

# CONTRIBUTEURS

## Première partie

## ACT-2001 : Introduction à l'actuariat II

## 1 Notions de base à la modélisation en actuariat

## Notation

$X$  Variable aléatoire représentant les pertes pour une "entité" pour un (ou plusieurs) "périls".

- › Elle peut être continue, discrète ou mixte;
- › "Entité" peut être un individu (ou groupe de), commerce, compagnie, etc.;
- › "Périls" peut être une incendie, du vandalisme, une maladie, du risque opérationnel, etc.;
- › On pose que  $E[X] < \infty$ .

$PP(X)$  La **prime pure** pour le risque  $X$ ,  $PP(X) = E[X]$ .

## Fonction quantile

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F_X(x) \geq u\}, \quad \forall u \in (0, 1).$$

## Théorème de la fonction quantile

Soit :

- › la variable aléatoire  $X$  avec fonction de répartition  $F_X(x)$  et la fonction quantile  $F_X^{-1}(u)$ .
- › la variable aléatoire  $U \sim Unif(0, 1)$ .
- ›  $Y = F_X^{-1}(U)$ .

Alors,  $F_Y(x) = F_{F_X^{-1}(U)}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et  $X = F_X^{-1}(U)$ .

C'est-à-dire, on définit  $Y$  comme la transformation de la variable aléatoire  $U$  via la fonction quantile. Par conséquent,  $Y$  se comporte comme  $X$ .

## Espérance tronquée

On pose que  $X$  est une variable aléatoire tel que  $E[X] < \infty$ .

## Notation

$E[X \times \mathbf{1}_{\{X > d\}}]$  l'espérance tronquée à  $d$ .

- › C'est-à-dire, l'espérance des valeurs de la v.a.  $X$  qui sont supérieures à  $d$ .
- › On peut définir l'espérance tronquée avec n'importe quelle indicatrice.

Rappel :

$$\mathbf{1}_{\{X > d\}} = \begin{cases} 1, & X > d \\ 0, & X \leq d \end{cases}$$

## Fonction stop-loss

On pose que  $X$  est une variable aléatoire tel que  $E[X] < \infty$ .

## Notation

$\pi_X(d)$  Fonction stop-loss de déductible  $d$  tel que

$$\pi_X(d) = E[\max\{X - d; 0\}], \quad \forall d \in \mathbb{R}.$$

- › C'est-à-dire, l'espérance des montants de perte en excédant de la limite  $d$ ,

Relation :

$$\pi_X(d) \equiv E[X \times \mathbf{1}_{\{X > d\}}] - d\bar{F}_X(d)$$

## Fonction quantile et espérance(s)

$$E[X] = E[F_X^{-1}(U)] = \int_0^1 F_X^{-1}(u) du.$$

Relation :

$$\begin{aligned} \int_k^1 F_X^{-1}(u) du &= \pi_X(F_X^{-1}(\kappa)) + (1 - \kappa)F_X^{-1}(\kappa), \quad \forall \kappa \in (0, 1) \\ &= E[X \times \mathbf{1}_{\{X > F_X^{-1}(\kappa)\}}] + F_X^{-1}(\kappa)(F_X(F_X^{-1}(\kappa)) - \kappa) \end{aligned}$$

## Mesures de risque

- › La **Value-at-Risk** correspond au 100 $\alpha$ <sup>e</sup> pourcentile;

Également, on a la  $TVaR$  que l'on peut écrire pour  $\kappa \in (0, 1)$  :

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_{\kappa}(X)) + VaR_{\kappa}(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left[ E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa) \right] \end{aligned}$$

Pour une variable aléatoire  $X$  continue, on simplifie :

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \left[ E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + \underbrace{VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa)}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left[ E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] \right] \\ &= \frac{E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}]}{\Pr(X > VaR_{\kappa}(X))} \\ &= E[X | X > VaR_{\kappa}(X)] \end{aligned}$$

$$F_{X_1}^{-1}(u) \leq F_{X_2}^{-1}(u) .$$

### ≡ Sous-additivité

Soit les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété de sous-additivité si  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$  .

### ≡ Convexité

Soit les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété de convexité si  $\rho(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \leq \alpha\rho(X_1) + (1-\alpha)\rho(X_2)$  .

