

CONTRIBUTEURS

ACT-1002 Analyse probabiliste des risques actuariels

aut. Alec James van Rassel

aut., cre. Félix Cournoyer

src. Hélène Cossette

1 Analyse combinatoire

1.1 Outils d'analyse combinatoire

Principe de base de comptage

Pour une expérience 1 avec m résultats possibles et une expérience 2 avec n résultats possibles, il y a $m * n$ résultats possibles pour les deux expériences ensemble. Ce résultat peut être généralisé pour r expériences, où il y aurait $n_1 * n_2 * \dots * n_r$ possibilités.

Permutations

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments **distincts (donc qu'on s'intéresse à l'ordre de ces éléments)**, le nombre total de possibilités est représenté par $n!$.

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments de k types différents dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, ..., n_k sont identiques (**donc qu'on s'intéresse à l'ordre de ces éléments**), le nombre total de possibilités est représenté par :

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

Combinaisons

Lorsqu'on s'intéresse au nombre de groupe possibles de k éléments parmi n (**donc qu'on ne s'intéresse pas à l'ordre de ces éléments**), le nombre total de possibilités est représenté par $\binom{n}{k}$.

Notation

Dans l'exemple précédent, on peut observer la notation propre au coefficient binomial. Ce dernier peut être réécrit de la façon suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Exemples classiques sur les permutations et les combinaisons

1 Combien de façons différentes peut-on placer 4 livres distincts sur une étagère ? C'est une permutation entre 4 éléments. La réponse est $4!$.

2 Combien d'arrangements ordonnés différents peut-on faire avec les lettres du mot LAVAL ?

C'est une permutation d'un ensemble qui contient deux paires d'éléments semblables. Donc, la réponse est $\frac{5!}{2!2!1!}$.

3 Combien de façons différentes peut-on distribuer 12 cadeaux différents à 4 personnes ?

Attention! Ici, il faut bien voir que, pour chaque cadeau, il y a 4 possibilités (et **non** qu'il y a 12 possibilités pour chaque personne!). Donc, la réponse est 4^{12} .

Dans ce numéro, il faut aussi faire attention au fait qu'on précise que les cadeaux sont distincts (donc qu'on différencie les cadeaux). Si ce n'était pas le cas, il s'agirait d'un numéro sur des éléments indissociables.

4 Combien de groupes différents de 2 jouets peut-on faire avec 6 jouets ? La réponse est $\binom{6}{2}$.

Coefficient multinomial

La généralisation du coefficient binomial va comme suit :

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_m!}$$

où $n = \sum_{i=1}^m k_i$. Cette formule est utile si on veut séparer des éléments entre plusieurs groupes.

📖 Coefficient multinomial (suite)

Par exemple, si on a 10 jouets à séparer entre 3 enfants, et que le premier en veut 5, le deuxième en veut 2, et le troisième en veut 3, le nombre de possibilités est donné par $\binom{10}{5,2,3}$.

Si, cette fois-ci, on différencie les groupes, et qu'on ne sait pas quel groupe aura quel nombre d'objets, il faut multiplier le coefficient multinomial de la façon suivante :

$$\text{coefficient multinomial} * \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_n!}$$

où n correspond au nombre total de groupes et n_i correspond au nombre de groupes dans lesquels i éléments ont été placés.

Par exemple, si cette fois-ci on dit qu'il faut séparer 10 jouets à travers 3 enfants en donnant 3 jouets à 2 enfants et 4 jouets à l'autre enfant, sans spécifier quel enfant recevra 4 jouets, le résultat sera :

$$\binom{10}{3,3,4} * \frac{3!}{1!2!}.$$

📖 Théorème binomial

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

📖 Théorème multinomial

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

1.2 Nombre de solutions entières

☰ Nombre de solutions entières

Dans certains cas, on s'intéressera au nombre de façons qu'on peut distribuer des éléments **indissociables** dans des contenants. Ainsi, c'est le nombre d'éléments dans chaque contenant qui nous intéressent, et non quel élément va dans quel contenant.

