TÍCH PHÂN SUY RỘNG

I. Tích phân suy rộng cận:

Dạng của tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, trong đó a, b là hằng số, f(x) là hàm khả tích trên miền lấy tích phân.

*Cách tính:

1/ $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx = I.$

Ta tính $\int_{a}^{t} f(x)dx = A(t).$

Suy ra $I = \lim_{t\to+\infty} A(t).$

*Nếu $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ tồn tại và có giá trị bằng hằng số C thì tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

* Nếu $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

VD: Tính $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Giải. Đặt $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Ta có $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2}.$

Ta có $\int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{0}^{t} = \arctan t - \arctan 0 = \arctan t.$

Suy ra $I = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \arctan t = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$

2/ Tính $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

Đặt $K = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{t\to+\infty} \int_{2}^{t} \frac{dx}{x^2+x-2}$

Ta có $\int_{2}^{t} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{t} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$.

Giả sử

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$\Leftrightarrow 1 = x(A+B) + (2A-B)(*)$$

Đồng nhất 2 vế của (*) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2}$

Ta có

$$\int_{2}^{t} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{t} \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int_{2}^{t} \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} \right) dx = \left(\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| \right)\Bigg|_{2}^{t}$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{2}^{t} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right| + \frac{1}{3}\ln 4$$

Suy ra $K = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right| + \frac{1}{3}\ln 4 \right) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln 4.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{b} f(x)dx = I.$

Ta tính $\int\limits_{t}^{b} f(x)dx = A(t).$

Suy ra $I = \lim\limits_{t\to-\infty} A(t).$

* Nếu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ tồn tại và có giá trị bằng hằng số C thì tích phân $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ hội tụ.

* Nếu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ phân kỳ.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$

* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ $\Leftrightarrow$ Cả hai tích phân $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ và $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ.

* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Leftrightarrow$ Nếu có ít nhất một trong hai tích phân $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ hoặc $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

*Chú ý: Với a>0 thì $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ hội tụ khi $s > 1$, phân kỳ khi $s \le 1$.

4. Tiêu chuẩn hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng cận:

a/ Tiêu chuẩn so sánh thông thường:

Giả sử cho ba hàm số $h(x), f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, +\infty)$ thỏa điều kiện:

$$0 \le h(x) \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a,+\infty)$$

$$\Rightarrow 0 \le \int_a^{+\infty} h(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx, \forall x \in [a,+\infty)$$

Khi đó, nếu:

. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

. $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của TPSR $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}$

Giải.

Ta thấy trên miền $[1,+\infty)$ thì $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}$ khả tích.

$\forall x \in [1,+\infty)$ ta có

$$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} = g(x)$$

$$\Rightarrow 0 < \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}dx(*)$$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}dx$ hội tụ vì sao $s = \frac{7}{6} > 1$ nên từ (*) ta có $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ hội tụ.

b/ Tiêu chuẩn so sánh giới hạn:

Nếu hai hàm số f(x) và g(x) không âm và khả tích trên $[a,+\infty)$, đồng thời có $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, với A là hằng số xác định $0 < A < +\infty$, đặc biệt là $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$ (tức là A=1) thì hai tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của TPSR $I=\int_1^{+\infty}\frac{16x+11}{x^3-x^2+2}dx$ và nếu hội tụ thì tính giá trị của I.

Giải.

Đặt $f(x)=\frac{16x+11}{x^3-x^2+2}$.

Khi $x\to+\infty$ thì $16x+11\to+\infty, x^3-x^2+2\to+\infty$ nên $16x+11, x^3-x^2+2$ là các VCL. Suy ra $16x+11\sim 16x, x^3-x^2+2\sim x^3$. Khi đó ta có:

$$\frac{16x+11}{x^3-x^2+2}\sim\frac{16x}{x^3}=\frac{16}{x^2}=g(x).$$

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{16x+11}{x^3-x^2+2}}{\frac{16}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16x+11}{x^3-x^2+2}.\frac{x^2}{16}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16x^3+11x^2}{16x^3-16x^2+32}=\frac{16}{16}=1$$

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx$ và $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Mà $\int_1^{+\infty}g(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{16}{x^2}dx=16\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ hội tụ vì s=2>1 nên $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ.

II. Tích phân suy rộng hàm:

Dạng của tích phân $\int_a^b f(x)dx$, trong đó a, b là các hằng số xác định, f((x) khả tích trên $[a,b]$ và $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$, tức là hàm số f(x) gián đoạn loại 2 tại $x=b$.

*Chú ý:

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$ hội tụ khi $\alpha<1$, phân kỳ khi $\alpha\ge1$.

Bài tập

Tính các tích phân suy rộng:

1. $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$
4. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$
6. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
7. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$
8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx$