

**ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

SCUOLA DI INGEGNERIA
Sede di Forlì

Corso di Laurea in
INGEGNERIA AEROSPAZIALE
Codice 0945: Classe L-9

ELABORATO FINALE DI LAUREA
ING-IND/06 FLUIDODINAMICA

Implementazione di una soluzione numerica delle equazioni per la
convezione naturale.

CANDIDATO

Niccolò Tosato

RELATORE

Prof.ssa Elisabetta De Angelis

Anno Accademico: 2019/2020

Indice

Introduzione	3
Approssimazione di Boussinesq		...	4
Differenze finite	9
Discretizzazione spaziale		...	11
Discretizzazione delle equazioni		...	14
Algoritmo SIMPLE	17
Soluzione dell'equazione di Poisson		...	20
Implementazione dell'algoritmo		...	23
Solver Parallelo	24
Risultati	26
Bibliografia	31

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro mi sono occupato dell'implementazione di un software di calcolo numerico, specializzato nella risoluzione di problemi di convezione naturale all'interno di un dominio rettangolare. Per prima cosa mi sono occupato del modello matematico-fisico più adeguato per lo studio del problema, andando a scegliere il modello di Boussinesq, studiato in fluidodinamica durante il mio corso di laurea triennale.

Dopo la scelta del modello fisico, si è reso necessario lo studio di tecniche numeriche per discretizzare il set di equazioni scelto. In seguito ho proceduto, tramite ricerca bibliografica, ad individuare un algoritmo di risoluzione di tipo iterativo delle equazioni di Navier-Stokes, con approfondimento particolare nella risoluzione dell'equazione di Poisson, resi necessari in conseguenza al tipo di algoritmo individuato. A conclusione di ciò sono esposti alcuni risultati di simulazioni ottenuti con il codice sviluppato. Ciò ha permesso di osservare cosa succede all'interno di una cavità quadrata in presenza di un flusso a convezione naturale, per poi indagare il comportamento delle grandezze caratteristiche del problema al variare di parametri adimensionali.

Approssimazione di Boussinesq

Si definiscono flussi a convezione naturale quelli in cui il moto è generato esclusivamente dalle forze di galleggiamento. Introducendo nel dominio delle differenze di temperatura si ottengono variazioni di densità che a loro volta inducono il moto. Il fluido caldo e meno denso tende a salire, mentre quello freddo e più denso tende a scendere. I flussi a convezione naturale possono essere studiati utilizzando l'approssimazione proposta da Joseph Boussinesq. L'approssimazione è applicabile secondo l'ipotesi di variazioni di densità molto piccole $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$ che porta ridurre l'equazione di conservazione della massa completa

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

alla forma più semplice e valida per i flussi incompressibili

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Questa ipotesi è considerabile valida se le differenze di temperatura nel campo fluidodinamico sono contenute e le variazioni di densità dovute ai termini di pressione possono essere trascurate. La densità quindi diventa funzione della sola temperatura permettendoci di lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

$$\rho = \rho|_{\vartheta=\vartheta_0} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0) + o[(\vartheta - \vartheta_0)^2].$$

Definendo il coefficiente di dilatazione termica $\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta}$ e sostituendolo si ottiene la seguente espressione per la densità

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \alpha$$

che nella sua forma adimensionale può essere scritta come segue

$$\rho^* = 1 - \alpha \vartheta^* (\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

A questo punto dopo aver caratterizzato la densità al variare della temperatura e aver visto la sua forma adimensionale è possibile sostituire la relazione sopra nell'equazione della quantità di moto adimensionale.

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Fr} \rho^* f_i^* + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_i^*}.$$

Il termine contenente forze di massa e densità diviene con le definizioni del numero di Fr e Gr

$$\frac{1}{Fr} \rho^* f_i^* = \frac{1}{Fr} f_i^* - \frac{Gr}{Re^2} \vartheta^* f_i^*.$$

È possibile inglobare il termine costante rispetto alla temperatura delle forze di massa, corrispondenti alla parte costante della pressione idrostatica, dentro al termine di pressione, in quanto le forze di massa sono conservative ed è possibile scriverne il gradiente, indicando quindi la pressione p' a meno della parte idrostatica

$$p' = p^* - p_{id}.$$

Il vettore delle forze di massa che consideriamo in un problema di convezione naturale bidimensionale naturalmente sarà definito adimensionalmente come $f^* = (0, -1)$.

Si giunge alla seguente equazione per la quantità di moto

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i^*} - \frac{Gr}{Re^2} \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_i^*}.$$

Per ottenere un'ulteriore equazione e completare il sistema, è opportuno partire dall'equazione dell'entropia definita come

$$\rho \vartheta \frac{DS}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}.$$

Riscrivendo l'entropia come sola funzione della temperatura e ipotizzando che le variazioni di entropia dovute alla pressione possano essere trascurate, si ottiene la seguente

$$dS \simeq \frac{C_p}{\vartheta} d\vartheta.$$

Che sostituito nella precedente dà

$$\rho C_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}.$$

Ipotizzando ρ, k, C_p costanti e adimensionalizzando si ottiene l'ultima equazione che permette di risolvere il problema in esame

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} + \frac{E}{Re} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*}.$$

L'ultimo termine rappresenta la produzione di calore dovuto alla dissipazione di energia meccanica, ma commettendo un piccolo errore può essere trascurato. Nuovamente ipotizzando l'assenza di fenomeni periodici possiamo considerare $St = 1$.

Si giunge in fine al sistema completo di equazioni specializzato nel caso di convezione naturale:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i^*} - \frac{Gr}{Re^2} \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_i^*} \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} \end{cases}$$

Nel sistema compaiono 3 numeri adimensionali, Gr , Re e Pr , parametri non indipendenti tra loro e non tutti noti a priori. In particolar modo la velocità caratteristica che contribuisce alla definizione del numero di Re non è nota a priori, non essendo alcuna velocità imposta dalle condizioni al contorno. Una stima della velocità può essere fatta dividendo i problemi di convezione naturale in due categorie, uno con $Gr \ll 1$ un altro con $Gr \gg 1$.

Nel caso di $Gr \ll 1$ possiamo dire che le forze di galleggiamento provocheranno piccole velocità risultanti, quindi è corretto ritenere i termini viscosi e di galleggiamento dello stesso ordine di grandezza deducendo $\frac{1}{Re} \sim \frac{Gr}{Re^2}$.

