双曲平面的一些几何性质

Nick Shu

nicholas.github.io

数千年来，数学家们一度认为 Euclid 几何是唯一正确的几何学. 但是无数数学家在证明第五公设如果一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角之和小于两直角和，则这两条直线在不断延伸后，会在该侧相交的时候屡屡碰壁，于是数学家尝试采用反证法. 自然我们的假设是“过直线外一点，没有直线与已知直线平行”和“过直线外一点，有至少两条直线与已知直线平行”. 其中，Riemann 研究了前者的几何性质，现在叫做椭圆几何，而 Никола́й Ива́нович Лобаче́вский 研究了后者的几何性质，现在叫做双曲几何. 几乎同时，Gauss 和 Bolyai 都给出了完全一致的结论，然而 Gauss 惧怕它带来的“波希米亚人的叫喊”，而 Bolyai 因为 Gauss 告诉他自己早已得到相关成果而失望 [1].

不过，尽管数学家在 19 世纪初已经提出了这种观点，但毫无疑问，我们永远无法在一般的平面，配以我们熟悉的几何结构，得到双曲几何学的模型，其中，Beltrami 提出了伪球面模型，即 $(\operatorname{sech} t, t-\tanh t)$ 绕着 y 轴旋转一周得到的曲面；Klein 利用 Euclid 平面上面一个圆和内部的弦构造出了一个模型，同时他提出了前文所述的“双曲几何”和“椭圆几何”的名称；而 Poincaré 提出了另一种圆盘模型和我们将要提到的半平面模型. 至此，数学界才正式承认了双曲几何学作为一种几何学的“合法性”. 本文我们将会讨论 Poincaré 的半平面模型，并以此为基础研究双曲平面的一些几何性质.

§1 双曲平面的 Poincaré 半平面模型

¶1.1 复数和复平面

定义 1.1

在 $\mathbb{R}$ 上定义加法和乘法

$$(a,b) +_{\mathbb{C}} (c,d) = (a+c, b+d),$$
$$(a,b) \times_{\mathbb{C}} (c,d) = (ad-bc, ac+bd)$$

之后，我们称这样得到的集合为 $\mathbb{C}$.
我们称 $\mathrm{i} = (0,1)$，这样 $\mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} \mathrm{i} = (-1,0)$ 且 $(a,b) = a + b\mathrm{i}$.

我们容易证明限制在 $\mathbb{R}$ 上之后，这两个运算和实数的加法、乘法没有区别，不会引起混淆，所以之后我们不会再用 $+_{\mathbb{C}}$ 和 $\times_{\mathbb{C}}$ 这两个记号，而是统一采用 $+, \times$.

¶1.2 Poincaré 半平面模型

定义 1.2

我们称上半复平面为 $\mathbb{H} = \{(x, y) : x \geq 0\}$，在上面赋予度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

之后，得到的几何结构就是 Poincaré 的半平面模型.

下面我们将推导测地线方程和两点之间的距离公式.

定理 1.1

在 Poincaré 半平面模型当中，测地线只有两种：

- 垂直于 x 轴的射线 $z = x + \mathrm{i}t$，记作 l_x；
- 和 x 轴正交的半圆弧 $z = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $\theta \in (0, \pi)$，记作 $l_{c,r}$.

证明 考虑平面曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in (t_1, t_2),$$

其长度为

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2}{y^2} \mathrm{d}t.$$

注意到被积分式与 t 无关，这样，系统“能量”

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

守恒 [2]，化简可以得到

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} = \mathrm{const.}.$$

注意到，这个式子就是第一基本形式 $\mathrm{d}s^2$. 只要取 t 为自然坐标，这样

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = y^2.$$

又对 x 求变分可以得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) = 0$，从而 $\dot{x} = Ay^2$. 这样可以得到

$$\dot{y} = y\sqrt{1 - A^2y^2} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1 - A^2y^2}}{Ay}.$$

当 $A = 0$ 的时候，不难得到 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0$，从而，$x$ 是一个定值，于是就能够得到射线 $x + \mathrm{i}t$.

