密封装订线

姓 名________

密封装订线

学 号________

密封装订线

班 级________

西南交通大学 2020—2021 学年第 1 学期考试试卷

课程代码 MATH001912 课程名称 复变函数与积分变换考试时间 120 分钟

一、判断题（每小题 2 分，共 8 分）

1. 1 的傅里叶变换是 $\delta(t)$。 （ × ）

2. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点。 （ √ ）

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\sqrt{3}i)^n z^{2n}$ 的收敛半径是 0.5。 （ × ）

4. 存在以 x^2+y^2 为虚部的解析函数。 （ × ）

二、选择题（每小题 4 分，5 小题，共 20 分）

5. 下列函数中，解析的函数是（ A ）

A. $w=ix^2-iy^2-2xy$　　B. $w=x^3+xyi$

C. $w=ix^2-iy^2+2xy$　　D. $w=x^2+iy^2$

6. 调和函数 $v(x,y)=e^{-y}\sin x$ 为虚部的解析函数 $f(z)$ 是（ D ）

A. $-e^z$　　B. e^z　　C. $-e^{iz}$　　D. e^{iz}

7. 设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)(z-2)}$ 的泰勒级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n$，则该级数的收敛半径（ D ）.

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{2}$

8. $z=0$ 是 $\dfrac{z-\sin z}{z^7}$ 的（ C ）级极点

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

9. 函设 $f(t)=e^{-|t|}$，则 $f(t)$ 的傅的里叶变换为（ B ）

A. $\dfrac{2\omega}{1+\omega^2}$　　B. $\dfrac{2}{1+\omega^2}$　　C. $\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}$　　D. $\dfrac{2}{1-\omega^2}$

三、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

10. 函数 $f(z)=\bar{z}\cdot z^2$ 可导点的导数为____0____。

11. t 傅里叶变换为____$2\pi j\sigma'(\omega)$____。

12. 沿指定曲线正向的积分 $\oint_{|z|=2}\frac{z^{200}-z^{40}+1}{(z-i)^{2021}}dz=$____0____。

13. 函数 $f(z)=\frac{\cos 5z}{\sin 5z}$ 在 π 处的留数为____0.2____。

四、解答题（16 题 15 分，17 题 12 分，18 题 12 分，19 题 17 分，共 56 分）

14. 计算积分（1）$I=\oint_{|z|=2}\frac{1}{\sin(z+1)}dz$；（2）$J=\oint_{|z|=2}\sin(\frac{1}{z+1})dz$；（3）$K=\oint_{|z|=2}\frac{[\sin(z+1)]^4}{(z+1)^4}dz$。

解：(1)

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{1}{\sin(z+1)}dz=2\pi i\text{Res}[\frac{1}{\sin(z+1)},-1]$$ 2 分

$$=2\pi i\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{1}{\sin(z+1)}=2\pi i$$ 3 分

（2）$\sin(\frac{1}{z+1})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^{-2n-1}}{(2n+1)!},c_{-1}=1$ 2 分

$$J=\oint_{|z|=2}\sin(\frac{1}{z+1})dz=2\pi i\text{Res}[\sin(\frac{1}{z+1}),-1]$$ 3 分

$$=2\pi i$$

（3）因 -1 是 $f(z)=\frac{[\sin(z+1)]^4}{(z+1)^4}$ 可去奇点，$\text{Res}[f(z),-1]=0$ 3 分

$$K=\oint_{|z|=2}\frac{[\sin(z+1)]^4}{(z+1)^4}dz=0$$ 。 2 分

15. (1) 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)^3}$ 在 $3<|z-2|<\infty$ 展成洛朗级数；

（2）计算积分 $I=\oint_{|z-2|=4}\frac{1}{(z+1)(z-2)^3}dz$。

解：(1) 在 $3<|z-2|<\infty$ 内,有 $\left|\frac{3}{z-2}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)^3}=\frac{1}{(z-2)^3(z-2+3)}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^4(1+\frac{3}{z-2})}$$

4 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n(z-2)^{-n-4}$$ 3 分

（2）在（1）中 $c_{-1}=0$，$I=\oint_{|z-2|=4}\frac{1}{(z+1)(z-2)^3}dz=2\pi i c_{-1}=0$（也可用其它方法计算）。

5 分

16. 利用留数计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{x^4+1}+\frac{x\sin x}{x^2+9})\mathrm{d}x$。

解：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}\mathrm{d}x=K+M$

$$K=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$n=0$ ，$m=4$，$m-n=4\geq 2$ 1 分

因为 z^4+1 的零点为 $e^{\frac{\pi}{4}i},e^{\frac{3}{4}\pi i},e^{\frac{5}{4}\pi i},e^{\frac{7}{4}\pi i}$，所以 $\frac{1}{z^4+1}$ 在上半平面的奇点是 $e^{\frac{\pi}{4}i},e^{\frac{3}{4}\pi i}$ 且都为一级极点。 2 分

$$K=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x=2\pi i\left[\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{z^4+1},e^{\frac{\pi}{4}i})+\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{z^4+1},e^{\frac{3\pi}{4}i})\right]$$

$$=2\pi i(\frac{1}{4e^{\frac{3}{4}\pi i}}+\frac{1}{4e^{\frac{9}{4}\pi i}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$ 3 分

$$M=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}\mathrm{d}x$$

$n=0$ ，$m=2$，$m-n=2\geq 1$ 1 分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+9}dx=2\pi i\mathrm{Res}[\frac{ze^{iz}}{z^2+9},3i]=\frac{\pi}{e^3}i$$ 3 分

$$M=I_m(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx\ )=\frac{\pi}{e^3}$$

$$I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{e^3}=\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}+e^{-3})$$ 2 分

17. （1）求函数 $f(t)=[1+\delta(t+1)]\cos 2t$ 的傅里叶变换；

（2）用傅里叶变换的方法求下面微积分方程的解：

$x'(t)+2\int_{-\infty}^{+\infty}x(s)\delta(t-s)ds=e^{-3t}u(t),(-\infty<t<\infty)$，其中 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\1, & t\geq 0\end{cases}$。

解:(1) $F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[1+\delta(t+1)]\cos 2t e^{-j\omega t}dt$

2 分

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 2t e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)\cos 2t e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{2jt}+e^{-2jt})e^{-j\omega t}dt+\cos(-2)e^{j\omega}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-j(\omega-2)t}+e^{-j(\omega+2)t}\right]dt+\cos 2e^{j\omega}$$ 4 分

$$=\pi\delta(\omega-2)+\pi\delta(\omega+2)+\cos 2e^{j\omega}$$ 2 分

(2)设 $F\left[x(t)\right]=X(\omega)$.

$$j\omega X(\omega)+2X(\omega)=\frac{1}{3+j\omega},$$

$$X(\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

5 分

$$X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\, e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t)=(e^{-2t|}-e^{-3t})u(t)$$

4 分