Wichtige Formeln & Größen für das Rechnen mit Gaußstrahlen

October 2019

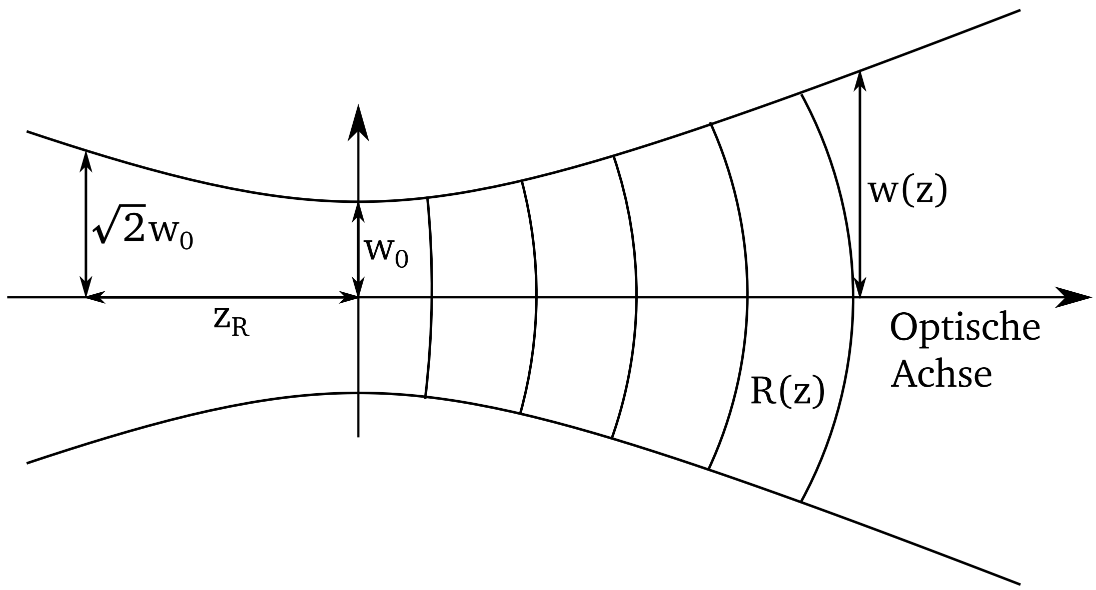

Figure 1: Schematische Darstellung eines Gaußstrahls

Ein Gaußstrahl wird beschrieben über den komplexwertigen Parameter $\hat{q}$. Dessen Kehrwert berechnet sich am Ort z mit dem Brechungsindex n des jeweiligen Mediums aus der Strahltaille $w(z)$ und dem Krümmungsradius $R(z)$:

$$\frac{1}{\hat{q}(z)} = \frac{n}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \tag{1}$$

Bei Kenntnis von $\hat{q}(z)$ können dann über den Realteil $\Re$ und den Imaginärteil $\Im$ die Größen

$$w(z) = \sqrt{-\frac{\lambda}{\pi \Im\left(1/\hat{q}(z)\right)}} \tag{2}$$

und

$$R(z) = \frac{n}{\Re\left(1/\hat{q}(z)\right)} \tag{3}$$

berechnet werden.

Ein Spezialfall tritt auf, wenn man den Gaußstrahl genau im Fokus z_0 betrachtet. Hier gilt $R(z_0) \to \infty$ und für $\hat{q}$ gilt dann:

$$\hat{q}(z_0) = i\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \stackrel{!}{=} q_0 \tag{4}$$

mit der Stahltaille im Fokus $w_0 = w(z_0)$.

Der Verlauf der Strahltaille sowie des Krümmungsradius lässt sich auch ohne direkte Kenntnis des Ausdrucks von $\hat{q}$ berechnen. Dazu wird die Kenntnis der Strahltaille im Fokus w_0 sowie die sogenantne Rayleigh-Länge

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda/n} \tag{5}$$

benötigt. Es gilt dann:

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2} \tag{6}$$

$$R(z) = (z - z_0) + \frac{z_R^2}{z - z_0} \tag{7}$$

Allgemeiner wird die Transformation eines Gaußstrahls durch ein optisches Element mittels des Matrixformalismus beschrieben, den einzelnen Elementen wird jeweils eine Matrix der Form

$$M_{\text{Prop}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{8}$$

zugeordnet. Beispielsweise ist

$$M_{\text{Prop}} = \begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

die Matrix für eine Propagation der Länge L durch ein Medium mit dem Brechungsindex n. Ein weiteres Beispiel ist

$$M_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

als Matrix für eine dünne Linse mit Brennweite f, wobei $f > 0$ eine konvexe Linse bezeichnet. Dabei setzt sich f zusammen aus dem (bei linksseitigem Strahleintritt) linkseitigem und rechtseitigem Krümmungsradius R_1 und R_2 ($R > 0$ für ~~konkave~~ konvexe Flächen) und dem Brechungsindex n der Linse:

$$f = \frac{1}{n-1}\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

Für einen Gaußstrahl mit $\hat{q}_{\mathrm{in}}$ gilt nun nach Durchgang eines Elements

$$\hat{q}_{\mathrm{out}} = \frac{A\hat{q}_{\mathrm{in}} + B}{C\hat{q}_{in} + D} \tag{11}$$

Zu beachten ist, dass die Propagation sich dann sehr einfach auch ohne Matrix durch $\hat{q}_{\mathrm{out}} = \hat{q}_{\mathrm{in}} + {}^{L}/_{n}$ ausdrücken lässt, was eventuell beim Berechnen des Strahltaillenverlaufs hilfreich sein kann.