## Propriétés désirables d'une mesure de risque

### ≡ Homogénéité

Soit une v.a.  $X$  et un scalaire  $c > 0$ , la mesure de risque  $\rho$  est dite homogène si  $\rho(cX) = c\rho(X)$  .

### ≡ Invariance à la translation

Soit une v.a.  $X$  et un scalaire  $c \in \mathbb{R}$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété d'invariance à la translation si  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$  .

Ajouter un montant positif à un risque ajoute un montant équivalent à la mesure de risque.

### ≡ Monotonie

Soit les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  tel que  $\Pr(X \leq X_2) = 1$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété de monotonie si  $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$  ou si  $\forall u \in (0, 1)$  ,

## 2 Méthodes de simulation Monte-Carlo

### Méthode inverse

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. On produit une réalisation  $U^{(j)}$  d'une loi  $U(0,1)$  à partir d'un GNPA (runif en R).
2. On simule une réalisation  $X^{(j)}$  de  $X$  où  $X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)})$ .

### Simulation d'une fonction d'un nombre fini de variables aléatoires

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. On simule les réalisations  $(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$  de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
2. On évalue  $Z^{(j)} = \phi(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$ .

Par exemple, on peut avoir  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ .

### Simulation d'une fonction de variables aléatoires définies par un mélange

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. On simule une réalisation  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$ .
2. On produit une réalisation  $X^{(j)}$  de  $X$  avec la fonction quantile  $F_{X|\Theta=\Theta^{(j)}}$  de la fonction de répartition conditionnelle de  $(X|\Theta = \Theta^{(j)})$

## Erreur et intervalle de confiance

Soit une v.a.  $X$  dont on produit  $m$  réalisation  $(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$ .

Soit la fonction intégrale de  $X$ ,  $g(X)$ .

On obtient les approximations pour  $\theta = E[g(X)]$  :

$$\theta \simeq \hat{\theta}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g(X^{(j)})$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_m) = \frac{1}{m} \text{Var}(g(X))$$

$$\widehat{\text{Var}}(g(X)) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (g(X^{(j)}) - \hat{\theta}_m)^2$$

De plus,

$$\theta \in \left[ \hat{\theta}_m \pm \sqrt{\frac{\text{Var}(\hat{\theta}_m)}{m}} \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \approx \left[ \hat{\theta}_m \pm \sqrt{\frac{\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}_m)}{m}} \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Également, la fonction de répartition peut être approximée avec  $m$  réalisations  $(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$  :

$$F_X^{(m)}(x) \simeq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{X^{(j)} \leq x\}}$$

De plus, pour  $j_0 = m \times k$  entier :

$$\text{TVaR}_k(X) \simeq \frac{1}{m - j_0} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=j_0+1}^m X^{[j]} \right)$$

### 3 Mutualisation des risques

#### Terminologie

S Pertes totales

#### Méthode de Monte-Carlo

##### Étapes pour simuler

1. Produire  $M$  réalisations  $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$  de  $U$ ;
2. Approximer  $\theta$  par  $\hat{\theta}_m$  où :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_m &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \phi \left( F_X^{-1} \left( U^{(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \phi \left( X^{(j)} \right)\end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres,  $\hat{\theta}_m \xrightarrow{P} \theta$ .

#### Mesures de risque

**Capital économique** Allocation de surplus de la compagnie;

$$CE(S) = \rho(S) - E[S]$$

**Marge de risque** associée à une prime  $P(X)$ ;

$$MR(X) = \rho(X) - E[X]$$

$\rho$  introduit une marge de risque :

**positive** lorsque  $\rho(X) \geq E[X]$  pour une v.a.  $X$  avec  $E[X] < \infty$  ;

**justifiée** lorsque  $\rho(X) = \rho(a) = a$  pour une v.a.  $X$  avec  $\Pr(X = a) = 1, a > 0$  ;

**non-excessive** lorsque  $\rho(X) \leq a_{\max}$  pour une v.a.  $X$  s'il existe  $a_{\max} < \infty$  tel que  $\Pr(X \leq a_{\max}) = 1$  ;

## 4 Modèles de risques non-vie

### Notation

$M$  Variable aléatoire du nombre de sinistres pour un risque ;

$B_k$  Variable aléatoire du montant du  $k^{\text{e}}$  sinistre.