Nel caso in cui le forze di galleggiamento siano più significative e con $Gr \gg 1$, si avranno velocità risultanti maggiori, arrivando alla stima $\frac{Gr}{Re^2} \sim 1$.

Con questa ultima stima possiamo quindi riscrivere il nostro sistema solamente in funzione del numero di Pr e del numero di Gr come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i^*} - \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_i^*} \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} \end{array} \right.$$

Differenze finite

Per risolvere il set di equazioni completo, che consiste in un sistema di equazioni non lineari alle derivate parziali, è necessario passare da operatori differenziali continui a operatori differenziali discreti. Il passaggio dal continuo al discreto si ottiene passando tramite la definizione di derivata, sostituendo il rapporto incrementale al suo limite. Per calcolare l'errore commesso ci si può servire dello sviluppo in serie di Taylor. Questa tecnica prende il nome di metodo alle differenze finite.

Con Taylor otteniamo :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'|_{x=x_i} \Delta x + \sigma(x_{i+1} - x_i).$$

Possiamo così ricavare una prima definizione della derivata prima.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}.$$

Questa derivata viene detta "in avanti".

Alternativamente è possibile definire la derivata "all'indietro" sempre con lo sviluppo in serie di Taylor ma regredendo nel dominio.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}.$$

In fine si può definire la derivata "centrata", media tra le due precedenti.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x}.$$

Arrestandosi a sviluppi di ordine superiore è possibile ottenere risultati più accurati.

La derivata seconda può essere ugualmente ricavata dalla definizione, ottenendo :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2}.$$

Discretizzazione spaziale

Il dominio di calcolo, di forma rettangolare, viene diviso in maniera equispaziata in ciascuna direzione, adottando una griglia sfalsata ("staggered"), che a differenza di una griglia collocata nella quale tutte le grandezze caratteristiche sono definite nello stesso punto, considerando pressione e componenti di velocità in posizioni distinte. La griglia sfalsata si rende necessaria in quanto il modello discretizzato delle equazioni di NS non risponderebbe in maniera realistica con un griglia collocata.

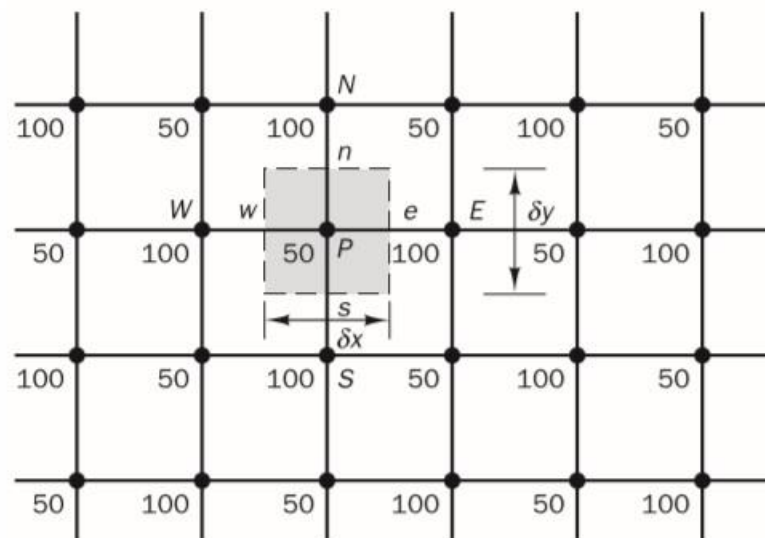


Figura 1- Esempio di campo di pressione a scacchiera. Fonte [5]

Il campo di pressione in figura, viene definito a "scacchiera", ovvero si alternano solo due valori distinti di pressione in punti non adiacenti, in questo caso 50 e 100. Utilizzando le differenze finite centrate nei nodi delle celle per calcolare il gradiente di pressione lungo le due direzioni, si otterrebbe un valore nullo:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_P = \frac{P_E - P_W}{2\delta x} = \frac{100 - 100}{2\delta x} = 0 \quad \text{ed} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_P = \frac{P_N - P_S}{2\delta y} = \frac{50 - 50}{2\delta y} = 0.$$

Applicando una griglia collocata e risolvendo le equazioni del momento nel medesimo punto, nell'esempio in esame, non si avrebbe il termine di pressione come sorgente di momento. Ciò è naturalmente inconsistente dal punto di vista fisico. Quindi è possibile aggirare il problema adottando una griglia sfalsata, proposta da Harlow and Welch nel 1965.

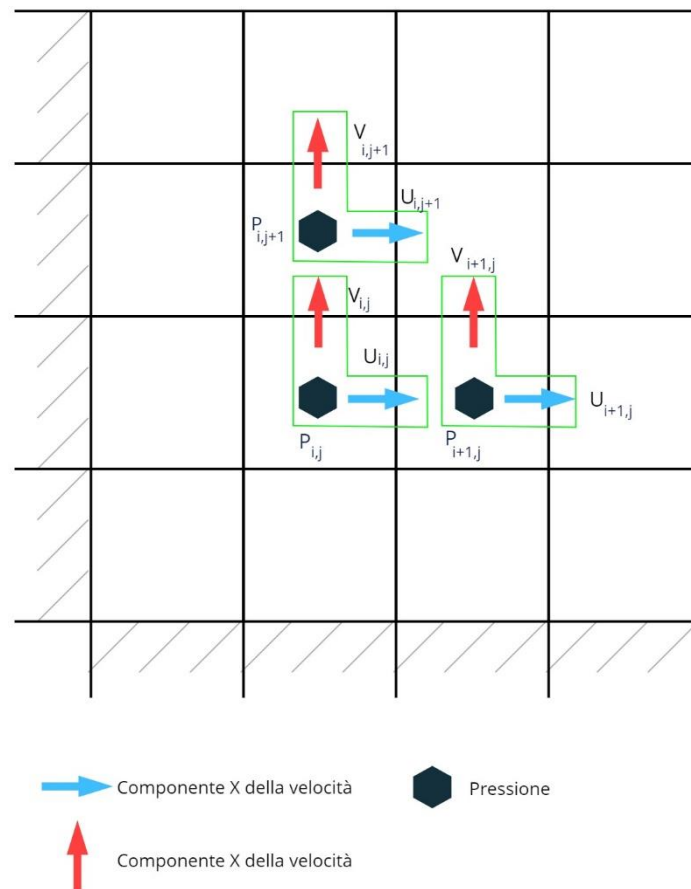


Figura 2- Griglia sfalsata adottata nella trattazione seguente

La griglia sfalsata colloca le componenti di velocità e pressione in 3 punti distinti, ma porta inevitabilmente complicazioni dal punto di vista delle condizioni al contorno. La condizione di impermeabilità, cioè componente di velocità nulla alla parete può essere assegnata direttamente, mentre per la condizione di no-slip

