

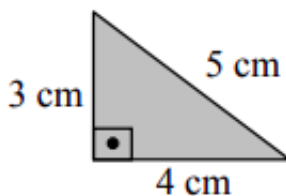
# Problemas Diversos para OBM Nível 1

Nicholas Farrel

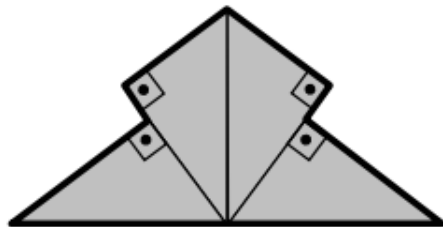
**Problema 1(OBM 2009).**A sequência 121, 1221, 12221, ... contém todos os números da forma 122...21 ( $n$  dígitos 2). A quantidade de dígitos 2 indica a posição do número na sequência. Por exemplo, o número 122222221 é o sétimo termo da sequência.

- a) Dentre os 2009 primeiros termos da sequência, quantos são divisíveis por 3?
- b) Qual é o menor número múltiplo de 1001 da sequência?

**Problema 2(OBM 2010).**Esmeralda tem muitos triângulos retângulos iguais aos da figura.



- a) Fazendo coincidir partes dos lados, sem sobrepor triângulos, Esmeralda montou a figura a seguir. Qual é a área e qual é o perímetro dessa figura?



- b) Usando o mesmo processo, Esmeralda montou o menor quadrado possível com lado de medida inteira. Mostre, através de uma figura, como Esmeralda pode fazer isso.

**Problema 3(OBM 2011)**Dizemos que um número inteiro positivo é chapa quando ele é formado apenas por algarismos não nulos e a soma dos quadrados de todos os seus algarismos é também um quadrado perfeito. Por exemplo:

- o número 2115522 é chapa, pois  $2^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 = 8^2$  e todos os seus algarismos são não nulos (diferentes de zero);
- o número 403 não é chapa, pois, apesar de  $4^2 + 0^2 + 3^2 = 5^2$ , um dos algarismos de 403 é nulo (igual a zero);
- o número 12 não é chapa, pois  $1^2 + 2^2 = 5$  e 5 não é um quadrado perfeito.

- a) Qual é o maior inteiro positivo com dois algarismos que é chapa?
- b) Existe um inteiro positivo com 2011 algarismos que é chapa? Justifique sua resposta.

**Problema 4(OBM 2011)**Num tabuleiro 3x3 escrevemos os números de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, achamos a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal e contamos o número de somas que são múltiplos de três. Por exemplo, no tabuleiro abaixo as 8 somas (as três linhas, as três colunas e as duas diagonais) são números múltiplos de 3.

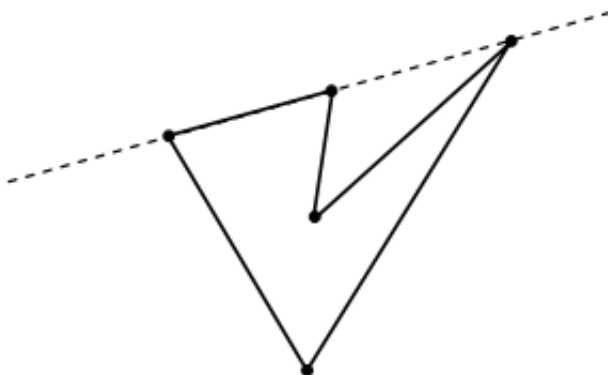
1	2	3
4	5	6
7	8	9

É possível que nenhuma das 8 somas seja um múltiplo de 3?  
Lembre-se de que você deve justificar sua resposta.

**Problema 5(OBM 2009).**Prove que não existem inteiros positivos  $x$  e  $y$  tais que  $x^3 + y^3 = 2^{2009}$

**Problema 6.**A sequência de números 1, 2, 3, ..., 2022 está na tela de um computador. Um programa realiza a seguinte operação: apaga dois números quaisquer e, em seguida, acrescenta à sequência outro número que é igual à diferença entre a soma dos dois que foram apagados e um. Após 2021 etapas, quantos números restarão na tela do computador? E quais são os possíveis valores que este(s) número(s) pode(m) assumir e por quê?

**Problema 7(OBM 2006)** Dentre os polígonos de 5 lados, o maior número possível de vértices alinhados, isto é, pertencentes a uma única reta, é três, como mostrado a seguir.



Qual é a maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter?

**Atenção:** além de desenhar um polígono de 12 lados com o número máximo de vértices alinhados, lembre-se de mostrar que não existe um outro polígono de 12 lados com mais vértices alinhados do que este.