

Équipe 29

Nicholas Langevin  
111 184 631

PROCESSUS STOCHASTIQUE  
ACT-2009

## **Devoir**

Travail présenté à  
Ghislain Léveillé

École d'actuariat  
Université Laval  
21 novembre 2018

# Table des matières

<b>Question 1</b>	<b>2</b>
1.1 . . . . .	2
A) . . . . .	2
B) . . . . .	4
C) . . . . .	4
D) . . . . .	5
1.2 . . . . .	6
A) . . . . .	6
B) . . . . .	7
<b>Question 2</b>	<b>9</b>
2.1 . . . . .	9
A) . . . . .	9
B) . . . . .	9
C) . . . . .	9
2.2 . . . . .	9

# Question 1

## 1.1

Pour cette question, les choix suivant on été fait :

$$\begin{aligned}\Lambda &\sim \Gamma(\alpha_1 = 3, \beta_1 = 1/2) \\ X &\sim \Gamma(\alpha_2 = 2, \beta_2 = 1500)\end{aligned}$$

tels que :

$$E[\Lambda] = \alpha \cdot \beta = 1.5 = \lambda$$

**A)**

$\{N_1(t); t \geq 0\}$  est un processus de Poisson homogène, avec taux  $\lambda = 1.5$ . La probabilité d'obtenir  $n$  événement dans un intervalle de temps  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  est données par :

$$\Pr(N_1(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (1.1)$$

L'équation 1.1 permet de trouver les valeurs théorique de ses probabilités. La première partie du tableau 1.1 comporte ses valeurs. La deuxième partie comporte le résultat de ses valeurs obtenue a l'aide de 100 000 simulations pour chacun des  $t$ . On remarque que les valeurs simulées sont exact pour les 2 première décimales. Certaine différence commence à apparaître vers la 3<sup>e</sup> décimales, mais les approximations reste très bonne. Pour augmenter la précision, il aurait été possible d'effectuer plus de simulations avec plus de puissance machine.

TABLEAU 1.1 –  $\Pr(N_1(t) = n)$ 

Valeur théorique					
n	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
0	0.2231	0.0498	0.0111	0.0025	0.0006
1	0.3347	0.1494	0.0500	0.0149	0.0041
2	0.2510	0.2240	0.1125	0.0446	0.0156
3	0.1255	0.2240	0.1687	0.0892	0.0389
4	0.0471	0.1680	0.1898	0.1339	0.0729
5	0.0141	0.1008	0.1708	0.1606	0.1094
6	0.0035	0.0504	0.1281	0.1606	0.1367
7	0.0008	0.0216	0.0824	0.1377	0.1465
8	0.0001	0.0081	0.0463	0.1033	0.1373
9	0.0000	0.0027	0.0232	0.0688	0.1144
10	0.0000	0.0008	0.0104	0.0413	0.0858
Valeurs simulées					
n	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
0	0.2237	0.0485	0.0115	0.0025	0.0005
1	0.3355	0.1500	0.0488	0.0148	0.0043
2	0.2502	0.2255	0.1125	0.0443	0.0152
3	0.1251	0.2232	0.1677	0.0890	0.0385
4	0.0478	0.1676	0.1923	0.1340	0.0723
5	0.0136	0.1014	0.1703	0.1605	0.1104
6	0.0032	0.0508	0.1270	0.1611	0.1384
7	0.0008	0.0216	0.0824	0.1378	0.1467
8	0.0001	0.0078	0.0461	0.1041	0.1382
9	0.0000	0.0026	0.0232	0.0677	0.1140
10	0.0000	0.0006	0.0112	0.0416	0.0850

\*Valeurs obtenue à l'aide de 100 000 simulations.

$\{N_2(t); t \geq 0\}$  est un processus de Poisson homogène conditionnel avec taux aléatoire  $\Lambda$ . Comme défini au début de la question,  $\Lambda$  suit une distribution gamma. La probabilité d'obtenir  $n$  événement dans un intervalle de temps  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  est données par :

$$\Pr(N_2(t) = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot f_\Lambda(\lambda) d\lambda \quad (1.2)$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}} e^{-\lambda/\beta_1} d\lambda \quad (1.3)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta_1^n}{\Gamma(\alpha_1)t^{\alpha}n!} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha+n)} \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^{\alpha+n} e^{-t\lambda/\beta_1} d\lambda \quad (1.4)$$

**B)**

L'espérance du nombre d'événement survenant dans l'intervalle  $[0, t]$  pour le 1<sup>e</sup> processus est donné par l'équation 1.5, alors que l'espérance du 2<sup>e</sup> processus est donné par l'équation 1.6. Les processus de poisson détermine le nombre d'événement survenue alors que la V.A.  $X$  représente la sévérité pour chaque événement. Tels que mentionné plus haut, la sévérité suit aussi une loi gamma. L'espérance des coûts pour une réclamation est alors donné par l'équation 1.7.

