УДК 518.872

**А. П. Кирпичников, Д. Б. Флакс, Р. Н. Гайнуллин**

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ

СРЕДНИМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВКИ В СИСТЕМЕ

*Ключевые слова: система массового обслуживания, поток требований, очередь, обслуживающее устройство.*

*Настоящая работа является продолжением цикла публикаций авторов, посвященного разработке математических основ функционирования системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в этой системе. В этих работах рассмотрена открытая система массового обслуживания, в которой на каждую заявку, находящуюся в системе (как в очереди, так и под обслуживанием), действует своего рода «поток уходов» с некоторой заданной интенсивностью. В предыдущих работах этого цикла были впервые получены формулы для вероятностных характеристик систем массового обслуживания такого рода, в частности, для вероятностей стационарных состояний и вероятности полного простоя системы, найдена вероятность ожидания обслуживания вновь поступившей в систему заявкой, то есть вероятность того, что поступающее требование найдёт все каналы занятыми (вне зависимости от того, будет оно дожидаться обслуживания или нет). Получено выражение для первого и второго моментов числа требований, находящихся под обслуживанием (числа занятых каналов), рассчитаны такие ключевые для понимания процессов, происходящих в СМО, величины, как первый и второй моменты количества заявок, одновременно находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания, говоря другими словами, средняя длина и среднеквадратическое отклонение числа заявок в очереди к обслуживающему устройству, а также найдены первый и второй моменты общего числа заявок в системе в целом, как в очереди, так и под обслуживанием. Математической основой всех этих результатов является введение в рассмотрение вырожденной гипергеометрической функцию Э. Куммера (которую иногда называют функцией Л. Похгаммера), впервые позволившей в компактном и замкнутом виде выразить все основные характеристики систем массового обслуживания данного типа. В настоящей работе, продолжающей начатый цикл публикаций, впервые представлена аналитическая формула для функции распределения времени ожидания начала обслуживания одной заявкой, которая позволила вычислить как среднее значение, находящееся, как см следовало ожидать, в согласии с соотношениями Дж. Литтла, так и среднеквадратическое отклонение времени пребывания одного требования в системе массового обслуживания указанного типа. Приведённые в работе результаты, сведённые в замкнутую систему компактных формул, могут быть рекомендованы к использованию при проектировании и эксплуатации достаточно широкого круга объектов и систем, работающих по принципу систем массового обслуживания, могут быть использованы в логистике, связи, в телекоммуникационных, транспортных системах, на производстве, в сельском хозяйстве, в сфере обслуживания населения и других областях, где имеют место проблемы, связанные с обслуживанием различного рода потоков требований, носящих случайный характер.*

*Keywords: queuing system, flow of requirements, queue, serving device.*

This work is a continuation of a series of publications by the authors devoted to the development of the mathematical foundations of the queuing systemfunctioning with a limited average residence time of an application in this system. In these works, an open queuing system is considered, in which for each application located in the system (both in the queue and under service), a kind of “flow of departures” with some predetermined intensity acts. In the previous works of this series, formulas for the probabilistic characteristics of queuing systems of this kind were first obtained, in particular, for the probabilities of stationary states and the probability of complete downtime of the system, the probability of waiting for service by the application newly received in the system have been found, i.e., the probability that the incoming request will find all channels occupied (regardless of whether it will wait for service or not), an expression is obtained for the first and second moments of the number of requirements that are under the service (number of busy channels), the following key values have been calculated for understanding the processes occurring in the QS, such as the first and second moments of the number of applications simultaneously waiting in line waiting for the service to start, in other words, the average length and standard deviation the of the number of applications in the queue to the servicing device, and the first and second moments of the total number of applications in the system as a whole, both in the queue and under service, have been found. The mathematical basis of all these results is the introduction into consideration of the degenerate hypergeometric function of E. Kummer (which is sometimes called the L. Pohhammer function), which for the first time made it possible to express in a compact and closed form all the main characteristics of queuing systems of this type. In the present work, which continues the cycle of publications, the analytical formula for the distribution function of the waiting time for the start of service for one application is presented for the first time, which made it possible to calculate both the average value, which, as you should expect, in agreement with J. Little's relations, and the standard deviation of the residence time of one requirement in the queuing system of the specified type. The results presented in the work, summarized in a closed system of compact formulas, can be recommended for use in the design and operation of a fairly wide range of objects and systems that work on the basis of queuing systems, can be used in logistics, communications, telecommunications, transport systems, manufacturing, agriculture, public services and other areas where there are problems associated with servicing of various random flows of claims.

