

Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

Où les dénominateurs sont à être interprété en REGEX.

Pour exemple, pour la première c'est soit le **taux d'escompte** pour une **annuité due** ou le taux d'intérêt pour une immédiate.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{(i^{(m)}) \left(\frac{1}{|d^{(m)}|} \right) (1+i)}$$

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} - nv^n}{(d^{(m)}|i)} \quad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{n - d_{\overline{n}|i}^{(m)}}{(d^{(m)}|i)}$$

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$a(t) = (1+i)^t$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$= e^{\int_0^t \delta_s ds} = (1-d)^{-t}$$

Sommations

$$\sum_{k=m}^n r^k = \frac{1 - r^{n-m+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 Survie et mortalité

1.2 Probabilités de survie et de décès

X : Âge au décès d'un nouveau-né

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x .

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$

$$f_{T_x} = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

$$F_{T_x} = {}_t q_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$

$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_{t|u} q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t} = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x$$

$${}_{t+y} q_x = {}_t q_x + {}_t p_x \cdot {}_y q_{x+t}$$

$$S_{T_x}(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+s} ds \right\} = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \mu_s ds \right\}$$

$$T_x \in \mathbb{R}^+$$

K_x : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge x .

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_k | p_x$$

$$K_x \in \mathbb{Z}^+$$

μ_x : Force de mortalité pour (x)

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = - \frac{\partial}{\partial x} (\ln(S_X(x)))$$

$$\mu_{x+t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\ln({}_t p_x))$$

$$\alpha \mu_{x+s} + h(s) = ({}_t p_x)^\alpha e^{-\int_0^t h(s) ds}$$

R_x : Durée de vie résiduelle fractionnaire d'un individu d'âge x .

$$R_x = T_x - K_x$$

$$R_x \in [0, 1)$$

$J_x^{(m)}$: Nombre de m-ème d'années vécus durant l'année du décès.

$$J_x^{(m)} \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

$$J_x^{(m)} = \lfloor m R_x \rfloor$$

$H_x^{(m)}$: Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x exprimé en m-ème années.

$$H_x^{(m)} = \lfloor m T_x \rfloor$$

$$H_x^{(m)} \in \mathbb{Z}^+$$

1.3 Loïs de mortalité

Loi de Moivre

Pas très réaliste car assume une chance **uniforme** de mourir n'importe quand alors qu'en réalité une personne âgée de 90 ans a des plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans.

C'est la seule loi avec un **support fini**.

$$X \sim \text{Unif}(0, \omega)$$

$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, 0 \leq x \leq \omega$$

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, 0 \leq x \leq \omega$$

$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$

$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x}, 0 \leq t \leq \omega - x$$

Loi Exponentielle

$$X \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_X(x) = e^{-\mu x}, x \geq 0$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$${}_t p_x = e^{-\mu t}, t \geq 0$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A, B, c)$$

A : risque d'accident

Bc^x : risque lié au vieillissement

$$\mu_x = A + Bc^x, x \geq 0$$

$${}_t p_x = e^{-At - \frac{Bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)}, t \geq 0$$

Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B, c)$$

Loi de Weibull

$$X \sim \text{Wei}(k, n)$$

$$\mu_x = kx^n, x \geq 0$$

$${}_t p_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]}, t \geq 0$$

1.4 Tables de mortalité

ℓ_0 : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

ℓ_x : Nombre d'individu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x .

${}_n d_x$: Nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$\ell_x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t | u q_x = \frac{u d_{x+t}}{\ell_x}$$

1.5 Mortalité sélecte et ultime

$[x]$: âge de la sélection (*pas une valeur entière*).

$[x] + j$: âge atteint où j est le temps écoulé depuis la sélection.

r : **Période sélecte** de durée r durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \dots$$

$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]r+j} p_{[x]} = \ell_{[x]r} p_{[x]j} p_{x+r}$$

1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Pour $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{Z}$.

