Analys Problem 2

Robin Boregrim

October 8, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

För vilka värden på $a > 0$ har ekvationen $a^x = x$ lösningar?

2 Lösning

2.1 Omskrivning

För att kunna lösa ut a så skriver vi om ekvationen $a^x = x$ så att a blir en funktion av x.

$$a^x = x \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow (a^x)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = x^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \tag{2}$$

Ekvation (2) inte är definerad för $x = 0$, men detta är inte ett problem då

$$a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

så a^0 kommer aldrig vara lika med 0, $x = 0$ är därför aldrig en lösning på (1).
En annan sak värd att notera är att det finns inga positiva reella a som är lösning för negativa x. Detta på grund av a^x alltid kommer vara possitivt för positiva reella x så a^x kommer inte kunna vara lika med x för $x < 0$.
Vi vet därför att definitionsmängden på x är

$$D_f = x > 0.$$

2.2 Derivata räkning

Nu vet vi att a beskrivs av funktionen $a = x^{\frac{1}{x}}$ så vi räknar ut derviatan av den funktionen för att sen ta reda på eventuella extrempunkter.

$$a' = \frac{dx}{da}(x^{\frac{1}{x}})$$

$$= \frac{dx}{da}(e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})})$$

$$= \frac{dx}{da}(e^{\frac{1}{x}\ln(x)})$$

$$= \frac{dx}{da}(\frac{\ln x}{x}) \cdot e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$= (\frac{\ln x}{x})' \cdot x^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x \cdot \frac{dx}{da}(\ln x) - \ln x \cdot \frac{dx}{da}(x)}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}}$$

$$a' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} \tag{3}$$

Nu behöver vi räkna ut för vilka x som $a' = 0$ för att hitta eventuella extrempunkter. Varken $x^{\frac{1}{x}}$ eller $\frac{1}{x^2}$ kan bli 0, vilket betyder att om (3)$= 0$ måste

$$1 - \ln x = 0$$

$$1 = \ln x$$

$$e^1 = e^{\ln x}$$

$$e^1 = e^{\ln x}$$

$$x = e$$

Nu när vi vet att a' endast har en rot som är e vill vi veta om roten är en maximi-, mini- eller terrasspunkt.
Både $x^{\frac{1}{x}}$ och $\frac{1}{x^2}$ är alltid possetiva för $\forall x \in \mathbb{R} \cup D_f$. Detta betyder att a' är positivt eller negativt beroende på om $1 - \ln x$ är positivt eller negativt. Eftersom funktionen $\ln x$ är strängt växande och $\ln e = 1$ är $lnx < 1$ om $x < e$ och $lnx > 1$ om $x > e$.
Vilket i sin tur betyder att a' är positiv för $x < e$ och negativ för $x > e$. Roten $x = e$ är därför en global maximipunkt för (2).
Av detta följer då att $a \leq e^{\frac{1}{e}}$. Eftersom a var större än noll per definition får vi:

$$0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}.$$

2.3 Svar

Ekvationen $a^x = x$ har lösningar i internvallet

$$0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}.$$