

РАБОТА №10. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель работы: изучение возможностей применения непрерывного вейвлет-преобразования для фильтрации сигналов.

Планируемая продолжительность: от 2 до 4 академических часов.

Тип работы:  с использованием компьютерных средств.

Фильтрация сигнала с применением непрерывного вейвлет-преобразования

В данном практическом занятии, как и на предыдущих, рассматривается НВП дискретных сигналов. Результатом такого НВП является массив коэффициентов (двумерный массив), в котором от столбца к столбцу меняется параметр b , связанный с временем, а от строки к строке – параметр a , связанный с частотой. Таким образом, массив вейвлет-коэффициентов можно охарактеризовать как поверхность, содержащая сведения о изменении сигнала во времени (по оси x) и по частоте (по оси y).

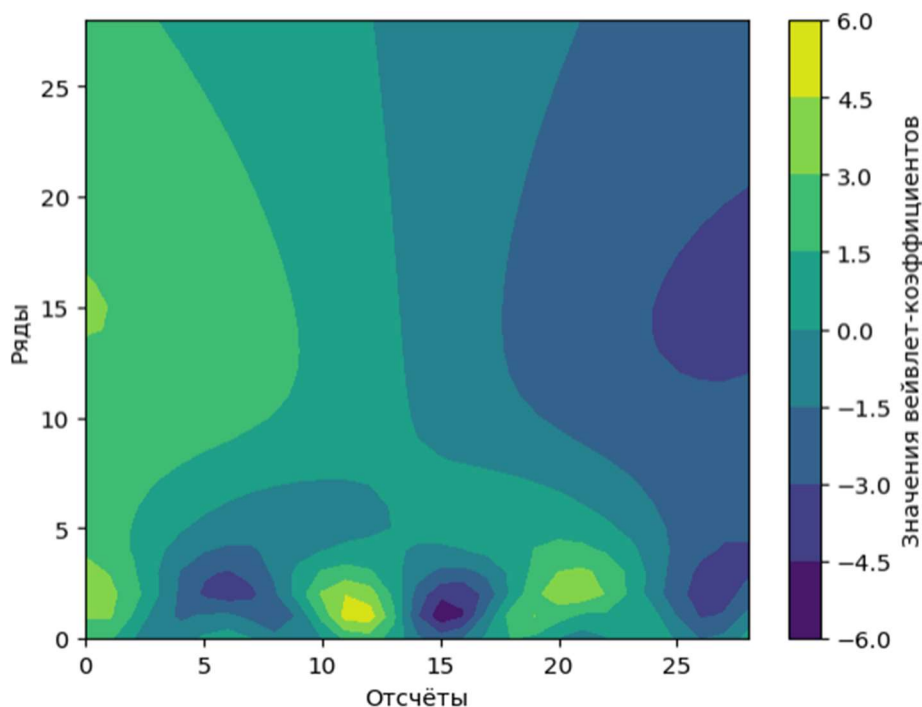


Рис. 10.1. Вейвлет-коэффициенты

Помимо этого известно, что имеется обратное НВП (ОНВП), позволяющее из массива вейвлет-коэффициентов восстановить исходный сигнал. Следовательно, **если обнулить часть вейвлет-коэффициентов в массиве и затем восстановить из него сигнал с помощью ОНВП, можно очистить сигнал от соответствующих частотных компонентов в соответствующем временном участке сигнала.** Именно таким образом и реализуется фильтрация на базе НВП.

Обратное непрерывное вейвлет преобразование

Известно выражение для прямого НВП:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ - вейвлет, используемый для анализа;

a – параметр масштаба вейвлета;

b – параметр сдвига вейвлета.

Для дискретных сигналов данное выражение принимает вид:

$$W(a, b) = \frac{\Delta t}{\sqrt{a}} \sum_{j=1}^N S_j \cdot \psi\left(\frac{j \cdot \Delta t - b}{a}\right), \quad (14.1)$$

где Δt - интервал дискретизации;

S - дискретный сигнал.