**Введение**

Настоящая работа является продолжением цикла публикаций авторов, начатого в работах [1-9] и посвященного разработке математических основ функционирования системы массового обслуживания (СМО) с ограниченным средним временем пребывания заявки в этой системе. Напомним, что в этих работах рассмотрена система массового обслуживания, в которой на каждую заявку, находящуюся в системе (как в очереди, так и под обслуживанием), действует своего рода «поток уходов» с интенсивностью . Интенсивность обслуживания заявки в системе при этом обозначается как , а интенсивность поступающего в систему потока заявок как . Граф системы массового обслуживания такого рода изображён рис. 1.

*Рис. 1 Граф системы массового обслуживания*

В этом случае приведённая интенсивность потока поступающих в систему заявок равна . Физический смысл этой величины заключается, очевидно, в том, что она показывает, какое число заявок в среднем поступило в систему за среднее время обслуживания в системе одной заявки.

В работе [2] были впервые получены формулы для вероятностных характеристик системы массового обслуживания такого рода, в частности, для вероятности полного простоя системы 

 (1)

и вероятностей стационарных состояний системы

 при 

 при ,

где

; ; (2)

 – неполная экспонента [1,2]. При этом  – приведённая интенсивность ухода «нетерпеливых» заявок из системы – величина, которая показывает, сколько в среднем заявок покидает систему необслуженными за среднее время обслуживания системой одной заявки. В этих соотношениях ;  – символ Похгаммера [9], при этом . Величина **, очевидно, показывает, какое среднее число заявок поступает в систему за среднее время пребывания в системе одной «нетерпеливой» заявки. В формуле (1) –так называемая вырожденная гипергеометрическая функцию Э. Куммера, определяемая соотношением [2, 3]

. (3)

Для упрощения записи в дальнейших расчётах мы будем пока опускать знак тильды в указанных выше обозначениях.

В работах [5, 6] была найдена вероятность ожидания обслуживания вновь поступившей в систему заявкой, то есть вероятность того, что поступающее требование найдёт все каналы занятыми (вне зависимости от того, будет оно дожидаться обслуживания или нет), которая имеет вид



******, (4)

где  (5)

– это выражение для вероятности ожидания системы с неограниченной очередью и «терпеливыми» заявками, известное из модели M/M/m [9, 10]. Заметим, что хотя по форме это соотношение совпадает с аналогичным выражением модели M/M/m, однако, в отличие от него, содержит внутри себя ещё и зависимость от параметра , содержащуюся внутри вероятности полного отсутствия заявок в системе  согласно формуле (1).

В работе [7] было впервые получено выражение для такой важнейшей характеристики данного типа СМО, как среднее число требований, находящихся под обслуживанием (среднее число занятых каналов), которое имеет вид

 (6)

Отсюда коэффициент загрузки СМО этого типа

,

соответственно коэффициент простоя

.

Заметим, что , соответственно,  В работе [7] также было получено выражение для второго момента этой величины, то есть выражение для дисперсии числа занятых каналов, которое имеет вид

.

При   и  в соответствии с результатами [9, 10].

В работе [8] рассчитана такая ключевая для понимания процессов, происходящих в СМО, величина, как среднее количество заявок, одновременно находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания, говоря другими словами, средняя длина очереди. Заметим, что именно эта величина является основной характеристикой широкого класса систем массового обслуживания различных типов и именно эта величина дала название, принятого для подобного рода систем в англоязычной научной литературе – Queueing Systems:

. (7)

При малых значениях параметра  в соответствии с приближённым решением [5, 6] отсюда имеем

.