Distribution uniforme des décès (DUD)

Décès répartis uniformément sur l'année.

$$S_X(x+t) = (1-t) \times S_X(x) + t \times S_X(x+1), \quad t \in [0, 1]$$

$$S_X(x+t) = \frac{(c-t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x+1), \quad t \in [0, c]$$

les conditions pour t et x appliquent aux 3 équations suivantes

$${}_t q_x = \left(\frac{t}{c}\right) {}_c q_x, \quad t \in [0, c]$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c} {}_c q_x}{1 - \frac{t}{c} {}_c q_x}, \quad x \in \{0, c, 2c, \dots\}$$

$${}_y q_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right) {}_c q_x}{1 - \left(\frac{t}{c}\right) {}_c q_x}, \quad y \in [0, c-t]$$

On note que la force de mortalité à la même formule que la fonction de survie car avec **DUD**, la force est uniformément appliquée.

Force constante (FC)

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{(1-t)} + S_X(x+1)^t, \quad t \in [0, 1]$$

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{\frac{(c-t)}{c}} + S_X(x+1)^{\frac{t}{c}}, \quad t \in [0, c]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c} \ln({}_c p_x), \quad t \in [0, c]$$

$${}_y q_{x+t} = 1 - ({}_c p_x)^{\frac{y}{c}}, \quad t \in [0, c], y \in [0, c-t]$$

Sous :

DUD : $K_x \perp R_x$

FC : $K_x \perp R_x$ ssi $p_{x+k} = p_x \forall k \in \{0, 1, \dots\}$

1.7 Caractéristiques individuelles

Lorsque $0 \leq x < \omega$, défini les fonctions suivantes pour 2 cas possible.

Utilisant T_x

Si nous connaissons déjà la fonction de répartition/densité de T_x on peut trouver :

Espérance : Espérance de la durée de vie future complète d'une personne d'âge x .

$$E[T_x] = \bar{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x d$$

Variance

$$V(T_x) = \int_0^{\omega-x} t^2 {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} 2t {}_t p_x dt - (\bar{e}_x)^2$$

Médiane : Le nombre d'années avant que la population d'âge x aujourd'hui diminue de moitié.

Pour la trouver il suffit d'isoler :

$$Pr[T_x \leq m(x)] = {}_{m(x)} q_x = \frac{1}{2}$$

Mode : Le moment où la population d'âge x aujourd'hui connait le plus de décès.

Pour le trouver, il faut le :

$$\arg \max_t {}_t p_x \mu_{x+t}$$

On peut utiliser la dérivée pour le trouver, mais il faut se méfier des bornes et que le résultat est un **maximum**.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

Utilisant K_x

Si nous connaissons que la table de mortalité, les seules caractéristiques disponibles sont celles de K_x .

Pour obtenir celles de T_x il faut poser un hypothèse pour les âges fractionnaires.

Espérance : Espérance du nombre d'années entières à vivre pour une personne d'âge x (espérance de vie abrégée).

$$E[K_x] = e_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k {}_k q_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} k {}_k p_x$$

Variance :

$$V(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 {}_k q_x - (e_x)^2$$

Médiane : Solution tel que :

$$Pr[K_x < m] < \frac{1}{2}$$

$$Pr[K_x \leq m] \geq \frac{1}{2}$$

Mode :

$$\arg \max_k Pr[K_x = k]$$

Liens entre les fonctions pour K_x et T_x :

$$\bar{e}_x = E[T_x] = E[K_x] + E[R_x]$$

$$\stackrel{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2}$$

$$V(T_x) = V(K_x + R_x)$$

$$\stackrel{!}{=} V(K_x) + V(R_x)$$

$$\stackrel{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12}$$

Variables censurées

L'espérance de vie future **d'ici** n années d'un assuré d'âge x (entre les âges x et $x+n$).