При этом a, b также изменяют дискретно с некоторым шагом. В результате и формируется массив вейвлет-коэффициентов.

Для восстановления из массива вейвлет-коэффициентов исходного сигнала используют выражение:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a} \cdot a^2} W(a, b) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db,$$

где C_ψ - постоянная допустимости используемого вейвлета, **для используемого в работе вейвлета МНАТ $C_\psi = \pi$.**

Для дискретных сигналов с учетом $C_\psi = \pi$ данное выражение принимает вид:

$$S_j = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^L \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{i \cdot \Delta a} \cdot (i \cdot \Delta a)^2} W_{i,k} \cdot \psi\left(\frac{j \cdot \Delta t - i \cdot \Delta b}{i \cdot \Delta a}\right), \quad (14.2)$$

где Δt - интервал дискретизации;
 Δa - шаг изменения масштаба (выбирается при прямом НВП);
 Δb - шаг изменения сдвига (выбирается при прямом НВП);
 i – текущая строка;
 k – текущий столбец;
 $W_{i,k}$ - текущий элемент в массиве вейвлет-коэффициентов;
 j – текущий номер элемента в дискретном сигнале S .

Реализация алгоритма фильтрации с помощью НВП Python

Для начала импортируем следующие зависимости.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from typing import Callable
4 %matplotlib widget
5 # from google.colab import output
6 # output.enable_custom_widget_manager()
```

Рис. 10.2. Импорт зависимостей

Если в работе применяется Google Colab в качестве редактора, то для работы интерактивных графиков нужно раскомментировать последние две строчки из ячейки импортов.

А также из предыдущей работы нужно взять функции `plot`, `plot_scalogram`, `mexican_hat`, `wavelet_transform`

После чего – сам фильтруемый сигнал.

```
1 def y(x: np.ndarray) -> np.ndarray:
2     result = np.zeros(x.size)
3     for idx in range(result.size):
4         result[idx] = np.sin(0.5 * 2 * np.pi * x[idx]) + \
5             np.sin(0.8 * 2 * np.pi * x[idx] + (np.pi / 6))
6     return result
```

Рис. 10.3. Тестовый сигнал

```

1 N = 30
2 x = np.arange(start=1, stop=30)
3 signal = y(x * (2 * np.pi / N))
4 plot(signal)

```

Рис. 10.4. Создание тестового сигнала

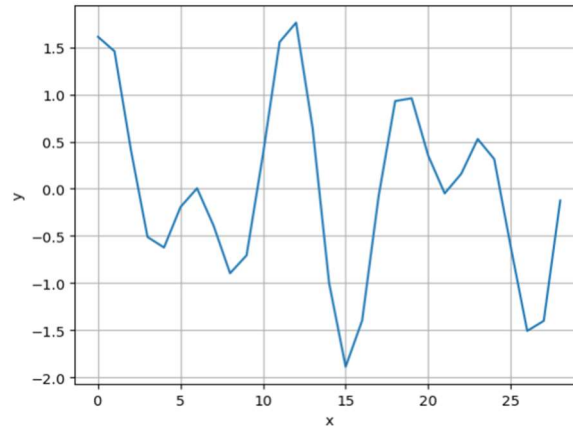


Рис. 10.5. График тестового сигнала

И обратное НВП (в нашем случае $\Delta t = \Delta a = \Delta b$).

