НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
Кафедра информатики и процессов управления (№17)

Дисциплина «Информатика» (основной уровень), 1-й курс, 1-й семестр.

Методические указания

Тематическое занятие 6

Реализация вычислительных методов на компьютере.

Содержание

Численное решение уравнений

Постановка задачи и обоснование решения

Допустим необходимо найти решение нелинейного уравнения $f(x)=0$. Это значит нужно определить все значения аргумента x, при которых значения нелинейной функции $f(x)$ равны нулю.

Рассмотрим один из методов решения – метод ***деления отрезка пополам***, который также называют методом ***бисекции*** или ***дихотомии.*** Он основывается на следующих рассуждениях.

Если функция $f(x)$ – непрерывна на некотором интервале $[a,b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A<B$, то по теореме Больцано–Коши о промежуточном значении функции $f(x)$ принимает любое значение на $[A,B]$. То есть для любого $C\in[A,B]$ существует $c\in[a,b]$ такое, что $f(c)=C$.

В случае $f(x)=0$ достаточно, чтобы $f(a)$ и $f(b)$ имели разный знак, тогда $\exists c\in[a,b]:\ f(c)=0$.

Метод деления пополам

Таким образом, при поиске решения уравнения $f(x)=0$ на концах отрезка $[a,b]$ функция должна быть **противоположных знаков.**

Разделим отрезок $[a,b]$ **пополам** и возьмём ту из половинок, на концах которой функция $f(x)$ по-прежнему принимает значения противоположных знаков. На рис 6.1 длина отрезка $L=b-a$, а середина отрезка $c=(a+b)/2$.

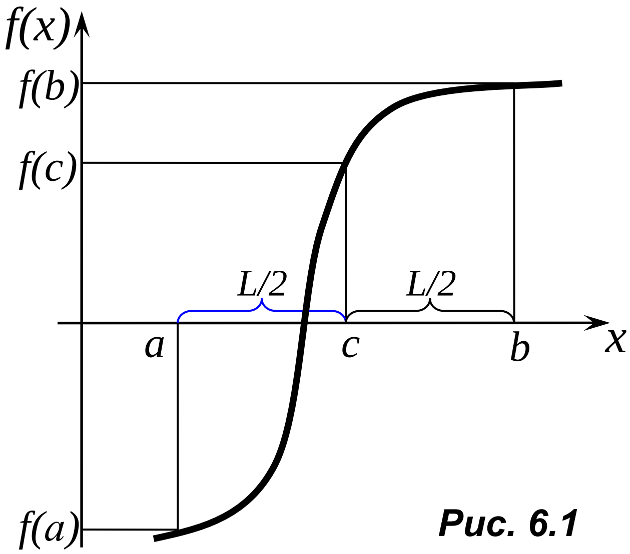

Рис. 6.1

Здесь $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Поскольку $f(c)>0$, то необходимо взять отрезок $[a,c]$.

Для выбранного отрезка необходимо **повторить** описанную процедуру деления пополам, как показано на рис. 6.2.

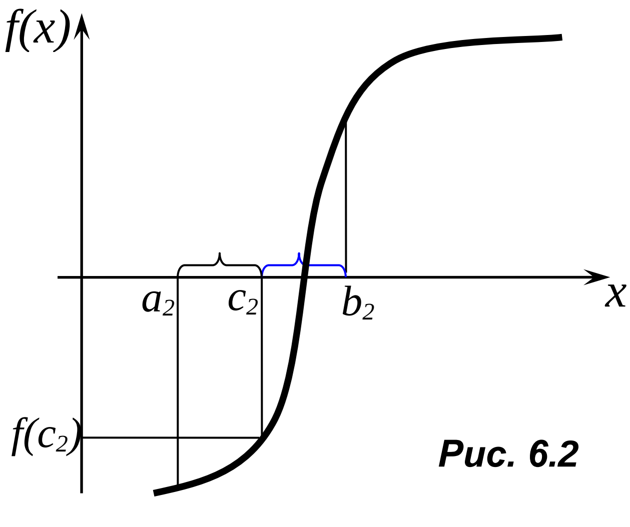

Рис. 6.2

Процедуру деления отрезка пополам следует продолжать **до достижения заданной точности.**

Точность вычислений

Точность вычислений можно задать двумя способами:

- точность по оси абсцисс ε_x, когда требуется найти решение исходного уравнения в пределах заданной погрешности
$$x = x_0 \pm \varepsilon_x ,$$
изображенной на рис. 6.3;
- точность по оси ординат ε_f, которая достигается при вычислениях значения функции в уравнении $f(x)=0$, при этом решение лежит в пределах погрешности
$$x = x_0 \pm \frac{L}{2^N} ,$$
где N – количество выполненных итераций, на которых происходило деление отрезка пополам (см. рис. 6.4).

