thực).

a) Xác định m để hệ F là cơ sở của V.

b) Khi F là cơ sở của V, tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang F.

Bài 24: Trong không gian $\mathbb{R}_2[x]$ các đa thức thực bậc bé hơn hoặc bằng 2, cho E là cơ sở chính tắc và $B = \{v_1(x) = 1 + 3x, v_2(x) = x + 2x^2, v_3(x) = 1 + x + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

a) Chứng minh B là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang B.

c) Cho $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tìm v và $[v]_E$.

Bài 25: Hãy cho biết mỗi tập hợp sau đây có phải là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ không? Vì sao?

a/ $\{(x,y,z) \mid x-2y+5z=0\}$

b/ $\{(x,y,z) \mid 2y=7z\}$

c/ $\{(x,y,z) \mid 3y-4z=8z\}$

d/ $\{(x,y,z) \mid y=0\}$

e/ $\{(x,y,z) \mid x^2-y+3z^4=0\}$

f/ $\{(x,y,z) \mid x^2=z^3\}$

g/ $\{(x,y,z) \mid 2x+y-3z=1\}$

h/ $\{(x,y,z) \mid 4x-z+5y=3\}$

i/ $\{(x,y,z) \mid xyz=0\}$

j/ $\{(x,y,z) \mid xy=z\}$.

Bài 26: Gọi $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận vuông cấp hai, với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường. Chứng minh rằng $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ là một không gian véc tơ. Hỏi mỗi tập hợp sau đây trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ có phải là không gian véc tơ con của $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ không? Vì sao?

a/ Các ma trận có dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với a,b,c,d là số nguyên.

b/ Các ma trận có dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a + d \neq 0$

c/ Các ma trận vuông cấp hai sao cho $A = A^T$.

d/ Các ma trận vuông cấp hai sao cho $\det(A) = 0$.

Bài 27: Hỏi mỗi tập hợp dưới đây có phải là không gian véc tơ con của $C[0,1]$ hay không:

a/ Các hàm số $f \in C[0,1]$ sao cho $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [0,1]$

b/ Các hàm số $f \in C[0,1]$ sao cho $f(0) = 0$

c/ Các hàm số $f \in C[0,1]$ sao cho $f(0) = 2$

d/ là các hàm hằng trên $[0,1]$.

e/ Các hàm số có dạng $f(x) = k_1 + k_2 \sin x$, với k_1, k_2 là các số thực.

Bài 28: Hỏi mỗi tập hợp sau đây trong $\mathbb{R}_3[x]$ có phải là không gian con của $\mathbb{R}_3[x]$ hay không:

a/ Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ với $a_0 = 0$

b/ Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ với $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

c/ Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ với a_0, a_1, a_2, a_3 là các số nguyên.

Bài 29: Trong $\mathbb{R}^3$ (hay $\mathbb{R}^4$), hãy biểu diễn véc tơ thành tổ hợp tuyến tính của α_1, α_2 và α_3:

a/ $\alpha = (7,-2,15)$, $\alpha_1 = (3,7,8), \alpha_2 = (1,-6,1), \alpha_3 = (-2,-3,-5)$.

b/ $\alpha = (0,0,0)$ và $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ như ở a/.

c/ $\alpha = (1,4,-7,7)$,
$\alpha_1 = (16,9,1,-3), \alpha_2 = (-1,-2,3,-2), \alpha_3 = (4,1,3,-2)$

d/ $\alpha = (0,0,0,0)$ và $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ như ở c/.

Bài 30: Trong $\mathbb{R}^3$, hãy xác định λ sao cho α là tổ hợp tuyến tính của α_1, α_2 và α_3:

a/ $\alpha_1 = (2,3,5), \alpha_2 = (-3,-7,-8), \alpha_3 = (-1,6,-1), \alpha = (7,-2,\lambda)$.

B/ $\alpha_1 = (7,2,1), \alpha_2 = (-4,-1,-6), \alpha_3 = (4,4,3), \alpha = (5,9,\lambda)$/

c/ $\alpha_1 = (3,4,2), \alpha_2 = (6,8,7), \alpha_3 = (2,-5,1), \alpha = (9,12,\lambda)$/

d/ $\alpha_1 = (3,2,5), \alpha_2 = (2,4,7), \alpha_3 = (5,6,\lambda), \alpha = (1,3,5)$/

Bài 31: Hãy biểu diễn các đa thức sau thành tổ hợp tuyến tính của $p_1(x) = 3 + 5x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x - 8x^2$, $p_3(x) = 6 + 7x + 3x^2$:

a/ $5 + 10x + 12x^2$

b/ $8 - 6x^2$

c/ 0.

d/ $4 - 5x + 2x^2$

Bài 32: Ma trận nào sau đây là tổ hợp tuyến tính của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{và } C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}?$$

a/ $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ b/ $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ c/ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d/ $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

e/ $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ f/ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ g/ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ h/ $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Bài 33: Mỗi tập hợp véc tơ sau đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không? Vì sao?

a/ $\{\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (-2,5,0), \alpha_3 = (-4,0,0)\}$

b/ $\{\alpha_1 = (-2,1,3), \alpha_2 = (5,1,2), \alpha_3 = (8,-1,7)\}$

c/ $\{\alpha_1 = (3,1,4), \alpha_2 = (2,-3,5), \alpha_3 = (5,-2,9), \alpha_4 = (1,4,-1)\}$

d/ $\{\alpha_1 = (1,3,3), \alpha_2 = (1,3,4), \alpha_3 = (1,4,3), \alpha_4 = (6,2,1)\}$

e/
$\{\alpha_1 = (-3,2,0), \alpha_2 = (-1,7,-4), \alpha_3 = (4,-2,3), \alpha_4 = (10,-7,1)\}$

f/ $\{\alpha_1 = (8,-1,-6), \alpha_2 = (1,-1,2), \alpha_3 = (4,0,-5), \alpha_4 = (-3,2,9)\}$

Bài 34: Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào là độc lập tuyến tính và tập hợp nào là phụ thuộc tuyến tính?

a/ $\{\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (-4,8)\}$ trên .

b/ $\{\alpha_1 = (2,3), \alpha_2 = (-5,4), \alpha_3 = (7,-1)\}$ trên .

c/ $\{p_1(x) = 2 + 3x - x^2, p_2(x) = 6 - 7x - 5x^2\}$ trên $\mathbb{R}_2[x]$.

d/ $\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ trên $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Bài 35: Các tập hợp sau đây là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a/ $\{\alpha_1 = (1,-2,5), \alpha_2 = (6,1-7)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

b/ $\{\alpha_1 = (4,-1,9), \alpha_2 = (-3,5-8)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

c/ $\{\alpha_1 = (2,-3,1), \alpha_2 = (-3,1,-5), \alpha_3 = (1,-4,3)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

d/ $\{\alpha_1 = (-6,1,-3), \alpha_2 = (-2,-1,7), \alpha_3 = (0,-3,2)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

e/ $\{\alpha_1 = (-7,1,0), \alpha_2 = (3,0,-4), \alpha_3 = (-1,5,-2)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

f/ $\{\alpha_1 = (0,-4,3), \alpha_2 = (8,-2,0), \alpha_3 = (1,0,1)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

g/
$\{\alpha_1 = (4,-5,2,6), \alpha_2 = (2,-2,1,-3), \alpha_3 = (-6,3,-3,-9), \alpha_4 = (-5,1,8,-7)\}$
trên $\mathbb{R}^3$

h/
$\{\alpha_1 = (1,0,0,2,-5), \alpha_2 = (0,-1,0,3,-4), \alpha_3 = (0,0,-1,4,-7), \alpha_4 = (2,-3,4,11,-6)\}$
trên $\mathbb{R}^3$

Bài 36: Tập hợp nào trong $\mathbb{R}_2[x]$ sau đây là phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?

a/ $\{2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 1 + 10x - x^2\}$

b/ $\{5 + x + x^2, 2 - x + 9x^2, 4 - 7x^2\}$

c/ $\{6 - x^2, 5 + x - 3x^2\}$

d/ $\{1 + 3x + 3x^2, x + 6x^2, 10, 5 + 4x - 2x^2, 7 + 9x - x^2\}$

Bài 37: Hãy tìm giá trị thực sao cho các véc tơ sau đây là phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$:

a/ $\alpha_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \alpha_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

b/ $\alpha_1 = (2,-3,5), \alpha_2 = (0,\lambda,-4), \alpha_3 = (-1,6,-3)$

c/ $\alpha_1 = (-4,\lambda,-1), \alpha_2 = (3,-8,6), \alpha_3 = (-7,3,-9)$

d/ $\alpha_1 = (2,\lambda,-1), \alpha_2 = (4,-1,-2), \alpha_3 = (\lambda,3,-8)$

Bài 38: Hãy giải thích vì sao các tập hợp sau đây không phải là cơ sở của không gian tương ứng:

a/ $\{\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (0,-4), \alpha_3 = (-3,7)\}$ đối với $\mathbb{R}^2$

b/ $\{\alpha_1 = (-1,4-5), \alpha_2 = (6,-7,3)\}$ đối với $\mathbb{R}^3$

c/ $\{p_1(x) = 1 + x + 3x^2, p_2(x) = x - 4\}$ đối với $\mathbb{R}_2[x]$.

d/

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right\}$$

đối với $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Bài 39: Các tập hợp nào sao đây là một cơ sở của không gian tương ứng?

a/ $\{(2,1), (3,0)\}$ đối với $\mathbb{R}^2$.

b/ $\{(-3,1), (-5,-8)\}$ đối với $\mathbb{R}^2$.

c/ $\{(0,0), (1,4)\}$ đối với $\mathbb{R}^2$.

d/ $\{(3,2), (-18,-12)\}$ đối với $\mathbb{R}^2$

e/ $\{(-1,0,0), (-3,-3,0), (4,4,4)\}$ đối với $\mathbb{R}^3$.

f/ $\{(-3,-1,4), (2,-5,9), (1,-3,7)\}$ đối với $\mathbb{R}^3$.

g/ $\{(2,-3,1), (5,-1,-1), (0,-3,2)\}$ đối với $\mathbb{R}^3$.

h/ $\{(1,5,-9), (2,7,-3), (-3,4,1)\}$ đối với $\mathbb{R}^3$.

Bài 40: Tập hợp nào sau đây là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$:

a/ $\{1 - 8x + 3x^2, 2 + 3x + 5x^2, 1 - 4x\}$

b/ $\{4 + 6x + x^2, -3 + 7x - 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$

c/ $\{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$

d/ $\{-1+x+5x^2, 3+2x+7x^2, 5-3x-6x^2\}$

Bài 41: Tập hợp nào sau đây là một cơ sở của $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Vì sao?

a/ $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\right\}$

b/ $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

c/ $\left\{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

d/ $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Bài 42: Hãy tìm một cơ sở và xác định số chiều cho không gian nghiệm của mỗi hệ phương trình tuyến tính sau đây:

a/ $\begin{cases} 3x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 - 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_4 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} x_2 - 3x_1 + 4x_3 - x_6 = 0 \\ 3x_3 + 2x_5 - x_2 + x_1 = 0 \\ 7x_4 - 2x_1 + x_6 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ d/ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_3 - x_2 + 4x_1 = -2x_5 \end{cases}$

e/ $\begin{cases} 2x_3 - x_2 + 4x_4 = -x_1 \\ 2x_1 + 5x_3 = x_2 + 7x_4 \\ x_4 + 2x_3 = x_2 \\ x_1 - 4x_4 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = x_4 \\ 5x_4 + 2x_2 - 6x_1 = 0 \end{cases}$ f/ $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y = z - 2x \\ w + 3x = -y \\ 3z + 4w - 2x = 0 \\ z = x - 7y \\ 2z - 3w = 4y \\ x - 2y - w = 0 \end{cases}$

g/ $\begin{cases} 7x_2 - 3x_4 + 5x_1 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 - 6x_4 + 3x_2 + 2x_1 = 0 \\ 2x_3 - 11x_1 - 3x_4 - 15x_2 = 0 \end{cases}$ h/ $\begin{cases} 2x_3 + 4x_4 - 5x_2 + 3x_1 = 0 \\ 3x_4 - 7x_1 + x_3 - 4x_2 = 0 \\ 7x_2 - 6x_4 + 5x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

i/ $\begin{cases} 5x_2 - 8x_3 + 2x_1 = 0 \\ 3x_2 - 9x_3 + 4x_1 = 0 \\ 2x_1 - 5x_3 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - 7x_3 + 8x_2 = 0 \end{cases}$ j/ $\begin{cases} 2x_3 - 4x_5 + x_6 + 3x_2 - x_1 = 0 \\ 2x_1 + 5x_4 - 3x_6 + 7x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_4 + 4x_5 - 2x_2 = x_1 \end{cases}$

Bài 43: Hãy tìm một cơ sở và xác định số chiều cho mỗi không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sau:

a/ Mặt phẳng $4x - 3y + 9z = 0$

b/ Mặt phẳng $z - 4y = 0$

c/ Đường thẳng $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = 5t \end{cases}$ với $-\infty < t < +\infty$

d/ Các véc tơ có dạng (a, b, c) trong đó $b = a + c$

e/ Các véc tơ có dạng (a, b, c) trong đó $b = 0$

f/ Các véc tơ có dạng (a, b, c) trong đó $b = -c$

Bài 44: Hãy xác định số chiều của các không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ sau:

a/ Các véc tơ có dạng $(a,b,c,0)$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$

b/ Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) trong đó và với $a,b \in \mathbb{R}$.

c/ Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) trong đó với $a \in \mathbb{R}$.

d/ Các véc tơ có dạng (a,b,c,d) trong đó với $b,d \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Bài 45: Hãy xác định số chiều cho không gian véc tơ con của $\mathbb{R}_3[x]$, sinh ra bởi các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ với $a_0 = 0$ và $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Bài 46: Hãy tìm cơ sở và số chiều cho các không gian véc tơ con sinh ra bởi các véc tơ sau:

a/ $\{(1,-1,2),(-2,1,3),(8,-3,0)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

b/ $\{(2,4,-1),(5,-1,-6),(-3,7,-2)\}$ trên $\mathbb{R}^3$

c/ $\{(1,-1,2,-5),(2,0,-3,7),(8,0,0,-5)\}$ trên $\mathbb{R}^4$

d/ $\{(1,1,0,0),(0,0,-1,1),(-3,0,3,3),(0,-4,0,4)\}$ trên $\mathbb{R}^4$

e/ $\{(-2,1,-3,5),(0,2,7,-6),(-1,1,0,-3),(1,-4,2,-5)\}$ trên $\mathbb{R}^4$

f/ $\{(1,0,1,-2),(1,-1,3,-2),(-4,1,5,-9),(1,-1,1,3)\}$ trên $\mathbb{R}^4$

Bài 47: Hãy tìm tọa độ của véc tơ theo cơ sở $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ trên $\mathbb{R}^3$:

a/ $\alpha = (2,-1,3)$ và $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (4,4,0), \alpha_3 = (5,5,5)$

b/ $\alpha = (5,-12,3)$ và

$\alpha_1 = (-1,-2,-3), \alpha_2 = (4,-5,-6), \alpha_3 = (-7,8,-9)$

c/ $\alpha = (-4,3,2)$ và $\alpha_1 = (-1,4,-3), \alpha_2 = (0,-2,5), \alpha_3 = (1,0,-6)$

d/ $\alpha = (0,4,-1)$ và

$\alpha_1 = (-3,1,-4), \alpha_2 = (2,-5,1), \alpha_3 = (7,-2,-3)$

Bài 48: Trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, hãy tìm tọa độ của theo cơ sở $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Bài 49: a/ Trên $\mathbb{R}^2$ tìm tọa độ của $\alpha = (3,7)$ theo cơ sở

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

b/ Trên $\mathbb{R}^3$ tìm tọa độ của $\alpha = (1,0,-2)$ theo cơ sở

$$\left\{\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$$

Bài 50: Trên $\mathbb{R}^2$ xét các cơ sở $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}, B' = \{\beta_1, \beta_2\}$

với $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

a/ Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

b/ Hãy tìm tọa độ $[\alpha]_B$ với $\alpha = (-3,5)$ và tìm $[\alpha]_{B'}$.

c/ Tìm $[\alpha]_{B'}$ trực tiếp và kiểm tra lại kết quả trên .

d/ Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

e/ Làm lại các câu trên với

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 51: Trên, xét các cơ sở $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ và $B' = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, với $\alpha_1 = (3,0,3), \alpha_2 = (3,-2,-1), \alpha_3 = (-1,-6,1)$,

$$\beta_1 = (6,6,0), \beta_2 = (2,6,-4), \beta_3 = (2,3,-7) \quad .$$

a/ Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B

b/ Hãy tìm tọa độ $[\alpha]_B$ với $\alpha = (-5,8,-5)$ và tìm $[\alpha]_{B'}$

c/ Tìm $[\alpha]_{B'}$ trực tiếp và kiểm tra lại kết quả trên.

d/ Làm lại các câu trên với

$$\alpha_1 = (-2,-1,-1), \alpha_2 = (-2,1,-1), \alpha_3 = (-1,-2,-1),$$
$$\beta_1 = (-3,-1,5), \beta_2 = (-1,-1,3), \beta_3 = (1,0,-2)$$

Bài 52: Trên $\mathbb{R}_1[x]$ xét các cơ sở $B = \{p_1, p_2\}, B' = \{q_1, q_2\}$ với

$$p_1(x) = 8 + 4x, p_2(x) = 5 + x,\ q_1(x) = 2 \text{ và } q_2(x) = 7 + 3x \,..$$

a/ Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ sang .

b/ Hãy tìm tọa độ $[p]_B$ với $p(x) = -6 + x$, rồi suy ra $[p]_{B'}$.

c/ Tìm $[p]_{B'}$ trực tiếp và kiểm tra lại kết quả trên.

d/ Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

CHƯƠNG 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Trong chương trước, chúng ta đã nghiên cứu khái niệm không gian véc tơ và các tính chất của nó. Trong chương này, ta xét mối liên hệ giữa các không gian véc tơ với nhau thông qua khái niệm ánh xạ tuyến tính.