$$E[N_1(t)] = \lambda t \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} E[N_2(t)] &= E[E[N_2(t)|\Lambda]] \\ &= tE[\Lambda] \\ &= t\alpha_1\beta_1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$E[X] = \alpha_2\beta_2 \quad (1.7)$$

**C)**

$$\text{Var}(N_1(t)) = \lambda t \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_2(t)) &= E[\text{Var}(N_2(t)|\Lambda)] + \text{Var}(E[N_2(t)|\Lambda = \lambda]) \\ &= tE[\Lambda] + t^2\text{Var}(\Lambda) \\ &= t\alpha_1\beta_1 + t^2\alpha_1\beta_1^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\text{Var}(X) = \alpha_2\beta_2^2 \quad (1.10)$$

TABLEAU 1.2 –  $E[N_i(t)], E[X]$ 

Valeurs théorique					
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$E[N_1(t)]$	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5
$E[N_2(t)]$					
$E[X]$	3000.0				
Valeurs simulées					
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$E[N_1(t)]$	1.4965	2.9997	4.5065	6.0041	7.4885
$E[N_2(t)]$					
$E[X]$	3003.4				

\*Valeurs obtenue à l'aide de 100 000 simulations.

TABLEAU 1.3 –  $\text{Var}(N_i(t)), \text{Var}(X)$ 

Valeurs théorique					
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$\text{Var}(N_1(t))$	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5
$\text{Var}(N_2(t))$					
$\text{Var}(X)$	4500000				
Valeurs simulées					
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$\text{Var}(N_1(t))$	1.4936	2.9798	4.5253	6.0038	7.4334
$\text{Var}(N_2(t))$					
$\text{Var}(X)$	4507109				

### D)

La variable aléatoire  $S_i(t)$  représente les coûts pour un risque selon l'approche Fréquence-Sévérité. La fréquence sur un intervalle de temps  $[0, t]$  est modélisée par le  $i^{\text{e}}$  processus de Poisson selon les 2 définitions données plus haut. De son côté, la sévérité est modélisée par une loi de gamma. La v.a.  $S_i(t)$  est alors définie par :

$$S_i(t) = \sum_{n=1}^{N_i(t)} X_n \quad (1.11)$$

Il est important de préciser qu'avec cette approche, la sévérité est supposée indé-

pendant de la fréquence et identiquement distribuer. Ainsi, les coûts moyens de plus que la variance de ceux-ci sont représenté par :

$$\begin{aligned}
 E[S_i(t)] &= E \left[ \sum_{n=1}^{N_i(t)} X_n \right] \\
 &= E \left[ E \left[ \sum_{n=1}^{N_i(t)} X_n \middle| N_i(t) \right] \right] \\
 &\stackrel{\text{i.i.d}}{=} E[N_i(t)] E[X_n] \\
 &= E[N_i(t)] E[X_n] \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(S_i(t)) &= E[\text{Var}(S_i(t)|N_i(t))] + \text{Var}(E[S_i(t)|N_i(t)]) \\
 &\stackrel{\text{i.i.d}}{=} E[N_i(t)\text{Var}(X_n)] + \text{Var}(N_i(t)E[X_n]) \\
 &= E[N_i(t)]\text{Var}(X_n) + E^2[N_i(t)]\text{Var}(X_n) \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

TABLEAU 1.4 –  $E[S_i(t)]$ ,  $\text{Var}(S_i(t))$ 

Valeurs théorique					
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$E[S_1(t)]$	4500.00	9000.00	13500.00	18000.00	22500.00
$E[S_2(t)]$					
$\text{Var}(S_1(t))$	20250000	40500000	60750000	81000000	101250000
$\text{Var}(S_2(t))$					
Valeurs simulées					
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$E[S_1(t)]$	4494.83	9012.77	13530.15	18030.01	22493.86
$E[S_2(t)]$					
$\text{Var}(S_1(t))$	20252408	40402835	61088884	81400200	101564244
$\text{Var}(S_2(t))$					

