Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Направление подготовки

«01.04.02 Прикладная математика и информатика»

Курсовая работа
по дисциплине
«Анализ данных с интервальной неопределенностью»

Выполнила студентка гр. 5040102/20201 Харисова Т.А.

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Постановка задачи

Решить СЛАУ, правая часть которой представлена в виде вектора твинов, а левая – матрицей томографии. Исследовать собственные числа матрицы томографии.

Теория

Имеется фиксированное количество областей, находящихся на определенном расстоянии от камеры-обскура, за которой стоят датчики. Геометрическая модель такой конструкции представляет собой m окружностей (областей) и n хорд (рис. 1). Элементы матрицы томографии находятся как точки пересечения хорд с каждой из окружностей.

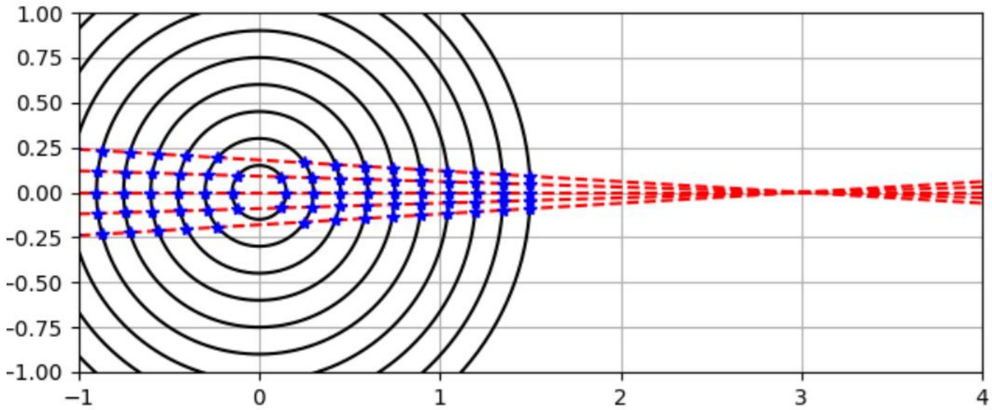

Рисунок 1. Геометрическая модель

Имеется ИСЛАУ, левая часть которой представлена матрицей томографии, а правая представляет собой вектор твинов:

$$Ax = \left[[\underline{b}_{in}, \overline{b}_{in}], [\underline{b}_{out}, \overline{b}_{out}]\right] \quad (1)$$

Для решения ИСЛАУ с твинами независимо решаются две системы, с внутренними и с внешними оценками в правой части. Для поиска решения могут быть использованы стандартные методы решения СЛАУ, но с использованием интервальной арифметики.

Для решения ИСЛАУ также могут быть применены стандартные методы решения СЛАУ, но с учетом особенностей твинной арифметики.

Для поиска точечного решения системы независимо для внутренних и внешних оценок решается оптимизационная задача

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \to \min \quad (2)$$

с условиями

$$\operatorname{mid} \underline{b}_i - w_i \operatorname{rad} \underline{b}_i \le \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le \operatorname{mid} \overline{b}_i + w_i \operatorname{rad} \overline{b}_i \quad (3)$$

$$w_i \ge 0, \qquad i = 1..n,$$

где w_i – искомые веса, x_j – элементы искомого вектора x.

Реализация

Работа выполнена с помощью языка программирования Python в среде разработки Visual Studio Code. Ссылка на исходный код работы: course(github.com).

Результаты

Рассматривается модель с $m = n = 5$. Элементы правой части системы одинаковы и представлены твином $\left[\left[\dot{b} - \varepsilon, \dot{b} + \varepsilon\right], \left[\dot{b} - 2\varepsilon, \dot{b} + 2\,\varepsilon\right]\right]$, где $\varepsilon = 10^{-6}$, $\dot{b} = 1$.

При решении оптимизационной задачи было найдено следующее точечное решение (как для внешней, так и для внутренней оценки):

$$x = [\,0.29249, 0.29243, 0.37428, -1.04422, 3.41835]$$

Пусть решение системы ищется в виде $x = A^{-1}b$.

