Algebra Problem 4

Robin Boregrim

October 15, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

Lös för varje reellt tal a ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & a \\ x & +y & +3z & = & a+2 \\ 2x & -2y & (a+1)z & = & a+1 \end{cases}$$

2 Lösning

2.1 Matriser och Radoperationer

Först så gör vi om ekvationssystemet till en matris och använder tillåtna radoperationer för att sedan försöka lösa ut ekvationssystemet med Gauss-Jordan eliminering.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 3 & a+2 \\ 2 & -2 & a+1 & a+1 \end{array}\right)$$

Vi börjar med att ta bort första raden ifrån andra raden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & a+1 & a+1 \end{array}\right)$$

Sen tar vi bort två gånger första raden ifrån tredje raden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right)$$

2.2 Analys av ekvationssystemet

Om vi gör om den nu förenklade matrisen tillbaka till ett ekvationssystem får vi:

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & a & (1) \\ & 2y & +2z & = & 2 & (2) \\ & & (a-1)z & = & 1-a & (3) \end{cases}$$

Av (3) kan vi observera att vi får 2 fall.

Fall 1:
Om $a \neq 1$ får vi ett ekvationssystem med oändligt många lösningar som beror på a där (3) ger
$$(a-1)z = (1-a).$$
Fall 2:
Om $a = 1$ får vi ett ekvationssystem med oändligt många lösningar som beror på z då (3) ger:

$$(a-1)z = (1-a), a = 1 \Leftrightarrow$$
$$(1-1)z = (1-1) \Leftrightarrow$$
$$0 = 0.$$

2.3 Lösning av ekvationssystemet

2.3.1 Fall 1

När $a \neq 1$ ger (3):

$$z = \frac{1-a}{a-1} = \frac{1-a}{-1 \cdot (1-a)} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$z = -1$$

Av detta följer att (2) ger:

$$2y + 2 \cdot (-1) = 2$$
$$y - 1 = 1$$
$$y = 2$$

Av detta följer att (1) ger:

$$x - 2 + (-1) = a$$
$$x - 3 = a$$
$$x = a + 3$$

Då får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & = & a+3 \\ y & = & 2 \\ z & = & -1 \end{cases}$$

2.3.2 Fall 2

Om vi sätter in $a = 1$ i ekvationssystemet får vi

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ & 2y & +2z & = & 2 \\ & & (1-1)z & = & 1-1 \end{cases},$$

vilket kan förenklas till

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 1 & (1) \\ & 2y & +2z & = & 2 & (2) \\ & & 0 & = & 0 & (3) \end{cases}.$$

Ekvationen (3) blir då $0 = 0$ vilket alltid stämmer oberoende av några variabler. Detta betyder att vi har 2 ekvationer som beror på 3 variabler vilket i sin tur betyder att vi kommer ha oändligt många lösningar som beror på en variabel som jag kallar för b.
Vi låter $z = b$.
Av detta följer att (2) ger

$$2y + 2b = 2$$
$$y + b = 1$$
$$y = 1 - b.$$

Och av detta följer att (1) ger

$$x - (1 - b) + b = 1$$
$$x - 1 + 2b = 1$$
$$x = 2 - 2b.$$

Och vi kan sammanställa detta i ett ekvationssystem

$$\begin{cases} x & = & 2-2b \\ y & = & 1-b \\ z & = & b \end{cases}$$

2.4 Svar

Om $a \neq 1$ är lösningarna till är lösningarna till ekvationssysytemet

$$\begin{cases} x &= a+3 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{cases}.$$

Om $a = 1$ så är lösningarna på ekvationssystemet

$$\begin{cases} x &= 2-2b \\ y &= 1-b \\ z &= b \end{cases}$$

för alla godtyckliga b.