### Modèle fréquence-sinistre

On définit la v.a.  $X$  comme étant les coûts (pertes) pour un risque tel que

$\forall M > 0$  :

$$X = \sum_{k=1}^M B_k$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E_M[E_B[X|M]] \\ &= E[M] \times E[B] \\ \text{Var}(X) &= \underbrace{\text{Var}_M(E_B[X|M])}_{\text{variabilité du nombre de sinistres}} + \underbrace{E_M[\text{Var}_B(X|M)]}_{\text{variabilité du coût par sinistre}} \\ &= E[M]\text{Var}(B) + E^2[B]\text{Var}(M) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) F_{B_1+\dots+B_k}(x)$$

Par exemple, pour  $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  :

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) H(x; \alpha k, \beta)$$

$$\mathcal{L}_X(t) = P_M(\mathcal{L}_B(t)), \quad t > 0$$

$$E[X \times \mathbf{1}_{\{X > b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) E[(B_1 + \dots + B_k) \times \mathbf{1}_{\{B_1 + \dots + B_k > b\}}]$$

Par exemple, pour  $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  :

$$E[X \times \mathbf{1}_{\{X > b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) \frac{k\alpha}{\beta} \bar{H}(b; \alpha k + 1, \beta)$$

## Simulation

### Simulation de réalisations de $X$

1. Simuler la réalisation  $M^{(j)}$  de la v.a.  $M$ ;
2. Si  $M^{(j)} = 0$ , alors  $X^{(j)} = 0$ ;
3. Si  $M^{(j)} > 0$ , alors :
  - (a) Simuler  $M^{(j)}$  réalisations de la v.a. (iid)  $B$  pour obtenir  $B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \dots, B_{M^{(j)}}^{(j)}$ ;
  - (b) On pose  $X^{(j)} = B_1^{(j)} + B_2^{(j)} + \dots + B_{M^{(j)}}^{(j)}$ .

## Heavy tailed and light tailed

Si la distribution de la v.a.  $B$  est sub-exponentielle alors :

$$\bar{F}_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \bar{F}_{B_1+\dots+B_k}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) k \bar{F}_B(x) = E[M] \bar{F}_B(x)$$

## Mutualisation

### Somme de variables aléatoires Poisson composée

Soient les variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors,  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i; F_C)$ .

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_s} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_s} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_s} F_{B_n}(x)$$

## Deuxième partie

## ACT-3000 : Théorie du risque

## 10 Processus de Poisson

## Notation

$T_k$  Temps d'occurrence de l'événement  $k = 1, 2, \dots$

> Il s'ensuit que  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  ;

>  $T_k \sim \text{Erlang}(k; \lambda)$  .

$W_k$  Temps écoulé entre l'événement  $k - 1$  et  $k$ .

> Il s'ensuit que  $W_k = T_k - T_{k-1}$  ;

>  $W_k \sim W \sim \text{Exp}(\lambda)$  .

## Processus de comptage

Soit le processus de comptage  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  sous les conditions suivantes :

1.  $N(0) = 0$ ;
2.  $N(t) \geq 0$ ;
3.  $N(t) \geq N(s)$  si  $t > s$ ;
4.  $N(t) - N(s)$  correspond au nombre d'événements encourus durant l'intervalle  $(s, t]$  où  $t > s$ ;

Au lieu de le définir en fonction d'une loi de Poisson, on peut définir  $N(t) = \sup\{k \geq 1 : T_k \leq t\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . C'est-à-dire, le dernier événement à se produire à ou avant le temps  $t$ .

> Alias, processus de dénombrement.

## Processus de Poisson homogène

## Notation

$\lambda$  Taux, ou intensité, du processus.

$\Lambda(t)$  Intensité cumulée :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda ds = \lambda t, \quad t > 0$$

## Processus de Poisson

$\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  est un **processus de Poisson** sous les conditions suivantes :

1.  $N(0) = 0$ ;
2. Les accroissements sont indépendants et stationnaires;
3.  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ;
4.  $N(t + s) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ .

Pour  $s \geq 0$  et  $t > 0$ ,  $N(s, s + t] = N(s + t) - N(s)$  .

Également, pour  $s \geq 0$  et  $t > 0$ ,  $\Lambda(s, s + t] = \Lambda(s + t) - \Lambda(s)$  .

## Fonctions d'un processus de Poisson homogène

Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$ ,  $s \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \Pr(N(t) = k) &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &\equiv \underset{\substack{\text{accroissements} \\ \text{stationnaires}}}{\Pr(N(s, s + t) = k)} \end{aligned}$$

## Propriétés d'un processus de Poisson homogène

Soit le processus de Poisson  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec les propriétés suivantes :

1.  $N(0) = 0$ ;
2. Les accroissements sont indépendants et stationnaires;
3.  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ;
4.  $N(s, s + t] \equiv N(s + t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ;

Pour  $h \rightarrow 0$  et  $o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  :

5.  $\Pr(N(t + h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ ;

6.  $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h);$
7.  $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h).$

### Propositions

**Proposition : Mélange de processus de Poisson avec une suite de v.a. Bernoulli**

Soit :

- > Un processus de Poisson  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  de taux  $\lambda$ ;
- > La suite de variables aléatoires (iid) Bernoulli  $\underline{I} = \{I_k, k = 1, 2, \dots\}$  de paramètre  $q$ .

On pose que  $\underline{N} \perp \underline{I}$  et défini :

$$M(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} I_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

On obtient donc le processus de Poisson  $\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$  de taux  $\lambda q$ ; c'est-à-dire,  $M(t) \sim \text{Pois}(\lambda q t)$ .

**Proposition : Somme de processus de Poisson**

Soit les processus de Poisson indépendants  $\underline{N}_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$  et  $\underline{N}_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$  de taux  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Alors,  $\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda_1 + \lambda_2$  où  $M(t) = N_1(t) + N_2(t)$ ; c'est-à-dire,  $M(t) \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

### Algorithme de Processus de Poisson 1 (PP1)

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$ ;
2. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - a) On simule  $W_i^{(j)}$ ;
  - b) On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$ .

- > Cet algorithme est simple d'application;
- > Cependant, il n'est pas toujours efficace pour produire des simulations du processus  $\underline{N}$  sur un intervalle fixe  $(0, t]$ .

### Distributions du temps d'occurrence

#### Rappel : Distribution du temps inter-sinistre

$$T_1 \sim W_k \sim W \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$(T_1 | N(t) = 1)$  Temps d'occurrence du premier sinistre sachant qu'il est survenu dans l'intervalle  $(0, t]$ .

$$(T_1 | N(t) = 1) \sim U(0, t);$$

> Pour  $s \in (0, t)$  :

$$f_{T_1 | N(t)=1}(s) = \frac{1}{t}$$

$$F_{T_1 | N(t)=1}(s) = \frac{s}{t}$$

$(T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n)$  Temps d'occurrence des  $n$  premiers sinistres sachant qu'ils sont survenus dans l'intervalle  $(0, t]$ .

Pour  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq n$  :

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n}$$

De plus, pour des très petits nombres  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tel que les intervalles  $(s_1, s_1 + h_1], (s_2, s_2 + h_2], \dots, (s_n, s_n + h_n]$  sont disjoints, alors :

$$\Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^n h_i$$

**Vecteur de statistiques d'ordre**

Soit le vecteur de v.a. continues (iid)  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , alors  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  :

- >  $Y_i \sim Y$  et
- > la fonction de densité  $f_{Y_i} = f_Y$ .



On définit le vecteur de statistiques d'ordre  $(Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]})$  avec la fonction de densité conjointe :

$$f_{Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! \times \prod_{i=1}^n f_Y(y_i), \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n$$

$$\stackrel{Y \sim U(0,t)}{=} \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq t$$

Donc,  $(T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]})$ .

