Aproksymacja średnio kwadratowa wielomianami algebraicznymi.

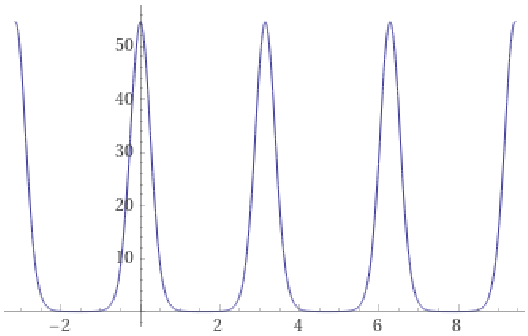
1. Informacje techniczne

Obliczenia zostały wykonane na 64 bitowej wersji systemu Windows 10 Pro, z procesorem Ryzen7 3750H oraz z 16 GB pamięci RAM. Program napisany w języku Python, do rysowania wykresów wykorzystałem moduł pyplot z biblioteki matplotlib. Do obliczeń na macierzach wykorzystałem bibliotekę numpy. Biblioteka Pandas odpowiada za wypisywanie danych na standardowe wyjście.

2. Wstęp do doświadczenia

Funkcja interpolowana przedstawiona jest wzorem:

f(x) = e^4cos(2*x), badałem ją na przedziale [-π, 3π]



Korzystałem z 2 rodzajów węzłów, równoodległych oraz węzłów Czebyszewa. Funkcje rysowane były na podstawie 10000 punktów. Korzystałem z dwóch typów błędów, Błędu średniokwadratowego oraz błędu maksimum, na podstawie których analizowałem dokładność przybliżeń.

Przeprowadzona aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi, polega na znalezieniu funkcji określonego typu, dla której suma kwadratów różnic jej wartości i wartości funkcji aproksymowanej w zadanych węzłach będzie możliwie jak najmniejsza.

Program uruchamiany był dla liczby węzłów 4, 10, 15, 20, 30, 50, 100, dla każdej liczby węzłów wyliczano między wielomiany stopnia 2,3,4,5,6,7,8,9,10,15,20,25,30 , przy założeniu że liczba funkcji bazowych jest mniejsza od liczby węzłów, zatem dla 4 węzłów obliczano tylko dwie i trzy funkcje bazowe.

Układ równań rozwiązuję za pomocą bibliotecznej funkcji linalg.solve(), wbudowanej w bibliotekę numpy. Rozwiązuje ona układ równań za pomącą algorytmu dekompozycji LU, polegającej na zdekomponowaniu macierzy współczynników 'A' układu równań na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych takich, że A = LU, a następnie rozwiązaniu dwóch prostszych układów równań liniowych postaci Ly = b, Ux = y. Algorytm ma złożoność obliczeniową O(n^3), gdzie n jest rozmiarem macierzy. Na wykresach na niebiesko zaznaczona jest funkcja aproksymowana, na szaro funkcja aproksymująca.

3. Wyprowadzenia

W zagadnieniu aproksymacji średniokwadratowej dane mamy:

n + 1 – liczba węzłów,

m – liczba funkcji bazowych.

Poszukujemy wielomianu uogólnionego przedstawionego wzorem:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \tag{1.}$$

Czyli $\{a_j\}_{j=0}^{m}$, dla których:

$$\min\|F(x) - f(x)\| = \min \sum_{i=0}^{m} w_i(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \right]^2 \tag{2.}$$

Dla uproszczenia dalszych rozważań prawą stronę równania 2 za min zapisujemy jako:

$$H(a_0\,, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{m} w_i(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \right]^2 \tag{3.}$$

Wprowadzam również pojęcie funkcji wagowej, oznaczamy jako w(x). W badanym przypadku przyjmujemy że:

$$w(x) = 1 \tag{4.}$$

Współczynnik $\{a_j\}$ znajdujemy z warunku:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \qquad k = 0,1, \dots\,, m \tag{5.}$$

Korzystając ze wzoru 3 oraz warunku zapisanego wzorem 5 otrzymujemy, że

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^{m} w_i(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \right] \varphi_k(x_i) = 0, \qquad k = 0,1, \dots\,, m \tag{6.}$$

W późniejszych krokach w(x) będzie pomijane ze względu na podstawienie ze wzoru 4.

