Analys Problem 7

Robin Boregrim

December 11, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})\ dxdy$$

där D är det område som bestäms av olikheterna $0 < y < x$
och $\pi^2 < x^2 + y^2 < 4\pi^2$.

2 Lösning

För att lätare lösa problemet så gör vi ett variabel byte till polära koordinater. Vi vill då få en dubbelintegral som beror på variablerna $r$och θ där

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases}$$

Vi skriver om dubbelintegralen med de nya variablerna

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})\ dxdy = \iint_E \sin(r)r\ drd\theta.$$

Sen behöver vi beräkna gränerna för dessa variabler.
Gränserna för r kan beräknas på följande sätt

$$\pi^2 < x^2 + y^2 < 4\pi^2 \Leftrightarrow$$

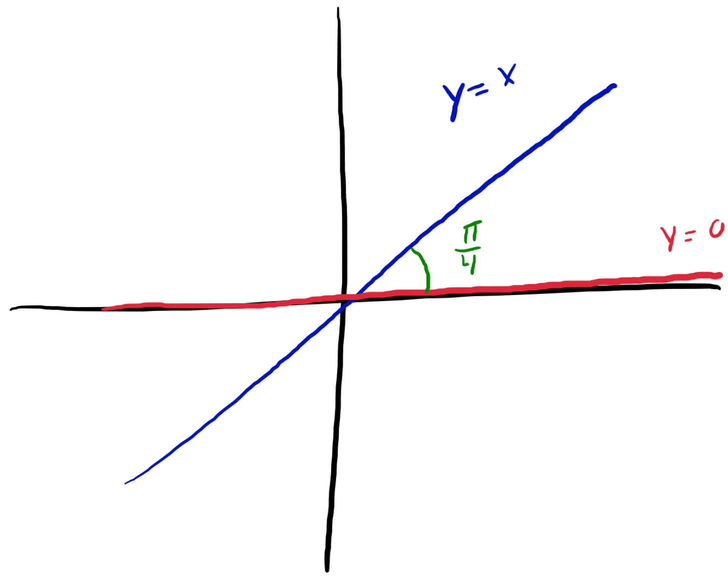
$$\pi^2 < r^2 < 4\pi^2 \Leftrightarrow$$

$$\pi < r < 2\pi$$

Eftersom att r är roten av summan av två kvadrater behöver vi inte ta hänsyn till några negativa värden för r.
Gränserna till θ kan beräknas igenom att observera olikheten

$$0 < y < x.$$

Där kan vi se att y är begränsad av kurvorna $y = 0$ och $y = x$.



Vinkeln för $y = x$ är $\frac{\pi}{4}$, detta betyder att gränserna för θ är

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

Vi kan nu beräkna dubbel integralen.

$$\iint_E \sin(r)r \ drd\theta =$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(r)r \ d\theta \right) dr =$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(r)r \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \ d\theta \right) dr =$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(r)r \left(\Big[\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) dr =$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(r)r \left(\frac{\pi}{4} \right) dr =$$

$$\frac{\pi}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(r)r\ dr =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\Big[-\cos(r)r\Big]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} -\cos(r)\ dr\right) =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(-\cos(2\pi)2\pi + \cos(\pi)\pi - \Big[-\sin(r)\Big]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(-2\pi - \pi + \sin(2\pi) - \sin(\pi)\right) =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(-3\pi + 0 - 0\right) =$$

$$-\frac{3\pi^2}{4}.$$

2.1 Svar

$$\iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})\ dxdy = -\frac{3\pi^2}{4}.$$