

Algebra Problem 2

Robin Boregrim

September 24, 2017

Innehållsförteckning

1	Uppgiften	2
2	Lösning	2
2.1	Allmän lösning	2
2.2	Specialfall	3
2.3	Svar	3

1 Uppgiften

För vilka $n \geq 0$ är $2^n + 2 \cdot 3^n$ delbart med 8?

2 Lösning

2.1 Allmän lösning

Vi vill först göra en generell lösning Först använder vi oss av att $x^n = (x^2)^{n/2}$ för att få fram tal som vi kan förenkla med moduliräkning i modulo 8. Sen måste vi hantera fall då det bildas rottäcken då $x \equiv y \not\equiv \sqrt{x} \equiv \sqrt{y}$.

$$2^n + 2 \cdot 3^n \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (2^2)^{n/2} + 2 \cdot (3^2)^{n/2} \\ 4^{n/2} + 2 \cdot 9^{n/2} \\ 16^{n/4} + 2 \cdot 9^{n/2} \end{aligned} \tag{2}$$

Talen 16 och 9 är bra eftersom $16 \equiv 0 \pmod{8}$ och $9 \equiv 1 \pmod{8}$.

Vi måste därefter ta hänsyn till två saker för att undvika rottecken i den allmänna lösningen:

Säg att vi har termen x^n som vi vill skriva om till $(x^y)^{n/y}$.

H1. Om n är mindre än y måste det fallet kontrolleras separat som ett specialfall.

H2. Om n inte är delbart med y måste termen förlängas till $x^{(n-z)} \cdot x^z$ där $n - z \equiv 0 \pmod{n}$, vilket betyder att omskrivningen blir $(x^y)^{(n-z)/y} \cdot x^z$.

Av H1 följer att fall då $n < 4$ räknas separat då den största roten vi har bland termer i ekvation (2) är 4.

Av H2 följer att termen $16^{n/4}$ har fyra fall: $16^{n/4}$, $16^{(n-1)/4} \cdot 2$, $16^{(n-2)/4} \cdot 2^2$ och $16^{(n-3)/4} \cdot 2^3$.

Av H2 följer även att termen $2 \cdot 9^{n/2}$ har två fall $2 \cdot 9^{n/2}$ när n är jämnt och $2 \cdot 3 \cdot 9^{(n-1)/2}$ när n är ojämnt.

Av detta får vi dessa 4 fall av startekvationen (1) som vi sedan förenklar med moduliräkning.

Fall 1 om $n \equiv 0 \pmod{4}$

$$16^{n/4} + 2 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} + 2 \cdot 1^{n/2} = 2$$

Fall 2 om $n \equiv 1 \pmod{4}$

$$16^{n/4} \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1^{n/2} = 6$$

Fall 3 om $n \equiv 2 \pmod{4}$

$$16^{n/4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^{n/2} = 2$$

Fall 4 om $n \equiv 3 \pmod{4}$

$$16^{n/4} \cdot 2^3 + 2 \cdot 3 \cdot 9^{n/2} \equiv 0^{n/4} \cdot 2^3 + 2 \cdot 3 \cdot 1^{n/2} = 6$$

Av detta kan vi konstatera att (1) aldrig är delbar med 8 för $n \leq 4$ då (1) antingen är kongruent med 2 eller 6 när $n \leq 4$.

2.2 Specialfall

Då måste vi undersöka de 4 kvarvarande fallen för (1) där $n = 0, 1, 2, 3$.

Fall 1 $n = 0$

$$2^0 + 2 \cdot 3^0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \not\equiv 0 \pmod{8}$$

Fall 2 $n = 1$

$$2^1 + 2 \cdot 3^1 = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \equiv 0 \pmod{8}$$

Fall 3 $n = 2$

$$2^2 + 2 \cdot 3^2 = 4 + 2 \cdot 9 = 22 \equiv 6 \not\equiv 0 \pmod{8}$$

Fall 4 $n = 3$

$$2^3 + 2 \cdot 3^3 = 8 + 2 \cdot 27 = 35 \equiv 3 \not\equiv 0 \pmod{8}$$

Bara i fall 2 där $n = 1$ var $(1) \equiv 0 \pmod{8}$.

Därför är $n = 1$ svaret.

2.3 Svar

$2^n + 2 \cdot 3^n$ där $n \geq 0$ är bara delbart med 8 om $n = 1$.