4.1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 4.1.1. Cho các $\mathbb{R}$- không gian véc tơ U và V. Ánh xạ $f:U\to V$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in U$;

(ii) $f(\alpha x)=\alpha f(x),\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall x\in U$.

Ánh xạ tuyến tính còn được gọi là đồng cấu tuyến tính (một cách chính xác hơn là $\mathbb{R}$- đồng cấu tuyến tính) hay còn được gọi một cách đơn giản là đồng cấu ($\mathbb{R}$- đồng cấu). Ánh xạ tuyến tính $f:U\to U$ được gọi là một tự đồng cấu hay là một toán tử tuyến tính trên U.

Định lý 4.1.2. *Cho U và V là các không gian véc tơ. Ánh xạ $f:U\to V$ là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi*

$$f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y),\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\forall x,y\in U.$$

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

($\Leftarrow$) Chọn $\alpha=1$ ta nhận được $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Chọn $x=y=0$ ta có $f(0)=2f(0)$.

Chọn $y=0$ ta nhận được $f(\alpha x)=\alpha f(x)+f(0)=\alpha f(x)$.

Cho $f: U \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Các tính chất sau đây được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

(i) $f(0) = 0$.

Thật vậy, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, nên theo luật giản ước ta nhận được kết quả.

(ii) $f(-x) = -f(x), \forall x \in U$.

Thật vậy, $f(x) + f(-x) = f(x+(-x)) = f(0) = 0$ nên $f(-x) = -f(x)$.

(iii)
$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k), \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall x_i \in U$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Kết quả này được suy ra từ phép quy nạp. □

Từ đây ta ký hiệu $L(U,V) = \{f: U \to V \mid f$ là ánh xạ tuyến tính từ U vào $V\}$ và

$L(U) = \{f: U \to U \mid f$ là toán tử tuyến tính trên $U\}$.

Ví dụ 4.1.3.

(i) Ánh xạ $0: U \to V$ được xác định bởi $0(x) = 0, \forall x \in U$ là ánh xạ tuyến tính không.

(ii) Ánh xạ đồng nhất $id_U: U \to U$ xác định bởi $id_U(x) = x, \forall x \in U$ là một toán tử tuyến tính trên U.

(iii) Phép đạo hàm hình thức $D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ xác định bởi

$D(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$, là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}[x]$.

(iv) Cho $a < b \in \mathbb{R}$, ký hiệu $C[a,b]$ là không gian các hàm thực liên tục trên $[a,b]$. Ánh xạ $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$T(f) = \int_a^b f(x)dx, \forall f \in C[a,b]$ là một ánh xạ tuyến tính.

(v) Cho $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ là một ma trận cố định. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \quad \cdots \quad x_n).A^T$ là một ánh xạ tuyến tính.

Định lý 4.1.4 (Sự xác định của ánh xạ tuyến tính). *Cho U và V là các không gian véc tơ. $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ là một cơ sở của U và $v_1,v_2,\ldots,v_n$ là các véc tơ tùy ý trong V. Khi đó, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ thỏa mãn*

$$f(u_i) = v_i \text{ với } 1 \le i \le n.$$

Nói cách khác, ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở.

Chứng minh.

Chứng minh sự tồn tại. Vì $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ là một cơ sở của U nên với mỗi $u \in U$ tồn tại duy nhất $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Đặt $f : U \to V$ là ánh xạ xác định bởi $f(u) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Dễ thấy rằng f là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn

$$f(u_i) = v_i, 1 \le i \le n.$$

Chứng minh tính duy nhất. Nếu $g : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $g(u_i) = v_i, 1 \le i \le n,$ thì $\forall u \in U$ ta có,

$$
\begin{aligned}
f(u) &= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\
&= \alpha_1 g(u_1) + \cdots + \alpha_n g(u_n) = g(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) \\
&= g(u), \text{ nghĩa là } f \equiv g. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Định nghĩa 4.1.5. Cho U,V là các không gian véc tơ, $f: U \to V$ là một đồng cấu. Khi đó, f được gọi là một đơn cấu (tương ứng, toàn cấu, đẳng cấu) nếu f là đơn ánh (tương ứng, toàn ánh, song ánh).

Khi f là một đẳng cấu thì U được gọi là đẳng cấu với V, ký hiệu $U \cong V$.

Nhận xét 4.1.6. (i) Dễ thấy rằng ánh xạ đồng nhất $id_U: U \to U$ là một tự đẳng cấu.

(ii) Nếu $f: U \to V$ là một đẳng cấu thì ánh xạ ngược $f^{-1}: V \to U$ cũng là một đẳng cấu.

(iii) Nếu $f: U \to V$, $g: V \to W$ là các đẳng cấu thì $gf: U \to W$ cũng là một đẳng cấu.

Việc chứng minh các nhận xét này là đơn giản nên chúng tôi dành cho bạn đọc tự chứng minh như một bài tập nhỏ.

Định lý 4.1.7. *Cho $f: U \to V$ là một đồng cấu. Khi đó,*

(i) *ảnh qua f của một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính là một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính;*

(ii) *ánh xạ f là một đơn cấu khi và chỉ khi ảnh qua f của một hệ véc tơ độc lập tuyến tính là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính;*

(iii) *ánh xạ f là một toàn cấu khi và chỉ khi ảnh qua f của một hệ sinh của U là một hệ sinh của V;*

(iv) *ánh xạ* f *là một đẳng cấu khi và chỉ khi ảnh qua* f *của một cơ sở của* U *là một cơ sở của* V.

Chứng minh. (i) Giả sử $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset U$ là một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó, tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i u_i + \cdots + \alpha_k u_k = 0$.

Vì f là đồng cấu nên

$$0 = f(0) = f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i u_i + \cdots + \alpha_k u_k)$$
$$= \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_i f(u_i) + \cdots + \alpha_k f(u_k).$$

Suy ra $\{f(u_1), \ldots, f(u_k)\}$ phụ thuộc tuyến tính.

(iii) Giả sử $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset U$ là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính. Từ hệ thức

$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_k f(u_k) = 0$,

Suy ra

$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k) = 0 = f(0)$.

Vì f là đơn cấu nên $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$. Từ đó suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, nghĩa là, $\{f(u_1), \cdots, f(u_k)\}$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, $\forall u, u' \in U$ thỏa $u \neq u'$ thì $u - u' \neq 0$. Suy ra $\{u - u'\}$ độc lập tuyến tính. Do giả thiết, $\{f(u - u')\}$ độc lập tuyến tính. Do đó, $f(u - u') \neq 0$, nghĩa là $f(u) - f(u') \neq 0$ và $f(u) \neq f(u')$. Vậy f là đơn cấu.

(iii) Giả sử $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ là một hệ sinh của U. Do f là toàn cấu nên $\forall v \in V$, tồn tại $u \in U$ sao cho $f(u) = v$. Vì

$\{u_1,\cdots,u_k\}$ là một hệ sinh của U nên tồn tại $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ sao cho

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k$$

Từ đó, ta nhận được

$$\begin{aligned}v=f(u)&=f(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k)\\&=\alpha_1f(u_1)+\cdots+\alpha_kf(u_k).\end{aligned}$$

Nói cách khác, $\{f(u_1),\cdots,f(u_k)\}$ là một hệ sinh của V.

Ngược lại, nếu $\{f(u_1),\cdots,f(u_k)\}$ là một hệ sinh của V thì với mọi $v\in V$ luôn tồn tại $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ sao cho

$$v=\alpha_1f(u_1)+\cdots+\alpha_kf(u_k).$$

Đặt $u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k\in U$ thì

$f(u)=\alpha_1f(u_1)+\cdots+\alpha_kf(u_k)=v$. Như vậy, f là toàn cấu.

(iv) Suy ra từ (ii) và (iii). □

Hệ quả 4.1.8. *Hai không gian véc tơ đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều.*

Ví dụ 4.1.9. Cho V là một không gian véc tơ và $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó, ánh xạ $f:V\to\mathbb{R}^n$ xác định bởi $v\mapsto[v]_B$ là một đẳng cấu. Ánh xạ này còn được gọi là ánh xạ tọa độ.

4.2. NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Cho $f:U\to V$ là một đồng cấu. Ảnh của f được ký hiệu và định nghĩa bởi $\mathrm{Im}f=f(U)=\{f(u):u\in U\}$;nhân của f, ký hiệu và định nghĩa bởi $\mathrm{Ker}f=f^{-1}(\{0\})=\{u\in U:f(u)=0\}$.

Cho E là một không gian con của U; F là một không gian con của V. Tập hợp $f(E)=\{f(x)\,|\,x\in E\}\subset V$ được gọi là ảnh của E qua ánh xạ f. Tập hợp $f^{-1}(F)=\{x\in X\,|\,f(x)\in F\}\subset U$ được gọi là nghịch ảnh của F qua ánh xạ f.

Định lý 4.2.1. *Cho $f:U\to V$ là một đồng cấu, E là một không gian con của U, F là một không gian con của V. Khi đó,*

(i) $f(E)$ *là một không gian con của V;*

(ii) $f^{-1}(F)$ *là không gian con của U.*

Chứng minh. (i) Ta thấy $0=f(0)\in f(E)$ và $f(E)\neq\varnothing$.

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall v_1,v_2\in f(E)$, khi đó tồn tại $u_1,u_2\in E$ sao cho $v_i=f(u_i),i=1,2$. Từ đó, suy ra

$$\alpha v_1+v_2=\alpha f(u_1)+f(u_2)=f(\alpha u_1+u_2)$$

Vì E là không gian con nên $\alpha u_1+u_2\in E$, suy ra $\alpha v_1+v_2\in f(E)$. Như vậy, $f(E)$ là không gian con của V

(ii) Vì $f(0)=0\in F$ nên $0\in f^{-1}(F)$ và $f^{-1}(F)\neq\varnothing$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall u_1,u_2\in f^{-1}(F)$ ta có $f(u_1),f(u_2)\in F$. Từ đó, ta nhận được $f(\alpha u_1+u_2)=\alpha f(u_1)+f(u_2)\in F$ do F là không gian con của V. Như vậy $f^{-1}(F)$ là không gian con của U. □

Hệ quả 4.2.2. *Cho $f:U\to V$ là một đồng cấu. Khi đó*

(i) Im*f là một không gian con của V*;

(ii) Ker*f là một không gian con của U*

Ví dụ 4.2.3. Cho $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.Tìm nhân và ảnh của đồng cấu $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi $f(x) = xA^T, \forall x \in \mathbb{R}^n$

Giải

Ta có

$Kerf = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid xA^T = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (xA^T)^T = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax^T = 0\}$. Ta gọi $Kerf$ lúc này là $NulA$

và $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{xA^T \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

Ta gọi $\mathrm{Im}\, f$ lúc này là $ColA$

Định lý 4.2.4. *Cho là một đồng cấu. Khi đó,*

(i) *f là đơn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker}f = \{0\}$;

(ii) *f là toàn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Im}f = V$.

Chứng minh.

(i) $\forall u \in U \setminus \{O\}$, hệ $\{u\}$ độc lập tuyến tính trong *V.* Vì *f* là đơn cấu nên $\{f(u)\}$ độc lập tuyến tính trong *V* và

$f(u) \neq 0$, nghĩa là $u \notin \mathrm{Ker}f$. Vậy $Kerf \subset \{O\}$. Dễ thấy

$\{O\} \subset Kerf$. Do đó $Kerf = \{O\}$.

Ngược lại, thỏa thì , nghĩa là . Vì nên hay . Vậy là đơn cấu.

(ii) Hiển nhiên. □

Cho $f:U \to V$ là một đồng cấu. Số chiều của $\mathrm{Im}f$ được gọi là hạng của đồng cấu *f*, ký hiệu là $r(f)$.

Định lý 4.2.5. *Cho* $f:U \to V$ *là một đồng cấu. Khi đó,*

(i) *đồng cấu* f *là đơn cấu khi và chỉ khi* $r(f) = \dim U$;

(ii) *đồng cấu* f *là toàn cấu khi và chỉ khi* $r(f) = \dim V$;

(iii) *đồng cấu* f *là đẳng cấu khi và chỉ khi* $r(f) = \dim U = \dim V$.

Chứng minh. (i) Đồng cấu f là đơn cấu khi và chỉ khi f biến một cơ sở của U thành một cơ sở của $\mathrm{Im}f$. Từ đó ta nhận được kết luận của (i).

(ii) Suy ra trực tiếp từ phát biểu (ii) của Định lý 4.2.4.

(iii) Suy ra trực tiếp từ (i) và (ii). □

Hệ quả 4.2.6. *Cho* U *và* V *là các không gian có cùng số chiều và* $f: U \to V$ *là một đồng cấu. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương*:

(i) *đồng cấu* f *là đẳng cấu*;

(ii) *đồng cấu* f *là đơn cấu*;

(iii) *đồng cấu* f *là toàn cấu.*

Định lý 4.2.7. *Cho* $f: U \to V$ *là một đồng cấu. Khi đó,*

$$\begin{aligned}\dim U &= \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(\mathrm{Im}f)\\ &= \dim(\mathrm{Ker}f) + r(f).\end{aligned}$$

4.3. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định lý 4.3.1. *Cho* U *và* V *là các không gian véc tơ có số chiều tương ứng là* n *và* m. *Gọi* B *và* C *là các cơ sở tương ứng của* U *và* V. *Khi đó,*

(i) *Với mỗi ánh xạ tuyến tính* $f: U \to V$ *tồn tại duy nhất một ma trận* A *cỡ* $m \times n$ *sao cho, với mọi* $u \in U$,

$[f(u)]_C = A[u]_B$.

(ii) *Ngược lại, với mỗi ma trận A cỡ* $m \times n$, *tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $f:U \to V$ *thỏa mãn đẳng thức trên.*

Chứng minh. Giả sử $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là các cơ sở tương ứng của *U* và *V*.

(i) Với mọi $u \in U$, ta có thể viết $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. Vì *f* là ánh xạ tuyến tính nên

(ii) $f(u) = f(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_1 f(u_1) + \cdots + x_n f(u_n).$

Lấy tọa độ hai vế của đẳng thức trên đối với cơ sở C ta nhận được.

$$[f(u)]_C = x_1[f(u_1)]_C + \cdots + x_n[f(u_n)]_C$$

$$= \left([f(u_1)]_C \quad \cdots \quad [f(u_n)]_C\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Đặt $A = \left([f(u_1)]_C \quad \cdots \quad [f(u_n)]_C\right)$, ta nhận được công thức trong định lý. Tính duy nhất của ma trận *A* được suy ra từ tính duy nhất của tọa độ.

(ii) Với mỗi $A = (a_{ij})_{m\times n}$, ta đặt

$w_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m \in V, 1 \le j \le n.$

Theo Định lý về sự xác định của ánh xạ tuyến tính, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f:U \to V$ sao cho $f(u_j) = w_j, 1 \le j \le n$.

