

# Feuille de formules

## Processus Stochastique

### ACT-2009

Nicholas langevin

October 10, 2018

## Chapitre 2

### Propriété des chaîne de markov

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, x_1 = i_1, x_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

i.e. seulement le dernier état est déterminant.

### Chaîne de markov homogène

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

### Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

### Probabilité non-conditionnelle

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$

### Classification des états

#### Accessibles

j est accessibles à partir de i si:  $p_{ij}^{(n)} > 0$

#### Communicants

i et j sont accessibles réciproquement:  $i \leftrightarrow j$

### Propriétés des états Communicants

1. Réflexibilité: L'états i communique toujours avec lui même.

$$p_{ii}^{(0)} = p(X_0 = i | X_0 = i) = 1$$

2. Symétrie: Si l'état i communique avec l'état j, alors j communique avec i.

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$$

3. Transitivité: Si l'état i communique avec l'état j et l'état j communique avec l'état k, alors i communique avec k.

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

## États récurrents(persistants) et transients

Sois  $f_{ii}$  la prob que l'état  $i$  revienne éventuellement à cette état, alors dans une chaîne de markov homogène l'état  $i$  est dit:

- Récurrent ssi

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow f_{ii} = 1$$

- transient ssi

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Leftrightarrow f_{ii} < 1$$

**Corollaire:** Si l'état  $i$  est récurrent et communique avec  $j$ , alors  $j$  est récurrent

**Note:** La récurrence et la transience sont des propriétés de classe.

**Note:** Dans une chaîne de markov avec un nombre ( $m$ ) fini d'état, il existe au moins un état de récurrence.

**Note:** Toute chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini n'a que des états récurrent.

## État absorbant

Un état récurrent  $i$  est dit absorbant ssi  $p_{ii} = 1$ , c'est à dire si une fois atteint l'état  $i$ , on ne peut plus en sortir.

## Probabilité limite

### Définition 1

Un état  $i$  est dit avoir période  $d$  si:

$$d = P.G.C.D.\{n \in \mathbb{N} | p_{ii}(n) > 0\}$$

**Apériodique:** si  $d = 1$  l'état  $i$  est dite apériodique

**Périodicité:** La période d'une classe est une propriété de classe, i.e. toutes les états d'un même classe ont la même période.

### Définition 2

Un état  $i$  est dit **positif récurrent** si, à partir de l'état  $i$ , le temps moyen de retour du processus à l'état est fini. Autrement, l'état  $i$  est nul récurrent.

### Définition 3

Un état  $i$  est dit être ergodique s'il est à la fois apériodique(def (1)) et positif récurrent(def (3)).

## Théorème des probabilité stationnaire

Soit une matrice irréductible et ergodique

- $\lim_{x \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty, \forall j \in \mathbb{N}$
- $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ii}, \forall j \in \mathbb{N}$
- $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$  et  $\pi_j$  sont uniques
- Sois  $\mu_{ii}$ , le temps moyen pris par le processus pour passer de l'état  $i$  à l'état  $i$ , alors

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$$

## Proportion de temps

Soit  $r_i$  la proportion de temps où le processus dans l'état  $i$ , alors

$$r_j = \sum_{i=0}^w r_i p_{ij}, j = 0, 1, 2, \dots, w \text{ et } \sum_{i=0}^w r_i = 1$$

où  $w$  est le nombre d'état du processus de Markov

**Note:** Il faut alors trouver l'unique solution du système d'équation linéaire.