W aproksymacji wielomianowej przyjmujemy, że:

$$\varphi_j(x) = x^j, j = 0,1, \dots, m$$
$$\{x_i\}, i = 0,1, \dots, n$$

(7.)

Podstawiając do wzoru 1 przyjętą we wzorze 7, otrzymujemy:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\, x^j$$

(8.)

Poszukujemy takich współczynników, że:

$$\min \sum_{i=0}^{m} [F(x_i) - f(x_i)\ ]^2$$

(9.)

Z warunku wynikającego z wzoru 6 otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{m} x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j\, x^j = \sum_{i=0}^{m} F(x_i) x_i^k$$

(10.)

Z wzoru 10 wynika postać układu równań:

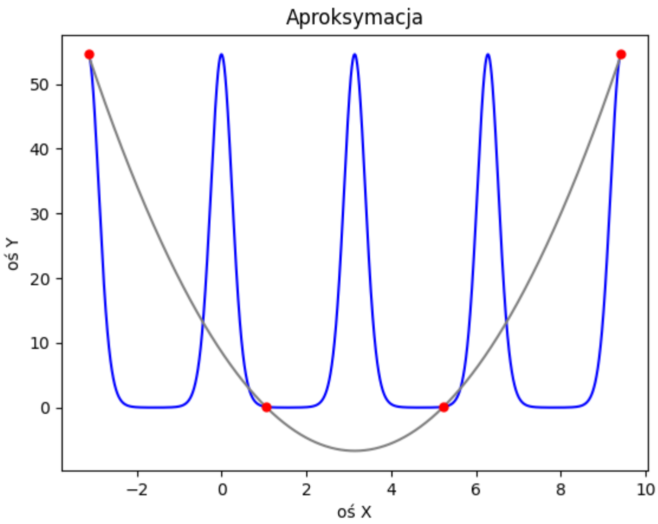
$$\begin{pmatrix} 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ . & . & . & . & . \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_i \\ \sum F_i x_i \\ \dots \\ \sum F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

4. Wyniki doświadczenia

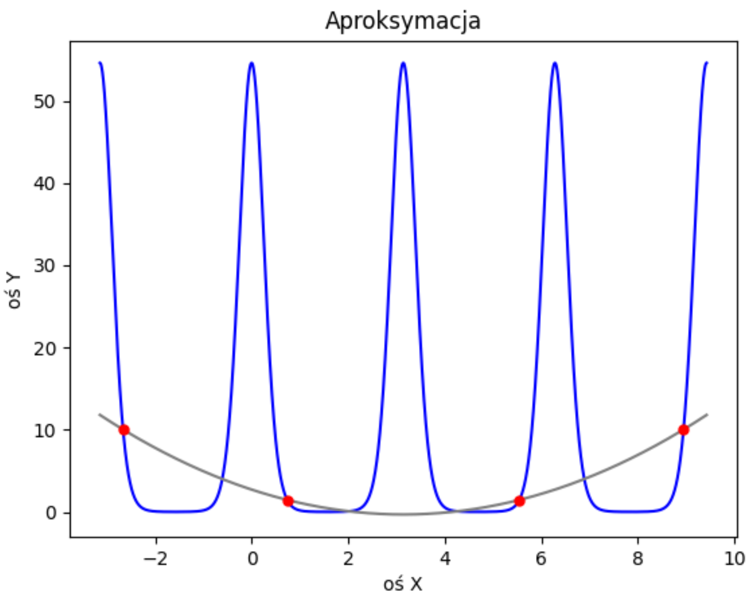
Tabela1. Wyniki doświadczenia dla obydwóch typów węzłów oraz obliczanych dla nich błędów.