В свою очередь дисперсия числа требований в очереди

. (8)

Используя асимптотическую зависимость для вероятности ожидания заявкой обслуживания, полученную в работах [5, 6], легко проверить, что соотношения (7) и (8) при стремлении параметра  к нулю после ряда простых преобразований), как и следовало ожидать, перейдут в соответствующие соотношения многоканальной модели без ограничений [10, 11]

; 

(модель М/М/m).

В работе [9] были вычислены статистические характеристики общего числа требований, одновременно циркулирующих в системе массового обслуживания данного типа. То есть найдены, во-первых, среднее число требований, одновременно находящихся в системе в целом, во-вторых, ковариация числа требований, находящихся в очереди и под обслуживанием, и в-третьих, дисперсия общего числа заявок в системе в целом, которые, согласно [9], имеют следующий вид:

;

;

.

Используя асимптотику [2], несложно образом можно показать, что при значении параметра  все вышеуказанные характеристики переходят в соответствующие соотношения модели без «нетерпеливых» заявок (по классификации Дж. Кендалла – модель M/M/m);

; ;

.

Найдём теперь функцию распределения для времени ожидания начала обслуживания одной заявкой. По определению , где  – время ожидания обслуживания (случайная величина), но тогда

,

где  – вероятность того, что время ожидания в очереди для одной заявки больше некоторого заданного времени *t*. А это, в свою очередь, может быть, во-первых, в том случае, если эта заявка, поступив в систему, нашла обслуживающее многоканальное устройство занятым, причем за время *t* предыдущая заявка не была обслужена; во-вторых, в том случае, если поступившая заявка нашла занятым обслуживающее устройство и еще одну заявку, ожидающую обслуживания в очереди, при этом за время *t* либо не было обслужено ни одной, либо была обслужена только одна заявка; в-третьих, если эта заявка нашла занятое устройство и две заявки в очереди, а за время *t* это устройство, либо не успело обслужить ни одной заявки, либо обслужило одну, либо обслужило только две заявки и так далее. По формуле полной вероятности в этом случае имеем



,

где в соответствии с распределением Пуассона

.

Отсюда следует







. (9)

Для дальнейших расчётов в данном случае удобнее всего не подставлять в эту формулу явное выражение для вероятностей  стационарных состояний системы, а использовать для этой цели алгоритм прямого суммирования вероятностных выражений. Тогда из соотношения (9) получим







, (10)

и тогда формула для среднего времени пребывания одной заявки в очереди на обслуживание примет следующий вид:

 . (11)

Для взятия этого интеграла рассмотрим известный табличный интеграл [10]

,

откуда в свою очередь имеем



,

так что



и



.

В этом случае интегральное выражение (11) преобразуется к виду





.

Подставив в эту зависимость формулы для , получаем















или

. (11)

в соответствии с соотношениями Дж. Литтла.

При малых  соответственно имеем



Точно так же, подставив выражение (10) в формулу для вычисления второго центрального момента, получим











Подставив в эту зависимость формулы для , в свою очередь получаем



























 (12)

При  имеем известное соотношение [11-13]

,

как и следовало ожидать. Заметим, что выражение (12) не удалось представить в более компактном виде через вырожденную гипергеометрическую функцию Э. Куммера  из-за наличия индекса  в обоих сомножителях знаменателя исходной формулы.

