Hint : jouer avec exposant.

$$\frac{1}{2} = (1-p)^n$$

$$\ln(1/2) = n \cdot \ln(1-p)$$

$$n = \frac{\ln(1/2)}{\ln(1-p)}$$

Chapitre 2

Axiomes de probabilité

Dans ce chapitre, on introduit le concept de "probabilité d'un événement" et on regarde comment ces probabilités peuvent être évaluées. Pour débuter, on doit définir les concepts d'espace échantillonal et d'événement.

2.1 Concepts de base

Définition 2.1 *Une* ***expérience aléatoire*** *est un processus (c'est-à-dire une suite d'actions conduisant à un but défini), motivé par l'étude d'un (ou de plusieurs) caractère sur une population donnée, tel qu'on ne peut prédire avec certitude le résultat de l'expérience mais uniquement l'ensemble de tous les résultats possibles.*

Exemple 2.2 *Lancer un dé régulier et observer le résultat obtenu.*

Exemple 2.3 *Dans un groupe de 100 assurés en assurance auto, observer le nombre d'accidents au cours d'une année.*

Définition 2.4 *Un* ***espace échantillonnal*** *est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le désigne généralement par S ("sample space").*

Exemple 2.5 *Donner l'espace échantillonal des expériences suivantes: (a) Lancer 2 pièces de monnaie et observer les résultats. (b) Mesurer, en heure, la durée de vie d'une ampoule.*

Solution. a) $S = \{PP, PF, FP, FF\}$ ⇒ variable aléatoire discrète

b) $S = \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$ ⇒ variable aléatoire continue

■

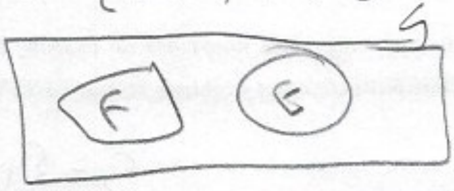
Définition 2.6 *Un* ***événement*** *relié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'espace échantillonnal S. (On désigne les événements par des lettres majuscules $A, B, C, \ldots$).*

Exemple 2.7 *Une expérience consiste à lancer un dé. L'événement E consiste à obtenir un nombre pair et l'événement F à avoir un nombre inférieur à 4. Définir l'espace échantillonal S et les sous-ensembles représentant les événements E et F.*

Solution. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{2, 4, 6\}$

$F = \{1, 2, 3\}$



■

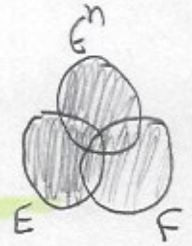
Définition 2.8 *L'événement correspondant à* ***l'union*** *de deux événements E et F, désigné par $E \cup F$, est l'ensemble des résultats qui sont dans E ou F ou dans E et F.*

Exemple 2.9 *Dans l'exemple 2.7, trouver $E \cup F$.*

Solution. $E \cup F \{1, 2, 3, 4, 6\}$

■

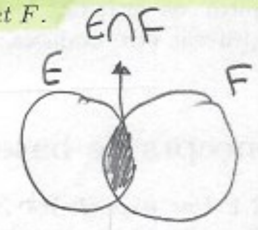
Définition 2.10 *L'événement correspondant à l'union de n événements, désigné par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$, est l'ensemble des résultats qui sont dans E_i pour* ***au moins*** *une valeur de i.*



Définition 2.11 *L'événement correspondant à l'****intersection*** *de deux événements E et F, désigné par $E \cap F$ (ou EF), est l'ensemble des résultats qui sont à la fois dans E et F.*

Exemple 2.12 *Dans l'exemple 2.7, trouver $E \cap F$.*

Solution. $E \cap F = \{2\}$



■

Définition 2.13 *L'événement correspondant à l'intersection de n événements, désigné par $\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n$, est l'ensemble des résultats qui sont dans* ***tous*** *les événements E_i, $i = 1, 2, ..., n$.*

Définition 2.14 *L'événement correspondant au* ***complément*** *de l'événement E, désigné par E^c (ou $\bar{E}$, E'), est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience qui ne sont pas dans E.*

Exemple 2.15 *Dans l'exemple 2.7, trouver E^c.*

Solution. $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$

notations possibles

$E^C \sim \bar{E} \sim E'$

note! $E^c = F \Rightarrow F^c = E$

■

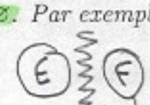
Définition 2.16 *Si* ***tous*** *les résultats de l'événement E sont aussi dans F, on dit que E est* ***inclus*** *dans F et on le désigne par $E \subset F$. On dit que deux événements sont* ***égaux*** *ou* ***identiques*** *(c'est-à-dire $E = F$) si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

