

# 1 Introduction aux produits dérivés

## Produits dérivés

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.

Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. Cependant, on peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peut couper des patates. Les produits dérivés sont en fait des **outils de gestion du risque** qui deviennent utiles lorsque le risque du sous-jacent augmente.

### Origine

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devises de chaque pays.

### Exemples de produits dérivés

- > Contrat à terme standardisé (**futures**);
- > Contrat à terme de gré-à-gré (**forwards**);  
Gré : acceptation, ou consentement;
- > Option d'achat (**call**);
- > Option de vente (**put**);
- > Les **swaps**;

### Exemples de sous-jacent aux produits dérivés

- |                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| > Action;          | > Climat;                 |
| > Indice boursier; |                           |
| > Devise;          | > Prix d'une marchandise; |

## Utilité

- > Gestion des risques (**hedging**);  
Pour exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole;  
On dit qu'elle « *hedge* » contre le prix du pétrole.
- > **Spéculation**;  
Pour exemple, un investisseur croit que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat;
- > **Réduction des frais de transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger;
- > **Arbitrage réglementaire** : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges;  
Pour exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote;

## Parties prenantes

- End-users** : Participants au contrat du produit dérivé;
- Market-makers** : Intermédiaire visant à faire un profit de la transaction entre end-users
- Economic observers** : Observateurs du marché analysant et régulant les activités des market-makers et end-users;

## Transactions

### Transaction gré-à-gré

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse.

#### Raisons pour ce type de transaction

- > Ce sont souvent de grosses transactions. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- > On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transactions et plusieurs types d'actifs.

### Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** »;
  - › C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc.;
  - › Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire surnommé le « **clearing house** »;
  - › Elle met en relation les acheteurs et vendeurs (1<sup>ère</sup> étape), et tient compte des obligations et paiements;
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* »;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

### Exemple de vente à découvert

- › Mon ami James possède 5 actions d'Apple ayant chacune une valeur de 5\$;
- › Je lui emprunte ses 5 actions et lui promets d'y retourner;
- › Immédiatement, je revends ses actions sur le marché des actions;
  - Je ne suis pas inquiet, je suis certain que le prix va baisser;
  - Ce faisant, je suis certain que je serai capable de racheter ses actions plus tard à un prix plus faible.
- › Après une certaine période de temps, j'achète 5 actions au nouveau prix et j'y retourne.

### Raisons pour une vente à découvert

- › **Spéculation** : Un investisseur tire profit d'une baisse de prix;
- › **Financement** : Une vente à découvert est une façon d'emprunter de l'argent;
- › **Couverture** (hedging) : Un investisseur peut éliminer le risque d'une position longue sur une action avec une vente à découvert.

### Type de risques

**Risque de défaut (de crédit)** Risque de ne pas être payé;

- › Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité;
- › « *credit risk* ».

**Risque de rareté** Si il est difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent (pas beaucoup de transactions signifie beaucoup de négociations et de variation dans les prix).

### 📄 Vente à découvert « (*short-sell*) »

Lorsqu'on croit que le prix d'une action va baisser, on peut faire un profit quand même.

### Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre;
2. Vente du titre;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre;
4. Remboursement du titre

### Frais

investisseur : short-seller prêteur : Détenteur des actions dont l'investisseur a emprunté ;

« *short-sale proceeds* » Le recettes de la vente sont conservés comme collatéral au cas où que l'investisseur ne retourne pas les actions ;

- Soit le prêteur, ou un parti tierce, va conserver les revenus de la vente à découvert jusqu'au retour des actions ;
- À ce moment, elles seront retournées à l'investisseur.

« *a haircut* » Marge de sécurité pour couvrir le risque que le prix des actions augmente trop pour que l'investisseur ait la capacité financière des retourner, le prêteur exige un « dépôt » additionnel ;

- Comme les recettes de la vente, cette marge de sécurité sera retournée au prêteur.

« *Interest* » Il est naturel que le prêteur exige un retour sur la vente à découvert également ;

- Dans le marché des actions, l'intérêt accumulé sur le collatéral est le « *short rebate* » ;
- Dans le marché des obligations, c'est le **taux de mise en pension** (« *repo rebate* ») ;
- Ces taux sont habituellement *plus faible que* ceux du marché et sont fondés sur l'offre et la demande.

« *Dividends* » Il est possible que des dividendes sont payables lors du prêt ;

- Puisque le détenteur de l'action sera celui à qui l'investisseur a vendu les actions, l'investisseur et le prêteur ne vont pas les recevoir ;
- Du point de vue du prêteur, les dividendes sont des paiements en espèce qu'il aura reçu s'il n'avait pas prêté l'action ;
- Ce faisant, l'investisseur va payer ces dividendes au prêteur s'il y en a ;
- Ce paiement se nomme le **taux de location** (« *lease rate* ») de l'actif.

### Mesures de taille et d'activité d'un marché

**Volume total des transactions** : Nombre total de titres transigés pendant une période ;

**Valeur marchande** : nombre d'actions  $\times$  prix par action (\$);

« *Market value* ».

**Valeur notionnelle** : Valeur de l'actif sous-jacent du produit dérivé ;

**Position ouverte** : Nombre de contrats encore en vigueur du produit dérivé ;

« *Open interest* ».

**Rôle des marchés financiers** : Partage du risque et diversification des risques.

### Bid-Ask Spread

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**). Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura  $Ask - Bid > 0$ .

#### Prix

**Ask** : Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent ;

Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé ;

« *ask price* » se traduit au **cours vendeur** représentant l'idée de regarder les prix auxquels se transigent l'actif ;

**Bid** : Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent

« *bid price* » se traduit au **cours acheteur** ;

Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible ;

### Terminologie des marchés

**Ordre au cours du marché** : On achète et vend selon les prix Bid Ask actuels ;

« *Market order* ».

