Chương 2. ĐẠO HÀM – VI PHÂN

1/ Đạo hàm:

Cho hàm số $y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \Rightarrow y'' = (y')' \Rightarrow y^{(3)} = y''' = (y'')' \Rightarrow ... \Rightarrow y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$

2/ Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$.

Vi phân cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ là:

$$dy = y'dx \text{ hoặc } \begin{array}{l} df(x) = [f(x)]' dx \\ d[f(x)] = [f(x)]' dx \end{array}$$

VD: Cho hàm số $y = e^{2x} - 3x^2 + 5x + 20$. Tính dy và giá trị của dy tại x=2.

Giải.

$$\begin{aligned}
&y = e^{2x} - 3x^2 + 5x + 20 \\
&dy = y'dx = \left(e^{2x} - 3x^2 + 5x + 20\right)' dx = \left(2e^{2x} - 6x + 5\right)dx \\
&dy\big|_{x=2} = \left(2e^{2x} - 6x + 5\right)\Big|_{x=2} dx = \left(2e^{2.2} - 6.2 + 5\right)dx = \left(2e^4 - 7\right)dx \\
&dy(2) = \left(2e^{2.2} - 6.2 + 5\right)dx = \left(2e^4 - 7\right)dx
\end{aligned}$$

VD: Cho hàm số $g(x) = \sin 2x - \ln(4x) + 3x^4 - 1$. Tính vi phân cấp 1 của hàm số g(x).

Giải.

$$\begin{aligned}
d[g(x)] &= [g(x)]' dx = \left(\sin 2x - \ln(4x) + 3x^4 - 1\right)' dx \\
&= \left(2.\cos 2x - \frac{4}{4x} + 12x^3 - 0\right)dx = \left(2.\cos 2x - \frac{1}{x} + 12x^3\right)dx
\end{aligned}$$

VD: $d\left[x.e^{2x}\right] = \left[x.e^{2x}\right]' dx = \left(1.e^{2x} + x.2.e^{2x}\right)dx = \left(e^{2x} + 2x.e^{2x}\right)dx$

3/ Vi phân cấp 2 của hàm số $y = f(x)$ là:

$$d^2y = d[dy] = [dy]' dx = [y'dx]' dx = y''(dx)^2 \Rightarrow d^2y = y''(dx)^2$$

$$d^3y = d\left[d^2y\right] = \left[d^2y\right]' dx = \left[y''(dx)^2\right]' dx = y'''(dx)^3 \Rightarrow d^3y = y'''(dx)^3$$

....

$$d^ny = d\left[d^{(n-1)}y\right] = \left[d^{(n-1)}y\right]' dy = \left[y^{(n-1)}(dx)^{n-1}\right]' dx = y^{(n)}(dx)^n \Rightarrow d^ny = y^{(n)}(dx)^n$$

4/ Chuỗi Taylor, chuỗi Maclaurin:

*Chuỗi Taylor:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a,b) và có đạo hàm liên tục đến cấp (n+1) trên (a,b). Khi đó, khai triển chuỗi Taylor của f(x) tại điểm $x = x_0, x_0 \in (a,b)$, có dạng:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

trong đó $R_n(x)$ là phần dư.

*Chuỗi Maclaurin:

Khi ta khai triển chuỗi Taylor tại điểm $x = 0$ thì ta được Maclaurin, cụ thể ta có:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

5/ Cách tính giới hạn của các dạng vô định $0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$:

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}$ có một trong các dạng vô định $0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$. Khi đó, ta làm như sau:

Đặt $a = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln a = \lim\limits_{x \to x_0} \ln [f(x)]^{g(x)}$

$$\Rightarrow \ln a = \lim_{x \to x_0} g(x) \ln [f(x)] \qquad (1)$$

Ta tính $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln [f(x)]$ và giả sử ta tính được $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln [f(x)] = b.$ (2)

Khi đó, từ (1) và (2) suy ra: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^b$.

VD: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$ có dạng 1^{∞}.

Đặt $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln A=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$. (1)

Ta cần tính

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\cos x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(\cos x\right)\right)'}{\left(x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{1}=\frac{1}{\cos 0}.(-\sin 0)=1.0=0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\ln A=0\Rightarrow A=e^{0}=1$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1. Chứng minh hàm số $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}$ thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1-x^{2}\right)y'-xy=1$.

Bài 2. Chứng minh hàm số $y=x+\sqrt{x^{2}+1}$ thỏa mãn đẳng thức $\left(1+x^{2}\right)y''+xy'-y=0$.

Bài 3. Chứng minh hàm số $y=\sin\left(\ln x\right)+\cos\left(\ln x\right)$ thỏa mãn đẳng thức $x^{2}y''+xy'+y=0$.

Bài 4. Chứng minh hàm số $y=(\arctan x)^2$ thỏa mãn đẳng thức

$$\left(1+x^2\right)^2 y''+2x\left(1+x^2\right)y'=2.$$

Bài 5. Chứng minh hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ thỏa mãn đẳng thức

$$2\sqrt{1+x^2}\,y'=y \text{ và } 4\left(1+x^2\right)^2 y''+4xy'-y=0.$$

Bài 6. Cho $y=x^x$, với $x>0$. Tính $dy(1)$.

Bài 7. Cho $y=\sqrt{1+x^2}$. Tính d^2y.

Bài 8. Cho $y=x.\cos 2x$. Tính $d^{10}y$.

Bài 9. Tính các giới hạn sau:

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$

3/ $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\cot x$

6/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

7/ $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\ln x.$

8/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$

Bài 10. Khai triển chuỗi Taylor của các hàm số sau tại điểm $x=1$:

1/ $y=e^{2x}$

2/ $y=\sin 3x$

Bài 11. Khai triển chuỗi Maclaurin của các hàm số sau:

1/ $y=\cos 2x$

2/ $y=\frac{\sin x}{x}$