Dễ thấy ánh xạ f thỏa mãn công thức trong định lý. □

Định nghĩa 4.3.2. Ma trận được nói đến trong Định lý 4.3.1 được gọi là ma trận của *f* đối với cặp cơ sở *B* và *C*, ký hiệu là $A = [f]_{BC}$

Đặc biệt, khi $f: U \to U$ là một tự đồng cấu, B là một cơ sở của U, ma trận $[f]_{BB}$ được ký hiệu đơn giản là $[f]_B$ và được gọi là ma trận của tự đồng cấu *f* đối với cơ sở *B*.

Ví dụ 4.3.3. Cho $f: \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ là một đồng cấu xác định bởi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+b+c, a-2b+d, b+c-d)$. Xét

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$C = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ là các cơ sở tương ứng của $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

và $\mathbb{R}^3$. Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở *B* và *C*.

Giải

Để tìm ma trận của *f* đối với cặp cơ sở *B* và *C* ta lần lượt tìm tọa độ của các $f(e_i), 1 \le i \le 4$ đối với cơ sở *C*.

Bằng cách tính toán trực tiếp ta nhận được

$f(e_1) = (1,1,0);\quad f(e_2) = (1,-2,1);,$

$f(e_3) = (1,0,1);\quad f(e_4) = (0,1,-1).$

Tìm tọa độ của các $f(e_i)$ đối với C cơ sở ta nhận được

$$[f(e_1)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [f(e_2)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$[f(e_3)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, [f(e_4)]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Do đó, $[f]_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Mệnh đề 4.3.4. *Giả sử P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang B' trong không gian véc tơ U, Q là ma trận chuyển tử cơ sở C sang C' trong không gian V. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f: U \to V$ ta đều có*

$$[f]_{BC} = Q^{-1}[f]_{BC}P$$

Chứng minh. $\forall \; u \in U$, từ giả thiết, ta nhận được

$[f(u)]_C = Q[f(u)]_{C'}$ và $[u]_B = P[u]_{B'}$

Thay vào công thức trong Định lý 4.3.1, ta nhận được

$$[f(u)]_{C'} = Q^{-1}[f(u)]_C = Q^{-1}[f]_{BC}[u]_B = Q^{-1}[f]_{BC}P[u]_{B'} = (Q^{-1}[f]_{BC}P)[u]_{B'}$$

Vì ma trận của ánh xạ tuyến tính *f* đối với một cặp cơ sở là duy nhất nên ta nhận được kết quả của mệnh đề.

Trong trường hợp đặc biệt, nếu $f: U \to U$ là một tự đồng cấu, *P* là ma trận chuyển từ cơ sở *B* sang cơ sở B' thì

$$[f]_{B'} = P^{-1}[f]_B P \qquad \square$$

Kết quả này gợi ý cho ta định nghĩa khái niệm các ma trận đồng dạng như sau.

Định nghĩa 4.3.5. Cho hai ma trận vuông *A* và *B* cấp *n*. Ma trận *A* được gọi là đồng dạng với ma trận *B* nếu tồn tại ma trận vuông *P* cấp *n*, khả nghịch sao cho $A = P^{-1}BP$.

Hai ma trận đồng dạng khi và chỉ khi chúng là ma trận của cùng một tự đồng cấu đối với các cơ sở khác nhau.

Định lý 4.3.6. *Gọi A là ma trận của đồng cấu* $f: U \to V$ *đối với cặp cơ sở nào đó. Khi đó,*

(i) $\mathrm{Im}f \cong \mathrm{Col}A$;

(ii) $\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Nul}A$.

Chúng tôi công nhận mà không chứng minh định lý này.

Hệ quả 4.3.7. *Nếu A là ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f: U \to V$

đối với cặp cơ sở nào đó thì $r(f) = r(A)$.

Hệ quả 4.3.8. *Gọi A là ma trận của đồng cấu* $f: U \to V$ *đối với cặp cơ sở nào đó. Khi đó, f là một đẳng cấu khi và chỉ khi A khả nghịch.*

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1: Ánh xạ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sau đây có phải là ánh xạ tuyến tính không? Vì sao?

a/ $f(x,y)=(3x,4y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

b/ $f(x,y)=(y,x), \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

c/ $f(x,y)=(x^2,y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

d $f(x,y)=(0,y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

e/ $f(x,y)=(x,y^3)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

f/ $f(x,y)=(x-y,4x+5y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

g $f(x,y)=(x,y+1)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

h/ $f(x,y)=(y,y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

i/ $f(x,y)=(y-2x,x+3y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

j/ $f(x,y)=(\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y})$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

Bài 2: Ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sau đây có phải là ánh xạ tuyến tính không? Vì sao?

a/ $f(x,y,z)=(x,x+y+z)$, $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

b/ $f(x,y,z)=(0,0)$, $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

c/ $f(x,y,z)=(1,1)$, $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

d/ $f(x,y,z)=(2x+5y,7y-3z)$, $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

Bài 3: Ánh xạ $f:\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\to \mathbb{R}$ sau đây có phải là ánh xạ tuyến tính không? Vì sao?

a/ $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$, $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b/ $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

c/ $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + d - 3b - 4c$, $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

d/ $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + d^2$, $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Bài 4: Ánh xạ $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ sau đây có phải là tuyến tính hay không? Vì sao?

a/ $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (4a_0 - 5a_1)x^2$,

$\forall (a_0 + a_1x + a_2x^2) \in \mathbb{R}_2[x]$.

b/ $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$,
$\forall (a_0 + a_1x + a_2x^2) \in \mathbb{R}_2[x]$.

c/ $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$, $\forall (a_0 + a_1x + a_2x^2) \in \mathbb{R}_2[x]$.

d/ $\forall (a_0 + a_1x + a_2x^2) \in \mathbb{R}_2[x]$, $\forall (a_0 + a_1x + a_2x^2) \in \mathbb{R}_2[x]$.

Bài 5: Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ biến mỗi điểm của mặt phẳng Oxy thành điểm đối xứng của nó qua trục Oy. Hãy tìm công thức cho *f* và chứng minh rằng *f* là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

Bài 6: Gọi $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận thực, có kích thước $m \times n$. Cho B là một ma trận thực, có kích thước 2×3. Chứng minh rằng ánh xạ $T: \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ định nghĩa bởi $T(A) = AB$ là ánh xạ tuyến tính.

Bài 7: Cho $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính thỏa

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,1) \\ T(0,1,0) = (4,0) \\ T(0,0,1) = (-3,7) \end{cases}.$$

a/ Tìm ma trận của T.

b/ Tìm $T(-3,1,-2)$.

c/ Tìm $T(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Bài 8: Cho ánh xạ $T: \mathbb{R}^3 \to W$ là một phép chiếu trực giao các điểm của $\mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng Oxz.

a/ Tìm biểu thức của T (tìm $T(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$).

b/ Tìm $T(-3,5,-4)$.

Bài 9: Cho S là một cơ sở của không gian véc tơ V có n chiều và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in V$. Chứng minh rằng

a/ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ $[\alpha_1]_S, [\alpha_2]_S, \ldots, [\alpha_r]_S$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$.

b/ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ sinh ra V $\Leftrightarrow$ $\{[\alpha_1]_S, [\alpha_2]_S, \ldots, [\alpha_r]_S\}$ sinh ra $\mathbb{R}^n$.

Bài 10: Cho $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ với $X \mapsto XA^T$ và $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Hãy viết biểu thức của toán tử tuyến tính T và cho biết

a/ Véc tơ nào sau đây thuộc $\mathrm{Im}(T)$?

a.1/ $(-1,4)$.

a.2/ $(-3,0)$.

a.3/ $(3,-12)$.

b/ Véc tơ nào sau đây thuộc $Ker(T)$?

b.1/ $(4,8)$.

b.2/ $(3,2)$.

b.3/ $(1,1)$.

Bài 11: Cho ánh xạ tuyến tính $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ xác định bởi $T(p(x))=xp(x),\ \ \forall p\in\mathbb{R}_2[x]$. Véc tơ nào sau đây thuộc $Ker(T)$?

a/ x^2 b/ 0. c/ $1+x$.

Véc tơ nào sau đây thuộc $\mathrm{Im}(T)$?

d/ $x+x^2$. e/ $1+x$. f/ $4-x^2$.

Bài 12: Cho V là một không gian véc tơ tổng quát và ánh xạ

$T:V\to V$ xác định bởi $T(\alpha)=3\alpha,\forall\alpha\in V$.

a/ Tìm $Ker(T)$.

b/ Tìm $\mathrm{Im}(T)$.

Bài 13: Cho

$S = \{ \alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (-2,-5,-3), \alpha_3 = (1,0,10) \}$ là một cơ sở trên $\mathbb{R}^3$.

a/ Hãy tìm ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$T(\alpha_1) = (1,0), T(\alpha_2) = (1,0), T(\alpha_3) = (0,1)$.

b/ Tìm $T(1,1,1)$.

Bài 14: Tìm ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ xác định bởi
$T(1) = 1 + x$, $T(x) = 3 - 2x^2$, $T(x^2) = 2 - 7x + 5x^2$.
Tính $T(3 - x + 2x^2)$.

Bài 15: Tìm $\dim(Ker(T))$ với:

a/ $T \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^7)$ và $r(T) = 3$.

b/ $T \in L(\mathbb{R}_4[x], \mathbb{R}_3[x])$ và $r(T) = 1$.

c/ $T \in L(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^3)$ và $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$.

d/ $T \in L(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$ và $r(T) = 2$.

Bài 16: Cho T là một ánh xạ tuyến tính $\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ với ma trận biểu diễn theo cặp cơ sở chính tắc như sau:

TH1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $T \in L(\mathbb{R}^3)$

TH2: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T \in L(\mathbb{R}^3)$

TH3: $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$

TH4: $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & 0 & -9 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$, $T \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.

a/ Tìm một cơ sở và số chiều cho $\operatorname{Im}(T)$.

b/ Tìm một cơ sở và số chiều cho $Ker(T)$.

Bài 17: Hãy tìm ma trận chính tắc của toán tử tuyến tính

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha = (x, y)$ thành điểm đối xứng của nó qua:

a/ Trục Ox.

b/ Trục Oy.

c/ Đường phân giác $y = x$.

d/ Gốc tọa độ O.

Tìm $T(-2,-1)$ ứng với mỗi trường hợp trên (từ a/ đến d/).

Bài 18: Tìm ma trận biểu diễn theo cặp cơ sở chính tắc của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ xác định bởi

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1) - (3a_1 + 5a_2)x$$

$$\forall (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \in \mathbb{R}_2[x].$$

Bài 19: Cho $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 4x_1 - x_2, 0)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

a/ Tìm $[T]_{BB'}$ với các cơ sở $B = \{ \alpha_1 = (1,3), \alpha_2 = (-1,2) \}$ của $\mathbb{R}^2$ và $B' = \{ \beta_1 = (3,3,3), \beta_2 = (2,2,0), \beta_3 = (1,0,0) \}$ của $\mathbb{R}^3$

b/ Tìm $T(-7,2)$ từ $[T]_{BB'}$.

Bài 20: Cho $T \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_3, x_3 - 2x_1),\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a/ Tìm $[T]_B$ với cơ sở

$B = \{ \alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,1,0) \}$ của $\mathbb{R}^3$.

b/ Tìm $T(4,0,0)$ từ $[T]_B$.

Bài 21: Cho $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi $T(p(x)) = x^2 p(x)$, $\forall p \in \mathbb{R}_2[x]$.

a/ Tìm $[T]_{BC}$ với cơ sở

$$B = \{p_1(x) = 1 + x^2, p_2(x) = 1 + 3x + 5x^2, p_3(x) = 7 + 4x + x^2\}$$

của $\mathbb{R}_2[x]$ và cơ sở chính tắc C của $\mathbb{R}_4[x]$.

b/ Tính $T(-2 + 3x - 5x^2)$ từ $[T]_{BC}$.

Bài 22: Cho $T \in L(\mathbb{R}^2)$ có $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ trong đó $B = \{ \alpha_1 = (1,5), \alpha_2 = (-1,3) \}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

a/ Tìm $[T(\alpha_1)]_B$ và $[T(\alpha_2)]_B$.

b/ Tìm $T(\alpha_1)$ và $T(\alpha_2)$.

c/ Tìm $T(2,-3)$ và $T(-1,1)$.

Bài 23: Cho $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ có $[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 01 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

trong đó: $B = \{$
$\alpha_1 = (0,2,2,2), \alpha_2 = (-4,-2,2,2), \alpha_3 = (-2,-8,2,-4), \alpha_4 = (18,27,12,6) \}$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ và

$B' = \{ \beta_1 = (0,-8,-8), \beta_2 = (-5,8,3), \beta_3 = (-7,5,2) \}$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

a/ Tìm $[T(\alpha_1)]_{B'}$, $[T(\alpha_2)]_{B'}$, $[T(\alpha_3)]_{B'}$ và $[T(\alpha_4)]_{B'}$.

b/ Tìm $T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)$ và $T(\alpha_4)$.

c/ Tìm $T(2,2,0,0)$.

Bài 24: Cho $T \in L(\mathbb{R}_2[x])$ có $[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ trong đó

cơ sở

$B = \{p_1(x) = 4x + 4x^2, p_2(x) = -1 + 6x + 4x^2, p_3(x) = -2 + 5x + 4x^2\}$

là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

a/ Tìm $[T(p_1)]_B$, $[T(p_2)]_B$ và $[T(p_3)]_B$.

b/ Tìm $T(p_1)$, $T(p_2)$ và $T(p_3)$.

c/ Tìm $T(1 + x^2)$.

Bài 25: Cho toán tử tuyến tính T. Tìm $[T]_B$ rồi suy ra $[T]_{B'}$.

a/ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, x_2 - x_1),\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$B = \{\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1)\}$ và $B' = \{\beta_1 = (3,1), \beta_2 = (-4,3)\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

b/ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $T(x_1, x_2) = (5x_1 - x_2, 3x_2 - 4x_1)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $B = \{\alpha_1 = (5,7), \alpha_2 = (2,-3)\}$ và $B' = \{\beta_1 = (1,4), \beta_2 = (-1,-1)\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^2$. .

c/ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3 + 3x_2, x_3 - 2x_2, x_1 - 7x_3)$, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, B$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $B' = \{\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,1,0), \alpha_3 = (1,0,0)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

d/ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép chiếu trực giao lên mặt phẳng Oxy, còn B và ta xét theo câu c/.

e/ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$T(x_1, x_2) = (3x_1, -2x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$B = \{\alpha_1 = (-1,2), \alpha_2 = (4,-1)\}$ và

$B' = \{\beta_1 = (3,-5), \beta_2 = (2,1)\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

f/ $T:\mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ xác định bởi

$T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x+1)$, $\forall (a_0 + a_1x) \in \mathbb{R}_1[x]$

$B = \{p_1(x) = 4 + 2x, p_2(x) = 5 + x\}$ và $B' = \{q_1(x) = 3, q_2(x) = 5 + 7x\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}_1[x]$.

CHƯƠNG 5. KHÔNG GIAN EUCLIDE

5.1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

Định nghĩa 5.1.1. Cho các véc tơ $x=(x_1,...,x_n); y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Tích vô hướng của hai véc tơ *x* và *y*, ký hiệu $\langle x, y\rangle$, là số thực được xác định bởi:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n .$$

Coi $x=\left(x_1\ldots x_n\right)$ là ma trận hàng ứng với véc tơ $x=(x_1,...,x_n)$,

và $y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_\mathrm{n}\end{pmatrix}$ là véc tơ cột của $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^\mathrm{n}$ thì tích vô hướng được viết ở dạng tích hai ma trận:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \left(x_1\ldots x_n\right)\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_\mathrm{n}\end{pmatrix} = x\,y^T.$$

Ta dễ dàng suy ra tích vô hướng có các tính chất cơ bản sau:

Tính chất: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n, \forall\alpha\in\mathbb{R}$ *ta có :*

1) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ *(Tính giao hoán)*
2) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ *(Tính phân phối đối với phép cộng véc tơ)*
3) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ *(Tính kết hợp đối với phép nhân với vô hướng)*
4) $\langle x,x\rangle \geq 0; \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=\mathbf{0}$ *(Tính xác định dương)*

Định nghĩa 5.1.2. Không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ trên đó có xác định tích vô hướng được gọi là không gian Euclide n chiều, ký hiệu $\mathbf{E}^n$.

Trong không gian Euclide $\mathbf{E}^n$ ta có thêm khái niệm độ dài của véc tơ, khoảng cách và góc giữa các véc tơ như sau:

Định nghĩa 5.1.3: Ta gọi độ dài (hay chuẩn) của véc tơ $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{E}^n$ là số thực không âm $\|x\|$,, được xác định bởi công thức: $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$.

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau đây:

Định lý 5.1.4. $\forall x,y\in\mathbf{E}^n,\forall\alpha\in\mathbb{R}$ *ta có:*

1) $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\Leftrightarrow\langle x,x\rangle=\|x\|^2$

2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

3) $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$ *(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)*

4) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ *(Bất đẳng thức tam giác)*

Chứng minh. 1) và 2) là hiển nhiên.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh 3). Nhận thấy nếu $x=0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Nếu $x\ne 0$, đặt $z=y+t\,x$ với $t\in\mathbb{R}$. Khi đó,

$$0\le\langle z,z\rangle=\langle tx+y,tx+y\rangle=\langle x,x\rangle t^2+2\langle x,y\rangle t+\langle y,y\rangle$$

đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$. Tam thức bậc hai theo t ở vế phải luôn cùng

dấu với hệ số $\langle x,x\rangle>0$ nên $\Delta'=\langle x,y\rangle^2-\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\le 0$, nghĩa là

$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ $\{x, y\}$ khi phụ thuộc tuyến tính.

Để chứng minh bất đẳng thức tam giác, xét hiệu:

$$\|x+y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = \langle x+y, x+y\rangle - \left(\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\right)$$

$$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle - \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| - \|y\|^2 = 2\left(\langle x, y\rangle - \|x\|\|y\|\right) \le 0.$$

Suy ra $\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$ hay $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $y = t\,x$ với $t \ge 0$.

Nhận xét. Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta nhận được bất đẳng thức BCS với bộ *n* số như sau:

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Định nghĩa 5.1.5. Ta gọi khoảng cách giữa hai véc tơ *x* và *y* thuộc $\mathbf{E}^n$ là $d(x, y) = \|x - y\|$.

Nếu $x = (x_1, ..., x_n)$ và $y = (y_1, ..., y_n)$ thì

$$\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Định nghĩa 5.1.6. Góc giữa hai véctơ khác không *x* và *y* trong $\mathbf{E}^n$ là góc $\theta \in [0, \pi]$ thỏa $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

Chú ý rằng $-1 \le \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \le 1$ (do bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

nên tồn tại duy nhất góc $\theta \in [0, \pi]$ thỏa $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Nếu $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$ thì hai véc tơ x và y được gọi là cùng phương, và ta ký hiệu là $x \| y$.

Góc giữa véc tơ $\mathbf{0}$ và véc tơ x là *góc tùy chọn* thuộc đoạn $[0,\pi]$. Khi biết $\cos\theta$ ta có thể tính tích vô hướng theo công thức quen thuộc: $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$.

Dễ thấy nếu θ là góc giữa và thì góc giữa *x* và *y* cũng là θ (do tính giao hoán của tích vô hướng), nên ta không cần quan tâm tới thứ tự của các véc tơ khi ta nói về góc giữa chúng.

Định nghĩa 5.1.7.

a) Hai véc tơ $x, y \in \boldsymbol{E}^n$ được gọi là vuông góc (hay trực giao) với nhau (ký hiệu $x \perp y$) nếu $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Tập các véc tơ $S = \{v_1,...,v_k\} \subset \boldsymbol{E}^n$ được gọi là hệ trực giao nếu bất kỳ hai véc tơ khác nhau trong *S* đều vuông góc nhau.

c) Cơ sở *B* của không gian $\boldsymbol{E}^n$ được gọi là cơ sở trực giao nếu *B* đồng thời là tập trực giao.

Từ định nghĩa suy ra:

$\{v_1,...,v_k\}$ *là hệ trực giao* $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0$ *khi* $1 \le i \ne j \le k$.

Ví dụ 5.1.8.

Tập $\mathrm{S} = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0)\}$ là hệ trực giao trong $\mathbf{E}^4$ vì có:

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 1.1 + 1.(-1) + 1.1 + 1.(-1) = 0;$

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\rangle = 1.(-1) + 1.0 + 1.1 + 1.0 = 0;$

$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = 1.(-1) + (-1).0 + 1.1 + (-1).0 = 0.$

***Định lý 5.1.9* (*Định lý Pythagore*).** *Hai véc tơ $x \perp y$ khi và chỉ khi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Chứng minh. Ta có

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle.$$

Nên từ định nghĩa tính trực giao của hai véc tơ ta nhận được điều phải chứng minh. □

Định lý 5.1.10. *Mọi tập trực giao $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k\} \subset \boldsymbol{E}^n$ không chứa véc tơ $\boldsymbol{0}$ đều là tập độc lập tuyến tính, nghĩa là nó cũng là cơ sở trực giao của không gian con sinh bởi $\boldsymbol{S}$.*

Chứng minh. Xét tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}; \alpha_i \in \mathbb{R}, \mathrm{i} = 1...\mathrm{k}.$$

Nhân vô hướng hai vế với véc tơ $\mathbf{v}_i$, $\mathrm{i} = 1...,\mathrm{k}$, ta nhận được $\langle \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i\rangle$.

Suy ra

$$\alpha_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i\rangle + \alpha_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i\rangle + \ldots + \alpha_k\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i\rangle = 0.$$

Do các v_i và v_j trực giao với nhau khi $i \neq j$ nên từ đẳng thức cuối ta có

$$\alpha_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = 0.$$

Vì $v_i \neq 0$ nên $\alpha_i = 0$. Nên $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ và $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ là độc lập tuyến tính. □

5.2. TRỰC GIAO HÓA VÀ CƠ SỞ TRỰC CHUẨN

Định nghĩa 5.2.1.

a) Tập $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k\} \subset \boldsymbol{E}^n$ được gọi là hệ trực chuẩn nếu ***S*** là tập trực giao và mọi véc tơ của ***S*** đều là véc tơ đơn vị (véc tơ có độ dài bằng *1*).

b) Cơ sở của ***B*** không gian $\boldsymbol{E}^n$ được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu ***B*** là tập trực chuẩn.

Như vậy, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k\}$ là hệ trực chuẩn khi và chỉ khi $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad i = j \\ 0 & \text{khi} \quad i \neq j \end{cases}$.

Ví dụ 5.2.2. Tập sau có phải là cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{E}^4$ không?

$$\mathrm{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0), \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1) \right\}.$$

Giải

Ta kiểm tra **B** là một tập trực chuẩn nghĩa là kiểm tra $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad i = j \\ 0 & \text{khi} \quad i \neq j \end{cases}$.

Thật vậy,

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1.$$

Tương tự, $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4 \rangle = 1$.

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 0.$$

Tương tự $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 \rangle = 0$ và $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle = 0$.

Do tích vô hướng là giao hoán nên việc kiểm tra đã hoàn tất.

B độc lập tuyến tính (vì B trực chuẩn) có 4 véc tơ trong $\mathbf{E}^4$ nên B là 1 cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{E}^4$.

Định lý 5.2.3. *Nếu $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ là cơ sở trực giao của $\boldsymbol{E}^n$ thì $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}^n$, thành phần tọa độ thứ của $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{B}}$ là:*

$$x_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2}; \quad i = 1...n.$$

Chứng minh. Gọi B - tọa độ của véctơ **x** là $[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ thì

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$$

Nhân vô hướng hai vế với véc tơ $\mathbf{v}_i (i = 1...n)$ và để ý

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \forall i \neq j, \text{ ta có:}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = x_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Suy ra

$$x_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2}. \square$$

Ví dụ 5.2.4.

Trong $\mathbf{E}^3$ cho $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 1)$; $\mathbf{v}_3 = (\frac{-1}{2}, -2, \frac{7}{2})$. Chứng tỏ tập $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ là một cơ sở trực giao của $\mathbf{E}^3$ và biểu diễn véc tơ

$\mathbf{x} = (6, 2, -8)$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Giải

Hệ véc tơ trên là trực giao vì:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 3.(-1) + 1.2 + 1.1 = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = 3.(\frac{-1}{2}) + 1.(-2) + 1.\frac{7}{2} = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = (-1).(\frac{-1}{2}) + 2(-2).0 + 1.\frac{7}{2} = 0.$$

Do $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ là tập trực giao và không chứa véc tơ $\mathbf{0}$ nên nó độc lập tuyến tính và trở thành cơ sở của $\mathbf{E}^3$. Phân tích véc tơ $\mathbf{x}$ qua cơ sở này ta có :

$$\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \frac{12}{11}\mathbf{v}_1 - \frac{5}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{70}{33}\mathbf{v}_2$$

Hệ quả 5.2.5. *Nếu* $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ *là cơ sở trực chuẩn của* $\mathbf{E}^n$ *thì tọa độ thứ* i *của véc tơ* $\boldsymbol{x}$ *đối với cơ sở* B *là* $x_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i \rangle$ $(1 \le i \le n)$. *Khi đó,*

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n.$$

Nói cách khác, nếu $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ *là một cơ sở trực chuẩn của* $\mathbf{E}^n$ *thì với ta có:*

$$[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle \end{pmatrix}$$

Hệ quả trên cho thấy việc sử dụng một cơ sở trực chuẩn thực thuận lợi hơn so các cơ sở khác trong việc tính tọa độ.

Ví dụ 5.2.6. Tìm B - tọa độ của véc tơ $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ đối với cơ sở:

$$\mathrm{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0), \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1) \right\}.$$

Giải

Vì B là cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{E}^4$ (xem ví dụ 5.2.2 ở trên) nên ta có ngay:

$$[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt là *quy trình xây dựng một tập trực giao* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k\}$ từ tập các véc tơ độc lập tuyến tính cho trước $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbf{E}^n$ sao cho $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Từ đó, suy ra cách xây dựng một cơ sở trực giao (hay trực chuẩn) từ một cơ sở bất kỳ đã biết của không gian con $\mathbf{W} \subset \mathbf{E}^n$.

Giả sử $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ là tập gồm $k \geq 2$ véc tơ độc lập tuyết tính của $\mathbf{E}^n$, tiến hành xây dựng tập trực giao $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k\}$ như sau:

1. Đặt $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (5.1)$.

2. Tìm $\mathbf{w}_2$ sao cho $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_2$ và $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Để thỏa mãn điều kiện $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ thì $\mathbf{w}_2 \in \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, nghĩa là $\mathbf{w}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$. Ta sẽ tìm các số α_1, α_2 sao cho $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_2$, điều này tương đương với tìm các số α_1, α_2 thỏa mãn

$$0 = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \alpha_1\|\mathbf{w}_1\|^2 + \alpha_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \alpha_1\|\mathbf{w}_1\|^2 = \alpha_1\|\mathbf{w}_1\|^2 + \alpha_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Đây là phương trình bậc nhất đối với 2 ẩn α_1 và α_2, có vô số nghiệm.

Chọn $\alpha_2 = 1$, tìm được $\alpha_1 = -\dfrac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}$, từ đó có:

$$\mathbf{w}_2 = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 \quad (5.2)$$

Hệ véc tơ $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ là hệ trực giao. Do (1) và (2) ta có là tổ hợp tuyến tính của 2 véc tơ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ nên $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} \subset \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Mặt khác, cũng do (5.1) và (5.2), $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ lại là tổ hợp tuyến tính của 2 véc tơ $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ nên $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Nghĩa là ta nhận được $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

3. Tiếp tục tìm $\mathbf{w}_3$ sao cho $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{w}_2$ và $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Do $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ nên $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3\}$. Để thỏa mãn điều kiện $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3\}$ thì $\mathbf{w}_3 \in \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3\}$, nghĩa là $\mathbf{w}_3 = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$. Do $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{w}_2$ nên đồng thời có:

$$0 = \langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle$$

$$= \alpha_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle + \alpha_2\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle + \alpha_3\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle$$

$$= \alpha_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle + \alpha_3\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1\rangle.$$

$$0 = \langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2\rangle = \langle \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle$$

$$= \alpha_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle + \alpha_2\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle + \alpha_3\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle$$

$$= \alpha_2\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle + \alpha_3\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle.$$

Đây là hệ 2 phương trình bậc nhất đối với 3 ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nên nó có vô số nghiệm. Chọn $\alpha_3 = 1$ tìm được $\alpha_1 = -\dfrac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1\rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}$ và $\alpha_2 = -\dfrac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}$, nghĩa là

$$\mathbf{w}_3 = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1\rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 \quad (5.3)$$

Lý luận tương tự như trên thì tập $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3\}$ vừa lập được là một tập trực giao và $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. Tiếp tục quá trình trên đến bước $k-1$, ta thu được tập gồm véc tơ trực giao $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{k-1}\}$ thỏa mãn $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{k-1}\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$. Chọn véctơ thứ k bằng:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1\rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \ldots - \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k-1}\rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2}\mathbf{w}_{k-1} \quad (5.4)$$

Tập k véc tơ tìm được $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k\}$ là tập trực giao vì $\forall i = 1, 2, ..., k-1$ thì:

$$\left\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{<\mathbf{v}_k . \mathbf{w}_j>}{\|\mathbf{w}_j\|^2} \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \right\rangle - \frac{\left\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \right\rangle}{\|\mathbf{w}_i\|^2} \left\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \right\rangle - \left\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \right\rangle = 0.$$

Hơn nữa, do (4) thì $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k\}$ và

$\mathbf{v}_k \in \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_k\}$ nên
$\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_k\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k\} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\}$

Từ quy trình trực giao hóa Gram - Schmidt ta có định lý sau:

Định lý 5.2.7. *Mọi không gian con khác $\{\boldsymbol{0}\}$ của $\boldsymbol{E}^n$ luôn có ít nhất một cơ sở trực giao và một cơ sở trực chuẩn.*

Ví dụ 5.2.8. Tìm một cơ sở trực giao và một cơ sở trực chuẩn cho $\mathbf{W} = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1 = (2,1,0,-1), \mathbf{v}_2 = (3,2,1,-4), \mathbf{v}_3 = (2,2,-4,0)\}$.

Giải

Dễ dàng chứng minh các véc tơ này là độc lập tuyến tính nên nó là cơ sở (nhưng không phải cơ sở trực giao) của $\mathbf{W}$. Áp dụng quá trình trực giao hóa Gram – Schmidt để xây dựng cơ sở trực giao như sau:

Đặt. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (2,1,0,-1)$.

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\left\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \right\rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = (3,2,1,-4) - \frac{3.2 + 2.1 + 1.0 + (-4).(-1)}{2^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2} (2,1,0,-1)$$

$$= (3,2,1,-4) - 2(2,1,0,-1) = (-1,0,1,-2).$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\left\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \right\rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{\left\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \right\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = (2,2,-4,0) - \frac{6}{6}(2,1,0,-1) + \frac{6}{6}(-1,0,1,-2)$$

$$= (-1,1,-3,-1).$$

Một cơ sở trực giao là:

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{w}_1 = (2,1,0,-1), \mathbf{w}_2 = (-1,0,1,-2), \mathbf{w}_3 = (-1,1,-3,-1)\}..$$

Để tìm cơ sở trực chuẩn, ta chỉ cần đơn chuẩn hóa các véc tơ của **B**. Chọn

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,-1);\ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,1,-2);$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1,1,-3,-1).$$

Cơ sở:

$$\mathbf{C} = \left\{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,-1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,1,-2), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1,1,-3,-1)\right\}$$

là cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{W}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 1: Tính tích vô hướng của α_1 và α_2 trong các không gian Euclide sau:

a/ $\alpha_1 = (2,-5), \alpha_2 = (-4,7)$ trên $\mathbb{R}^2$.

b/ $\alpha_1 = (-3,1), \alpha_2 = (6,-5)$ trên $\mathbb{R}^2$.

c/ $\alpha_1 = (4,-3,1), \alpha_2 = (-2,0,-5)$ trên $\mathbb{R}^3$.

d/ $\alpha_1 = (6,2,-9), \alpha_2 = (-4,7,-11)$ trên $\mathbb{R}^3$.

e/ $\alpha_1 = (10,-4,1,-2), \alpha_2 = (3,-2,-6,1)$ trên $\mathbb{R}^3$.

f/ $\alpha_1 = (7,1,0,-4), \alpha_2 = (8,-1,9,-5)$ trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 2: Tính độ dài các véc tơ nêu trong bài 1.

