

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ  
ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ**

*Факультет физико-математических и естественных наук*

*Институт физических исследований и технологий*

*Направление «Физика»*

**ОТЧЁТ  
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №8**

**Коллективное ускорение ионов**

по курсу:

**Численные методы и математическое моделирование**

Ниаманеш Амирали

Москва

2023

**Цель работы:** изучить движение заряженной частицы в зеркальной магнитной ловушке.

**Оборудование:** FORTRAN, OriginPro.

**Теоретическая часть:**

В 1956 году В. И. Векслер предложил метод коллективного ускорения ионов, который был разработан при изучении согласованных методов ускорения частиц, переосмыслив роль внешних полей в этом процессе. В этом методе заряженные частицы ускоряются за счет собственных электрических полей плазменного сгустка, а не внешних полей, как в традиционных методах. Для успешного использования коллективных методов ускорения необходимо создание компактных ускорителей.

В 1962 году В. И. Векслер высказал идею ускорения ионов электронными кольцами. В этом методе инжектируемый пучок электронов скручивается в кольцо в магнитном поле, а затем сжимается в адиабатическом режиме. В камеру инжектируется несколько нейтральных атомов, которые ионизируются и удерживаются в кольце. После этого кольцо ускоряется в спадающем магнитном поле, ускоряя ионы под воздействием поля поляризации. Этот метод позволяет ускорять ионы намного быстрее, чем с помощью внешних электрических полей.

Для решения уравнений движения можно использовать схему «с перешагиванием». Уравнения движения для электронов имеют вид:

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{p_{\perp}^2}{2m_0\gamma B(z)} \frac{dB}{dz} + eE(z), \frac{dz_e}{dt} = \frac{p_z}{\gamma};$$

и для ионов:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{eZE(z)}{R_m}, \frac{dz_i}{dt} = v_i,$$

где  $p_z$  — продольная составляющая импульса электрона,  $p_{\perp}$  — поперечная компонента импульса электрона,  $m_0$  — масса электрона,  $\gamma$  — релятивистский фактор,  $e$  — заряд электрона;  $v_i$  — скорость иона,  $p_i$  — продольная составляющая импульса иона,  $R_m$  — отношение массы

иона к массе электрона;  $E(z)$  — электрическое поле,  $B(z)$  — магнитное поле,  $\frac{dB}{dz}$  — градиент магнитного поля.

Или в безразмерной форме. Для электронов:

$$\frac{du_z}{d\tau} = -\frac{u_{\perp}^2}{2\gamma b} \frac{db}{d\xi_e} + g_z, \frac{d\xi_e}{d\tau} = \frac{u_z}{\gamma};$$

и для ионов:

$$\frac{du_i}{d\tau} = -\frac{Z g_z}{R_m}, \frac{d\xi_i}{d\tau} = v_i,$$

где  $u_z$  — продольная составляющая безразмерного импульса электрона,  $u_{\perp}$  — поперечная компонента безразмерного импульса электрона,  $\gamma$  — релятивистский фактор;  $v_i$  — безразмерная скорость иона,  $u_i$  — продольная составляющая безразмерного импульса иона,  $R_m$  — отношение массы иона к массе электрона;  $g_z$  — безразмерное электрическое поле,  $b$  — безразмерное магнитное поле,  $\frac{db}{d\xi_e}$  — градиент безразмерного магнитного поля;  $\xi_e, \xi_i$  — безразмерные координаты иона и электрона соответственно,  $\tau$  — безразмерное время.

### **Практическая часть:**

Задания:

Вариант 9:

1. Протон находится внутри бесконечного по  $X$  и  $Y$  слоя с заданными распределением, толщиной и плотностью электронов. Электронный слой начинает двигаться в направлении  $z$  с постоянным ускорением. Допустим, что параметры слоя при его движении не изменяются. Определить максимальную величину ускорения электронного слоя, при которой протон останется внутри электронного слоя и энергию, приобретаемую протоном на длине 1 метр, энергию, приобретаемую протоном за 0,1 мкс. Определить начальное положение протона, при котором его ускорение максимально. Решить задачу аналитически и численно.

2. В бесконечном по  $X$  и  $Y$  электронном слое с заданными распределением, толщиной и плотностью электронов находятся 300 модельных ионов (водород), равномерно распределенных вдоль  $z$ . Слой начинает ускоряться в направлении  $z$ . Определить максимальное ускорение слоя, при котором не менее 30% ионов ускоряются, отставая от электронного слоя не более, чем на 2 см, на длине ускорения 1 метр. Вывести распределение ионов по координатам и их энергетический спектр. Считать, что толщина электронного слоя остается неизменной в процессе ускорения.

3. Электронный слой с заданными распределением, толщиной и плотностью электронов находится в магнитном поле. Энергия электронов в слое 10 МэВ. Электроны в момент  $t = 0$  имеют только поперечные по отношению к направлению магнитного поля импульсы. Индукция магнитного поля на длине 1 метр изменяется от 10 кГс до 6 кГс. Определить максимальную энергию, приобретаемую протоном. Какую зависимость магнитного поля от координаты надо выбрать, чтобы обеспечить устойчивое ускорение протона (протон остаётся внутри сгустка)? Результаты представить в виде графиков зависимостей скоростей и координат центра электронного слоя и протона и от времени. Решить задачу аналитически и численно. Сравнить численные результаты с аналитическими расчётами.

4. Задан плазменный сгусток (водород) с плотностью электронов  $n_e$ . Протоны в момент  $t = 0$  имеют нулевые импульсы. С каким ускорением должна двигаться электронная компонента, чтобы обеспечить эффективное коллективное ускорение протонов (не менее 30% ускоренных протонов с максимальной энергией). Результаты представить в виде графиков зависимостей энергетических спектров электронов и протонов от координаты и пространственных распределений электронов и ионов от координаты.

5. Задан плазменный сгусток (водород) с плотностью электронов  $n_e$ , находящийся в магнитном поле. Энергия электронов в сгустке 8 МэВ. Электроны в момент  $t = 0$  имеют только поперечные по отношению к направлению магнитного поля импульсы. Индукция магнитного поля спадает на длине 1 метр и изменяется от  $B_{max} = 5$  кГс до некоторой величины  $B_{min}$ .

Слой электронов неоднороден. Толщина слоя  $d = 1,2$  см. Зависимость плотности электронов от координаты  $z$  есть  $n(z) = n_0 \cos(\pi \cdot |z|/d)$ , где  $z = 0$  — центр слоя,  $n_0 = 10^5 \text{ см}^{-3}$ . Плотность электронной компоненты сгустка  $n_e = n_0^e \cos(\pi \cdot |z|/d)$ , где  $n_0^e = 8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

**Аналитическое решение:**

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{p_{\perp}^2}{2m_0\gamma B(z)} \frac{dB}{dz} + eE(z)$$

$$dp_z = -\frac{p_{\perp}^2}{2m_0\gamma B(z)} \frac{dB}{dz} dt + eE(z)dt$$

$$p_z = -\frac{p_{\perp}^2}{2m_0\gamma B(z)} \frac{dB}{dz} \big|_{(z=z)} t + eE(z)t \quad (1)$$

$$\frac{dz_e}{dt} = -\frac{p_z}{m_0\gamma} = -\frac{p_{\perp}^2}{2m_0e^2\gamma^2 B(z)} \frac{dB}{dz} t + \frac{eE(z)}{m_0e\gamma} t \quad (2)$$

$$z_e = -\frac{p_{\perp}^2}{4m_0e^2\gamma^2 B(z)} \frac{dB}{dz} t^2 + \frac{eE(z)}{2m_0e\gamma} t^2$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{eE(z)}{R_m}$$

$$p_i = -\frac{eE(z)}{R_m} t \quad (3)$$

$$\frac{dz_i}{dt} = v_i = \frac{p_i}{m_0\gamma} = -\frac{eE(z)}{m_0p\gamma R_m} t$$

$$z_i = -\frac{eE(z)}{2m_0p\gamma R_m} t^2$$

Уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = q(z) = -4\pi\rho(z)$$

$$d^2\varphi = -4\pi\rho(z) dz^2 == -4\pi n_0^e e \cos(\pi + \frac{|z|}{d}) dz^2$$

$$\rho(z) = n_0^e e \cos(\pi + \frac{|z|}{d})$$

$$\frac{-d\varphi}{dz} = E(z) = 4\pi d n_0^e e \sin(\frac{|z|}{d}) \frac{z}{|z|}$$

$$B(z) = az + b; \frac{dB}{dz} = a$$

$$z_e = -\frac{p_{\perp}^2}{4m_0^e \gamma^2 (az + b)} at^2 + \frac{4\pi d n_0^e e^2 \sin(\frac{|z|}{d}) \frac{z}{|z|}}{2m_0^e \gamma} t^2$$

$$z_i = -\frac{4\pi d n_0^e e^2 \sin(\frac{|z|}{d}) \frac{z}{|z|}}{2m_0^p \gamma R_m} t^2$$

При заданном перемещении 1 м за время  $5 \cdot 10^{-8}$  с получим значение  $V_{min}$ , при котором больше 30% ионов (протонов) ускоряются.