当 $A \neq 0$ 的时候，积分可以得到 $x = -\frac{\sqrt{1-A^2y^2}}{A} + C$，这样可以得到 $(x - C)^2 + y^2 = A^{-2}$，显然这是一个圆心在 $(C, 0)$ 的圆，也就是 $z = C + \frac{1}{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

综上，我们证明了这个定理. □

现在讨论两点之间的距离公式. 显然，对于同在一个射线上面的两个点 $z_1 = x + t_1\mathrm{i}, z_2 = x + t_2\mathrm{i}$，容易得到

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\mathrm{d}y}{y} \right| = \left| \ln \left(\frac{t_1}{t_2} \right) \right|.$$

而对于一段圆弧上的两个点 θ_1 和 θ_2（以 θ 参数化），不难发现 $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = r^2 \mathrm{d}\theta^2$，这样，$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$. 从而

$$d = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \left| \ln \left(\frac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}} \right) \right|.$$

这就得到了下面的定理:

定理 1.2

对于 Poincaré 半平面的两个点，他们的距离（即测地线段的长度）为

$$d = \begin{cases} \left| \ln \left(\frac{t_1}{t_2} \right) \right|, & z_1, z_2 \in l_x; \\ \left| \ln \left(\frac{\tan\frac{\theta_1}{2}}{\tan\frac{\theta_2}{2}} \right) \right|, & z_1, z_2 \in l_{c,r}. \end{cases}$$

后面我会用 $d(A, B)$ 表示两个点的双曲距离，而用 $|AB|$ 表示它们的 Euclid 距离. 对于线段而言，我会用 a 表示它的双曲长度，而用 $|a|$ 表示其 Euclid 长度.

另外应该注意，当其中一个点无限靠近 x 轴的时候，他们的距离就会变成无穷大，这样我们可以说，x 轴就是 Poincaré 模型当中的“无穷远直线”（[3]）.

现在我们证明这个距离的一个重要性质:

定理 1.3

点 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 之间的双曲距离和 Euclid 距离满足

$$\cosh d(A, B) = 1 + \frac{|AB|^2}{2y_A y_B}.$$

证明 首先注意到，$\tan(\theta_X/2) = \sqrt{\frac{r-(x_X-c)}{r+(x_X-c)}}$，其中 $X \equiv A, B$. 从而，

$$\mathrm{e}^{d(A,B)} = \sqrt{\frac{r-(x_B-c)}{r+(x_B-c)} \cdot \frac{r+(x_A-c)}{r-(x_A-c)}}.$$

利用 $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ 的条件，可以得到，$\frac{r-(x-c)}{r+(x-c)} = \frac{r^2-(x-c)^2}{[r+(x-c)]^2} = \frac{y^2}{[r+(x-c)]^2}$，这样可以化简得到

$$\mathrm{e}^{d(A,B)} = \frac{y_B}{y_A} \cdot \frac{r+(x_A-c)}{r+(x_B-c)},$$

代入 $c = \frac{1}{2}\left(x_A + x_B + \frac{y_B^2 - y_A^2}{x_B - x_A}\right)$ 以及 $r^2 = \frac{[(x_A-x_B)^2+(y_A+y_B)^2]\cdot[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]}{4(x_A-x_B)^2}$ 可以得到

$$\mathrm{e}^{d(A,B)} = \frac{(x_A-x_B)^2 + (y_A+y_B)^2 + \sqrt{[(x_A-x_B)^2+(y_A+y_B)^2]\cdot[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]}}{2y_A y_B}.$$

这样就能证明

$$\cosh d(A,B) = 1 + \frac{|AB|}{2y_A y_B}. \qquad \square$$

考虑令 $\omega_1 = \mathrm{d}x/y, \omega_2 = \mathrm{d}y/y$，现在我们求这上面的联络. 首先，$\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y/y^2, \mathrm{d}\omega_2 = 0$，假设 $\omega_2^1 = a\omega_1 + b\omega_2$，那么，

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2 = 0 & \Longrightarrow \ a = -1; \\ \mathrm{d}\omega_2 + \omega_1^2 \wedge \omega_1 = 0 & \Longrightarrow \ b = 0, \end{cases}$$

从而 $\omega_2^1 = -\omega_1^2$，这样它的 Gauss 曲率就是

$$K = \frac{\mathrm{d}\omega_2^1}{\omega_1 \wedge \omega_2} = -1.$$

§2 该模型和 Hilbert 公理的兼容性

¶2.1 和关联公理 I.1–I.3 的兼容性

首先我们回顾一下关联公理：

公理

I.1 任意两点 A, B，都存在一条经过这两个点的直线 a；
I.2 任意两点 A, B，存在之多一条直线经过这两个点；
I.3 每条直线至少有两个点，至少存在一组三个点不共线.

现在我们逐一证明：

与公理 I.1 的兼容性 如果两个点 z_1, z_2 的实部相等，都是 x_0，那么测地线 l_{x_0} 满足条件；而如果两个点实部不相等，那么取

$$c = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1 - x_2}\right), \quad r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$$

得到的 $l_{c,r}$ 就能够满足条件了. 从而公理 I.1 成立.