Bài 3: Cho hai ma trận thực trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

a/ Chứng minh rằng $\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ là một tích vô hướng trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b/ Áp dụng câu a/ để tính tích vô hướng của $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

Bài 4: Cho p và q là các đa thức trong $\mathrm{P}_2[x]$ với

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ và } q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

a/ Chứng minh rằng $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ là một tích vô hướng trong $\mathrm{P}_2[x]$.

b/ Áp dụng câu a/ để tính tích vô hướng của p và q với $p(x) = 1 - 3x + 2x^2$ và $q(x) = 4 - 7x^2$.

c/ Chứng minh rằng $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$ cũng là một tích vô hướng trong $\mathrm{P}_2[x]$..

Bài 5: Cho các véc tơ $u = (u_1, u_2, u_3)$ và $v = (v_1, v_2, v_3)$ trong $\mathbb{R}^3$. Biểu thức nào dưới đây là một tích vô hướng trong? Tại sao?

a/ $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$.

b/ $\langle u, v \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$.

c/ $\langle u,v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 8u_3v_3$

d/ $\langle u,v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$.

e/ $\langle u,v\rangle = 4u_1v_1$

f/ $\langle u,v\rangle = 4u_1v_1 + 9u_2v_2 + 16u_3v_3$

Bài 6: Trong $\mathbb{R}^2$, dùng tích vô hướng thông thường, hãy chứng minh rằng:

$$|a\cos\theta + b\sin\theta| \le \sqrt{a^2+b^2}, \forall a,b,\theta \in \mathbb{R}.$$

Bài 7: Cho f và $g \in \mathbb{R}_2[x]$. Chứng minh rằng:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

là một tích vô hướng trong $\mathbb{R}_2[x]$. Từ đó tìm tích vô hướng của f và g nếu

a/ $f(x) = 4 - 3x + 7x^2$ và $g(x) = 2 - 5x + x^2$.

b/ $f(x) = 2 - 5x$ và $g(x) = 3 + 9x - 2x^2$.

c/ $f(x) = x - x^2$ và $g(x) = 4x^2 - 3$.

d/ $f(x) = 10$ và $g(x) = 6 - x + 3x^2$.

Bài 8: Cho tích vô hướng thông thường trong $\mathbb{R}^3$. Hãy tìm tham số thực k để u và v trực giao.

a/ $u = (2,1,3)$ và $v = (-1,-7,k)$.

b/ $u = (-4,0,-1)$ và $v = (\mathrm{k},5,-9)$.

c/ $u = (1,-4,2)$ và $v = (-2,k,-3)$.

d/ $u = (5,-3,-1)$ và $v = (2,1-k,-6)$.

Bài 9: Cho tích vô hướng $\langle f, g \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$ trong $\mathbb{R}_2[x]$ trong đó

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ và } q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 .$$

Chứng minh rằng $p(x) = 1 - x + 2x^2$ và $q(x) = x^2 + 2x$ trực giao với nhau.

Bài 10: Cho tích vô hướng $\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$ trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Cho biết ma trận nào dưới đây trực giao với $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

a/ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b/ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c/ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d/ $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$

Bài 11: Cho tích vô hướng thông thường trong $\mathbb{R}^4$. Hãy tìm hai véc tơ có độ dài bằng 1 mà trực giao với các véc tơ sau:

a/ $\alpha_1 = \left(3, \frac{3}{2}, -6, 0\right), \alpha_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3, 3\right), \alpha_3 = \left(\frac{9}{2}, 3, \frac{15}{2}, 6\right)$

b/ $\alpha_1 = (2,1,0,0), \alpha_2 = (0,-1,1,0), \alpha_3 = (-3,0,0,2)$.

Bài 12: Cho V là không gian véc tơ trên i và trong V có trang bị tích vô hướng

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\| u+v\|^2 - \frac{1}{4}\| u-v\|^2, \forall u,v \in V .$$

Chứng minh rằng $\| u+v\|^2 + \| u-v\|^2 = 2\| u\|^2 + 2\| v\|^2$.

Bài 13: Cho $\alpha_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ và $\alpha_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{84}}, \frac{3}{\sqrt{84}}\right)$ trong $\mathbb{R}^2$.

Chứng minh rằng $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ là hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^2$ theo tích vô hướng $\langle u,v\rangle = 3u_1v_1 + 4u_2v_2$, nhưng không là hệ trực chuẩn theo tích vô hướng $\langle u,v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ (trong đó $u = (u_1, u_2)$ và $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$).

Bài 14: Chứng minh rằng

$\alpha_1 = (-1,0,0,-1), \alpha_2 = (1,0,-2,-1), \alpha_3 = (-2,-3,-2,2), \alpha_4 = (1,-2,1,-1)$

là một họ trực giao trong $\mathbb{R}^4$ đối với tích vô hướng thông thường.

Bài 15: Trong $\mathbb{R}^4$, ta xét tích vô hướng thông thường. Hãy trực chuẩn hóa cơ sở $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ bằng phương pháp Gram-Schmidt:

a/ $\alpha_1 = (1,-3), \alpha_2 = (4,4)$.

b/ $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (7,-2)$.

c/ $\alpha_1 = (4,-1), \alpha_2 = (-3,5)$.

d/ $\alpha_1 = (-2,1), \alpha_2 = (8,3)$.

Bài 16: Trong $\mathbb{R}^3$, ta xét tích vô hướng thông thường. Hãy trực chuẩn hóa cơ sở $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ bằng phương pháp Gram-Schmidt:

a/ $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (-1,1,0), \alpha_3 = (-1,-2,-1)$.

b/ $\alpha_1 = (-1,0,0), \alpha_2 = (-3,-7,2), \alpha_3 = (0,-4,-1)$.

c/ $\alpha_1 = (1,0,-2), \alpha_2 = (2,0,1), \alpha_3 = (0,1,2)$.

d/ $\alpha_1 = (-3,1,2), \alpha_2 = (1,0,2), \alpha_3 = (4,1,-3)$.

Bài 17: Trong $\mathbb{R}^3$, ta xét tích vô hướng thông thường. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian con sinh bởi các véc tơ $(0,-1,-2)$ và $(1,0,-1)$.

Bài 18: Trên $\mathbb{R}^3$, ta xét tích vô hướng $\langle u,v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$, với $u = (u_1,u_2,u_3)$ và $v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy trực chuẩn hóa các hệ véc tơ sau bằng phương pháp Gram-Schmidt:

a/ $\{\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,1,0), \alpha_3 = (1,0,0)\}$.

b/ $\{\alpha_1 = (-2,3,6), \alpha_2 = (3,1,-5), \alpha_3 = (6,2,-3)\}$.

c/ $\{\alpha_1 = (1,0,-2), \alpha_2 = (2,1,0), \alpha_3 = (-2,0,1)\}$.

d/ $\{\alpha_1 = (2,-3,1), \alpha_2 = (3,0,-6), \alpha_3 = (0,2,6)\}$.

Bài 19: Trong $\mathrm{P}_2[x]$, ta xét tích vô hướng:

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Hãy trực chuẩn hóa cơ sở $\{1,x,x^2\}$ bằng phương pháp Gram-Schmidt.

Bài 20: Hãy tìm tọa độ của đa thức p đối với cơ sở

$B = \{p_1, p_2, p_3\}$ trong $\mathrm{P}_2[x]$, biết rằng

$p = 4 - 5x + 2x^2, p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2 - 1$ và tích vô hướng là tích vô hướng thông thường trên $\mathrm{P}_2[x]$.

Bài 21: Trong $\mathbb{R}^2$ cho tích vô hướng thông thường. Gọi

$$S = \left\{ \alpha_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \alpha_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\}.$$

a/ Chứng minh rằng S là một cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{R}^2$.

b/ Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, với $[\alpha]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ và $[\beta]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Không cần tính α và β, hãy tìm $\|\alpha\|, \|\beta\|, d(\alpha, \beta)$ và $\langle \alpha, \beta \rangle$.

c/ Tìm α và β rồi tính trực tiếp $\|\alpha\|, \|\beta\|, d(\alpha, \beta)$ và $\langle \alpha, \beta \rangle$.

CHƯƠNG 6. CHÉO HÓA MA TRẬN VUÔNG

6.1. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Cho ma trận vuông A cấp n. Qua ánh xạ tuyến tính:

$$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x^T \mapsto Ax^T \end{array},$$

Véc tơ cột $x^T \in \mathbb{R}^n$ có thể biến thành những véc tơ ảnh với phương khác nhau. Tuy nhiên vẫn có những véc tơ đặc biệt nào đó mà ảnh của nó là véc tơ khá “đơn giản”: véc tơ ảnh cùng phương với véc tơ ban đầu. Ví dụ, qua ánh xạ tuyến tính:

$$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x^T \mapsto Ax^T \end{array},$$

với $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì ảnh của các véc tơ $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ và $\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ lần lượt là:

$$f(\mathbf{x}^T) = A\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

$$f(\mathbf{y}^T) = A\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{y}^T.$$

Rõ ràng trong hai véc tơ ảnh ở trên thì $f(\mathbf{x}^T)$ hoàn toàn khác phương với $\mathbf{x}^T$, trong khi đó $f(\mathbf{y}^T)$ lại cùng phương với $\mathbf{y}^T$.

Mục đích của phần này là tìm các véc tơ đặc biệt, mà qua phép biến đổi tuyến tính, nó được biến thành véc tơ cùng phương với chính nó.

Định nghĩa 6.1.1. Cho $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Số thực λ được gọi là một giá trị riêng của A nếu tồn tại véc tơ $x^T \in \mathbb{R}^n, x^T \neq \mathrm{O}$ sao cho $Ax^T = \lambda x^T$ (6.1). Khi đó, véc tơ x^T được gọi là một véc tơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng thực λ.

Chú ý rằng điều kiện véc tơ $\mathbf{x}^T \neq \mathbf{0}$ quan trọng vì ta không muốn xét trường hợp tầm thường: $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), A.\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda.\mathbf{0}\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Từ nay về sau, ta gọi giá trị riêng thực là giá trị riêng.

Ví dụ 6.1.2. Cho $A = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ 20 & -18 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Xác định véc tơ nào trong các véc tơ $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ là véc tơ riêng của A và hãy tìm giá trị riêng tương ứng với véc tơ riêng đang xét.

b) Tính $A^5\mathbf{x}^T$.

Giải

a) Lần lượt ta xét:

$$A\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ 20 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}^T \Rightarrow \mathbf{x}^T$$

là véc tơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$.

$A\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ 20 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ -34 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ nên $\mathbf{y}^T$ không phải là véc tơ riêng của A.

b) Tính $A^5\mathbf{x}^T$. Vì $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ là véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ nên $A^5\mathbf{x}^T = 2^5\mathbf{x}^T = 2^5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\32\end{pmatrix}$.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra:

1) Nếu $\mathbf{x}^T$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ thì λ duy nhất. Thật vậy, nếu có $A\mathbf{x}^T = \lambda\mathbf{x}^T = \lambda'\mathbf{x}^T$ thì $(\lambda - \lambda')\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$. Do $\mathbf{x}^T \neq \mathbf{0}$. Do nên $\lambda - \lambda' = 0$, nghĩa là $\lambda = \lambda'$.

2) Ngược lại, mỗi giá trị riêng λ có thể ứng với nhiều véc tơ riêng khác nhau.

3) Nếu biết $\mathbf{x}^T$ là véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ thì việc tính tích $A^k\mathbf{x}^T$ thực sự đơn giản vì:

$A^k\mathbf{x}^T = A^{k-1}(A\mathbf{x}^T) = A^{k-1}(\lambda\mathbf{x}^T) = \lambda A^{k-2}(A\mathbf{x}^T) = \lambda A^{k-2}(\lambda\mathbf{x}^T) = \lambda^2 A^{k-2}\mathbf{x}^T = \ldots = \lambda^k\mathbf{x}^T$.

Định lý 6.1.3. *Với là một giá trị riêng của $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ thì tập hợp gồm vécto $\boldsymbol{0}$ và tất cả các véc tơ riêng ứng với λ, lập thành một không gian con của $(\mathbb{R}^n)^T$, gọi là không gian riêng của ma trận ứng với giá trị riêng của λ ký hiệu là $\boldsymbol{E}_\lambda^A$.*

$$\mathbf{E}_\lambda^A = \{\mathbf{x}^T \in (\mathbb{R}^n)^T \mid (A - \lambda I_n)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}\} \quad (6.2)$$

Nếu chỉ xét ma trận A thì ta viết gọn $\mathbf{E}_\lambda^A$ thành $\mathbf{E}_\lambda$.

Định lý là hiển nhiên vì $\mathbf{E}_\lambda^A = \{\mathbf{x}^T \in (\mathbb{R}^n)^T \mid (A - \lambda I_n)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

$\forall A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, λ là một giá trị riêng của $A \Leftrightarrow \exists x^T \in \mathbb{R}^n, x^T \neq O$ thỏa $Ax^T = \lambda x^T \Leftrightarrow$ phương trình

$(A-\lambda I_n)x^T = O$ (ẩn $x^T \in \mathbb{R}^n$) có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_n)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.3)$$

Khai triển vế trái của (6.1) ta được một đa thức bậc n đối với λ, dạng:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Từ đó có định nghĩa sau:

Định nghĩa 6.1.4. Với $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, đa thức $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_n)$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A và phương trình $p_A(\lambda)=0$ gọi là phương trình đặc trưng của A.

Do định thức của ma trận vuông $A-\lambda I_n$ là tổng (có kèm theo dấu "+" hoặc "-") của n hạng tử, mỗi hạng tử bằng tích của n phần tử trong $A-\lambda I_n$, sao cho không có 2 phần tử nào cùng đứng trong cùng một hàng và cùng một cột, nên hạng tử có bậc cao nhất đối với λ là hạng tử gồm tích các phần tử nằm trên đường chéo chính: $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)$, có bậc n đối với λ. Khai triển chi tiết $\det(A-\lambda I_n)$, đa thức đặc trưng của ma trận A có dạng:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Phương trình đặc trưng $p_A(\lambda)=0$ là phương trình bậc n nên sẽ có không quá n nghiệm. Hơn nữa do

$p_A(0) = \det(A - 0.I_n) = \det A$ nên trong $p_A(\lambda)$, có $a_0 = \det A$, nghĩa là:

$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + \det A$.

Người ta cũng định nghĩa $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Khi đó:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A .$$

Để ý $\det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$

Định lý sau là hiển nhiên:

Định lý 6.1.5.

a) Cho $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$, số λ là một giá trị riêng thực của ma trận vuông A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0 \qquad (6.4)$$

b) Nếu λ_k là một giá trị riêng thực của A thì véc tơ riêng $\boldsymbol{x}^T$ ứng với λ_k là nghiệm khác $\boldsymbol{0}$ của hệ thuần nhất:

$$(A - \lambda_k I_n)\mathbf{x}^T = \mathbf{0} \qquad (6.5)$$

Định lý đã nêu rõ quá trình tìm các véc tơ riêng của một ma trận vuông A. Đó là bắt đầu bằng việc giải phương trình đặc trưng (6.4) để tìm tất cả các giá trị riêng thực. Với mỗi giá trị riêng thực vừa tìm được, ta thế vào (6.5) để tìm véc tơ riêng tương ứng. Do phạm vi của chương trình, ta không xét các nghiệm phức không thực của $p_A(\lambda)$.

Ví dụ 6.1.6. Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải

- *Tìm giá trị riêng*:

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{c_1 \to c_1 + c_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{h_3 \to h_3 - h_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right.$$

.

Ma trận có 2 giá trị riêng khác nhau $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = -1$. Do nghiệm $\lambda_1 = 2$ là nghiệm kép nên ta gọi $\lambda_1 = 2$ là giá trị riêng bội 2. Còn $\lambda_2 = -1$ là giá trị riêng đơn.

- *Tìm véc tơ riêng tương ứng*:

Với $\lambda_1 = 2$, véc tơ riêng tương ứng là nghiệm khác $\mathbf{0}$ của hệ thuần nhất $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x}^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - 2I_3)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$. Quy ma trận hệ số $A - 2I_3$ về dạng rút gọn:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Với $\lambda_2 = -1$, rút gọn ma trận $A - \lambda_2 \mathbf{I}_3 = A + \mathbf{I}_3$:

$$A + \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} t/4 \\ -3t/4 \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Để *ngắn gọn* trong cách viết, ta có thể ghi véc tơ riêng ở dạng véc tơ hàng. Khi đó, tập các giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng của A được ghi gọn là:

$$\{\lambda_1 = 2, \mathbf{x} = t(1, 0, 1), t \neq 0\} \cup \{\lambda_2 = -1, \mathbf{y} = s(1, -3, 4), s \neq 0\}$$

Từ định lý trên ta suy ra các hệ quả sau đây:

Hệ quả 6.1.7. *Nếu A là ma trận dạng tam giác thì các giá trị riêng của A là các phần tử trên đường chéo chính.*

Ví dụ, ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ có tập giá trị riêng là $\{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0\}$.

