Feuille de formules
Processus Stochastique
ACT-2009

Nicholas langevin

October 13, 2018

Chapitre 2

Propriété des chaîne de markov

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1, x_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

i.e. seulement le dernier état est déterminant.

Chaine de markov homogène

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Probabilité non-conditionelle

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$

Classification des états

Accessibles

j est accessibles à partir de i si: $p_{ij}^{(n)} > 0$

Communicants

i et j sont accessibles réciproqument: $i \leftrightarrow j$

Propriétés des états Communicants

1. Réflexibilité: L'états i communique toujours avec lui même.

$$p_{ii}^{(0)} = p(X_0 = i | X_0 = i) = 1$$

2. Symétrie: Si l'état i communique avec l'état j, alors j communique avec i.

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$$

3. Transitivité: Si l'état i communique avec l'état j et l'état j communique avec l'état k, alors i communque avec k.

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurents(persistants) et transients

Sois f_{ii} la prob que l'état i revienne éventiellement à cette état, alors dans une chaîne de markov homogène l'état i est dit:

- Récurrent ssi
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow f_{ii} = 1$$
- transient ssi
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Leftrightarrow f_{ii} < 1$$

Corollaire: Si l'état i est récurrent et communique avec j, alors j est récurrent
Note: La récurence et la transience sont des propriétés de classe.
Note: Dans une chaîne de markov avec un nombre (m) fini d'état, il existe au moins un état de récurence.
Note: Toute chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini n'a que des états récurrent.

État absorbant

Un état récurrent i est dit absorbant ssi $p_{ii} = 1$, c'est a dire si une fois atteint l'état i, on ne peut plus en sortir.

Probabilité limite

Définition 1

Un état i est dit avoir **période** d si:

$$d = P.G.C.D.\{n \in \mathbb{N} | p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Apériodique: si $d = 1$ l'état i est dite apériodique
Périodicité: La période d'un classe est un propriété de classe, i.e. toutes les états d'un même classe on la même période.

Définition 2

Un état i est dit **positif récurrent** si, à partir de l'état i, le temps moyen de retour du processus à l'état est fini. Autrement, l'état i est nul récurrent.

Définition 3

Un état i est dit être **ergodique** s'il est à la fois apériodique(def (1)) et positif récurrent(def (2)).

Théorème des probabilité stationnaire

Si la chaîne de markov est **irréductible** et **ergodique**, alors p^n converge vers une matrice dont chaque ligne est l'unique distribution stationnaire π

- $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty \, , \forall j \in \mathbb{N}$
- $\pi_j = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ii} \, , \forall j \in \mathbb{N}$
- $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ et π_j sont uniques
- $p(x_n = \pi_j) = \pi_j \, , \forall n, j \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Sois μ_{ii}, le temps moyen(E[n]) pris par le processuss pour passer de l'état i à l'état i, alors
$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}} \, , \mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

Proportion de temps

Soit r_i la proportion de temps où le processus dans l'état i, alors

$$r_j = \sum_{i=0}^{w} r_i p_{ii} \ , j = 0, 1, 2, ..., w \ \textbf{et} \sum_{i=0}^{w} r_i = 1$$

où w est le nombre d'état du processus de Markov
Note: Il faut alors trouver l'unique solution du système d'équation linéaire.

Application

Système Bonus-Malus

$$p_{ij} = \sum_{k:c(i,k)} p(K = k)$$

où $k \sim$ loi de probabilité

Processus de branchement

$$p(x_{k+1}|x_1 = i) = p(x_k = j)^i = (\pi_j)^i$$

Étude de crédit

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{w} p_{ik} f_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}}$$

Chapitre 3

Processus de dénombrement

Definition I

Une processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$ si:

1. N(0) = 0

2. Le processus a des accroissements indépendant, i.e. pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ les accroissements $[N(t_3) - N(t_2)]$ et $[N(t_2) - N(t_1)]$ sont stochastique indépendant.

3. Le nombre d'événement d'un interval de n'importe qu'elle interval suit une Poisson(λt)

$$p([N(t - s) - N(s)] = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Definition II

1. $N(0) = 0$

2. Le processus a des accroissements indépendant et stationnaire

3. $p(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$

4. $p(N(h) \geq 2) = o(h)$

   avec $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

Propriétés

- Sois T_i le temps entre le $i^e - 1$ événement et le i^e événement

$$T_1, T_2, ..., T_i \sim \exp(\lambda) \text{ et sont i.i.d}$$

- Sois S_n le moment où se produit le n^e événement

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim \text{gamma}(n, \lambda)$$

- $N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t \Rightarrow p(S_n \leq t) = p(N(t) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)}{i!} e^{-\lambda t}$