与公理 I.2 的兼容性 不难看出，对于实部相等的两个复数 z_1, z_2，显然只会存在一个射线 l_{x_0}，而显然不存在一个经过这两个点且与 x 轴正交的圆；而对于实部不相等的复数，显然没有满足条件的射线，并且满足 $|c - z_1| = |c - z_2|$ 的点 $c \in \mathbb{R}$ 显然只会存在唯一一个（就是 x 轴和中垂线的交点）. 这样我们就证明了公理 I.2 成立.

与公理 I.3 的兼容性 毫无疑问，任何一条直线上都有无穷多个点，并且点 $0, \mathrm{i}, 1$ 一定不共线，这是因为连接 $0, \mathrm{i}$ 的是测地线 l_0，而连接 $0, 1$ 的是测地线 $l_{1/2,1/2}$. 根据公理 I.2，显然连接两点的直线是唯一的. 从而我们证明了公理 I.3 成立.

综上，我们有：

定理 2.1

如上所述定义的双曲平面满足关联公理 I.1-I.3.

¶2.2 和顺序公理 II.1–II.4 的兼容性

为了研究顺序公理，我们必须得先定义 z_2 在 z_1, z_3 之间的概念.

定义 2.1

称共线的三个点 z_1, z_2, z_3 满足 z_2 在 z_1 和 z_3 之间，如果

- 它们在某个 l_x 上面且参数化得到的 t_1, t_2, t_3 满足 t_2 在 t_1, t_3 之间；
- 它们在某个 $l_{c,r}$ 上且参数化得到的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 满足 θ_2 在 θ_1 和 θ_3 之间.

我们回顾顺序公理：

公理

II.1 如果 A 在 B, C 之间，那么 A 也在 C, B 之间；
II.2 对于任何两个点 A, C，一定可以找到一个点 B 在 A, C 之间；
II.3 一条直线上不同的两个点当中，至多有一个点在另外两个之间；
II.4 对于平面上不共线的三点 A, B, C，如果不经过 A, B, C 当中任何一个的直线 a 和 BC 有公共点，那么它和 AB, AC 至少一个也有公共点.

与公理 II.1-II.3 的兼容性　显然，利用实数集合的序的性质就能够得到.

与公理 II.4 的兼容性　首先我们声明一点，即任何两个测地线都不可能相切. 这是因为，根据定义域来看，它们都不定义在 x 轴上，这样也就没有办法相切了. 并且，任何两条测地线都至多有一个交点，因为显然，在整个 $\mathbb{C}$ 上有两个交点，但是其中一个位于下半平面，仅有一个在 $\mathbb{H}$ 上容易看出，双曲三角形 ABC 在 $\mathbb{R}^2$ 上也是一个闭曲线，利用 Jordan 曲线定理，一定存在一个 a 上面的点 Q 位于这个双曲三角形内部. 考虑另外两个点 P, R 它们在三角形外面但是 Q 在 P, R 之间. 注意到 $\mathbb{H}$ 上的直线和圆都是连续的，这样一定可以找到 PQ 和 QR 和三角形的边的交点，从而它和三角形的边有两个交点. 前面已经论证了，直线 a 和 BC 至多有一个交点，这样另一个交点一定在 AB 和 AC 上，这就证明了公理 II.4.

综上，我们有：

定理 2.2

如上所述定义的双曲平面满足顺序公理 II.1-II.4.

¶2.3 和合同公理 III.1–III.5 的兼容性

首先我们定义：

定义 2.2

对于两个线段 AB 和 $A'B'$，称 $AB \simeq A'B'$ 当且仅当 $d(A, B) = d(A', B')$.

我们先回忆线段合同公理：

公理

III.1 给定线段 AB 和一个点 A'，给定一个从 A' 出发的射线 a，这上面存在唯一一个点 B' 满足 $AB \simeq A'B'$；
III.2 线段的合同是等价关系；
III.3 若点 C 在 A, B 之间，C' 在 A' 和 B' 之间，且 $AC \simeq A'C'$，$BC \simeq B'C'$，那么 $AB \simeq A'B'$.

与公理 III.1 的兼容性 我们只需要令

$$t_{B'} = \mathrm{e}^{d(A,B)+\ln(t_{A'})} \quad \text{或} \quad \theta_{B'} = 2\arctan\left(\mathrm{e}^{d(A,B)+\ln(\tan(\theta_{A'})/2)}\right)$$

即可.

与公理 III.2 的兼容性 这等价于实数相等是一个等价关系，这是显然的.