Định lý 6.1.8. *Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi A không có giá trị riêng nào bằng không.*

Chứng minh. A có giá trị riêng $\lambda = 0 \Leftrightarrow A\mathbf{x}^T = 0\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow$ A không khả nghịch. Từ đó suy ra điều phải chứng minh bằng cách phủ định các vế. □

Định lý 6.1.9. *Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng và có cùng tập hợp các giá trị riêng.*

Chứng minh. Giả sử A ; B. Khi đó, tồn tại P khả nghịch sao cho $B = P^{-1}AP$.

Ta có:

$$\det(B-\lambda I_n) = \det(P^{-1}AP-\lambda I_n) = \det(P^{-1}AP-\lambda(P^{-1}P)) = \det\{P^{-1}(AP-\lambda P)\}$$

$$= \det\{P^{-1}(A-\lambda I_n)P\} = \det(P^{-1}).\det(A-\lambda I_n).\det P$$

$$= \{\det P.\det(P^{-1})\}.\det(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n)\,.$$

Như vậy A và B có cùng đa thức đặc trưng và có cùng tập các giá trị riêng. □

Nếu $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ có 2 giá trị riêng phân biệt λ và μ thì $\mathbf{E}_\lambda \cap \mathbf{E}_\mu = \{\mathbf{0}\}$. Thật vậy, nếu $\mathbf{x}^T \in \mathbf{E}_\lambda \cap \mathbf{E}_\mu$ thì $\lambda\mathbf{x}^T = A\mathbf{x}^T = \mu\mathbf{x}^T \Rightarrow (\lambda-\mu)\mathbf{x}^T = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ (vì $\lambda \neq \mu$). Với mỗi giá trị riêng λ của , số véc tơ riêng độc lập tuyến tính lớn nhất (ứng với λ) đúng bằng số chiều $\dim\mathbf{E}_\lambda$. Định lý sau sẽ cho biết tính độc lập tuyến tính của các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt.

Định lý 6.1.10. *Giả sử $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ có 2 giá trị riêng phân biệt λ và μ. Gọi $\boldsymbol{B}_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset \boldsymbol{E}_\lambda$ là tập hợp gồm k véctơ riêng độc lập tuyến tính ứng với λ và $\boldsymbol{B}_2 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, w_p\} \subset \boldsymbol{E}_\mu$ là tập hợp gồm p véctơ riêng độc lập tuyến tính ứng với μ. Khi đó tập $\boldsymbol{B}_1 \cup \boldsymbol{B}_2$ là độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Xét tổ hợp tuyến tính của **0**:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+\beta_1\mathbf{w}_1+\beta_2\mathbf{w}_2+\ldots+\beta_k\mathbf{w}_k=\mathbf{0}.$$

Đặt

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k\in\mathbf{E}_\lambda,$$
$$\mathbf{w}=\beta_1\mathbf{w}_1+\beta_2\mathbf{w}_2+\ldots+\beta_p\mathbf{w}_p\in\mathbf{E}_\mu.$$

Khi đó, vì $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$ nên $\mathbf{v}=-\mathbf{w}\in\mathbf{E}_\lambda\cap\mathbf{E}_\mu=\{\mathbf{0}\}$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases}\mathbf{v}=\mathbf{0}\\ \mathbf{w}=\mathbf{0}\end{cases}..$$

Nghĩa là

$$\begin{cases}\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}\\ \beta_1\mathbf{w}_1+\beta_2\mathbf{w}_2+\ldots+\beta_p\mathbf{w}_p=\mathbf{0}\end{cases}.$$

Vì $\mathbf{B}_1$ và $\mathbf{B}_2$ độc lập tuyến tính nên suy ra

$$\begin{cases}\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0\\ \beta_1=\ldots=\beta_p=0\end{cases}.$$

Như vậy $\mathbf{B}_1\cup\mathbf{B}_2$ độc lập tuyến tính. □

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng: Giả sử $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ có k giá trị riêng phân biệt: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\,(1\le k\le n)$. Gọi $\mathbf{B}_j$ là tập véc tơ riêng độc lập tuyến tính của $\mathbf{E}_{\lambda_j}\,(1\le j\le k)$, thì $\mathbf{B}=\mathbf{B}_1\cup\mathbf{B}_2\cup\ldots\cup\mathbf{B}_k$ là tập độc lập tuyến tính. Đặc biệt nếu A có n giá trị riêng phân biệt thì tập gồm n véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng đó lập nên cơ sở cho $\mathbb{R}^n$.

6.2. MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

Nhắc lại rằng *ma trận chéo* là ma trận vuông có tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo đều bằng 0. Khi D là ma trận chéo thì việc tính lũy thừa D^k thực sự đơn giản.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ có } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \forall k \ge 1$$

Ví dụ với $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ thì có:

$$D^2 = DD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix},$$

$$D^3 = D^2D = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

Nhờ phương pháp quy nạp, ta chứng minh được .

$$D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \forall k \ge 1$$

Mặt khác, nếu ma trận vuông A phân tích được dưới dạng $A = PDP^{-1}$ với khả nghịch và D là ma trận chéo thì A^k việc tính cũng sẽ thực hiện được một cách đơn giản như sau:

$$A^2 = AA = (PDP^{-1}).(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = A^2A = (PD^2P^{-1}).(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Nhờ phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$A^k = A^{k-1}A = (PD^{k-1}P^{-1}).(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1} \quad \forall k \geq 1.$$

Như vậy ta tính dễ dàng $A^k (k \geq 1)$ bằng hai phép nhân ma trận.

Nội dung của mục này là giúp *nhận biết khả năng* chéo hóa của ma trận vuông A *và nêu phương pháp* để phân tích A thành dạng PDP^{-1}, nhằm tính nhanh $A^k (k \geq 1)$ xuất hiện trong nhiều bài toán ứng dụng.

Định nghĩa 6.2.1. Ma trận $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ gọi là chéo hóa được trên i nếu tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP = D$ là ma trận chéo. Khi đó ta nói P chéo hóa được A, hay A được chéo hóa bởi P và D gọi là dạng chéo của A.

Ma trận P được gọi là ma trận chéo hóa A.

Như vậy A chéo hóa được trên i khi và chỉ khi tồn tại ma trận P khả nghịch và ma trận chéo D thỏa $A = PDP^{-1}$. Suy ra A *chéo hóa được trên* $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ *đồng dạng với ma trận chéo D.*

Khi nói *"chéo hóa ma trận A"* có nghĩa là tìm ma trận P khả nghịch và ma trận chéo D để $A = PDP^{-1}$.

Chú ý rằng không phải ma trận vuông thực nào cũng đều chéo hóa được trên i. Định lý sau đây đưa ra một điều kiện cần và đủ cho tính chéo hóa được của ma trận vuông thực bất kỳ.

Định lý 6.2.2. *Ma trận $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ chéo hóa được trên i khi và chỉ khi A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử A chéo hóa được trên i, nghĩa là trong đó $P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_2^T \dots \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix}$ là ma trận khả nghịch và $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ là ma trận chéo.

Ta có:

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD\ (1) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_2^T \dots \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_2^T \dots \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1^T & A\mathbf{v}_2^T \dots A\mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1^T & \lambda_2\mathbf{v}_2^T \dots \lambda_n\mathbf{v}_n^T \end{pmatrix}\ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{v}_1^T = \lambda_1\mathbf{v}_1^T \\ A\mathbf{v}_2^T = \lambda_1\mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ A\mathbf{v}_n^T = \lambda_1\mathbf{v}_n^T \end{cases}. \qquad (3)$$

Do P khả nghịch nên tập các véc tơ cột $\{\mathbf{v}_i^T, i = 1...n\}$ là độc lập tuyến tính dẫn đến $\mathbf{v}_i^T \neq \mathbf{0}, \forall i = 1...n$. Do $\mathbf{v}_i^T \neq \mathbf{0}\ (1 \leq i \leq n)$ nên từ (3) ta suy ra $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ là tập hợp các giá trị riêng còn $\{\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_n^T\}$ là tập véc tơ riêng tương ứng của A.

Giả sử A có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\{\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_n^T\}$ và các giá trị riêng tương ứng là $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (những giá trị riêng này không nhất thiết khác nhau).

Lập các ma trận:

$P = \left(\mathbf{v}_1^T \ \ \mathbf{v}_2^T \dots \mathbf{v}_n^T\right)$ và $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ thì P khả nghịch do tập n cột trong P là tập các véc tơ $\{\mathbf{v}_i^T, i = 1...n\}$ độc lập tuyến tính.

Do $A\mathbf{v}_n^T = \lambda_1 \mathbf{v}_n^T \ \ \forall\, i = 1...n$, nên (3), (2), (1) đều đúng, nghĩa là $A = PDP^{-1}$ chéo hóa được trên i. □

Ví dụ 6.2.3. Xác định tính chéo hóa được của $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải

- Tìm tập giá trị riêng của A: Theo ví dụ 6.1.6, ta có

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right.$$

- Tìm tập các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A: Theo ví dụ 6.1.6, ta có

Với $\lambda_1 = 2$ tìm được $\mathbf{E}_{\lambda_2} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. Véc tơ riêng tương ứng tìm được có dạng $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .Tập các véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với $\lambda_1 = 2$ chỉ gồm 1 véc tơ vì không gian riêng $\mathbf{E}_{\lambda_1}$ có số chiều bằng 1.

Với $\lambda_2 = -1$, tìm được $\mathbf{E}_{\lambda_1} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. Véc tơ riêng tương ứng tìm được có dạng $\mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tập các véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với $\lambda_2 = -1$ chỉ gồm 1 véc tơ vì không gian riêng $\mathbf{E}_{\lambda_1}$ có số chiều bằng 1.

Tập các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A gồm 2 véc tơ nên A không chéo hóa được.

Hệ quả 6.2.4. *Nếu $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ có đúng giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được trên i.*

Hệ quả này là hiển nhiên vì khi $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ có n giá trị riêng phân biệt thì A có đủ véc tơ riêng tương ứng độc lập tuyến tính.

Hệ quả 6.2.5. *Khi A chéo hóa được thì ma trận P chéo hóa A được là ma trận có các cột là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A và dạng chéo hóa của A là ma trận chéo D có các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng tương ứng với n véc tơ riêng độc lập tuyến tính.*

Ví dụ 6.2.6. Hãy tìm ma trận chéo hóa được ma trận

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ và chỉ ra dạng chéo tương ứng của A.

Giải

- Tìm tập giá trị riêng của A:

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 4-\lambda & -6\\ 8 & 1 & 9-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & -6\\ 1 & 9-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-13\lambda+42)=(1-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-7)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=6\\ \lambda_3=7\end{array}\right..$$

A có 3 giá trị riêng thực khác nhau nên A chéo hóa được trên i.

- Lập ma trận P chéo hóa được A và dạng chéo hóa tương ứng:

Với $\lambda_1=1$ thì

$$A-\lambda_1 I_3=A-I_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -8 & 3 & -6\\ 8 & 1 & 8\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/8 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 15/16\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{v}=t\begin{pmatrix}-15/16\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn $\mathbf{v}_1^T=\begin{pmatrix}15\\ 8\\ -16\end{pmatrix}$.

Với $\lambda_2=6$ thì

$$A-\lambda_2 I_3 = A-6I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & -6 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chọn $\mathbf{v}_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Với $\lambda_3 = 7$ thì

$$A-\lambda_3 I = A-7I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & -6 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chọn $\mathbf{v}_3^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lập $P = \left(\mathbf{v}_1^T \ \ \mathbf{v}_2^T \ \ \mathbf{v}_3^T\right) = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & -2 \\ -16 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ thì dạng chéo tương ứng là $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Nhận xét: Rõ ràng ma trận P chéo hóa được A và dạng chéo tương ứng của A tìm được là *không duy nhất* vì chúng phụ thuộc vào việc chọn tập véc tơ riêng độc lập tuyến tính và việc sắp thứ tự các véctơ đó thành cột của P.

Chú ý rằng khi $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ nhưng A có ít hơn n giá trị riêng phân biệt thì *không thể kết luận rằng A không chéo hóa được*. Sau đây ta sẽ đưa ra định lý cho phép khẳng định tính chéo hóa được của ma trận $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ nhưng lại có ít hơn giá trị riêng phân biệt.

Định lý 6.2.7. *Giả sử $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ có $k \le n$ giá trị riêng phân biệt: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Gọi $\boldsymbol{B}_i$ là cơ sở của không gian riêng $\boldsymbol{E}_{\lambda_i}, i = 1...k$, và. Khi đó, A chéo hóa được khi và chỉ khi $\boldsymbol{B}$ chứa đúng n véc tơ, hay tương đương $\sum_{i=1}^{k} dim\boldsymbol{E}_{\lambda_i} = n$.*

Chứng minh. Theo tính chất của véc tơ riêng thì **B** là tập hợp các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của **A** nên **A** chéo hóa được $\Leftrightarrow$ A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính có đủ véc tơ $\Leftrightarrow$ B . □

Ví dụ 6.2.8. Xác định tính chéo hóa được của $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Giải

- Tìm tập giá trị riêng của A:

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-\lambda & 3 & -2\\ -2 & 5-\lambda & -2\\ -2 & 3 & -\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1\to c_1-c_3}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda & 3 & -2\\ 0 & 5-\lambda & -2\\ -2+\lambda & 3 & -\lambda\end{vmatrix}\overset{h_3\to h_3+h_1}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda & 3 & -2\\ 0 & 5-\lambda & -2\\ 0 & 6 & -2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & -2\\ 6 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0\Leftrightarrow\lambda_1=1;\lambda_2=2$$

(bội 2).

- Tìm tổng số chiều của các không gian riêng.

Với $\lambda_1=1$ thì

$$A-\lambda_1 I_3=A-I_3=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ta có $\dim\mathbf{E}_{\lambda_1}=1$ vì hệ $(A-\mathbf{I}_3)\mathbf{x}^T=\mathbf{0}$ có ẩn tự do.

Với $\lambda_2=2$ thì

$$A-\lambda_2\mathbf{I}_3=A-2\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ta có $\dim\mathbf{E}_{\lambda_2}=2$ vì hệ $(A-2\mathbf{I}_3)\mathbf{x}^T=\mathbf{0}$ có 2 ẩn tự do.

Tổng số chiều của các không gian riêng bằng 3 nên A chéo hóa được trên i.

Ví dụ 6.2.9. Xác định tính chéo hóa được của

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -4 & 11 & -6 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải

- Tìm tập giá trị riêng của A:

$$\det(A-\lambda \mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 7 & -5 \\ -4 & 11-\lambda & -6 \\ -4 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$$

(bội 2).

- Tìm tổng số chiều của các không gian riêng.

Với $\lambda_1 = 1$ thì

$$A - \lambda_1 \mathbf{I}_3 = A - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -5 \\ -4 & 10 & -6 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\dim \mathbf{E}_{\lambda_1} = 1$ vì hệ $(A - \mathbf{I}_3)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ có 1 ẩn tự do.

Với $\lambda_2 = 3$ thì

$$A - \lambda_2 \mathbf{I}_3 = A - 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -5 \\ -4 & 8 & -6 \\ -4 & 8 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\dim \mathbf{E}_{\lambda_1} = 1$ vì hệ $(A - 3\mathbf{I}_3)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ có 1 ẩn tự do.

Tổng số chiều của các không gian riêng bằng 2 nhỏ hơn cấp của ma trận A nên A không chéo hóa được trên i.

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA MA TRẬN

Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Chéo hóa ma trận A nghĩa là tìm ma trận vuông P khả nghịch và ma trận chéo D thỏa $A = PDP^{-1}$. Khi A chéo hóa được trên i thì ma trận P chéo hóa được A và dạng chéo tương ứng D cho bởi công thức:

$$P = \left(\mathbf{v}_1^T \quad \mathbf{v}_2^T \ldots \mathbf{v}_n^T\right) \text{ và } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó $\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \ldots, \mathbf{v}_n^T$ là n véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng tương ứng.

Để thực hiện việc chéo hóa ma trận A, ta có thể áp dụng lược đồ gồm các bước sau:

Bước 1: *Tìm tập giá trị riêng và xác định tính chéo hóa được của* A.

Bước 2:. *Nếu* A *chéo hóa được thì tìm véc tơ riêng độc lập tuyến tính.*

Bước 3: *Lập ma trận P chéo hóa được A và dạng chéo hóa D tương ứng của A.*

Ví dụ 6.2.10. Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (nếu có thể được).

