Aufgabe 2 (Probability)

Montag, 28. März 2022 00:24

② Bayes Theorem

	$Y=1$	$\bar{Y}=0$	
$X=1$	2,85	0,15	3
$\bar{X}=0$	9,7	87,3	97
	12,55	87,45	100

→ Werte in %

	Y	$\bar{Y}$	
X	28,5	1,5	30
$\bar{X}$	7	63	70
	35,5	64,5	100

② geg: $P(Y|X) = 0{,}9$; $P(\bar{Y}|\bar{X}) = 0{,}95$ $\rightarrow$ $P(\bar{Y}/X) = 0{,}1$; $P(Y/\bar{X}) = 0{,}05$

$Y=1$, $\bar{Y}=0$, $X=1$, $\bar{X}=0$

$P(X) = 0{,}03$

$P(\bar{X}) = 0{,}97$

$\rightarrow P(Y,\bar{X}) = P(\bar{X},Y) = P(Y/\bar{X}) \cdot P(\bar{X}) = 0{,}0485$

$\rightarrow P(\bar{Y},X) = P(X,\bar{Y}) = P(\bar{Y}/X) \cdot P(X) = 0{,}003$

$P(X,Y) = P(Y/X) \cdot P(X) = 0{,}027$

$P(Y) = \sum_{x \in X} P(Y,x) = P(Y,\bar{X}) + P(Y,X) = 0{,}0485 + 0{,}027 = 0{,}0755$

$P(\bar{Y}) = 1 - P(Y) = 0{,}9245$

a)

ges:

$P(\bar{X}|Y) = \frac{P(Y,\bar{X})}{P(Y)} = \frac{P(Y/\bar{X}) \cdot P(\bar{X})}{P(Y)} = 0{,}6424$ ✓

$P(X|\bar{Y}) = \frac{P(\bar{Y},X)}{P(\bar{Y})} = \frac{P(\bar{Y}/X) \cdot P(X)}{P(\bar{Y})} = 0{,}003245$ ✓

Allgemein:

$$P(\bar{X}|Y) = \frac{P(Y/\bar{X}) \cdot P(\bar{X})}{\underbrace{P(Y/\bar{X}) \cdot P(\bar{X}) + P(Y/X) \cdot P(X)}_{P(Y)}}$$

$$P(X|\bar{Y}) = \frac{P(\bar{Y}/X) \cdot P(X)}{1 - P(Y)}$$

b) geg: $P(X) = 0{,}3$

$P(\bar{X}) = 0{,}7$

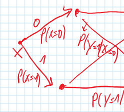
$P(\bar{X}/Y) = 0{,}1148$ ✓

$P(X/\bar{Y}) = 0{,}04317$ ✓

② : $X=0$ … $X=1$ …

$P(X=1/Y=1) =$ …

1) $P(Y=1) = \sum_{x=0}^{1}$ …



2) $P(X=1, Y=1) =$ …

L: Fall I: a)

$P(Y=1) = 0{,}0$…

$P(X=0/Y=1) =$ …

$P(X=1/Y=0) =$ …

L: Fall II: b)

$P(Y=1) = 0{,}3$…

$P(X=0|Y=1)$ …

$P(X=1/Y=$…

---

⑤ Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung ein Spezialfall der Multinomialverteilung ist.

Multinomialverteilung:

$$f_{X_1,\dots,X_k}(x_1,\dots,x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_k!} r_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot r_k^{x_k}$$

Binomialverteilt:

$$f_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

→ Nur 2 Sorten x_1 und x_2

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2!} \cdot r_1^{x_1} \cdot r_2^{x_2} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

mit:

$r_1 = p$

$r_2 = (1-p)$ (Gegenereignis)

$x_1 = k$

$x_2 = n-k$ (bleibt übrig)

Einsetzen

① Würfelspiel

ZV_1: X Würfel

ZV_2: Y Anzahl von Köpfe

} $P(X,Y)$

X:

$x=1$: Werfe 1 Münze : $Y|X=1 \sim Bin(1, p=0{,}5)$

$x=2$ " 2 Münzen $Y/X=2 \sim Bin(2, p=0{,}5)$

⋮ ⋮

$x=6$: Werfe 6 Münzen $Y/X=6 \sim Bin(6, p=0{,}5)$

$$P(Y) = \sum_{x=1}^{6} P(X,Y) = \sum_{x=1}^{6} P(Y/X) \cdot P(X) = \sum_{x=1}^{6} \frac{P(Y|X)}{6}$$

esund $\quad Y=0$: Test negativ

rank $\quad Y=1$: Test positiv

$\frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)}$ $\rightarrow$ (1) & (2) einsetzen

$P(X,Y) = P(Y=1 \mid X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=1 \mid X=1) \cdot P(X=1)$

$\rightarrow Y=0$

$\rightarrow Y=1$

$X=1)$

$P(Y=1 \mid X=1) \cdot P(X=1)$

$8 = 8\%$

$0{,}64 = 64\%$

$0{,}00$ (auf 2 Kommastellen genau)

$< 0{,}005)$

$1 = 31\%$

$= 0{,}11 = 11\%$

$) = 0{,}04 = 4\%$