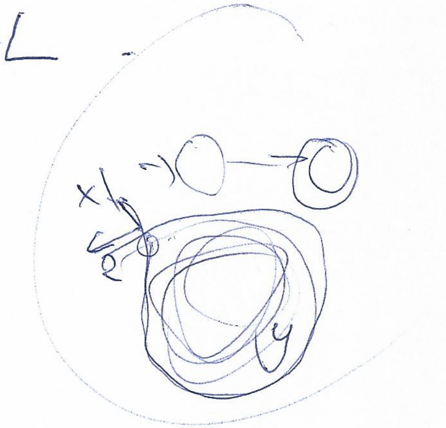
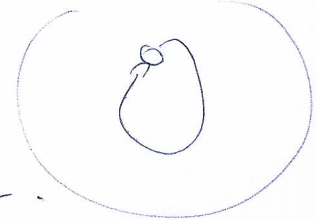
Pumping Lemma

$\forall \Sigma\ \forall L \subseteq \Sigma^* : L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \exists k > 0\ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$

$[\, y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \,]$





Dokažte, že $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w| = j^2, j \geq 0 \} \notin \mathcal{L}_3$

Důkaz sporem: - Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.

- Dle P.L. $\exists k > 0\ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$

  $\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.

- Uvažme libovolné $k > 0$ a zvolme za $w = a^{k^2}$.

  Platí, že $a^{k^2} \in L \wedge |a^{k^2}| = k^2 \geq k$.

- Dle P.L. tedy $\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.
- Uvažme libovolné $x, y, z \in \Sigma^*$ taková, že $w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 . xy^iz \in L$
- Zvolme $i = 2$ a budeme zkoumat řetězec xy^2z.
- Dle P.L.: $xy^2z \in L$.

- $|xy^2z| = |xyyz| = |xyz| + |y| = k^2 + |y|$
- Víme, že $0 < |y| \leq k$, tedy $k^2 < |xy^2z| \leq k^2 + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ (protože $k > 0$)

Tedy $k^2 < |xy^2z| < (k+1)^2$. Tedy délka xy^2z se nachází mezi 2. mocninami dvou za sebou jdoucích přir. čísel. Současně ale $xy^2z \in L$ a tedy $l = |xy^2z| = j^2$ pro nějaké přirozené číslo j. Tedy $k < j < k+1$ pro přirozené číslo j a přirozené číslo k ($k, j \in \mathbb{N}$), což je spor. (Mezi 2 za sebou jdoucími přir. čísly není žádné další přir. číslo.) $\square$

<u>Dokažte, že $L = \{a^{n!} \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_3$</u>

Důkaz sporem: - Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.

- Dle P.L.: $\exists k > 0\ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^*$:
  $w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.
- Mějme libovolné $k > 0$ a zvolme $w = a^{k!}$.

Víme, že $a^{k!} \in L$ a $|a^{k!}| = k! \geq k$.

Tedy $\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.

Uvažme libovolné x, y, z takové, že

$$w = xyz \wedge 0 < |y| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L.$$

Zvolme $i > 1$.

- Zkoumejme xy^iz : $|xy^iz| = |xyz| + |y^{i-1}|$, což lze, protože $i > 1$.

  Tedy $|xy^iz| = k! + |y| \cdot (i-1)$.

- Zvolme dále volbu i na $i = (k+1)! + 1 > 1$

- Pak
$$|xy^iz| = k! + |y|((k+1)! + 1 - 1) =$$
$$= k! + |y| \cdot (k+1)! =$$
$$= k! + |y|(k+1) \cdot k! =$$
$$= k!(1 + |y|(k+1))$$

- Protože $xy^iz \in L$, víme, že $|xy^iz| = l!$ pro $l \geq 0$.

  Tedy $k!(1 + |y|(k+1)) = l!$

  Tedy $k!(1 + |y|(k+1)) = l(l-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k!$

  Po vydělení: $(1 + |y|(k+1)) = l \cdot (l-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)$

Pravá strana uvedené rovnosti je dělitelná $k+1$, levá strana tedy musí být rovněž dělitelná $k+1$.