```

1 def inverse_wavelet_transform(
2     array: np.ndarray,
3     psi_func: np.ndarray
4 ) -> np.ndarray:
5     dt = 2 * np.pi / signal.size
6     """
7     Так как на вход передается массив, где
8     элементы массива являются срезами по рядам, то
9     нужно транспонировать матрицу, чтобы получить
10    срезы по отсчётам
11    """
12    array = array.T
13
14    def inverse_wavelet_element_transform(t: float) -> np.ndarray:
15        result_element = np.zeros(shape=(array.shape[0], array.shape[0]))
16        for y in range(1, result_element.shape[0] + 1):
17            for x in range(1, result_element.shape[1] + 1):
18                result_element[y - 1, x - 1] = array[y - 1, x - 1] * \
19                    psi_func((t - y * dt) / (x * dt)) * \
20                    (1 / (((x * dt) ** 2) * np.sqrt(x * dt)))
21        return ((dt ** 2) / np.pi) * np.sum(result_element)
22
23    result = []
24    for t in range(array.shape[0]):
25        result.append(inverse_wavelet_element_transform((t + 1) * dt))
26    return np.array(result)

```

Рис. 10.6. Обратное НВП

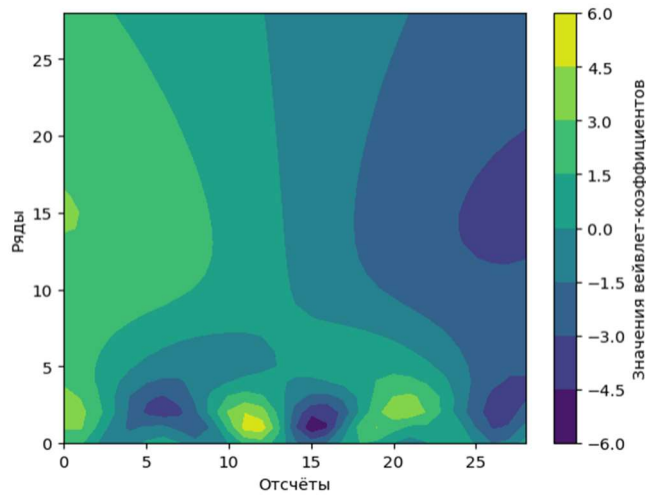


Рис. 10.7. График вейвлет-коэффициентов

Попробуем отфильтровать в первых 10 отсчётах высокие частоты, которые, согласно графику коэффициентов, сосредоточены в рядах 0-7 (вторая граница берётся не включительно поэтому индексы на единицу больше).

```
1 wt = wavelet_transform(signal, mexican_hat)
2 wt[0:8, 0:11] = 0
3 plot_scalogram(wt)
```

Рис. 10.8. Фильтрация коэффициентов

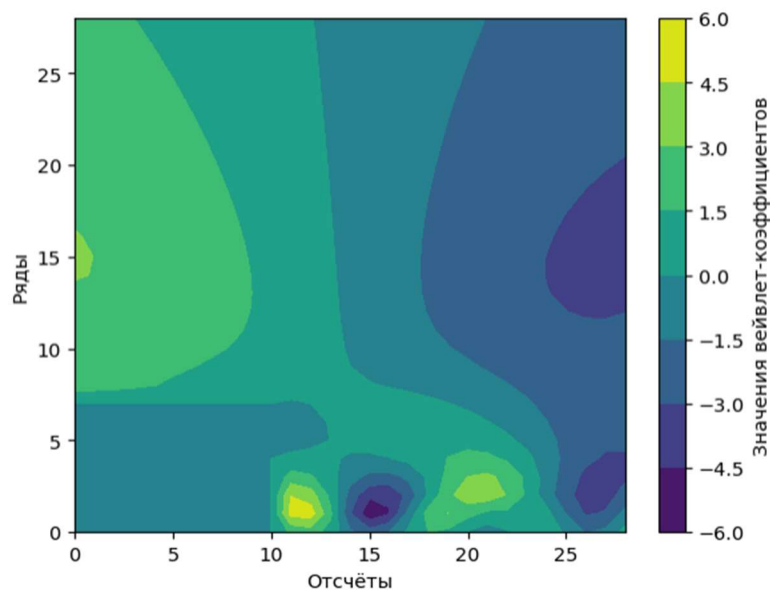


Рис. 10.9. Отфильтрованные коэффициенты

Строим график сигнала, полученного из отфильтрованного массива.