### Algorithme de Processus de Poisson 2 (PP2)

- On fixe  $T_0^{(j)} = 0$  ;
- On simule la réalisation  $N(t)^{(j)}$  de  $N(t)$  ;
- Sachant  $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$  :
  - On simule le vecteur de réalisations  $(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \dots, U_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  de  $(U_1, U_2, \dots, U_{N(t)^{(j)}})$  ;
  - On trie ces réalisations pour obtenir le vecteur de statistiques d'ordre  $(U_{[1]}^{(j)}, U_{[2]}^{(j)}, \dots, U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  où  $U_{[1]}^{(j)} < U_{[2]}^{(j)} < \dots < U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)}$  ;
  - On calcule  $T_i^{(j)} = t \times U_{[i]}^{(j)}$  pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$ .

**Note :** On pose que  $U_i \sim U \sim U(0, 1)$ .

## Processus de Poisson non-homogène

### Processus de Poisson non-homogène

$\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  est un **processus de Poisson non-homogène** de fonction d'intensité  $\lambda(t) \geq 0 \forall t \geq 0$  si :

- $N(0) = 0$  ;
- Les accroissements sont indépendants ;
- $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$  ;
- $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$  ;

### Proposition :

Soit le processus de Poisson non-homogène  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec intensité  $\lambda(t)$  ; alors  $\forall t, s \geq 0$ ,

$$N(t+s) - N(t) \sim \text{Pois}(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))$$

où  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy$ .

Ainsi,

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{[\Lambda(t+s) - \Lambda(t)]^n e^{-[\Lambda(t+s) - \Lambda(t)]}}{n!}$$

> La suite de v.a. des temps inter-sinistres n'est pas  $\underline{W}$  indépendante ni identiquement distribuée.

### Exemples de fonctions d'intensité

**fonction linéaire**  $\lambda(t) = a + bt, a > 0, b \geq 0$  ;

**fonction puissance**  $\lambda(t) = (\beta t)^\tau, \beta, \tau > 0$  ;

**fonction log-linéaire**  $\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ;

**fonction périodique**  $\lambda(t) = a + b \cos(2\pi t), a > 0, b \in [0, a]$ .

## Distributions du temps d'occurrence

On sait que  $T_1 \equiv W_1$ .

$$F_{W_1}(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}, \quad t \geq 0$$

Plus généralement,

$$F_{W_n | T_{n-1}=s}(t) = 1 - e^{-\Lambda_s(t)}, \quad t \geq 0$$

**Algorithme de Processus de Poisson non-homogène 1 (PPNH1)**

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$  ;
2. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - a) On simule les réalisations  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$  du vecteur de v.a. (iid) avec  $Z_i \sim Z \sim \text{Exp}(1)$  ;
  - b) On simule  $W_i^{(j)} = \Lambda_{T_{i-1}^{(j)}}^{-1}(Z_i)$  ;
  - c) On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$ .

> Cet algorithme est simple d'application si l'expression  $\Lambda_s^{-1}$  est fermée ;  
 > Cependant, le prochain est plus efficace pour produire des simulations du processus  $\underline{N}$  sur un intervalle fixe  $(0, t]$ .

Pour  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$  :

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \prod_{i=1}^n \lambda(s_i)$$

Les hypothèses au vecteur de v.a. (iid)  $(V_1, V_2, \dots, V_{N(t)}^{(j)})$  sont appliquées de la même façon qu'auparavant avec  $(U_1, U_2, \dots, U_{N(t)}^{(j)})$ .

**Algorithme de Processus de Poisson non-homogène 2 (PPNH2)**

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$  .
  2. On simule la réalisation  $N(t)^{(j)}$  de  $N(t) \sim \text{Pois}(\Lambda(t))$ .
  3. Sachant  $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$  :
    - a) On simule le vecteur de réalisations  $(V_1^{(j)}, V_2^{(j)}, \dots, V_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  du vecteur de v.a. (iid)  $(V_1, V_2, \dots, V_{N(t)^{(j)}})$  ;
- Note :  $V_i \sim V$  avec  $f_V(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}$  pour  $0 < x < t$  et  $\forall i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$
- b) On trie ces réalisations pour obtenir le vecteur de statistiques d'ordre  $(V_{[1]}^{(j)}, V_{[2]}^{(j)}, \dots, V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  où  $V_{[1]}^{(j)} < V_{[2]}^{(j)} < \dots < V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)}$  ;

c) On calcule  $T_i^{(j)} = V_{[i]}^{(j)}$  pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$ .