与公理 III.3 的兼容性 只需要证明线段的可加性就行了，我们以 $l_{c,r}$ 为例，根据定义，$d(A,C) = d(A',C'), d(B,C) = d(B',C')$，

$$d(A,B) = \left|\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta_A}{2}}{\tan\frac{\theta_B}{2}}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta_A}{2}}{\tan\frac{\theta_C}{2}}\right)\right| + \left|\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta_C}{2}}{\tan\frac{\theta_B}{2}}\right)\right| = d(A,C) + d(C,B),$$

同样地，$d(A',B') = d(A',C') + d(C',B')$，这样，$d(A',B') = d(A,B)$，即 $AB \simeq A'B'$.

接下来我们定义角度和角度的合同：

定义 2.3

对于两个交于 P 点的射线 h, k，定义它们的夹角为

$$\angle(h,k) = \angle(T_P h, T_P k),$$

其中 $T_P h$ 和 $T_P k$ 指的是在 P 处和两个射线同向相切的 Euclid 射线.
称 $\angle(h,k) \simeq \angle(h',k')$ 如果 $\angle(h,k) = \angle(h',k')$.

我们回顾角的合同公理：

公理

III.4 给定角 $\angle(h,k)$ 和从 O' 出发的射线 h'，给定一个 h' 分出的半平面，一定存在唯一一个从 O' 出发的射线 k' 满足 $\angle(h',k') \simeq \angle(h,k)$.
III.5 如果三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 满足 $AB \simeq A'B'$，$AC \simeq A'C'$，$\angle(AB, AC) \simeq \angle(A'B', A'C')$，那么 $\angle(B'A', B'C') \simeq \angle(BA, BC)$.

与公理 III.4 的兼容性 首先我们指出，一旦给定了点 P 和 $T_P h$，那么直线 h 一定唯一确定，这是因为如果 $T_P h$ 垂直于 x 轴，那么 $h = T_P h$ 是唯一确定的；而如果不满足，那么显然，只需要沿着 P 做出 $T_P h$ 的垂线，和 x 轴有一个交点 Q，那么 $l_{Q,|PQ|}$ 是唯一满足的双曲直线. 首先在 Euclid 平面上使用公理 III.4，便可得到 $T_{O'} k'$ 了，再利用上面的论证，不难发现 k' 是唯一存在的.

与公理 III.5 的兼容性 利用 ¶3.2 的余弦定理和正弦定理可以证明这一点，我们留到后面补证.

综上，我们有：

定理 2.3

如上所述定义的双曲平面满足合同公理 III.1-III.5.

¶2.4 和平行公理 IV 不兼容性的例子

对于直线 l_{x_*} 和点 $A(x_0, y_0)$，如果取 $(x-c)^2+y^2=(x_0-c)^2+y^2$ 满足和直线 $x=x_*$ 没有交点即可，不难发现，只要取 $c<\frac{x_*^2-y_0^2-x_0^2}{2x_*-2x_0}$ 就满足条件了；

对于直线 $l_{c,r}$ 和点 $A(x_0, y_0)$，构造双曲直线 $l_{a,\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}}$，其中满足

$$\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}+r<|a-c| \quad \text{或} \quad \left|\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}-r\right|\geq|a-c|$$

即可.

不过，在一些数学教材当中，例如 [3]，提出只有两者相切与 x 轴上才算是平行，其他的只是不相交的观点（因为这个观点和射影几何更为符合一些），那么在这个意义下，就应该说，过直线外一点有两个平行于该直线的直线，但存在无穷多不相交的直线. 不过无论如何，都应该承认，平行公理 IV 不再成立了.

综上，我们发现，双曲平面就是把 Hilbert 公理当中的平行公理改成“过直线外一点存在无穷多个不相交的直线”所得到的几何学.

§3 双曲平面的一些变换群

¶3.1 双曲平面和 2 级特殊线性群的关系

首先回忆 2 级特殊线性群为

$$\mathbf{SL}(2)=\{g\in\mathbf{M}_2:\det g=1\}.$$

然后，对于任何一个 $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} g\in\mathbf{SL}(2)$，定义映射

$$\begin{aligned} M_g:\mathbb{C}&\to\mathbb{C};\\ z&\rightsquigarrow\frac{az+b}{cz+d}, \end{aligned}$$

首先我们证明：

定理 3.1

这样定义的映射 M_g 具有如下性质：

- M_g 会把 $\mathbb{H}$ 打到 $\mathbb{H}$ 自己；
- 对于 $g_1, g_2\in\mathbf{SL}(2)$，一定有
$$M_{g_1}\circ M_{g_2}=M_{g_1g_2}.$$

证明 给出一个 $g \in \mathbf{SL}(2)$，可以写出

$$\frac{az+b}{cz+d} = \text{实部} + \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}\mathrm{i},$$