Liczba węzłów	Stopień wielomianu	Węzły równoodległe		Węzły Czebyszewa	
		Błąd maksimum	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksimum	Błąd średniokwadratowy
4	2	61,27	0,25	54,90	0,19
4	3	61,27	0,25	54,90	0,19
15	2	49,35	0,18	49,94	0,18
15	3	49,35	0,18	49,94	0,18
15	4	53,24	0,18	54,93	0,19
15	5	53,24	0,18	54,93	0,19
15	6	46,53	0,16	50,55	0,17
15	7	46,53	0,16	50,55	0,17
15	8	48,94	0,16	55,73	0,18
15	9	48,94	0,16	55,73	0,18
15	10	40,33	0,16	51,89	0,17
30	2	46,36	0,18	51,05	0,19
30	3	46,36	0,18	51,05	0,19
30	4	48,88	0,17	51,96	0,17
30	5	48,88	0,17	51,96	0,17
30	6	48,58	0,15	50,47	0,15
30	7	48,58	0,15	50,47	0,15
30	8	44,35	0,14	46,94	0,14
30	9	44,35	0,14	46,94	0,14
30	10	37,29	0,13	40,98	0,13
30	15	23,37	0,09	26,87	0,09
30	20	592,78	1,02	31,02	0,09
30	25	8014,52	13,12	24,92	0,06
100	2	45,02	0,17	50,02	0,18
100	3	45,02	0,17	50,02	0,18
100	4	47,83	0,17	51,33	0,17
100	5	47,83	0,17	51,33	0,17
100	6	48,43	0,15	49,27	0,15
100	7	48,43	0,15	49,27	0,15
100	8	44,12	0,14	45,51	0,14
100	9	44,12	0,14	45,51	0,14
100	10	36,91	0,13	38,67	0,13
100	15	23,39	0,09	23,31	0,09
100	20	25,24	0,08	26,18	0,09
100	25	13,96	0,05	15,06	0,05
100	30	12,47	0,04	11,52	0,04

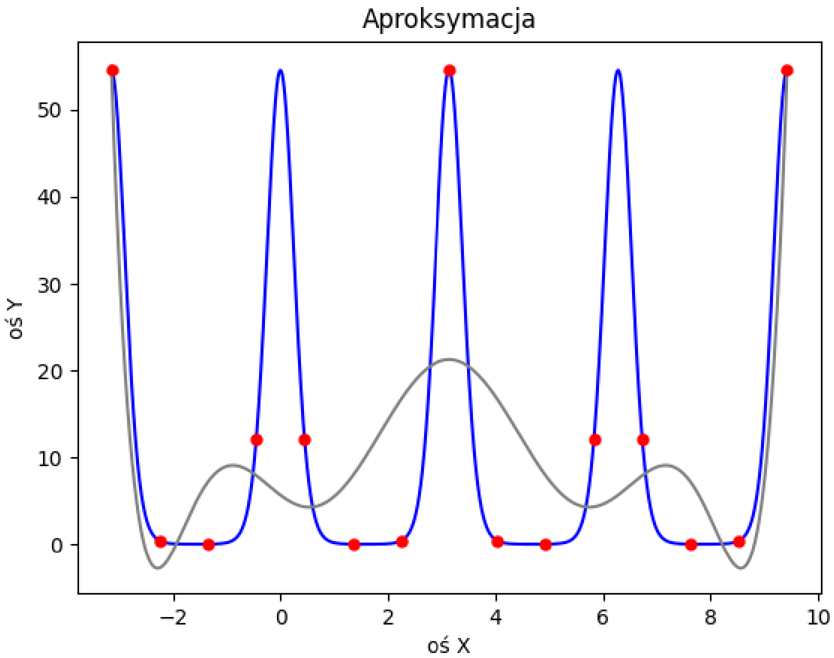
Wykres 1. Funkcja aproksymująca wielomianem 3 stopnia dla 4 węzłów równoodległych