– Hodnota $(k+1)$ přitom beze zbytku dělí $|y|(k+1)$. Tedy $(k+1)$ beze zbytku musí dělit i 1. To je ale spor, protože $k>0$ a tedy $k+1>1$. $\square$

Dokažte, že $L = \{a^n b^m a^n \mid m,n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_3$

– Poznámka: Nelze dokázat slabším P.L. s podmínkou $0<|y|\leq k$. Lze zvolit $x=a^k, y=b, z=b^k$ a opravdu platí, že $xy^iz \in L$ pro typickou volbu $w=a^kba^k$.

– Použijte silnější P.L. s podmínkou $y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k$.

– Důkaz sporem. – Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.

– Tedy dle P.L.: $\exists k>0\ \forall w\in L: |w|\geq k \Rightarrow \exists x,y,z \in \Sigma^*:$

$$w=xyz \wedge y\neq\varepsilon \wedge |xy|\leq k \wedge \forall i\geq 0: xy^iz \in L$$

– Uvažme libovolné $k>0$ a zvolme $w=a^kba^k$, kde $a^kba^k \in L$ a $|a^kba^k| = 2k+1 \geq k$ $(k>0)$

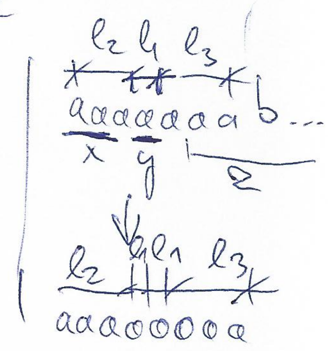
– Tedy $\exists x,y,z\in\Sigma^*: w = xyz \wedge y\neq\varepsilon \wedge |xy|\leq k \wedge \forall i\geq 0: xy^iz \in L$

– Uvážme všechny volby $x, y, z \in \Sigma^*$ takové, že
$w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \le k \wedge \forall i \ge 0 : xy^iz \in L$.
a zvolme $i = 2$.

– z toho, že $|xy| \le k$ plyne, že xy volíme z prefixu a^k řetězce $a^kba^k = w$.

– Přitom také $y \neq \varepsilon$, tedy $y = a^{l_1}$, $x = a^{l_2}$, kde $l_1 + l_2 \le k$ a $l_1 > 0$

– Tedy $xy^2z = a^{l_2}a^{l_1}a^{l_1}a^{l_3}ba^k = a^lba^k$,
kde $l = l_2 + 2 \cdot l_1 + l_3 = l_1 + l_2 + l_3 + l_1 = k + l_1 > k$,
protože $l_1 > 0$. Pumpováním jsme tedy dostali řetězec $xy^2z \notin L$. Současně dle P.L. $xy^2z \in L$.
SPOR. □



S využitím uzávěrových vlastností a toho, že víme, že $\{a^nb^n \mid n \ge 0\} \notin \mathcal{L}_3$, ukažte, že
$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \notin \mathcal{L}_3$.

Důkaz sporem. Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.

- Víme, že jazyk a^*b^* zapsaný RV je regulární.
- $L \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Protože $\mathcal{L}_3$ je uzavřená vůči $\cap$, $L \cap a^*b^*$ musí být regulární. Ale my víme, že není. SPOR. $\square$

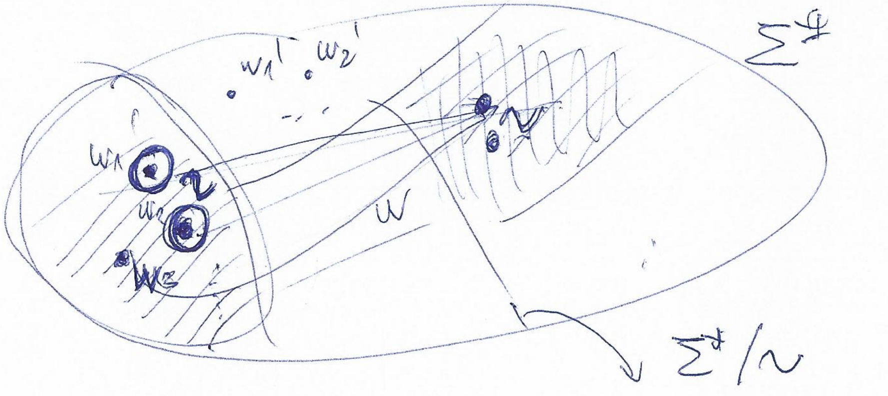
Myhill – Nerodova věta

Pro $L \subseteq \Sigma^*$ tvrzení $L \in \mathcal{L}_3$, násl. tvrzení jsou ekvivalentní:

