Algebra Problem 6

Robin Boregrim

November 26, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

Visa att linjen $(x, y, z) = (1+2t, -2t, 4+3t)$ skär planet $x+2y-2z = 7$ och bestäm skärningspunktens koordinater. Bestäm även $\sin\alpha$, där α är (den spetsiga) vinkeln mellan linjen och planet.

2 Lösning

2.1 Beräkning av skärningspunkt

För att hitta skärningspunkten (om det finns någon) kan börja med att stoppa in linjens uttryck för x, y och z i formeln för planet för att se om det finns något värde på t som löser ekvationen.

$$1 + 2t + 2(-2t) - 2(4 + 3t) = 7$$

$$1 + 2t - 4t - 8 - 6t = 7$$

$$-8t = 14$$

$$t = -\frac{7}{4}$$

Om vi nu stoppar in detta värde på t i linjens formel får vi ut skärningspunkten.

$$(x, y, z) = \left(1 + 2\left(-\frac{7}{4}\right), -2\left(-\frac{7}{4}\right), 4 + 3\left(-\frac{7}{4}\right)\right)$$

$$\left(\frac{2}{2} - \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{16}{4} - \frac{21}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

så skärningspunktens koordinater är

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{4}\right).$$

2.2 Beräkning av sinα

På grund av planets formel vet vi att planets normal är

$$N = (1, 2, -2).$$

Linjens riktings vektor $(2, -2, 3)$ kan läsas av från linjens funktion. För att beräkna vinkeln β mellan dessa två vektorer kan vi använda oss av skalärprodukten av två vektorers egenskap att

$$u \cdot v = |u||v| \cos \beta,$$

och skriva om det som

$$\cos \beta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}.$$

$$\cos \beta = \frac{(1, 2, -2) \cdot (2, -2, 3)}{|(1, 2, -2)||(2, -2, 3)|} =$$

$$\frac{2 - 4 - 6}{\sqrt{(1^2 + 2^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2}}$$

$$-\frac{8}{\sqrt{9}\sqrt{17}}$$

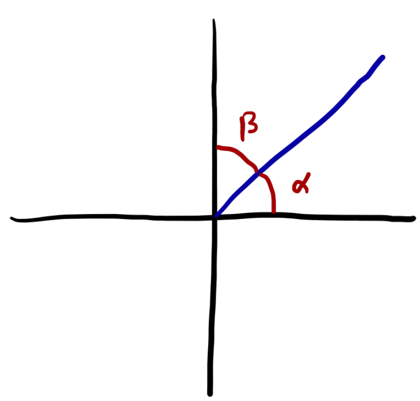
$$-\frac{8}{3\sqrt{17}}$$

Så

$$\cos \beta = -\frac{8}{3\sqrt{17}}.$$

Eftersom Normalen är vinkelrät emot Planet betyder det att

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \beta.$$



På grund av hur sinus och cosinus perioder förhåller sig till varandra så vet vi att

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \sin(\gamma).$$

Detta betyder då att

$$\cos\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) = \sin\alpha.$$

Så

$$\sin\alpha_1 = -\frac{8}{3\sqrt{17}}$$

Men detta sinus värde är negativt, villket betyder att vinkeln α_1 befinner sig i antingen den tredje eller fjärde kvartalen av enhetscirkeln och är därför mycket trubbig. För att få ut $sin\alpha$ för den spetsiga vinkeln α så tar vi absolutbeloppet av $\sin\alpha_1$ och får:

$$\sin\alpha = \frac{8}{3\sqrt{17}}.$$

2.3 Svar

Skärningspunkten för linjen och planet är:

$$(x, y, z) = \Big(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{4}\Big),$$

och sinus för den spetsiga vinkeln som linjen skär planet med är:

$$\sin\alpha = \frac{8}{3\sqrt{17}}.$$