**Note :** On pose que  $U_i \sim U \sim U(0, 1)$ .

4. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - a) On simule les réalisations  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$  du vecteur de v.a. (iid) avec  $Z_i \sim Z \sim \text{Exp}(1)$  ;
  - b) On simule  $W_i^{(j)} = \Lambda_{T_{i-1}^{(j)}}^{-1}(Z_i)$  ;
  - c) On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$ .

> Cet algorithme est simple d'application si l'expression  $\Lambda_s^{-1}$  est fermée ;  
 > Cependant, le prochain est plus efficace pour produire des simulations du processus  $\underline{N}$  sur un intervalle fixe  $(0, t]$ .

## Processus de Poisson mixte

$$E[N(t)] = t\lambda$$

$$\text{Var}(N(t)) = t\lambda + t^2\text{Var}(\Theta)$$

Pour  $r \in [0, 1]$  :

$$M_{N(t)}(r) = M_{\Theta}(t(e^r - 1))$$

$$\mathcal{P}_{N(t)}(r) = M_{\Theta}(t(r - 1))$$

› Le processus de Poisson mixte  $\underline{N}$  possède des accroissements stationnaires mais pas indépendants.

$$\Pr(N(t+s) - N(s) = n | N(s) = m) \neq \Pr(N(t+s) - N(s) = n), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

### Algorithme de simulation d'un Processus de Poisson mixte

1. On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$ ;
2. On simule le  $j^{\text{e}}$  parcours de  $(\underline{N} | \Theta = \Theta^{(j)})$  avec l'algorithme PP1 pour un processus de Poisson avec intensité  $\lambda = \Theta^{(j)}$ .

## Processus de renouvellement

$$\{N(t) \geq k\} \equiv \{T_k \leq t\}, \quad t > 0, k \in \mathbb{N}.$$

$$m(t) = E[N(t)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t)$$

## Processus agrégés

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

## Valeur présente et processus agrégés

## 11 Méthodes récursives d'agrégation

### Motivations

#### Convolution

##### Produit de convolution

Soit les variables aléatoires indépendantes continues positives  $X_1$  et  $X_2$ .  
On définit  $S = X_1 + X_2$ , alors :

$$f_S(x) = \int_0^x f_{X_1}(y)f_{X_2}(x-y)dy = f_{X_1} * f_{X_2}(x)$$

Soit les variables aléatoires indépendantes discrètes positives  $X_1$  et  $X_2$  définies sur le support arithmétique  $0h, 1h, 2h, \dots$

>  $h$  est un « pas de discrétisation » positif ( $h > 0$ );

> Par exemple :  $10, 20, 30, \dots = 1h, 2h, 3h, \dots$  avec  $h = 10$ .

On définit  $S = X_1 + X_2$ , alors pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$f_S(kh) = \sum_{j=0}^k f_{X_1}(jh)f_{X_2}((k-j)h) = f_{X_1} * f_{X_2}(kh)$$

### Nombres complexes

$$z = \underbrace{x}_{\text{partie réelle, Re}(z)} + \underbrace{y}_{\text{partie imaginaire, Im}(z)} \times \underbrace{i}_{\text{Unité imaginaire, } i = \sqrt{-1}}$$

#### Propriétés de base

Soit les nombres complexes  $z_1 = x_1 + y_1i$  et  $z_2 = x_2 + y_2i$ .  
Règle de :

**addition**  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ ;

**multiplication**  $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$ ;

**soustraction**  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$ .

#### Représentation sous la forme polaire

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \text{ où :}$$

>  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  = **module** de  $z$ ;

>  $\theta$  est l'**argument** de  $z$ ; c'est-à-dire, l'angle du vecteur  $z$  dans le plan complexe.

#### Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué de  $z = x + yi$  est :  $\bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$ .

##### Propriétés de base du conjugué

Soit les nombres complexes  $z_1 = x_1 + y_1i$  et  $z_2 = x_2 + y_2i$ .

