

Analys Problem 7

Robin Boregrim

November 26, 2017

Innehållsförteckning

1	Uppgiften	2
2	Lösning	2
2.1	Svar	4

1 Uppgiften

Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy$$

där D är det område som bestäms av olikheterna $0 < y < x$ och $\pi^2 < x^2 + y^2 < 4\pi^2$.

2 Lösning

För att lättare lösa problemet så gör vi ett variabel byte till polära koordinater. Vi vill då få en dubbelintegral som beror på variablerna r och θ där

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases}$$

Vi skriver om dubbelintegralen med de nya variablerna

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy = \iint_E \sin(r)r \, dr d\theta.$$

Sen behöver vi beräkna gränerna för dessa variabler.

Gränserna för r kan beräknas på följande sätt

$$\pi^2 < x^2 + y^2 < 4\pi^2 \Leftrightarrow$$

$$\pi^2 < r^2 < 4\pi^2 \Leftrightarrow$$

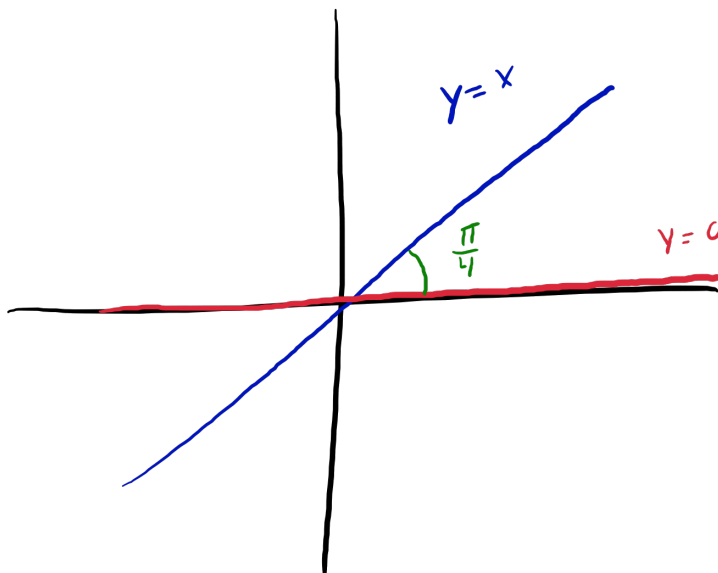
$$\pi < r < 2\pi$$

Eftersom att r är roten av summan av två kvadrater behöver vi inte ta hänsyn till några negativa värden för r .

Gränserna till θ kan beräknas igenom att observera olikheten

$$0 < y < x.$$

Där kan vi se att y är begränsad av kurvorna $y = 0$ och $y = x$.



Vinkeln för $y = x$ är $\frac{\pi}{4}$, detta betyder att gränserna för θ är

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

Vi kan nu beräkna dubbel integralen.

$$\begin{aligned} \iint_E \sin(r)r \, dr d\theta &= \\ \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(r)r \, d\theta \right) dr &= \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r)r \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, d\theta \right) dr &= \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r)r \left(\left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) dr &= \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r)r \left(\frac{\pi}{4} \right) dr &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{4} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r) r \, dr = \\
& \frac{\pi}{4} \left(\left[-\cos(r) r \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} -\cos(r) \, dr \right) = \\
& \frac{\pi}{4} \left(-\cos(2\pi) 2\pi + \cos(\pi) \pi - \left[-\sin(r) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\
& \frac{\pi}{4} \left(-2\pi - \pi + \sin(2\pi) - \sin(\pi) \right) = \\
& \frac{\pi}{4} \left(-3\pi + 0 - 0 \right) = \\
& -\frac{3\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

2.1 Svar

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy = -\frac{3\pi^2}{4}.$$