$E \subset F$

IMPOSSIBLE

Remarque 2.17 *On désigne par $\varnothing$ (ensemble vide) un événement qui ne peut se réaliser peu importe le résultat de l'expérience.*

Remarque 2.18 *On dit que E et F sont des événements mutuellement exclusifs si $E \cap F = \varnothing$. Par exemple, si $E = \{$être un homme$\}$ et $F = \{$être une femme$\}$, alors $E \cap F = \varnothing$.*



mutuellement exclusif!

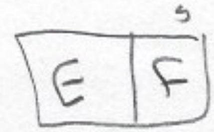
Remarque 2.19 $S^c = \varnothing$.

Définition 2.20 *Soit $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ un ensemble de sous-ensembles non-vides de l'espace échantillonnal S d'une expérience. Si les événements $E_1, E_2, ..., E_n$ sont mutuellement exclusifs et que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, alors on dit que $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ est une partition de S.*

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{1, 2, 3\}$ $\quad E \cup F = S \Rightarrow$ PARTITION

$F = \{4, 5, 6\}$



2.2 Opérations sur les ensembles

Soit les n événements $E_1, E_2, ..., E_n$. On définit dans la présente section les opérations de base sur ces ensembles.

Proposition 2.21 ***(Commutativité)*** on peut interchanger les évènements dans un $\cup$ et dans une intersection

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$
$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

Proposition 2.22 ***(Associativité)***

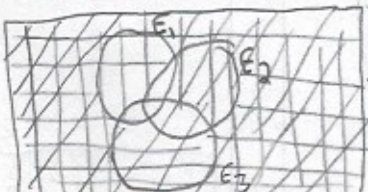
$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$
$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

Proposition 2.23 ***(Distributivité)***

$$(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)$$
$$(E_1 \cap E_2) \cup E_3 = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3)$$

☆ **Proposition 2.24** ***(Loi de DeMorgan)*** → fais le lien entre l'union, l'intersection et le complément

1



Il reste juste l'extérieur!

$$(1) \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$(2) \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

(preuve sur feuille lignée) Page suivante

Preuve. On débute par montrer l'égalité (1) de gauche à droite. On suppose $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. Alors, $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$ et par conséquent $x \notin E_1$, $x \notin E_2$,..., $x \notin E_n$. Ceci conduit donc à $x \in E_1^c$, $x \in E_2^c$,..., $x \in E_n^c$ qui correspond à $x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. On poursuit en montrant l'égalité (1) de droite à gauche. Ainsi, on suppose $x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. Alors, $x \in E_1^c$, $x \in E_2^c$,..., $x \in E_n^c$ et donc $x \in E_i^c$, $\forall i$ ou de façon équivalente $x \notin E_i$, pour n'importe quel i. On a donc $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ et par conséquent $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. On utilise l'égalité (1) pour démontrer l'égalité (2) comme suit:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} E_i.$$

On obtient donc $\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. ■

2.2.1 Axiomes de probabilité

Définition 2.25 ***(Intuitive)*** *La probabilité d'un événement relié à une expérience aléatoire est une mesure de la fréquence de réalisation de cet événement lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois* $(n \to \infty)$.

Loi de Morgan

Preuve Proposition 2.24 – Ch2

ACT-1002

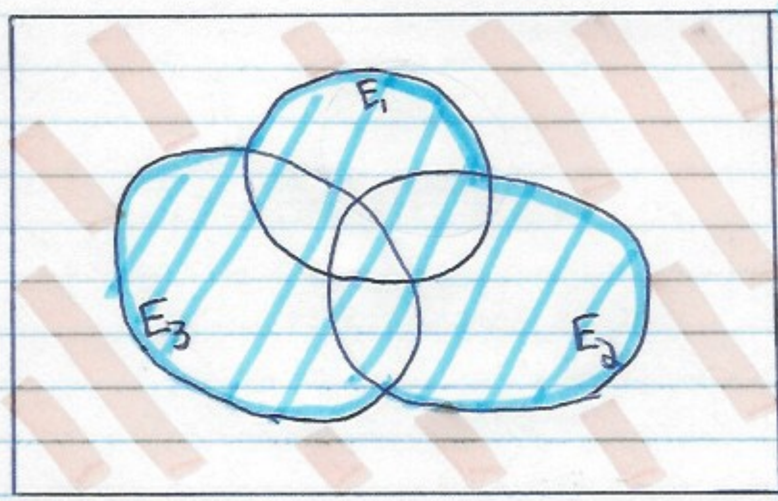
① $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$

