1 Introduzione

Scopo del presente documento è descrivere la metodologia di pricing dei certificate, mettendo in evidenza i motivi che hanno portato ad adottare la curva di credito "CertUnica" per valorizzare il rischio emittente insito in questa tipologia di prodotti.Vedremo in dettaglio anche come sono gestite le sensitivities rispetto a questo rischio.

I certificate sono strumenti finanziari derivati che consentono di investire su qualsiasi mercato di interesse e che incorporano strutture opzionali più o meno complesse. Essi sono emessi da una banca ad investitori che, a fronte di un pagamento upfront (tipicamnete pari al nozionale investito) acquisiscono il diritto di ricevere, oltre alla restituzione (totale o parziale) del capitale a scadenza, i premi derivanti dalla componente opzionale. Esattamente come per un'emissione standard il pagamento di questi flussi è subordinato alla solvibilità dell'emittente.

Il faro che ha guidato il pricing e il booking nei sistemi dei certificates è l'esigenza del trader di separare la parte di finanziamento (il capitale investito) dalla componente opzionale e, in particolare, la volontà di gestire l'opzione come se fosse risk free (ovvero non soggetta al rischio di credito dell'emittente). Naturalmente il DVA dell'opzione non è trascurato ma solo gestito separatamente come parte integrante del DVA di finanziamento.

Il principale input utilizzato è la cosiddetta curva "Unica" (o curva TIT) quotata dalla tesoreria dalla banca, i cui pillar rappresentano il premio per il rischio associato alle emissioni dei bond floater. E' una curva di spread: il singolo pillar è da intendersi come lo spread da aggiungere al tasso floater (di solito EURIBOR3M) perchè l'emissione risulatante sia alla pari. Si noti che al momento dell'emissione lo spread d'equilibrio coincide con l'asset swap spread. Da questa curva è possibile "bootstrappare" la default/survival probability dell'emittente, che è utilizzata per valorizzare il DVA dei certificate.

Di seguito, si descrive sinteticamente la struttare di questi bond floater e si cercherà di trovare una connessione con i certificate al fine di costruire una curva di credito modificata (la "CertUnica") da cui estrarre delle survival probability efficaci per il pricing corretto dei certificate stessi.

2 Bond floater rishioso dell'emittente

Consideriamo un particolare pillar della curva "Unica", ovvero un bond floater di scadenza T_n, emesso con spread (su un certo tasso di riferimento, tipicamente EURIBOR3M) di equilibrio $TIT_n(t)$ scelto in modo che il suo prezzo Pr^{FL_n} (visto dall'emittente)

$$Pr^{FL_n}(t,N) = -N = -\underbrace{NS(t,T_n)P^{ois}(t,T_n)}_{\substack{\text{Capitale a scadenza}\\ \text{soggetto a rischio emittente}}} - \underbrace{N\sum_{i=1}^{n} S(t,T_i)P^{ois}(t,T_i)\left[F(t,T_i)+TIT_n(t)\right]}_{\substack{\text{Gamba floater EURIBOR+spread}\\ \text{soggetto a rischio emittente}}} \tag{1}$$

sia pari in valore assoluto al nozionale N.

Se mettiamo in evidenza la componente di DVA associata al pagamento di queste cedole, definendo

$$CoupLeg_t^{rf}(T) := \sum_{i=1}^{n} P^{ois}(t,T_i)\left[F(t,T_i)+TIT_n(t)\right]$$

$$DVA_t^{CouponLeg} := \sum_{i=1}^{n}\left[1-S(t,T_i)\right]P^{ois}(t,T_i)\left[F(t,T_i)+TIT_n(t)\right]$$

la (1) si scrive

$$Pr^{FL}(t,N) = -N = -NS(t,T_n)P^{ois}(t,T_n) - \underbrace{NCoupLeg_t^{rf}(T)}_{\substack{\text{gamba variabile}\\ \text{risk free}}} + \underbrace{NDVA_t^{CouponLeg}}_{\substack{\text{risk premium per}\\ \text{rischio emittente}}} \tag{2}$$

2.1 Curva certunica

Si noti in particolare che, per costruzione, qualunque sia t, vale sempre l'uguaglianza

$$1 - CoupLeg_t^{rf}(T) = S(t,T_n)P^{ois}(t,T_n) - DVA_t^{CouponLeg} \tag{3}$$

Definiamo allora lo zero coupon risky sintetico come

$$ZC^{risky}(t,T) = \bar{S}(t,T)\, P^{ois}(t,T) := 1 - CoupLeg_t^{rf}(T) \tag{4}$$

definendo implicitamente la probabilità di sopravvivenza $\bar{S}(t,T)$ della curva chiamata "CertUnica".

Utilizzando la relazione (4) su tutti i pillar T_i della curva "Unica" è possibile trovare una struttura a termine di survival probability $\bar{S}(t,T_i)$.