显然我们会发现，虚部一定是一个正值，这就意味着，M_g 把 $\mathbb{H}$ 打到自身. 进一步，直接计算可以得到，

$$g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

它们对应的映射可以写成

$$\frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)},$$

这恰好是

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_2 c_1 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

对应的映射. □

¶3.2 双曲平面和 2 级特殊射影线性群的关系

我们发现，由于 2 是一个偶数，那么

$$\det(gI_2) = \det(g(-I_2)) = \det g = 1,$$

这样，我们可以考虑

$$\mathbf{PSL}(2) = \mathbf{SL}(2)/(\pm I_2),$$

即我们把 g 和 $-g$ “等同起来”得到的一个群. 我们将要证明：

定理 3.2

$\mathbf{PSL}(2)$ 会保持双曲平面的交比，测地线，距离，角度，面积.

证明 首先我们只需要验证距离，这样测地线，角度，面积都会自动保证（由等距变换保证）. 我们从第一基本形式出发，从复数的角度，我们可以写 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}/(\operatorname{Im}(z))^2$. 我们用 $\tilde{z}$ 表示 $M_g(z)$，那么根据定义，

$$\mathrm{d}\tilde{z}\mathrm{d}\bar{\tilde{z}} = \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{(cz+d)^2(c\bar{z}+d)^2},$$

而我们应该发现，

$$\operatorname{Im}(\tilde{z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\tilde{z} - \bar{\tilde{z}}) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}.$$

这样我们就会发现，$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tilde{s}^2$，从而第一基本形式保持不变，换言之这是一个等距变换. 这样，距离，测地线，角度，面积都保持不变.

对于交比，其实只需要发现

$$\frac{\tilde{z}_1-\tilde{z}_3}{\tilde{z}_1-\tilde{z}_4}=\frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d}-\frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d}-\frac{az_4+b}{cz_4+d}}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{cz_4+d}{cz_3+d},$$

注意到后面那个式子和 z_1, z_2 无关，这样一定交比不变. □

接下来我们自然要问，在双曲平面上，如果一个映射 φ 保持长度，这样的映射会构成什么样的一个群呢？答案是，$\mathbf{PSL}(2)\rtimes\mathbb{Z}_2$. 几何上来说，后面那个 $\mathbb{Z}_2$ 表示的就是是否会发生一个对称变换 (参见定理4.3)，因此我们现在将要证明：

定理 3.3

对于双曲平面而言，保持定向的等距群就是 $\mathbf{PSL}(2)$.

证明 根据复分析的结果，保持直线和广义圆的只有 $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ 这种形式的. 然而，我们会发现，如果只是考虑这个映射的作用，那么我们应该发现，$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{pmatrix}$ 的作用完全一致，从而我们可以直接把这个矩阵放在 $\mathbf{GL}(2)/(I_2\mathbb{Z})$ 也就是 $\mathbf{PSL}(2)$ 上面去，而利用定理3.2，很容易发现等距群就是 $\mathbf{SL}(2)$. □

§4 双曲平面上的三角形

¶4.1 三角形的内角和与面积

我们先研究三角形的内角和. 我们先用初等方法给出下面定理的证明.

定理 4.1

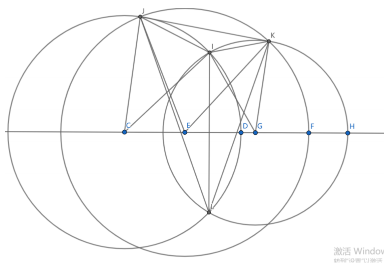
对于双曲三角形而言，一定有

$$A+B+C<\pi$$

成立.

证明 考虑三角形的 KIJ 的 Euclid 内角和和双曲内角和，它们之间满足

$$S_{\text{hyper}}=S_{\text{Euclid}}-\angle ICJ-\angle IGK+\angle JEK,$$



根据这个图形，不难发现 $\angle ICJ+\angle IGK=2(\angle ILJ+\angle ILK)=2\angle JLK>\angle JEK$ ，最后一

步是因为 E 在圆内，且不在圆心处. 这就证明了

$$S_{\text{hyper}} < S_{\text{Euclid}} = \pi. \qquad \square$$

现在我们定义面积，我们熟知，球面三角形的面积等于 $A+B+C-\pi$，所以这里我们定义：

定义 4.1

对于三角形 A, B, C 而言，定义

$$\mathcal{A}_{ABC} = \pi - (A+B+C).$$

容易验证：

定理 4.2

对于三角形 ABC 和 BC 边上一个点 D，

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACD}$$

一定成立.