Значение  $V_{min} = 4631$  Гс

**Результаты:**

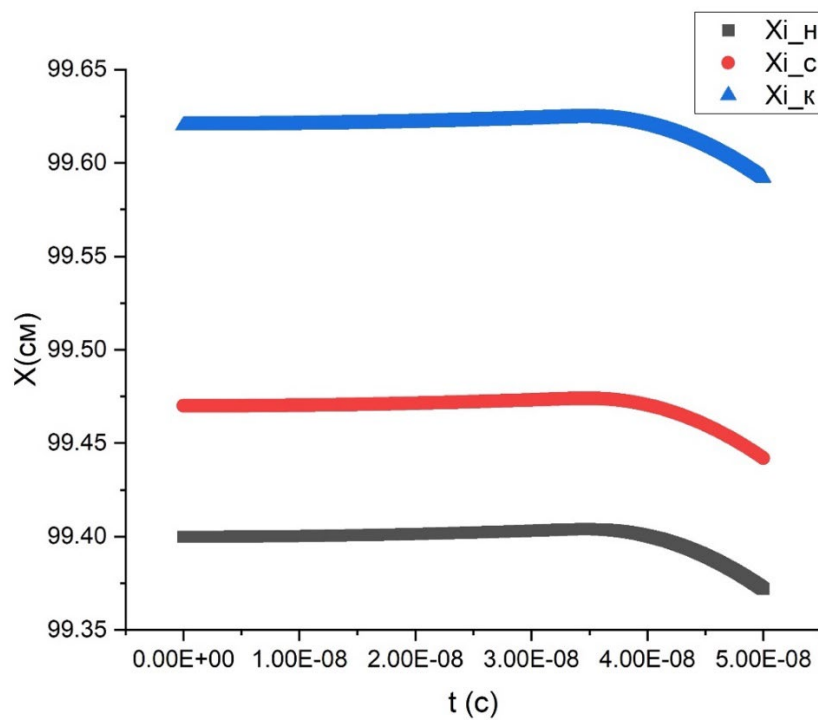


Рис.1 Траектория движения протонов от начала, от середины от конца сгустка при  $V_{\min}=4500$  Гс

