Yoneda Lemma

wugouzi

October 1, 2018

1 Prelude

Lemma 1.1 (Yoneda). *Let $\boldsymbol{C}$ be locally small. For any object $C \in \boldsymbol{C}$ and for functor $F \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ there is an isomorphism*

$$Hom(yC, F) \cong FC$$

which, moreover, is natural in both F and C

接下来让我们先来看看这些概念都是什么意思。

2 基础知识

2.1 initial and terminal objects

Definition 2.1. 在任意 *category* $\boldsymbol{C}$ 中，*object*

- 如果对于任何 *object* C 存在惟一的态射 $0 \to C$，则 *0* 是 *initial object*。
- 如果对于任何 *object* C 存在惟一的态射 $C \to 1$，则 *1* 是 *terminal object*。

2.2 product

Definition 2.2. 在 *catagory* $\boldsymbol{C}$ 中，*object A,B* 的 *product diagram* 包含了 *object* P 和 *arrows*

$$A \xleftarrow[p_1]{} P \xrightarrow{p_2} B$$

满足以下 *universal mapping property(之后简称 UMP):*

对于任何以下形式的图:

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

存在唯一 $u : X \to P$ 使得

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

交换，即 $x_1 = p_1 u, x_2 = p_2 u$

如果我们有

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & A \times A' \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B & B \times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"] & B' \end{tikzcd}$$

则记 $f \times f' : A \times A' \to B \times B', f \times f' =< f \circ p_1, f' \circ p_2$。由 UMP 可知，它是唯一存在的，得到

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & A \times A' \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dashed, "f \times f'"] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B & B \times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"] & B' \end{tikzcd}$$

Coprouduct 与 product 箭头相反, 记作 +。

2.3 exponential

Definition 2.3. 使 *category* $\mathbf{C}$ 有 *product*，*object B,C* 的 *exponential* 包含了 *object* C^B 和箭头 $\epsilon : C^B \times B \to C$ 满足对于任何 *object* A 和箭头 $f : A \times B \to C$，存在唯一箭头 $\tilde{f} : A \to C^B$ 满足 $\epsilon \circ (\tilde{f} \times 1_B) = f$，即以下交换图

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "\epsilon"] & C \\ A \arrow[u, "\tilde{f}"] & B \arrow[u, "\tilde{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd}$$

其中，ϵ 称为 *evaluation*，$\tilde{f}$ 称为 *transpose*，或者我们更熟悉的 *currying*。

2.4 Hom-set functor

在这一节里，我们假设所有 category 是 locally small 的。

对于任意范畴 **C** 中的 objects A 和 B，我们称

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{f \in \mathbf{C} \mid f : A \to B\}$$

为 Hom-set。注意到对于 **C** 中的任意 arrow $g : B \to B'$，我们有

$$\mathrm{Hom}(A, g) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B')$$
$$(f : A \to B) \mapsto (g \circ f : A \to B \to B')$$

因而我们可以证明 $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ 确实是一个 functor，我们称它为 A 的 *(covariant) representable functor*。即我们需要证明

$$\mathrm{Hom}(A, 1_X) = 1_{\mathrm{Hom}(A,X)}$$
$$\mathrm{Hom}(A, g \circ f) = \mathrm{Hom}(A, g) \circ \mathrm{Hom}(A, f)$$

证明：略

Definition 2.4. 范畴 ***C*** 的 *opposite category* $\mathbf{C}^{op}$ 跟 ***C*** 有一样的 *objects*，但是它们的箭头相反

Definition 2.5. 一个形如 $F : \mathbf{C}^{op} \to D$ 被称作 *contravariant functor*。明显地，它把 $f : A \to B$ 变成了 $F(f) : F(B) \to F(A)$ 及 $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

这样我们就可以定义一个 *contravariant representable functor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$$

对于 $f : A \to B \in \mathbf{C}$，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(f, C) : \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$

2.5 Naturality

Definition 2.6. 对于范畴 ***C*, *D*** 与 *functor* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$，一个 *natural transformation* $\vartheta : F \to G$ 是 ***D*** 中的一系列 *arrow*

$$(\vartheta_C : FC \to GC)_{C \in \mathbf{C}_0}$$

满足对于任意 ***C*** 中的 $f : C \to C'$，我们有 $\vartheta_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \vartheta_C$，即

$$\begin{CD} FC @>{\vartheta_C}>> GC \\ @V{Ff}VV @VV{Gf}V \\ FC' @>{\vartheta_{C'}}>> GC' \end{CD}$$

