Interpolacja – funkcje sklejane

1. Informacje techniczne

Obliczenia zostały wykonane na 64 bitowej wersji systemu Windows 10 Pro, z procesorem Ryzen7 3750H oraz z 16 GB pamięci RAM. Program napisany w języku Python, do rysowania wykresów wykorzystałem moduł pyplot z biblioteki matplotlib. Do obliczeń na macierzach wykorzystałem bibliotekę numpy.

# Wstęp

Funkcja interpolowana przedstawiona jest wzorem:

**f(x) = e^4cos(2\*x), badałem ją na przedziale [-π, 3π]**

Obraz zawierający łódź, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Korzystałem z 2 rodzajów węzłów, równoodległych oraz węzłów Czebyszewa. Interpolacja była wykonywana dla funkcji sklejanych drugiego i trzeciego stopnia.Funkcje rysowane były na podstawie 5000 punktów.

# Interpolacja 2 stopnia – wstęp

Przy n węzłach x0<x1<x2<...<xn-1 wyznaczano n-1 wielomianów p(x) stopnia drugiego takich, że:

pk-1(xk)=pk(xk)=f(xk) dla k=1,2,…,n-2

p0(x0)=f(x0); pn-2(xn-1)=f(xn-1)

pk-1‘(xk)=pk‘(xk) dla k=1,2,…,n-2

Daje to 3n-4 równań, a do wyznaczenia jednoznacznie wszystkich wielomianów pi(x) potrzebnych jest 3n-3 równań, w związku z czym konieczne było dodanie jakiegoś warunku brzegowego. Zrobiono to na 2 różne sposoby:

- funkcja brzegowa jest funkcją liniową:

p0’’(x0)=0

- pierwsza pochodna funkcji brzegowej w lewym krańcu interpolacji ma tą samą wartość jak pochodna funkcji interpolowanej (warunek naturalny)