```
1 plot(inverse_wavelet_transform(wt, mexican_hat))
```

Рис. 10.10. Построение графика сигнала

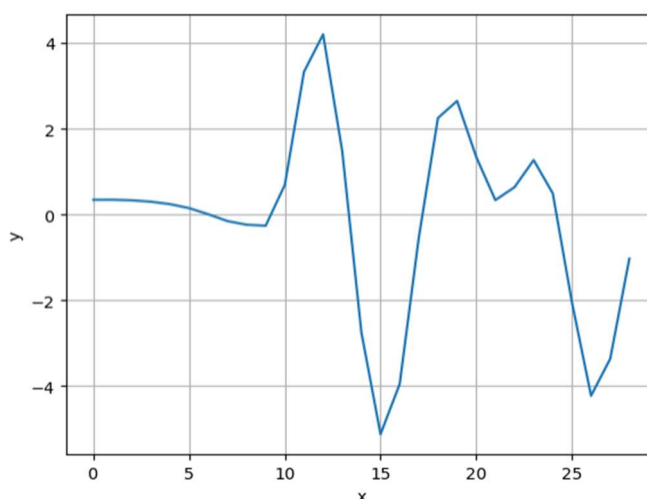


Рис. 10.11. Отфильтрованный сигнал

Как видим, в сигнале отсутствуют выбросы на границе фильтрации, при том, что коэффициенты были обнулены без какого-либо окна.

Попробуем устранить только высокочастотную составляющую в более широкой временной области сигнала, не подавив низкочастотную.

```
1 wt = wavelet_transform(signal, mexican_hat)
2 wt[0:3, 0:21] = 0
3 plot_scalogram(wt)
```

Рис. 10.12. Фильтрация коэффициентов

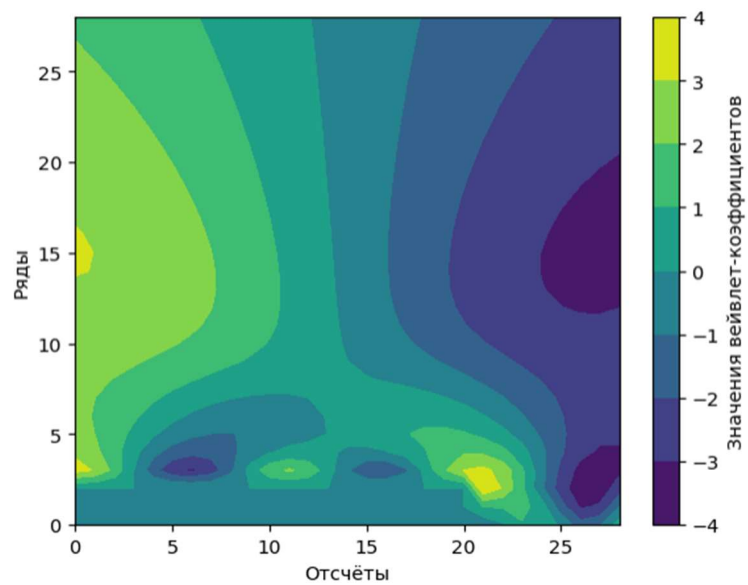


Рис. 10.13. Отфильтрованные коэффициенты