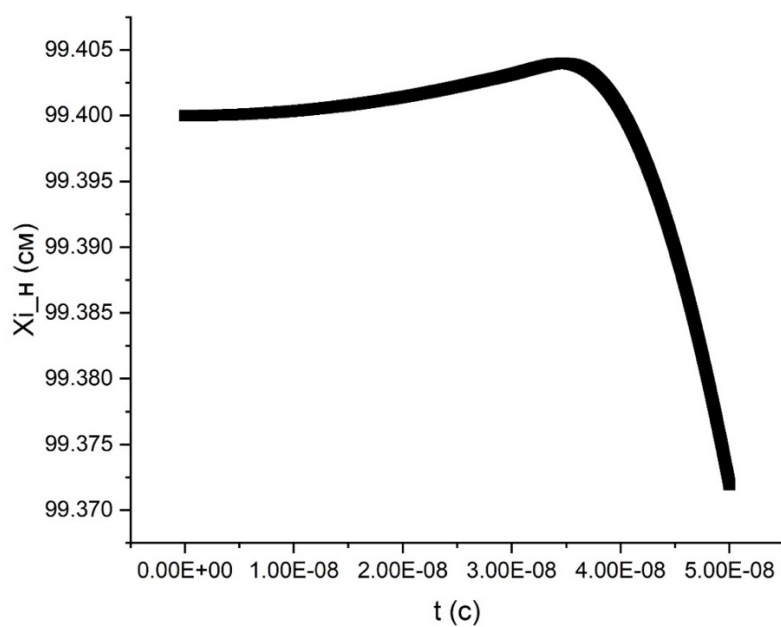


Рис.2 Траектория движения протона от начала сгустка при  $V_{\min}=4500$  Гс

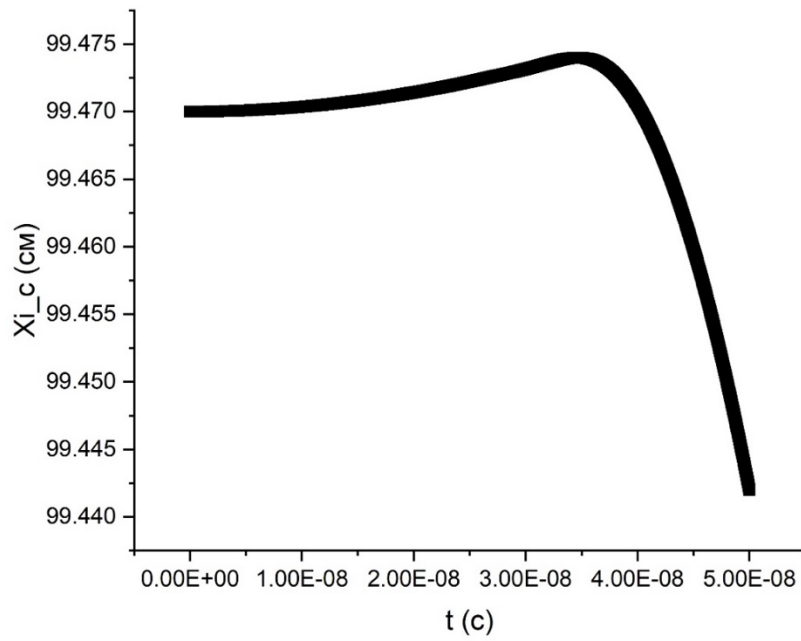


Рис.3 Траектория движения протона от середины сгустка при  $V_{\min}=4500$  Гс

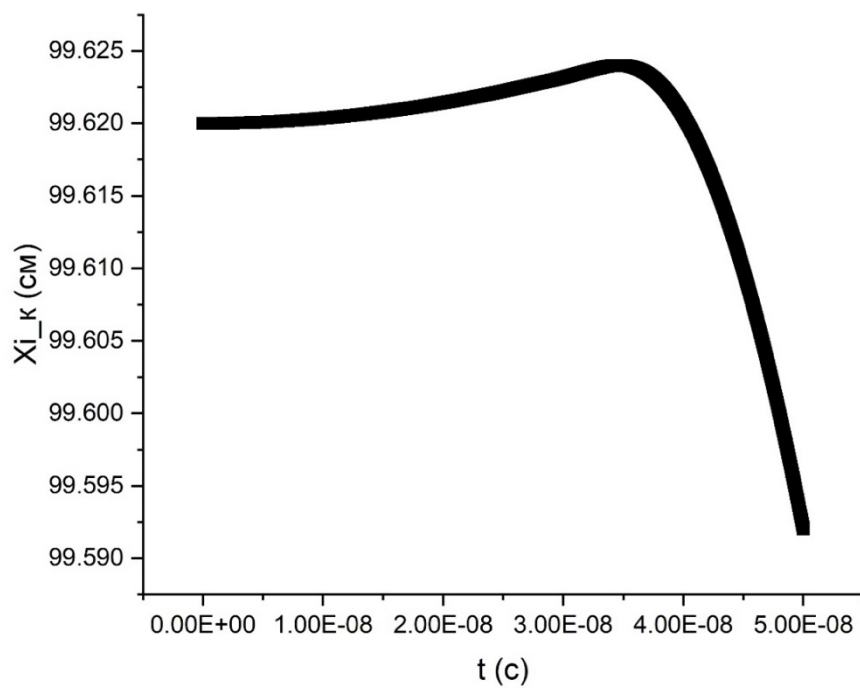


Рис.4 Траектория движения протона от конца сгустка при  $V_{\min}=4500$  Гс



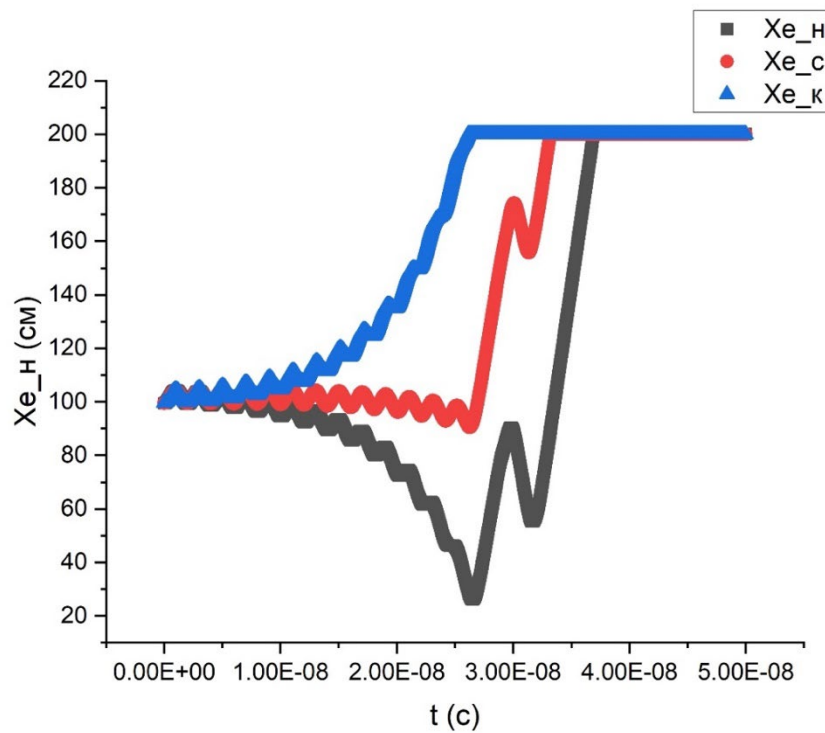


Рис.5 Траектория движения электронов от начала, от середины от конца сгустка при  $B_{\min}=4500$  Гс

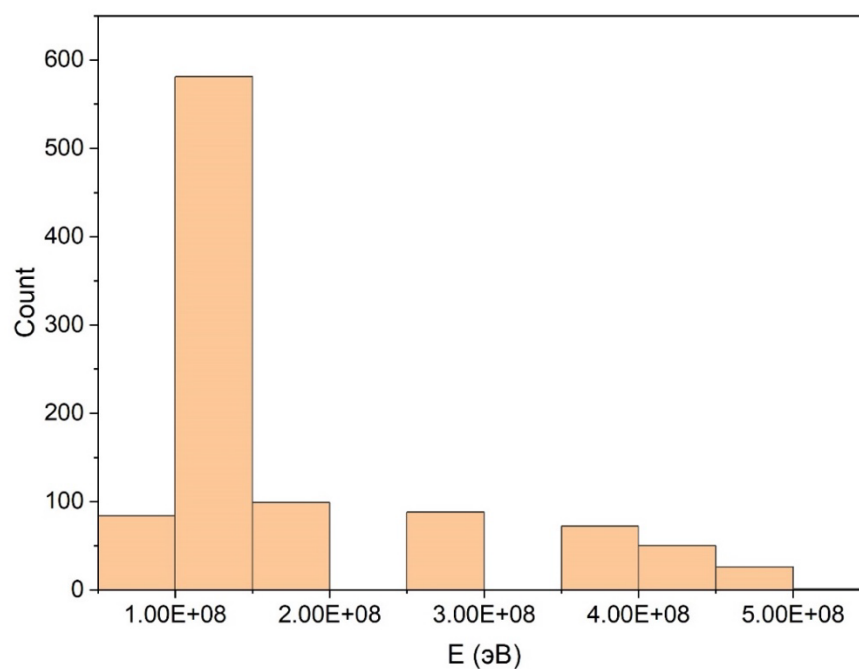


Рис.6 Энергетический спектр электронов при  $B_{\min}=4500$  Гс

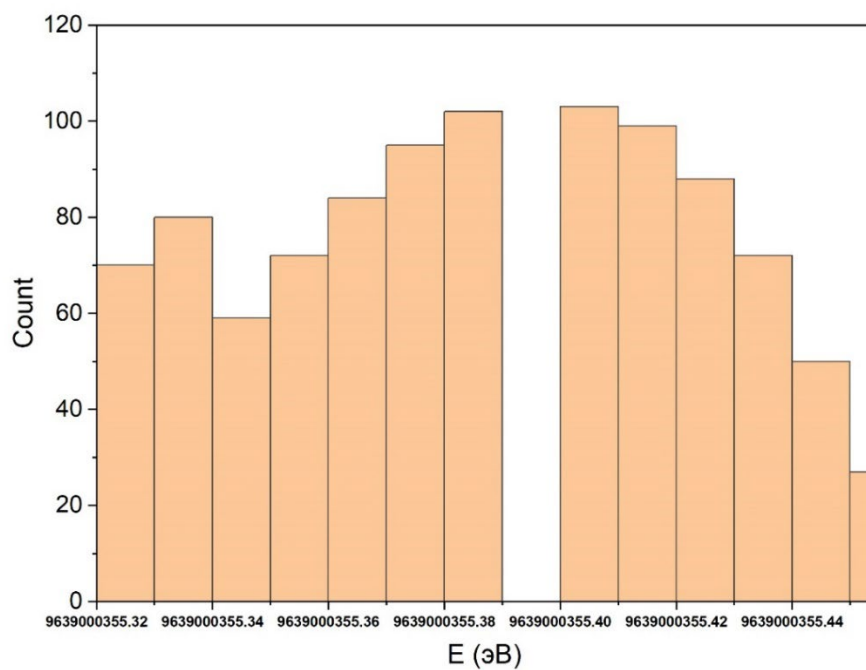


Рис.7 Энергетический спектр протонов при  $V_{\min}=4500$  Гс

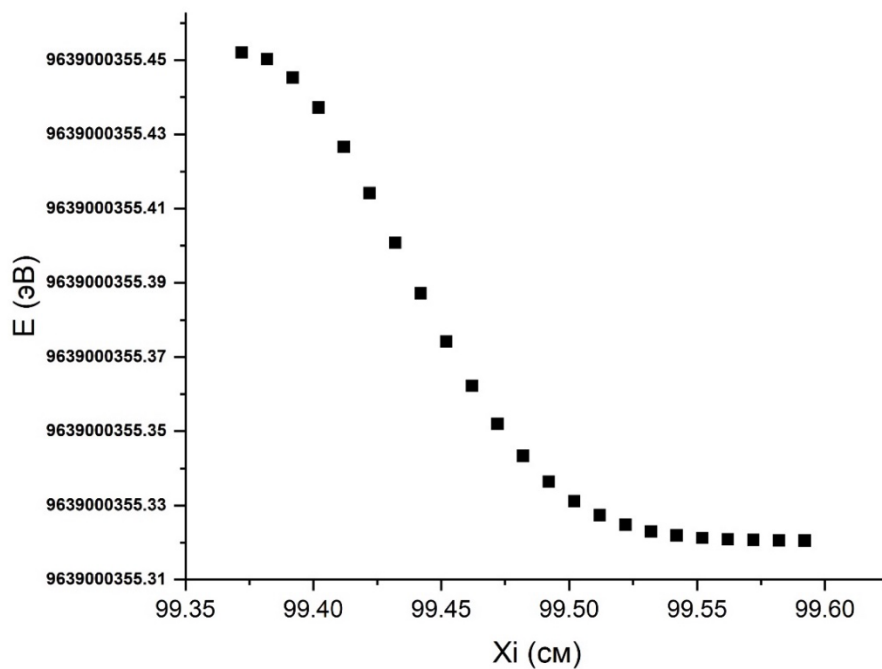


Рис.8 Энергетический спектр протонов при  $V_{\min}=4500$  Гс

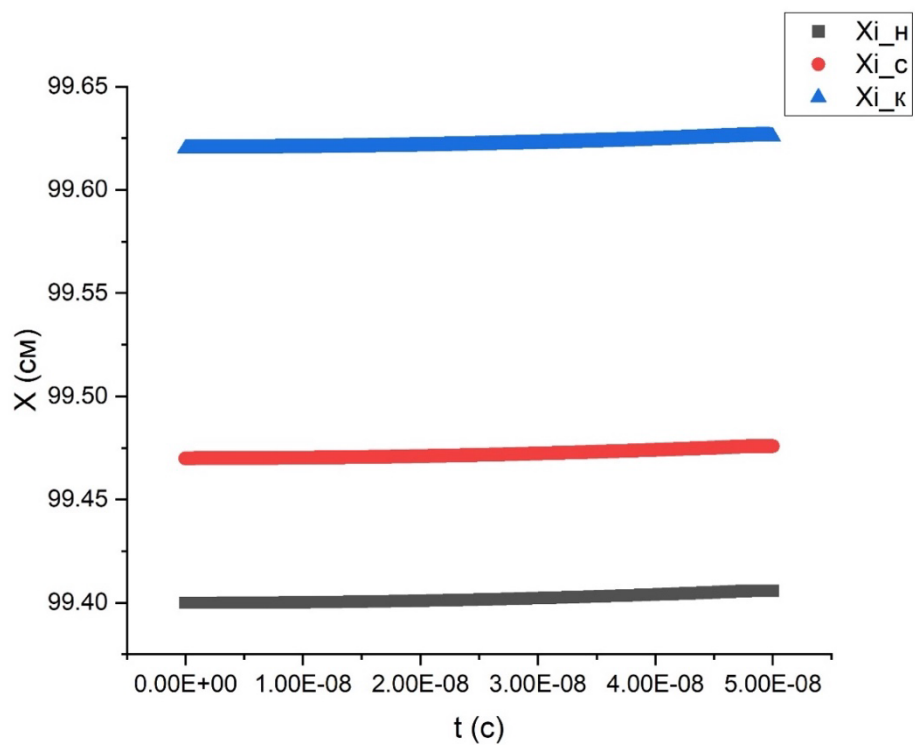


Рис.9 Траектория движения протонов, от начала, от середины от конца сгустка при  $B_{\min}=4620$  Гс