Для обоих этих случаев погрешности найденного решения x могут различаться.

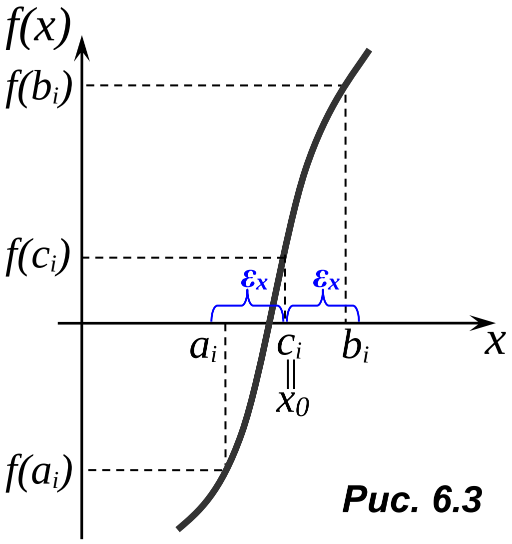

Рис. 6.3

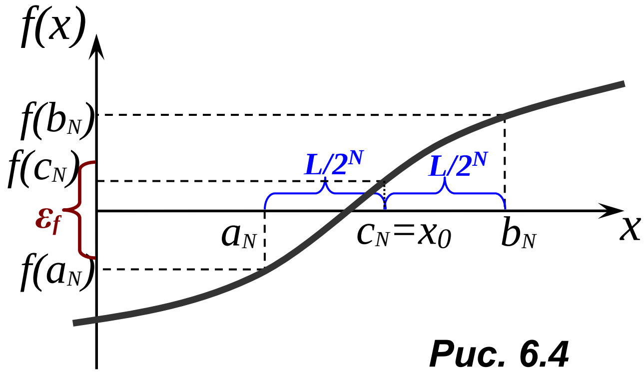

Рис. 6.4

Другие методы

Рассмотренный метод деления пополам – один из простейших для численного решения нелинейных уравнений. Существуют другие методы:

- *метод простой итерации (или последовательных приближений),*
- *метод хорд (или секущих),*
- *метод Ньютона (метод касательных),*

а также их модификации и иные методы.

Каждый из них обладает своими **ограничениями** и **условиями применения.**

Приближенные числа

Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом a называют число, незначительное отличающееся от точного числа A и заменяющее его в вычислениях.

Абсолютная погрешность приближенного числа:

$$\Delta = |A - a|.$$

Если число A не известно, то пользуются понятием *предельной абсолютной погрешности* Δ_a:

$$\Delta = |A - a| \leqslant \Delta_a \ .$$

Следовательно, точное число заключено в пределах:

$$a - \Delta_a \leqslant A \leqslant a + \Delta_a \ ,$$

или для краткости записывают:

$$A = a \pm \Delta_a \ .$$

На практике в качестве значения Δ_a выбирают наименьшее возможное число.

Абсолютная погрешность не достаточна для характеристики точности измерений или вычислений. Поэтому часто используют *относительную погрешность*:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \ .$$

Значащие цифры

На практике приближенные числа представляют собой конечные десятичные дроби. Дробь, содержащая n цифр, может быть представлена:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} \qquad (\alpha_m \neq 0),$$

где $\alpha_i \ \ (i = m, m-1, \ldots, m-n+1)$ – *значащие цифры* приближенного числа a.

При позиционной записи таких дробей в десятичной системе счисления иногда приходится использовать лишние нули в начале или в конце числа. Примеры:

$$x = 7 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} = \underline{0}, \underline{0}\underline{0}7010$$

$$y = 2 \cdot 10^9 + 0 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 = 2\ 003\ 0\underline{0}\underline{0}\ \underline{0}\underline{0}\underline{0}$$

Здесь лишние нули (подчеркнуты) не являются значащими.

Чтобы избежать неопределенности с нулями принято записывать только значащие цифры (мантиссу) и указывать десятичный порядок числа:

$$x = 7{,}010 \cdot 10^{-3}$$

$$y = 2{,}0030 \cdot 10^9$$

Здесь нули в конце мантиссы являются значащими цифрами.

Верные значащие цифры

Первые n значащих цифр приближенного числа являются *верными*, если абсолютная погрешность этого числа **не превышает половины единицы** разряда, выражаемого n-й значащей цифрой. То есть, если

$$\Delta = \left|A - a\right| = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$$

то все n значащих цифр $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_{m-n+1}$ являются верными.

Например, для точного числа $A = 35,97$ число $a = 36,00$ является приближенным с тремя верными знаками, поскольку

$$\left|A - a\right| = 0,03 < 0,05 = \frac{1}{2} \cdot 0,1$$