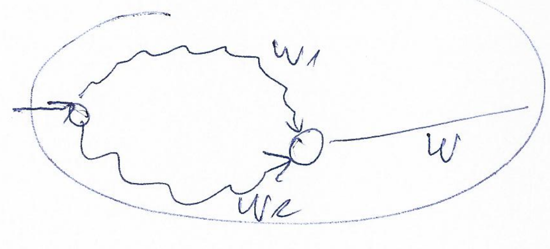
1. $\exists$ DKA M: $L = L(M)$
2. L je sjednocení některých tříd rozkladu na Σ^* dle pravé kongruence $\sim$ konečného indexu.

Def. $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ nazveme pr. kongruencí, když

$\forall u, v, w \in \Sigma^*: u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$



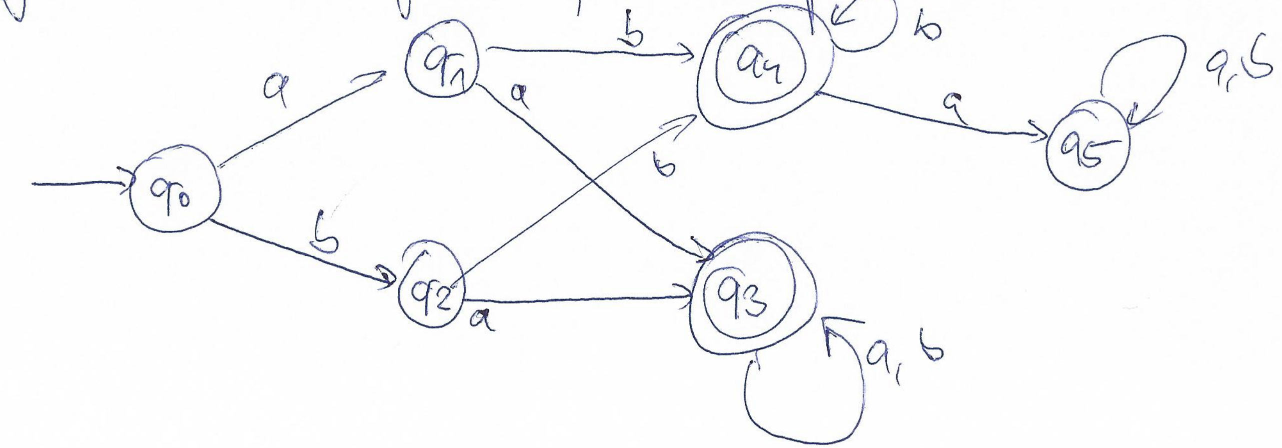
$L = \bigcup$ 



3. Relace $\sim_L$ má konečný index, kde

$\forall u, v \in \Sigma^*: u \sim_L v \iff (\forall w \in \Sigma^*: (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L))$

Mějme následující úplně def. DKA:



Sestavte ekvivalenční třídy pravé kongruence $\sim$ s ohledem na výše uvedený automat (odpovídající uvedenému automatu) dle M.-N. věty.