Poichè i sistemi di booking non accettano come input una curva di probabilità di sopravvivenza. La stessa viene convertita in:

1. curva di cds spread $\{CU_i\}$ per l'alimentazione del sistema Murex
2. shift deterministico$\{z_i\}$costante a tratti da applicare alla curva di sconto nel sistema ORC, in modo da utilizzare, quando necessario, una curva di sconto efficiente (CERT_EUR) così definità

$$P^{eff}(t,T) := P^{ois}(t,T)\, exp\left(-\int_t^T z(u)\, du\right) \tag{5}$$

3 Certificates

Consideriamo un certificato che prevede, in cambio di un esborso iniziale N, i seguenti flussi futuri,condizionatamente alla sopravvivenza della banca emittente :

- rimborso del capitale N alla scadenza T
- payout di un'opzione, per esempio una call con strike K, nozionale M e scadenza T scritta su un sottostante C, per cui un flusso pari a $M(C_T-K)^+$

Se indichiamo con τ l'istante di default dell'emittente il prezzo del certificate (visto dalla banca) è dato da

$$Pr(t) = \mathbb{E}\left[D^{ois}(t,T)\, \mathbf{1}_{[\tau>T]}\left(-N - M(C_T-K)^+\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

ovvero il valore atteso nella misura risk neutral dei cash flow futuri scontati, condizionato alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ (informazione disponibile all'istante di valutazione t).

In ipotesi di indipendeza tra tassi, default e sottostante

$$Pr(t) = -P^{ois}(t,T)\, S(t,T)\, \mathbb{E}\left[\left(N + M(C_T-K)^+\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Scrivendo in termini del prezzo risk free della call

$$Call_t^{rf}(C_t,K,T) = P^{ois}(t,T)\, \mathbb{E}\left[(C_T-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$\begin{aligned} Pr(t) &= -NS(t,T)\, P^{ois}(t,T) - MS(t,T)\, Call_t^{rf}(C_t,K,T) \\ &= -NS(t,T)\, P^{ois}(t,T) - \underbrace{MCall_t^{rf}(C_t,K,T)}_{\substack{\text{opzione} \\ \text{risk free}}} + \underbrace{M(1-S(t,T))Call_t^{rf}(C_t,K,T)}_{\substack{\text{risk premium per rishio emittente} \\ \text{per la componente Call}}} + \end{aligned}$$

In particolare riconoscendo nel terzo addendo il DVA associato all'opzione call

$$Pr(t) = -NS(t,T)\, P^{ois}(t,T) + M\left[DVA_t^{Call} - Call_t^{rf}(C_t,K,T)\right]$$

Definendo uno zero coupon risky sintetico mediante la relazione

$$NP^{ois}(t,T)\, \tilde{S}(t,T) := NP^{ois}(t,T)\, S(t,T) - MDVA_t^{Call}$$

si puo scrivere

$$Pr(t) = -N\tilde{S}(t,T)\, P^{ois}(t,T) - MCall_t^{rf}(C_t,K,T)$$

ovvero come somma di una call risk free e del risky loan zero coupon sintetico.

E' chiaro che $\tilde{S}(t,T)$ dipende intrinsecamente dalla natura dell'opzione inserita nel certificate.

Relazione con il bond floater

Poichè il certificate è chiuso (al tempo $t = 0$) alla pari, M sarà scelto in modo che il suo valore (visto dall'acquirente) sia uguale al nozionale N

$$N = NS(0,T)\,P^{ois}(0,T) + MS(0,T)\,Call_0^{rf}(C_0,K,T) \tag{6}$$

Dalle relazioni 6 e 1 si evince che al *tempo 0* lo "spendibile" del certificate ha un NPV pari a quello delle cedole di un floater rischioso con la stessa scadenza.

$$MS(0,T)\,Call_0^{rf}(C_0,K,T) = N\sum_{i=1}^{n} S(0,T_i)\,P^{ois}(0,T_i)\,[F(0,T_i) + TIT_n(0)]$$

e in particolare

$$M\left[-DVA_0^{Call} + Call_0^{rf}(C_0,K,T)\right] = N\left[CoupLeg_0^{rf}(T) - DVA_0^{CouponLeg}\right] \tag{7}$$

Nulla si può dire invece, in generale, per $t > 0$, perchè una volta fissato M, il certificate si muoverà indipendentemente dal floater quotato.

La relazione (7) indica che almeno al *tempo 0*, la parte opzionale è riconducibile alla floating leg di un floater.

Alla luce di questo, è prassi comune, anche se *non è* matematicamente giustificabile, ritenere che questa uguaglianza valga per $t > 0$ e anche per la sola componente DVA.

Ovvero è un'approssimazione ragionevole pensare che valga

$$M \cdot DVA_t^{Call} \simeq N \cdot DVA_t^{CouponLeg}$$

Verificheremo la bontà di quest approssimazione nella sezione (6) partendo da dati reali.