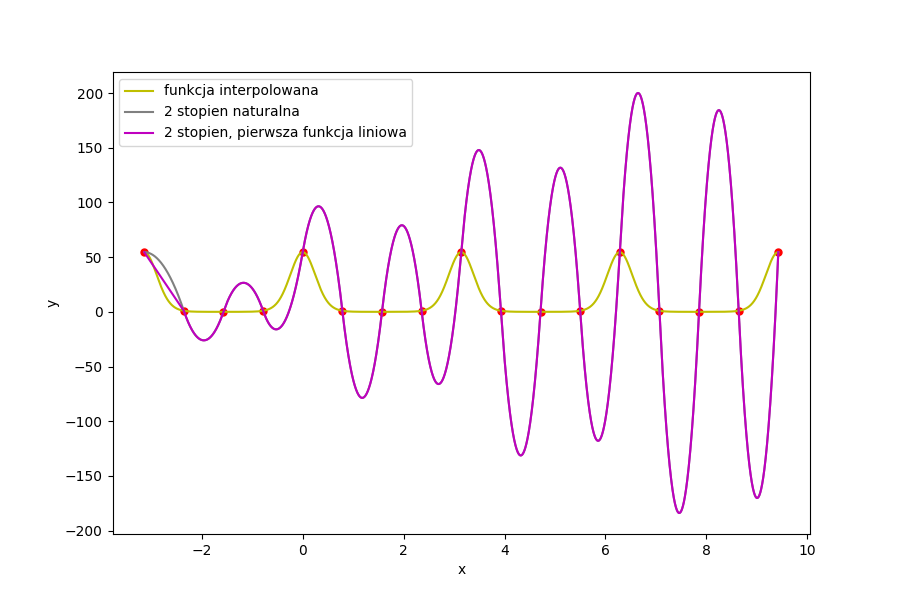
p0’(x0)=0

# Wyniki interpolacji dla funkcji 2 stopnia

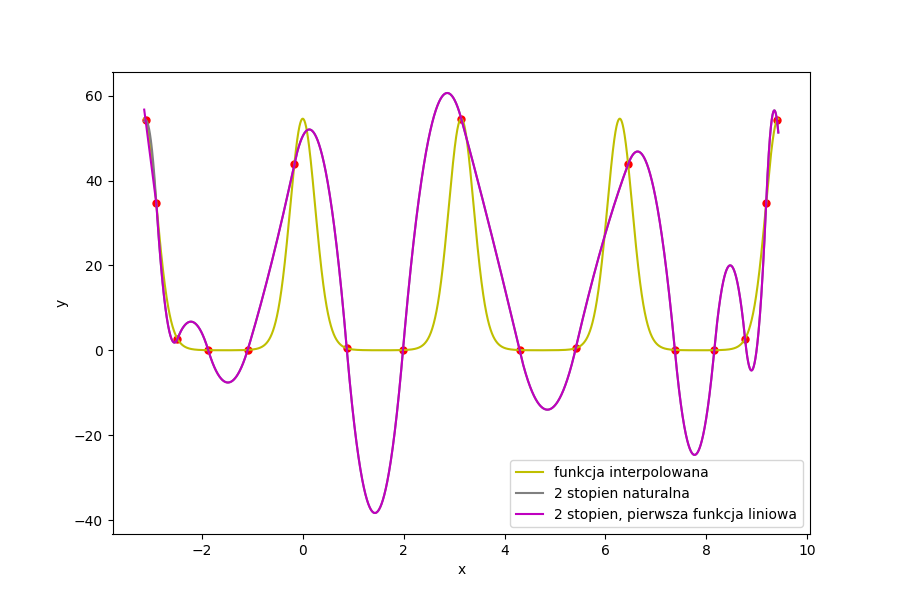
Tabela1. Wyniki interpolacji dla funkcji 2 stopnia dla różnych warunków, liczby węzłów i typów węzłów.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów | Warunek naturalny | | | | Pierwsza funkcja liniowa | | | |
| Węzły równoodległe | | Węzły Czebyszewa | | Węzły równoodległe | | Węzły Czebyszewa | |
| Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy | Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy | Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy | Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy |
| 3 | 54,58 | 0,66 | 91,23 | 0,61 | 54,58 | 0,66 | 91,23 | 0,63 |
| 4 | 81,69 | 0,49 | 59,18 | 0,33 | 81,69 | 0,46 | 59,18 | 0,33 |
| 5 | 54,58 | 0,66 | 85,81 | 0,46 | 54,58 | 0,66 | 85,81 | 0,45 |
| 6 | 70,80 | 0,44 | 87,31 | 0,42 | 70,80 | 0,42 | 87,31 | 0,41 |
| 7 | 81,69 | 0,51 | 86,25 | 0,45 | 81,69 | 0,49 | 86,25 | 0,44 |
| 8 | 93,36 | 0,53 | 144,5 | 0,64 | 93,36 | 0,52 | 144,5 | 0,64 |
| 9 | 204,3 | 1,30 | 165,4 | 0,82 | 204,3 | 1,29 | 165,4 | 0,82 |
| 10 | 48,05 | 0,36 | 64,15 | 0,39 | 48,05 | 0,34 | 64,15 | 0,38 |
| 11 | 38,06 | 0,29 | 68,71 | 0,40 | 38,06 | 0,28 | 68,71 | 0,40 |
| 12 | 45,58 | 0,24 | 125,9 | 0,67 | 45,58 | 0,22 | 125,9 | 0,67 |
| 13 | 33,59 | 0,31 | 172,2 | 1,04 | 33,59 | 0,30 | 172,2 | 1,04 |
| 14 | 45,87 | 0,26 | 94,43 | 0,54 | 45,87 | 0,25 | 94,43 | 0,54 |
| 15 | 63,35 | 0,35 | 49,70 | 0,21 | 63,35 | 0,34 | 49,70 | 0,21 |
| 16 | 94,55 | 0,55 | 33,97 | 0,18 | 94,55 | 0,55 | 33,97 | 0,18 |
| 17 | 186,4 | 1,25 | 48,66 | 0,22 | 186,4 | 1,24 | 48,66 | 0,22 |
| 18 | 61,31 | 0,44 | 45,69 | 0,15 | 61,31 | 0,43 | 45,69 | 0,15 |
| 19 | 25,34 | 0,22 | 52,49 | 0,24 | 25,34 | 0,22 | 52,49 | 0,24 |
| 20 | 24,66 | 0,17 | 87,45 | 0,30 | 24,66 | 0,16 | 87,45 | 0,30 |

