

Methods of optimization

Roman Nichiporuk

Lab number 6 Task number 9

1 Задание

$$(4(17+5) \bmod 44)+1 = 1$$

По исходным данным, представленным в табл. 1.40, сформировать задачи ЛП на максимум в канонической форме и решить их.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = (-4 \ 25 \ 6)^T, c = (6 \ 3 \ -2 \ -1 \ -14)^T, d_* = (1 \ -1 \ -2 \ 1 \ -3)^T, d^* = (4 \ 3 \ 2 \ 4 \ 1)^T$$

2 Первая Фаза

Возьмем: $\bar{x} = (1 \ -1 \ -2 \ 1 \ -3)^T$.

Посчитаем вектор невязки:

$$\omega = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$I_B = (6 \ 7 \ 8)^T, I_i = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)^T, c = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1)^T,$$

Получаем новую задачу: $-x_6 - x_7 - x_8 \rightarrow \max$.

Первая итерация:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Найдем потенциал $A^T u = c$:

$$u = (-1 \ -1 \ -1)^T$$

$$2) \Delta_j = c_j = a_j^T u$$

$1: \Delta_1 = 0 - (0 \ 3 \ 0)(-1 \ -1 \ -1)^T = 3 \rightarrow$ критерии оптимальности не выполнен.
 $3) j_0 = 1 \rightarrow l_{j_0} = \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_1 = \text{sign}(3) = 1.$
 $l_{2,3,4,5} = 0$
 $Al_B = -a_{j_0} \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_6 = 0, l_7 = -3, l_8 = 0.$
 $4) \theta_{2,3,4,5,6,7} = \infty,$
 $\theta_1 = 3$
 $\theta_7 = \frac{14}{3}.$
 $\theta = 3, j_* = 1, J_B = \{6, 7, 8\}$
 $\bar{x} = (1 \ -1 \ -2 \ 1 \ -3 \ 1 \ 5 \ 11)^T$

Вторая итерация:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1) \text{Найдем потенциал } A^T u = c:$
 $u = (-1 \ -1 \ -1)^T$
 $2) \Delta_j = c_j = a_j^T u$
 $1: \Delta_1 = 0 - (0 \ 3 \ 0)(-1 \ -1 \ -1)^T = 3 \ 2: \Delta_2 = 0 - (0 \ 0 \ -1)(-1 \ -1 \ -1)^T = -1 \ 3: \Delta_3 = 0 - (0 \ 2 \ 3)(-1 \ -1 \ -1)^T = 5 \rightarrow$ критерии оптимальности не выполнен.
 $3) j_0 = 3 \rightarrow l_{j_0} = \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_1 = \text{sign}(5) = 1.$
 $l_{1,2,4,5} = 0$
 $Al_B = -a_{j_0} \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_6 = 0, l_7 = -2, l_8 = -3.$
 $4) \theta_{1,2,4,5,6} = \infty,$
 $\theta_3 = 4$
 $\theta_7 = \frac{5}{2}.$
 $\theta_8 = \frac{11}{3}.$
 $\theta = 7, j_* = 7, J_B = \{3, 7, 8\}$
 $\bar{x} = (1 \ -1 \ 0.5 \ 1 \ -3 \ 1 \ 0 \ 3.5)^T$

Третья итерация:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1) \text{Найдем потенциал } A^T u = c:$
 $u = (-1 \ 1.5 \ -1)^T$
 $2) \Delta_j = c_j = a_j^T u$
 $1: \Delta_1 = 0 - (0 \ 3 \ 0)(-1 \ 1.5 \ -1)^T = -4.5 \rightarrow$ критерии оптимальности не выполнен.
 $3) j_0 = 1 \rightarrow l_{j_0} = \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_1 = \text{sign}(-4.5) = -1.$
 $l_{2,4,5,7} = 0$
 $Al_B = -a_{j_0} \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_6 = 0, l_7 = -4.5, l_8 = 0.$
 $4) \theta_{2,3,4,5,6,8} = \infty,$
 $\theta_1 = 3$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \frac{8}{3} \\ \theta_7 &= \frac{7}{9} \\ \theta &= 7, j_* = 7, J_B = \{1, 3, 6\} \\ \bar{x} &= \left(\frac{29}{9} -1 \frac{5}{3} 1 -3 1 0 0\right)^T\end{aligned}$$