$x \in \left(\bigcup E_i\right)^c \Rightarrow x \notin \bigcup E_i$

$\Rightarrow x \notin$ aucun des E_i

$\Rightarrow x \in$ tous les $E_1^c, E_2^c, \dots, E_n^c$

$\Rightarrow x \in \bigcap E_i^c$



$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$

$\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$

② $\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$

on prouve l'identité (2) à partir de l'identité (1)

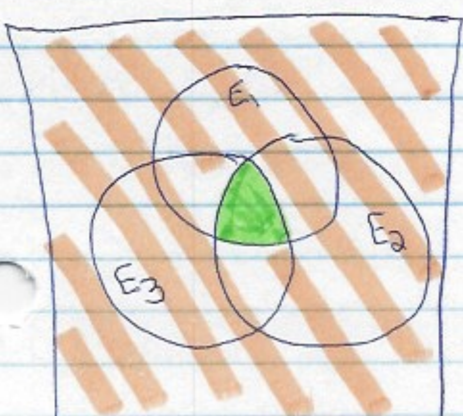
$x \in \left(\bigcap E_i\right)^c$ ~~$\Rightarrow x \notin \bigcap E_i$~~

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c$

$= \bigcap_{i=1}^{n} E_i$

donc

$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$



$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$

*on peut mettre $P(E)$

Définition 2.26 ***(Approche axiomatique)*** *Soit S un espace échantillonnal d'une expérience aléatoire. Supposons que pour chaque événement E de S, il existe un nombre $\Pr(E)$, qui est associé à E. On appelle $\Pr(E)$ la probabilité de l'événement E si celle-ci satisfait les axiomes suivants:*

Caractéristiques d'une probabilité $P(E)$

1. $0 \leq \Pr(E) \leq 1$.
2. $\Pr(S) = 1$.
3. Si $E_i \cap E_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors $\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(E_i)$.

Proposition 2.27

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

Preuve. Soit $E_1 = S$ (sample space)

$E_i = \varnothing$, $i > 1$

- Alors E_1, E_2 sont <u>mutuellement exclusifs</u>
- Sachant que $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, alors

$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ → car évènement mutuellement exclusif

$= P(S) + P(E_1) + \underbrace{P(E_2) + P(E_3) + \ldots}_{0}$

$\Rightarrow P(E_i) = 0$ $i = 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow P(\varnothing) = 0$

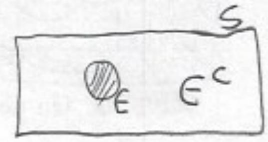
$\varnothing$

■

Proposition 2.28

E et E^c forment une partition de S

$$\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E).$$



Preuve.

$1 = P(S) = P(E \cup E^c)$

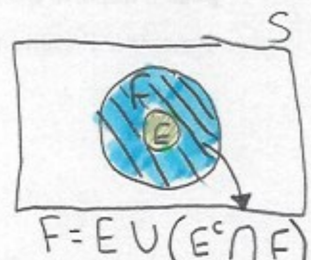
$1 = P(E) + P(E^c)$ → car évènement mutuell. exclusif

$\Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$

■

Proposition 2.29

$$E \subset F \Rightarrow \Pr(E) \leq \Pr(F).$$



Preuve.

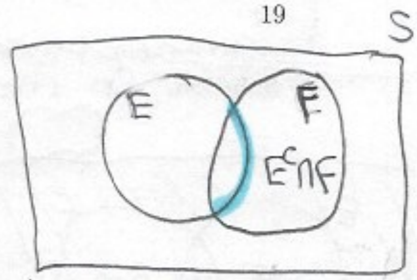
$P(F) = P(E \cup (E^c \cap F))$

$P(F) = P(E) + \underbrace{P(E^c \cap F)}_{\geq 0}$

*c'est donc sûr que $P(F) \geq P(E)$

dès que cette partie de l'équation est ≥ 0, alors $P(E) \leq P(F)$!