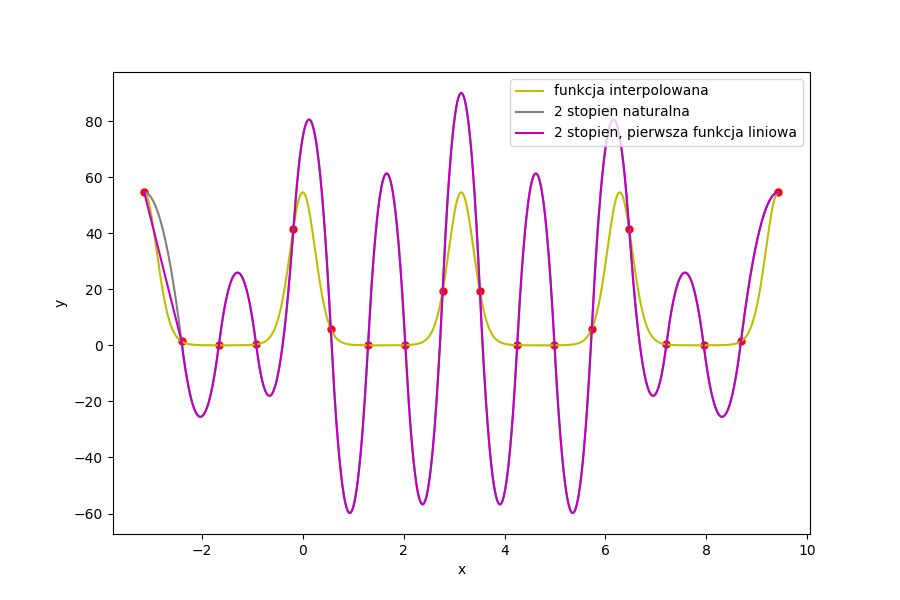
Wykres 1. Funkcje interpolujące dla 17 węzłów równoodległych



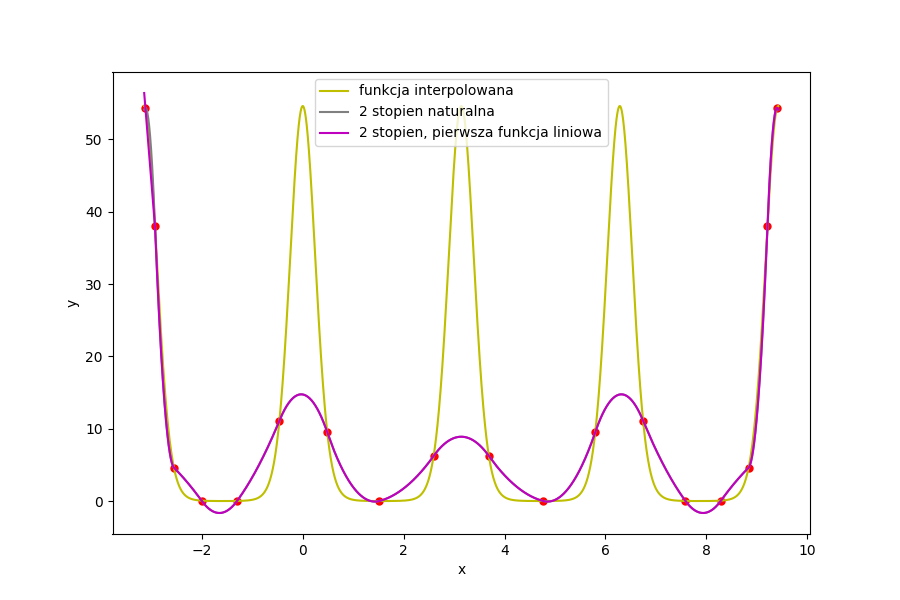
Wykres 2. Funkcje interpolujące dla 17 węzłów Czebyszewa