Espérance de vie **complète** temporaire n années .

$$\bar{e}_{x:\overline{n}|} = E[T_x \wedge n]$$

$$= \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt + n {}_n p_x$$

$$= \int_0^n {}_t p_x dt, \quad 0 \leq x < \omega,$$

$$0 \leq n \leq \omega - x$$

Espérance de vie **abrégée** temporaire n années.

$$e_{x:\overline{n}|} = E[K_x \wedge n]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k {}_k q_x + n {}_n p_x$$

$$= \sum_{k=1}^n k {}_k p_x, \quad 0 \leq x < \omega - 1$$

$$n \in \{0, 1, \dots, \omega - x - 1\}$$

Variables tronquées

L'espérance de vie future **conditionnelle** au **décès** dans les n prochaines années d'un assuré d'âge x (entre les âges x et $x+n$).

$$E[T_x | T_x \leq n] = \frac{\bar{e}_{x:\overline{n}|} - n {}_n p_x}{n q_x}$$

$$E[K_x | K_x \leq n] = \frac{e_{x:\overline{n+1}|} - (n+1) {}_{n+1} p_x}{n+1 q_x}$$

$$E[T_x | T_x \leq 1] = a(x) = \frac{e_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\bar{e}_{x:\overline{n}|} = E[T_x | T_x \leq n] {}_n q_x + n {}_n p_x$$

$$= E[K_x | K_x \leq n] {}_{n+1} q_x + (n+1) {}_{n+1} p_x$$

$$\stackrel{!}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{n q_x}{2}$$

Formules de récurrence

$$\bar{e}_{x:\overline{n}|} = \bar{e}_{x:\overline{n-1}|} + m p_x \bar{e}_{x+m:\overline{n-n-1}|}, \quad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$e_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{n-1}|} + m p_x e_{x+m:\overline{n-n-1}|}, \quad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$m, n, (\omega - x) \in \mathbb{W}$$

$$e_{x+n} = p_{x+n}(1 + e_{x+n+1}) = e_{x+n:\overline{1}|} + p_{x+n} e_{x+n+1}$$

1.8 Caractéristiques de groupe

$T^{(j)}$: v.a. de la jème vie, $j \in \{1, \dots, \ell_a\}$

$$\mathcal{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T^{(j)} > x-a\}}$$

$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}}$$

\mathcal{L}_x : v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x .

$$E[\mathcal{L}_x] = \ell_x$$

$$\mathcal{L}_x \sim \text{Bin}(\ell_0, {}_x p_0)$$

${}_n\mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$E[{}_n\mathcal{D}_x] = {}_n d_x$$

$${}_n\mathcal{D}_x \sim \text{Bin}(\ell_0, {}_x|n q_0)$$

$${}_n\mathcal{D}_x = \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{x+n}$$

On peut ensuite généraliser $\forall x \geq a$

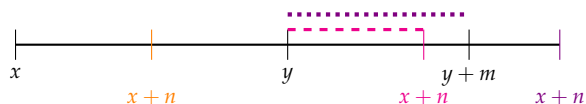
$$\mathcal{L}_x \sim \text{Bin}(\ell_a, {}_{x-a} p_a)$$

$${}_n\mathcal{D}_x \sim \text{Bin}(\ell_a, {}_{x-a}|n q_a)$$

Avec les sommations on trouve :

$$\text{Cov}({}_n\mathcal{D}_x, {}_m\mathcal{D}_y) =$$

$$\begin{cases} -x-a|n q_a \cdot y-a|m q_a, & x+n \leq y \\ y-a|x+n-y q_a - x-a|n q_a \cdot y-a|m q_a, & y < x+n \leq y+m \\ y-a|m q_a - x-a|n q_a \cdot y-a|m q_a, & y+m \leq x+n \end{cases}$$



$$\text{Raccourci : Cov}(A, B) = E[A \cap B] - \frac{E[A]E[B]}{\ell_a}$$

2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

2.1 Notation et introduction

Fonctions

$a(T)$: Facteur d'accumulation.

$v(T)$: Facteur d'actualisation.

$$v(t) = \frac{1}{a(t)}$$

Z : v.a. de la valeur actualisée du montant payé selon les termes du contrat.

$$Z = b(T)v(f(T))$$

$b(T)$: Prestation prévue en fonction de T .

$f(T)$: Montant du paiement en fonction de T .