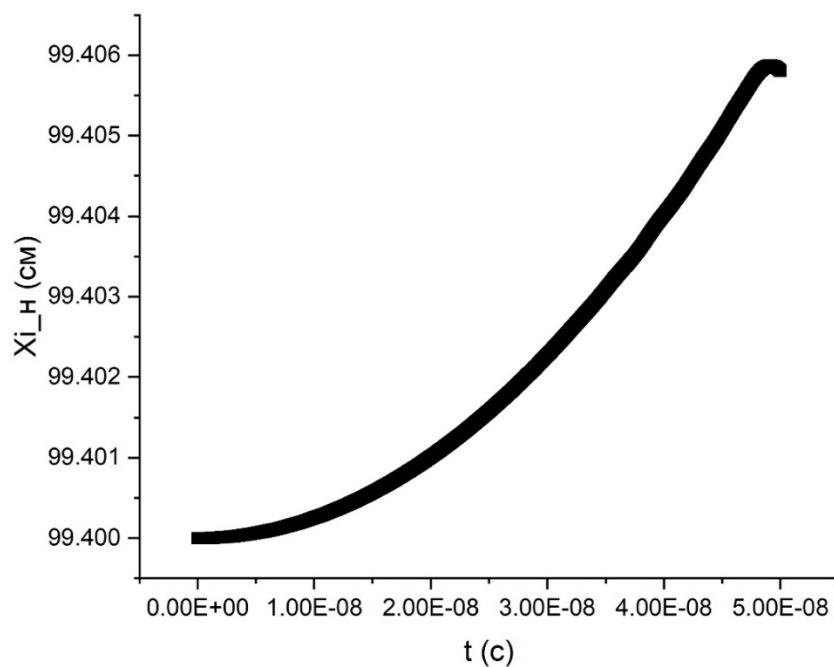


Рис.10 Траектория движения протона от начала сгустка при  $B_{\min}=4620$  Гс

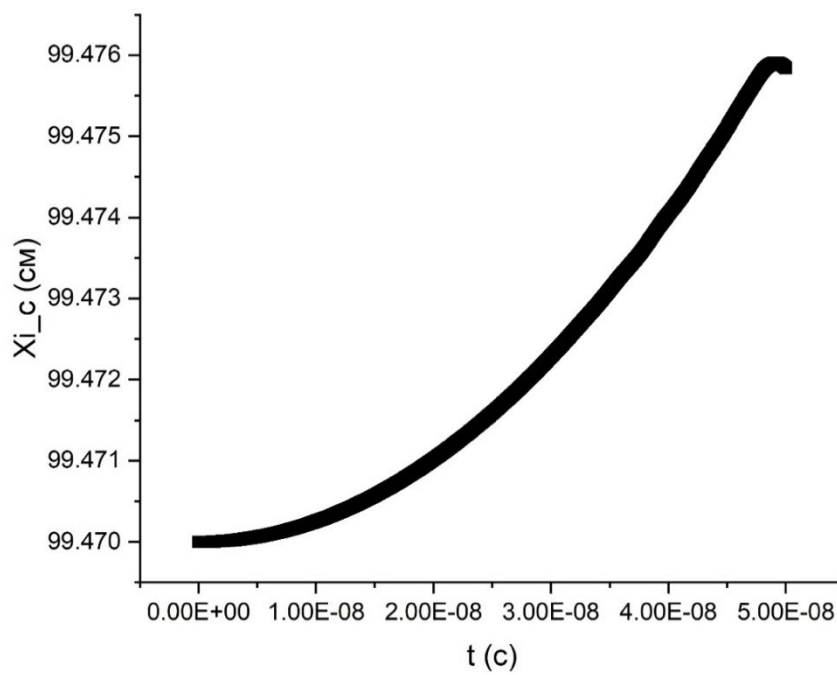


Рис.11 Траектория движения протона от середины сгустка при  $V_{\min}=4620$  Гс

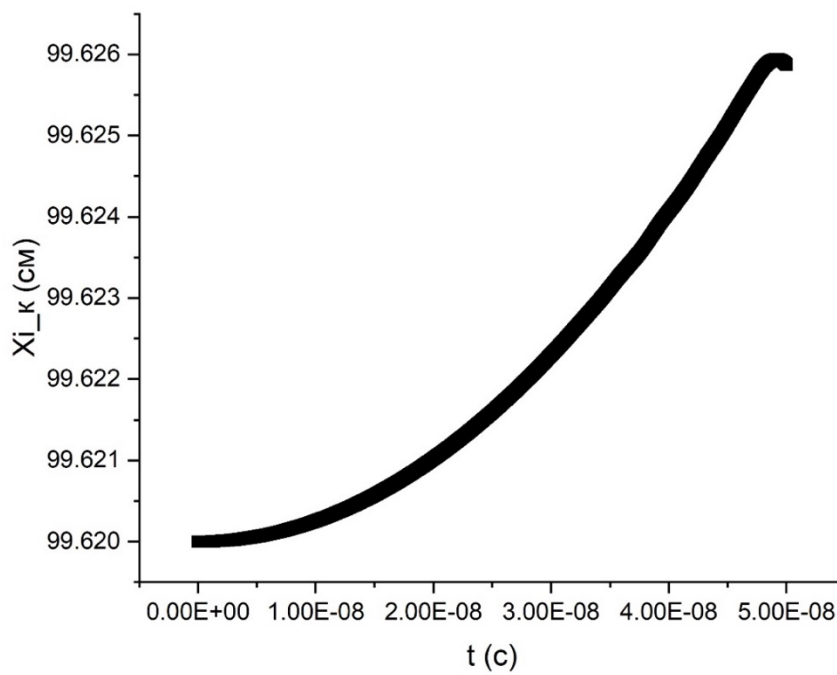


Рис.12 Траектория движения протона от конца сгустка при  $V_{\min}=4620$  Гс

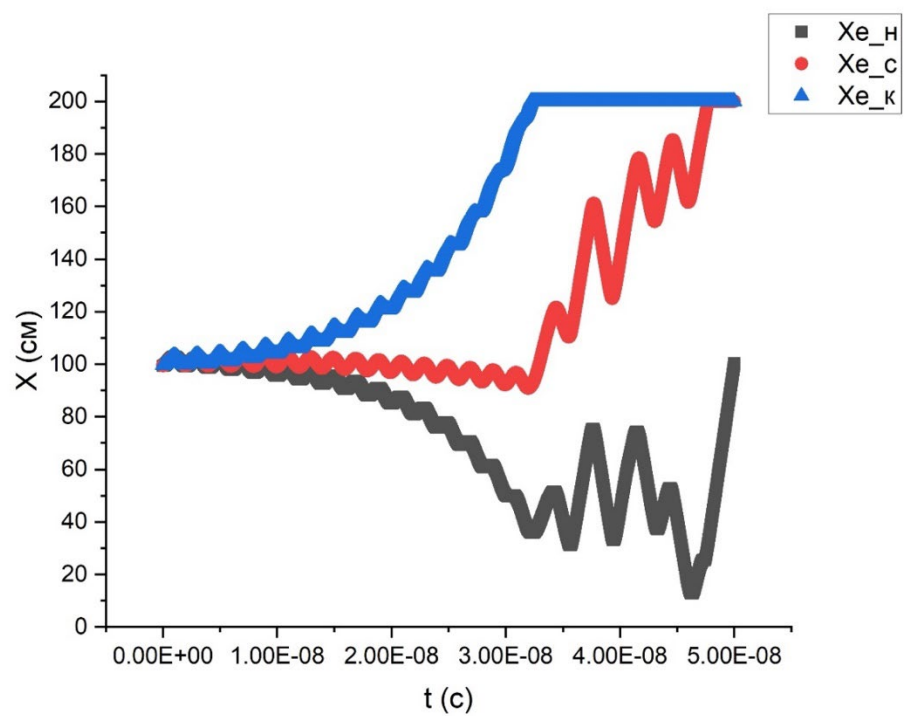


Рис.13 Траектория движения электронов от начала, от середины от конца сгустка при  $V_{\min}=4620$  Гс

