Układy równań liniowych – metody iteracyjne.

Bartłomiej Kozera

1. Informacje techniczne

Obliczenia zostały wykonane na 64 bitowej wersji systemu Windows 10 Pro, z procesorem Ryzen7 1700X oraz z 16 GB pamięci RAM. Biblioteka Pandas odpowiada za wypisywanie danych na standardowe wyjście oraz zapis danych do pliku formatu .xlsx. Biblioteka numpy odpowiada za działania na macierzach, typowania zmiennych w tym języku. Operacje wykonywane były na liczbach typu float64.

2. Dane

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{ij} = (-1)^j \frac{m}{j} \; dla \; j > i \\ a_{i,i-1} = \frac{m}{i} \\ a_{ij} = 0 \end{cases}$$

k = 7, m = 1.

Wektor x jest dowolną n–elementową permutacją ze zbioru { 1, -1 }.

3. Metoda Jacobiego

Wprowadźmy oznaczenia dla macierzy: D - macierz diagonalna, L - macierz poddiagonalna, U - macierz naddiagonalna.

Rozważamy układ równań postaci Ax = b, gdzie A = D + L + U. Szukamy wektora rozwiązań za pomocą kolejnych iteracyjnych przybliżeń x (n+1). Można zatem zapisać:

$$(\mathrm{D} + \mathrm{L} + \mathrm{U})\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

$$\mathrm{D}x^{(\mathrm{t}+1)} = -(\mathrm{L} + \mathrm{U})x^{(\mathrm{t})} + \mathrm{b}$$

$$x^{(\mathrm{t}+1)} = D^{(-1)} * \left[\mathrm{b} - (\mathrm{L} + \mathrm{U})x^{(\mathrm{t})}\right]$$

Powyżej postał nam wzór macierzowy tej metody. Wzór roboczy wygląda następująco:

$$x^{(\mathrm{t}+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^t\right] \quad a_{ii} \neq 0, \forall \mathrm{i} \in 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

4. Zadanie 1

Rozwiązując układ równań przyjmuję kolejno warunki stopu:

1. $\left\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right\| < \rho$

2$\left\| Ax^{(i)} - b \right\| < \rho$

Pomiary wykonywane były dla macierzy o rozmiarach 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200, 300, 500.

Wyniki obliczane dla wektora zerowego.

Rho dla jakich wykonywane były eksperymenty to $10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}, 10^{-15}$. Błędy oraz wszystkie inne normy obliczane były jako norma Euklidesowej:

$$\|A\| = \left[\sum_i abs(a_i)^2 \right]^{1/2}$$

Przyjęta maksymalna liczba iteracji 2000.

Tabela 1. Wyniki obliczeń dla ρ równego 10^{-3}.

n	Liczba iteracji dla warunku 1	Liczba iteracji dla warunku 2	Czas dla warunku 1 [s]	Czas dla warunku 2 [s]	Błąd dla warunku 1	Błąd dla warunku 2
3	4	5	1,62E-04	1,06E-04	6,25E-04	3,89E-05
4	4	5	7,89E-05	9,02E-05	6,97E-04	4,11E-05
5	4	5	7,20E-05	8,74E-05	7,36E-04	4,19E-05
7	4	5	7,53E-05	9,67E-05	7,65E-04	4,31E-05
10	4	5	7,70E-05	8,56E-05	7,72E-04	4,54E-05
12	4	5	6,94E-05	8,80E-05	7,74E-04	4,72E-05
15	4	5	8,71E-05	9,52E-05	7,79E-04	4,99E-05
20	4	5	7,64E-05	9,41E-05	7,87E-04	5,40E-05
30	4	5	8,11E-05	9,75E-05	8,19E-04	6,11E-05
50	4	5	7,64E-05	9,32E-05	9,07E-04	7,18E-05
70	5	5	1,10E-04	1,19E-04	7,98E-05	7,98E-05
100	5	5	3,26E-04	3,99E-04	8,88E-05	8,88E-05
150	5	5	3,88E-04	4,47E-04	9,96E-05	9,96E-05
200	5	5	7,77E-04	4,66E-04	1,08E-04	1,08E-04
300	5	5	1,08E-03	1,16E-03	1,19E-04	1,19E-04
500	5	5	1,53E-03	1,82E-03	1,34E-04	1,34E-04

Tabela 2. Wyniki obliczeń dla ρ równego 10^{-5}.