Список литературы

1. М.И. Бусарев, А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, Вестник технологического университета, **14**, 22, 155-161 (2011)
2. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, Вестник технологического университета, **17**, 24, 242-245 (2014)
3. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, Л.Р. Валеева, Theoretical & Applied Science, **25**, 17, 44-49 (2015)
4. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, Л.Р. Валеева, ФƏн-наука, **45**, 6, 5-9 (2015)
5. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, К.Н. Галямова, Вестник технологического университета, **19**, 11, 122-126 (2016)
6. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, К.Н. Галямова, Успехи современной науки, **4**, 8, 176-178 (2016)
7. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, К.Н. Галямова, Вестник технологического университета, **19**, 22, 123-125 (2016)
8. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, К.Н. Галямова, Вестник технологического университета, **20**, 2, 81-84 (2017)
9. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, К.Н. Галямова, Вестник технологического университета, **20**, 5, 95-97 (2017)
10. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. М.: Наука, 1981. 800 с.
11. А.П. Кирпичников. *Прикладная теория массового обслуживания.* Изд-во Казанского гос. университета, Казань, 2008. 112 с.
12. А.П. Кирпичников. *Методы прикладной теории массового обслуживания.* Изд-во Казанского гос. университета, Казань, 2011. 200 с.
13. А.П. Кирпичников. *Методы прикладной теории массового обслуживания.* М.: Едиториал УРСС, 2017. 224 с.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

© А.П. Кирпичников – д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, e-mail: [kirpichnikov@kstu.ru](mailto:kirpichnikov@kstu.ru); Д.Б. Флакс – старший преподаватель кафедры сбора и обработки информации КНИТУ, e-mail: [flaxdm@gmail.com](mailto:flaxdm@gmail.com); Р.Н. Гайнуллин – д-р техн. наук, профессор, зав кафедрой каф. сбора и обработки информации КНИТУ, e-mail: [gainullin@kstu.ru](mailto:gainullin@kstu.ru).

© А.P. Kirpichnikov – Dr. Sci, Prof, Head of the Department of Intelligent Systems & Information Systems Control, KNRTU, e-mail: kirpichnikov@kstu.ru; D.B. Flax – Senior Lecturer of the Department of Automated Data Acquisition & Processing Systems, KNRTU, e-mail: [flaxdm@gmail.com](mailto:flaxdm@gmail.com); R.N. Gainullin ‑ Dr. Sci, Prof, Head of the Department of of Automated Data Acquisition & Processing Systems, KNRTU, e-mail: [gainullin@kstu.ru](mailto:gainullin@kstu.ru).

УДК 518.872

**А. П. Кирпичников, Д. Б. Флакс, Р. Н. Гайнуллин**

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ

СРЕДНИМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВКИ В СИСТЕМЕ

*Ключевые слова: система массового обслуживания, поток требований, очередь, обслуживающее устройство.*

*Настоящая работа является продолжением цикла публикаций авторов, посвященного разработке математических основ функционирования системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в этой системе. В этих работах рассмотрена открытая система массового обслуживания, в которой на каждую заявку, находящуюся в системе (как в очереди, так и под обслуживанием), действует своего рода «поток уходов» с некоторой заданной интенсивностью. В предыдущих работах этого цикла были впервые получены формулы для вероятностных характеристик систем массового обслуживания такого рода, в частности, для вероятностей стационарных состояний и вероятности полного простоя системы, найдена вероятность ожидания обслуживания вновь поступившей в систему заявкой, то есть вероятность того, что поступающее требование найдёт все каналы занятыми (вне зависимости от того, будет оно дожидаться обслуживания или нет). Получено выражение для первого и второго моментов числа требований, находящихся под обслуживанием (числа занятых каналов), рассчитаны такие ключевые для понимания процессов, происходящих в СМО, величины, как первый и второй моменты количества заявок, одновременно находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания, говоря другими словами, средняя длина и среднеквадратическое отклонение числа заявок в очереди к обслуживающему устройству, а также найдены первый и второй моменты общего числа заявок в системе в целом, как в очереди, так и под обслуживанием. Математической основой всех этих результатов является введение в рассмотрение вырожденной гипергеометрической функцию Э. Куммера (которую иногда называют функцией Л. Похгаммера), впервые позволившей в компактном и замкнутом виде выразить все основные характеристики систем массового обслуживания данного типа. В настоящей работе, продолжающей начатый цикл публикаций, впервые представлена аналитическая формула для функции распределения времени ожидания начала обслуживания одной заявкой, которая позволила вычислить как среднее значение, находящееся, как см следовало ожидать, в согласии с соотношениями Дж. Литтла, так и среднеквадратическое отклонение времени пребывания одного требования в системе массового обслуживания указанного типа. Приведённые в работе результаты, сведённые в замкнутую систему компактных формул, могут быть рекомендованы к использованию при проектировании и эксплуатации достаточно широкого круга объектов и систем, работающих по принципу систем массового обслуживания, могут быть использованы в логистике, связи, в телекоммуникационных, транспортных системах, на производстве, в сельском хозяйстве, в сфере обслуживания населения и других областях, где имеют место проблемы, связанные с обслуживанием различного рода потоков требований, носящих случайный характер.*

