Analys Problem 3

Robin Boregrim

November 5, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften

Undersök funktionen
$$f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$$
med avseende på extrempunkter, asymptoter och konvexitetsegenskaper. Skissa även grafen.

2 Lösning

2.1 Nollställen

Vi börjar med att beräkna nollställen för funktionen $f(x)$.
$$f(x) = e^{-x} - e^{-2x} = 0$$
$$e^{-x} = e^{-2x}$$
Vi tar ln av båda led.
$$\ln(e^{-x}) = \ln(e^{-2x})$$
$$-x\ln(e) = -2x\ln(e)$$
$$-x = -2x$$
och adderar $+2x$ i båda led,
$$x = 0.$$
Då vet vi att $f(x)$ har nollstället
$$f(0) = 0.$$

2.2 Extrempunkter

För att beräkna extrempunkter så behöver vi beräkna nollställen för $f'(x)$, derivatan av $f(x)$.
$$f'(x) = 2e^{-2x} - e^{-x}.$$
Vi sätter $f'(x) = 0$ och förenklar.
$$f'(x) = 2e^{-2x} - e^{-x} = 0$$
$$2e^{-2x} = e^{-x}$$

$$\ln(2e^{-2x}) = \ln(e^{-x})$$
$$\ln 2 + \ln(e^{-2x}) = \ln(e^{-x})$$
$$\ln 2 - 2x\ln(e) = -x\ln(e)$$
$$\ln 2 - 2x = -x$$

Vi adderar $+2x$ i båda led.

$$\ln 2 = x$$

Nu när vi vet att $f'(\ln 2) = 0$ så kan vi beräkna om $f(\ln 2)$ är en maxi-, mini- eller terrasspunkt. Detta gör vi genom att kolla om $f'(x)$ är positiv eller negativ för x större och mindre än $\ln 2$. Eftersom $x = \ln 2$ är den enda nollpunkten för f' så behöver vi bara beräkna ett värde över och ett värde under $x = \ln 2$.

För $x < \ln 2$:

$$\frac{1}{2} < \ln 2$$
$$f'(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$= \frac{2}{e} - \frac{\sqrt{e}}{e}$$
$$= \frac{2-\sqrt{e}}{e}$$

Eftersom

$$2 > \sqrt{e}$$

så är

$$\frac{2-\sqrt{e}}{e} = f'(\frac{1}{2}) > 0$$

För $x > \ln 2$:

$$1 > \ln 2$$
$$f'(1) = 2e^{-2} - e^{-1}$$
$$= \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e}$$
$$= \frac{2-e}{e^2}$$

Eftersom

$$2 < e$$

så är

$$\frac{2-e}{e^2} = f'(1) < 0$$

För skissen kan det även vara bra att veta vad $f(\ln 2)$ är, så vi beräknar det.

$$f(\ln 2) = e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Nu kan vi sammanställa detta i en tabell.

x		$\ln 2$	
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

2.3 Konvexitet

För att beräkna konvexitet kan vi använda $f''(x)$, andraderivatan till $f(x)$.

$$f''(x) = e^{-x} - 4e^{-2x}$$

Först, precis som med $f'(x)$, så försöker vi hitta nollpunkter.

$$f''(x) = e^{-x} - 4e^{-2x} = 0$$

$$e^{-x} = 4e^{-2x}$$

$$\ln(e^{-x}) = \ln(4e^{-2x})$$

$$\ln(e^{-x}) = \ln 4 + \ln(e^{-2x})$$

$$-x\ln(e) = \ln 4 + -2x\ln(e)$$

$$-x = \ln 4 - 2x$$

$$x = \ln 4$$

Nu när vi vet nollpunkten för $f''(x)$ kan vi beräkna om $f''(x)$ är posetiv eller negativ för x större eller mindre än $\ln 4$.
För $x < \ln 4$:

$$e^{-1} - 4e^{-2}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{4}{e^2}$$

$$= \frac{e-4}{e^2}$$

Eftersom

$$e < 4$$

så är

$$\frac{e-4}{e^2} = f''(x) < 0$$

Vilket betyder att $f(x)$ är konkav för $x < \ln 4$.

För $x > \ln 4$:

$$e^{-2} - 4e^{-2\cdot 2}$$

$$= \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e^4}$$

$$= \frac{e^2 - 4}{e^4}$$

Eftersom

$$e^2 > 4$$

så är

$$\frac{e-4}{e^2} = f''(x) > 0$$

Vilket betyder att $f(x)$ är konvex för $x > \ln 4$.

Precis som med första derivatan så vill vi för referens för skissen även veta vad $f(\ln 4)$ är.

$$f(\ln 4) = e^{-\ln 4} - e^{-2\ln 4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}$$

$$= \frac{4}{16} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{4}{16} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{3}{16}$$

Nu kan vi sammanställa detta i en tabell.

x		$\ln 4$	
f’	-	0	+
f	$\frown$	$\frac{3}{16}$	$\smile$

2.4 Asymptoter

För att beräkna asymptoter så använder vi oss av att asymptoten $kx + m$ för $f(x)$ när x går mot a är

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x \to a} f(x) - kx = m$$

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så finns det bara två möjliga asymptoter som är $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.

$x \to \infty$:

$$k = \lim_{x \to \infty} (\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}) = \lim_{x \to \infty} ((\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}) \cdot \frac{1}{x}) = (0 - 0) \cdot 0 = 0$$

$$m = \lim_{x \to \infty} (e^{-x} - e^{-2x} - 0x) = \lim_{x \to \infty} (\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}) = 0 - 0 = 0$$

Detta betyder att det finns en vågrät asymptot där $y = 0$ för $x \to \infty$.

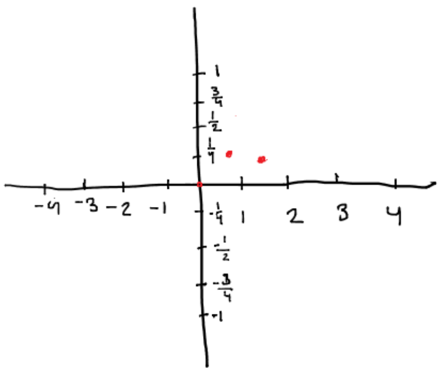
$x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} (\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}) = \lim_{x \to -\infty} ((1 - e^{-x}) \cdot \frac{e^{-x}}{x}) = \lim_{x \to \infty} ((e^x - 1) \cdot \frac{e^x}{x}) = \infty.$$

Detta betyder att det inte finns någon asymptot för $x \to -\infty$.

2.5 Skiss

För att skissa grafen så sätter vi först ut viktiga punkter som vi vet att grafen går igenom, dvs nollstället, extrempunkten $\frac{1}{4}$ och där grafen går från konkav till konvex $\frac{3}{16}$.



Sen använder vi oss av dessa punkter, vad vi vet från grafens konvexitet och asymptoten ($y = 0, x \to \infty$) för att rita ut grafen $f(x)$.