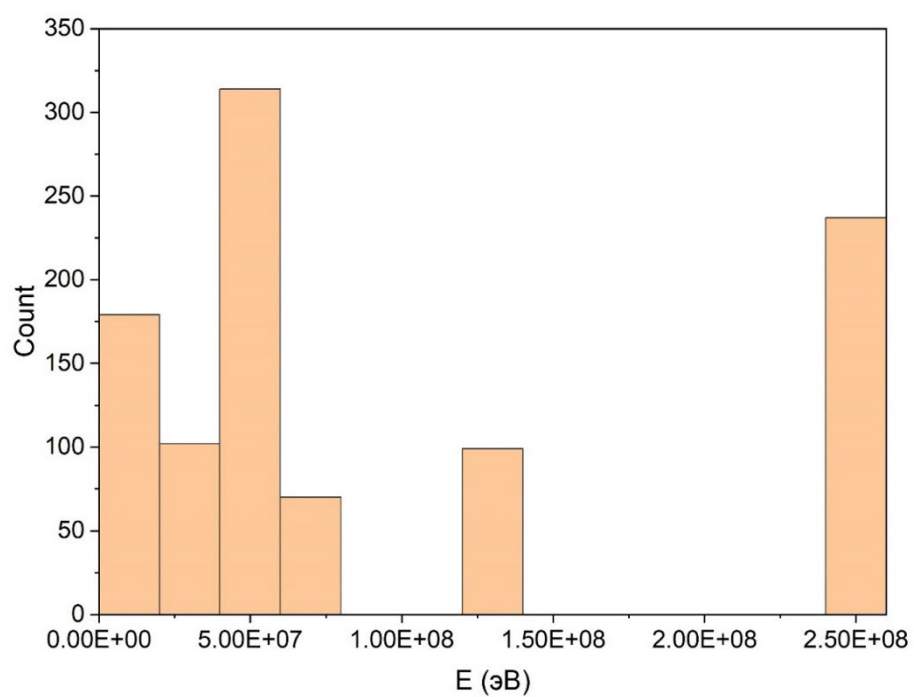


Рис.14 Энергетический спектр электронов при  $V_{\min}=4620$  Гс

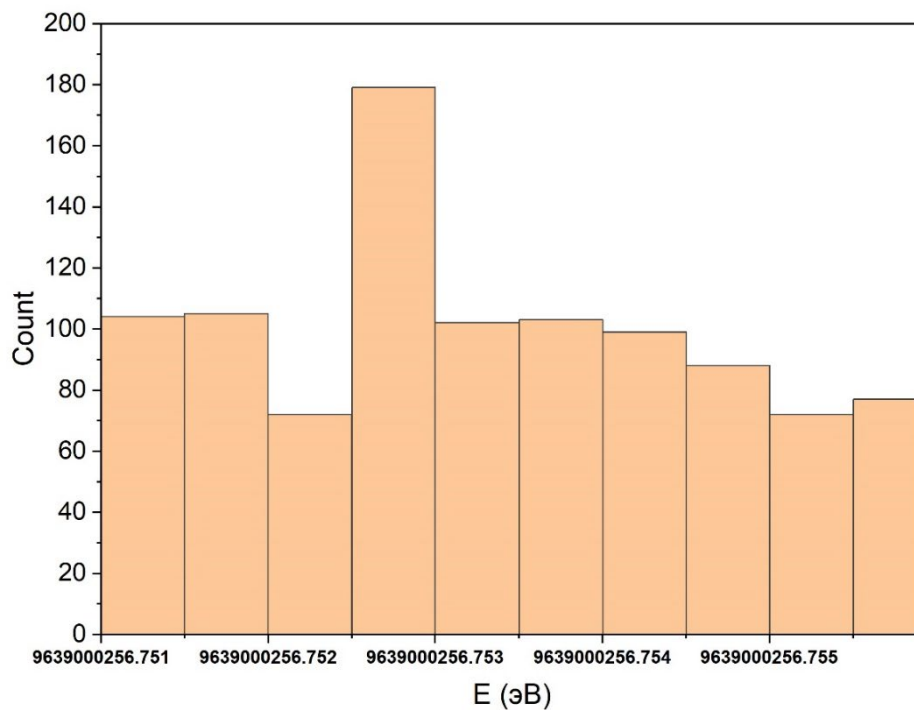


Рис.15 Энергетический спектр протонов при  $V_{\min}=4620$  Гс

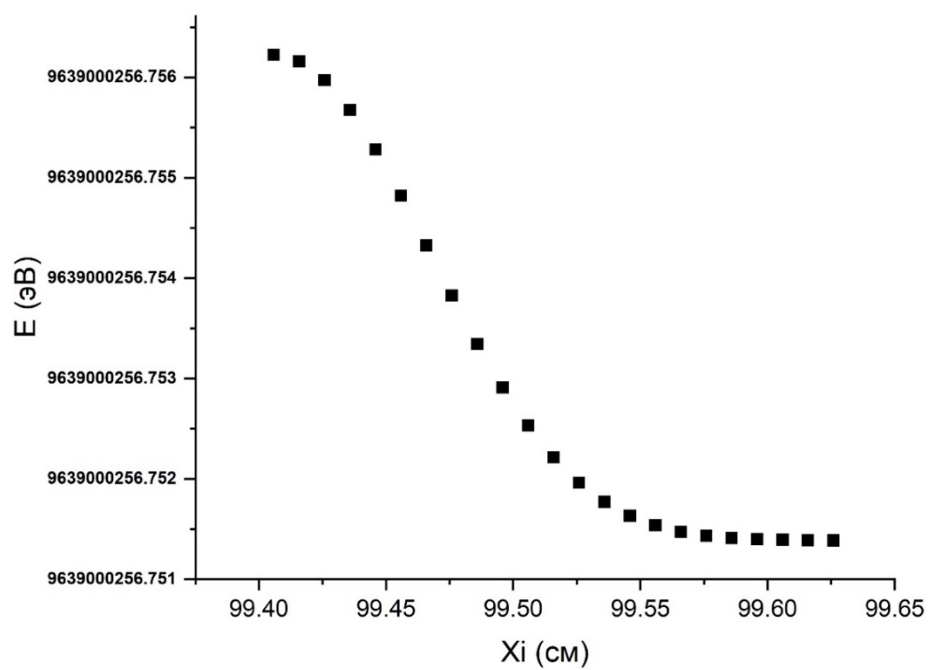


Рис.16 Энергетический спектр протонов от координат при  $V_{\min}=4620$  Гс

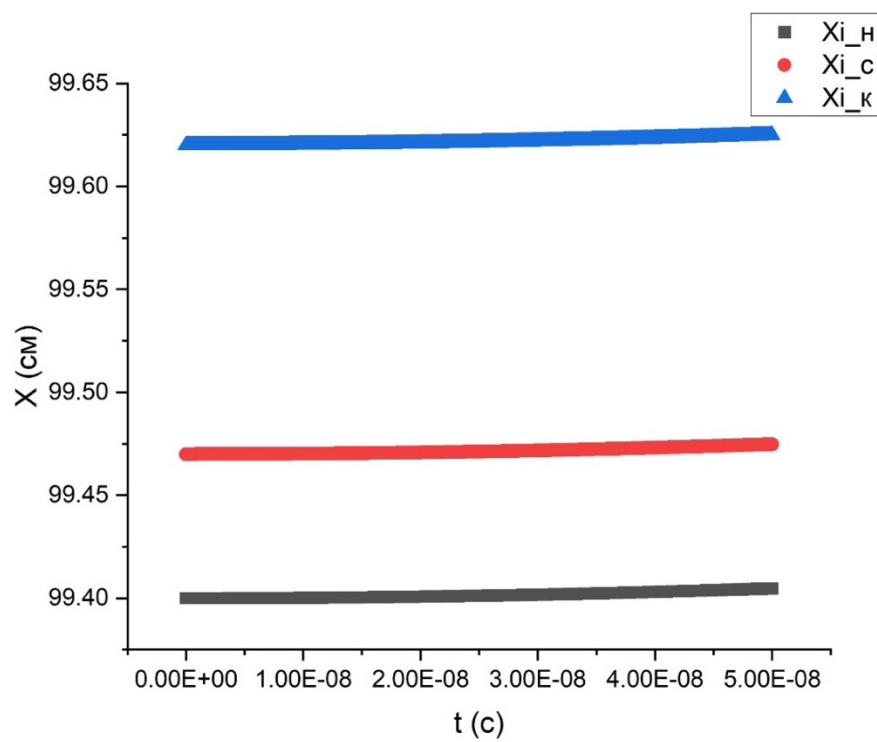


Рис.17 Траектория движения протонов, от начала, от середины от конца сгустка при  $B_{\min}=4620$  Гс

