Algebra Problem 2

Robin Boregrim

September 17, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften **2**

2 Lösning **2**

2.1 Allmän lösning 2

2.2 Special fall 3

2.3 Svar 3

1 Uppgiften

För vilka $n \geq 0$ är $2^n + 2 \cdot 3^n$ delbart med 8?

2 Lösning

2.1 Allmän lösning

Först använder vi oss av att $x^n = (x^2)^{n/2}$ för att få fram tal som vi kan förenkla med moduliräkning.

$$2^n + 2 \cdot 3^n \tag{1}$$
$$(2^2)^{n/2} + 2 \cdot (3^2)^{n/2}$$
$$4^{n/2} + 2 \cdot 9^{n/2}$$
$$16^{n/4} + 2 \cdot 9^{n/2} \tag{2}$$

Talen 16 och 9 är bra eftersom $16 \equiv 0 \mod 8$ och $9 \equiv 1 \mod 8$.
Eftersom vi nu vill använda oss av moduliräkning för att beräkna delbarhet med 8 måste vi undvika rottäcken då $x \equiv y \not\Rightarrow \sqrt{x} \equiv \sqrt{y}$.
Vi måste därför ta hänsyn till två saker för att undvika rottecken:

Säg att vi har termen x^n som vi vill skriva om till $(x^y)^{n/y}$.
H1. Om n är mindre än y måste det fallet räknas separat.
H2. Om n inte är delbart med y måste termen förlängas till $x^{(n-z)} \cdot x^z$ där $n - z \equiv 0 \mod n$, vilket betyder att om skrivningen blir $(x^y)^{(n-z)/y} \cdot x^z$.

Av H1 följer att fall då $n < 4$ räknas separat då den största roten vi har bland termer i ekvation (2) är 4.
Av H2 följer att termen $16^{n/4}$ har fyra fall: $16^{n/4}$, $16^{(n-1)/4} \cdot 2$, $16^{(n-2)/4} \cdot 2^2$ och $16^{(n-2)/4} \cdot 2^3$.
Av H2 följer även att termen $2 \cdot 9^{n/2}$ har två fall $2 \cdot 9^{n/2}$ när n är jämnt och $2 \cdot 3 \cdot 9^{(n-1)/2}$ när n är ojämnt.

Av detta får vi dessa 4 fall av startekvationen (1) som vi sedan förenklar med moduliräkning.
Fall 1 om $n \equiv 0 \mod 4$

$$16^{n/4} + 2 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} + 2 \cdot 1^{n/2} = 2$$

Fall 2 om $n \equiv 1 \mod 4$

$$16^{n/4} \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1^{n/2} = 6$$

Fall 3 om $n \equiv 2 \mod 4$

$$16^{n/4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^{n/2} = 2$$

Fall 4 om $n \equiv 3 \mod 4$

$$16^{n/4} \cdot 2^3 + 2 \cdot 3 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} \cdot 2^3 + 2 \cdot 3 \cdot 1^{n/2} = 6$$

Av detta kan vi konstatera att (1) aldrig är delbar med 8 för $n \leq 4$ då (1) antingen är kongurent med 2 eller 6 när $n \leq 4$.

2.2 Special fall

Då måste vi undersöka de 4 kvarvarande fallen för (1) där $n = 0, 1, 2, 3$.
Fall 1 $n = 0$

$$2^0 + 2 \cdot 3^0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \not\equiv 0 \mod 8$$

Fall 2 $n = 1$

$$2^1 + 2 \cdot 3^1 = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \equiv 0 \mod 8$$

Fall 3 $n = 2$

$$2^2 + 2 \cdot 3^2 = 4 + 2 \cdot 9 = 22 \equiv 6 \not\equiv 0 \mod 8$$

Fall 4 $n = 3$

$$2^3 + 2 \cdot 3^3 = 8 + 2 \cdot = 35 \equiv 3 \not\equiv 0 \mod 8$$

Bara i fall 2 där $n = 1$ var $(1) \equiv 0 \mod 8$.
Därför är $n = 1$ svaret.

2.3 Svar

$2^n + 2 \cdot 3^n$ där $n \geq 0$ är bara delbart med 8 om $n = 1$.