

# Analys Problem 4

Robin Boregrim

October 30, 2017

## Innehållsförteckning

<b>1</b>	<b>Uppgiften</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Lösning</b>	<b>2</b>
2.1	Uträkning . . . . .	2
2.2	Svar . . . . .	3

## 1 Uppgiften

Beräkna följande generaliserade integral eller visa att den divergerar:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}$$

## 2 Lösning

### 2.1 Uträkning

Vi vill beräkna

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}.$$

Så vi börjar med att faktorisera polynomet  $x^2 + 7x + 10$ , detta gör vi igenom att hitta polynomets nollpunkter.

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 10 = 0 &\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Detta betyder att

$$p(x) = \frac{1}{x^2 + 7x + 10} = \frac{1}{(x + 5)(x + 2)}$$

För att lättare kunna integrera detta vill vi skriva om  $p(x)$  på följande sätt:

$$\frac{1}{(x + 5)(x + 2)} = \frac{A}{(x + 5)} + \frac{B}{(x + 2)}$$

Vi bestämmer konstanterna  $A$  och  $B$  så likheten gäller. Multiplicera båda led med  $(x + 5)(x + 2)$ .

$$1 = A(x + 2) + B(x + 5)$$

Av detta kan vi skapa ett ekvationsystem.

$$\begin{cases} 1 = 2A + 5B & (1) \\ 0x = Ax + Bx & (2) \end{cases}$$

Av (2) kan vi lösa ut att

$$0 = Ax + Bx = A + B \Rightarrow B = -A.$$

Om vi stoppar in det vi fick av (2) i (1) får vi:

$$1 = 5B - 2B = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

Om vi sedan stoppar in värdet på  $B$  i likheten vi fick av (2) får vi:

$$A = -\frac{1}{3}$$

Vi vet då att:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 7x + 10} = \int_0^\infty \frac{dx}{3(x+2)} - \frac{dx}{3(x+5)}$$

Nu kan vi börja integrera integralen.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)} - \frac{dx}{(x+5)} \\ &= \frac{1}{3} \left[ \ln|x+2| - \ln|x+5| \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{3} \left[ \ln \left| \frac{x+2}{x+5} \right| \right]_0^\infty \end{aligned}$$

Eftersom vi har en integral som går mot  $\infty$  så gör vi ett gränsvärde med variabeln  $t$  där  $t \rightarrow \infty$ .

$$\frac{1}{3} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{t+2}{t+5} \right| \right) - \ln \left| \frac{0+2}{0+5} \right| \right)$$

Vi förlänger bråket som innehåller variabeln  $t$  med  $1/t$

$$\frac{1}{3} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{1 + \frac{2}{t}}{1 + \frac{5}{t}} \right| \right) - \ln \left| \frac{2}{5} \right| \right)$$

Vi kan nu lösa ut gränsvärdet och förenkla.

$$\frac{1}{3} \left( \ln \left| \frac{1+0}{1+0} \right| - \ln \left| \frac{2}{5} \right| \right) = \frac{1}{3} (\ln 1 - \ln \frac{2}{5}) = \frac{1}{3} (\ln(\frac{1}{\frac{2}{5}})) = \frac{\ln \frac{5}{2}}{3}$$

## 2.2 Svar

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 7x + 10} = \frac{\ln \frac{5}{2}}{3}$$