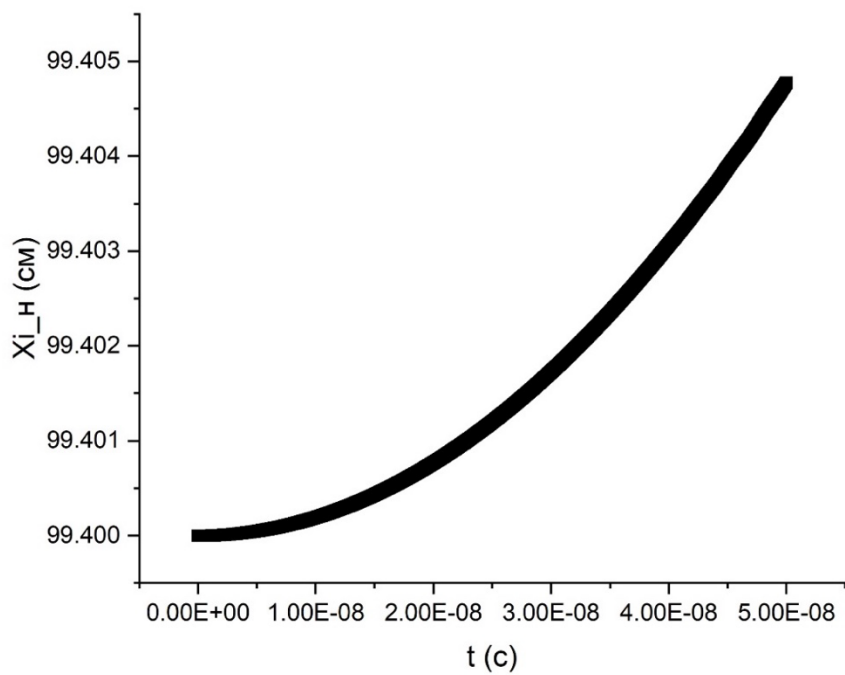


Рис.18 Траектория движения протона от начала сгустка при  $B_{\min}=4700$  Гс

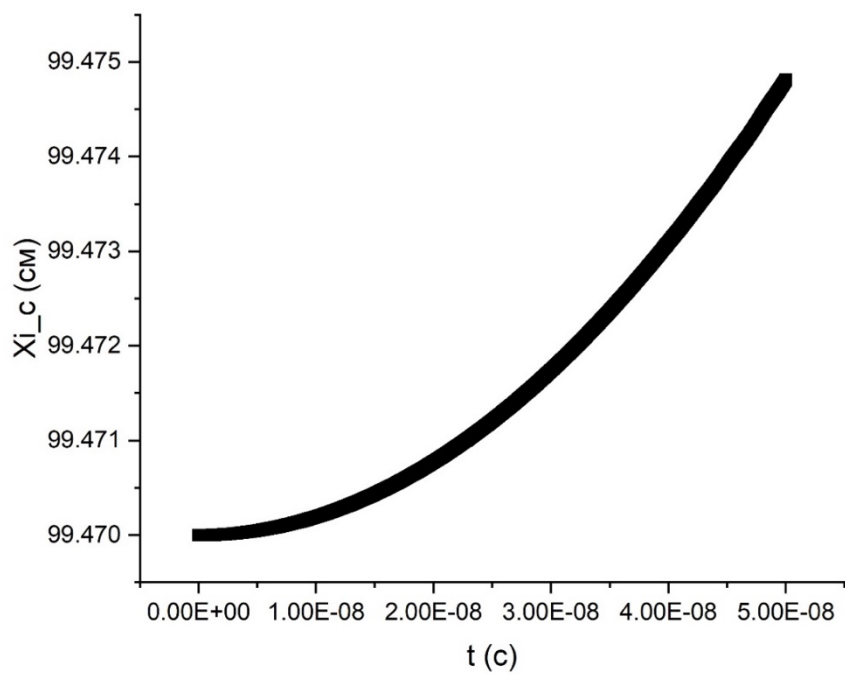


Рис.19 Траектория движения протона от середины сгустка при  $V_{\min}=4700$  Гс

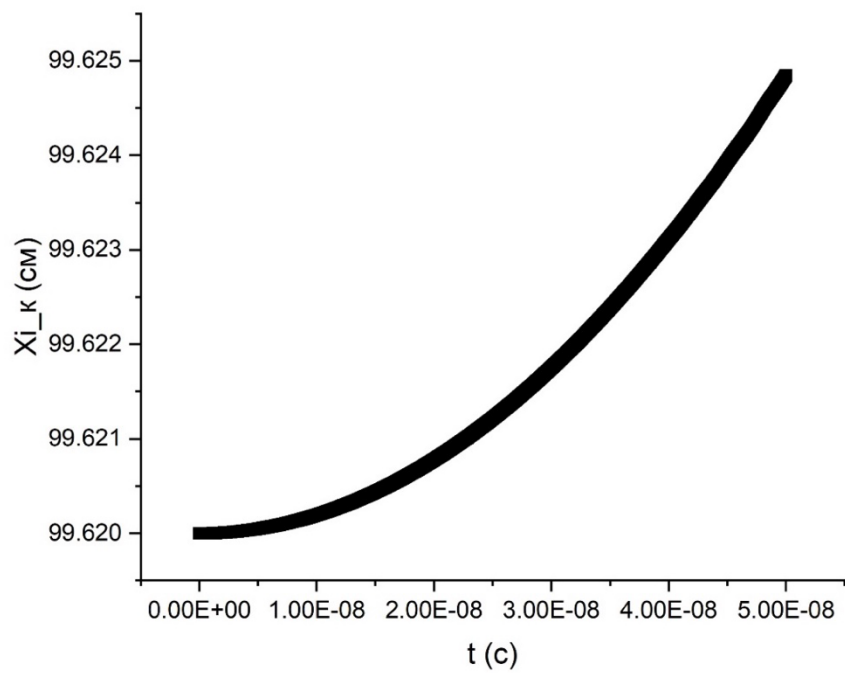


Рис.20 Траектория движения протона от конца сгустка при  $V_{\min}=4700$  Гс



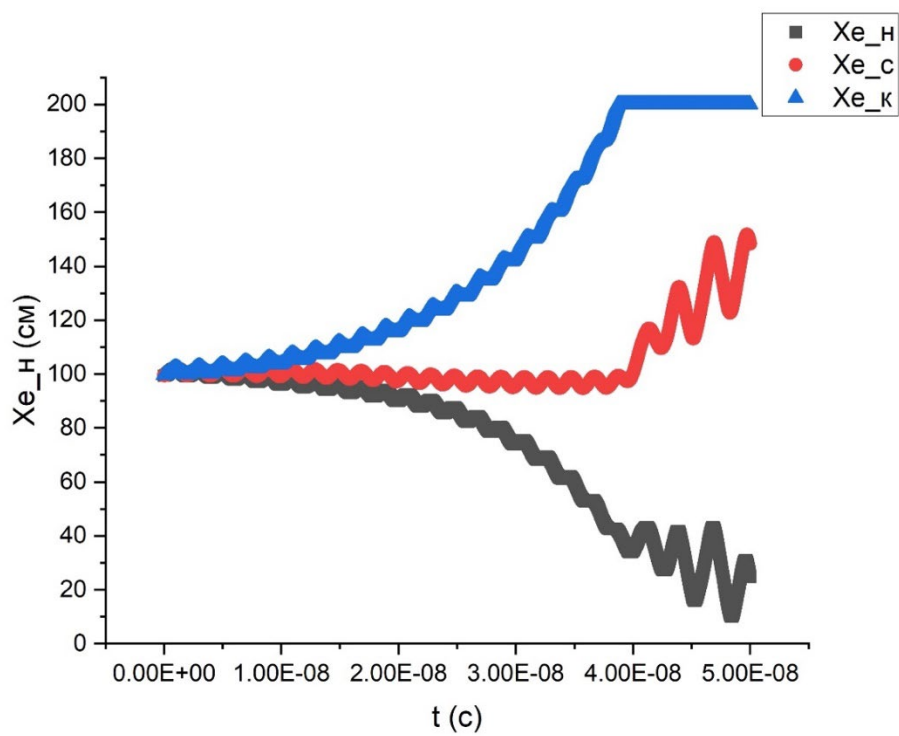


Рис.21 Траектория движения электронов от начала, от середины от конца сгустка при  $V_{min}=4700$  Гс

