Mathématique Actuarielle Vie I
ACT-2004
Feuille de formules

Nicholas Langevin

28 septembre 2018

Mathématique Actuarielle Vie I
ACT-2004
Feuille de formules

Distributions de survie

X : L'âge au décès d'un nouveau-né.

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x.

$T_x = (X - x | X \geq x)$

Fonction de densité

$f_{t_x}(x) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$

Fonction de répartition

$${}_t q_x = F_{t_x}(t) = \frac{S_x(x) - S_x(x+t)}{S_x(x)}$$

$${}_{t|u} q_x = Pr(t \leq t_x \leq t = u) = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}$$

Fonction de survie

$${}_t p_x = S_{t_x}(x) = \frac{S_x(x+t)}{S_x(x)} = \exp\left\{ -\int_0^t \mu_{x+s} ds \right\}$$

Force de mortalité

$$\mu_x = \lim_{t \to 0} \frac{{}_t q_x}{t} = -\frac{d}{dx} ln(S_x(x))$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dx} ln({}_t p_x)$$

Table de mortalité

ℓ_0 : Nombre initial d'individus dans la cohorte.

$I_j(x)$: Indicateur de survie du j^e individus jusqu'a l'âge x.

$\mathscr{L}_x$: v.a du nombre de survivant jusqu'a l'âge x.

${}_n\mathscr{D}_x$: Nombres de décès entre l'âge x et $x+n$

$$\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_0} I_j(x) \text{ où } I_j(x) \sim \text{Bin}(1, S_x(x))$$

$$\ell_x = E[\mathscr{L}_x] = \sum_{j=1}^{\ell_0} S_x(x) \qquad {}_n d_x = \int_0^n \ell_{x+t} \cdot \mu_{x+t} dx$$

$${}_n\mathscr{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}(x+n) \qquad {}_n d_x = E[{}_n\mathscr{D}_x] = \ell_x - \ell_{x+n}$$

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_{t|u} q_x = \frac{{}_u d_{x+t}}{\ell_x}$$

Hypothèse d'interpolation

DUD : Distribution uniforme des décès

$\ell_{x+t} = (1-t) \cdot \ell_x + t \cdot l_{x+1}$

FC : Hypothèse de force constante

$\ell_{x+t} = \ell_x^{(1-t)} \cdot l_{x+1}^{(t)}$

BAL : Hypothèse de Balducci

$$\ell_{x+t} = \frac{\ell_x \cdot l_{x+1}}{(1-t) \cdot l_{x+1} + t \cdot \ell_x}$$

Formules utiles :

1) $x \in \mathbb{N}$

2) $t \in]0,1[$

3) $x < x+t < x+1$

	DUD	FC	BAL
${}_t q_x$	$t \cdot q_x$	$1 - p_x^t$	$1 - \frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_t p_x$	$1 - t \cdot q_x$	p_x^t	$\frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_1 d_x$	$t \cdot {}_n d_x$	$\ell_x(1-p_x^t)$	$\ell_x\left(1 - \frac{p_x}{1-(1-t)q_x}\right)$
$f_{t_x}(t)$	q_x	$-p_x^t ln(p_x)$	$\frac{p_x}{(1-(1-t)q_x)^2}$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-t \cdot q_x}$	$-ln(p_x)$	$\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$

Espérance de vie résiduel

$$\mathring{e}_x = E[t_x] \int_0^{\omega-x} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\, dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x\, dt$$

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \left(\int_0^n t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\, dt \right) + n_n p_x = \int_0^n {}_t p_x\, dt$$

Durée de vie résiduel entière

$Pr(k_x = k) = Pr(\lfloor t_x \rfloor = k) = {}_{k|} q_x$