**Ordre à cours limité :** On achète le sous-jacent si  $Ask < k$  ou on vend le sous-jacent si  $Bid > k$ .

« Limit order ».

**Ordre de vente stop :** On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si  $Bid \leq k$ .

« Stop-loss order ».

**Longue** On se considère en position longue par rapport au sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent.

**Courte** On se considère en position longue par rapport au sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

## 2 Introduction aux Forwards et aux options

### Terminologie

**Premium :** Flux financiers à  $t = 0$ ;

Prix de l'option / prime;

Si positif, il s'agit d'un coût;

Si négatif, il s'agit d'une compensation.

**Valeur à l'échéance  $T$  :** Les flux de trésorerie au temps  $t = T$ ;

- > « payoff »;
- > C'est à dire, l'argent que l'on reçoit à l'échéance;
- > Dans le cas de l'achat d'un actif, on reçoit son prix et donc s'il est nul on ne reçoit rien;
- > C'est le profit qui prend en compte les dépenses initiales et qui sera négatif.

**Profit<sup>a</sup>** = (valeur à l'échéance) - (valeur accumulée du coût initial)  
 =  $VA(\text{flux monétaires})^b$

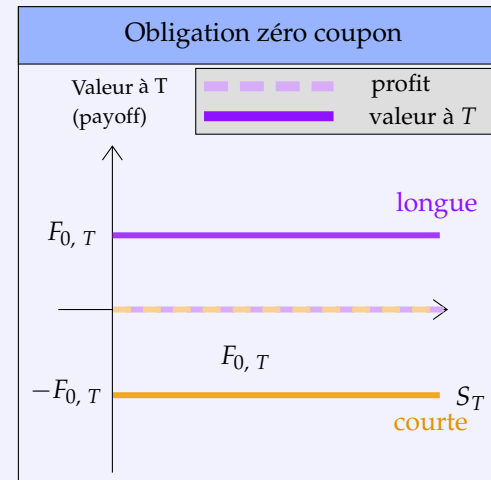
$r_f$  : taux d'intérêt sans risque (effectif annuel).

$r$  : force d'intérêt sans risque (annuelle).

a. Valeur Accumulée au taux sans risque.

b. Pour exemple acheter une voiture et la revendre 10 ans plus tard—(prix de revente à dans 10 ans) - (valeur accumulée du coût d'achat initial à 0 au courant des 10 dernières années).

### Obligation zéro coupon



Le profit sera donc toujours nul.

La position

**longue :** Équivaut à un dépôt;

**courte :** Équivaut à un emprunt.

| Valeur à l'échéance                   |
|---------------------------------------|
| $F_{0,T}$                             |
| Profit                                |
| $F_{0,T} - (F_{0,T} - e^{-rT})e^{rT}$ |

### Contrat à terme (de gré à gré) « forward contract »

Contrat selon lequel :

- > deux partis s'engagent d'échanger—un à acheter et l'autre à vendre;
- > une certaine quantité d'un certain bien—l'actif sous-jacent  $S$ ;
- > à un certain prix—prix à terme  $F_{0,T}$ ;
- > à un certain endroit à une certaine date—date d'échéance,  $T$ ;

L'engagement est au départ à  $t = 0$  mais aucune transaction y a lieu. Ce faisant, le profit sera égale à la valeur à l'échéance puisqu'il n'a pas de flux financiers à 0 à accumuler. L'achat ferme en revanche, implique l'achat et la livraison de l'actif au départ à  $t = 0$ . Donc :

| Transaction             | Valeur à l'échéance | Profit             |
|-------------------------|---------------------|--------------------|
| Achat ferme             | $S_T$               | $S_T - S_0 e^{rT}$ |
| Contrat à terme (achat) | $S_T - F_{0,T}$     | $S_T - F_{0,T}$    |

## Notation de prix

$S_t$  : **Valeur** de l'actif sous-jacent à  $t$ ;

$S_0$  : **Prix au comptant**;

- > Le prix au comptant représente le paiement pour la livraison immédiate à  $t = 0$ ;
- > « *spot price* ».

$F_{0,T}$  : est le **prix à terme**;

$$> F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$$

$F_{0,0}$  : est nul;

- > La notation  $F_{0,T}$  vient de « future » ou « forward ».

## Exemple de bateau

- > Je veux acheter un (*quantité*) bateau (*bien*), mais il est inconvenient pour moi de le recevoir maintenant;
  - > En lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente (*engagement*) pour l'acheter;
  - > La seule différence entre l'acheter aujourd'hui (*au prix au comptant*  $S_0$ ) et l'acheter lorsque la neige fond (*au prix à terme*  $F_{0,T}$ ) est l'accumulation d'intérêt;
  - > Puisqu'on suppose tout les deux d'être fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque ( $r$ ) et le prix payable rendu à l'été ( $T$ ) sera  $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$ ;
- Si le taux sans risque est un **taux plutôt** qu'une *force* d'intérêt, on obtient  $F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$ .

## Types d'exercices

**Européen** : Au moment d'expiration de l'option  $T$ ;

**Américain** : N'importe quand (*any moment*) d'ici  $T$ ;

**Bermudien** : À quelques périodes (*bounded periods*) d'ici  $T$ ;

En réalité, la majorité sont *américain* et donc nous effectuons uniquement des calculs avec ce type.