De plus, puisque $f(T)$ n'a pas d'importance lorsque $b(T) = 0$, on définit son domaine pour simplifier des interprétations plus tard.

$$f(t) \geq T$$

A : Pour simplifier la notation, on dénote la *prime unique nette* $E[Z]$, alias la **valeur actuarielle actualisée**, par $E[Z] = A$.

Prestations



bA_x Si quelque chose est payable c'est b .

$b(IA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.

$b(DA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Force, ou multiple j de la, d'intérêt δ

$$0 \leq \delta < 1 \text{ et } j \in \mathbb{Z}_+$$

${}^\delta A_x$ Évaluation avec **force** d'intérêt δ (*constante*).

$^j A_x$ Évaluation avec j **fois force** d'intérêt δ (*pas nécessairement constante*).

Période différée

${}_m|A_x$ Couverture débutant dans n années.

Donc si décède avant les m années, il n'y a pas de paiements.

Fréquence de variation

variation m fois par année

$$(I^{(m)}A)_x \text{ et } (D^{(m)}A)_x$$

(dé)croissance continue

$$(\bar{I}A)_x \text{ et } (\bar{D}A)_x$$

Type de variation de la prestation

A_x Constant

$(IA)_x$ Croissant arithmétiquement

$(DA)_x$ Décroissant arithmétiquement

Durée temporaire de la variation

$(I_{\overline{n}}A)_x$ Augmentation uniquement lors des n premières années de couverture.

Moment de paiement de la prestation de décès

\bar{A}_x Au moment du décès.

$A_x^{(m)}$ À la fin du $1/m$ année du décès.

Pour exemple, si $m = 12$ alors c'est payable à la fin du mois de décès.

Couverture temporaire n années

$A_{x:\overline{n}}^1$ Cas de décès.

$A_{x:\overline{n}}^{\bar{1}}$ Cas de survie.

$A_{x:\overline{n}}$ Les deux cas.

A_x En tout temps.

Principes de calcul de la prime pour un seul contrat

Principes pour calculer la prime (*unique*) à payer pour un contrat d'assurance :

1. $E[Z]$ **principe d'équivalence**
2. $E[Z] + k\sigma_Z$
3. ξ **quantile** de Z .

Interprétations pour un seul contrat

1. En moyenne l'assureur ne fait ni gains ni pertes
2. Lorsqu'il y a plusieurs contrats, le principe est équivalent au troisième mais lorsqu'il n'y en a qu'un seul alors il ne tient pas.
3. Plus petite prime π telle que $Pr(Z \geq \pi) = p$

Principes de calcul pour un portefeuille de plusieurs contrats

Généralement, on suppose les n différents contrats Z_j d'être identique et les vies à être indépendantes (*i.i.d.*).

$$S = \sum_{j=1}^n Z_j$$

1. Par le **principe d'équivalence**, $E[Z] = \pi$.
3. **Principe du quantile** $Pr(S \leq n\pi) \geq p$, où p est la **probabilité de solvabilité**.

Cependant, si les contrats ne sont *pas identique*, la **prime varie** selon le contrat.

1. Pour chaque type de contrat le **principe d'équivalence** ne change pas, $E[Z] = \pi$.
3. Pour le **Principe du quantile** on veut maintenant une **surchage égale** pour tous les contrats et donc le plus petite h telle que $Pr(S \leq h) \geq p$.

h : Prime collective sous le principe du quantile.

Doit trouver la surcharge θ qui, lorsqu'appliquée à chacune des espérances individuelles, donnera la prime collective au total.

θ : **Surchage**

$$\pi = (1 + \theta)E[Z]$$

$$h = (1 + \theta)E[S]$$

Suprime

$$\theta E[Z]$$

Puisque par défaut les Z_t sont (iid) on applique l'approximation normale avec $S \sim N(E[S] = nE[Z], V(S) = nV(Z))$.

$$\Phi^{-1} = z_{1-p}$$

$$z_{1-p} \leq \frac{\sqrt{n}(\pi - E[Z])}{\sigma_Z}$$

$$\pi \geq E[Z] + z_{1-p} \left(\frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}} \right)$$

$$n \geq \left(\frac{z_{1-p} \sigma_Z}{\pi - E[Z]} \right)^2 = n_p$$

Donc avec h on résoud $h = (1 + \theta)E[Z]$ et applique la surprime à tous les assurés.