证明 只需要利用 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ 即可. $\square$

这样，我们定义了双曲平面上面的面积和角度. 不过自然要问，此前我们定义了这上面的第一基本形式，这两者是否兼容呢？答案是肯定的. 现在我们就来证明，这样定义出来的面积和角度和第一基本形式决定的面积和角度是完全一致的.

定理 4.3

在上半复平面上面，由第一基本形式 $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)/y^2$ 定义的几何结构上自然赋予的角度和面积概念与前文定义的相同.

证明 只要注意到，对于平面上两个向量 $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2), \boldsymbol{v} = (v^1, v^2)$，就可以得到，

$$\begin{aligned}
\cos \angle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\text{hyper}} = \frac{< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >_{\text{hyper}}}{|\boldsymbol{u}|_{\text{hyper}} |\boldsymbol{v}|_{\text{hyper}}} &= \frac{(u^1v^1 + u^2v^2)/y^2}{\frac{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}}{y} \cdot \frac{\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}}{y}} \\
&= \frac{u^1v^1 + u^2v^2}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} \cdot \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}} = \cos \angle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\text{Euclid}},
\end{aligned}$$

这就证明了角度定义是符合的.

对于面积而言，注意到 $K = -1$，然后只需要利用 Chern-Gauss-Bonnet 定理就可以证明了. $\square$

¶4.2 正弦定理和余弦定理

我们首先给出正弦定理和余弦定理的形式：

定理 4.4

在双曲平面上，三角形的边和角满足：

- 正弦定理：
$$\frac{\sinh a}{\sin A}=\frac{\sinh b}{\sin B}=\frac{\sinh c}{\sin C}.$$
- 余弦定理：
$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos C.$$

证明 我们以三个边都是圆来证明，设 $a=l_{x_a,r_a},b=l_{x_b,r_b},c=l_{x_c,r_c}$，这样，根据定义，

$$\cos A=\pm\frac{(x_A-x_b)(x_A-x_c)+y_A^2}{r_br_c}.$$

不难得出，

$$\begin{aligned}r_c=(x_A-x_c)^2+y_A^2&=\frac{[(x_A-x_B)^2+y_B^2-y_A^2]+4y_A^2(x_A-x_B)^2}{4(x_A-x_B)^2}\\&=\frac{[|c|^2+2y_A(y_B-y_A)]^2+4y_A(x_A-x_B)^2}{4(x_A-x_B)^2}=\frac{|c|^2(|c|^2+4y_Ay_B)}{4(x_A-x_B)^2}.\end{aligned}$$

另一方面可以得到，

$$\sinh^2 c=\cosh^2 c-1=\left(1+\frac{|c|^2}{2y_Ay_B}\right)^2-1\implies\frac{y_Ay_B}{|x_A-x_B|}\sinh c=r_c.$$

同时我们还能得到 $x_A-x_c=\frac{1}{2}\left(x_A-x_B-\frac{y_A^2-y_B^2}{x_A-x_B}\right)=\frac{y_Ay_B}{x_A-x_B}\cosh c-\frac{y_A^2}{x_A-x_B}$，从而，

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{(y_B^2-y_A^2)}{2y_Ay_B}\cdot\frac{\cosh b-\frac{y_A}{y_C}}{\sinh b\sinh c}\\&=\frac{\left(\cosh c-\frac{y_A}{y_B}\right)\left(\cosh b-\frac{y_A}{y_C}\right)}{\sinh b\sinh c}\\&=\frac{\cosh b\cosh c-\frac{y_A}{y_B}\cosh b-\frac{y_A}{y_C}\cosh c+\frac{y_A^2}{y_By_C}}{\sinh b\sinh c}.\end{aligned}$$

而我们还可以注意到，

$$\frac{y_A}{y_B}\cosh b+\frac{y_A}{y_C}\cosh c-\frac{y_A^2}{y_By_C}=\frac{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+2y_By_C}{2y_By_C}=\cosh a,$$

从而我们就有 $\cos A=\frac{\cosh b\cosh c-\cosh a}{\sinh b\sinh c}$，也就证明了余弦定理.

进而，容易得到

$$\begin{aligned}\sin A&=\frac{\sqrt{1+2\cosh a\cosh b\cosh c-\cosh^2 a-\cosh^2 b-\cosh^2 c}}{\sinh b\sinh c}\\\implies\frac{\sinh a}{\sin A}&=\frac{\sinh a\sinh b\sinh c}{\sqrt{1+2\cosh a\cosh b\cosh c-\cosh^2 a-\cosh^2 b-\cosh^2 c}}\end{aligned}$$

是一个对称式，从而正弦定理得证. □

¶4.3 双曲平面上的 Pappus 定理和 Desargues 定理

同理, 以下我们只考虑所有直线都理解成为半圆的情形. 首先, 我们回忆一般平面上面 Pappus 定理的证明. 值得注意的一点是，双曲平面没有射影几何结构，所以我们只能利用面积，长度等 Euclid 几何的内容来证明这个问题.