## Option d'achat

Contrat qui :

- > permet (**optionnel**) à son détenteur d'acheter;
- > une certaine **quantité** d'un certain **bien**—l'actif sous-jacent;
- > à un certain **prix**—prix d'exercice  $K$ ;
- > à un certain **endroit** à, ou d'ici, une certaine **date**—date d'échéance,  $T$ ;

## Notation

$C_0$  : **Prix** pour acheter l'option d'achat;

$C(K)$  : Notation pour représenter l'option d'achat (« *Call* ») avec un prix d'exercice de  $K$ .

## Option de vente

Contrat qui permet à son détenteur de **vendre** au lieu d'acheter.

## Notation

$P_0$  : **Prix** pour acheter l'option de vente;

$P(K)$  : Notation pour représenter l'option de vente (« *Put* ») avec un prix d'exercice de  $K$ .

## Exercice (levée)

Décision d'exercer l'option d'achat ou de vente.

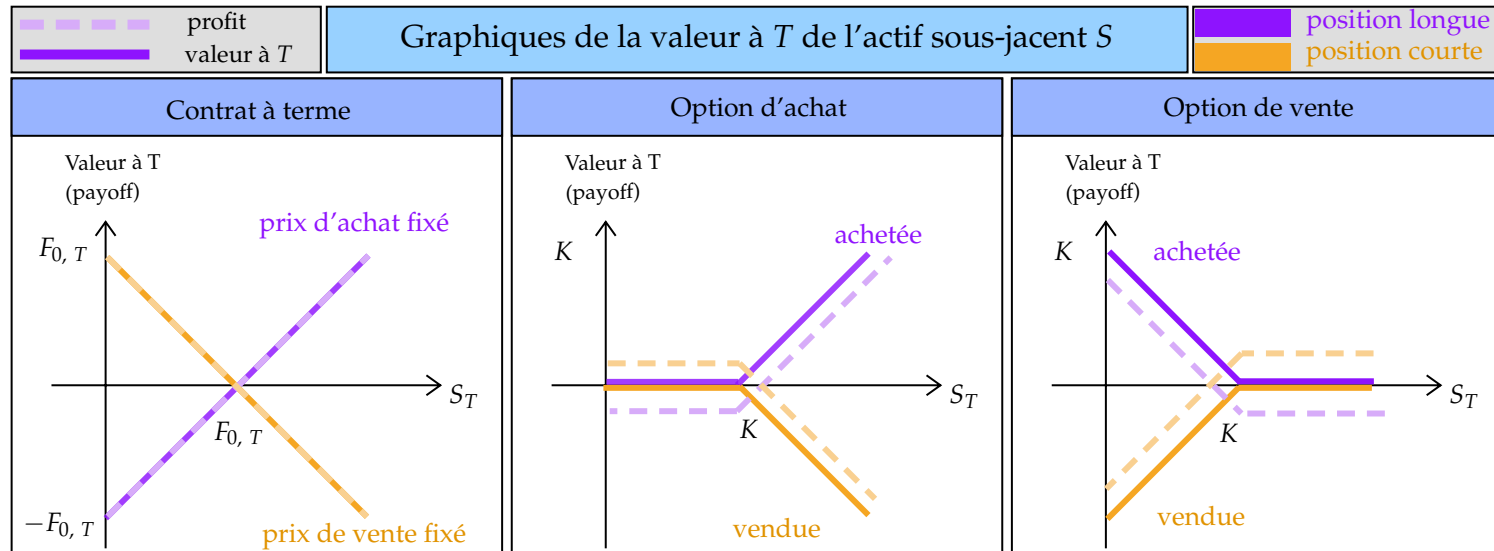
## Notation

$K$  : **Prix d'exercice** (*strike price*);

Pour bien comprendre les définitions de profit au tableau ci-dessous, ne pas oublier que  $C_0$  représente le prix, ou « *premium* », payé par l'acheteur d'une option et donc qu'il est naturel de le soustraire de sa valeur à l'échéance. Le vendeur de l'option tant qu'a lui reçoit ce paiement et on y additionne la valeur accumulée en lieu. Il s'ensuit donc que la ligne de profit pour la position longue est moins élevée, car on y soustrait la valeur accumulée du prix alors que celle de la position courte est

plus élevée.

| Autre Contrat   | Position       | Rôle                 | Stratégie  | Valeur à T (payoff)                                 | Profit                |
|-----------------|----------------|----------------------|--|---|-----------------------|
| Contrat à terme | Longue         | obligation d'acheter | garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent  | $S_T - F_{0,T}$                                     |                       |
|                 | Courte         | obligation de vendre | garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent | $-(S_T - F_{0,T})$                                  |                       |
| Option          | d'achat (call) | Longue               | droit d'acheter                                  | achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé  | $\max\{0, S_T - K\}$  |
|                 |                | Courte               | obligation de vendre                             | vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé  | $-\max\{0, S_T - K\}$ |
|                 | de vente (put) | Longue               | droit de vendre                                  | achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible | $\max\{0, K - S_T\}$  |
|                 |                | Courte               | obligation d'acheter                             | vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible | $-\max\{0, K - S_T\}$ |



| Degré de parité | « Moneyness »        | Option d'achat | Option de vente |
|-----------------|----------------------|----------------|-----------------|
| au cours        | « At-the-money »     | $S_T = K$      | $S_T = K$       |
| dans le cours   | « In-the-money »     | $S_T > K$      | $S_T < K$       |
| hors du cours   | « Out-of-the-money » | $S_T < K$      | $S_T > K$       |

### 3 Stratégie de couverture

#### 3.1 Préliminaires

##### Hypothèses

Pour tout le chapitre, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Taux d'intérêt  $i$  constant;
2. Aucuns frais de transaction;
3. Aucun risque de défaut;
4. Aucun versement intermédiaire.