Règle des moments

Lorsque $b_t^j = b_t, t \geq 0$, alias $b_t \in \{0, 1\}$, alors :

$$E[Z^j] @ \delta_t = E[Z] @ j \times \delta_t$$

Sinon on généralise :

$$E[Z^j] @ \delta_t = E[b \times Z^j] @ \delta_t$$

$$= b^j \times E[Z^j] @ j \times \delta_t$$

À noter que la règle est seulement applicable aux prestations nivelées et donc n'est pas applicable aux prestations (dé)croissantes.

2.2 Payable au moment du décès

Assurance-vie entière On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$A_x = v q_x + v p_x A_{x+1}$$

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans m années.

Assurance-vie temporaire On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Capital différé de n années On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après n années.

$$A_{x:\overline{n}|} = {}_n p_x v^n = {}_n E_x$$

où ${}_n E_x$ est le **facteur d'actualisation actuarielle**.

Assurance mixte On verse le capital à l'assuré si il décède dans les n prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_x + v^n {}_n p_x$$

Assurance différée de n années On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de m années¹

$${}_m | \bar{A}_x = \int_m^{\omega-x} v^t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= v^m {}_m p_x \int_0^{\omega-x-m} v^t p_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt$$

$$= {}_m E_x \bar{A}_{x+m}$$

$${}_m | A_x = \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)} q_x$$

$$= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_k p_{x+m} q_{x+m+k}$$

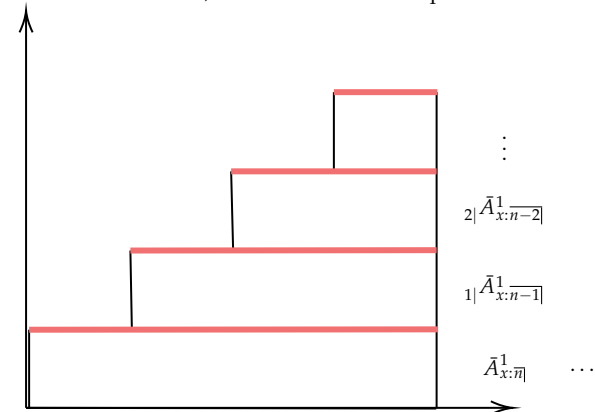
$$= {}_m E_x A_{x+m}$$

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$${}_m | \bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

Assurances à prestation variant arithmétiquement

Assurance Vie temporaire croissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.



Le capital **croît chaque année**.

La prestation est de 1 \$ pour la première année, 2 \$ pour la deuxième, etc.

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_1 | \bar{A}_{x:n-1}^1 + \dots + {}_{n-1} | \bar{A}_{x:1}^1$$

Le capital **croît m fois par année**.

Paye une prestation de $1/m$ \$ dans le premier $1/m$ d'année, $2/m$ \$ dans le deuxième, etc.

$$(I^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n \frac{([t \times m] + 1)}{m} v^t p_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital **croît pendant r années**.

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{r-1} {}_k | \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

Le capital est **différé de r années**.

$${}_r | (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = v^r {}_r p_x (I\bar{A})_{x+r:\overline{n}|}^1$$

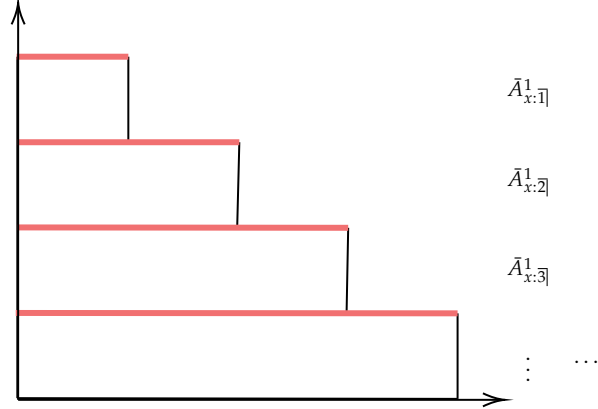
Le capital **croît continûment**.