☰ Nombre de solutions entières (suite)

On peut ramener ce problème à une équation de la forme suivante :

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$$

où k_i correspond au nombre d'éléments dans le contenant i et n le nombre d'éléments à placer dans les contenants. On essaie donc de trouver le nombre de combinaisons possibles de k_1, k_2, \dots, k_r . Voici une façon de résoudre les problèmes reliés aux nombres de solutions entières :

- > S'il faut placer au moins un élément dans chaque contenant (donc $k_i \geq 1$ pour tout i), on peut appliquer la formule : $\binom{n-1}{k-1}$.
- > S'il n'y a pas de contraintes en lien avec le nombre d'éléments à placer (donc $k_i \geq 0$ pour tout i), on peut appliquer la formule : $\binom{n+k-1}{k-1}$.
- > Si on mentionne dans l'énoncé qu'on peut ne pas distribuer tous les éléments, on rajoute un contenant de plus à l'équation, qui comprend tous les éléments non distribués (le nombre d'éléments dans ce contenant sera plus grand ou égal à 0).
- > S'il y a une contrainte supérieure, on fait le problème sans tenir compte de cette contrainte, et on enlève le nombre de cas ne respectant pas la contrainte une fois le problème fait.
- > Si la contrainte inférieure varie d'un contenant à un autre, ou si elle est supérieure à 2, on applique la stratégie suivante.

Exemple : il y a 10 balles à placer dans trois urnes. La première urne n'a aucune contrainte, la deuxième urne doit contenir au minimum 1 balle et la troisième urne doit contenir au minimum 3 balles. On obtient l'équation ci-dessous :

$$k_1 + k_2 + k_3 = 10.$$

Ici, on va poser $y_1 = k_1 + 1$, $y_2 = k_2$ et $y_3 = k_3 - 2$ afin que $y_i \geq 1$ pour tout i . On réécrit l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$y_1 - 1 + y_2 + y_3 + 2 = 10$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9.$$

On peut par la suite calculer le nombre de possibilités en utilisant la formule lorsque le nombre d'éléments dans chaque contenant doit être plus grand ou égal à 1 : $\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2}$ possibilités.

2 Axiomes de probabilité

2.1 Définitions importantes

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est un processus où on ne peut pas prédire avec certitude le résultat.

Espace échantillonnal

L'espace échantillonnal est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On dénote cet espace par Ω ou S .

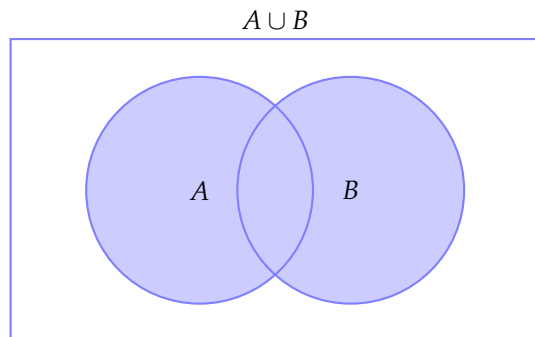
Événement

Un événement est un sous-ensemble d'un espace échantillonnal. On dénote l'événement par une lettre majuscule A, B, C , etc.

2.2 Opérations sur les ensembles

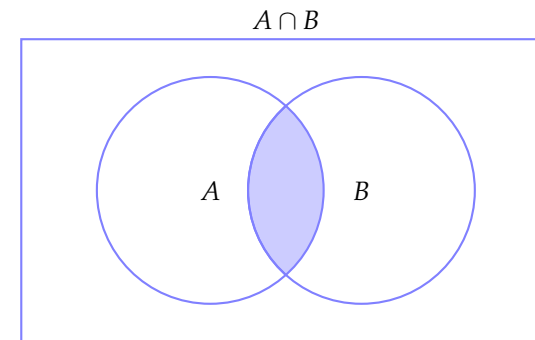
L'union (\cup) : On peut le voir comme un « ou ». Lorsqu'il est utilisé, on s'intéresse à savoir si un résultat est présent dans au moins un des ensembles impliqués.

- › Si l'événement A est d'avoir 3 sur un dé et l'événement B est d'avoir 4 sur ce même dé, les résultats possibles de $A \cup B$ sont 3 et 4.



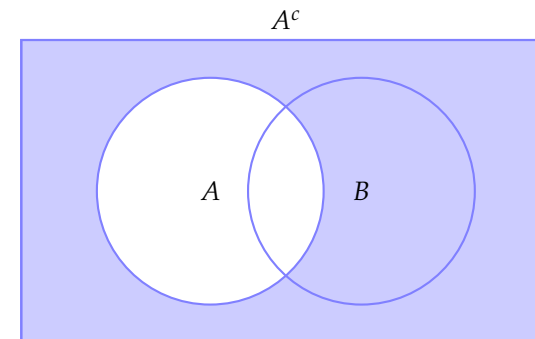
L'intersection (\cap) : On peut le voir comme un « et ». Lorsqu'il est utilisé, on s'intéresse à savoir si un résultat est présent dans tous les ensembles impliqués.