##### Propriétés des maximums et minimums

$$\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)$$

$$\min(a, b) + c = \min(a + c, b + c)$$

$$\min(a, b) = -\max(-a, -b)$$

$$\max(a, b) \times c = \max(a \times c, b \times c), c > 0$$

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$$

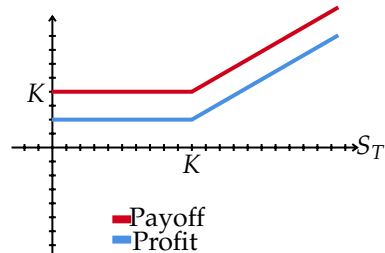
#### Floor

On achète  $S$  en se protégeant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

$$\text{Floor} = \text{Stock} + \text{Put}(K, T)$$

$$\text{Premium} = S_0 + P(K, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases}$$



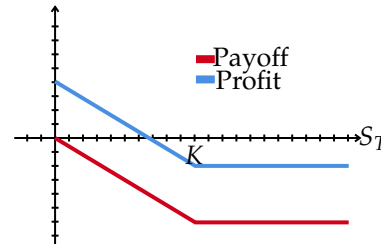
#### Cap

On vend à découvert  $S$  en se protégeant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter!). **Position courte.**

$$\text{Cap} = \text{Call}(K, T) - \text{Stock}$$

$$\text{Premium} = C(K, T) - S_0 < 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases}$$



#### Écart haussier « Bull Spread »

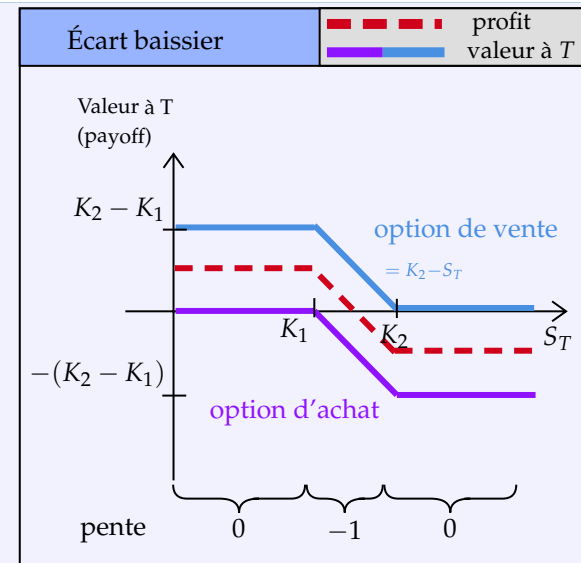
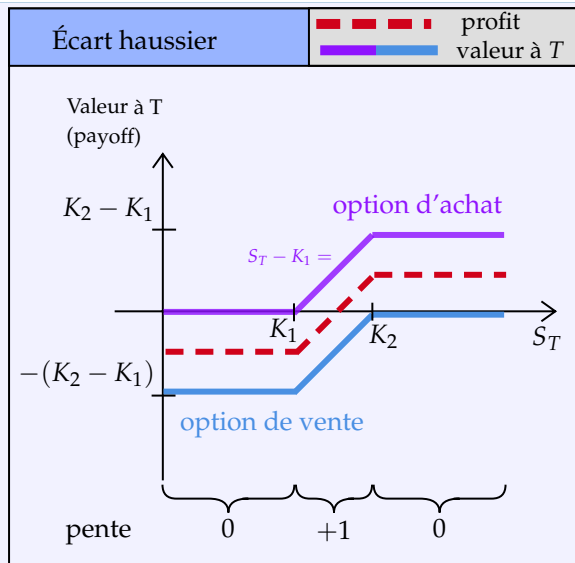
Crée en :

- > Achetant une option d'achat  $C(K_1)$  et vendant une autre option achat  $C(K_2)$  à un prix d'exercice plus élevé  $K_2 > K_1$ ;
- > Achetant une option de vente  $P(K_1)$  et vendant une autre option de vente  $P(K_2)$  à un prix d'exercice plus élevé  $K_2 > K_1$ .

##### Contexte

- > Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va augmenter **mais** qu'il
    - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse;
    - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
  - > « Bull Spread » provient de l'idée d'être « **bull-ish** » et prévoir une augmentation du prix de l'action à un intervalle;
- On peut également visualiser un taureau avec ses cornes pointues vers le haut prêt à attaquer.





### Écart baissier « Bear Spread »

L'inverse d'un écart haussier, il est crée en :

- > Vendant une option d'achat  $C(K_1)$  et achetant une autre option achat  $C(K_2)$  à un prix d'exercice plus élevé  $K_2 > K_1$  ;
- > Vendant une option de vente  $P(K_1)$  et achetant une autre option de vente  $P(K_2)$  à un prix d'exercice plus élevé  $K_2 > K_1$ .

#### Contexte

- > Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va baisser *mais* qu'il
    - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
    - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
  - > « Bear Spread » provient de l'idée d'investir avec précaution pour « *bear-er* » une et baisse du prix de l'action à un intervalle ;
- On peut également visualiser un ours qui va « strike down » avec ses pattes d'ours en attaque.

### Écart sur ratio d'options « Ratio Spread »

Crée en :

- > **achetant**  $m$  options à un prix d'exercice  $K_1$  et
- > puis **vendant**  $n$  options à un prix d'exercice  $K_2$  différent où
- >  $m \neq n$  et  $K_1 \neq K_2$ .

### Boîte « Box Spread »

- > La stratégie consiste à acheter un écart haussier ainsi qu'un écart baissier où l'un utilise des options d'achat et l'autre des options de vente (ayant les mêmes caractéristiques);
- > Il est utilisé pour emprunter ou prêter de l'argent avec une valeur à l'échéance connue en avance, peu importe la direction prise par la valeur de l'actif sous-jacent;
- > Il est donc équivalent à une obligation zéro-coupons.