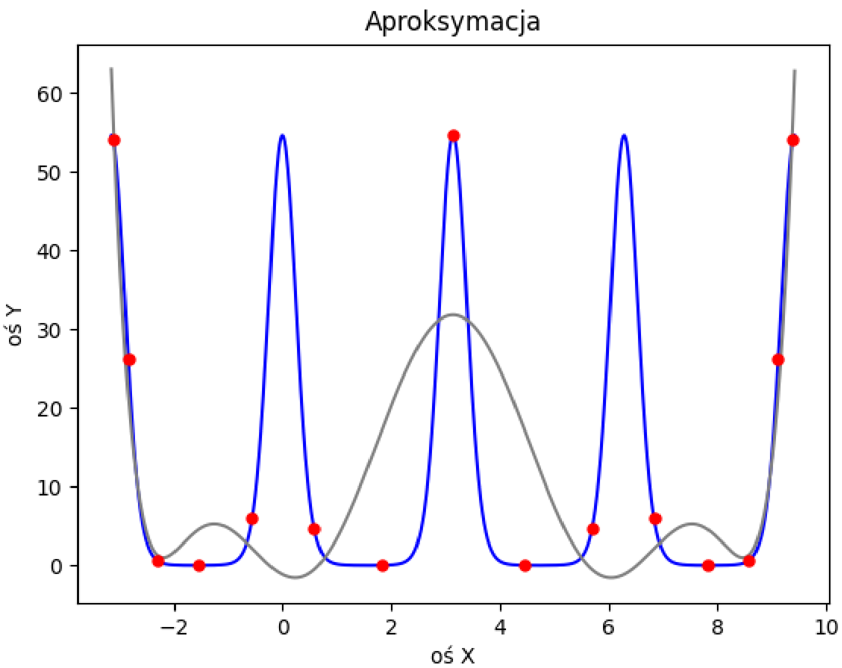
Wykres 2. Funkcja aproksymująca wielomianem 3 stopnia dla 4 węzłów Czebyszewa



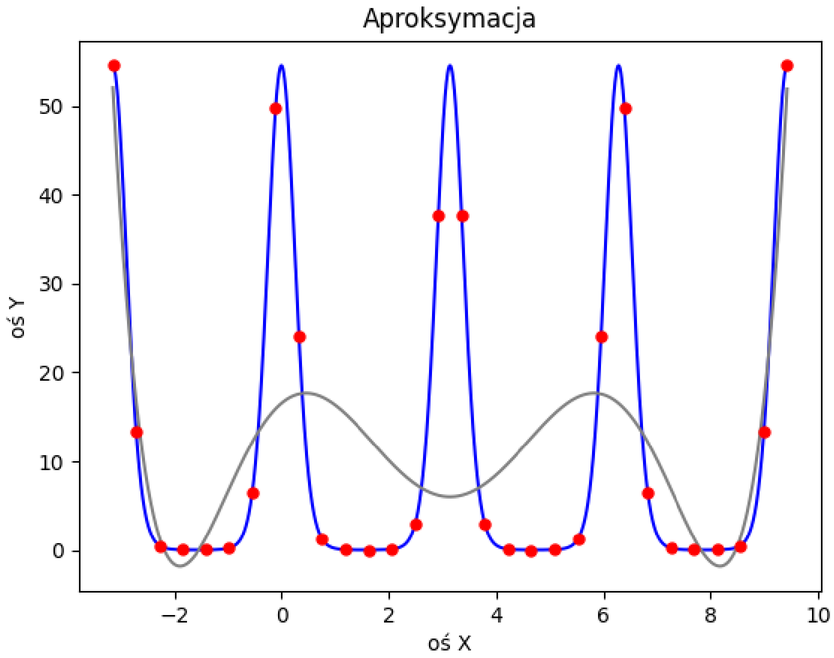
Wykres 3. Funkcja aproksymująca wielomianem 9 stopnia dla 15 węzłów równoodległych