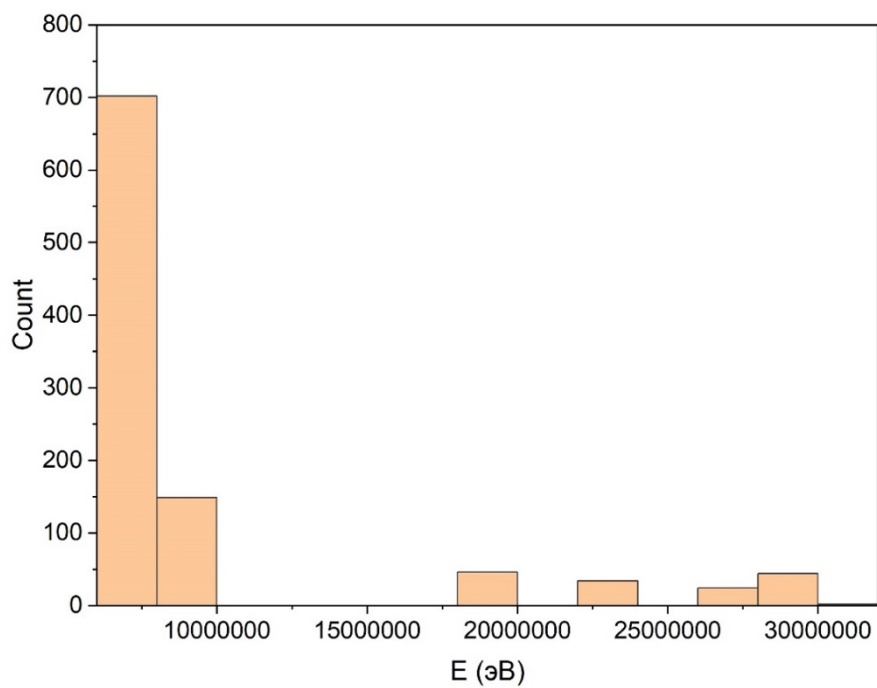


Рис.22 Энергетический спектр электронов при  $V_{min}=4700$  Гс

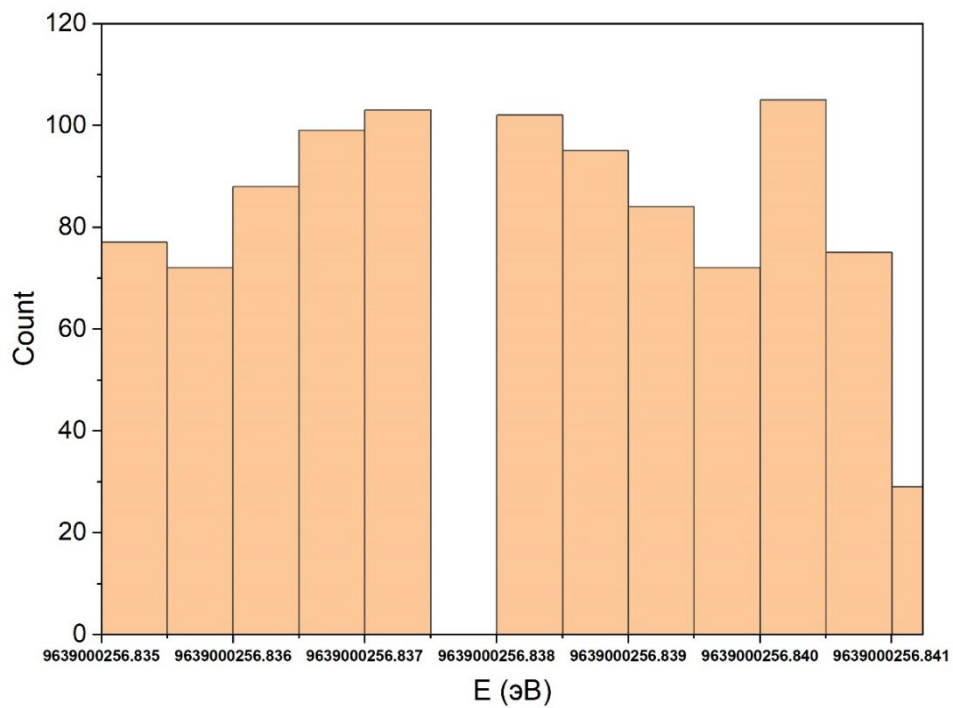


Рис.23 Энергетический спектр протонов при  $V_{\min}=4700$  Гс

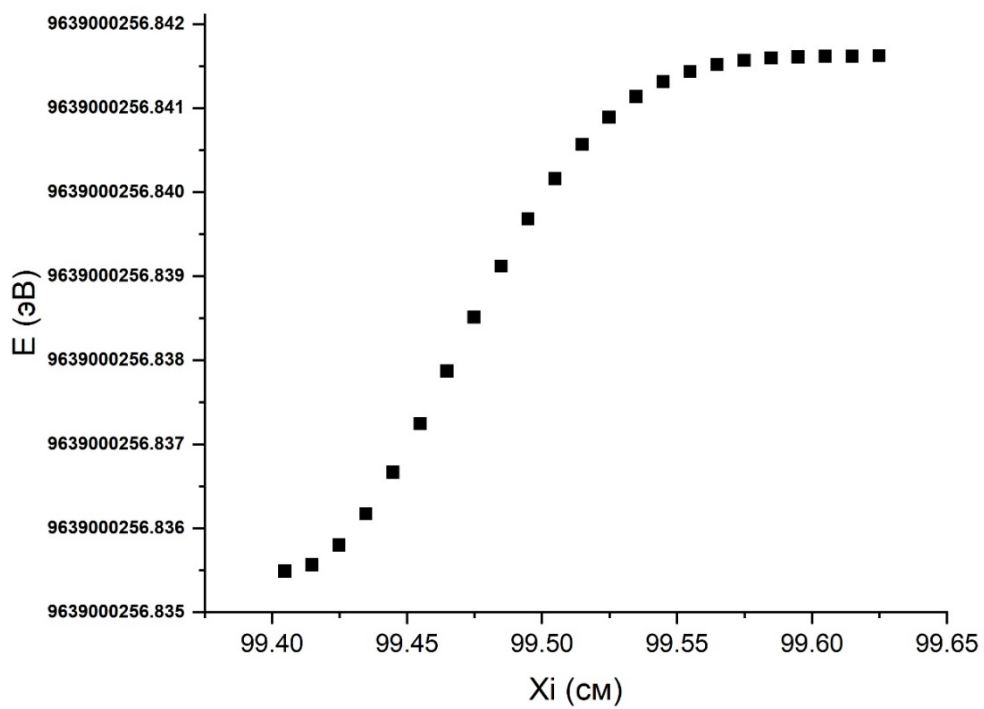


Рис.24 Энергетический спектр протонов от координат при  $B_{min}=4700$  Гс

### **Листинг программы:**

### **Анализ результатов:**

В начальный момент времени распределения электронов и протонов одинаковы, поэтому, как выше показано в уравнениях, требуется сила со стороны магнитного поля, для того чтобы перемещать электроны, вследствие чего отделяются отрицательно заряженные частицы от положительно заряженных. В результате этого, в пространстве создается электрическое поле. При больших минимальных значениях индуктивности магнитного поля  $B_{min}$  значение ее градиента будет мало, сила, действующая на электроны со стороны магнитного поля, тоже будет мало и поэтому их отталкивание от начального положения будет незначительно, как и видно на графиках при  $B_{min} = 4700$  Гс. При уменьшении значения  $B_{min}$ , как видно на графиках при  $B_{min} = 4500$  Гс, ускорение протонов реализуется, так как сила, достаточно велика для перемещения электронов. Предельное значение  $B_{min} = 4620$  Гс получилось методом проб и ошибок. Этим методом сама программа считает приблизительное значение  $B_{min}$ , при котором не менее 30% протонов ускоряются. Сравнивая результат, полученный аналитическим путем с результатами программой, видим, что программа работает с высокой точностью.

### **Выводы:**

В результате проделанной работы был получен вывод, что при определенных значениях индуктивности магнитного поля  $B_{min}$  происходит отделение отрицательно заряженных электронов от положительно заряженных протонов, что создает электрическое поле. При больших значениях  $B_{min}$  отталкивание электронов от начального положения незначительно, но при уменьшении значения  $B_{min}$  ускорение

протонов реализуется. Определено предельное значение  $B_{\min}$ , при котором не менее 30% протонов ускоряются.