Si on crée un écart haussier avec des

- > options d'achat
  - > options de ventes
- et un écart baissier avec

- > options de ventes
  - > options d'achat
- la valeur à l'échéance est équivalente à celle d'une obligation zéro-coupon sans risque

- > à position longue.
- > à position courte.

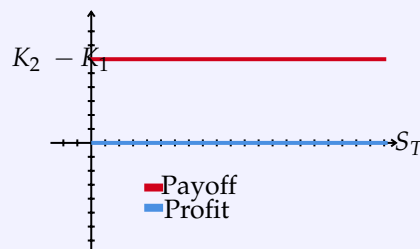
Cela est donc équivalent à

- > à prêter de l'argent.
- > à emprunter de l'argent.

$$\begin{aligned}\text{Box Spread} &= \text{Bull}(\text{Call}) + \text{Bear}(\text{Put}) \\ &= \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) \\ &\quad + \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T)\end{aligned}$$

$$\text{Premium} = C(K_1, T) - C(K_2, T) + P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = K_2 - K_1, \forall S_T$$



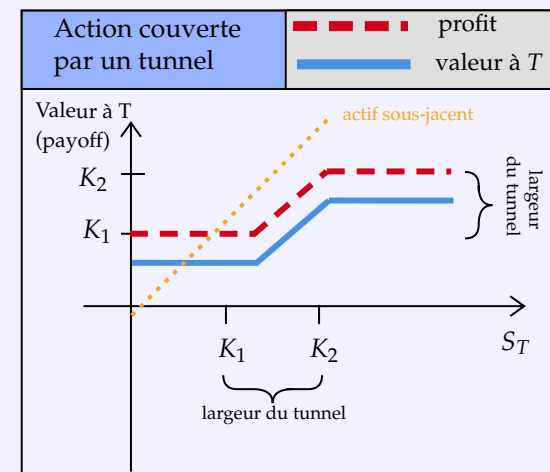
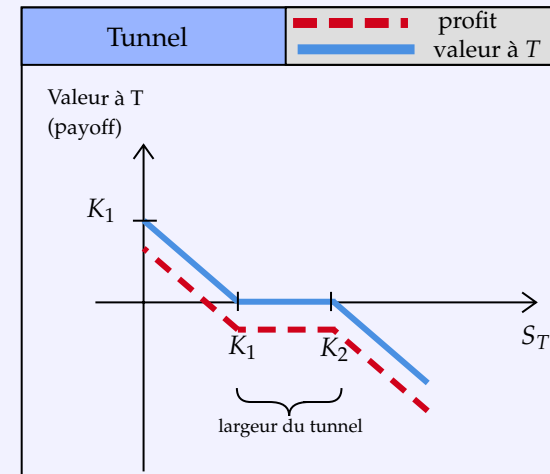
### Tunnel « Collar » et action couverte par un tunnel « Collared stock »

Le tunnel (« Collar ») est créé en

- > Achetant une option de vente  $P(K_1)$  et
- > vendant une option d'achat  $C(K_2)$  où
- >  $K_1 < K_2$ .

Lorsqu'on achète l'actif (position longue) en plus, nous obtenons une action couverte par un tunnel (« Collared stock »).

La largeur du tunnel est  $K_2 - K_1$ .



$$\text{tunnel} = P(K_1) - C(K_2)$$

action couverte par un tunnel =  $P(K_1) - C(K_2) + S_T$

### Stellage « straddle »

Créé en achetant une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice  $K$ .

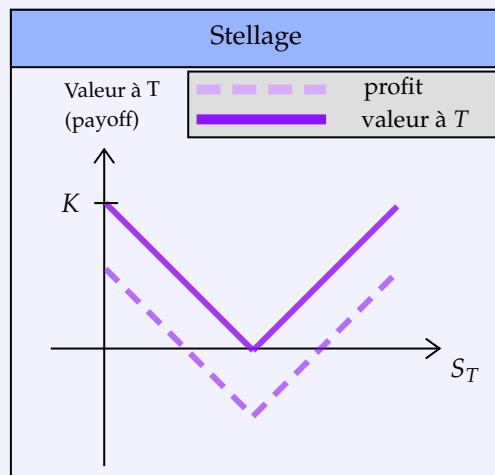
#### Contexte

- Souvent bâti avec un prix d'exercice au cours du marché (in-the-money);
- L'idée est de faire un profit si le prix de l'actif sous-jacent **baisse ou descend**;
- Son avantage est donc qu'il peut être profitable avec une baisse ou hausse du prix de l'actif sous-jacent;
- Cependant, puisqu'il faut acheter deux options au cours du marché, le coût est plutôt élevé.

$$\text{Straddle} = \text{Put}(K, T) + \text{Call}(K, T).$$

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$|S_T - K| \equiv \begin{cases} (K - S_T) + 0 = K - S_T, & S_T \leq K \\ 0 + (S_T - K) = S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$



### Stellage élargi « strangle »

Créé en

- achetant une option de vente avec un prix d'exercice  $K_1$  et
- achetant une option d'achat avec un prix d'exercice  $K_2$  où
- $K_1 < K_2$ .