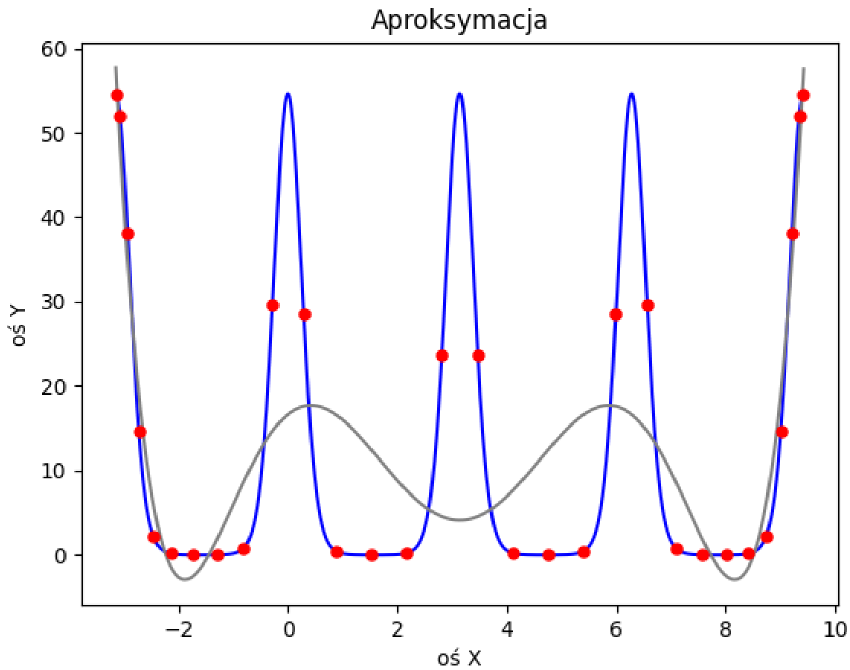
Wykres 4. Funkcja aproksymująca wielomianem 9 stopnia dla 15 węzłów Czebyszewa



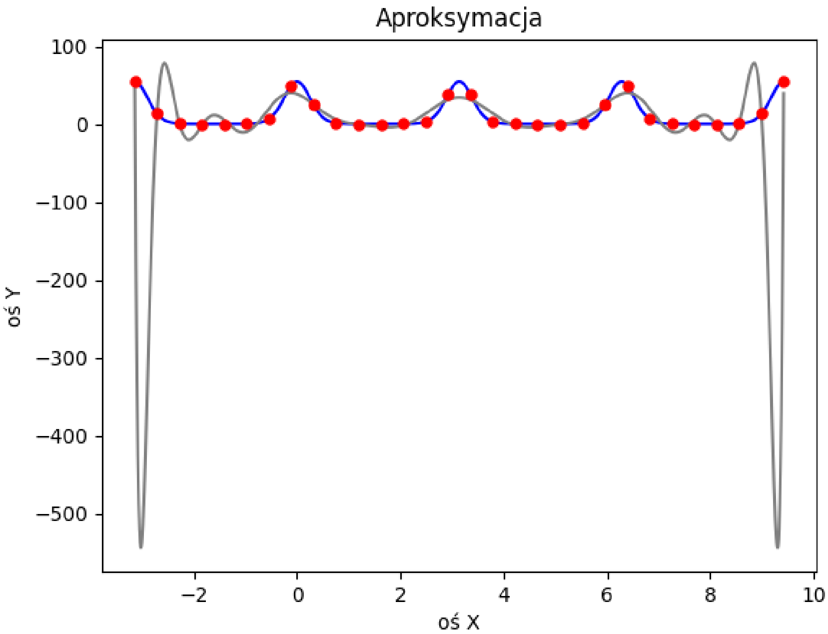
Wykres 5. Funkcja aproksymująca wielomianem 7 stopnia dla 30 węzłów równoodległych



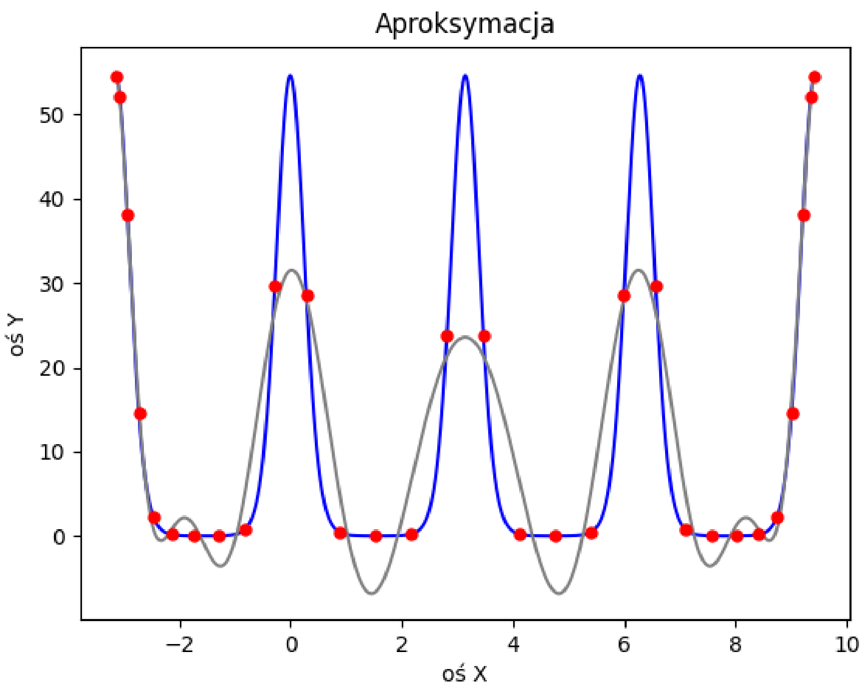
Wykres 6. Funkcja aproksymująca wielomianem 7 stopnia dla 30 węzłów Czebyszewa