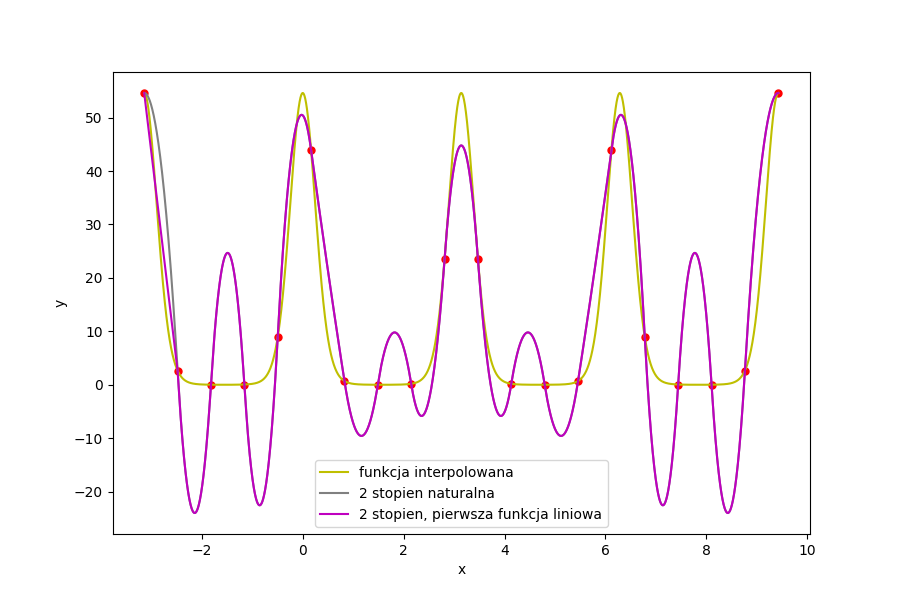
Wykres 3. Funkcje interpolujące dla 18 węzłów równoodległych



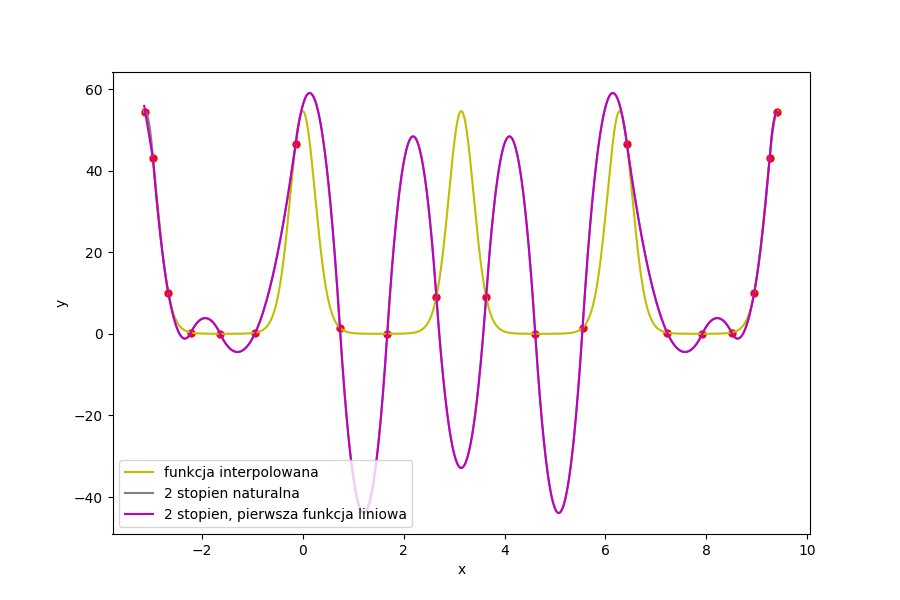
Wykres 4. Funkcje interpolujące dla 18 węzłów Czebyszewa



Wykres 5. Funkcje interpolujące dla 20 węzłów równoodległych



Wykres 6. Funkcje interpolujące dla 20 węzłów Czebyszewa



# Wnioski dla funkcji 2 stopnia

W przypadku tej funkcji jak i wybranych warunków brzegowych, wartości błędów interpolacji nie różnią się za bardzo między nimi, nieznacznie lepiej dla badanych ilości węzłów wypada warunek naturalny. Dużo większe znaczenie tutaj miał wybór węzłów, dla większości przypadków, funkcje interpolujące na podstawie tych węzłów były dokładniejsze, niż przy węzłach równoodległych (można zaobserwować porównując wykresy 1 i 2 oraz 3 i 4). Natomiast co ciekawe, najlepiej przybliżająca funkcja wyszła, dla 20 węzłów równoodległych, co obserwujemy na wykresie 5.

Oscylację możemy zaobserwować dla wykresów 1,3,6. Można z tego wywnioskować, że wybór węzłów nie ma wpływu na jej występowanie. Brak efektu Rungego, dla zadanej liczby węzłów.