- › Si l'événement A est d'avoir un chiffre pair sur un dé et que l'événement B est d'avoir 5 ou 6 sur ce même lancer de dé, le seul résultat possible de $A \cap B$ est 6, car 6 est un nombre pair et fait partie de l'ensemble B .
- › Une notation alternative est de simplement écrire AB .

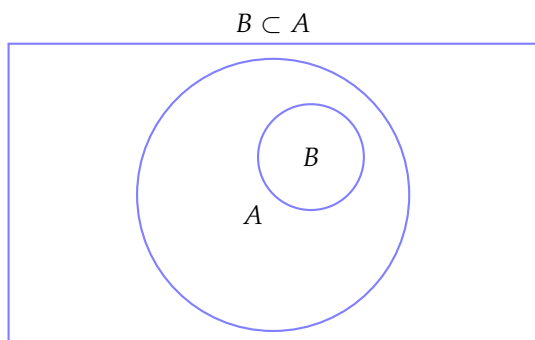


Complémentaire : Un événement A^c est le complémentaire d'un événement A lorsqu'il correspond à tous les résultats de Ω excluant les résultats de A .

- › Un exemple est l'événement « Avoir un nombre pair sur un dé » ; un événement complémentaire serait donc « Avoir un nombre impair sur un dé ».
- › Le complémentaire d'un événement A est désigné par \bar{A} , A^c et A' .



Inclusion (\subset) : Afin de dire que l'événement B est compris dans l'événement A , on peut écrire le tout avec la notation suivante : $B \subset A$. On peut donc dire que tous les résultats de l'événement B se retrouvent aussi dans l'événement A .



2.3 Axiomes de probabilité

✓ Axiomes de probabilité

Supposons que pour chaque événement E de Ω (espace échantillonnal d'une expérience aléatoire), il existe un nombre $\Pr(E)$. On peut appeler ce nombre $\Pr(E)$ la probabilité de E si celle-ci satisfait les axiomes ci-dessous. Autrement dit, ces axiomes sont des règles que les probabilités se doivent de respecter :

- 1) $0 \leq \Pr(A) \leq 1$
- 2) $\Pr(\Omega) = 1$
- 3) Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors $\Pr(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$

✓ Relations à savoir

- 1) $\Pr(\emptyset) = 0$
- 2) $\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$
- 3) Si $E \subset F$, alors $\Pr(E) \leq \Pr(F)$
- 4) **(Formule de Poincaré)**

$$\Pr(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n \Pr(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \Pr(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \Pr(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} \Pr(E_1 E_2 \dots E_n)$$

> À deux événements, on obtient :

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

> À trois événements, on obtient :

$$\Pr(A \cup B \cup C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$$

D'autres relations peuvent être déduites à l'aide d'un diagramme de Venn. Il faut toutefois utiliser la notation probabiliste à travers les calculs. Un diagramme de Venn avec de simples calculs **ne suffit pas** en examen.

✓ Propriétés des ensembles

Commutativité :

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A_2 \cup A_1 \\ A_1 \cap A_2 &= A_2 \cap A_1 \end{aligned}$$

Associativité :

$$\begin{aligned} (A_1 \cup A_2) \cup A_3 &= A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \\ (A_1 \cap A_2) \cap A_3 &= A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Distributivité :

$$\begin{aligned} (A_1 \cup A_2) \cap A_3 &= (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) \\ (A_1 \cap A_2) \cup A_3 &= (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3) \end{aligned}$$

Loi de DeMorgan :

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c &= \left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c \right) \\ \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c &= \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right) \end{aligned}$$

2.4 Résultats équiprobables

Résultats équiprobables

Si chaque résultat de Ω a la même chance de se réaliser, on peut trouver la probabilité qu'un événement A se réalise à l'aide de la formule suivante :

$$\Pr(A) = \frac{\text{Nombre de résultats dans } A}{\text{Nombre de résultats dans } \Omega}$$

Par exemple, si on cherche la probabilité d'obtenir un nombre pair au cours d'un lancer de dé, on peut utiliser la formule ci-dessus, car il y a autant de chances d'obtenir chacun des côtés d'un dé au cours d'un lancer. Ainsi, $\Pr(\text{Obtenir un nombre pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Notation

Notation

On utilise la notation suivante afin de désigner la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé : $\Pr(A|B)$.

