Analys Problem 5

Robin Boregrim

November 13, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

Beräkna volymen av de områden som uppstår då det begränsade området i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = x$ får rotera runt x- respektive y-axeln.

2 Lösning

2.1 Rotation runt x-axeln

Vi vill beräkna rotationsvolymen runt x-axeln av det begränsade området, vi kallar denna volym för V_{bx}.

Vi börjar särskilja de två funktionerna igenom att låta

$$f(x) = x$$

och

$$g(x) = x^2.$$

Sedan sätter vi funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ lika varandra för att beräkna eventuella skärningspunkter mellan funktionerna.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x = x^2$$

Villket betyder att skärningspunkterna är:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} .$$

Eftersom både $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner och de bara skär varandra i $x = 0$ och $x = 1$ vet vi att det begränsade området som vi vill rotera runt x-axeln ligger i intervallet $x \in [0, 1]$. Då vet vi att rotationsvolymen av det begränsade området V_{bx} är differensen av rotations volymerna för $f(x)$ och $g(x)$ över intervallet $x \in [0, 1]$.
Vi beräknar rotationsvolymerna V_f och V_g för $f(x)$ respektive $g(x)$.

$$V_g = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$$V_f = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Vi kan nu beräkna V_{bx} igenom att ta differansen mellan V_g och V_f.

$$V_{bx} = V_g - V_f = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{15} - \frac{3\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}$$

Så

$$V_{bx} = \frac{2\pi}{15}.$$

2.2 Rotation runt y-axeln

Vi vill även beräkna rotationsvolymen runt y axeln av det begränsade området, vi kallar denna volym för V_{bx}.

Vi börjar med att beräkna inverserna $f^{-1}(y)$ och $g^{-1}(y)$ till funktionerna $f(x)$ respektive $g(x)$.

$$f(x) = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Sendan sätter vi funktionerna $f^{-1}(y)$ och $g^{-1}(y)$ lika varandra för att beräkna eventuella skärningspunkter mellan funktionerna.

$$f^{-1}(y) = g^{-1}(y) \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{y}$$

Vi tar båda led upphöjt i 2.

$$y^2 = y$$

Vilket då ger oss skärningspunkterna:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

Eftersom både $f^{-1}(y)$ och $g^{-1}(y)$ är kontinuerliga funktioner och de bara skär varandra i $y = 0$ och $y = 1$ vet vi att det begränsade området som vi vill rotera runt y-axeln ligger i intervallet $y \in [0, 1]$. Då vet vi att rotationsvolymen av det begränsade området V_{by} är differensen av rotations

volymerna för $f^{-1}(y)$ och $g^{-1}(y)$ över intervallet $y \in [0, 1]$.
Vi beräknar rotationsvolymerna $V_{f^{-1}}$ och Vg^{-1} för $f^{-1}(y)$ respektive $g^{-1}(y)$.

$$V_{g^{-1}} = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{f^{-1}} = \pi \int_0^1 y^2 dy = \pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Vi kan nu beräkna V_{bx} igenom att ta differansen mellan $V_{g^{-1}}$ och $V_{f^{-1}}$.

$$V_{by} = V_{g^{-1}} - V_{f^{-1}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Så

$$V_{by} = \frac{\pi}{6}.$$

2.3 Svar

Rotations volymerna av det begränsade området mellan funktionerna $y = x$ och $y = x^2$ när den roterar runt x-axeln, V_{bx}, och när den roterar runt y-axeln, V_{by}, är båda lika med $\frac{2\pi}{15}$ respektive $\frac{\pi}{6}$, dvs

$$V_{bx} = \frac{2\pi}{15}$$

och

$$V_{by} = \frac{\pi}{6}.$$