# Interpolacja funkcjami 3 stopnia – wstęp

Przy n węzłach x0<x1<x2<...<xn-1 wyznaczano n-1 wielomianów p(x) stopnia trzeciego takich, że:

pk-1(xk)=pk(xk)=f(xk) dla k=1,2,…,n-2

p0(x0)=f(x0); pn-2(xn-1)=f(xn-1)

pk-1‘(xk)=pk‘(xk) dla k=1,2,…,n-2

pk-1’’(xk)=pk‘’(xk) dla k=1,2,…,n-2

Daje to 4n-6 równań, a do wyznaczenia jednoznacznie wszystkich wielomianów pi(x) potrzebnych jest 4n-4 równań, w związku z czym konieczne było dodanie dwóch warunków. Warunki brzegowe zastosowane z obydwóch stron są identyczne. Zrobiono to na dwa sposoby:

- funkcja sklejana naturalna – ma drugą pochodną zerową w krańcach przedziału interpolacji: p0’’(x0)=pn-2’’(xn-1)=0

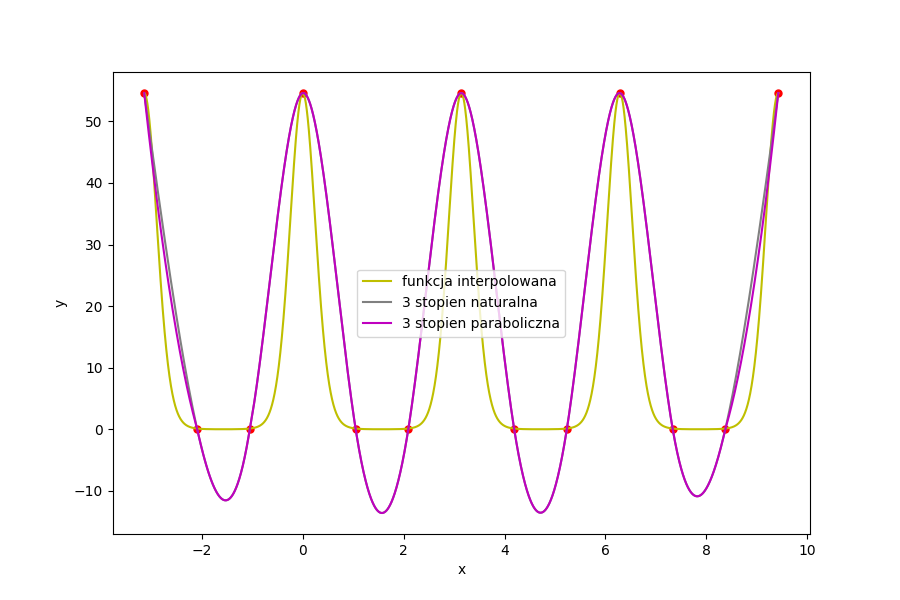
- funkcja sklejana paraboliczna – funkcje brzegowe są funkcjami kwadratowymi: p0 (3)(x0)=pn-2 (3)(xn-1)=0 (‘paraboliczny’ w tabeli)

# Wyniki interpolacji dla funkcji 3 stopnia

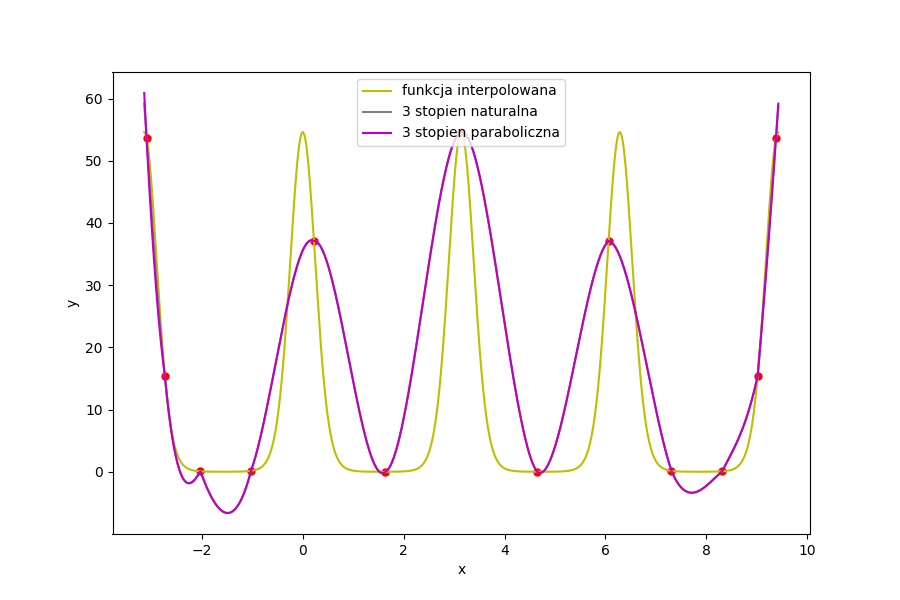
Tabela 2. Wyniki interpolacji dla funkcji 3 stopnia dla różnych warunków, liczby węzłów i typów węzłów.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów | Warunek naturalny | | | | Warunek paraboliczny | | | |
| Węzły równoodległe | | Węzły Czebyszewa | | Węzły równoodległe | | Węzły Czebyszewa | |
| Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy | Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy | Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy | Błąd maximum | Błąd średniokwadratowy |
| 3 | 54,58 | 0,66 | 66,38 | 0,52 | 54,58 | 0,66 | 76,77 | 0,60 |
| 4 | 63,40 | 0,36 | 55,33 | 0,32 | 63,40 | 0,35 | 55,33 | 0,32 |
| 5 | 54,58 | 0,66 | 49,20 | 0,32 | 54,58 | 0,66 | 49,20 | 0,30 |
| 6 | 56,17 | 0,32 | 65,65 | 0,28 | 56,17 | 0,31 | 65,65 | 0,27 |
| 7 | 66,09 | 0,38 | 54,36 | 0,32 | 66,09 | 0,37 | 54,36 | 0,32 |
| 8 | 57,36 | 0,26 | 61,69 | 0,20 | 57,36 | 0,25 | 61,69 | 0,19 |
| 9 | 36,08 | 0,25 | 60,61 | 0,27 | 36,08 | 0,25 | 60,61 | 0,27 |
| 10 | 50,74 | 0,20 | 62,80 | 0,21 | 50,74 | 0,19 | 62,80 | 0,21 |
| 11 | 48,66 | 0,23 | 37,93 | 0,18 | 48,66 | 0,22 | 37,93 | 0,19 |
| 12 | 46,34 | 0,19 | 53,84 | 0,20 | 46,34 | 0,18 | 53,84 | 0,21 |
| 13 | 27,42 | 0,20 | 33,59 | 0,15 | 27,42 | 0,19 | 33,59 | 0,16 |
| 14 | 43,47 | 0,17 | 48,89 | 0,15 | 43,47 | 0,17 | 48,89 | 0,15 |
| 15 | 40,82 | 0,17 | 47,00 | 0,18 | 40,82 | 0,17 | 47,00 | 0,18 |
| 16 | 37,83 | 0,14 | 46,56 | 0,15 | 37,83 | 0,14 | 46,56 | 0,15 |
| 17 | 16,58 | 0,10 | 29,85 | 0,14 | 16,58 | 0,10 | 29,85 | 0,14 |
| 18 | 31,44 | 0,12 | 46,60 | 0,16 | 31,44 | 0,12 | 46,60 | 0,16 |
| 19 | 28,81 | 0,11 | 29,16 | 0,13 | 28,81 | 0,11 | 29,16 | 0,13 |
| 20 | 26,25 | 0,10 | 44,60 | 0,12 | 26,25 | 0,10 | 44,60 | 0,12 |

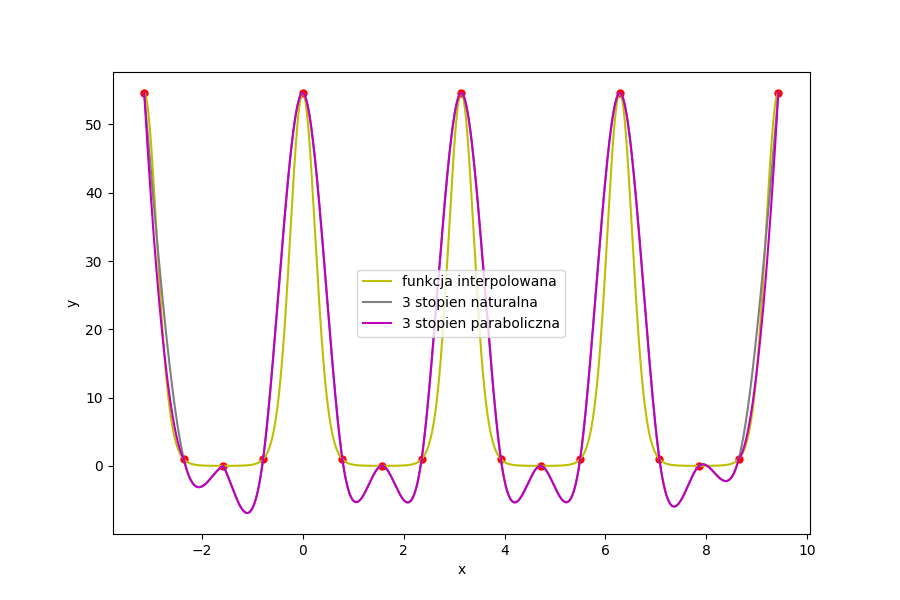
Wykres 7. Funkcje interpolujące dla 13 węzłów równoodległych



