姓　名＿＿＿＿＿＿＿　密封装订线　学　号＿＿＿＿＿＿＿　密封装订线　班　级＿＿＿＿＿＿＿　密封装订线

西南交通大学 2022 - 2023 学年第（1）学期补考试卷

课程代码 MATH001912, ISCT030311　课程名称 复变函数与积分变换　考试时间 120 分钟

题　号	一	二	三	总成绩
得　分				

阅卷教师签字：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一、填空题 (每题 5 分，共 25 分)

1. $(1+i)^i=$ $\underline{e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}),\ k\in\mathbb{Z}}$（中间结果必须算出来，结果写成三角形式）.

2. 设 $f(z)$ 在全平面解析且实部是 x^2-y^2，则 $f'(1+2i)=$ $\underline{\quad 2+4i \quad}$.

3. 设 C 是正向圆周 $|z|=2$，则 $\oint_C \frac{\sin z+\bar{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z=$ $\underline{\quad 4\pi i \quad}$.

4. 若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则 $\mathcal{F}[tf(t)]=$ $\underline{\quad iF'(\omega) \quad}$.

5. $\mathrm{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^3},0\right]=$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

二、选择题 (每题 5 分，共 25 分)

1. 积分 $\oint_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=$ (C).

   (A) 0　(B) $-\frac{1}{6}$　(C) $-\frac{\pi i}{3}$　(D) $-\pi i$

2. 下列级数中绝对收敛的是 (D)

   (A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{2n}\right)$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$

   (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{5^n}\right)$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!}$

3. 设 $u(x,y)=e^{px}\sin y$ 为解析函数 $f(z)$ 的实部，那么 $p=$ (D)

   (A) 0　(B) $\pm i$　(C) ± 2　(D) ± 1

4. $z=0$ 是函数 $\tan\frac{1}{z}$ 的 (D)

(A) 可去奇点 (B) 本性奇点 (C) 极点 (D) 非孤立奇点

5. 设函数 $\frac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展式为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是 (B)

(A) $+\infty$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 1 (D) π

三、解答题 (每题 10 分, 共 50 分)

1. 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z+2}\,\mathrm{d}z$ 并证明 $\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.

解. (1) 被积函数 $\frac{1}{z+2}$ 奇点是 -2, 因此在被积曲线 $|z|=1$ 的内部是解析的. 根据柯西积分定理有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z+2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\begin{aligned}0 &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{i\theta}-2} ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta+2+i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

□

2. 用留数计算实积分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

解. 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}$ 且 $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\cdot\frac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{2}{3}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z+3i)(z+\frac{i}{3})} \\ &= \frac{2}{3}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\Big[\frac{1}{(z+3i)(z+\frac{i}{3})}, -\frac{i}{3}\Big] = \frac{2}{3}\cdot 2\pi i\cdot\frac{3}{8i} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

3. 求 $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $1<|z|<2$ 的洛朗级数.

解. 首先注意到

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}.$$

当 $1<|z|<2$ 时有

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}},$$

因此

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}},\quad 1<|z|<2.$$

□

4. 求 $f(t)=\sin^2(3t)$ 的傅里叶变换.

解. 由于

$$\sin^2(3t)=\frac{1-\cos 6t}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin^2(3t)]&=\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right]-\mathcal{F}\left[\frac{\cos 6t}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[1]-\frac{1}{2}\mathcal{F}[\cos 6t]\\&=\pi\delta(\omega)-\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+6)+\delta(\omega-6)].\end{aligned}$$

□

5. 用 Laplace 变换解积分方程: $y(t)+\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s=e^{-t}$.

解. 令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, 在方程两边做拉普拉斯变换得到

$$Y(s)+\frac{1}{s}Y(s)=\frac{1}{s+1}.$$

因此

$$Y(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}.$$

由拉普拉斯逆变换可得

$$y(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}.$$

□