

Algebra Problem 6

Robin Boregrim

November 13, 2017

Innehållsförteckning

1	Uppgiften	2
2	Lösning	2
2.1	Beräkning av skärningspunkt	2
2.2	Beräkning av $\sin\alpha$	3
2.3	Svar	4

1 Uppgiften

Visa att linjen $(x, y, z) = (1 + 2t, -2t, 4 + 3t)$ skär planet $x + 2y - 2z = 7$ och bestäm skärningspunktens koordinater. Visa även $\sin \alpha$, där α är (den spetsiga) vinkeln mellan linjen och planet.

2 Lösning

2.1 Beräkning av skärningspunkt

För att hitta skärningspunkten (om det finns någon) kan börja med att stoppa in linjens yttryck för x, y och z i formeln för planet för att se om det finns något värde på t som löser ekvationen.

$$1 + 2t + 2(-2t) - 2(4 + 3t) = 7$$

$$1 + 2t - 4t - 8 - 6t = 7$$

$$-8t = 14$$

$$t = -\frac{7}{4}$$

Om vi nu stoppar in detta värde på t i linjens formel får vi ut skärningspunkten.

$$(x, y, z) = (1 + 2(-\frac{7}{4}), -2(-\frac{7}{4}), 4 + 3(-\frac{7}{4}))$$

$$(\frac{2}{2} - \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{16}{4} - \frac{21}{4})$$

$$(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{4})$$

så skärningspunktens koordinater är

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{4}\right).$$

2.2 Beräkning av $\sin\alpha$

På grund av planets formel vet vi att planets normal är

$$N = (1, 2, -2).$$

Linjens riktings vektor $(2, -2, 3)$ kan läsas av från linjens funktion. För att beräkna vinkeln β mellan dessa två vektorer kan vi använda oss av skalärprodukten av två vektorers egenskap att

$$u \cdot v = |u||v| \cos \beta,$$

och skriva om det som

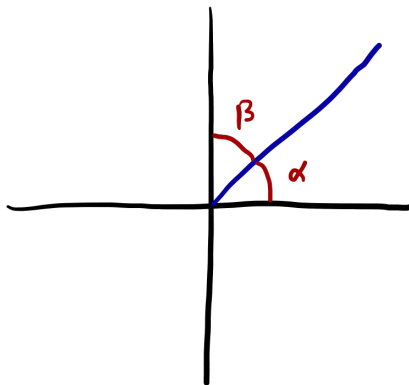
$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{u \cdot v}{|u||v|} \\ \cos \beta &= \frac{(1, 2, -2) \cdot (2, -2, 3)}{|(1, 2, -2)|| (2, -2, 3)|} = \\ &= \frac{2 - 4 + 6}{\sqrt{(1^2 + 2^2 + (-2)^2)}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{9}\sqrt{17}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{17}} \end{aligned}$$

Så

$$\cos \beta = \frac{4}{3\sqrt{17}}.$$

Eftersom Normalen är vinkelrät emot Planet betyder det att

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$



Men om man studerar funktionerna sinus och cosinus vet man att

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin(\gamma).$$

Detta betyder då att

$$\cos \beta = \sin \alpha.$$

Så

$$\sin \alpha = \frac{4}{3\sqrt{17}}$$

Vi kan nu verifiera med tekniskahjälpmedel att α är en spetsig vinkel.

2.3 Svar

Skärnings punkten för linjen och planet är:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{4}\right),$$

och sinus för den spetsiga vinkeln som linjen skär planet med är:

$$\sin \alpha = \frac{4}{3\sqrt{17}}.$$