Règle de :

**addition**  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;

**multiplication**  $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ ;

**les exposants**  $\overline{z_1^n} = (\bar{z}_1)^n$ .

#### Règle de division

Soit les nombres complexes  $z_1 = x_1 + y_1i$  et  $z_2 = x_2 + y_2i$ .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{z_2 \times \bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2)}{x_2^2 - y_2^2} + \frac{(x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 - y_2^2}i$$

#### Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$\Rightarrow$

$$z = re^{i\theta} = r \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

## Somme de variables aléatoires discrètes

### Notation

$f_X^{*n}(k)$   $n^{\text{e}}$  produit de convolution de  $f_X$  avec elle-même.  
 $f_{S_n}(k) = f_{X_1+\dots+X_n}(k) = f_X^{*n}(k)$

$$\mathcal{P}_{S_n}(t) = P_X(t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k$$

### Algorithme de De Pril

Cet algorithme permet de calculer  $f_X^{*n}(k)$  selon la relation récursive suivante :

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^k \left( (n+1) \frac{j}{k} - 1 \right) f_X(j) f_{S_n}(k-j)$$

Avec  $f_{S_n}(0) = (f_X(0))^n$  comme point de départ.

1. On calcule  $f_{S_n}(0) = (f_X(0))^n$ .
2. On calcule  $f_{S_n}(1) = \frac{1}{f_X(0)} \left( (n+1) \frac{1}{1} - 1 \right) f_X(1) f_{S_n}(0)$ .
3. Avec  $f_{S_n}(1)$ , on trouve  $f_{S_n}(2) = \frac{1}{f_X(0)} \left\{ f_X(1) \left( (n+1) \frac{1}{2} - 1 \right) f_{S_n}(1) + f_X(2) \left( (n+1) \frac{2}{2} - 1 \right) f_{S_n}(0) \right\}$ .
4. Répéter pour  $k \in \{3, 4, \dots\}$ .

## 12 Comparaison des risques et ordres stochastiques

## 13 Distributions multivariées et agrégation des risques

## 14 Théorie des copules



## Troisième partie

# Autres

## 15 Terminologie

$\arg \max$  Si on pose que  $\hat{\theta} = \arg \max L(\theta; X)$  on dit que la valeur maximale de  $L(\theta; X)$  est au point  $\hat{\theta}$ .

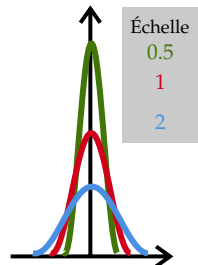
Paramètre

**de forme** Affecte la forme générale de la distribution;

- > « *shape parameter* »;
- > Il est important de saisir que le paramètre de forme n'a aucune incidence sur l'emplacement de la densité (paramètre de l'emplacement) ni sur l'échelle de la densité (paramètre d'échelle);
- > Par exemple, la distribution Gamma a un paramètre de forme qui impact comment qu'elle est représentée;
- > Par exemple, la distribution exponentielle n'a pas de paramètre de forme et bien que l'échelle de la distribution peut être modifiée, la forme générale est constante.

**d'échelle** Sert à déterminer la forme et l'emplacement de la distribution en étirant ou compressant la densité;

- > « *scale parameter* »;
- > Le plus gros le paramètre d'échelle, le plus rependue la distribution;
- > On peut voir ceci visuellement où avec un paramètre d'échelle de 1, la distribution est inchangée :



**de fréquence** L'interprétation dépend du contexte.

- > « *rate parameter* »;
- > Dans le cas d'un processus de Poisson, le paramètre de fréquence décrit le taux auquel les événements se produisent;

- > Souvent, il est défini comme le réciproque du paramètre d'échelle pour indiquer le taux de déclin d'une fonction exponentielle;
- > Des valeurs près de 1 impliquent un déclin lent alors que des valeurs près de 0 impliquent un déclin rapide.

**d'emplacement** Stipule où la densité est située.

- > « *location parameter* »;
- > Plus précisément, indique où sur l'axe des  $x$  la distribution est centrée relatif à la distribution normale standard;
- > Une distribution normale standard est centrée à 0 donc un paramètre d'emplacement de 5 implique que la densité est centrée à  $x = 5$ .

### Notation

$S$  Les coûts d'un portefeuille.

$\rho(S)$  Une mesure de risque.