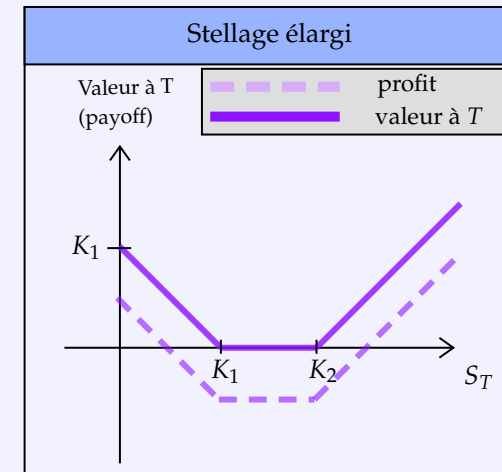
#### Contexte

- Pour réduire le coût des primes, les options sont à des prix d'exercice hors du cours du marché (out-of-the-money);
- Cela réduit la perte maximale mais augmente la variation nécessaire pour faire un profit.

$$\text{Strangle} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_2, T).$$

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$\begin{cases} (K_1 - S_T) + 0 = K_1 - S_T, & S_T \leq K_1 \\ 0 + 0 = 0, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 + (S_T - K_2) = S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$



## 5 Forwards et Futures

### Écart papillon « Butterfly Spread (BFS) »

Créé en

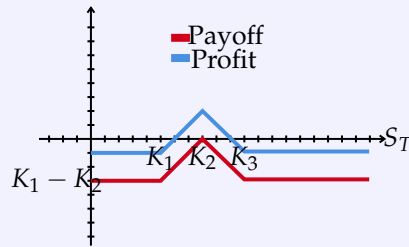
- › achetant stellage élargi avec prix d'exercices  $K_1$  et  $K_3$
- › vendant un stellage avec un prix d'exercice  $K_2$  où
- ›  $K_1 < K_2 < K_3$ ;
- › L'écart papillon est symétrique avec  $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$ .

$$\text{BFS} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_3, T) - \text{Put}(K_2, T) - \text{Call}(K_2, T).$$

**Notes**

- › Il existe plusieurs façons de recréer un écart papillon;
- › Pour exemple, un écart haussier aux prix d'exercice  $K_1$  et  $K_2$  combiné avec un écart baissier aux prix d'exercice  $K_2$  et  $K_3$ .

$$\text{BFS} = \text{Call}(K_1, T) - 2\text{Call}(K_2, T) + \text{Call}(K_3, T).$$



### Écart papillon asymétrique

- › De façon similaire à l'écart papillon, on vend et achète en proportion différentes le stellage et stellage élargi;
- ›  $A\text{-BFS} = m\text{Call}(K_1, T) - (m + n)\text{Call}(K_2, T) + n\text{Call}(K_3, T)$ ;
- › L'écart est asymétrique avec  $m(K_2 - K_1) = n(K_3 - K_2)$ .

On utilise la notation avec  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Pour chaque option avec un prix d'exercice de  $K_2$  achetée, on achète  $\lambda K_1$  et  $(1 - \lambda)K_3$ .

## 4 façons d'acheter une action

| Contrat                  | Moment de paiement | Moment de d'achat | Paiement     |
|--------------------------|--------------------|-------------------|--------------|
| Outright purchase        | 0                  | 0                 | $S_0$        |
| Forward contract         | $T$                | $T$               | $F_{0,T}$    |
| Prepaid forward contract | 0                  | $T$               | $F_{0,T}^P$  |
| Fully leveraged purchase | $T$                | 0                 | $S_0 e^{rT}$ |

**Achat pleinement par emprunt « Fully leveraged purchase » :** Emprunte de l'argent pour acheter l'actif maintenant ( $t = 0$ ) et rembourser l'argent au temps  $T$ ;

**Contrat à terme de gré à gré prépayé « Prepaid forward contract » :** Paye au début ( $t = 0$ ) au prix  $P$  au lieu de plus tard, mais on reçoit quand même l'actif plus tard.

Ce faisant, on s'attend que  $F_{0,T} = F_{0,T}^P e^{rT}$ .

## Notation de prix

$F_{0,T}^P$  : est le **prix à terme** d'un contrat à terme de gré à gré prépayé;  
 $\triangleright F_{0,T} = F_{0,T}^P e^{rT}$ .

## La loi du prix unique

Stipule que deux portefeuilles avec les mêmes profits doivent avoir le même prix.

Nous tarifions des contrats à terme de gré à gré *prépayé* et utilisons ces prix pour dériver le prix des contrats à terme de gré à gré.

## Tarification d'un contrat à terme de gré à gré prépayé

Sans dividendes, on obtient un prix de  $S_0$ ; soit, le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui. Dans le cadre d'une action cependant, il peut y avoir des dividendes.

Les dividendes sont payables au propriétaire de l'action. Puisque l'acheteur du contrat (position longue) va seulement posséder le contrat au temps  $T$ , il ne recevra alors pas de dividendes. Cela baisse donc la valeur de l'action et le prix du contrat devra tenir cela en compte.

Dans le cas de **dividendes discrets**, il suffit de soustraire la valeur actualisée des dividendes :  $F_{0,T}^P = S_0 - PV(div)$ .

Un modèle de **dividendes payés continument** suppose un taux de dividendes continûment composé  $\delta$ . Alors, une part de l'action au temps initial devient  $e_{\delta T}$  parts au temps  $T$ . Cependant, nous voulons seulement une part au temps  $T$  et donc nous devons acheter  $e_{-\delta T}$  parts au début. Le prix est donc  $F_{0,T}^P = S_0 e^{-\delta T}$ .

En bref :

| Dividendes                   | Prix à terme prépayé | Prix à terme            |
|------------------------------|----------------------|-------------------------|
| Sans dividendes              | $S_0$                | $S_0 e^{rT}$            |
| Dividendes payés continument | $S_0 e^{-\delta T}$  | $S_0 e^{(r-\delta)T}$   |
| Dividendes discrets          | $S_0 - PV(div.)$     | $S_0 e^{rT} - FV(div.)$ |

## Prime à terme « forward premium »

Défini comme le ratio du prix à terme au prix courant de l'actif sous-jacent :

$$\text{Prime à terme} = \frac{F_{0,T}}{S_0}$$

La prime à terme annualisée (« *annualized forward premium* ») est  $\frac{1}{T} \ln \left( \frac{F_{0,T}}{S_0} \right)$ .