给定一个 *natural transformation* $\vartheta : F \to G$，$\vartheta_C : FC \to GC$ 被称为 ϑ 在 C 的 *component*。

Definition 2.7. *functor category Fun(**C**,**D**)*包括了

Objects *functors* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$

Arrows *natural transformation* $\vartheta : F \to G$

对于每个 object F，natural transformation 1_F 有 components

$$(1_F)_C = 1_{FC} : FC \to FC$$

并且 natural transformation $F \xrightarrow{\vartheta} G \xrightarrow{\phi} H$ 的 composition 有 components

$$(\phi \circ \vartheta)_C = \phi_C \circ \vartheta_C$$

Fun(**C**,**D**) 也记为 $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$，它跟 exponential 是十分相似的。

3 The Yoneda Lemma

Definition 3.1. *Yoneda embedding* 是一个 *functor* $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$。它将 $C \in \mathbf{C}$ 映射成相应的 *contravariant representable functor*

$$yC = Hom_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$$

把 $f : C \to D$ 变为相应的 *natural transformation*

$$yf = Hom_{\mathbf{C}}(-, f) : Hom_{\mathbf{C}}(-, C) \to Hom_{\mathbf{C}}(-, D)$$

我们可以把 Yoneda embedding y 看作是 $\mathbf{C}$ 在包含了 set-valued functors 和 natural transformation 的范畴中的“表示”，它比 $\mathbf{C}$ 包含了更多的结构，因而方便了我们进行操作。

Lemma 3.2 (Yoneda)**.** *Let **C** be locally small. For any object $C \in$ **C** and for functor $F \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ there is an isomorphism*

$$Hom(yC, F) \cong FC$$

which, moreover, is natural in both F and C。在这里，

1. F 中的 *naturality* 意味着对于任意 $\vartheta : F \to G$, 下面的图交换

$$\begin{tikzcd} Hom(yC,F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "Hom(yC,\vartheta)"] & FC \arrow[d, "\vartheta_C"] \\ Hom(yC,G) \arrow[r, "\cong"] & GC \end{tikzcd}$$

2. C 中的 *naturality* 意味着对于任意 $h : C \to D$，下面的图交换

$$\begin{tikzcd} Hom(yC,F) \arrow[r, "\cong"] & FC \\ Hom(yD,F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "Hom(yh,F)"] & FD \arrow[u, "Fh"'] \end{tikzcd}$$

Proof. 令

$$\begin{aligned} \eta_{C,F} : \mathrm{Hom}(yC,F) &\xrightarrow{\cong} FC \\ \vartheta &\mapsto \vartheta_C(1_C) \quad \text{for } \vartheta : yC \to F \end{aligned}$$

其中 ϑ 是 natural transformation。记 $x_\vartheta = \vartheta_C(1_C)$。

反过来，对于任何 $a \in FC$，我们可以定义一个 natural transformation $\vartheta_a : yC \to F$，对于任何 C'，我们定义 component

$$\begin{aligned} (\vartheta_a)_{C'} : \mathrm{Hom}(C',C) &\to FC' \\ h &\mapsto F(h)(a) \end{aligned}$$

因为 $h : C' \to C, Fh : FC \to FC'$。$\vartheta_a$ 是 natural 的，因为对于任意的 $f : C'' \to C'$，考虑

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(C'',C) \arrow[r, "(\vartheta_a)_{C''}"] & FC'' \\ \mathrm{Hom}(C',C) \arrow[r, "(\vartheta_a)_{C'}"] \arrow[u, "\mathrm{Hom}(f,C)"] & FC' \arrow[u, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

对于任意 $h \in yC(C') = \mathrm{Hom}(C',C)$，我们要证明 $(\vartheta_a)_{C''} \circ \mathrm{Hom}(f,C) = F(f) \circ (\vartheta_a)_{C'}$，我们有

$$(\vartheta_a)_{C''} \circ \mathrm{Hom}(f, C) = (\vartheta_a)_{C''}(h \circ f)$$

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, "h"] & C \\
C'' \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "h\circ f"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&= F(h \circ f)(a) \quad \text{from the definition of } \vartheta_a \\
&= F(f) \circ F(h)(a) \quad \text{F is a functor} \\
&= F(f)(\vartheta_a)_{C'}(h)
\end{aligned}$$

好了，接下来我们就可以证明 ϑ_a, x_ϑ 是 mutually inverse 的（我不知道 inverse 怎么翻译舒服），毕竟可以把它们理解为 $\vartheta : FC \to (yC \to F), x : (yc \to F) \to FC$。因为 $x_\vartheta = \vartheta_C(1_C) \in FC$，对于任意 $\vartheta : yC \to F, h : C' \to C$

$$(\vartheta_{x_\vartheta})_{C'}(h) = F(h)(x_\vartheta) = F(h)(\vartheta_C(1_C))$$