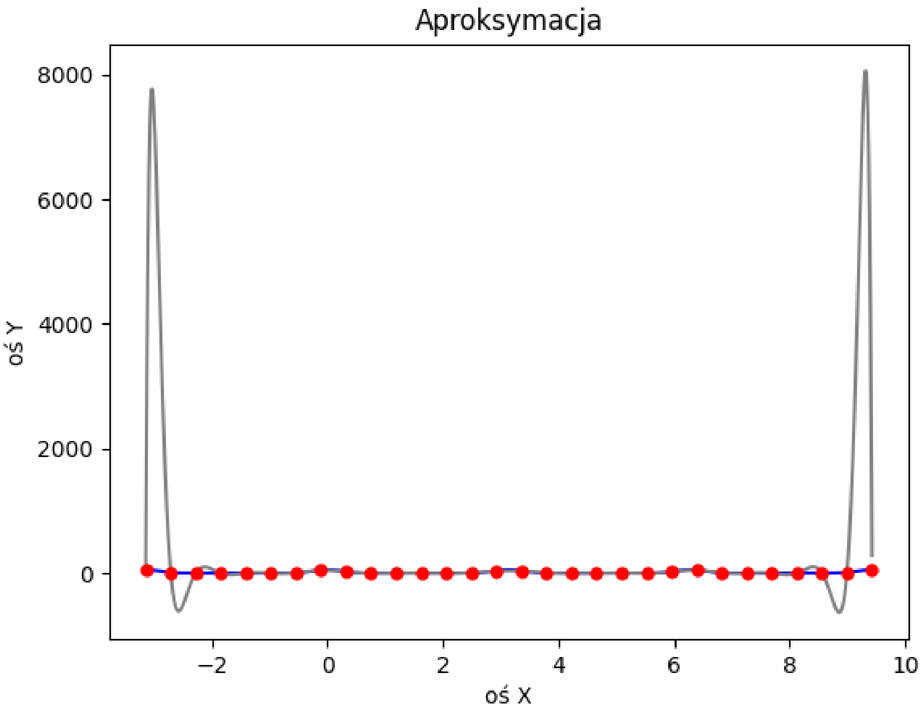
Wykres 7. Funkcja aproksymująca wielomianem 20 stopnia bazowych dla 30 węzłów równoodległych