Data per buona questa approssimazione, il prezzo del certficate è

$$\begin{aligned} Pr(t) &\simeq -N\left[S(t,T)\,P^{ois}(t,T) - DVA_t^{CouponLeg}\right] - MCall_t^{rf}(C_t,K,T) \\ &= -N\left[\bar{S}(t,T)\,P^{ois}(t,T)\right] - MCall_t^{rf}(C_t,K,T) \end{aligned} \tag{8}$$

quindi è scrivibile in termini dell'opzione risk free e di uno zero coupon risky sintetico costruito con la curva "CertUnica". Essa non ha nessuna dipendenza dalla natura dell'opzione associata al certificato.

Vale la pena ricordare che, nella pratica, l'ammontare M^* non è stimato a partire da (6) ma dalla formula (8), imponendo che il prezzo sia uguale a N, pertanto

$$M^* = \frac{N\left(1 - \bar{S}(t,T)\,P^{ois}(t,T)\right)}{Call_t^{rf}(C_t,K,T)}$$

4 Booking

I sistemi utilizzati per gestire i certificate sono Murex e ORC. In entrambe i sistemi il singolo certificate è inserito come composizione di una opzione risk free e di uno zero coupon risky sintetico che include il DVA dell'opzione.

Mentre Murex offre la possibilità di inserire lo zero coupon nella sua forma originale, in ORC esso è "bookato" come oppotuna combinazione di opzioni call e put (nello specifico un portafoglio costituito da +Call0 -Call100 +Put100).

Nel dettaglio in Murex il prezzo è

$$ZC^{risky}(t,T) = \bar{S}(t,T)\,P^{ois}(t,T)$$

in ORC è

$$ZC^{risky}(t,T) = P^{eff}(t,T)\,\mathbb{E}\left[(C_T)^+ - (C_T - 1)^+ + (1 - C_T)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

5 Sensitivity al rischio emittente

La scomposizione adottata nel booking permette di separare le sorgenti di rischio rispetto alle quali la banca si deve coprire. In particolare, il trader si occupa di “hegiare” i rischi legati all'opzione, delegando la gestione del rischio emittente alla tesoreria: l'NPV dell'opzione, infatti, è indipendente da questo rischio, inglobato invece interamente nella componente di ZC risky sintetico. E' chiaro che questo approccio è un'approssimazione della realtà, che è tanto peggiore quanto il prezzo del certificate si ritrova lontano dalla pari. L'esperienza di mercato dimostra però che, se il prezzo si allontana dalla pari, l'investitore è portato a chiudere la posizione, annullando l'eventuale rischio residuo per la banca. Alla luce di ciò, si tratta, ai fini pratici, di un'imprecisione accettabile per la banca.

Il trader, pertanto, non copre direttamente il rischio emittente ma si limita a fornire al tesoriere le sensitivities dello ZC risky sisntetico rispetto alle variabili di input del suo sistema di pricing, quindi rispetto agli spread $\vec{CU}\left(\vec{TIT}\right)$ nel caso di booking in murex e rispetto a $\vec{z}\left(\vec{TIT}\right)$ se il booking avviene in ORC. Poichè il tesoriere si coprirà scambiando i floater quotati, sarà interessato a calcolare la variazione del certificate rispetto al movimento della curva “Unica”, ovvero a calcolare le seguenti derivate

$$\frac{\partial Pr^{cert}(t,T)}{\partial TIT_i} = \frac{\partial ZC^{risky}(t,T)}{\partial TIT_i}$$

Le matrici Jacobiano delle trasformazioni $\vec{CU}\left(\vec{TIT}\right)$ e $\vec{z}\left(\vec{TIT}\right)$ sono calcolate dal trader a differenze finite mediante uno foglio excel esterno ai sistemi e fornite alla tesoreria insieme alle sensitivities.

La tesoreria accorpa allora i dati provenienti da Murex e da ORC in modo coerente nel seguente modo:

$$\frac{\partial ZC^{risky}(t,T)}{\partial TIT_i} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial ZC^{risky}(t,T)}{\partial CU_j}}_{\substack{\text{sensitivities}\\ \text{calcolate da Murex}}} \underbrace{\frac{\partial CU_j}{\partial TIT_i}}_{\substack{\text{Jacobiano}\\ \text{di}\vec{CU}\left(\vec{TIT}\right)}} + \sum_k \underbrace{\frac{\partial ZC^{risky}(t,T)}{\partial z_k}}_{\substack{\text{sensitivities}\\ \text{calcolate da ORC}}} \underbrace{\frac{\partial z_k}{\partial TIT_i}}_{\substack{\text{Jacobiano}\\ \text{di}\vec{z}\left(\vec{TIT}\right)}}$$

6 Bontà dell'approssimazione: un esempio con dati reali