■



Proposition 2.30

$$\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cap F)$$

Preuve. $E \cup F = E \cup (E^c \cap F)$

$P(E \cup F) = P(E) \cup P(E^c \cap F)$ → car E et F sont mutuellement exclusifs

$= P(E) + P(E^c \cap F)$

$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$

$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$

* car $(E \cap F)$ et $(E^c \cap F)$ sont mutuel. exclusif

$\Rightarrow P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$

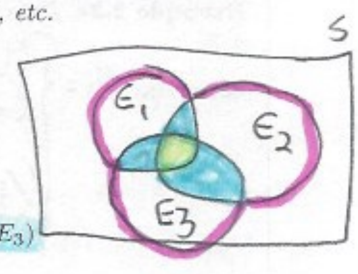
■

Proposition 2.31 ***(Généralisation de la Proposition 2.30)***

$$\begin{aligned}\Pr(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \Pr(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + ... + \\ &\quad (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r} \Pr(E_{i_1} E_{i_2} ... E_{i_r}) + ... + (-1)^{n+1} \Pr(E_1 E_2 ... E_n)\end{aligned}$$

où $\sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r}$ *est sur toutes les* $\binom{n}{r}$ *combinaisons de sous-ensembles possibles de taille* r *de* $\{1, 2, ..., n\}$.

En mots, cette dernière proposition stipule que la probabilité de l'union de n événements égale la somme des probabilités de chacun des n événements pris un à la fois, moins la somme des probabilités des événements pris deux à la fois, plus la somme des probabilités des événements pris trois à la fois, etc.



Remarque 2.32 *Pour* $n = 3$, *la Proposition 2.31 correspond à*

$$\begin{aligned}\Pr(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \Pr(E_3) \\ &\quad - \Pr(E_1 \cap E_2) - \Pr(E_1 \cap E_3) - \Pr(E_2 \cap E_3) \\ &\quad + \Pr(E_1 \cap E_2 \cap E_3).\end{aligned}$$

Exemple 2.33 *Un certain type de voiture présente parfois deux vices de fabrication; on sait que 7% de ces voitures ont le premier défaut, 11% le deuxième défaut et 2% ont les deux défauts. Trouver la probabilité qu'une voiture de ce type soit exempte de défauts.*

$E = \{$voiture a le premier défaut$\}$ $P(E) = 0{,}07$

$F = \{$voiture a le 2e défaut$\}$ $P(F) = 0{,}11$

$P(E \cap F) = 0{,}02$

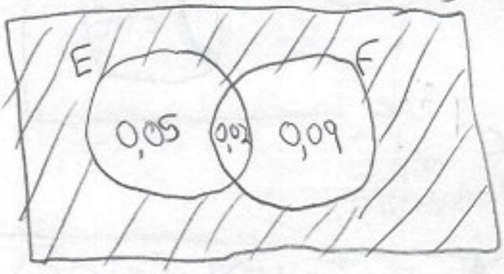
Solution au verso

$P(E) = 0{,}07$
$P(F) = 0{,}11$
$P(E \cap F) = 0{,}02$

probabilité qu'elle n'est pas de défaut

Solution. On cherche $P(E^c \cap F^c) = P((E \cup F)^c)$ par la loi de Morgan

S



$$
\begin{aligned}
P(E^c \cap F^c) &= P((E \cup F)^c) \\
&= 1 - P(E \cup F) \\
&= 1 - (P(E) + P(F) - P(E \cap F)) \\
&= 1 - (0{,}07 + 0{,}11 - 0{,}02) \\
&= 0{,}84
\end{aligned}
$$

■

2.2.2 Résultats équiprobables $P(i) = \frac{1}{N}$

Pour plusieurs expériences aléatoires, les différents résultats de l'espace échantillonnal ont tous la même chance de se réaliser (ex: lancer d'un dé). On considère un espace échantillonnal avec un nombre fini de résultats possibles $S = \{1, 2, ..., N\}$ où l'on suppose

$$\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = ... = \Pr(\{N\}).$$

Ceci implique, étant donné les axiomes 2 et 3 de la Définition 2.26, que

$$\Pr(\{i\}) = \frac{1}{N},\ i = 1, ..., N$$

car

$$\Pr(S) = 1 = \sum_{i=1}^{N} \Pr(\{i\}) = N \Pr(\{i\}).$$

On a donc de façon générale pour un événement E (qui est un sous-ensemble de S)

$$\Pr(E) = \frac{\text{Nombre de résultats dans } E}{\text{Nombre de résultats dans } S}.$$

on revient sur le chap. 1 - Analyse combinatoire

En mots ceci revient à dire que si l'on suppose que tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire ont la même chance de se réaliser, alors la probabilité de tout événement E est égale à la proportion du nombre de résultats dans l'espace échantillonnal qui sont inclus dans E.