$L^{-1}(q_0) = \{\varepsilon\}$

jazyk mezi q_0 a daným stavem

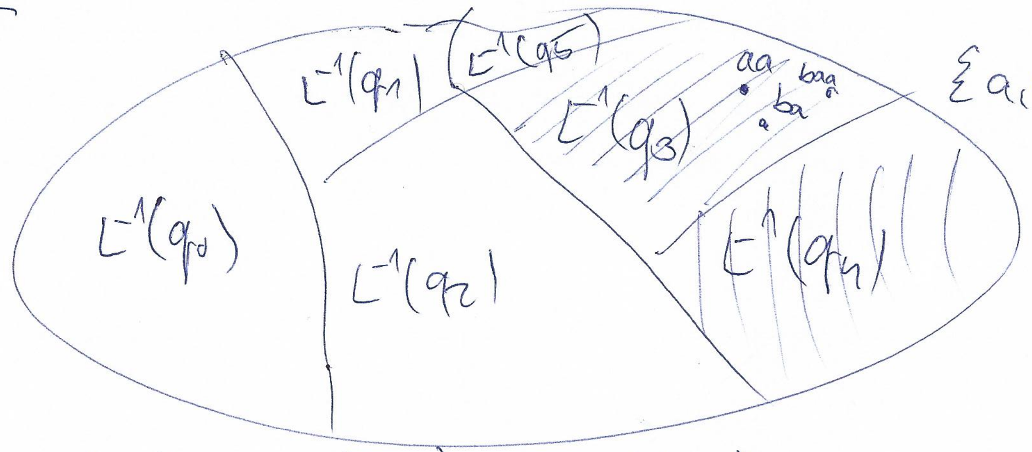
$L^{-1}(q_1) = \{a\}$

$L^{-1}(q_2) = \{b\}$

$L^{-1}(q_3) = (aa + ba)(a+b)^*$ | nebolí $aa \sim ba$, $aa \sim baa$ ⋮

$L^{-1}(q_4) = (ab + bb)b^*$

$L^{-1}(q_5) = (ab+bb)b^*a(a+b)^*$



$\{a,b\}^*$

index : 6

$L(M) = L^{-1}(q_0) \cup L^{-1}(q_4)$

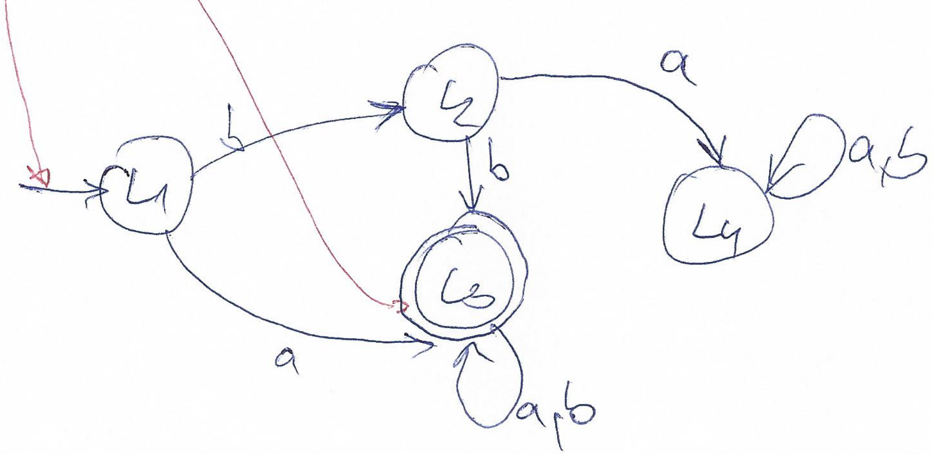
– M – není minimální, q_1 a q_2 lze sloučit.

Zkonstruujte KA k $\sim_L$ dané následujícími ekvivalenčními třídami:

$L_1 = \{\varepsilon\}$ $L_2 = \{b\}$ $L_3 = a(a+b)^* + bb(a+b)^*$

$L_4 = \Sigma^* \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$

Přijímá $L = L_3$.



| bba

- Dokažte, že $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \} \notin \mathcal{L}_3$ pomocí M.-N. věty.

Důkaz sporem.

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.
- Dle M.-N. věty $\sim_L$ má konečný index.
- Dá se ale nahlédnout, že $\forall d \in \mathbb{N}$ $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$: $\#_a(w_1) - \#_b(w_1) = d \;\wedge$ $\#_a(w_2) - \#_b(w_2) \neq d \Rightarrow$

$w_1 \not\sim_L w_2$.

konečně $w_1 b^d \in L$, zatímco $w_2 b^d \notin L$

a a

a a a.

- Je přitom jasné, že $\forall d \in \mathbb{N}\ \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*$: $\#_a(w_1) - \#_b(w_1) = d \land \#_a(w_2) - \#_b(w_2) \neq d$. Stačí totiž zvolit $w_1 = a^d$ $w_2 = a^{d+1}$.
- To znamená, že $\sim_L$ má nekonečný index. SPOR. $\square$