西南交通大学 2022－2023 学年第(1)学期期末考试试卷

课程代码 MATH001912 课程名称 复变函数与积分变换 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：________________

密封装订线

姓 名________ 学 号________ 班 级________

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1．z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限，则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点．（ √ ）

2．若函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导，则它在该点的某个邻域内可以展开为幂级数.（ × ）

3. 存在以 x^2 为实部的解析函数。（ × ）

4. i^i 为实数。（ √ ）

5. 若z_1,z_2是不为0的复数，则有$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2$（ × ）

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

6. 设 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega-1)$，则 $F^{-1}[F(\omega)]$ 为（ C ）

A. 1　　B. $\delta(t-1)$　　C. e^{jt}　　D. e^{-jt}

7. $z=0$ 是 $\dfrac{z}{z-\sin z}$ 的（ C ）阶极点

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

8. 积分 $\oint_{|z|=1}\dfrac{zdz}{|z|}$ 的值等于（ A ）

（A）0 ；　（B）$-2\pi i$ ；　（C）$2\pi i$ ；　（D）－1

9. 下列各函数中，在复平面上解析的函数是（ A ）

(A) $(-ix^2+iy^2+2xy)^3$；　(B) $|z^3|$；　(C) xi ；　(D) $3x-2yi$

10. 洛朗级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z-3)^{-n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{z}{3})^n$ 的收敛域是（ B ）

A. $\frac{1}{3}<|z-3|<1$　　B. $1<|z-3|<3$

C. $0<|z-3|<1$　　D. $0<|z-3|<3$

11. 设 $z=1$ 为函数 $f(z)$ 的5级极点，那么 $\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},1]=$ （ B ）

A. 5　B. -5　C. 4　D. -4

三、简答题（每小题 6 分，共 18 分）

12. 计算积分 $I=\oint_{|z|=0.5}\frac{1}{z}[1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^4}]dz$

解：

$$I=\oint_{|z|=0.5}\frac{1}{z}[1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^4}]dz$$
$$=2\pi i\,\mathrm{Res}(1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^4},0)$$

3 分

$$=2\pi i[1+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^4}]|_{z=0}$$
$$=6\pi i$$

6 分

13. 若函数 $f(z)=u+iv$ 解析，且满足 $u=2xy$ 和 $f(0)=0$，求 $f(z)$.

解：

解：$u_x=2y$

$u_y=2x$

$$f'(z)=u_x-iu_y$$
$$=2y-2xi=-2iz$$

4 分

$f(z)=-iz^2+c$，$\because f(0)=0$

$f(z)=-iz^2$

6 分

14．求函数 $f(t)=\sin^2 t$ 的拉氏变换.

解： $f(t)=\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}e^{2jt}-\dfrac{1}{4}e^{-2jt}$

2 分

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{2}L[1]-\frac{1}{4}L[e^{2jt}]-\frac{1}{4}L[e^{-2jt}]$$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{1}{4(s-2j)}+\frac{1}{4(s-2j)}$$

$$=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(s^2+4)}$$

6 分

四、解答题（15 题 8 分，16、17、18、19 题每题 10 分，共 48 分）

15. 将 $f(z)=\dfrac{3}{(z-3)(z-6)}$ 分别在圆环域 $1<|z-4|<2$ 展开成洛朗级数。

解：

$$1<|z-4|<2 \Rightarrow \left|\frac{1}{z-4}\right|<1,\left|\frac{z-4}{2}\right|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{z-6}-\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z-4}{2}}-\frac{1}{z-4}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-4}}$$

4 分

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-4}{2}\right)^n-\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-4}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-4)^{-n-1}$$

8 分

16. 利用留数计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$。

解：

$n=0$ ， $m=4$， $m-n=4\geq 2$

因为 z^2+1 的零点为 $i,-i$，所以 $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ 在上半平面的奇点 i 且为二级极点。

3 分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=2\pi i\operatorname{Re}s\left(\frac{1}{(z^2+1)^2},i\right)$$

6 分

$$=2\pi i\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2\cdot\frac{1}{(z^2+1)^2}]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z+i)^{-2}$$

$$=-4\pi i\lim_{z\to i}(z+i)^{-3}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

10 分

17. 求 $f(t)=e^{-3|t|}+4(\sin t)^2$ 的傅里叶变换。

解：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}(2-2\cos 2t)dt$

2 分

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt+2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}+e^{-2\mathrm{j}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(3+\mathrm{j}\omega)t}dt+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}\omega-3)t}dt+4\pi\delta(\omega)-\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-2)t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+2)t}]\mathrm{d}t$$

6 分

$$=\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega-3}+4\pi\delta(\omega)-2\pi[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)]$$

$$=\frac{6}{9+\omega^2}+4\pi\delta(\omega)-2\pi[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)]$$

10 分

18. 计算积分 $I=\int_{|z|=3}[\frac{e^z\sin z}{z^2+16}+\frac{1}{(z+4)(z+2)z^2}]dz$

解：

$$I=0+\int_{|z|=3}\frac{1}{z^2(z+4)(z+2)}dz=\int_{|z|=3}\frac{1}{z^2(z+4)(z+2)}dz$$

3 分

$$=2\pi i[\mathrm{Res}(f(z),0)+\mathrm{Res}(f(z),-2)]$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to 0}(\frac{1}{(z+4)(z+2)})'+\frac{1}{8}]$$

6 分

$$=2\pi i[\mathrm{Res}(f(z),0)+\mathrm{Res}(f(z),-2)]=2\pi i[\lim_{z\to 0}(\frac{1}{(z+4)(z+2)})'+\frac{1}{8}]$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to 0}\frac{-z-2-z-4}{(z+4)^2(z+2)^2}+\frac{1}{8}]=2\pi i[\frac{1}{8}-\frac{3}{32}]=\frac{\pi i}{16}$$

10 分

19. 用拉氏变换解微分方程 $y' + y = t + e^{-t} + 1, y(0) = 1$ 。

解：令 $Y(s) = L[y(t)]$

$$sY(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

5 分

$$Y(s) = (\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s})\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = t + e^{-t} + te^{-t}$$

10 分