Analys Problem 1

Robin Boregrim

October 2, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

Beräkna gränsvärdet av

$$x_n = \frac{\sqrt{1+2n}-3}{\sqrt{n}-2}$$

när n går mot oändligheten.

2 Lösning

2.1 Observationer

Om vi observerar gränsvärdet för x_n

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+2n}-3}{\sqrt{n}-2}\right) \tag{1}$$

ser vi att den är ett gränsvärde av typen "$\frac{\infty}{\infty}$" eftersom

$$\sqrt{1+2n}-3 \to \infty$$

och

$$\sqrt{n}-2 \to \infty.$$

Detta betyder att vi inte bara kan räkna ut gränsvärdet direkt eftersom olika gränsvärden av typen "$\frac{\infty}{\infty}$" kan anta olika värden. Vi måste därför skriva om (1) på ett sätt att gränsvärdet kan räknas ut.

2.2 Uträkningar

Vi börjar med att dela täljaren i (1) med nämnaren så långt som det går, vi kommer då få en kvot k och rest r i formen

$$k + \frac{r}{\sqrt{n}-2}.$$

Med lite räkning får vi ut att ett godtyckligt värde på kvoten k är

$$k = \sqrt{\frac{1}{n} + 2}$$

och dess tillhörande rest är då

$$r = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + 2} - 3}{\sqrt{n} - 2}.$$

Detta leder till att

$$(1) = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n} + 2} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + 2} - 3}{\sqrt{n} - 2} \right).$$

Vi vet att när $n \to \infty$ så

$$\frac{1}{n} \to 0 \tag{2}$$

och på grund av att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är kontinuerlig vet vi även

$$\sqrt{n} \to \infty. \tag{3}$$

Av (2) följer att när $n \to \infty$

$$\sqrt{\frac{1}{n} + 2} \to \sqrt{0 + 2} = \sqrt{2}$$

och av (2) och (3) följer att när $n \to \infty$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + 2} - 3}{\sqrt{n} - 2} \to „\frac{2\sqrt{2} - 3}{\infty}" = 0.$$

Detta betyder att

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n} + 2} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + 2} - 3}{\sqrt{n} - 2} \right) = \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}.$$

2.3 Svar

Gränsvärdet av

$$x_n = \frac{\sqrt{1+2n}-3}{\sqrt{n}-2}$$

när $n \to \infty$ är

$$\sqrt{2}.$$