Paye une prestation de t au moment du décès, tant qu'il se produise dans les n premières années.

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^n {}_s \bar{A}_{x:n-s}^1 ds$$

Assurance Vie temporaire décroissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.



Le capital **décroît chaque année** et donc la prestation doit nécessairement être une temporaire.

La prestation du début de la dernière année est de 1 \$, 2\$ pour le début de l'avant dernière année, etc.

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \int_0^{\omega-x} (n - [t]) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{A}_{x:1}^1 + \bar{A}_{x:2}^1 + \dots + \bar{A}_{x:n}^1$$

Le capital **décroît m fois par année**.

Paye une prestation de n \$ dans le premier $1/m$ d'année, $n - 1/m$ \$ dans le deuxième, etc. jusqu'à $1/m$ \$ durant le dernier $1/m$ d'année.

$$(D^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \int_0^n \left(n - \frac{1}{m} \times [mt] \right) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital est **différé de r années**.

$${}_r |(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \sum_{k=1}^n {}_r | A_{x:k}^1$$

Le capital **décroît continûment**.

Paye une prestation de initiale n \$ pour un décès immédiat, par la suite la prestation décroît linéairement jusqu'à 0 \$ au bout de n années.

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \int_0^n (n - t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^n \bar{A}_{x:s}^1 ds$$

Assurance mixte

L'assurance peut être mixte peut importe qu'elle soit croissante ou décroissante.

L'assurance **croissante** mixte n années, paierait n \$ en cas de survie (*peu importe la fréquence de la croissance*).

L'assurance **décroissante** mixte n années, paierait $1/m$ \$ en cas de survie si la prestation **décroît m fois par année**.

L'assurance **décroissante** mixte n années, paierait 1\$ en cas de survie si la prestation **décroît à chaque année** (*alias, $m = 1$*).

L'assurance **décroissante** mixte n années aurait une prestation de survie nulle si la prestation **décroît continûment**. Donc, en théorie une assurance décroissant continûment peut être mixte mais pas en pratique.

Comme pour les assurances à prestations constantes, une mixte est la combinaison d'une temporaire (*avec la même (dé)croissance*) et d'un capital différé.

$${}_r |(D\bar{A})_{x:\overline{n}} = {}_r |(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + A_{x:n+r}^1$$

Assurance Vie entière croissante On verse le capital au décès de l'assuré.

Le capital **croît chaque année**.

La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} (1 + [t]) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{A}_x + {}_1 | \bar{A}_x + {}_2 | \bar{A}_x + \dots$$

Le capital **croît continûment**.

La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} {}_s \bar{A}_x ds$$

Le capital **croît (annuellement) pendant n années**.

$$(I_m \bar{A})_x = (I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + n {}_n | \bar{A}_x$$

$$= \bar{A}_x + {}_1 | \bar{A}_x + \dots + {}_{n-1} | \bar{A}_x$$

Relations Assurance différée et assurance (dé)croissant continûment.

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = (I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + {}_1 E_x \left[(I\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}}^1 + \bar{A}_{x+1:\overline{n-1}}^1 \right]$$

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = (I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + n {}_n E_x$$

$$(I_m \bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = (I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + r {}_r | \bar{A}_{x:n-r}^1$$

$${}_r |(I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = v {}_r p_x (I\bar{A})_{x+r:\overline{n}}^1$$

$${}_r |(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = v {}_r p_x (D\bar{A})_{x+r:\overline{n}}^1$$

$$(D^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + (I^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \left(n + \frac{1}{(m)} \right) \bar{A}_{x:\overline{n}}^1$$

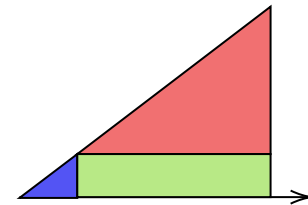
$${}_r |(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + {}_r |(I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = n {}_r | A_{x:\overline{n}}^1$$

$${}_r |(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 + {}_r |(I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = (n+1) {}_r | A_{x:\overline{n}}^1$$

$${}_r |(D\bar{A})_{x:n-1}^1 + {}_r |(I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = n {}_r | A_{x:\overline{n}}^1$$