Für eine dicke Linse der Dicke d mit Brechungsindex n und -bei linksseitigem Strahleintritt- linkseitigem Krümmungsradius R_1 und rechtsseitigem Krümmungsradius R_2 ($R > 0$ für eine konkave Seite) gilt die Matrix

$$M_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(n-1)d}{nR_1} & d/n \\ \frac{(n-1)(d-n(R_1-R_2+d))}{nR_1R_2} & 1 + \frac{-(n-1)d}{nR_1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Für einen Spiegel mit Krümmungsradius R muss man bei nicht-senkrechtem Einfall unter dem Winkel θ zur Normalen zwei Ebenen unterscheiden (hier werden dann elliptische Gaußstrahlen relevant): So ist die Matrix für die Reflexion in der tangentialen Ebene (parallel zur Tischebene)

$$M_{\mathrm{Prop}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R\cos\theta} & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

In der sagittalen Ebene (senkrecht zum Tisch) ergibt sich

$$M_{\mathrm{Prop}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2\cos\theta}{R} & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Es kann davon ausgegangen werden, dass bei der Betrachtung von elliptischen Gaußstrahlen die Strahltaillen w_x und w_y stets je in einer der beiden Ebenen (sagittal und tangential) liegen.

1 Praxisrelevante Berechnungen

Es sei gegeben ein $\hat{q}$ an einer Stelle z_A, also $\hat{q}(z_A)$, und zwar eine Entfernung z_A vom gewählten Koordinatenursprung weg.

Die Größe der Strahltaille w_0 berechnet sich dann über

$$w_0 = \sqrt{\frac{\Im(\hat{q}(z_A))\lambda}{\pi}} \tag{15}$$

Die Strahltaille liegt

$$z_0 = z_A - n \cdot \Re(\hat{q}(z_A)) \tag{16}$$

vom Koordinatenursprung entfernt.

2 Brennweite der dünnen Linse bei Wellenlänge λ

Generelle Konvention für Linsen: $R > 0$ bedeutet, es handelt sich um eine (aus Sicht der Durchgangsrichtung) konvexe Oberfläche, das heißt, der Mittelpunkt des durch die Krümmung vorgegebenen Kreises liegt hinter der Oberfläche.

Außerdem: Der Brechungsindex n eines Materials hängt von der Wellenlänge λ ab, also $n = n(\lambda)$.

Bei dünnen Linsen gibt es im Prinzip zwei verschiedene Parametersätze, die man kennen kan. So hat man öfter den Fall, dass man die Krümmungsradien R_1 und R_2 sowie das Material (und damit $n(\lambda)$) kennt. Dann berechnet sich die Brennweite f zu

$$f = \frac{1}{n(\lambda) - 1} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \tag{17}$$

Im anderen Fall kennt man die Brennweite f_{Design} bei einer bestimmten Designwellenlänge λ_{Design}. Das Material - und damit $n(\lambda)$ - ist bekannt. Dann berechnet sich die Brennweite f zu

$$f = \frac{n(\lambda_{\text{Design}}) - 1}{n(\lambda) - 1} f_{\text{Design}} \tag{18}$$

Gleichsetzen von (17) und (18) führt dann folglich zu

$$f_{\text{Design}} = \frac{1}{n(\lambda_{\text{Design}}) - 1} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \tag{19}$$

beziehungsweise nach Umformung zur sogenannten Linsenschleiferformel

$$\frac{1}{f_{\text{Design}}} = (n(\lambda_{\text{Design}}) - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{20}$$

Man sieht nun, dass für eine Linse, die entweder durch (R_1, R_2) oder durch $(f_{\text{Design}}, \lambda_{\text{Design}})$ beschrieben ist, das jeweils andere Parameterpaar nicht eindeutig bestimmt werden kann.

Idee für Implementierung: Man könnte dies so lösen, dass es reicht, eines der beiden Paare anzugeben, um die Linse vollständig zu bestimmen. Gibt man nun aber optional noch einen dritten Parameter an (bei gegebenem $(f_{\text{Design}}, \lambda_{\text{Design}})$ z.B. $R_1 = \infty$), so könnte der vierte Parameter automatisch berechnet werden.

3 Materialen

Für uns sind erstmal die Materialen N-BK7 und Fused Silica interessant. Deren Brechungsindex berechnet sich folgendermaßen:

$$n^2_{\text{N-BK7}} - 1 = \frac{1.03961212 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.00600069867} + \frac{0.231792344 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.0200179144} + \frac{1.01046945 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 103.560653} \tag{21}$$

$$n^2_{\text{Fused Silica}} - 1 = \frac{0.6961663 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2} \tag{22}$$