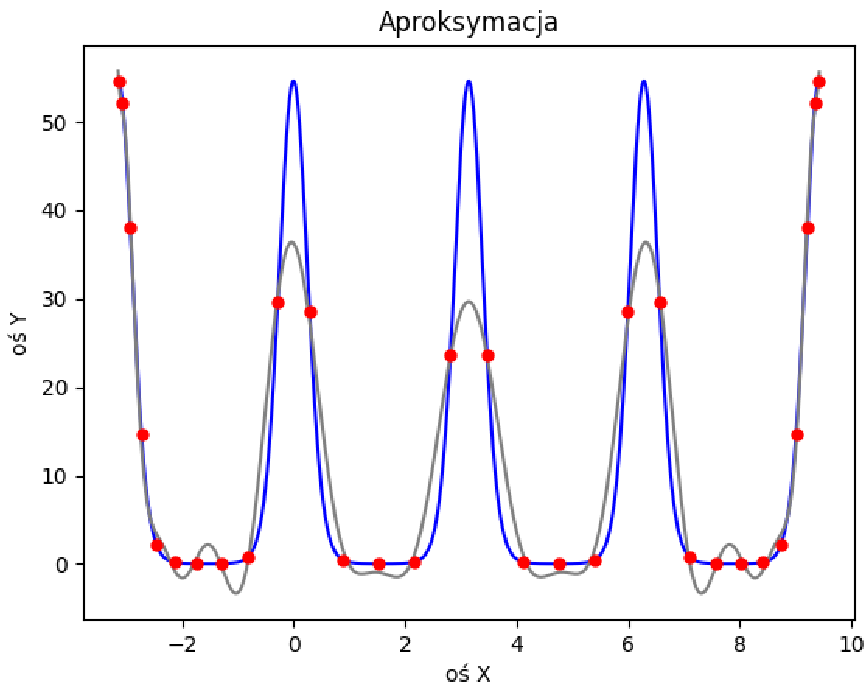
Wykres 8. Funkcja aproksymująca wielomianem 20 stopnia bazowych dla 30 węzłów Chebyshewa



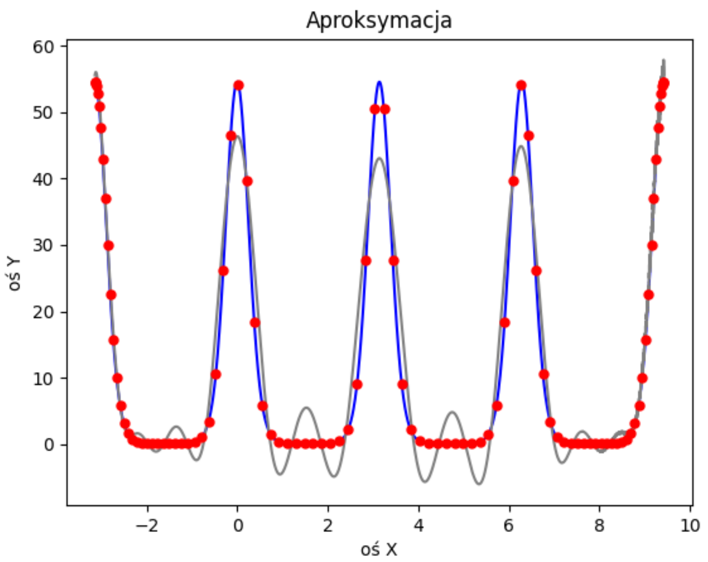
Wykres 9. Funkcja aproksymująca wielomianem 25 stopnia bazowych dla 30 węzłów równoodległych



Wykres 10. Funkcja aproksymująca wielomianem 25 stopnia bazowych dla 30 węzłów Chebyshewa



Wykres 11. Funkcja aproksymująca wielomianem 30 stopnia bazowych dla 30 węzłów Chebyshewa



5. Wnioski

Podczas gdy zagadnienie interpolacji skupiało się na znalezieniu funkcji danego typu przechodzącej przez zadane punkty, zagadnienie aproksymacji skupia się na znalezieniu funkcji danego typu przechodzącej możliwie blisko zadanych punktów ale niekoniecznie dokładnie przez nie. Dzięki temu aproksymacja może służyć do wygładzania przebiegu zadanej funkcji/niwelowania szumów. Możemy zauważyć, że przy odpowiednim doborze stopnia wielomianu, do ilości węzłów, otrzymujemy funkcję, która przechodzi przez wszystkie zadane punkty (wykresy 1 oraz 2).

Można zauważyć tendencję do zwiększania się dokładności aproksymacji, a stopniem wielomianu aproksymującego. Nie jest to jednak ogólna zasada, w tabeli 1 możemy też zaobserwować skoki wzrost błędu. Znaczny błąd dla 30 węzłów równoodległych przy wielomianach stopnia 20 i 25 wynika z błędów numerycznych.

Kolejnym ciekawym wnioskiem na temat aproksymacji wielomianami algebraicznymi jest fakt, że różnice między błędami nie są obserwowalne przy zmianie liczności funkcji bazowych o jeden, lecz o dwa.

Aproksymacja generująca najmniejsze błędy zobrazowana jest na wykresie 11.