3.2 Relations à savoir

Relations à savoir

1) On obtient tout d'abord :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

2) On peut calculer $\Pr(A \cap B)$ des deux façons suivantes :

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A|B) * \Pr(B) \\ \Pr(A \cap B) &= \Pr(B|A) * \Pr(A)\end{aligned}$$

On peut également généraliser ce résultat pour n événements en utilisant la règle de multiplication :

$$\Pr(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \Pr(E_1) * \Pr(E_2|E_1 \cap E_2) * \dots * \Pr(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})$$

3) On peut réécrire l'équation du point 1 de la façon suivante (à l'aide du point 2) :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

4) (Loi des probabilités totales)

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^n \Pr(E|F_i) \Pr(F_i)$$

Pour pouvoir appliquer cette relation, il faut que F_i forment une partition de Ω , c'est-à-dire que $\Pr(F_1) + \Pr(F_2) + \dots + \Pr(F_n) = 1$ et qu'il n'y ait aucun résultat en commun pour aucune paire de F_i (donc que $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour toutes paires de i et j).

Relations à savoir (suite)

5) (Théorème de Bayes) Si on reprend la formule du point 3, et qu'on applique la loi des probabilités totales au dénominateur, on obtient la formule de Bayes.

$$\begin{aligned}\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{\Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{\Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B|A) * \Pr(A) + \Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}\end{aligned}$$

On peut également généraliser ce résultat pour un ensemble d'événements $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ qui forment une partition de Ω .

$$\Pr(F_j|E) = \frac{\Pr(E|F_j) \Pr(F_j)}{\sum_{i=1}^n \Pr(E|F_i) \Pr(F_i)}$$

Indépendance

S'il y a indépendance entre les événements (A et B par exemple), les relations suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}\Pr(A|B) &= \Pr(A) \\ \Pr(A \cap B) &= \Pr(A) * \Pr(B)\end{aligned}$$

On peut également généraliser ces relations lorsqu'il y a plusieurs événements mutuellement indépendants.

Démarche afin de répondre aux questions contextuelles du chapitre 2 et 3

Concernant les questions contextuelles (donc avec une mise en situation) portant sur les notions du chapitre 2 et chapitre 3, voici une démarche qui devrait vous aider.

Exemple : il y a deux types d'assurés. Il y a les bons assurés et les mauvais assurés. La probabilité qu'un bon assuré ait au moins 1 accident cette année est de 20 %. La probabilité qu'un mauvais assuré n'ait pas d'accident cette année est de 70 %. Également, il y a 3 fois plus de bons assurés que de mauvais assurés.

Quelle est la probabilité que, sachant qu'un assuré a eu au moins un accident au cours de l'année, celui-ci soit un mauvais assuré ?

1) Il faut bien définir les événements.

A : L'assuré est un bon assuré.

B : L'assuré a au moins 1 accident au cours de l'année.

2) Il faut bien définir les informations présentes dans le texte sous notation probabiliste. La notation doit être cohérente avec la définition des événements.

$$\Pr(A) = 3 \Pr(A^c)$$

$$\Pr(B|A) = 0.2$$

$$\Pr(B^c|A^c) = 0.7$$

3) Il faut bien définir l'information recherchée sous notation probabiliste. Encore une fois cette notation doit être cohérente avec la définition des événements.

On cherche $\Pr(A^c|B)$.

4) Selon les informations données, on applique une ou plusieurs des relations présentées dans le chapitre 2 ou dans le chapitre 3. Cette partie est la plus difficile, et c'est à force de faire des numéros qu'on reconnaît quelles relations utiliser.

Dans ce cas-ci, on peut développer la probabilité recherchée de la façon suivante :

$$\Pr(A^c|B) = \frac{\Pr(A^c \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Puisqu'on n'a aucune information sur $\Pr(A^c \cap B)$ et sur $\Pr(B)$, on développe cette formule davantage (on obtient le théorème de Bayes) :

$$\frac{\Pr(A^c \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}{\Pr(B|A) * \Pr(A) + \Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}.$$

Ici, on peut trouver $\Pr(A)$, $\Pr(A^c)$ et $\Pr(B|A^c)$ à l'aide de la relation qui relie les probabilités d'événements complémentaires et des informations données dans l'exemple.

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c)$$

$$3 \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A^c)$$

$$\Pr(A^c) = \frac{1}{4}$$

Et donc, $\Pr(A^c) = \frac{1}{4}$ et $\Pr(A) = \frac{3}{4}$. Pour trouver $\Pr(B|A^c)$:

$$\Pr(B|A^c) = 1 - \Pr(B^c|A^c) = 0.3.$$

En remplaçant ces valeurs dans la formule de Bayes (et en utilisant $\Pr(B|A) = 0.2$, soit une information qui nous était déjà fournie), on obtient

$$\Pr(A^c|B) = \frac{1}{3}.$$

3.3 Montrer l'indépendance

Montrer l'indépendance

Si on veut montrer que deux événements (A et B) sont indépendants, on veut montrer la relation suivante :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

On veut montrer que les deux côtés de l'égalité sont égaux. Faites attention à la façon dont vous calculez $\Pr(A \cap B)$. Il ne faut pas calculer ce terme en faisant $\Pr(A) * \Pr(B)$. Il faut absolument dénombrer les résultats se situant dans $A \cap B$.