因为 ϑ 是 natural 的，下面的图交换

$$\begin{tikzcd}
yC(C) \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "yC(h)"] & FC \arrow[d, "Fh"] \\
yC(C') \arrow[r, "\vartheta_{C'}"] & FC'
\end{tikzcd}$$

因此

$$\begin{aligned}
(\vartheta_(x_\vartheta))_{C'}(h) &= F(h)(\vartheta_C(1_C)) \\
&= \vartheta_{C'} \circ yC(h)(1_C) \\
&= \vartheta_{C'}(h)
\end{aligned}$$

所以，$\vartheta_{(x_\vartheta)} = \vartheta$。而对于任意的 $a \in FC$，

$$\begin{aligned}
x_{\vartheta_a} &= (\vartheta_a)_C(1_C) \\
&= F(1_C)(a) \\
&= 1_{FC}(a) \quad \text{property of functor} \\
&= a
\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Hom}(yC, F) \cong FC$。接下来，我们要说明它的 naturality。首先对于 $\phi : F \to F'$，取 $\vartheta \in \mathrm{Hom}(yC, F)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(yC,F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yC,\phi)"] & FC \arrow[d, "\phi_C"] \\
\mathrm{Hom}(yC,F') \arrow[r, "\eta_{C,F'}"] & F'C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\phi_C \circ \eta_{C,F}(\vartheta) &= \phi_C(\vartheta_C(1_C)) \\
&= (\phi\vartheta)_C(1_C) \\
&= x_{\phi\vartheta} \\
&= \eta_{C,F'}(\phi\vartheta) \\
&\text{since } \mathrm{Hom}(yC,\phi) : \mathrm{Hom}(yC,F) \to \mathrm{Hom}(yC,F') \\
&= \eta_{C,F'}(\mathrm{Hom}(yC,\phi)(\vartheta))
\end{aligned}$$

对于 C 中的 naturality，$f : C' \to C$，我们有

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(yC,F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(yf,F)"] & FC \arrow[d, "Ff"] & yC(C) \arrow[r, "\vartheta_C"] \arrow[d, "yC(f)"] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}(yC',F) \arrow[r, "\eta_{C',F}"] & FC' & yC(C') \arrow[r, "\vartheta_{C'}"] & F(C')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{C',F} \circ \mathrm{Hom}(yf,F)(\vartheta) &= \eta_{C',F}(\vartheta \circ yf) \\
& yf : \mathrm{Hom}(-,C') \to \mathrm{Hom}(-,C) \\
& \vartheta : \mathrm{Hom}(-,C) = yC \to F \\
&= (\vartheta \circ yf)_{C'}(1_{C'}) \\
&= \vartheta_{C'} \circ (yf)_{C'}(1_{C'}) \\
&= \vartheta_{C'}(f \circ 1_{C'}) \\
&= \vartheta_{C'}(f) \\
&= \vartheta_{C'}(1_C \circ f) \\
&= \vartheta_{C'} \circ (yC)(f)(1_C) \\
&= F(f) \circ \vartheta_C(1_C) \quad \textit{naturality} \\
&= F(f)\eta_{C,F}(\theta)
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3. 一个 *functor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 被称为

- *F is faithful if for all* $A, B \in \mathbf{C_0}$*(*C_0 *是* C *中的所有 objects),the map* $F_{A,B} : Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \to Hom_{\mathbf{D}}(FA, FB)$ *defined by* $f \mapsto F(f)$ *is injective*

- *F is full if* $F_{A,B}$ *is always surjective*

Theorem 3.4. *The Yoneda embedding* $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ *is full and faithful。*

Proof. 因为对于任何 $C, D \in \mathbf{C}$，根据 Yoneda lemma，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D) = yD(C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}}(yC, yD)$$

$\square$

Corollary 3.5 (Yoneda principle)**.** *Given objects A and B in any locally small category* $\boldsymbol{C}$

$$yA \cong yB \quad implies \quad A \cong B$$

这个推论很强，这样我们想证明 $A, B \in \mathbf{C}, A \cong B$ 的话，我们就可以去有更多结构的 $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ 证，爽到。

比如，我们要证 $A^{B\times C} \cong (A^B)^C$，我们就可以去证 $\mathrm{Hom}(X, (A^B)^C) \cong \mathrm{Hom}(X, A^{B\times C})$