UDC 518.872

**А.P. Kirpichnikov, D.B. Flax, R.N. Gainullin**

THE FUNCTION OF EXPECTATION TIME DISTRIBUTION OF SERVICE STARTING IN QUEUING SYSTEMS WITH LIMITED AVERAGESTAY TIME OF APPLICATION IN THE SYSTEM

*Keywords: queuing system, flow of requirements, queue, serving device.*

This work is a continuation of a series of publications by the authors devoted to the development of the mathematical foundations of the queuing systemfunctioning with a limited average residence time of an application in this system. In these works, an open queuing system is considered, in which for each application located in the system (both in the queue and under service), a kind of “flow of departures” with some predetermined intensity acts. In the previous works of this series, formulas for the probabilistic characteristics of queuing systems of this kind were first obtained, in particular, for the probabilities of stationary states and the probability of complete downtime of the system, the probability of waiting for service by the application newly received in the system have been found, i.e., the probability that the incoming request will find all channels occupied (regardless of whether it will wait for service or not), an expression is obtained for the first and second moments of the number of requirements that are under the service (number of busy channels), the following key values have been calculated for understanding the processes occurring in the QS, such as the first and second moments of the number of applications simultaneously waiting in line waiting for the service to start, in other words, the average length and standard deviation the of the number of applications in the queue to the servicing device, and the first and second moments of the total number of applications in the system as a whole, both in the queue and under service, have been found. The mathematical basis of all these results is the introduction into consideration of the degenerate hypergeometric function of E. Kummer (which is sometimes called the L. Pohhammer function), which for the first time made it possible to express in a compact and closed form all the main characteristics of queuing systems of this type. In the present work, which continues the cycle of publications, the analytical formula for the distribution function of the waiting time for the start of service for one application is presented for the first time, which made it possible to calculate both the average value, which, as you should expect, in agreement with J. Little's relations, and the standard deviation of the residence time of one requirement in the queuing system of the specified type. The results presented in the work, summarized in a closed system of compact formulas, can be recommended for use in the design and operation of a fairly wide range of objects and systems that work on the basis of queuing systems, can be used in logistics, communications, telecommunications, transport systems, manufacturing, agriculture, public services and other areas where there are problems associated with servicing of various random flows of claims.



Fig. 1. *Graf of queuing system*

About the Authors

1. А.P. Kirpichnikov – Dr. Sci, Prof, Head of the Department of Intelligent Systems & Information Systems Control, KNRTU, e-mail: [kirpichnikov@kstu.ru](mailto:kirpichnikov@kstu.ru);
2. D.B. Flax – Senior Lecturer of the Department of Automated Data Acquisition & Processing Systems, KNRTU, e-mail: [flaxdm@gmail.com](mailto:flaxdm@gmail.com).
3. R.N. Gainullin ‑ Dr. Sci, Prof, Head of the Department of Automated Data Acquisition & Processing Systems, KNRTU, e-mail: [gainullin@kstu.ru](mailto:gainullin@kstu.ru);

Количество страниц – 5,

Число рисунков – 1,

Число наименований библиографического списка – 13.