### Contrat à terme synthétique « *synthetic forward* »

Un contrat à terme synthétique réplique la valeur à l'échéance d'un contrat à terme sans réellement en signer un.

Avec un **vrai** contrat à terme :

- > le coût initial est nul et
- > la valeur à l'échéance est l'écart entre le prix à terme et la valeur du sous-jacent ( $S_T - F_{0,T}$ ).

Avec un contrat à terme **synthétique** :

- > on prévoit l'échange du bien contre un prix quelconque  $K$  et
- > la valeur à l'échéance est leur écart ( $S_T - K$ ).
- > Il s'ensuit que le coût initial ne peut être nul et
- > c'est pourquoi on **emprunte de l'argent**, ou de façon équivalente, **vend une obligation zéro-coupons**.

En bref, on **achète l'actif et emprunte de l'argent** :

| Transaction             | Flux au temps 0 | Flux au temps $T$        |
|-------------------------|-----------------|--------------------------|
| Acheter un actif        | $-S(0)$         | $+S(T)$                  |
| Emprunter de l'argent   | $+S(0)$         | $-S(0)e^{rT} = -F_{0,T}$ |
| Net des flux monétaires | 0               | $S(T) - F_{0,T}$         |

**Forward synthétique avec dividendes** On suppose le réinvestissement des dividendes.

$$\text{Forward}_{\text{avec div.}} = e^{-\delta T} \text{Stock} - (e^{-\delta T} \cdot S_0) \text{Bond}$$

$$\text{Premium} = e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 = 0$$

$$\text{Payoff} = S_T - S_0 e^{(r-\delta)T}$$

Est-ce de l'arbitrage ?

| Flux monétaires   | Oui | Non |
|---|-----|-----|
| Au temps 0, est-ce que le flux monétaire net est $\geq 0$ ?       | X   |     |
| Est-ce que tous les flux monétaires nets futurs sont $\geq 0$ ?   | X   |     |
| Est-ce qu'au moins un des flux monétaires nets futurs est $> 0$ ? | X   |     |

Si la réponse à tous les questions est oui, alors il y a une opportunité d'arbitrage.

### Position synthétique

Une position synthétique réplique la valeur à l'échéance d'une autre position.

### Achat au comptant - vente à terme « *Cash-and-carry* »

L'investisseur reçoit de l'argent d'un emprunt qu'il utilise pour acheter l'action qu'il porte à terme au futur.

L'inverse arrive lorsque le marché offre un contrat à terme de gré à gré sous-évalué.

### Calcul avec prime de risque et nuance

- > Certains sous-jacent ont une composante de risque non-négligeable. Or, on ne peut pas dire que  $F_{0,T} = E[S_T]$ . Toutefois,

$$F_{0,T} = E[S_T] e^{-(\alpha-r)T}$$

où  $\alpha$  est la prime de risque qu'on enlève pour obtenir le prix du Forward, tel que

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha-r)}_{\text{Prime de risque}}$$

### Forward de devise

#### Put-Call parity avec les devises

**DD** Devise locale

**DÉ** Devise étrangère

$x_0$  Taux de change  $\frac{DD}{DÉ}$  actuel ( $t = 0$ )

$r_D$  Taux sans risque local

$r$  Taux sans risque étranger

Le prix Forward prépayé pour une unité de DÉ à  $t = 0$  (payé en DD) est

$$F_{0,T}^P = x_0 (1+r)^{-T}$$

Et le prix Forward (à  $t = T$ ) pour une unité de DÉ est

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F_{0,T}^P (1+r_D)^T \\ &= x_0 \left( \frac{1+r_D}{1+r} \right)^T \\ &= x_0 e^{(r_D-r)T} \end{aligned}$$

### Forward synthétique de devise

- > Emprunt de  $x_0(1+r)^{-T}$  DD au taux  $r_D$
- > Convertir les DD en DÉ
- > Dépôt de  $(1+r)^{-T}$  DÉ (au taux  $r$ ) de 0 à  $T$ .

Le payoff sera  $x_t - x_0 \left( \frac{1+r_D}{1+r} \right)^T$ .

#### Contrat à terme standardisé « *future contract* »

Différences aux contrats à terme de gré-à-gré :

1. **Personnalisable;**
  - Pour un *forward*, l'acheteur et le vendeur peuvent choisir n'importe quel prix, montant, date d'échéance ou actif sous-jacent;
  - Pour un *future*, ces composantes sont prédéterminées et ont dit donc qu'il est **standardisé**.
2. **Valorisation au prix du marché « *Marked-to-Market* »;**
  - Pour un *forward*, tous les échanges d'argent se produisent à l'échéance (contrat est réglé à l'échéance);
  - Pour un *future*, les pertes et profits sont réglés tous les jours (processus de valorisation au prix du marché).
3. **Risque de défaut;**
  - Pour un *forward*, le contrat est pleinement exposé au risque de défaut;
  - Pour un *future*, avec le règlement quotidien des pertes et de profit le risque de défaut est minimisé.
4. **Liquidité :** fait référence à l'aise d'acheter ou de vendre un actif, ou de façon équivalente, de sortir ou entrer de leur position;
  - Pour un *forward*, il est impossible de sortir d'un contrat et donc ils ne sont pas liquides;
  - Pour un *future*, puisqu'ils sont transigés sur les marchés boursiers, ils sont liquides.
5. **Limite de prix;**
  - Pour un *forward*, il n'y a aucune limite de prix sur l'actif sous-jacent et il peut varier sans limites;
  - Pour un *future*, il y a des limites incluses dans le contrat.