si rende necessario ricorrere a dei punti fuori dal dominio appartenenti alle ghost-cell. Le ghost-cell adiacenti ai bordi del dominio contengono le informazioni sulla componente di velocità parallela alla parete, che ad ogni iterazione assumerà valore uguale e contrario al punto adiacente interno, per assicurare la condizione di no-slip. L'implementazione diventa:

$$u_{i,1} = -u_{i,2} \quad \text{per ogni } i = 1..Nx$$

$$u_{i,ny+2} = -u_{i,ny+1} \quad \text{per ogni } i = 1..Nx$$

$$v_{1,j} = -v_{2,j} \quad \text{per ogni } j = 1..Ny$$

$$v_{nx+2,j} = -v_{nx+1,j} \quad \text{per ogni } j = 0..Ny$$

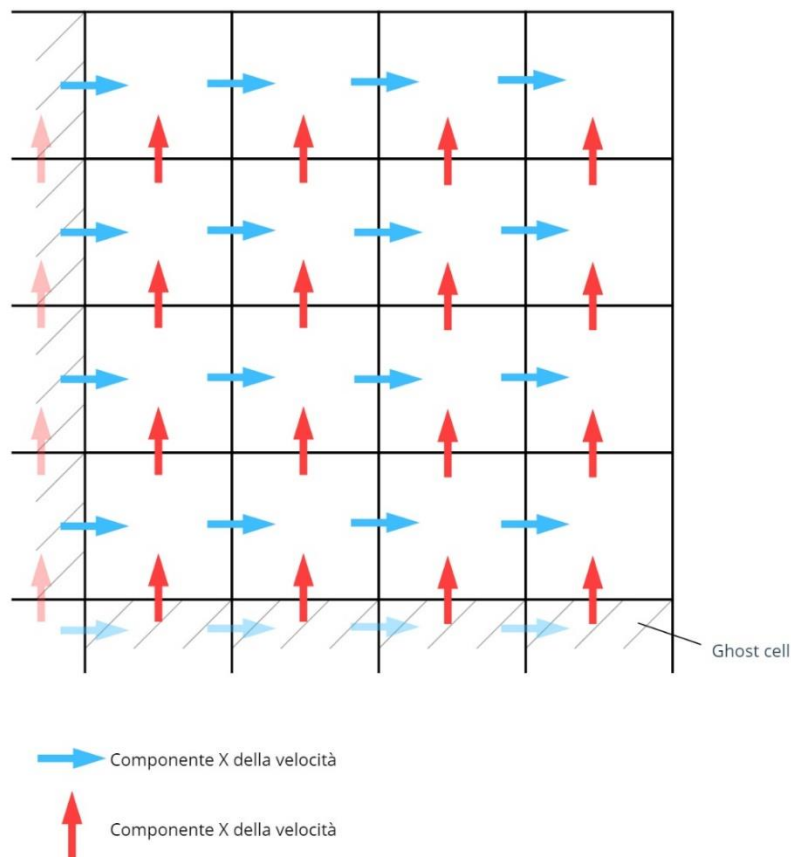


Figura 3- Grandezze ai bordi e ghost-cell

Discretizzazione delle equazioni

Una volta definito il dominio di calcolo, è necessario scrivere le equazioni in forma discreta per poter passare poi alla loro risoluzione in via numerica. La discretizzazione adottata considera la conservative-form delle NS specializzate per la convezione naturale.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = & -\frac{ur^2 - ul^2}{\Delta x} - \frac{ut \cdot vt - ub \cdot vb}{\Delta y} - \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \end{aligned}$$

I valori vt e vb insieme a ut ed ub non possono essere ricavati direttamente dalla griglia, ma devono essere ottenuti interpolando i valori più prossimi alla posizione "top" e "bottom" della cella, portando ad ottenere

$$vt = \frac{v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n}{2} \text{ e } vb = \frac{v_{i,j-1}^n + v_{i+1,j-1}^n}{2} \text{ per la componente verticale ed}$$

$$ut = \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \text{ e } ub = \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \text{ per la componente orizzontale.}$$

Analogamente è necessario per i valori "right" e "left" della componente orizzontale della velocità, per mantenere un intervallo di discretizzazione uniforme in tutti i termini. Si ricava:

$$ur = \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{2} \text{ e } ul = \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2}.$$

Per quanto riguarda la componente verticale della velocità abbiamo un'altra equazione che va a caratterizzare la tipologia di problema facendo comparire i termini di galleggiamento

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} = & -\frac{vt^2 - vb^2}{\Delta y} - \frac{vr \cdot ur - vl \cdot ul}{\Delta x} - \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{\Delta y} - \frac{Gr}{Re^2} \frac{\vartheta_{i,j+1}^n + \vartheta_{i,j}^n}{2} \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \end{aligned}$$

Anche in questa equazioni i valori ur , ul , vl e vr non possono essere trovati nella griglia, quindi si ricavano per interpolazione come:

$$ur = \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{2} \text{ e } ul = \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i-1,j+1}^n}{2} \text{ per le componenti orizzontali,}$$

$$vr = \frac{v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n}{2} \text{ ed } vl = \frac{v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{2} \text{ per le componenti verticali della velocità.}$$

Anche per i valori vt e vb calcoliamo:

$$vt = \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n}{2} \text{ e } vb = \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{2}.$$

La temperatura, in quanto scalare, viene posizionata all'interno della cella. Quindi pressione e temperatura hanno le stesse posizioni. L'equazione sopra esposta per la temperatura, nella sua forma discreta appare:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{i,j}^{n+1} - \vartheta_{i,j}^n}{\Delta t} = & -\frac{\vartheta_{i+1,j}^n + \vartheta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \cdot u - \frac{\vartheta_{i,j+1}^n + \vartheta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \cdot v \\ & + \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\vartheta_{i,j+1}^n - 2\vartheta_{i,j}^n + \vartheta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + \frac{\vartheta_{i+1,j}^n - 2\vartheta_{i,j}^n + \vartheta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right). \end{aligned}$$

Come per le equazioni per la quantità di moto, in conseguenza alla griglia sfalsata, le quantità v e u non possono essere direttamente utilizzate, ma sono il risultato di un'interpolazione, ottenendo :

$$v = \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2} \text{ e } u = \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2}.$$

Le condizioni al contorno per la temperatura, possono essere impostate servendosi dei punti esterni al dominio di calcolo, appartenenti alle ghost cell, analogamente in quanto illustrato successivamente per la pressione.