При решении СЛАУ отдельно для внутренних и внешних оценок были получены следующие значения:

$$x = [[[-0.51918, 1.10417], [-1.33085, 1.91584]],$$

$$[[-0.534223, 1.11908], [-1.36087, 1.94573]],$$

$$[[-2.39896, 3.14754], [-5.17221, 5.92079]],$$

$$[[-25.1479, 23.0595], [-49.2516, 47.1632]],$$

$$[[-19.5504, 26.3871], [-42.5192, 49.3559]]]$$

Точечное решение лежит внутри внутренних оценок.

При поиске интервальных оценок решения системы стандартными методами, но с учетом твинной арифметики, внешние оценки совпадают с предыдущим результатом, а внутренние интервалы оказываются вырожденными. При подсчете x происходит суммирование твинов $x_i = \sum_j a_{ij} b_j$, где a_{ij} – элементы A^{-1}. Условие невырожденности внутренней оценки суммы твинов:

$$\max_i |a_i| \geq \sum_{k \neq i} |A_k|,$$

где $|a_i|$ – длина внутренней оценки, $|A_k|$ – длина внешней оценки.

Возьмем вектор b такой, чтобы условие невырожденности выполнялось. Для этого расширим внутреннюю оценку одного из элементов b. Пусть $b_i = \left[\left[\dot{b} - \varepsilon, \dot{b} + \varepsilon\right], \left[\dot{b} - 2\varepsilon, \dot{b} + 2\,\varepsilon\right]\right]$, где $\varepsilon = 10^{-6}$, $\dot{b} = 1$, а один из элементов вектора b возьмем равным $b_i = \left[\left[\dot{b} - 100\varepsilon, \dot{b} + 100\varepsilon\right], \left[\dot{b} - 101\varepsilon, \dot{b} + 101\,\varepsilon\right]\right]$.

Точечное решение:

$$x = [\,0.29249, 0.29242, 0.37428, -1.04423, 3.41835\,]$$

Решение, полученное с помощью решения отдельных задач для внутренних и внешних оценок:

$$x = [[[-5.71668, 6.30167], [-6.52836, 7.11334]],$$

$$[[-5.86635, 6.45121], [-6.693008, 7.27786]],$$

$$[[-21.89795, 22.64652], [-24.67120, 25.41977]],$$

$$[[-185.11728, 183.028827], [-209.22097, 207.132516]],$$

$$[[-170.55042, 177.38712]], [-193.51918, 200.355886]]]$$

Решение, полученное с учетом правил твинной арифметики:

$$x = [[[-3.43916, 4.02415], [-6.52836, 7.11334]],$$

$$[[-3.547981, 4.13284], [-6.69300, 7.27786]],$$

$$[[-14.16908, 14.91765], [-24.67120, 25.41977]],$$

$$[[-117.65377, 115.56531], [-209.22097, 207.13251]],$$

$$[[-106.21990, 113.05660], [-193.51918, 200.35588]]]$$

Интервалы внутренних оценок, полученные вторым способом, оказываются уже, чем интервалы, полученные первым способом.

Собственные значения матрицы томографии:

$$\lambda = [1.49, -9.8 * 10^{-2}, -5.0 * 10^{-3}, -3.7 * 10^{-5}, -6.0 * 10^{-8}]$$

Заметна большая разница между величиной собственных значений. Максимальное собственное значение оказывается больше суммы остальных собственных значений:

$$\max|\lambda| = 1.49 > 0.10 = \sum_{\lambda \neq \max \lambda} |\lambda|$$

Анализ результатов

Точечное решение лежит внутри найденных интервальных оценок. При решении системы с использованием твинной арифметики не всегда удается получить невырожденные внутренние оценки. В случае, когда внутренние оценки все же могут быть найдены, они образуют более узкие интервалы, чем оценки, полученные при решении двух независимых систем для внутренних и внешних оценок. При любом способе решения результат имеет довольно большую интервальную неопределенность, что можно объяснить наличием малых значений собственных чисел матрицы.