n	Liczba iteracji dla warunku 1	Liczba iteracji dla warunku 2	Czas dla warunku 1 [s]	Czas dla warunku 2 [s]	Błąd dla warunku 1	Błąd dla warunku 2
3	6	7	1,86E-04	1,31E-04	2,84E-06	2,10E-07
4	6	7	9,86E-05	1,13E-04	3,12E-06	2,18E-07
5	6	7	9,17E-05	1,10E-04	3,00E-06	2,34E-07
7	6	7	9,32E-05	1,20E-04	2,95E-06	2,42E-07
10	6	7	9,04E-05	1,09E-04	2,90E-06	2,54E-07
12	6	7	9,01E-05	1,10E-04	2,89E-06	2,61E-07
15	6	7	8,88E-05	1,11E-04	2,90E-06	2,70E-07
20	6	7	9,04E-05	1,10E-04	2,93E-06	2,82E-07
30	6	7	9,39E-05	1,17E-04	3,03E-06	2,99E-07
50	6	7	9,99E-05	1,20E-04	3,24E-06	3,22E-07
70	6	7	1,93E-04	1,31E-04	3,42E-06	3,38E-07
100	6	7	3,75E-04	5,52E-04	3,64E-06	3,55E-07
150	6	7	5,61E-04	5,76E-04	3,93E-06	3,76E-07
200	6	7	7,26E-04	6,69E-04	4,15E-06	3,90E-07
300	6	7	1,04E-03	1,60E-03	4,48E-06	4,11E-07
500	6	7	1,98E-03	2,66E-03	4,93E-06	4,38E-07

Tabela 3. Wyniki obliczeń dla ρ równego 10^{-5} dla wektora początkowego postaci [100, …].

n	Liczba iteracji dla warunku 1	Liczba iteracji dla warunku 2	Czas dla warunku 1 [s]	Czas dla warunku 2 [s]	Błąd dla warunku 1	Błąd dla warunku 2
3	7	7	7,26E-04	5,10E-04	9,39E-07	9,39E-07
4	7	8	6,27E-04	5,92E-04	2E-06	1,01E-07
5	7	8	4,39E-04	6,28E-04	2,34E-06	7,92E-08
7	7	8	9,39E-04	8,88E-04	2,19E-06	8,08E-08
10	7	8	7,78E-04	6,43E-04	2,98E-06	1,13E-07
12	7	8	5,48E-04	5,22E-04	2,8E-06	1,04E-07
15	7	8	1,10E-03	8,90E-04	2,1E-06	7,61E-08
20	7	8	1,14E-03	9,05E-04	2,44E-06	8,78E-08
30	7	8	1,43E-03	2,10E-03	2,28E-06	8,16E-08
50	7	8	1,47E-03	1,57E-03	2,17E-06	7,77E-08
70	7	8	2,09E-03	1,96E-03	2,13E-06	7,65E-08
100	7	8	2,91E-03	3,67E-03	2,11E-06	7,58E-08
150	7	8	3,67E-03	3,95E-03	2,1E-06	7,55E-08
200	7	8	5,70E-03	4,71E-03	2,11E-06	7,55E-08
300	7	8	9,34E-03	6,48E-03	2,11E-06	7,57E-08
500	7	8	1,45E-02	1,43E-02	2,13E-06	7,63E-08

Tabela 4. Wyniki obliczeń dla ρ równego 10^{-8}.

n	Liczba iteracji dla warunku 1	Liczba iteracji dla warunku 2	Czas dla warunku 1 [s]	Czas dla warunku 2 [s]	Błąd dla warunku 1	Błąd dla warunku 2
3	9	9	3,27E-04	1,59E-04	1,05E-09	1,05E-09
4	9	9	1,30E-04	1,43E-04	1,12E-09	1,12E-09
5	9	9	1,28E-04	1,42E-04	1,16E-09	1,16E-09
7	9	9	1,42E-04	2,62E-04	1,17E-09	1,17E-09
10	9	9	1,85E-04	1,90E-04	1,19E-09	1,19E-09
12	9	9	1,74E-04	1,99E-04	1,19E-09	1,19E-09
15	9	9	1,76E-04	1,94E-04	1,20E-09	1,20E-09
20	9	9	1,79E-04	1,96E-04	1,20E-09	1,20E-09
30	9	9	1,74E-04	1,98E-04	1,21E-09	1,21E-09
50	9	9	2,49E-04	2,22E-04	1,23E-09	1,23E-09
70	9	9	2,12E-04	1,90E-04	1,24E-09	1,24E-09
100	9	9	7,08E-04	1,22E-03	1,25E-09	1,25E-09
150	9	9	9,73E-04	1,23E-03	1,26E-09	1,26E-09
200	9	9	1,51E-03	1,70E-03	1,27E-09	1,27E-09
300	9	9	1,78E-03	2,30E-03	1,28E-09	1,28E-09
500	9	9	2,00E-03	3,25E-03	1,30E-09	1,30E-09

Tabela 5. Wyniki obliczeń dla ρ równego 10^{-15}.