```
1 plot(inverse_wavelet_transform(wt, mexican_hat))
```

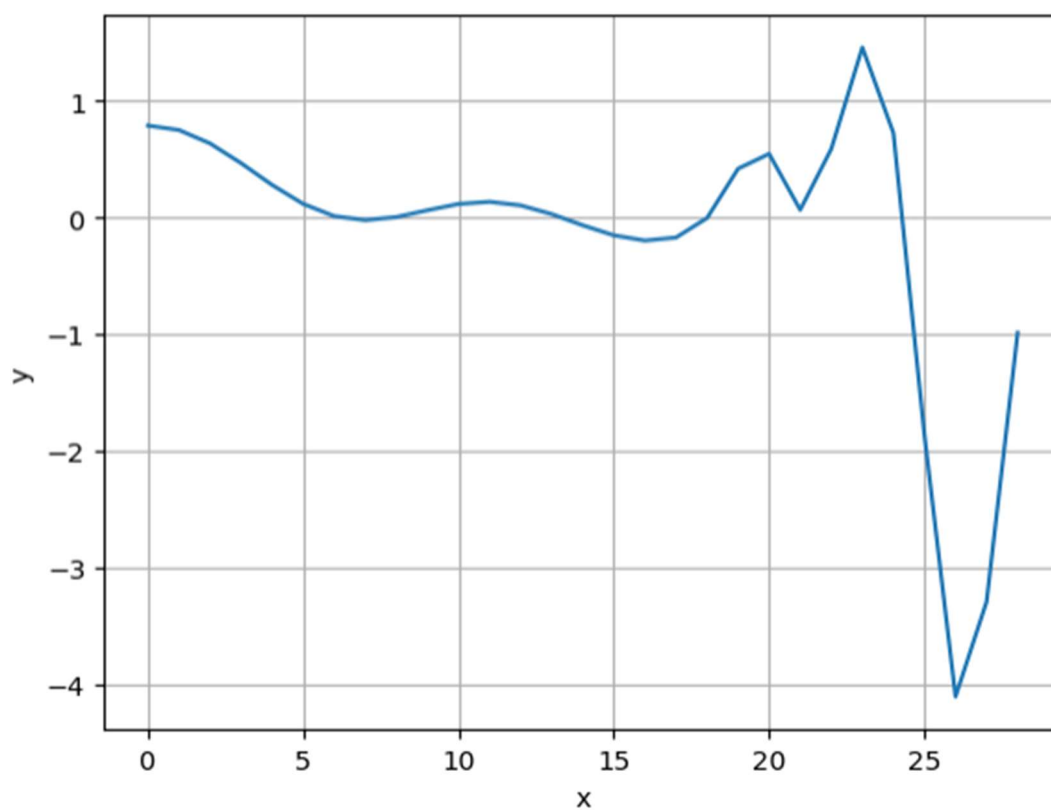


Рис. 10.14. Отфильтрованный сигнал

Задание

Реализовать алгоритм фильтрации из последнего раздела для заданного вариантом сигнала.

Таблица 14.1

Варианты заданий

Вариант	Сигнал
1,6,11, 16,21,26	$y(x) := \sin(0,4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x) + \sin\left(0,9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{6}\right)$
2,7,12, 17,22,27	$y(x) := \cos\left(0,4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(0,9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{9}\right)$
3,8,13, 18,23,28	$y(x) := \sin\left(0,4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(0,7 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)$
4,9,14, 19,24,29	$y(x) := \sin(0,4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x) + \cos\left(0,7 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{7}\right)$
5,10,15, 20,25,30	$y(x) := \cos\left(0,6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(0,9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x + \frac{\pi}{11}\right)$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М.: Физматгиз, 1963, – 1100 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – М.: - Высшая школа, 2000. – 462с.
3. Дубнищев Ю.Н. Теория и преобразование сигналов в оптических системах / Ю.Н. Дубнищев. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2004. – 275 с.
4. Стеценко О.А. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. / О.А. Стеценко. – М.: Высш. шк., 2007. – 432 с.
5. Садовский Г.А. Теоретические основы информационно-измерительной техники / Г.А. Садовский. – М.: - Высшая школа, 2008. – 478с.
6. Романенко С.В. Классификация математических моделей аналитических сигналов в форме пиков / С.В. Романенко, А.Г. Стремберг // Журнал аналитической химии. – 2000. – Т.55, N11, – с. 44-48.
7. Стремберг А.Г. Систематическое исследование элементарных моделей аналитических сигналов в виде пиков и волн / А.Г. Стремберг, С.В. Романенко, Э.С. Романенко // Журнал аналитической химии. – 2000. – Т.55, N7, – с.687-697.
8. Сайфуллин Р.Т. Вейвлет-анализ в обработке сигналов аналитических приборов / Р.Т. Сайфуллин, А.А. Наумов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18. № 1-2. – с. 412-415.