• Devoir •

1. Considérer les processus $\{S_i(t);t\geq 0\}$ suivants:

$$S_i(t)=\sum_{n=1}^{N_i(t)} X_n \ , \ i=1,2 \ ,$$

où,

- $\{N_1(t);t\geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène, avec taux $\lambda>0$ et $\{N_2(t);t\geq 0\}$ est un processus de Poisson conditionnel avec taux aléatoire Λ tel que $E[\Lambda]=\lambda$.

on choisi notre lambda - actuarielle

- $\{X_n;n\in\mathbb{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires positives iid (autre qu'exponentielle et uniforme) et stochastiquement indépendantes des processus $\{N_i(t);t\geq 0\}$.

on simule le temps entre les événements

1.1 Après avoir choisi le paramètre λ, les distributions de X et de Λ, vous simulez les variables aléatoires $S_i(1)$ un nombre « suffisant » de fois de telle sorte à pouvoir estimer le mieux possible les quantités en a), b), c) et d), et les comparer à leurs valeurs théoriques. Vous refaites cette démarche pour $t=2,3,4,5$.

a) $P(N_i(t)=n)$, $n=0,1,\ldots 10$ **compare les simulations et les valeurs théorique**

b) $E[N_i(t)]$, $E[X]$.

c) $V[N_i(t)]$, $V[X]$. **Est ce que le calcul numérique(intégral)**

d) $E[S_i(t)]$, $V[S_i(t)]$.

1.2 Pour chacune des valeurs de t choisies précédemment, et en utilisant les valeurs simulées obtenues en 1.1 ...

ecdf a) Estimer les fonctions de répartition $F_{S_i(t)}(x)$, en dresser les graphiques et les comparer.

b) Pour $\alpha=0.95,0.975,0.99$, estimer les valeurs du $\mathrm{VaR}\{S_i(t);\alpha\}$ et du $\mathrm{TVaR}\{S_i(t);\alpha\}$ et les comparer, sachant que

$$\mathrm{VaR}\{S_i(t);\alpha\}=\inf\{x\in\mathbb{R}^+\,|\,F_{S_i(t)}(x)\geq\alpha\} \ , \ \mathrm{TVaR}\{S_i(t);\alpha\}=E\left[S_i(t)\,|\,S_i(t)>\mathrm{VaR}\{S_i(t);\alpha\}\right]$$

pour chaque s_i

2. Considérer le processus du total des réclamations escomptées $\{Z(t);t\geq 0\}$ tel que

$$Z(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} e^{-\delta S_n} X_n \quad ,$$

où,

voir code intro2

- $\{N(t);t\geq 0\}$ est un processus de renouvellement ordinaire (autre que Poissonnien).

on choisi notre force d'intérêt net

- S_n est le moment où se produit la k-ième réclamation (et $T_n = S_n - S_{n-1}$).
- $\delta > 0$ est une force d'intérêt, nette d'inflation.
- $\{X_n ; n\in\mathbb{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires positives iid représentant les réclamations sans inflation.

2.1 Après avoir fixé la valeur de δ et les distributions de T_n et de X_n de telle sorte que ces variables sont indépendantes, vous simulez la variable aléatoire $Z(1)$ un nombre suffisant de fois de façon à pouvoir estimer différentes quantités reliées à cette variable. Vous refaites cette démarche pour $t = 2,3,4,5$. Ainsi, pour chacune des valeurs de t considérées ...

a) Comparer les estimés obtenus pour $E[Z(t)]$ et $V[Z(t)]$, avec leurs valeurs théoriques.

b) Estimer les fonctions de répartition $F_{Z(t)}(x)$, en dresser les graphiques et les comparer.

c) Pour $\alpha = 0.95, 0.975, 0.99$, estimer les valeurs du VaR$\{Z(t);\alpha\}$ et du TVaR$\{Z(t);\alpha\}$ et les comparer.

2.2 Supposons que les vecteurs aléatoires (X_n, T_n) sont iid et que la distribution conjointe de ces variables est donnée par la fonction de répartition suivante :

2.1:indépendant
2.2:dépendant

$$F_{X,T}(x,y)=F_X(x)F_T(y)\left\{1+\theta\left[1-F_X(x)\right]\left[1-F_T(y)\right]\right\} \quad , \quad -1\leq\theta\leq 1 \quad .$$

Avec le δ choisi en 2.1, ainsi que les distributions de T_n et de X_n choisies en 2.1, vous fixez d'abord une valeur de $\theta\neq 0$ puis vous simulez les valeurs conjointes de la distribution (X_n, T_n) de sorte à répondre aux mêmes questions qu'en 2.1 .