Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт

Направление подготовки
«01.04.02 Прикладная математика и информатика»

Курсовая работа
по дисциплине
«Анализ данных с интервальной неопределенностью»

Выполнила студентка гр. 5040102/20201 Харисова Т.А.

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Постановка задачи

Решить СЛАУ, правая часть которой представлена в виде вектора твинов, а левая – матрицей томографии. Исследовать собственные числа матрицы томографии.

Теория

Имеется фиксированное количество областей, находящихся на определенном расстоянии от камеры-обскура, за которой стоят датчики. Геометрическая модель такой конструкции представляет собой m окружностей (областей) и n хорд (рис. 1). Элементы матрицы томографии находятся как точки пересечения хорд с каждой из окружностей.

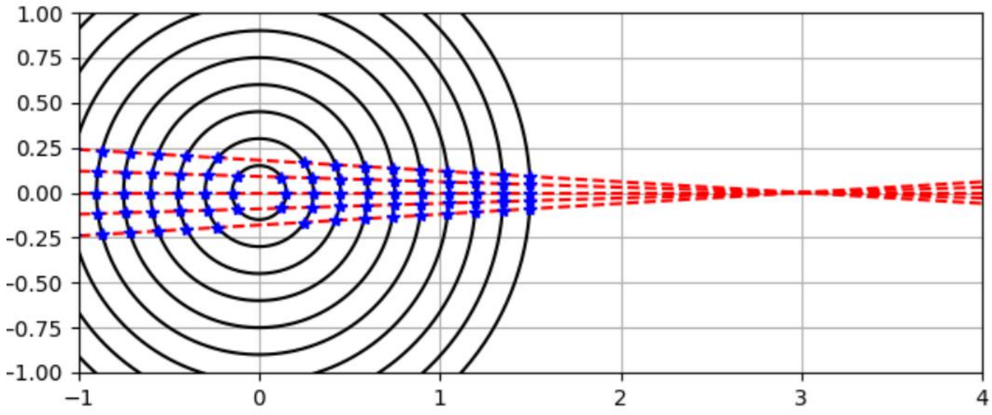

Рисунок 1. Геометрическая модель

Имеется ИСЛАУ, левая часть которой представлена матрицей томографии, а правая представляет собой вектор твинов:

$$Ax = \left[[\underline{b}_{in}, \overline{b}_{in}], [\underline{b}_{out}, \overline{b}_{out}]\right] \tag{1}$$

Для решения ИСЛАУ с твинами независимо решаются две системы, с внутренними и с внешними оценками в правой части. Для поиска решения могут быть использованы стандартные методы решения СЛАУ, но с использованием интервальной арифметики.

Для решения ИСЛАУ также могут быть применены стандартные методы решения СЛАУ, но с учетом особенностей твинной арифметики.

Для поиска точечного решения системы независимо для внутренних и внешних оценок решается оптимизационная задача

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \to \min \tag{2}$$

с условиями

$$\operatorname{mid} \underline{b}_i - w_i \operatorname{rad} \underline{b}_i \leq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq \operatorname{mid} \overline{b}_i + w_i \operatorname{rad} \overline{b}_i \tag{3}$$

$$w_i \geq 0, \qquad i = 1..n,$$

где w_i – искомые веса, x_j – элементы искомого вектора x.

Реализация

Работа выполнена с помощью языка программирования Python в среде разработки Visual Studio Code. Ссылка на исходный код работы: course(github.com).

Результаты

Рассматривается модель с $m = n = 5$. Возьмем в качестве точного решения $x_j = 100$, $j = 1..m$, тогда $\dot{b}_i = 100 * \sum_j a_{ij}$, $i = 1..n$. Представим правую часть системы твином $\left[\left[\dot{b}_i - \varepsilon, \dot{b}_i + \varepsilon\right], \left[\dot{b}_i - 2\varepsilon, \dot{b}_i + 2\,\varepsilon\right]\right]$, где $\varepsilon = 10^{-6}$.