Giải

Bước 1: *Tìm tập giá trị riêng và xác định tính chéo hóa được của A.*

- $|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}\right.$

.

Với $\lambda_1 = 1$ (bội 2), có $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì $\dim \mathbf{E}_{\lambda_1} = 2$ vì hệ $(A - I_3)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ có 2 ẩn tự do.

Với $\lambda_2 = -2$ (bội 1), có $A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì $\dim \mathbf{E}_{\lambda_2} = 1$ vì hệ $(A + 2I_3)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ có ẩn tự do.

Ma trận A là chéo hóa được vì số chiều của mỗi không gian riêng $\mathbf{E}_{\lambda_i}$ $(i = 1,2)$ đúng bằng bội của giá trị riêng tương ứng.

Bước 2: *Tìm tập n véc tơ riêng độc lập tuyến tính*

- Với $\lambda_1 = 1$, các véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{v}^T = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}: s^2 + t^2 \neq 0$. Do $\dim \mathbf{E}_{\lambda_1} = 2$ nên số véc tơ độc lập tuyến tính trong $\mathbf{E}_{\lambda_1}$ nhiều nhất là 2 véc tơ. Chọn

$\mathbf{v}_1^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Với $\lambda_2 = -2$, các véc tơ riêng tương ứng là $\mathbf{v}^T = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do $\dim \mathbf{E}_{\lambda_2} = 1$ nên chọn được 1 véc tơ riêng độc lập tuyến tính cho A ứng với λ_2 là $\mathbf{v}_3^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bước 3: *Tìm ma trận P chéo hóa được A và dạng chéo của A*

Lập $P = \left(\mathbf{v}_1^T \ \ \mathbf{v}_2^T \ldots \mathbf{v}_n^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ thì $A = PDP^{-1}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài 1: Tìm đa thức đặc trưng và phương trình đặc trưng của các ma trận sau:

$a)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$c)\ C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad d)\ D=\begin{pmatrix}2 & -1 & -0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Bài 2: Tìm trị riêng và véc tơ riêng của các ma trận sau trên :

$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 13 & -3\end{pmatrix}$

$c)\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad d)\ D=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$e)\ E=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad f)\ F=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Bài 3: Cho các ma trận thực

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ và } B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) Tìm các trị riêng và không gian riêng tương ứng của *A* và *B*.

b) Tìm các ma trận vuông S và T khả nghịch sao cho $S^{-1}AS$ và $T^{-1}BT$ là ma trận đường chéo.

Bài 4: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm đa thức đặc trưng của ma trận A.

b) Dựa vào đa thức đặc trưng của A để chứng minh A khả nghịch và chỉ ra biểu thức xác định A^{-1}.

c)Tính $\det(A-2019I_3)$.

d) Tìm véc tơ riêng, giá trị riêng của A.

Bài 5: Chéo hóa (nếu được) các ma trận sau

$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $b)\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}$

$c)\ C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $d)\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$e)\ E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $f)\ F=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$g)\ E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Bài 6: Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Chéo hóa các ma trận A và B.

b) Tính A^{2019} và B^{2019}.

Bài 7: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Chéo hóa ma trận A.

b) Tính A^n với $n \in \mathbb{N}$.

CHƯƠNG 7. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

7.1. KHÁI NIỆM DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Định nghĩa 7.1.1. Cho V là một không gian véc tơ trên trường i.

1) Ánh xạ $f:V\times V\to\mathbb{R}$ được gọi là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi giữ cố định biến kia. Nói cách khác, $\forall u_1,u_2,v_1,v_2,u,v\in V$ và $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$f(\alpha u_1+\beta u_2,v)=\alpha f(u_1,v)+\beta f(u_2,v),$$

$$f(u,\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha f(u,v_1)+\beta f(u,v_2).$$

2) Dạng song tuyến tính f trên V được gọi là dạng song tuyến tính đối xứng nếu $f(u,v)=f(v,u),\forall u,v\in V$.

3) Dạng song tuyến tính f trên V được gọi là dạng song tuyến tính phản đối xứng nếu $f(u,v)=-f(v,u),\forall u,v\in V$.

4) Dạng song tuyến tính f trên V được gọi là xác định dương nếu $f(u,u)\ge 0,\forall u\in V$ và $f(u,u)=0$ khi và chỉ khi $u=\mathbf{0}$.

Định nghĩa 7.1.2. Cho f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên i - không gian véc tơ V. Khi đó ánh xạ $H:V\to\mathbb{R}$ xác định bởi $H(u)=f(u,u),\forall u\in V,$ được gọi là dạng toàn phương trên V tương ứng với dạng song tuyến tính f.

Ta có dạng song tuyến tính đối xứng f hoàn toàn được xác định bởi dạng toàn phương . Thật vậy, $\forall u,v\in V$

$$H(u+v)=f(u+v,u+v)=f(u,u)+2f(u,v)+f(v,v)$$

$$= H(u) + H(v) + 2f(u,v).$$

Từ đó suy ra

$$f(u,v) = \frac{1}{2}[H(u+v) - H(u) - H(v)].$$

Do đó, dạng song tuyến tính đối xứng *f* được gọi dạng cực của dạng toàn phương *H*.

Ví dụ 7.1.3.

(i) Trên $\mathbb{R}^3$, ánh xạ

$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3),$
$y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương tương ứng với nó là $H(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Tích vô hướng trên ¡ - không gian véc tơ $\mathbf{E}^n$ là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương và dạng toàn phương tương ứng với nó là

$$H(u) = \|u\|^2, \forall u \in V$$

Giả sử f là một đạng song tuyến tính trên không gian véc tơ hữu hạn chiều *V*, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của *V*. $\forall u, v \in V$ nếu $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, $v = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n$ thì

$$f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_iu_i, \sum_{j=1}^{n} y_ju_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jf(u_i,u_j).$$

Như vậy, f hoàn toàn được xác định bởi ma trận

$$A = (a_{ij}) = \left(f(u_i, u_j)\right).$$

Ta có dạng song tuyến tính f là đối xứng khi và chỉ khi A là ma trận đối xứng. Thật vậy, nếu f đối xứng thì $a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji} (1 \le i, j \le n)$ nên A là ma trận đối xứng. Ngược lại, nếu A là ma trận đối xứng thì $\forall u, v \in V$

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j = f(v,u),$$ nghĩa là

f là dạng song tuyến tính đối xứng.

Định nghĩa 7.1.4. Cho $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V và f là một dạng song tuyến tính trên V. Khi đó,

(i) Ma trận $A = \left(f(u_i, u_j) \right)$ được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f theo cơ sở B. Ký hiệu $A = [f]_B$.

(ii) Nếu f là dạng song tuyến tính đối xứng và H là dạng toàn phương tương ứng với f thì A cũng được gọi là ma trận của H trong cơ sở B. Ký hiệu $A = [H]_B$.

Vậy $[f]_B = [H]_B$.

Đặt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [u]_B, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [v]_B$ thì biểu thức

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y = [u]_B^T A [v]_B = [u]_B^T [f]_B [v]_B$$

được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính f. Nếu f là

dạng song tuyến tính đối xứng thì dạng toàn phương H tương ứng với f có biểu thức tọa độ là

$$H(u)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx=[u]_B^TA[u]_B=[u]_B^T[H]_B[u]_B.$$

Ví dụ 7.1.5. Trong không gian véc tơ 3- chiều V, đối với cơ sở $B=\{u_1,u_2,u_3\}$, ánh xạ

$f(u,v)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3-2x_1y_2-2x_2y_1-x_2y_3-x_3y_2+3x_1y_3+3x_3y_1,$

$\forall u,v\in V$ (mà) $[u]_B^T=(x_1,x_2,x_3),[v]_B^T=(y_1,y_2,y_3)$ là một dạng song tuyến tính đối xứng. Dạng toàn phương tương ứng với f là

$$H(u)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3+6x_1x_3.$$

Khi đó ma trận của f hay của H là

$$[f]_B=[H]_B=A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&1&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}.$$

Mệnh đề 6.1.6. *Cho B và C là các cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn chiều V có $P=P_{BC}$ (ma trận chuyển từ cơ sở từ B và C). Cho f là dạng song tuyến tính và H là dạng toàn phương trên V. Khi đó $[f]_C=P^T[f]_BP$ và $[H]_C=P^T[H]_BP$.*

Chứng minh., $\forall u,v\in V$

$[u]_B=P[u]_C$ và $[v]_B=P[v]_C$.

$\forall u,v\in V$, ta có

$$f(u,v)=[u]_B^T[f]_B[v]_B=(P[u]_C)^T[f]_BP[v]_C=[u]_C^T(P^T[f]_BP)[v]_C. \quad (1)$$

Mặt khác, $f(u,v)=[u]_C^T[f]_C[v]_C$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $[f]_C = P^T[f]_B P$.

Nếu H là dạng toàn phương tương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng f thì $[H]_C=[f]_C = P^T[f]_B P = P^T[H]_B P$. □

7.2. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

Định nghĩa 7.2.1. Cho H là một dạng toàn phương trên không gian véc tơ V. Giả sử có cơ sở $E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ của V sao cho $\forall u \in V$,

$$H(u)=\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2, \qquad (7.1)$$

trong đó $[u]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, thì biểu thức (7.1) gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương H. Các hệ số $k_1,k_2,\ldots,k_n$ được gọi là các hệ số chính tắc và cơ sở E được gọi là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương H.

Nếu thêm điều kiện $k_i \in \{0,-1,1\}$ với $1 \le i \le n$, thì biểu thức (7.1.) được gọi là dạng chuẩn tắc của H.

Phương pháp tìm cơ sở chính tắc E của dạng toàn phương

H được gọi là phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Định lý sau đây cho thấy sự tồn tại cơ sở chính tắc của mỗi dạng toàn phương.

Định lý 7.2.2. *Mọi dạng toàn phương H trên i - không gian véc tơ*

n chiều V đều có thể đưa về dạng chính tắc.

Chứng minh. Giả sử H là dạng toàn phương trên không gian véc tơ n chiều V và V có cơ sở B sao cho

$$H(u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad \forall u\in V \text{ mà } [u]_B=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 1. Tồn tại $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ thỏa $a_{ii}\neq 0$. Bằng cách đổi thứ tự của các véc tơ trong cơ sở B một cách thích hợp, ta có thể giả sử $a_{11}\neq 0$. Khi đó,

$$H(u)=a_{11}\left[x_1^2+2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right]+H',$$

trong đó H' là dạng toàn phương chỉ chứa các ẩn $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (để ý $a_{ij}=a_{ji}$ khi $1\le i,j\le n$).

Do đó, ta có thể viết

$$H(u)=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}x_i x_j,$$

trong đó $b_{ij}=b_{ji}$ khi $2\le i,j\le n$.

Thực hiện phép đổi tọa độ không suy biến bằng cách đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ y_k = x_k, 2 \le k \le n \end{cases} \text{ hay}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_k = y_k, 2 \le k \le n \end{cases}$$

Khi đó ta có $H(u) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$.

Như vậy, việc đưa dạng toàn phương H về dạng chính tắc quy về việc đưa dạng toàn phương

$$K = \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$$

của $(n-1)$ biến $y_j, 2 \le j \le n$, về dạng chính tắc. Điều này có thể thực hiện nhờ vào phép quy nạp.

Trường hợp 2. Nếu $a_{ii} = 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$ nhưng tồn tại $a_{ij} \ne 0, (i \ne j)$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_{12} \ne 0$. Khi đó, thực hiện phép đổi tọa độ không suy biến bằng cách đặt

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_1 = x_1' - x_2' \\ x_s = x_s', 3 \le s \le n \end{cases}$$

thì trong biểu thức tọa độ của dạng toàn phương H đối với cơ sở mới có chứa số hạng

$(a_{12}+a_{21})x_1x_2 = 2a_{12}(x_1'+x_2')(x_1'-x_2') = 2a_{12}(x_1')^2 - 2a_{12}(x_2')^2$, trong đó $2a_{12} \neq 0$.

Ta quay về với trường hợp 1 đã xét.

Trường hợp 3. Nếu $a_{ij} = 0, 1 \leq i, j \leq n$ thì H có dạng chính tắc trong mọi cơ sở. □

Ví dụ 7.2.3. Trong không gian véctơ 3- chiều V, cho dạng toàn phương H có biểu thức tọa độ đối với cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là

$$H(u) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Tìm cơ sở E sao cho biểu thức tọa độ của H có dạng chính tắc.

Giải

Ta có

$H(u) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3.$

Đặt

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ X_2 = (x_2 + x_3)/2 \\ X_3 = (x_2 - x_3)/2 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ X_2 = (x_2 + x_3)/2 \\ X_3 = (x_2 - x_3)/2 \end{cases}$$

khi đó ta có dạng chính tắc của dạng toàn phương H là

$$H(u) = X_1^2 - 2X_2^2 + 2X_3^2.$$

Ma trận của phép đổi biến là $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Cơ sở mới là $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, trong đó

$e_1 = u_1, e_2 = -3u_1 + u_2 + u_3, e_3 = -u_1 + u_2 - u_3.$

Phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc như trong định lý trên được gọi là phương pháp Lagrange. Ngoài ra, ta còn có các phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc như phương pháp chéo hóa trực giao và phương pháp Jacobi. Phương pháp chéo hóa trực giao vượt ra khỏi mục tiêu của giáo trình này. Sau đây chúng tôi trình bày phương pháp Jacobi.

PHƯƠNG PHÁP JACOBI

Định nghĩa 7.2.4. Cho $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$. Khi đó, với mỗi $1 \le i \le n$, định thức con $\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$ được gọi là các định thức con chính cấp *i* của *A*.

Định lí 7.2.5. *Giả sử H là dạng toàn phương trên không gian véc tơ V có* $[H]_B = A$ *trong đó* $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ *là 1 cơ sở của V. Nếu tất cả các định thức con chính của A đều khác 0 thì tồn tại một cơ sở E của V sao cho*

$$H(u) = \frac{1}{\Delta_1} X_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} X_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} X_n^2, \text{ mà } [u]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Chứng minh. Gọi f là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng với dạng toàn phương H và $A = (a_{ij})$, nghĩa là $a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}, 1 \le i, j \le n.$

Với mỗi $j = 1, 2, \ldots, n$, xét hệ phương trình tuyến tính với các ẩn là $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{jj}$ như sau:

$$\begin{cases} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1j}b_{jj} = 0 \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2j}b_{jj} = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{j1}b_{1j} + a_{j2}b_{2j} + \ldots + a_{jj}b_{jj} = 1 \end{cases} \qquad (7.2)$$

Vì định thức của ma trận các hệ số của hệ (1.2) $\Delta_j \neq 0$ nên nó có nghiệm duy nhất $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{jj})$ trong đó

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta_1}, b_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}, 2 \le j \le n \text{ (suy từ quy tắc CRAMER)}$$

Đặt $\begin{cases} e_1 = b_{11}u_1 \\ e_2 = b_{12}u_1 + b_{22}u_2 \\ \qquad \ldots \\ e_n = b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2 + \ldots + b_{nn}u_n \end{cases}.$

Vì $b_{11}b_{22}\ldots b_{jj} \neq 0$ nên $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ hệ độc lập tuyến tính. Do đó E là một cơ sở của V và

$$P_{BE} = C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta xác định $[H]_E$.

Với $i \le j = 1, 2, \dots, n$ ta có

$$f(e_j, u_i) = f(u_i, e_j) = f\left(u_i, \sum_{k=1}^{j} b_{kj} u_k\right) = \sum_{k=1}^{j} b_{kj} f(u_i, u_k) = \sum_{k=1}^{j} b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj}$$

Từ (7.2), ta nhận được

$$f(e_j, u_i) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad i < j, \\ 1 & \text{khi} \quad i = j. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$f(e_j, e_i) = b_{1j} f(e_j, u_1) + b_{2j} f(e_j, u_2) + \dots + b_{ij} f(e_j, u_i) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad i < j, \\ b_{ii} & \text{khi} \quad i = j. \end{cases}$$

Như vậy

$$f(e_j, e_i) = f(e_i, e_J) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad i < j, \\ b_{ii} & \text{khi} \quad i = j. \end{cases}$$

$$H(u) = b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + \dots + b_{nn} X_n^2$$

$$= \frac{1}{\Delta_1} X_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} X_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} X_n^2 . \square$$

Ví dụ 7.2.6. Trong không gian véc tơ 3- chiều V , cho dạng toàn phương H có biểu thức tọa độ đối với cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là

$$H(u) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 .$$

Tìm dạng chính tắc của H và chỉ ra cơ sở tương ứng.