In caso di parete adiabatica possiamo scrivere

$$\vartheta_{esterno,j} = \vartheta_{interno,j} \quad \text{per ogni } j = 1..Ny.$$

Nel caso di parete con sorgente calda scriviamo invece

$$\vartheta_{esterno,j} = 2\vartheta_{parete} - \vartheta_{interno,j} \quad \text{per ogni } j = 1..Ny.$$

Algoritmo simple

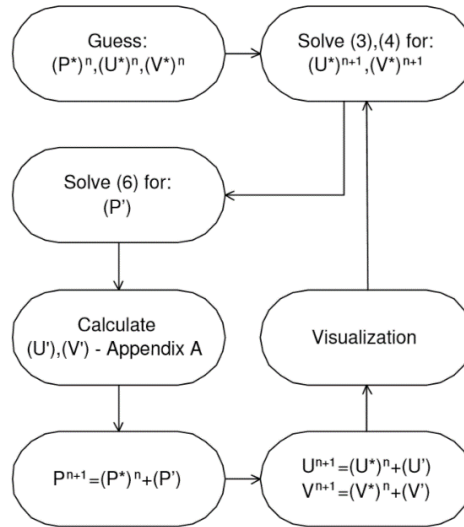


Figura 4- Diagramma di flusso del metodo SIMPLE. Fonte [3]

L'algoritmo di risoluzione utilizzato prende il nome di SIMPLE, Semi-Implicit Pressure Linked Equation. Naturalmente è un procedimento iterativo che permette di risolvere il campo di moto tramite integrazione numerica.

Il primo passo consiste nell'inizializzazione dei campi, applicando le opportune condizioni al contorno di velocità e temperatura. Tramite integrazione numerica delle equazioni della quantità di moto si ricavano le velocità provvisorie $(u^{n+1})^*$ e $(v^{n+1})^*$. L'integrazione di queste ultime due, non rispetta il vincolo della conservazione della massa, posto dall'equazione di continuità, che fino ad ora non è stata ancora impiegata. La continuità è restituita al campo di moto tramite il campo di pressione. Applicando l'operatore divergenza all'equazione della quantità di moto si giunge alla seguente espressione:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Le equazioni di questo tipo prendono il nome di equazioni di Poisson, che possono essere risolte con metodi numerici iterativi o spettrali.

Risolvendo la precedente per la pressione, si ottiene il campo p' , dal quale si ricavano le correzioni di velocità u' e v' dalle due espressioni:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y}.$$

In differenze finite possono essere riscritte come:

$$u'_{i,j} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{p'_{i+1,j} - p'_{i,j}}{\Delta x}$$

$$v'_{i,j} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{p'_{i,j} - p'_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

A questo punto al campo di velocità provvisorio si applica la correzione appena ottenuta ricavando il campo di velocità corretto che rispetta il vincolo di continuità.

$$u^{n+1} = (u^{n+1})^* + u'$$

$$v^{n+1} = (v^{n+1})^* + v'.$$

Il campo di pressione viene aggiornato invece tramite la relazione:

$$p^{n+1} = p^n + p'.$$

L'algoritmo a questo punto prevede di controllare se si è arrivati a convergenza o se è necessario procedere con un'altra iterazione. La convergenza in caso di ricerca di una soluzione stazionaria è raggiunta quando la differenza tra il precedente passo ed il presente è considerevole sufficientemente piccola.

Soluzione dell'equazione di Poisson

Le equazioni del tipo $\nabla^2 \varphi = f(x, y)$ prendono il nome di equazioni di Poisson. La risoluzione intrapresa è di tipo numerico con metodo iterativo Gauss-Seidel, variante del metodo di Jacobi. Passando alle differenze finite l'equazione di Poisson si ottiene:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} = -\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

Possiamo ricavare dopo manipolazione algebrica il termine $p_{i,j}^{n+1}$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} (p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n) + \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} (p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right).$$

Aggiornando quindi ad ogni iterazione il nuovo campo di pressione p^{n+1} utilizzando i valori p^n con successive iterazioni si ottiene il campo di pressione che soddisfa la condizione di continuità. Il metodo di Jacobi può essere velocizzato, utilizzando ad ogni passo i valori p^{n+1} appena calcolati e disponibili nella griglia. Questa variante prende il nome di Gauss-Seidel, che migliora notevolmente la velocità di convergenza.

Un ultimo miglioramento è l'introduzione di un fattore di rilassamento ω , applicando la variante del metodo di Gauss-Seidel conosciuta come SOR (Successive Over Relaxation) o metodo del sovrarilassamento. Questo tipo di risoluzione si basa sull'ipotesi che ad ogni iterazione la correzione ci porti in maniera corretta

verso la convergenza, dando quindi più peso alla correzione possiamo arrivare prima a soddisfare il criterio di convergenza. In formule il metodo SOR si applica come:

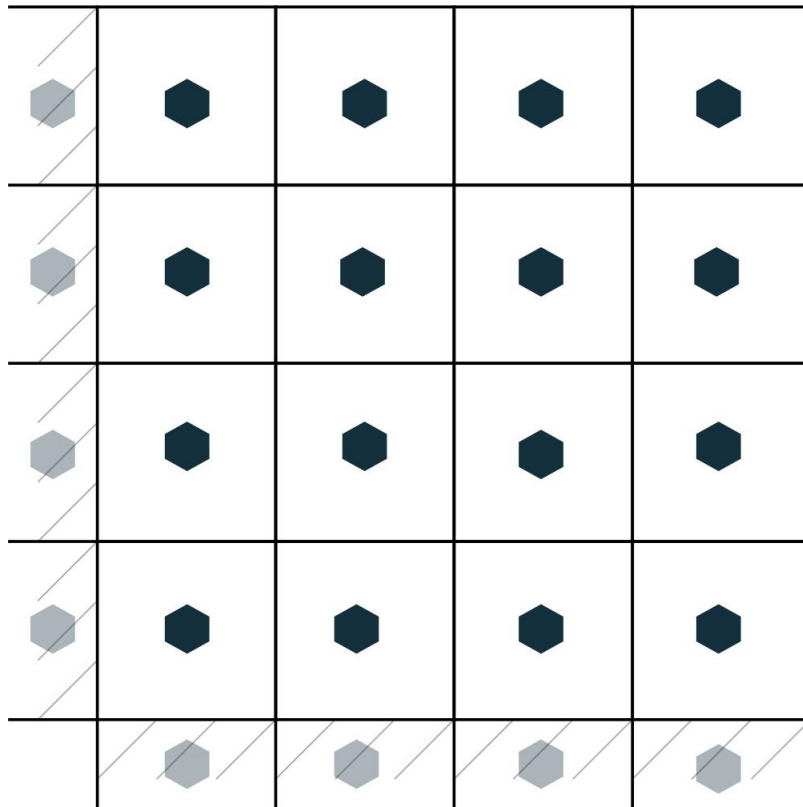
$$p_{i,j}^{n+1} = \omega p_{i,j}^{n+1}_{\text{gauss-seidel}} + (1 - \omega)p_{i,j}^n.$$