## 16 Preuves

### Preuve du théorème de la fonction quantile

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(U)} &= \Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) \\ &\stackrel{2}{=} \Pr(U \leq F_X(x)) \\ &\stackrel{1}{=} F_X(x) \end{aligned}$$

1. Pour  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $F_U(u) = \Pr(U \leq u) = u$  alors  $F_U(F_X(x)) = F_X(x)$ .
2. On doit prouver que :

$$\{F_X^{-1}(U) \leq x\} \equiv \{U \leq F_X(x)\}$$

#### Cas 1 : X est une variable aléatoire continue

- > Alors, l'équivalence est vraie puisque  $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$  est la solution unique à  $\{U \leq F_X(x)\}$  par définition.

#### Cas 2 : X est une variable aléatoire quelconque

1. On fixe  $x = F_X^{-1}(u) = \inf\{y \in \mathbb{R}; F_X(y) \geq u\}$  ;
  - > Donc, ce "x" est une valeur parmi les valeurs "y" qui rencontre la condition  $F_X(y) \geq u$ ;
  - > Il s'ensuit que puisque  $u \leq F_X(y)$  alors  $u \leq F_X(x)$ .

$$\{F_X^{-1}(U) \leq x\} \Rightarrow \{U \leq F_X(x)\}$$

2. On fixe  $u \leq F_X(x)$  ;
  - > Puisque la fonction quantile est la plus petite valeur de y tel que  $u \leq F_X(y)$ , il s'ensuit que  $F_X^{-1}(u) \leq x$ .

$$\{U \leq F_X(x)\} \Rightarrow \{F_X^{-1}(U) \leq x\}$$

Donc :

$$\{F_X^{-1}(U) \leq x\} \equiv \{U \leq F_X(x)\}$$

### Preuve de la fonction Stop-Loss comme la survie

1. Premièrement, on développe l'expression :

$$\begin{aligned} \pi_X(d) &= E[\max(X - d; 0)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(x - d; 0) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^d (0) f_X(x) dx + \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx \\ &= \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

Pour la prochaine étape, nous avons recours au théorème des accroissements finis :

#### Théorème des accroissements finis

Soit la fonction  $f$  qui répond aux critères suivants :

1.  $f(x)$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  ;
2.  $f(x)$  est différentiable sur l'intervalle ouvert  $(a, b)$ .

Alors, il existe un nombre  $c$  tel que  $a < c < b$  et  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

De plus, nous avons recours à l'intégrale de Riemann-Stieltjes :

#### Intégrale de Riemann-Stieltjes

Sois les fonctions  $f$  et  $g$  continues sur l'intervalle  $[a, b]$ .

- > On divise l'ensemble  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $c_i = [x_{i-1}, x_i]$ .
- > Les  $n$  partitions  $P$  des sous-intervalles sont aux points  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ .
- > La norme des partitions est la longueur du plus long sous-intervalle  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$ .
- > On dénote le  $i^e$  point du sous-intervalle  $c_i$  par  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

On obtient donc l'intégrale de Riemann :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx.$$

L'intégrale de Riemann-Stieltjes généralise l'intégrale de Riemann avec une fonction  $g$  comme mesure de distance entre les points  $x_{i-1}$  et  $x_i$  ; l'intégrale de Riemann-Stieltjes est donc :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

2. On réécrit l'**intégrale indéfinie** avec une limite afin d'obtenir un intervalle borné :

$$\int_d^\infty (x-d)f(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c (x-d)f(x)dx \quad (2)$$

3. On réécrit l'intégrale sous la forme de l'**intégrale de Riemann** :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c (x-d)f(x)dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) f(t_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) \frac{\partial F(t_i)}{\partial x} (x_i - x_{i-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

4. On applique le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) \frac{\partial F(t_i)}{\partial x} (x_i - x_{i-1}) \\ = \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) (F(x_i) - F(x_{i-1})) \end{aligned} \quad (4)$$

5. On réécrit l'**intégrale de Riemann-Stieltjes** sous la forme normale :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) (F(x_i) - F(x_{i-1})) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c (x-d)dF(x) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c (x-d)d\bar{F}(x) \end{aligned}$$

6. Puis, on réécrit l'intégrale sous la forme d'un intégrale impropre :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c (x-d)d\bar{F}(x) = - \int_d^\infty (x-d)d\bar{F}(x)$$