

## Compléments de mathématiques

### Sommations

$$\sum_{k=m}^n r^k = r^m \frac{1 - r^{n-m+1}}{1 - r}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

### Estimation Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### Théorème de Leibnitz

Soit :

- › une fonction  $f(x, \alpha)$  continue sur  $[a, b]$  et
- › des fonctions (dérivables) de  $\alpha$ ,  $u(\alpha)$  et  $v(\alpha)$ , prenant valeur dans  $[a, b]$ .

Alors,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx + f(v(\alpha), \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha) - f(u(\alpha), \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha)$$

### Domaines

$\mathbb{R}$  : Real numbers,  $x \in (-\infty, \infty)$ .

$\mathbb{Z}$  : Integers; all integers positive & negative,  $x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

$\mathbb{N}$  : Natural numbers; all positive integers numbers,  $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

$\mathbb{Q}$  : Rational numbers; numbers written as fractions, for example 1.25%, -0.4775,  $3.\overline{153}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{7}$ .

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  : Irrational numbers; for example  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{3}$ .

## Mathématiques financières

### Intérêt simple

$$a(t) = 1 + it$$

$$v(t) = \frac{1}{1 + it}$$

$$\text{Prix} = 100 \left( 1 - \frac{it}{365} \right)^{-1}$$

### facteurs d'actualisation et d'accumulation

$$a(t) = (1 + i)^t$$

$$= (1 - d)^{-t}$$

$$= e^{\int_0^t \delta_s ds}$$

$$v(t) = (1 + i)^{-t}$$

$$= (1 - d)^t$$

$$= e^{-\int_0^t \delta_s ds}$$

### Conversion de taux

$$d = \frac{i}{1 + i}$$

$$i^R = \frac{i - r}{1 + r}$$

$$\text{Taux d'intérêt effectif annuel}$$

$$i = \left( 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m - 1$$

$$\text{Taux d'intérêt nominal annuel}$$

$$i^{(m)} = m \left( (1 + i)^{1/m} - 1 \right)$$

### Rentes constantes

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{(i^{(m)} | d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\infty} = \frac{1}{(i | d)}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1 + i)^n - 1}{(i^{(m)} | d^{(m)})}$$

### Rentes continues

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - n}{\delta}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta}$$

$$(\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\overline{n}|}}{\delta}$$

$$(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|}}{\delta}$$

## Rentes (dé)croissantes annuellement

$$\begin{aligned} (I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|} &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(i|\overline{d}^{(m)})} & (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|} &= \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|\overline{d}^{(m)})} \\ (I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|} &= \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - n}{(i|\overline{d}^{(m)})} & (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|} &= \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|\overline{d}^{(m)})} \end{aligned}$$

## Rentes croissantes continûment

$$(I\ddot{a})_{\infty} = \frac{1}{d(i|\overline{d})}$$

Païement en continu, valeurs accumulée et actualisée

$$(\overline{I}\ddot{s})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) e^{\int_t^n \delta_s ds} dt$$

$$(\overline{I}\ddot{a})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) e^{-\int_0^t \delta_s ds} dt$$

## Rentes avec croissance géométrique

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i^R} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n}{i - r} (1+i) \quad \ddot{s}_{\overline{n}|i^R} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i - r} (1+i)$$

## T-Bills

$$\text{Prix} = 100 \left(1 - \frac{dt}{360}\right)^t$$

## Obligations

Formule de base

P Prix de l'obligation

F Valeur nominale de l'obligation (*face value*)

r Taux de coupon par période de paiement (*coupon rate*)

i Taux d'intérêt par période de paiement (*interest rate*)

Fr Montant par paiement.

C Valeur de remboursement de l'obligation (*redemption value*)

$$\begin{aligned} P &= Fra_{\overline{n}|i} + Cv^n \\ &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} + v^n \end{aligned}$$

## Amortissement d'obligations

Book value

$$BV_t = (Fr - C)_{n-t}a_j + C$$

## Analyse probabiliste des risques actuariels

### Théorèmes probabilistes

#### Théorème du binôme

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$$

#### Théorème multinomial

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r): \\ n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$$

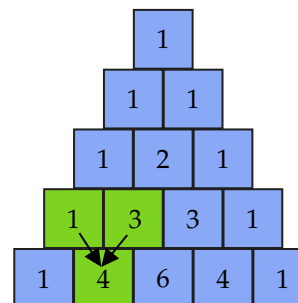
#### Relations factoriels

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

#### Règle de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

#### Triangle de Pascal



- › Triangle des coefficients binomiaux
- › Chaque nombre est la somme des 2 nombres directement au-dessus.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

## Moments

Moment d'ordre $n$ (autour de l'origine).	$E[X^n] = \sum_i x_i^n \Pr(X = x_i)$
Moment <i>centré</i> d'ordre $n$ .	$E[(X - E[X])^n] = \sum_i (x_i - E[X])^n \Pr(X = x_i)$
Moment <i>réduit</i> d'ordre $n$ .	$E\left[\left(\frac{X}{\sqrt{V(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{V(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Moment <i>centré-réduit</i> d'ordre $n$ .	$E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Coefficient d'asymétrie ( <i>Skewness</i> )	$\gamma_X = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right)^3\right]$
Coefficient d'aplatissement ( <i>Kurtosis</i> )	$\kappa_X = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}\right)^4\right]$
Fonction stop-loss	$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)]$
Fonction d'excès-moyen	$\pi_X(d) = E[X - d   X > d]$

## Lois multivariées

## Loi multinomiale

$$\Pr(X_1 = x_1, \dots, X_r = x_r) = \binom{n}{x_1, \dots, x_r} p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r}$$

## Loi normale multivariée

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$$

## Conditionnels

$$E[X] = E_Y[E[X|Y]] \quad V(X) = E_Y[V(X|Y)] + V_Y(E[X|Y])$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

1.  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
2.  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$
3.  $\text{Cov}(X, Y) \perp 0$
4.  $\text{Cov}(c, X) = 0$
5.  $\text{Cov}(cX, Y) = c\text{Cov}(X, Y)$
6.  $\text{Cov}(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^m \beta_j Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$

$$V\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\rho_P(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

## Convolution

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) dy$$