### Листинг программы:

```

1  program Excer_5
2      implicit none
3      real(8), dimension(:), allocatable:: dens, fi, E
4      real(8), dimension(:, :), allocatable:: x_ion, p_ion, x_e, p_e
5      real(8):: L, d, T, dt, dx, q_e, q_p, m_e, m_p, dL, E_0, B_max, B,
6      c, R_m, B_min, temp
7      integer(8):: ne_0, N_g, i, j, n_c, quantinty, quantinty_change,
8      counter_last
9
10     ne_0 = 8E10                                !Концентрация электронов
11     L = 200                                     !Длина просраносва
12     d = 1.2                                    !Ширина слоя
13     N_g = 20000                                !Количество ячеек
14     T = 5E-8                                   !Время моделирования
15     dt = T/N_g                                 !Шаг по времени
16     dx = L/N_g                                 !Шаг по расстоянию
17     q_e = -4.8E-10                             !Заряд электрона
18     q_p = 4.8E-10                              !Заряд протона
19     m_e = 9.1E-28                              !масса электрона
20     m_p = 1.7E-24                              !масса протона
21     n_c = 1000                                 !Количество счетных
22     E_0 = 1.8E-5                               !Нач. энергия (Эрг)
23     B_max = 5000                               !Индукция (Гс)
24     B_min = 4620
25     c = 3E10
26     R_m = m_p/m_e
27     temp = (d/dx)/2
28
29
30     allocate(dens(0:N_g + 1))
31     allocate(fi(0:N_g + 1))
32     allocate(E(0:N_g + 1))
33     allocate(x_ion(0:n_c,0:N_g + 1))          !коор йонов. 1-номер
34 йона, 2-момент времени
35     allocate(p_ion(0:n_c,0:N_g + 1))          !импульс йонов влодь
36 X. 1-номер йона, 2-момент времени
37     allocate(x_e(0:n_c,0:N_g + 1))            !коор е. 1-номер е, 2-
38 момент времени
39     allocate(p_e(0:n_c,0:N_g + 1))            !импульс е влодь X. 1-
40 номер е, 2-момент времени
41
42
43     counter_last = 0
44     quantinty = n_c
45
46     fi(0) = 0
47     fi(1) = 0
48     fi(N_g) = 0
49     E(0) = 0
50     E(N_g) = 0

```

```

51
52
53     do i = 0, n_c
54 !Нач. скорость элек и ионов
55         p_ion(i,0) = 0
56         p_e(i,0) = 0
57     enddo
58
59     dL = (-1) * d/2
60     i = 0
61     do while(quantinty > 0)
62         if(i >= int((N_g/2)-60) .and. i <= int((N_g/2)+60) .and.
63 quantinty > 0) then !Расп. электронов и йонов
64             quantinty_change = int(quantinty * abs(cos(3.1415 *
65 abs(dL)/d)))
66             if(quantinty_change == 0) then
67                 quantinty_change = 1
68             endif
69
70
71             if(quantinty <= quantinty_change) then
72
73                 do j = counter_last, counter_last + quantinty
74                     x_e(j,0) = i * dx
75                     x_ion(j,0) = i * dx
76                 enddo
77
78                 exit
79
80             else
81                 do j = counter_last, counter_last + quantinty_change
82                     x_e(j,0) = i * dx
83                     x_ion(j,0) = i * dx
84                 enddo
85             endif
86
87             counter_last = counter_last + quantinty_change
88             quantinty = quantinty - quantinty_change
89             dL = dL + dx
90         endif
91
92         E(i) = 0
93         fi(i) = 0
94         dens(i) = 0
95
96         if(i >= N_g - 1) then
97             i = 0
98             dL = (-1) * d/2
99         else
100             i = i + 1
101         endif
102     enddo
103
104
105
106     do j = 0, N_g - 1
107 !Цикль по времени
108

```

```

109         do i = 0, n_c
110
111             dens(int(x_ion(i,j)/dx)) = dens(int(x_ion(i,j)/dx)) +
112 ( (ne_0/n_c) * q_p)
113             dens(int(x_e(i,j)/dx)) = dens(int(x_e(i,j)/dx)) +
114 ( (ne_0/n_c) * q_e)
115
116         enddo
117
118
119         do i = 0, N_g
120             fi(0) = fi(0) + i*dens(i)
121
122         enddo
123
124         fi(0) = fi(0)/N_g
125         fi(1) = dens(0) + 2*fi(0)
126
127
128         do i = 2, N_g
129             fi(i) = (-1)*dens(i - 1)*dx**2 + 2*fi(i - 1) - fi(i - 2)
130         enddo
131
132         do i = 1, N_g - 2
133             E(i) = (fi(i - 1) - fi(i + 1))/(2 * dx)
134         enddo
135
136         do i = 0, n_c
137 !Цикль по йонам и электроном
138
139             if(x_e(i,j) >= L) then
140                 x_e(i,j) = L - dx
141             else if(x_e(i,j) <= 0) then
142                 x_e(i,j) = dx
143             endif
144
145             if(x_ion(i,j + 1) >= L) then
146                 x_ion(i,j) = L - dx
147             else if(x_ion(i,j) <= 0) then
148                 x_ion(i,j) = dx
149             endif
150
151
152
153             B = ((B_min - B_max)/(100.0)) * x_e(i,j) + ((B_min -
154 B_max)/200.0) * L + B_max
155             p_e(i,j + 1) = p_e(i,j) + (((-1) * (E_0/B) * ((B_min -
156 B_max)/100.0)) + (q_e * E(int(x_e(i,j)/dx)))) * dt
157             if(p_e(i,j) >= 0) then
158                 x_e(i,j + 1) = x_e(i,j) + sqrt(1/(1/(c**2) +
159 (m_e**2)/(p_e(i,j)**2))) * dt
160             else
161                 x_e(i,j + 1) = x_e(i,j) - sqrt(1/(1/(c**2) +
162 (m_e**2)/(p_e(i,j)**2))) * dt
163             endif
164
165
166

```

```

167         p_ion(i,j + 1) = p_ion(i,j) + (q_p *
168 (E(int(x_ion(i,j)/dx))/R_m)) * dt
169         if(p_ion(i,j) >= 0) then
170             x_ion(i,j + 1) = x_ion(i,j) + sqrt(1/(1/(c**2) +
171 (m_p**2)/(p_ion(i,j)**2))) * dt
172         else
173             x_ion(i,j + 1) = x_ion(i,j) - sqrt(1/(1/(c**2) +
174 (m_p**2)/(p_ion(i,j)**2))) * dt
175         endif
176
177
178
179
180     enddo
181
182
183     do i = 0, N_g
184         dens(i) = 0
185     enddo
186
187 enddo
188
189 open(1, file = "spectr_E.csv")
190 open(2, file = "spectr_Ion.csv")
    open(3, file = "coord.csv")
191
192     do i = 0, n_c
193         write(1,*) i,"",x_e(i,N_g-1),"", ((abs(p_e(i,N_g-
194 1))*(c**2))/(sqrt(1/(1/(c**2) &
195 + (m_e**2)/(p_e(i,N_g-1)**2)))) *6.3E12
196         write(2,*) i,"",x_ion(i,N_g-1),"", ((abs(p_ion(i,N_g-
197 1))*(c**2))/(sqrt(1/(1/(c**2) &
198 + (m_p**2)/(p_ion(i,N_g-1)**2)))) *6.3E12
199     enddo
200
201     do i = 0, N_g
202         write(3,*) i *
203 dt,"",x_ion(0,i),"",x_ion(int(n_c/2),i),"",x_ion(int(n_c-1),i), &
204 "",x_e(0,i),"",x_e(int(n_c/2),i),"",x_e(n_c-1,i)
205     enddo
206
207     close(1)
208     close(2)
209     close(3)
210     print*, "Done!"
211 end program Excer_5

```

## Литература

- [1]. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Альянс, 2016.
- [2]. Буйначев, С. К.: Применение численных методов в математическом моделировании : учебное пособие / С. К. Буйначев. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. – 70, [2] с.
- [3]. Милантьев В.П. Явление циклотронного авторезонанса и его применения. // Успехи физических наук. –1997. Т.167. No1.
- [4]. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Альянс, 2016.
- [5]. Туриков В.А., Умнов А.М. Влияние кулоновского поля на захват пучка электронов в режим гиромагнитного авторезонанса // ЖТФ, т.56, вып. 4, 762- 765, 1986.