Dove $p_{i,j}^{n+1}_{\text{gauss-seidel}}$ è la correzione ottenuta dal solo metodo di Gauss-Seidel. In presenza di $\omega < 1$ si parla di sottorilassamento, mentre in presenza di $1 < \omega < 2$ si parla di sovrarilassamento. Nel caso di $\omega = 1$ si ricade nel solo metodo di Gauss-Seidel. La risoluzione dell'equazione di Poisson implica la definizione di condizioni al contorno per il campo di pressione, che possono essere di Neumann e di Dirichlet. Nel caso in cui si consideri un dominio con pareti impermeabili e con l'applicazione della condizione di no slip si impone $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = 0$ dove \bar{n} indica la normale alla parete, matematicamente definita come condizione di Neumann. Anche qui per l'applicazione delle condizioni al contorno ci si può servire di punti esterni al dominio all'interno delle ghost-cell.

L'implementazione risulta quindi:

$$p_{\text{esterno},j} = -p_{\text{interno},j} \quad \text{per ogni } j = 1..ny$$

$$p_{i,\text{esterno}} = -p_{i,\text{interno}} \quad \text{per ogni } i = 1..nx.$$



 Pressione

Figura 5-Campo scalare e ghost-cell

Implementazione dell'algoritmo

Per l'implementazione dell'algoritmo ho scelto di utilizzare Matlab (e poi Fortran per la versione parallela), che permette un veloce ed efficace debug, oltre a comodi ed immediati strumenti di visualizzazione dei risultati tramite campi scalari e vettoriali.

I dati di input necessari sono il numero di punti in cui suddividere il dominio di calcolo N_x e N_y , le sue dimensioni l_x e l_y e naturalmente i numeri adimensionali Gr , Re e Pr . Con questi dati vengono inizializzate le matrici che durante l'elaborazione memorizzeranno le varie grandezze. Le matrici non saranno tutte quadrate in quanto l'utilizzo di una staggered grid per le componenti di velocità implica che nelle due dimensioni si abbia un numero diverso di punti. Nel programma da me implementato le matrici hanno le seguenti dimensioni totali, che portano a una risoluzione interna di

$$(N_x) \times (N_y)$$

u	$(N_x + 1) \times (N_y + 2)$
v	$(N_x + 2) \times (N_y + 1)$
p	$(N_x + 2) \times (N_y + 2)$
ϑ	$(N_x + 2) \times (N_y + 2)$

Solver parallelo

La parte dell'algoritmo computazionalmente più onerosa è la soluzione dell'equazione di Poisson, la complessità computazionale del metodo di Gauss-Seidel, benchè più performante del metodo di Jacobi, rimane sempre $O(n^2)$. Il tempo di esecuzione può essere ridotto permettendo l'esecuzione contemporanea di alcune operazioni (ove possibile) delegandone lo svolgimento ai core disponibili.

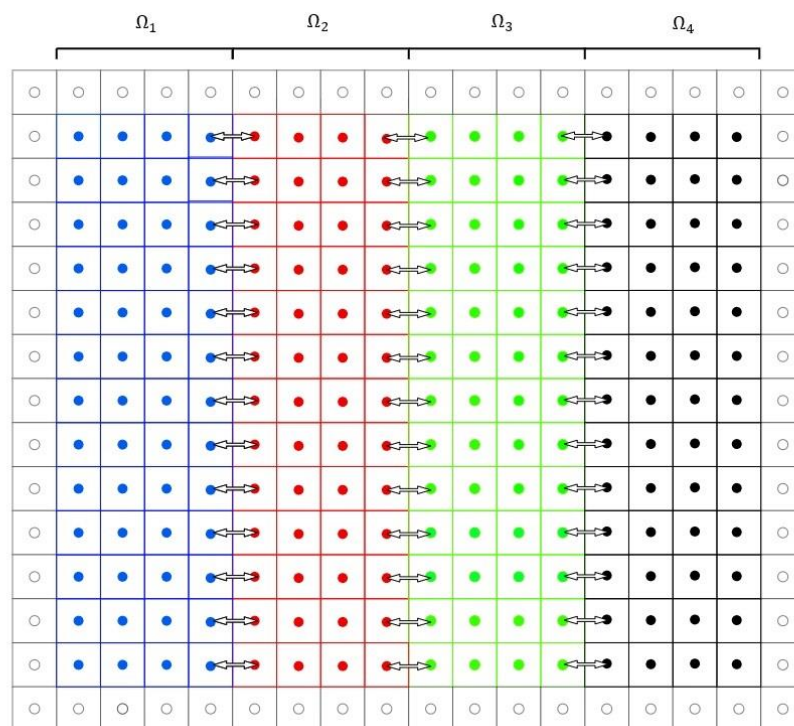


Figura 6-Esempio di suddivisione in sottodomini

Per permettere una risoluzione parallela è necessario eseguire una scomposizione del dominio, in tanti sottodomini quanti core si desidera impiegare. La divisione impiegata, per semplicità, è eseguita lungo una sola direzione. La lunghezza dominante di ogni dominio è costituita dall'altezza delle colonne, la scelta è computazionalmente favorevole, in quanto l'accesso in sequenza ai valori di una colonna, equivale all'accesso in memoria a celle

