

# CONTRIBUTEURS

## Première partie

## ACT-2001 : Introduction à l'actuariat II

## 1 Notions de base à la modélisation en actuariat

## Notation

$X$  Variable aléatoire représentant les pertes pour une "entité" pour un (ou plusieurs) "périls".

- › Elle peut être continue, discrète ou mixte;
- › "Entité" peut être un individu (ou groupe de), commerce, compagnie, etc.;
- › "Périls" peut être une incendie, du vandalisme, une maladie, du risque opérationnel, etc.;
- › On pose que  $E[X] < \infty$ .

$PP(X)$  La **prime pure** pour le risque  $X$ ,  $PP(X) = E[X]$ .

## Fonction quantile

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F_X(x) \geq u\}, \quad \forall u \in (0, 1).$$

## Théorème de la fonction quantile

Soit :

- › la variable aléatoire  $X$  avec fonction de répartition  $F_X(x)$  et la fonction quantile  $F_X^{-1}(u)$ .
- › la variable aléatoire  $U \sim Unif(0, 1)$ .
- ›  $Y = F_X^{-1}(U)$ .

Alors,  $F_Y(x) = F_{F_X^{-1}(U)}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et  $X = F_X^{-1}(U)$ .

C'est-à-dire, on définit  $Y$  comme la transformation de la variable aléatoire  $U$  via la fonction quantile. Par conséquent,  $Y$  se comporte comme  $X$ .

## Espérance tronquée

On pose que  $X$  est une variable aléatoire tel que  $E[X] < \infty$ .

## Notation

$E[X \times \mathbf{1}_{\{X > d\}}]$  l'espérance tronquée à  $d$ .

- › C'est-à-dire, l'espérance des valeurs de la v.a.  $X$  qui sont supérieures à  $d$ .
- › On peut définir l'espérance tronquée avec n'importe quelle indicatrice.

Rappel :

$$\mathbf{1}_{\{X > d\}} = \begin{cases} 1, & X > d \\ 0, & X \leq d \end{cases}$$

## Fonction stop-loss

On pose que  $X$  est une variable aléatoire tel que  $E[X] < \infty$ .

## Notation

$\pi_X(d)$  Fonction stop-loss de déductible  $d$  tel que

$$\pi_X(d) = E[\max\{X - d; 0\}], \quad \forall d \in \mathbb{R}.$$

- › C'est-à-dire, l'espérance des montants de perte en excédant de la limite  $d$ ,

Relation :

$$\pi_X(d) \equiv E[X \times \mathbf{1}_{\{X > d\}}] - d\bar{F}_X(d)$$

## Fonction quantile et espérance(s)

$$E[X] = E[F_X^{-1}(U)] = \int_0^1 F_X^{-1}(u) du.$$

Relation :

$$\begin{aligned} \int_k^1 F_X^{-1}(u) du &= \pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k), \quad \forall k \in (0, 1) \\ &= E[X \times \mathbf{1}_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k) \end{aligned}$$

## Fonction convexe

Soit  $t \in [0, 1]$  et  $x_1, x_2 \in X$ .

$$\text{Alors, } f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

## Mesures de risque

› La **Value-at-Risk** correspond au  $100\alpha^e$  pourcentile;

Également, on a la  $TVaR$  que l'on peut écrire pour  $\kappa \in (0, 1)$  :

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left[ E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) (F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa) \right] \end{aligned}$$

Pour une variable aléatoire  $X$  continue, on simplifie :

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \left[ E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + \underbrace{VaR_\kappa(X) (F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left[ E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] \right] \\ &= \frac{E[X \times \mathbf{1}_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{\Pr(X > VaR_\kappa(X))} \\ &= E[X | X > VaR_\kappa(X)] \end{aligned}$$

## Propriétés désirables d'une mesure de risque

### Homogénéité

Soit une v.a.  $X$  et un scalaire  $a > 0$ , la mesure de risque  $\rho$  est dite homogène si  $\rho(aX) = a\rho(X)$ .

