

Algebra Problem 1

Robin Boregrim

September 15, 2017

Innehållsförteckning

1	Uppgiften	2
2	Lösning	2
2.1	Förenkling	2
2.2	Kvadratkompletering	3
2.3	Validera rötter	3
2.4	Svar	4
3	Diskussion	4
4	Referenser	4

1 Uppgiften

Lös rotekvationen

$$2\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 5$$

för alla reella x .

2 Lösning

2.1 Förenkling

För att lösa rotekvationen

$$2\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 5$$

vill vi få bort rottecken, därför börjar vi med att kvadrera båda led

$$(2\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})^2 = 5^2$$

$$4(x+5) - 4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3} + (x-3) = 25$$

fortsätter med att utveckla $4(x+5)$ och $(x-3)$

$$4x + 20 + x - 3 - 4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3} + (x-3) = 25.$$

Vi förenklar vänsterledet

$$5x + 17 - 4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3} + (x-3) = 25$$

Isolerar sedan den kvarvarande rottermen $-4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3}$

$$-4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3} = 25 - 5x - 17.$$

Där efter förenklar vi högerledet

$$-4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3} = 8 - 5x.$$

Vi kvadrerar båda led för att få bort det kvarvarande rottecknet

$$(-4\sqrt{x+5}\sqrt{x-3})^2 = (8 - 5x)^2$$

$$16(x^2 + 2x - 15) = 25x^2 - 80x + 64$$

$$16x^2 + 32x - 240 = 25x^2 - 80x + 64$$

och för över alla termer till högerledet och förenklar det

$$0 = 25x^2 - 80x + 64 - 16x^2 - 32x + 240$$

$$0 = 9x^2 - 112x + 302$$

2.2 Kvadratkompletering

Nu när vi har fått ut andragradsekvationen

$$9x^2 - 112x + 302 = 0$$

kan vi använda oss av rotformeln för andragradsekvationer:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

som kan härledas från pq -formeln som finns på sida 55-56 i Algebra 1¹. Det betyder att

$$9x^2 - 112x + 302 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-112) \pm \sqrt{(-112)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 302}}{2 \cdot 9}$$

Om vi förenklar detta får vi

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{112 \pm 40}{18}$$

Och då kan vi lösa ut x_1 och x_2

$$x_1 = \frac{112 - 40}{18} = \frac{72}{18} = 4$$

$$x_2 = \frac{112 + 40}{18} = \frac{152}{18} = \frac{76}{9}$$

2.3 Validera rötter

Vi kan validera om rötterna stämmer igenom att substituera x med x_1 och x_2 i ursprungs formeln och se om vi får en motsägelse.

För att validera x_1 sätter vi $x = 4$ i vänsterledet och får

$$2\sqrt{4+5} - \sqrt{4-3} = 5$$

$$2\sqrt{9} - \sqrt{1} = 5$$

$$2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$6 - 1 = 5$$

$$5 = 5$$

x_1 är då inte en falsk rot.

För att validera x_2 sätter vi $x = \frac{76}{9}$ i vänsterledet och får

$$2\sqrt{\frac{76}{9} + 5} - \sqrt{8 + \frac{4}{9}} - 3 = 5$$

$$2\sqrt{13.444\dots} - \sqrt{5.444\dots} = 5$$

$$2 \cdot 3.666\dots - 2.333\dots = 5$$

$$7.333\dots - 2.333\dots = 5$$

$$4.999\dots = 5$$

$$5 = 5$$

x_2 är då inte en falsk rot.

2.4 Svar

Lösningarna är på rotekvationen $2\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 5$ är:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 8 + \frac{4}{9}$$

3 Diskussion

En observation man kan göra är att den ursprungliga ekvationen innehåller $\sqrt{x-3}$ vilket betyder att om $x < 3$ kommer $\sqrt{x-3}$ att bli roten av något negativt, vilket blir ett imaginärt tal. Vi har inte heller någon annan term som kan bilda ett imaginärt tal så de imaginära delarna skulle eliminera varandra. Detta betyder att $x \geq 3$.

I detta fall hjälpte inte denna observation att lösa ut rötterna då både x_1 och x_2 är större än 3, men i ett liknande exempel skulle detta kunna eliminera en falsk rot.

4 Referenser

1 Bøgvard, Rickard och Xantcha, Qimh. *Algebra 1*. Nionde tryckningen. Stockholms universitet. 2016.