contigue. Questa condizione aiuta la velocità di accesso ai dati. Prima di procedere alla risoluzione parallela, si deve distribuire ad ogni singolo core, a cui è correlato un processo a se stante con una parte di memoria riservata, la divergenza relativa ad sottodominio di competenza. Ogni processo quindi dopo aver ricevuto il termine noto dell'equazione di Poisson procede alla risoluzione nel suo dominio, applicando le condizioni al contorno adeguate nei rispettivi bordi e comunicando i valori di frontiera ai domini adiacenti, operativamente è necessario per conoscere i valori di tutti i punti adiacenti ad ogni cella, diversamente non sarebbe possibile calcolare la pressione nei punti di frontiera. La velocità di esecuzione non è linearmente correlata al numero di core, in quanto la comunicazione tra processi dei valori di frontiera impiega un certa quantità di tempo, che sarà tanto più rilevante quanti più dati devono essere scambiati tra processi. La comunicazione tra core è eseguita dal protocollo MPI (Message-Passing-Interface), protocollo standard che fornisce una serie di funzioni ad hoc che permettono lo scambio efficiente di informazioni tra processi. Una volta raggiunta la convergenza, ogni core invia il proprio sotto dominio ad un processo "master" che assembla il campo di pressione, per poi procedere ad applicare le correzioni di velocità.

Risultati

Il codice sviluppato restituisce alla fine della sua esecuzione quattro file di tipo binario (estensione .bin). Ciascun file rappresenta una grandezza scalare o una componente vettoriale. Nel caso in esame si hanno due file distinti per pressione e temperatura, infine altri due per la componente verticale ed orizzontale della velocità. I campi scalari sono ricavati direttamente dalle matrici utilizzate per il calcolo, mentre le componenti di velocità essendo collocate in punti distinti, per via della griglia sfalsata, devono essere riportate tutte nello stesso punto procedendo con una semplice interpolazione. A questo punto è possibile, tramite l'ausilio di funzioni built-in di Matlab, un'immediata e comoda visualizzazione degli output. Il campo di temperatura può essere rappresentato con isolinee tramite il comando `contour()`, visualizzando così le isoterme. Il campo di moto può essere rappresentato sotto forma di campo vettoriale o più comodamente costruendo le streamlines, tangenti in ogni punto al vettore velocità locale. In un problema di convezione naturale può essere interessante visualizzare questi due risultati, individuando l'andamento della temperatura nello spazio e del campo di moto osservando il formarsi di celle convettive. I risultati di seguito esposti (streamlines ed isoterme) sono stati ottenuti utilizzando una risoluzione della spaziale delle simulazioni pari a $nx = 64$ e $ny = 64$ e lunghezza del dominio, nelle due dimensioni, unitaria. Il modello utilizzato è quello precedentemente esposto in cui si considera $Gr \gg 1$ e numero di Prandtl pari a 1.

A bassi numeri di Grashof il campo di moto è di modesta intensità e quindi la componente convettiva che contribuisce nell'equazione della temperatura alla trasmissione del calore ha intensità contenuta, risulta quindi il termine diffusivo quello più importante che caratterizza il campo di temperatura. Le isoterme sono quasi verticali, assimilabili a quelle presenti in una condizione di sola conduzione (ad esempio un solido). All'aumentare del numero di Grashof il campo di moto acquista importanza, quindi il termine convettivo dell'equazione scalare della temperatura diventa più rilevante e quello diffusivo moltiplicato appunto per $\frac{1}{Pr\sqrt{Gr}}$ diminuisce il proprio contributo. Così facendo le isoterme cambiano aspetto ed iniziano a sentire l'influenza del campo di moto segnalando una differente distribuzione della temperatura. All'aumento del numero di Grashof le isoterme passano da una direzione principale verticale a una quasi orizzontale al centro del dominio (alle pareti risulterebbe impossibile in quanto la temperatura è imposta da condizioni al contorno). Le isoterme risultano quindi orizzontali in quanto nella zona centrale del dominio la componente di velocità preponderante della velocità è orizzontale ed è la componente convettiva che svolge maggior lavoro nella trasmissione del calore. Quindi si può dire che la componente convettiva della trasmissione del calore è "direzionale" e segue la velocità, mentre la componente diffusiva non risente della velocità.