Giải

Ma trận của dạng toàn phương H đối với cơ sở B đã cho là

$$. \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có $\Delta_1 = |1| = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ và $\Delta_3 = |A| = -3$, nghĩa là $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$.

Do đó tồn tại cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ của V sao cho biểu thức tọa độ của H đối với cơ sở này có dạng chính tắc.

Để tìm cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, ta tìm $b_{ii}, 1 \le i \le 3$, bằng cách giải các hệ phương trình sau:

Với $i = 1, b_{11} = 1;$

Với $i = 2$, xét hệ

$$\begin{cases} b_{12} + b_{22} = 0 \\ b_{12} - b_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{12} = \frac{1}{3} \\ b_{22} = -\frac{1}{3} \end{cases} .$$

Với $i=3$, xét hệ

$$\begin{cases} b_{13}+b_{23}=0 \\ b_{13}-b_{23}=0 \\ b_{33}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{13}=0 \\ b_{23}=0. \\ b_{33}=1 \end{cases}$$

Do đó, cơ sở $E=\{e_1, e_2, e_3\}$ được xác định như bởi

$$\begin{cases} e_1 = u_1 \\ e_2 = \dfrac{1}{3}u_1 - \dfrac{1}{3}u_2. \\ e_3 = u_3 \end{cases}$$

Khi đó, biểu thức tọa độ của H đối với cơ sở E là

7.3. CHỈ SỐ QUÁN TÍNH

Cho dạng toàn phương $H \neq 0$ trên không gian véc tơ n-chiều V mà biểu thức tọa độ đối với một cơ sở B nào đó của V có dạng chính tắc

$H(u)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\ldots+k_rx_r^2$, với $k_i \neq 0$ khi $1 \le i \le r$ trong đó $1 \le r \le n$.

Thực hiện phép đổi biến không suy biến

$$y_i = \begin{cases} \sqrt{|k_i|}x_i, & i \le r \\ x_i\quad, & i > r \end{cases}$$

Khi đó trong cơ sở mới tương ứng E của V biểu thức tọa độ của dạng toàn phương H có dạng chuẩn tắc

$H(u)=\varepsilon_1y_1^2+\varepsilon_2y_2^2+\ldots+\varepsilon_ry_r^2$, trong đó $\varepsilon_i \neq 0$ khi $1 \le i \le r$.

Định lý 7.3.1 (Luật quán tính). *Số các hệ số dương và số các hệ số âm của một dạng toàn phương viết dưới dạng chuẩn tắc không phụ thuộc vào cơ sở chính tắc mà ta chọn.*

Chứng minh. Giả sử dạng toàn phương có biểu thức tọa độ (trong một cơ sở đã chọn nào đó) $H(u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ được đưa về dạng chính tắc trong hai cơ sở khác nhau có biểu thức tọa độ tương ứng là

$$H(u)=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ldots-y_r^2 \text{ và}$$

$$H(u)=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_q^2-z_{q+1}^2-\ldots-z_r^2 .$$

Khi đó tồn tại các ma trận vuông cấp n không suy biến $S=(s_{ij})$ và $T=(t_{ij})$ sao cho $y=Sx, z=Tx$.

Giả sử $p<q$. Ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với n ẩn $x_1,x_2,\ldots,x_n$ và $(p+n-q)$ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} s_{11}x_1+ & s_{12}x_2+ & \ldots+ & s_{1n}x_n= & 0\\ . & . & . & . & .\\ s_{p1}x_1+ & s_{p2}x_2+ & \ldots+ & s_{pn}x_n= & 0\\ t_{q+1,1}x_1+ & t_{q+1,2}x_2+ & \ldots+ & t_{q+1,n}x_n= & 0\\ . & . & . & . & .\\ t_{n1}x_1+ & t_{n2}x_2+ & \ldots+ & t_{nn}x_n= & 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có số ẩn nhiều hơn số phương trình (vì $(p+n-q)<n$) nên nó có nghiệm không tầm thường $x_0=(c_1,c_2,\ldots,c_n)\neq\mathbf{0}$.

Thay $x=x_0$ vào các công thức đổi tọa độ tương ứng, ta nhận được

$y_i(x_0) = 0$ khi $1 \le i \le p$ và $z_j(x_0) = 0$ khi $q+1 \le j \le n$.

Do đó,

$$H(u_0) = -[y_{p+1}(x_0)]^2 - [y_{p+2}(x_0)]^2 - \ldots [y_n(x_0)]^2 \le 0$$

Và $H(u_0) = [z_1(x_0)]^2 + [z_2(x_0)]^2 + \ldots + [z_q(x_0)]^2 \ge 0$

trong đó $u_0 \in V$ là véc tơ có tọa độ đối với cơ sở đã chọn ban đầu là x_0.

Từ đó suy ra $H(u_0)$ và

$$z_1(x_0) = z_2(x_0) = \ldots = z_q(x_0) = 0.$$

Do $z_{q+1}(x_0) = z_{q+2}(x_0) = \ldots = z_n(x_0) = 0,$ ta suy ra $Tx_0 = 0$ với $x_0 \ne 0$: mâu thuẫn vì T không suy biến. Như vậy $p \le q$.

Chứng minh tương tự, ta có $q \ge p$, nghĩa là $q = p$. □

Từ định lý này, ta định nghĩa cặp chỉ số quán tính của một dạng toàn phương như sau:

Định nghĩa 7.3.2. Cho H là một dạng toàn phương trên không gian véc tơ hữu hạn chiều V mà biểu thức tọa độ của nó trong một cơ sở nào đó có dạng chính tắc

$$H(u) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Khi đó, số các hệ số dương p được gọi là chỉ số quán tính dương của *H*; số các hệ số âm q được gọi là chỉ số quán tính âm của H ;; cặp số (p,q) được gọi là cặp chỉ số quán tính của .

Quay lại Ví dụ 7.2.6, dạng toàn phương H có cặp chỉ số quán tính là $(2,1)$.

7.4. DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH DẤU

Định nghĩa 7.4.1. Dạng toàn phương H trên không gian véc tơ V được gọi là không suy biến nếu $H(u)=0$ kéo theo $u=\mathbf{0}$.

Định lí 7.4.2. *Nếu H là dạng toàn phương không suy biến trên không gian véc tơ V thì $H(u)$ giữ nguyên dấu $\forall u\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$ (nghĩa là $H(u)>0, \forall u\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$ hoặc $H(u)<0, \forall u\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$).*

Chứng minh. Giả sử f là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng với H. Cố định $y\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. Lấy $x\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Nếu có số thực $k\neq 0$ sao cho $y=kx$ thì

$$H(y)=H(kx)=f(kx,kx)=k^2f(x,x)=k^2H(x) \text{ với } k^2>0$$

nên $H(x)$ và $H(y)$ cùng dấu.

Nếu $y\neq kx, \forall x\in\mathbb{R}$ thì

$$0\neq H(y-kx)=f(y-kx,y-kx)=H(x)k^2-2f(x,y)k+H(y),$$

nghĩa là $H(x)k^2-2f(x,y)k+H(y)$ là một tam thức bậc 2 theo) vô nghiệm trên i.

Do đó ta có $[f(x,y)]^2-H(x)H(y)<0$, nghĩa là

$H(x)H(y)>[f(x,y)]^2\geq 0$. Vậy và có cùng dấu. □

Định nghĩa 7.4.3. Dạng toàn phương H trên không gian véc tơ V được gọi là dạng toàn phương xác định dương (tương ứng, xác định âm) nếu $H(u)>0$ (tương ứng, $H(u)<0$) $\forall u\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$

Định lí 7.4.4. *Giả sử H là dạng toàn phương trên không gian véc tơ V mà biểu thức tọa độ của nó đối với cơ sở E*

nào đó của V có dạng $H(u) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \ldots + k_nx_n^2$.

(i) *Dạng toàn phương H là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi* $k_i > 0, 1 \le i \le n$

(ii) *Dạng toàn phương H là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi* $k_i < 0, 1 \le i \le n$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh phát biểu (i). Phát biểu (ii) chứng minh tương tự.

Giả sử trong các hệ số $k_1, k_2, \ldots, k_n$ có ít nhất một hệ số,

chẳng hạn $k_1 < 0$. Khi đó, với $u \in V$ mà $[u]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ta có

$H(u) = k_1 \le 0,$ nghĩa là H không phải là dạng toàn phương xác định dương.

Do đó nếu H là dạng toàn phương xác định dương thì $k_i > 0, 1 \le i \le n.$

Ngược lại, nếu $H(u) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \ldots + k_nx_n^2$ và $k_i > 0, 1 \le i \le n$, thì hiển nhiên H là dạng toàn phương xác định dương.

Kết quả sau đây suy ra trực tiếp từ Định lý 7.4.4 và Định lý 7.2.5.

Hệ quả 7.4.5 (Định lý Sylvester). *Giả sử dạng toàn phương H trên không gian véc tơ hữu hạn chiều V có ma trận là A trong một cơ sở nào đó. Khi đó,*

(i) *Dạng toàn phương H là xác định dương khi và chỉ khi* *các định thức con chính của A đều dương*;

(ii) *Dạng toàn phương H là xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính cấp chẵn của A đều dương và các định thức con chính cấp lẻ của A đều âm.*

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

Bài 1: Tìm ma trận của các dạng toàn phương sau theo cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 16x_1x_3 + 14x_2x_3 + 5x_3^2, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

Bài 2: Viết biểu thức tọa độ của dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở chính tắc E của $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Bài 3: Bằng phương pháp Lagrange, tìm phép biến đổi tuyến tính đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc và viết dạng chính tắc này

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

b)
$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

Bài 4: Tìm phép biến đổi tuyến tính đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc và viết dạng chính tắc đó. Sau đó hãy phân loại các dạng toàn phương này

a) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3, \forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$

b) $f(x_1,x_2,x_3)=-3x_2^2+4x_1x_2+10x_1x_3-4x_2x_3, \forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$

Bài 5: Cho dạng toàn phương:

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+a\,x_1x_3, \forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$

với là tham số thực.

a) Đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

b) Với giá trị nào của a thì f là xác định dương?

Bài 6. Dùng tiêu chuẩn Sylvester hãy xem xét dạng toàn phương nào dưới đây là xác định dương hoặc xác định âm:

a) $f(x_1,x_2,x_3)=-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2+12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3, \forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$

b) $f(x_1,x_2,x_3)=9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3, \forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$

Bài 7: Cho dạng toàn phương:

$f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-x_2^2+mx_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3, \forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$

với *m* là tham số thực. Định *m* để dạng toàn phương xác định âm.

Bài 8: Viết ma trận của dạng song tuyến tính $f(x,y)$ trên $\mathbb{R}^3$ theo cơ sở chính tắc E của $\mathbb{R}^3$, trong đó $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$:

a) $f(x,y)=2x_1y_1-3x_2y_3+2x_3y_1-2x_3y_3.$

b) $f(x,y)=4x_1y_2-6x_2y_3+8x_2y_1+x_3y_3-5x_1y_3.$

Bài 9: Tìm ma trận dạng toàn phương $Q(x)$ trên $\mathbb{R}^3$ có biểu thức tọa độ theo cơ sở chính tắc E của $\mathbb{R}$ như sau:

a) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

b) $Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_1x_3 + 14x_3^2 + 10x_2x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

c) $Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - x_2x_3 - 6x_1x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

Bài 10: Cho các dạng toàn phương $Q(x)$ trên $\mathbb{R}^3$ sau đây được viết dưới dạng ma trận. Hãy viết chúng dưới dạng thông thường:

a) $Q(x) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

b) $Q(x) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

Bài 11: Tìm biểu thức tọa độ của mỗi dạng toàn phương $Q(x)$ dưới đây sau khi thực hiện phép biến đổi tọa độ tương ứng:

a) $Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_1x_2$, với $\{x_1 = y_1; x_2 = y_1 - y_2\}$.

b) $Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$,

với $\{x_1 = y_1 + 2y_2; x_2 = y_2; x_3 = y_2 - y_3\}$.

c) $Q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,

với $\{y_1 = x_1 + x_1 - 2x_3; y_2 = x_2; y_3 = x_2 - x_3\}$

Bài 12: Trong không gian hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

a) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 12x_1x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

b) $Q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

c) $Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

Bài 13: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ hãy đưa dạng toàn phương $Q(x)$ sau về dạng chính tắc:

a) $Q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$

b) $Q(x) = x_1x_2 + 2x_3x_4, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$

Bài 14: Xét xem các ánh xạ sau đây có phải là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ không? Nếu có, hãy lập ma trận của dạng song tuyến tính đó trong cơ sở chính tắc.

a) $f(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_2y_1, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$

b)
$f(x, y) = 3x_1y_1 - 5x_2y_2 + x_1y_2 + 7x_2y_1, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$

Bài 15: Cho dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$f(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$

a) Chứng tỏ rằng f là đối xứng.

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở $A = \{(1,0),(1,1)\}$.

c) Tìm ma trận của f trong cơ sở $B = \{(1,-1),(2,1)\}$.

d) Kiểm chứng rằng $[f]_B = P^T[f]_A P$ với $P = P_{AB}$.

Bài 16: Hãy biện luận tính suy biến hay không suy biến theo tham số thực *m* của các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

a) $q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xz+2myz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

b) $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2+2xy+2mxz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

c) $g(x,y,z)=3x^2+2y^2+mz^2+4xy+2xz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

Bài 17: Dùng thuật toán Lagrange để đưa các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định như sau về dạng chính tắc:

a) $q(x,y,z)=2x^2+y^2+2z^2-4xy-2yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

b) $q(x,y,z)=x^2+3y^2+6z^2+2xy+2xz-2yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

c) $q(x,y,z)=-x^2+2z^2-2xy+2xz+4yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

d) $q(x,y,z)=-x^2-2y^2-3z^2+2xy+2xz-4yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

Bài 19: Dùng thuật toán Jacobi để đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

a) $q(x,y)=2x^2+y^2-6xy,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$

b) $q(x,y)=x^2-3y^2+8xy,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$

c) $q(x,y,z)=x^2+4xy-2yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

d) $q(x,y,z)=-x^2+2z^2-2xy+2xz+4yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

Bài 20:Dùng định lý Sylvester để xét tính xác định dương, âm của các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ như sau:

a) $q(x,y,z)=3x^2+4y^2+5z^2+4xy-4yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

b) $q(x,y,z)=-x^2-5y^2-14z^2+2xy-4xz+16yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

c) $q(x,y,z)=2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-8yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

d) $q(x,y,z)=-x^2-2y^2-8z^2-2xy-2xz-6yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Bùi Xuân Hải, Trần Nam Dũng, Trịnh Thanh Đèo, Thái Minh Đường, Trần Ngọc Hội (2000),*Đại số tuyến tính*, Ban Xuất bản Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG-HCM.

[2]. Phan Hồng Trường (2001), *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB ĐHSP Hà Nội 2.

[3]. Nguyễn Duy Thuận, Phi Mạnh Ban, Nông Quốc Chinh (2003), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Sư Phạm Hà Nội.

[4]. Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương (2004), *Toán Cao cấp – Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG TP.HCM.

[5]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2006), *Toán học Cao cấp – Tập một: Đại số và hình học giải tích*, NXB Giáo dục.

[6]. Nguyễn Hữu Việt Hưng (2006), *Đại số đại cương*, NXB Giáo dục.

[7]. Lê Tuấn Hoa (2006), *Đại số tuyến tính: qua các ví dụ và bài tập*, NXB ĐHQG Hà Nội.

[8]. Đoàn Quỳnh, Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt (2007), *Giáo trình Đại số tuyến tính và hình học giải tích – in lần thứ 3*, NXB ĐHQG Hà Nội.

[9]. Richard Hill (1996), *Elementary Linear Algebra with Application*, third edition.

[10]. Howard Anton & Chris Rorres (2000), *Elementary Linear Algebra*, Application Version, 8th Edition.

[11]. Gilbert Strang (2005), *Linear Algebra and Its Applications*, 4th Edition, Brooks/Cole INDIA, ISBN: 9780030105678.

[12]. Gilbert Strang (2009), *Introduction to Linear Algebra*, 4th Edition, Wellesley-Cambridge Press, ISBN: 978-0-980232714.http://math.mit.edu/linearalgebra/

[13]. David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald (2016), *Linear Algebra and Its applications*, 5th Edition, Pearson Education, Inc.