Analys Problem 4

Robin Boregrim

November 5, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften **2**

2 Lösning **2**

2.1 Uträkning 2

2.2 Svar 4

1 Uppgiften

Beräkna följande generaliserade integral eller visa att den divergerar:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}$$

2 Lösning

2.1 Uträkning

Vi vill beräkna

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}.$$

Så vi börjar med att faktorisera polynomet $x^2 + 7x + 10$, detta gör vi igenom att hitta polynomets nollpunkter.

$$x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Detta betyder att

$$p(x) = \frac{1}{x^2 + 7x + 10} = \frac{1}{(x+5)(x+2)}$$

För att lättare kunna integrera detta vill vi skriva om $p(x)$ på följande sätt:

$$\frac{1}{(x+5)(x+2)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+2)}$$

Vi bestämmer konstanterna A och B så likheten gäller.
Multiplicera båda led med $(x+5)(x+2)$.

$$1 = A(x+2) + B(x+5)$$

Av detta kan vi skapa ett ekvationsystem.

$$\begin{cases} 1 = 2A + 5B & (1) \\ 0x = Ax + Bx & (2) \end{cases}$$

Av (2) kan vi lösa ut att

$$0 = Ax + Bx = A + B \Rightarrow B = -A.$$

Om vi stoppar in det vi fick av (2) i (1) får vi:

$$1 = 5B - 2B = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

Om vi sedan stoppar in värdet på B i likheten vi fick av (2) får vi:

$$A = -\frac{1}{3}$$

Vi vet då att:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 7x + 10} = \int_0^\infty \frac{dx}{3(x+2)} - \int_0^\infty \frac{dx}{3(x+5)}$$

Eftersom vi har en integral som går mot ∞ så gör vi ett gränsvärde med variabeln t där $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \Big(\int_0^t \frac{dx}{3(x+2)} - \int_0^t \frac{dx}{3(x+5)} \Big)$$

Nu kan vi börja integrera integralen.

$$= \frac{1}{3} \int_0^t \frac{dx}{(x+2)} - \frac{dx}{(x+5)}$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\ln|x+2| - \ln|x+5| \Big]_0^t$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\ln|\frac{x+2}{x+5}| \Big]_0^t$$

$$= \frac{1}{3} (\lim_{t\to\infty} (\ln|\frac{t+2}{t+5}|) - \ln|\frac{0+2}{0+5}|)$$

Vi förlänger bråket som innehåller variabeln t med $1/t$

$$\frac{1}{3} (\lim_{t\to\infty} (\ln|\frac{1+\frac{2}{t}}{1+\frac{2}{t}}|) - \ln|\frac{2}{5}|)$$

Vi kan nu lösa ut gränsvärdet och förenkla.

$$\frac{1}{3}(\ln|\frac{1+0}{1+0}| - \ln|\frac{2}{5}|) = \frac{1}{3}(\ln 1 - \ln \frac{2}{5}) = \frac{1}{3}(\ln(\frac{1}{\frac{2}{5}})) = \frac{\ln \frac{5}{2}}{3}$$

2.2 Svar

Integralen är divergent, och

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 7x + 10} = \frac{\ln \frac{5}{2}}{3}.$$