Четвертая итерация:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}1) & \text{Найдем потенциал } A^T u = c: \\ u &= (-1 \ 0 \ 0)^T \\ 2) & \Delta_j = c_j = a_j^T u \\ 2: \Delta_2 &= 0 - (0 \ 0 \ -1)(-1 \ 0 \ 0)^T = 0 \quad 4: \Delta_4 = 0 - (1 \ 0 \ 0)(-1 \ 0 \ 0)^T = 1 \rightarrow \text{критерии} \\ & \text{оптимальности не выполнен.} \\ 3) & j_0 = 4 \rightarrow l_{j_0} = \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_1 = \text{sign}(1) = 1. \\ l_{2,5,7,8} &= 0 \\ Al_B &= -a_{j_0} \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_6 = 1, l_7 = 0, l_8 = 0. \\ 4) & \theta_{1,2,5,6,7,8} = \infty, \\ \theta_4 &= 3 \\ \theta_6 &= 1 \\ \theta &= 1, j_* = 6, J_B = \{1, 3, 4\} \\ \bar{x} &= \left(\frac{29}{9} -1 \frac{5}{3} 2 -3 0 0 0\right)^T\end{aligned}$$

Пятая итерация:

Все условия выполняются, фаза завершена.

3 Вторая Фаза

Первая итерация:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}c &= (6 \ -2 \ -1)^T \\ 1) & \text{Найдем потенциал } A^T u = c: \\ u &= (-1 \ 2 \ -2)^T \\ 2) & \Delta_j = c_j = a_j^T u \\ 2: \Delta_2 &= 0 - (0 \ 0 \ -1)(-1 \ 2 \ -2)^T = 1 \rightarrow \text{критерии оптимальности не выполнен.} \\ 3) & j_0 = 2 \rightarrow l_{j_0} = \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_1 = \text{sign}(1) = 1. \\ l_5 &= 0 \\ l_1 &= -\frac{2}{9}, l_3 = \frac{1}{3}. \\ \theta_1 &= \frac{7}{2} \\ \theta_2 &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= 11 \\ \theta &= \frac{7}{2}, j_* = 2, J_B = \{2, 3, 4\} \\ \bar{x} &= (4 \ 2.5 \ 0.5 \ 2 \ -3)^T\end{aligned}$$

Вторая итерация:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}c &= (3 \ -2 \ -1)^T \\ 1) &\text{Найдем потенциал } A^T u = c: \\ u &= (-1 \ 2 \ -2)^T \\ 2) &\Delta_j = c_j - a_j^T u \\ 2: &\Delta_2 = 0 - (0 \ 0 \ -1)(-1 \ 2 \ -2)^T = 1 \rightarrow \text{критерии оптимальности не выполнен.} \\ 3) &j_0 = 2 \rightarrow l_{j_0} = \text{sign}(\Delta_{j_0}) \rightarrow l_1 = \text{sign}(1) = 1. \\ l_5 &= 0 \\ l_1 &= -\frac{2}{9}, l_3 = \frac{1}{3}. \\ \theta_1 &= 10 \\ \theta_2 &= 4 \\ \theta_3 &= 1 \\ \theta &= 1, j_* = 3, J_B = \{1, 2, 4\} \\ \bar{x} &= (3 \ 0 \ 2 \ 2 \ -3)^T\end{aligned}$$

Третья итерация:

Все условия выполняются, фаза завершена. Решение завершено, получено оптимальное решение.

$$\text{Ответ: } \bar{x} = (3 \ 0 \ 2 \ 2 \ -3)^T.$$