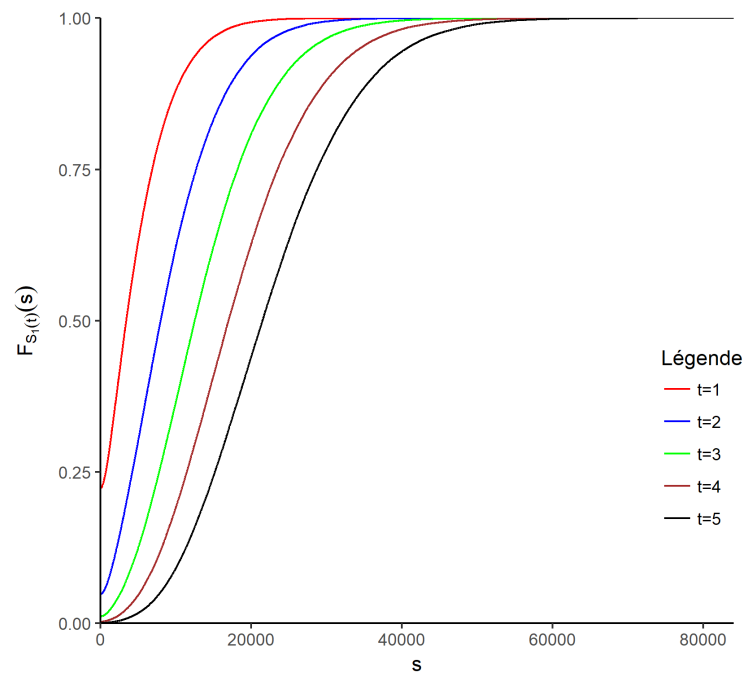
## 1.2

### A)

Le graphique 1.1 représente les fonctions de répartition empirique du 1<sup>er</sup> processus. Plus  $t$  est petit, plus la masse à 0 est grande. Ce constat est normal puisque

plus l'intervalle  $[0, t]$  est petit, plus il y a de chance d'avoir aucune réclamation. En effet, avec un  $t = 5$ , la probabilité d'observer des coûts égaux à 0 est presque nulle. Dans le même sens d'idée, une augmentation de l'intervalle  $[0, t]$  a pour effet de déplacer la densité vers la droite, c'est à dire vers des coûts plus élevés.

FIGURE 1.1 – Fonction de répartition empirique de  $S_1(t)$



## B)

### Équation VaR

Le tableau 1.5 présente les valeurs simulées de la *Value at Risk* (VaR) pour le 1<sup>e</sup> processus de poisson pour 3 différentes valeurs de  $\alpha$ . Comme observé dans la section précédente, plus l'intervalle  $[0, t]$  augmente, plus les valeurs sont en moyenne élevées du à l'augmentation de la fréquence. Il est donc encore logique, pour un même niveau  $\alpha$ , d'obtenir une VaR plus élevée pour une valeur de  $t$  plus élevées. Le tableau 1.6 présente les valeurs simulées de la *Tail Value at Risk* (TVaR) pour le 1<sup>e</sup> processus de poisson pour 3 différentes valeurs de  $\alpha$ . L'avantage de cette mesure de risque est qu'elle donne une information sur la queue de la distribution.



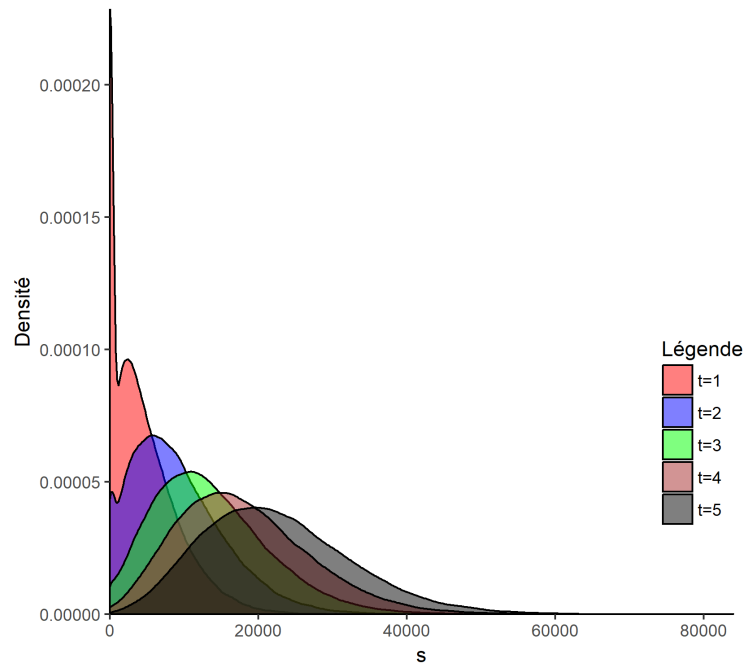
Encore une fois, plus  $t$  augmente, plus la TVAR est grande. Le graphique 1.2 permet de visualisé les queues des distributions qui augmente avec  $t$ .

TABLEAU 1.5 –  $VaR_\alpha\{S_1(t)\}$ 

$\alpha$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
95.0%	13320.86	20956.17	27909.60	34401.73	40614.64
97.5%	15795.33	24034.05	31485.11	38337.27	44959.93
99.0%	18774.93	27665.03	35879.80	43285.67	50109.22

TABLEAU 1.6 –  $TVaR_\alpha\{S_1(t)\}$ 

$\alpha$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
95.0%	16743.80	25148.66	32847.72	39852.71	46492.07
97.5%	19070.86	27980.19	36193.06	43533.68	50452.44
99.0%	22091.67	31468.25	40415.74	48232.16	55239.44

FIGURE 1.2 – Densité de  $S_1(t)$ 

## **Question 2**

**2.1**

**A)**

**B)**

**C)**

**2.2**