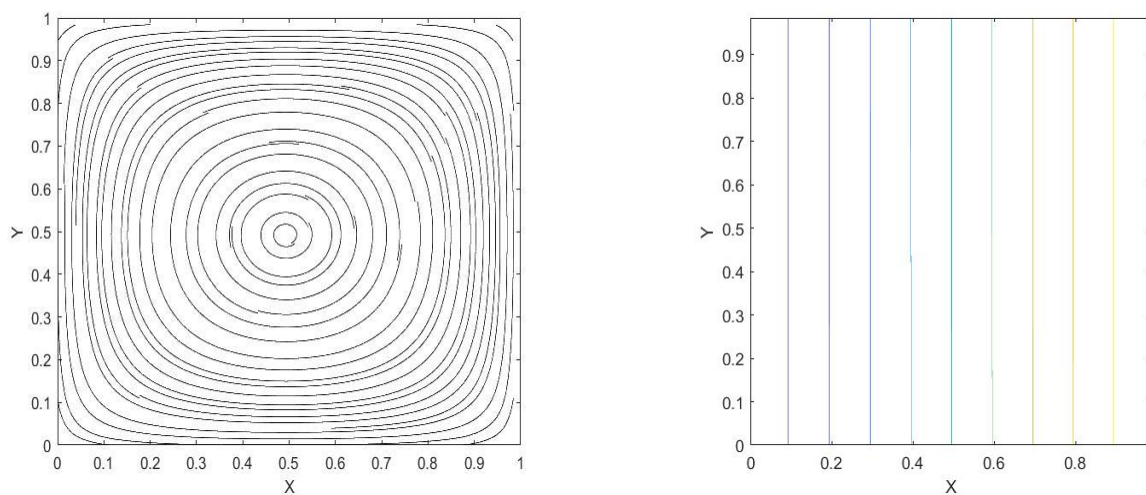


Figura 7- Streamlines e isoterme con $Gr=1$

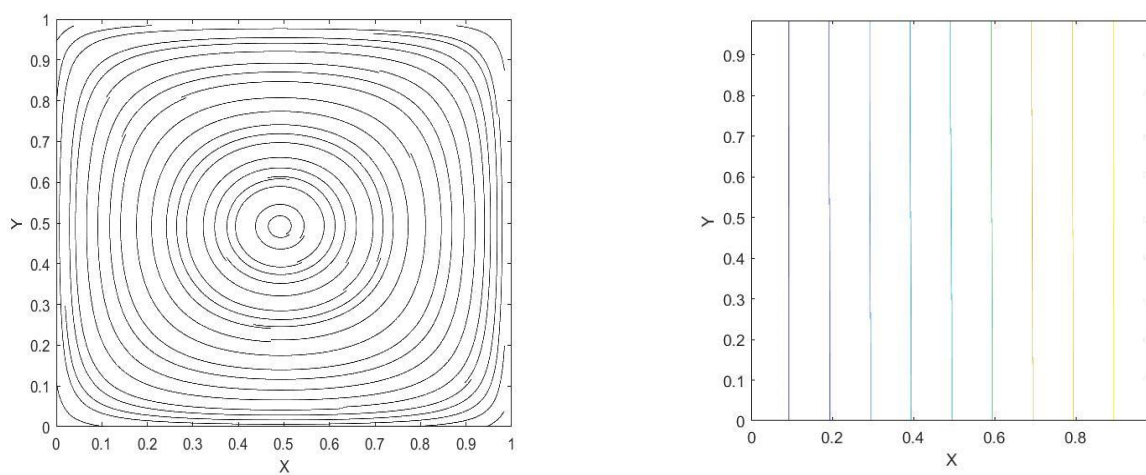


Figura 8- Streamlines e isoterme con $Gr=10$

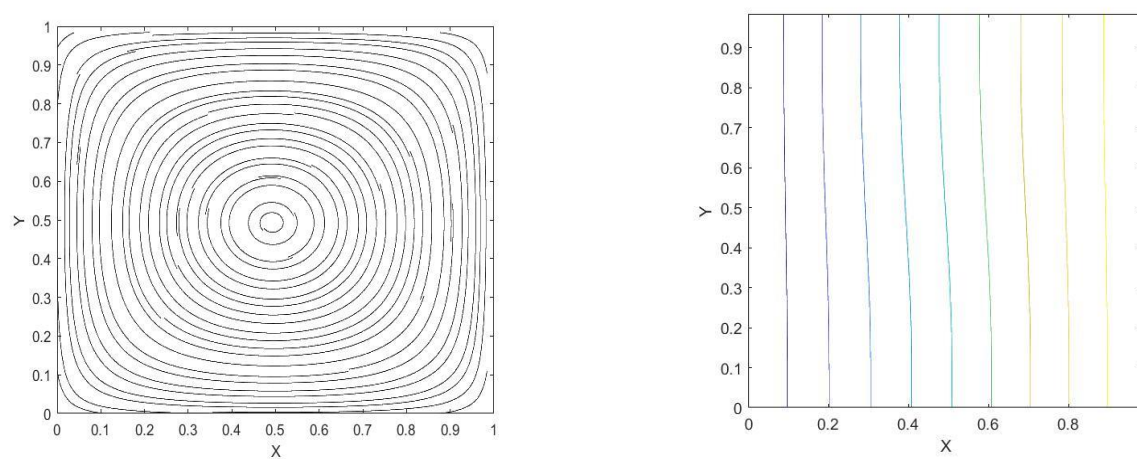


Figura 9-Streamlines e isoterme con $Gr=100$

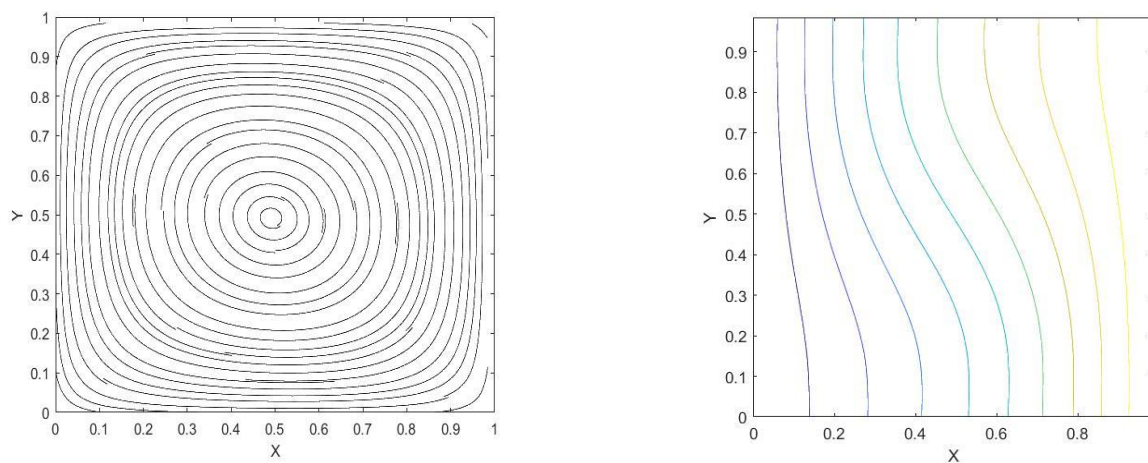


Figura 10-Streamlines e isoterme con $Gr=1000$

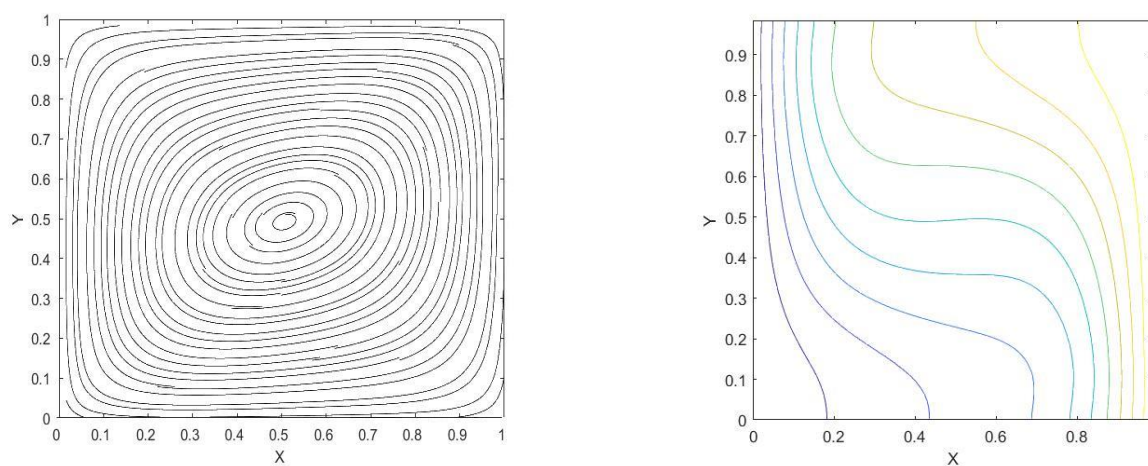


Figura 11-Streamlines e isoterme con $Gr=10000$

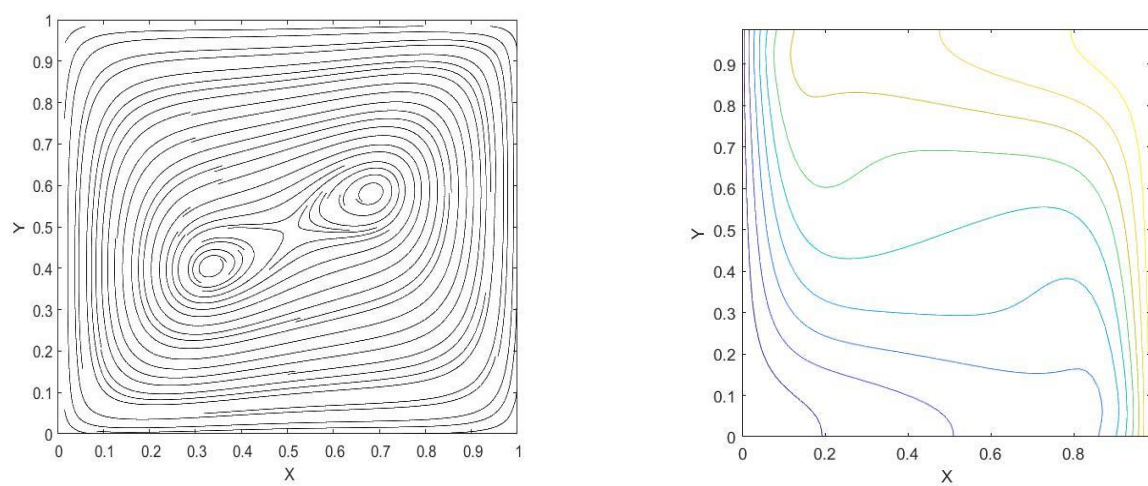


Figura 12-Streamlines e isoterme con $Gr=100000$

Le simulazioni sono state eseguite impostando temperatura unitaria nella parte di destra e temperatura pari a zero nella parete di sinistra, mentre per le pareti orizzontali sono adiabatiche. Quest'ultima affermazione si può evincere dall'osservazione delle isoterme, le quali si staccano in maniera perpendicolare dalle pareti orizzontali, essendo il gradiente alla parete nullo. Nelle pareti verticali invece il gradiente è diverso da zero e rappresenta il flusso termico, quantificabile con il numero adimensionale di Nusselt. Il numero di Nusselt rappresenta il rapporto tra lo scambio termico effettivo ed quello che si avrebbe in presenza di sola conduzione. Può essere calcolato come un flusso termico andando a misurare il gradiente di temperatura alla parete e facendone poi la media lungo la sua lunghezza:

$$Nu = \frac{1}{ny} \sum_{j=1}^{ny} \frac{2(T_{parete,j} - T_{interna,j})}{\Delta x}$$

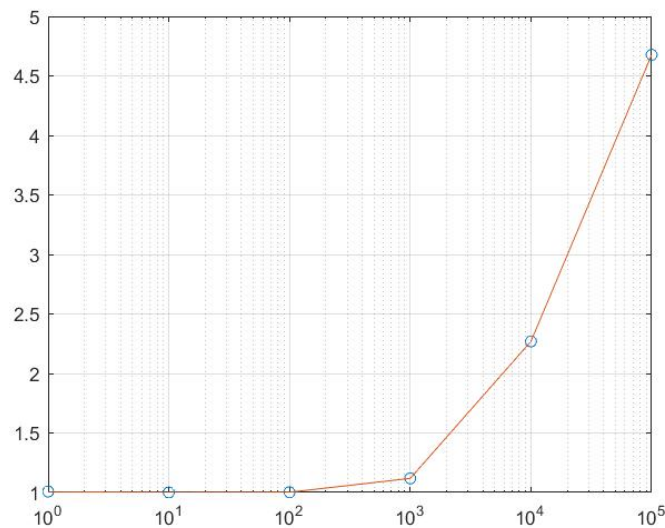


Figura 13-Variazione del numero di Nusselt in funzione di Grashof

Si può notare come all'aumento del numero di Grashof e della componente convettiva, il numero di Nusselt aumenti. Ne possiamo dedurre che i moti convettivi concorrono allo scambio di calore in maniera significativa all'aumentare del numero di Grashof (quindi con viscosità basse). Ad esempio la gran parte dei materiali isolanti