Puisque le règlement des contrats à terme standardisé est différent des contrats à terme de gré à gré, le prix à terme sera également différent.

#### Marges initiales et de maintien « *initial and maintenance margins* »

**Compte** Afin de contrer le risque de défaut, l'acheteur et le vendeur doivent déposer de l'argent dans un compte (« *a margin account* ») accumulant de l'intérêt;

**Marge initiale** Le dépôt initial est nommé la marge initiale (« *initial margin* »);

**Marge de maintien** Les pertes et profits sont soustraits du compte et donc un niveau minimal est requis—la marge de maintien (« *maintenance margin* »);

**Appel de marge** Si le montant dans le compte descend en dessous de la marge de maintien, nous recevons un appel de marge (« *margin call* ») qu'il faut y ajouter des fonds pour ramener la balance à la **marge initiale**.

## 9 Put-Call Parity

$$Call - Put = Stock - Bond$$

### Put-Call Parity avec devises

$Call(x_0, K, T)$  : Option d'achat qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance  $t = T$ .

$Put(x_0, K, T)$  : Option de vente qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance  $t = T$ .

Alors, on peut réécrire l'équation Put-Call Parity :

$$Call(x_0, K, T) - Put(x_0, K, T) = x_0(1+r)^{-T} - K(1+r_D)^{-T}$$

### Parité généralisée et option d'échange

$Call(S_t, Q_t, T-t)$  : Option d'achat qui permet d'acheter le sous-jacent  $S$  au prix du sous-jacent  $Q$  au temps  $t = T$ .

$Put(S_t, Q_t, T-t)$  : Option de vente qui permet de vendre le sous-jacent  $S$  au prix du sous-jacent  $Q$  au temps  $t = T$ .

On peut généraliser l'équation Put-Call Parity :

$$C(S_t, Q_t, T-t) - P(S_t, Q_t, T-t) = F_{t,T}^P(S) - F_{t,T}^P(Q)$$

## Options sur devise

$$\begin{aligned} Call_{DD}(x_0, K, T) &= K \cdot Put_{DD}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \\ &= K \cdot x_0 \cdot Put_D\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \end{aligned}$$

## Comparaison de différentes options

### Option américaine vs européenne

$$\begin{aligned} C_{amer}(K, T) &\geq C_{euro}(K, T) \\ P_{amer}(K, T) &\geq P_{euro}(K, T) \end{aligned}$$

**Option d'achat américaine** Bien qu'on puisse exercer l'option américaine au moment qu'on veut, il peut être optimal d'exercer avant l'échéance seulement si

$$PV(div) > K \left(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right)$$

ou si

$$PV(div) > P(K, T - t) + K \left(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right)$$

**Option de vente américaine** Le moment optimal pour exercer le Put serait tout juste **après la date ex-dividende**.

**Date d'expiration** Pour  $T_1 < T_2$ ,

$$\begin{aligned} C(K, T_1) &\leq C(K, T_2) \\ P(K, T_1) &\leq P(K, T_2) \end{aligned}$$

**Prix d'exercice** Les différentes conditions énumérées ci-bas doivent être respectées :

$$\begin{aligned} C(K, T) &\geq S_0 - K & P(K, T) &\geq K - S_0 \\ C(K_1, T) &> C(K_2, T) & P(K_1, T) &< P(K_2, T) \\ C(K_1, T) - C(K_2, T) &\leq K_2 - K_1 & P(K_2, T) - P(K_1, T) &\leq K_2 - K_1 \\ \frac{C(K_1, T) - C(K_2, T)}{K_2 - K_1} &\geq \frac{C(K_2, T) - C(K_3, T)}{K_3 - K_2} & \frac{P(K_2, T) - P(K_1, T)}{K_2 - K_1} &\geq \frac{P(K_3, T) - P(K_2, T)}{K_3 - K_2} \end{aligned}$$

1. i.e.  $K_t = K(1 + r_f)^T$ .

Si le prix d'exercice est *Constant en valeur actualisée*<sup>1</sup>, alors, avec  $t < T$

$$\begin{aligned} C(K_t, t) &\leq C(K_T, T) \\ P(K_t, t) &\leq P(K_T, T) \end{aligned}$$

## 10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

### Probabilité neutre au risque

- ›  $U = uS$  est la valeur supérieure que peut prendre le sous-jacent  $S$
- ›  $D = dS$  est la valeur inférieure que peut prendre le sous-jacent  $S$
- ›  $p$  est la probabilité (Bernouilli) que le sous-jacent prenne la valeur  $U$ .
- ›  $C_u, C_d, P_u$  et  $P_d$  sont les payoff d'un call (ou put) selon la valeur du sous-jacent après  $h$  périodes.
- ›  $r$  et  $\delta$  sont respectivement la force d'intérêt sans risque et le taux de dividende continu.

Alors, la probabilité *neutre au risque* est

$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

### Portefeuille réplcatif d'une option

On peut reproduire une option (Call ou Put) avec la stratégie suivante :

$$C = \Delta S + B$$

où  $B$  et  $\Delta S$  changent de signe selon si c'est un Call ou un Put. On peut obtenir la prime initiale (*Premium*) et les composantes du portefeuille réplcatif avec

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-\delta h} \left( \frac{C_u - C_d}{U - D} \right) = e^{-\delta h} \left( \frac{C_u - C_d}{S(u - d)} \right) \\ B &= e^{-rh} \left( \frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D} \right) = e^{-rh} \left( \frac{u C_d - d C_u}{u - d} \right) \\ \text{Premium} &= \Delta S_0 + B \end{aligned}$$