定理 4.5

对于直线 l_1, l_2, 上面分别有三个点 $A, B, C; D, E, F$, 那么点 $G = AE \cap BD, H = AF \cap CD, I = BF \cap CE$，这三个共线.

证明（在 Euclid 平面上） 考虑设 $H_1 = AF \cap GI, H_2 = CD \cap GI$. 这样，就能得到

$$\frac{GI_1}{I_1H} = \frac{\mathcal{S}_{AGI_1}}{\mathcal{S}_{AHI_1}} = \frac{\mathcal{S}_{FGI_1}}{\mathcal{S}_{FHI_1}} \implies \frac{GI_1}{I_1H} = \frac{\mathcal{S}_{AGF}}{\mathcal{S}_{AHF}}.$$

同理可以得到

$$\frac{HI_2}{I_2G} = \frac{\mathcal{S}_{CDH}}{\mathcal{S}_{CGD}},$$

现在只要证明右边两个面积比例相等，不难发现，

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{S}_{AGF}}{\mathcal{S}_{AHF}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{CGD}}{\mathcal{S}_{CDH}} &= \frac{\mathcal{S}_{AGF}}{\mathcal{S}_{AHF}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{CGD}}{\mathcal{S}_{CDH}} \\ &= \frac{\mathcal{S}_{AGF}}{\mathcal{S}_{ADG}} \frac{\mathcal{S}_{CHF}}{\mathcal{S}_{AHF}} \frac{\mathcal{S}_{CDH}}{\mathcal{S}_{CHF}} \frac{\mathcal{S}_{ADG}}{\mathcal{S}_{CDG}} \\ &= \frac{EF}{DE} \frac{BC}{AB} \frac{DE}{EF} \frac{AB}{BC} = 1,\end{aligned}$$

从而就证明了 $I_1 = I_2$，也就是 I，即证. □

仔细考察这个证明，为了把它推广到双曲平面上去，我们需要的就是最后一步那个所谓*共边比例定理*，所以我们只需要把它推广到双曲平面上即可！

定理 4.6

在双曲平面上，给定一个三角形 ABC 和 BC 边上一点 D，一定有

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{CBD}} = \frac{d(B, D)}{d(C, D)},$$

其中 $\mathcal{A}$ 表示的是其双曲面积.

首先，我们证明*双曲平面上，存在对称变换*. 为此，我们指出：

定理 4.7

在双曲平面上，对于一个直线 l 和一个点 P，设 PQ_0 这个测地线和 l 正交，那么

$$\min_{Q \in l} d(P, Q) = d(P, Q_0).$$

证明 利用 §3 的结论，我们可以直接把 l 打到 $x = 0$ 这个射线上去，假设这个点是 $P(a, b)$. 进

而，利用前面证明的 $\cosh d(P,Q) = 1 + \frac{|PQ|^2}{2y_P y_Q}$ 可知，我们只需要最小化

$$f(Y) = \frac{a^2 + (Y-b)^2}{2bY}$$

即可，利用基本不等式，

$$f(Y) = \frac{Y^2 + (a^2+b^2) - 2bY}{2bY} \geq \frac{2\sqrt{a^2+b^2}Y - 2bY}{2bY},$$

从而可以知道，当且仅当 $Y = \sqrt{a^2+b^2}$ 的时候，取到最小值，不难验证，这个时候半圆和直线 $x=0$ 正交，这就证明了命题. $\square$

进而我们对于每个直线 l 构造对称变换：

定理 4.8

对于每个测地线 l，存在一个 $\pi_l : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 满足：对于任何一个点 A，一定有 $A\pi_l(A)$ 垂直 l 于 O 点且 $d(A,O) = d(\pi_l(A), O)$.

证明 我们采用构造式的证明，首先，做出 A 对于测地线 l 的垂线段，假设垂足在 O 点，那么我们只需要延长这个测地线（注意放在 Euclid 几何意义去理解，这是一定可以延长的），延长到 $d(A,O) = d(\tilde{A}, O)$ 就行，现在定义 $\pi_l(A) = \tilde{A}$，不难发现这满足上面的条件. 而且根据公理 III.1 可以证明，这样的点 $\tilde{A}$ 唯一存在，从而这确实是一个几何变换. $\square$

定理 4.6 的证明 我们分成三步解决，主要采用的是二进制有理逼近的思想.