ha al suo interno una componente importante di aria, che di per sé ha buone caratteristiche isolanti in assenza di convezione, ma necessita di essere "frazionata" proprio per evitare il formarsi di celle convettive che concorrerebbero in maniera importante allo scambio termico. Osservando ancora le isoterme ad alti numeri di Grashof possiamo vedere come è marcata la "stratificazione" del fluido, quello caldo e meno denso va ad occupare la parte superiore della cavità, mentre quello freddo e più denso va a occupare la parte inferiore.

Bibliografia

- [1]-Costa Pedro," A FFT-based finite-difference solver for massively-parallel direct numerical simulations of turbulent flows", *Computers and Mathematics with Applications*(2018)
- [2]-Benjamin Seibold, "A compact and fast Matlab code solving the incompressible Navier-Stokes equations on rectangular domains", *documentazione per il codice mit18086_navierstokes.m scaricabile alla seguente pagina <http://www-math.mit.edu/cse>*
- [3]-Maciej Matyka, "Solution to two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations with SIMPLE, SIMPLER and Vorticity-Stream Function Approaches. Driven-Lid Cavity Problem: Solution and Visualization.", *arXiv 2004, arXiv:physics/0407002*
- [4]-Hassan Khawaja, "Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE) - solution in MATLAB", *Journal of Multiphysics Volume 12 · Number 4 · 2018*
- [5]-H.K. Versteeg e W.Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, *Pearson, Seconda edizione 2007*
- [6]-M. Alemi e R. Maia, "A comparative study between two numerical solutions of the Navier-Stokes equations", *Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering, Volume 6 · Number 12 · pp 1-12*
- [7]-Suhas V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, *McGRAW-HILL BOOK COMPANY*

[8]-R. Piva, Dispense di Fluidodinamica, Università di Roma La Sapienza