Analys Problem 8

Robin Boregrim

December 11, 2017

Innehållsförteckning

1 Uppgiften **2**

2 Lösning **2**

2.1 Homogen lösning 2

2.2 Partikulär lösning 2

2.3 Svar 4

1 Uppgiften

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$3y'' + 12y = 2\sin^2 x.$$

2 Lösning

2.1 Homogen lösning

Först så löser vi ut den homogena lösningen till differentialekvationen y_h. Då löser vi ut alla lösningar till $3y'' + 12y = 0$. Detta kan göras med att lösa ut den karaktäristiska ekvationen $3r^2 + 12 = 0$.

$$3r^2 = -12 \Leftrightarrow$$

$$r^2 = -\frac{12}{3} \Leftrightarrow$$

$$r^2 = -4 \Leftrightarrow$$

$$r = \pm 2i$$

Detta beryder att den homogena ekvationen är:

$$y_h = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

2.2 Partikulär lösning

Nu ska vi beräkna den partikulära lösningen y_p. För detta kan vi först skriva om höger ledet på följande sätt:

$$2\sin^2 x =$$

$$2\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x =$$

$$1 + \sin^2 x - \cos^2 x =$$

$$1 - \cos(2x).$$

Detta betyder att:

$$3y_p'' + 12y_p = 1 - \cos(2x).$$

Vi kan nu dela upp y_p så att $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ där:

$$3y''_{p1} + 12y_{p1} = 1$$

och

$$3y''_{p2} + 12y_{p2} = -\cos(2x).$$

Vi löser först ut y_{p1}.

$$3y''_{p1} + 12y_{p1} = 1 \Rightarrow y_{p1} = a \Rightarrow y''_{p1} = 0$$

(där a är en konstant)

$$\Rightarrow 12y_{p1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$y_{p1} = \frac{1}{12}.$$

Nu löser vi ut y_{p2}, men eftersom $-\cos(2x)$ är en trigonometrisk funktion kommer vi använda oss av hjälpfunktionen

$$3u'' + 12u = -e^{2ix}$$

där

$$\Re(-e^{2ix}) = -\cos(2x).$$

Vi substituerar $u = -ze^{2ix}$ och beräknar $u''iz$.

$$u = -ze^{2ix}$$

$$u' = -e^{2ix}(z' + 2iz)$$

$$u'' = -e^{2ix}(z'' + 4iz' - 4z).$$

Detta betyder då att:

$$-e^{2ix}3(z'' + 4iz' - 4z) - e^{2ix}12z = -e^{2ix}.$$

Då kan vi dela båda led med $-e^{2ix}$,

$$3(z'' + 4iz' - 4z) + 12z = 1$$

och lösa ut z.

$$3z'' + 12iz' - 12z + 12z = 1$$

$$3z'' + 12iz' = 1$$

$$\Rightarrow z' = a \Rightarrow z = ax \Rightarrow z'' = 0$$

(där a är en konstant)

$$12ia = 1 \Leftrightarrow$$
$$a = \frac{1}{12i} = -\frac{i}{12} \Rightarrow$$
$$z = -\frac{i}{12} \Rightarrow$$

Nu är det bara att få ut svaret i y.

$$u = -ze^{2ix} = \frac{i}{12}e^{2ix} = \frac{i}{12}\big(\cos(2x) + i\sin(2x)\big) = \left(\frac{i\cos(2x)}{12} - \frac{\sin(2x)}{12}\right)$$

$$y_{p2} = \Re(u)\Re\left(\frac{i\cos(2x)}{12} - \frac{\sin(2x)}{12}\right) = -\frac{\sin(2x)}{12}$$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = \frac{1}{12} - \frac{\sin(2x)}{12}$$

$$y = y_h + y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{12} - \frac{\sin(2x)}{12}$$

2.3 Svar

Alla lösningar till differentialekvationen beskrivs av:

$$y = y_h + y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{12} - \frac{\sin(2x)}{12}$$