Step 1 如果 D 是 BC 的中点，那么命题成立. 事实上，考虑对测地线 AD 进行对称变换，那么 $\pi_{AD}(B) = C$，这样不难发现

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{CBD}} = 1 = \frac{d(B,D)}{d(C,D)};$$

Step 2 接下来，我们用归纳法证明，如果点 D 是 BC 的某一个靠近 B 的 ε 等分点，其中，ε 是一个 n 位二进制小数，那么 $\mathcal{A}_{ABD} = \varepsilon \cdot \mathcal{A}_{ABC}$ 成立.

首先，当 $n=1$ 的时候已经证明完毕了. 假设 $n-1$ 位的时候始终成立，那么考虑 $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i}$，其中 $a_i = 0, 1$. 我们总可以把 ε 写成

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i} + a_n 2^{-n}$$

的形式，如果 $a_n = 0$，这就是 $n-1$ 位的情况；如果 $a_n = 1$，这样，我们可以假设有两个点 D_1, D_2 分别是靠近 B 的 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i}$ 等分点和 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i} + 2^{-(n-1)}$ 等分点，不难发现

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{ABD_1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i}\right) \cdot \mathcal{A}_{ABC}, \\ \mathcal{A}_{ABD_2} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i} + 2^{-(n-1)}\right) \cdot \mathcal{A}_{ABC} \end{cases}$$
$$\implies \mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABD_1} + \frac{\mathcal{A}_{ABD_2} - \mathcal{A}_{ABD_1}}{2} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i} + 2^{-n}\right) \cdot \mathcal{A}_{ABC}.$$

不难发现，最后那个括号里面的内容就是 ε，这就证明了这一点. 注意两个等号中间那个分数

项是对 $\mathcal{A}_{AD_1D_2}$ 采用了 Step 1 的结果. 进而，我们就可以说，对于有限位二进制小数 ε，当 $d(B,D)=\varepsilon\cdot d(B,C)$ 的时候，成立

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{CBD}}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}=\frac{d(B,D)}{d(C,D)};$$

Step 3 最后，对于一般情况，我们要做的就是对这个数进行二进制展开之后，采用有限位逼近就行了.

综上，我们证明了，对于任意的 D，一定满足

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{CBD}}=\frac{d(B,D)}{d(C,D)}.$$ □

这样，我们就可以把一般情况的共边比例定理推广到双曲平面上了：

定理 4.9

对于双曲三角形 ABD 和 CBD 而言，如果 $BD\cap AC=P$，那么

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{CBD}}=\frac{d(A,P)}{d(C,P)}.$$

证明 我们对 ABC 和 P 利用定理4.3，可以得到

$$\frac{\mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{CBP}}=\frac{d(A,P)}{d(C,P)}.$$

然后，我们再对 ABP 和 D 利用定理4.3，可以得到

$$\frac{\mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{ABD}}=\frac{d(A,P)}{d(A,D)},$$

同理，对 CBP 和 D 利用定理4.3，可以得到

$$\frac{\mathcal{A}_{CBP}}{\mathcal{A}_{CBD}}=\frac{d(A,P)}{d(A,D)},$$

结合这三者，就能得到

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{CBD}}=\frac{d(A,P)}{d(C,P)}.$$ □

利用定理4.3，我们就可以完全仿照 Euclid 平面的思路证明双曲平面上对应的 Pappus 定理了. 进而，我们可以利用 Pappus 定理证明 Desargues 定理 [4]：

定理 4.10

对于双曲三角形 $ABC, A'B'C'$，直线 AA', BB', CC' 共点当且仅当

$$P=AB\cap A'B',\quad Q=BC\cap B'C',\quad R=AC\cap A'C'$$

共线.

证明　首先设 $X = AC \cap OQ, Y = OB \cap PX, Z = OA \cap CY$，那么

1. 对 OYB 和 CAX 采用 Pappus 定理可以得到 PQZ 共线；
2. 对 OYB' 和 PQZ 采用 Pappus 定理可以得到 $XA'W$（其中 $W = OB' \cap ZY$）共线；
3. 对 $WA'X$ 和 OCC' 采用 Pappus 定理可以得到 ZQR 共线；

这样，我们就证明了 $PQRZ$ 共线，Desargues 定理得证. □

References

[1] 周兴和、杨明升. 高等几何. 科学出版社, 北京, 2008.

[2] 秦敢、向守平. 力学与理论力学（第二版）下册. 科学出版社, 北京, 2014.

[3] 梅向明，黄敬之. 微分几何. 高等教育出版社, 北京, 2016.

[4] 盛茂，王作勤. 几何学基础. 中国科学技术大学数学科学学院, 2025.