n	Liczba iteracji dla warunku 1	Liczba iteracji dla warunku 2	Czas dla warunku 1 [s]	Czas dla warunku 2 [s]	Błąd dla warunku 1	Błąd dla warunku 2
3	15	15	2,98E-04	2,29E-04	1,11E-16	1,11E-16
4	15	15	1,89E-04	2,16E-04	1,11E-16	1,11E-16
5	15	16	1,88E-04	2,29E-04	1,57E-16	0
7	15	16	1,88E-04	2,44E-04	1,57E-16	1,11E-16
10	15	2000	1,88E-04	2,33E-02	4E-16	3,33E-16
12	15	2000	2,03E-04	2,25E-02	2,94E-16	2,48E-16
15	15	2000	2,05E-04	2,26E-02	4,15E-16	4E-16
20	15	2000	2,32E-04	2,25E-02	3,68E-16	4,71E-16
30	15	2000	2,85E-04	2,32E-02	5,77E-16	6,18E-16
50	15	2000	2,48E-04	2,52E-02	6,08E-16	5,98E-16
70	15	2000	2,54E-04	2,64E-02	1,05E-15	1,04E-15
100	15	2000	7,86E-04	1,72E-01	1,47E-15	1,46E-15
150	15	2000	8,99E-04	1,70E-01	2,72E-15	2,72E-15
200	15	2000	9,89E-04	1,77E-01	2,31E-15	2,35E-15
300	15	2000	1,55E-03	1,94E-01	3,58E-15	3,55E-15
500	15	2000	3,21E-03	2,62E-01	6,83E-15	6,83E-15

5. Wnioski do zadania 1

Dzięki metodzie Jacobiego w łatwy oraz szybki sposób możemy poprawiać znane, lecz niedokładne rozwiązania układów równań. Zważywszy na to że jest to metoda iteracyjna, w łatwy sposób jesteśmy w stanie ustalić dokładność rozwiązania jaka nas interesuje. Na jakość rozwiązania wpływ ma głównie wybrana precyzja, natomiast możemy zauważyć też że dla warunku drugiego, wartości normy w tabeli 1 oraz 2 są mniejsze niż dla warunku 1, co świadczy o większej dokładności tego warunku dla układów tej postaci. Kłady bardzo szybko zbieżne, dla rho równego 10^{-8} wystarczyło tylko 9 iteracji żeby znaleźć rozwiązanie spełniające warunek końca. Liczba iteracji zbliżona, dla warunku 2 w tabeli 1 oraz 2 dla warunku 2 możemy zauważyć 1 iteracje więcej niż dla warunku 1, odbija się to na czasie wykonania algorytmu, lecz nie są to kolosalne różnice. Czas wykonania również na korzyść warunku 1 w przypadku rho równego 10^{-8} (tabela 4), nie odbija się to na dokładności rozwiązania, identycznej w obydwóch przypadkach. Przyjmując wektor oddalony od rozwiązania możemy zauważyć że ilość iteracji, a co za tym idzie czas wykonywanie programu zwiększają się. Wynik jest niewiele mniej dokładny dla kryterium przyrostowego, natomiast wynik dla kryterium rezydualnego jest dokładniejszy. Dla rho 10^{-15}warunek rezydualny nie kończy się na dotarciu do zadanej dokładności, a kończy się na maksymalnej ilości iteracji. Pomimo tego dokładność rozwiązania jest zadowalająca.

6. Zadanie 2

Dowolną metodą znajdź promień spektralny macierzy iteracji (dla różnych rozmiarów układu – takich, dla których znajdowane były rozwiązania układu). Sprawdź, czy spełnione są założenia o zbieżności metody dla zadanego układu. Opisz metodę znajdowania promienia spektralnego.

Promień spektralny macierzy to maksymalna wartość spośród wartości bezwzględnych wartości własnych macierzy. Wartościami własnymi macierzy nazywamy pierwiastki wielomianu charakterystycznego dla tej macierzy.

$$W_a(\lambda) = \det(A) - \lambda I$$

Gdzie I to macierz jednostkowa.

Twierdzenie o zbieżności procesu iteracyjnego:

Ciąg (*) z dowolnym wektorem startowym $x^{(0)}$ jest zbieżny do jedynego granicznego $x^{(inf)}$wtedy i tylko wtedy, gdy promień spektralny macierzy iteracji jest mniejszy od 1

$$\rho(M) < 1.$$

Pomiary wykonywane były dla macierzy o rozmiarach 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200, 300, 500.

Do obliczanie wartości własnych wielomianu została użyta funkcja linalg.eigvals z biblioteki numpy.

Tabela 6. Wartości promienia spektralnego

n	**Promień spektralny**	**Warunek**
3	7,14E-02	PRAWDA
4	7,14E-02	PRAWDA
5	7,14E-02	PRAWDA
7	7,14E-02	PRAWDA
10	7,14E-02	PRAWDA
12	7,14E-02	PRAWDA
15	7,14E-02	PRAWDA
20	7,14E-02	PRAWDA
30	7,14E-02	PRAWDA
50	7,14E-02	PRAWDA
70	7,14E-02	PRAWDA
100	7,14E-02	PRAWDA
150	7,14E-02	PRAWDA
200	7,14E-02	PRAWDA
300	7,14E-02	PRAWDA
500	7,14E-02	PRAWDA

7. Wnioski dla zadania 2

W powyższej tabeli możemy zaważyć, że wszystkie promienie spektralne są mniejsze od 1, co oznacza że warunek został spełniony. Dodatkowo wszystkie mają dokładnie tą samą wartość 7,14E-02.