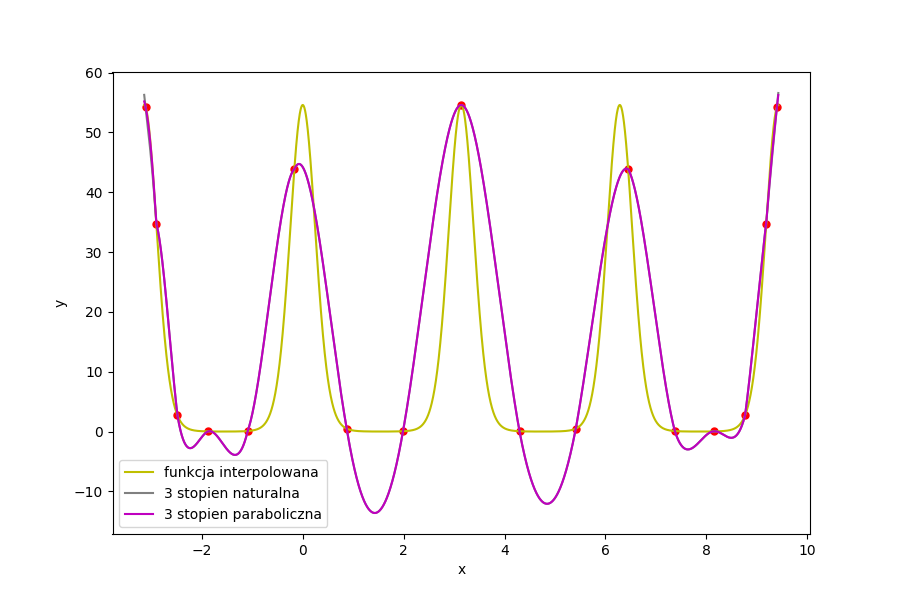
Wykres 8. Funkcje interpolujące dla 13 węzłów Czebyszewa



Wykres 9. Funkcje interpolujące dla 17 węzłów równoodległych



Wykres 10. Funkcje interpolujące dla 17 węzłów Czebyszewa



# Wnioski dla funkcji 3 stopnia

Porównując odpowiadające sobie błędy z tabeli 2, możemy zauważyć, że przy większej ilości węzłów, dobór warunków brzegowych nie ma znaczenia, jedynymi zauważalnymi różnicami, jest przypadek węzłów Czebyszewa dla błędu średniokwadratowego, zanika on jednak przy n > 13. Większe znaczenie znowu odgrywa jednak wybór węzłów, węzły Czebyszewa zazwyczaj wypadają lepiej dla n < 15, natomiast dla n większych bądź równych, węzły równoodległe zaczynają sprawować się lepiej, można to zauważyć porównując wykresy 7 i 8 oraz 9 i 10. Najlepiej przybliżającym przypadkiem, jest funkcja dla 17 węzłów równoodległych (wykres 9). Brak zauważalnych błędów numerycznych.

# Wnioski

Dużo bardziej opłacalna metodą interpolacji, jest interpolowanie funkcjami 3 stopnia, unikamy w ten sposób problemów z oscylacją. W interpolacjach obydwoma stopniami funkcji możemy zauważyć pewne prawidłowości, takie jak większa dokładność dla węzłów równoodległych oraz brak wpływu warunku brzegowego na dokładność obliczeń przy zwiększającej się liczbie węzłów. Przy niewielkiej ilości węzłów możemy zauważyć niewielkie różnice w błędzie średniokwadratowym, jednak nie wskazują one jednoznacznie na to, który typ warunku brzegowego jest lepszy.