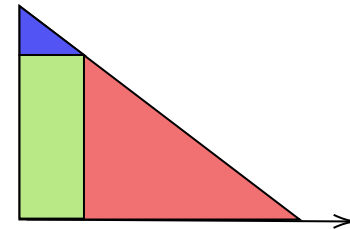
Relations croissance

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = (\bar{I}\bar{A})_{x:1}^1 + v p_x \left[\bar{A}_{x+1:n-1}^1 + (\bar{I}\bar{A})_{x+1:n-1}^1 \right]$$

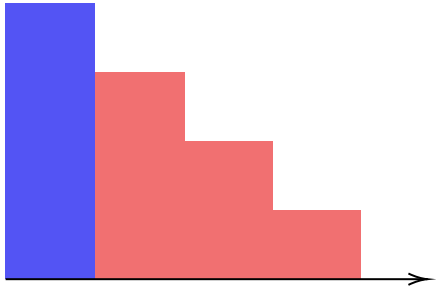


Relations décroissance

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = (n-1) \bar{A}_{x:1}^1 + (D\bar{A})_{x:1}^1 + v p_x (D\bar{A})_{x+1:n-1}^1$$



$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = n \bar{A}_{x:1}^1 + v p_x (D\bar{A})_{x+1:n-1}^1$$



Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^n v^t p_x dt$$

$$= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2}$$

2.3 Payable à la fin de l'année du décès

2.4 Payable à la fin du 1/m d'année du décès

2.5 Relations entre payable au moment et celles payables à la fin de l'année du décès

3 Contrats de rente

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$Y = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^\infty v^t p_x dt$$

$$= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{1 - v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$$Y = \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{20:\overline{10}|} - m \bar{Z}_{20}}{\delta}$$

$${}_m|\bar{a}_x = \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t-m}|} p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= {}_mE_x \bar{a}_{x+m}$$

$$= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_n|Y_x$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot nq_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\bar{a}_x$$

4 Primes nivelées

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étale sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où Z est la valeur présente actuarielle des prestations à payer et Y la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les

rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où Y_1 représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et Y_2 la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivelée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de

$$E[L] = 0$$

$$E[Z] - E[Y] = 0$$

$$E[Z] = E[Y]$$

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_t^*p_x$ pour solutionner π^{PPMP} .

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha$$

$$\Pr(L_1 + \dots + L_n < n\lambda) \geq \alpha$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{\text{Var}(L_1 + \dots + L_n)}} < \frac{n\lambda - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont iid,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

2. Le taux i est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux j est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.

Où $Z \sim N(0, 1)$ et Φ la fonction de répartition de Z . Le défi se trouve dans le calcul de $\text{Var}(L)$, où

$$\begin{aligned}\text{Var}(L) &= \text{Var}(Z - Y) \\ &= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(Z, Y) \\ &= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2(E[ZY] - E[Z]E[Y])\end{aligned}$$

4.5 Retour de primes

- › Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel (α) ou total des cotisations (accumulées au taux $j < i$)² en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.
- › On introduit la v.a. W , qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha \pi v_i^{K_x+1} \ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

- › Aussi, on trouve que

$$E[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \pi v_i^{k+1} \ddot{s}_{\overline{k+1}|j|k} q_x = \alpha \pi \psi$$

4.6 Primes brutes

- › Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G , qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.
- › Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$
 avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π .
- › Il y a 3 types de dépenses :
 - Dépenses initiales;
 - À l'émission du contrat;
 - Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M);
 - Coût des employés qui saisissent les informations dans le système;
 - Impression et envoi par courrier de la police.
 - ...
 - Dépenses de renouvellement;
 - Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).
 - Dépenses de fin de contrat.
 - Saisie informatique et frais de fermeture de dossier;
 - Émission du chèque de prestations;
 - Enquête (dans certains cas).