Si on veut montrer que trois événements (A , B et C) sont mutuellement indépendants, on veut montrer les quatre relations suivantes :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

$$\Pr(A \cap C) = \Pr(A) * \Pr(C)$$

$$\Pr(B \cap C) = \Pr(B) * \Pr(C)$$

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) * \Pr(B) * \Pr(C).$$

4 Chapitre 4 :

Variable aléatoire discrète

La variable aléatoire

Définition : Nous avons déjà vu que les événements sont délimités par l'ensemble échantillonnal S , c'est-à-dire les résultats possibles de l'événement. La variable aléatoire, disons X , sera une fonction de cet ensemble S ($S \in \mathbb{R}$). Le support, que l'on peut comparer à l'image de la fonction, d'un événement X est composé des résultats possibles d'une expérience, par exemple $[0, 1]$ ou encore un ensemble dénombrable comme $\{0, 1/2, 1\}$.

Pour bien comprendre la différence entre l'espace échantillonnal et le support de X , voici un petit exemple :

On lance une pièce de monnaie deux fois et on définit la variable aléatoire X comme étant le nombre de faces obtenus. L'espace échantillonnal de l'expérience est $\{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$ et le support de X est de $\{0, 1, 2\}$.

Fonction de masse de probabilité : La probabilité d'avoir un résultat égal à x . Cette fonction est définie par $\Pr(X = x_i)$

Fonction de répartition ($F_X(x)$) : La probabilité d'avoir un résultat inférieur à x .

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \\ = \sum_{x_i \leq x} \Pr(X = x_i)$$

Pour illustrer la fonction de répartition, on peut s'imaginer un lancer de dé et définir X comme le résultat du lancer. $F_X(2)$, par exemple, donnerait alors $1/3$ car seuls les résultats 1 et 2 sont considérés sur l'ensemble des 6 possibilités.

Propriétés de la fonction de répartition : La valeur de la fonction de répartition se situe toujours entre 0 et 1, ce qui est logique étant donné que la somme de toutes les probabilités est toujours égale à 1 et qu'il n'existe pas de probabilité inférieure à 0.

La fonction est aussi toujours non-décroissante, car il est impossible de perdre des probabilités alors que les probabilités qui s'ajoutent à mesure que x augmente sont toujours supérieures à 0 (pour une variable aléatoire discrète, cela donne une fonction en escalier à droite).

On sait donc que $F_X(a) \leq F_X(b)$ pour $a < b$. On peut alors trouver que $\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Fonction de répartition inverse ($F_X^{-1}(u)$) : Aussi nommée la fonction quantile, cette fonction sert à déterminer quel résultat correspond à une quantité u de probabilités accumulées. Par exemple, si je prends un u de

0,5, le résultat sera la médiane.

Cela fonctionne de la façon suivante : on remplace le x de la fonction de répartition par u et cette nouvelle fonction est mise égale à x et on isole le u . Autrement dit, il faut trouver une fonction réciproque.

Espérance : L'espérance correspond à une moyenne pondérée des probabilités où les pondérations correspondent aux différentes valeurs que peut prendre la variable X . Elle est définie de la façon suivante :

$$E[X] = \sum_i x_i * \Pr(X = x_i)$$

. L'espérance correspond au résultat espéré lors de l'expérience. Par exemple, l'espérance d'une expérience consistant à lancer un dé serait 3.5. De plus,

il est possible de calculer l'espérance d'une fonction $g(X)$. L'espérance, dans ce cas-ci, est définie de la façon suivante : $E[g(X)] = \sum_i g(x_i) * \Pr(X = x_i)$.

Propriétés de l'espérance : L'espérance est un opérateur linéaire. Ainsi, $E[2x^2 + 6x + 5]$ peut se réécrire, une fois simplifiée, $2E[X^2] + 6E[X] + 5$. Aussi, si $g(x) \leq h(x)$, $\forall x$, alors $E[g(x)] \leq E[h(x)]$.

Variance : La variance est une mesure de dispersion qui se trouve à être la moyenne du carré des écarts entre x et sa moyenne. La variance est définie de la façon suivante : $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$. En développant cette expression, on retrouve l'expression davantage utilisée en probabilité, soit $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. Afin de calculer la variance on trouve habituellement le premier et le deuxième moment de X et on remplace dans la formule.

De plus, la variance n'est pas un opérateur linéaire. Cependant, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ où a et b sont des constantes réelles.