Analys Problem 2

Robin Boregrim

October 15, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

För vilka värden på $a > 0$ har ekvationen $a^x = x$ lösningar?

2 Lösning

2.1 Omskrivning

För att kunna lösa ut a så skriver vi om ekvationen $a^x = x$ så att a blir en funktion av x.

$$a^x = x \Rightarrow \tag{1}$$

Om vi antar att $x \neq 0$

$$(a^x)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$a = x^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \tag{2}$$

Ekvation (2) inte är definerad för $x = 0$, detta skulle vara ett problem om (1) hade lösningar för $x = 0$ men eftersom

$$a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

så a^0 kommer aldrig vara lika med 0. $x = 0$ är därför aldrig en lösning på (1).

En annan sak värd att notera är att eftersom a^x kommer vara positivt för alla x kommer ekvationen $a^x = x$ inte ha några lösningar för negativa x. Vänsterledet a^x skulle vara positivt och högerledet x skulle vara negativt för alla negativa x dvs

$$a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} < 0$$

$$x < 0, \forall x \in \mathbb{R} < 0$$

$$a^x \neq x, \forall x \in \mathbb{R} < 0.$$

Vi vet därför att definitionsmängden på x är

$$D_f = \{x > 0\}.$$

2.2 Derivataräkning

Nu vet vi att a beskrivs av funktionen $a = x^{\frac{1}{x}}$ så vi räknar ut derviatan av den funktionen för att sen ta reda på eventuella extrempunkter.

$$\begin{aligned}
a' &= \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{x}}) \\
&= \frac{d}{dx}(e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})}) \\
&= \frac{d}{dx}(e^{\frac{1}{x}\ln(x)}) \\
&= \frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{x}) \cdot e^{\frac{1}{x}\ln x} \\
&= (\frac{\ln x}{x})' \cdot x^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x \cdot \frac{d}{dx}(x)}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

$$a' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} \tag{3}$$

Nu behöver vi räkna ut för vilka x som $a' = 0$ för att hitta eventuella extrempunkter. Varken $x^{\frac{1}{x}}$ eller $\frac{1}{x^2}$ kan bli 0, vilket betyder att om (3)$= 0$ måste

$$\begin{aligned}
1 - \ln x &= 0 \\
1 &= \ln x \\
e^1 &= e^{\ln x} \\
e^1 &= e^{\ln x} \\
x &= e
\end{aligned}$$

Nu när vi vet att a' endast har en rot som är e vill vi veta om roten är en maximi-, mini- eller terrasspunkt.
Både $x^{\frac{1}{x}}$ och $\frac{1}{x^2}$ är alltid possitiva för $\forall x \in \mathbb{R} \cup D_f$. Detta betyder att a' är positivt eller negativt beroende på om $1 - \ln x$ är positivt eller negativt.
Eftersom funktionen $\ln x$ är strängt växande och $\ln e = 1$ är $\ln x < 1$ om $x < e$ och $\ln x > 1$ om $x > e$.

Vilket i sin tur betyder att a' är positiv för $x < e$ och negativ för $x > e$. Roten $x = e$ är därför en global maximipunkt för (2).
Av detta följer då att $a \leq e^{\frac{1}{e}}$. Eftersom a var större än noll per definition får vi:

$$0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}.$$

2.3 Svar

Ekvationen $a^x = x$ har lösningar i internvallet

$$0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}.$$