При решении оптимизационной задачи было найдено следующее точечное решение (как для внешней, так и для внутренней оценки):

$$x = [\,100.0, 100.0, 99.99999999, 100.0000001, 99.99999991]$$

Пусть решение системы ищется в виде $x = A^{-1}b$.

При решении СЛАУ отдельно для внутренних и внешних оценок были получены следующие значения:

$$x = [[[99.18833, 100.81167], [98.37665, 101.62335]],$$

$$[[99.17335, 100.82665], [98.3467, 101.6533]],$$

$$[[97.22675, 102.77325], [94.4535, 105.5465]],$$

$$[[75.89631, 124.10369], [51.79262, 148.20738]],$$

$$[[77.03124, 122.96876], [54.06248, 145.93752]]]$$

Точечное решение лежит внутри внутренних оценок.

При поиске интервальных оценок решения системы стандартными методами, но с учетом твинной арифметики, внешние оценки совпадают с предыдущим результатом, а внутренние интервалы оказываются вырожденными. При подсчете x происходит суммирование твинов $x_i = \sum_j a_{ij} b_j$, где a_{ij} – элементы A^{-1}. Условие невырожденности внутренней оценки суммы твинов:

$$\max_i |a_i| \geq \sum_{k \neq i} |A_k|,$$

где $|a_i|$ – длина внутренней оценки, $|A_k|$ – длина внешней оценки.

Возьмем вектор b такой, чтобы условие невырожденности выполнялось. Для этого расширим внутреннюю оценку одного из элементов b, возьмем его равным $\left[\left[\dot{b}_i - 30\varepsilon, \dot{b}_i + 30\varepsilon\right], \left[\dot{b}_i - 31\varepsilon, \dot{b}_i + 31\,\varepsilon\right]\right]$.

Точечное решение:

$$x = [\,100.0, 100.0, 99.99999999, 100.0000001, 99.99999991\,]$$

Решение, полученное с помощью решения отдельных задач для внутренних и внешних оценок:

$$x = [[[97.66582, 102.33418], [96.85415, 103.14585]],$$

$$[[97.61141, 102.38859], [96.78476, 103.21524]],$$

$$[[91.51492, 108.48507], [88.74168, 111.25832]],$$

$$[[29.0366, 170.9634], [4.93291, 195.06709]],$$

$$[[32.79891, 167.20109], [9.83015, 190.16985]]]$$

Решение, полученное с учетом правил твинной арифметики:

$$x = [[[99.94335,100.05665],[96.85415,103.14585]],$$

$$[[99.92978,100.07022],[96.78476,103.21524]],$$

$$[[99.2438,100.7562],[88.74168,111.25832]],$$

$$[[96.50011,103.49989],[4.93291,195.06709]],$$

$$[[97.12943,102.87057],[9.83015,190.16985]]]$$

Интервалы внутренних оценок, полученные вторым способом, оказываются уже, чем интервалы, полученные первым способом.

Собственные значения матрицы томографии:

$$\lambda = [1.49, -9.8 * 10^{-2}, -5.0 * 10^{-3}, -3.7 * 10^{-5}, -6.0 * 10^{-8}]$$

Заметна большая разница между величиной собственных значений. Максимальное собственное значение оказывается больше суммы остальных собственных значений:

$$\max|\lambda| = 1.49 > 0.10 = \sum_{\lambda \neq \max\lambda} |\lambda|$$

Анализ результатов

Точечное решение лежит внутри найденных интервальных оценок. При решении системы с использованием твинной арифметики не всегда удается получить невырожденные внутренние оценки. В случае, когда внутренние оценки все же могут быть найдены, они образуют более узкие интервалы, чем оценки, полученные при решении двух независимых систем для внутренних и внешних оценок. При любом способе решения результат имеет довольно большую интервальную неопределенность, что можно объяснить наличием малых значений собственных чисел матрицы.