Exemple 2.34 *Deux dés sont lancés. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit égale à 7?*

Solution.

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1), (1,2), & \ldots & (1,6) \\ (2,1)\ (2,2), & \ldots & (2,6) \\ \ldots & & \ldots \\ (6,1)\ (6,2) & \ldots & (6,6) \end{matrix} \right\} = 36 \text{ combinaisons possibles}$$

$$E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} = 6 \text{ combinaisons possibles}$$

$$P(E) = \frac{\#\text{éléments dans } E}{\#\text{éléments dans } S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

■

résultats équiprobables

Exemple 2.35 *On choisit au hasard un comité de 5 personnes à partir d'un groupe de 6 hommes et 9 femmes. Chaque personne a autant de chance d'être choisie. Quelle est la probabilité que le comité soit formé de 3 hommes et 2 femmes?*

Solution. $S = \{\text{tous les comités de 5 pers}\} = \binom{15}{5}$

$E = \{\text{les comités avec 3 hommes / 2 femmes}\} = \binom{6}{3}\binom{9}{2}$

$$P(E) = \frac{\#\text{ solutions possibles } E}{\#\text{ solutions } S} = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}$$

■

Exemple 2.36 *On lance un dé 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au moins une fois?*

Solution.

Solution #1:

$E_n = \{\text{avoir } n \text{ fois le chiffre } 6\}$ où $n = 1, 2, 3, 4$

$F = \{\text{avoir au moins un } 6\} \Rightarrow P(F) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4)$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{4!}{3!\,1!} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{4!}{2!\,2!} + \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{4!}{3!\,1!} + \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

Solution #2 : MÉTHODE PLUS RAPIDE

$E = \{\text{avoir au moins 1 fois le } 6\}$

$E^c = \{\text{avoir aucun } 6\}$

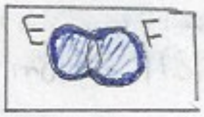
$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177$$

■

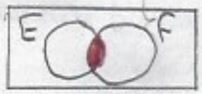
Résumé Chap. 2

Définitions

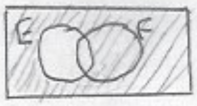
$E \cup F$ ⇒



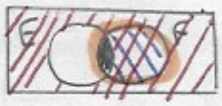
$E \cap F$ ⇒



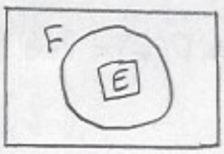
$\bar{E}, E^c$ ⇒
(tout ce qui n'est pas dans E)



$F = E^c \cap F \cup E \cap F$ ⇒



$E \subset F$ ⇒
e est inclus dans F



*Si les évènements E_i sont mutuellement exclusifs $\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i = 0\right)$ et que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = 1$, alors les évènements forment une partition de S. (Théorème de Bayes ch.3)

Démonstrations

$$\boxed{P(E^c) = 1 - P(E)}$$

• posons E et E^c comme une partition de S

$$S = E \cup E^c$$
$$P(S) = P(E) + P(E^c)$$
$$1 = P(E) + P(E^c)$$
$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$\boxed{E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)}$$

$$F = (E \cap F) \cup (\bar{E} \cap F)$$
$P(F) = P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)$, car ils sont mutuell. exclusifs
$P(F) = P(E) + \underbrace{P(\bar{E} \cap F)}$, car $E \subset F$
→ si ≥ 0, alors $P(E) \leq P(F)$ par définition.

$$\boxed{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)}$$

$$E \cup F = E \cup \bar{E} \cap F$$
$$P(E \cup F) = P(E) + P(\bar{E} \cap F)$$
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)^{*}$$

* $F = F \cap E \cup F \cap \bar{E}$
$P(F) = P(FE) + P(F \cap \bar{E})$
$P(F \cap \bar{E}) = P(F) - P(FE)$

Opérations sur ensembles

→ Commutativité

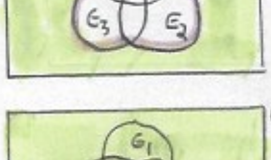
$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$
$$E_2 \cap E_1 = E_1 \cap E_2$$

→ Associativité

$$(E_1 \cup E_2) \cup E_3 = E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$$
$$(E_1 \cap E_2) \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3)$$

→ Loi de Morgan

(1) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$



(2) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$