#### Interprétation

Par exemple, on peut poser que  $a = 1.75$  est le taux de change entre le dollar canadien et le dollar américain. Il est alors *cohérent* que calculer  $\rho(1.75X)$  soit équivalent à calculer  $1.75\rho(X)$ .

### Invariance à la translation

Soit une v.a.  $X$  et un scalaire  $a \in \mathbb{R}$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété d'invariance à la translation si  $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ .

#### Interprétation

Par exemple, on peut poser que  $a = -500\$$  est la franchise d'un contrat d'assurance auto; c'est-à-dire, un assuré va payer de sa poche le premier 500\$ d'un accident auto.

Il est alors *cohérent* que calculer  $\rho(X - 500)$  soit équivalent à calculer  $\rho(X) - 500$ . Par exemple, si on utilise l'espérance comme mesure de risque ( $\rho(X) = E[X]$ ) alors il devrait nous être familier que  $E[X - 500] = E[X] - 500$ .

### Monotonie

Soit les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  tel que  $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété de monotonie si  $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$  ou si pour un  $\kappa \in (0, 1)$  fixé,  $F_{X_1}^{-1}(\kappa) \leq F_{X_2}^{-1}(\kappa)$ .

#### Interprétation

Par exemple, si  $X_1$  est un assuré plus dangereux que  $X_2$  il est *cohérent* que la mesure de risque lui charge plus cher.

### Sous-additivité

Soit les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété de sous-additivité si  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ .

#### Interprétation

On peut raisonner qu'il est cohérent que ce soit moins cher pour une compagnie d'assurance d'assurer deux personnes que pour deux compagnies d'assurance d'assurer chacune une personne.

### Convexité

Soit les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ , la mesure de risque  $\rho$  satisfait la propriété de convexité si  $\rho(\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2) \leq \alpha \rho(X_1) + (1 - \alpha) \rho(X_2)$ .

## 2 Méthodes de simulation Monte-Carlo

### Méthode inverse

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. On produit une réalisation  $U^{(j)}$  d'une loi  $U(0,1)$  à partir d'un GNPA (runif en R).
2. On simule une réalisation  $X^{(j)}$  de  $X$  où  $X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)})$ .

### Simulation d'une fonction d'un nombre fini de variables aléatoires

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. On simule les réalisations  $(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$  de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
2. On évalue  $Z^{(j)} = \phi(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$ .

Par exemple, on peut avoir  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ .

### Simulation d'une fonction de variables aléatoires définies par un mélange

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. On simule une réalisation  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$ .
2. On produit une réalisation  $X^{(j)}$  de  $X$  avec la fonction quantile  $F_{X|\Theta=\Theta^{(j)}}$  de la fonction de répartition conditionnelle de  $(X|\Theta = \Theta^{(j)})$

## Erreur et intervalle de confiance

Soit une v.a.  $X$  dont on produit  $m$  réalisation  $(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$ .

Soit la fonction intégrale de  $X$ ,  $g(X)$ .

On obtient les approximations pour  $\theta = E[g(X)]$  :

$$\theta \simeq \hat{\theta}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g(X^{(j)})$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_m) = \frac{1}{m} \text{Var}(g(X))$$

$$\widehat{\text{Var}}(g(X)) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (g(X^{(j)}) - \hat{\theta}_m)^2$$

De plus,

$$\theta \in \left[ \hat{\theta}_m \pm \sqrt{\frac{\text{Var}(\hat{\theta}_m)}{m}} \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \approx \left[ \hat{\theta}_m \pm \sqrt{\frac{\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}_m)}{m}} \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Également, la fonction de répartition peut être approximée avec  $m$  réalisations  $(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$  :

$$F_X^{(m)}(x) \simeq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{X^{(j)} \leq x\}}$$

De plus, pour  $j_0 = m \times k$  entier :

$$\text{TVaR}_k(X) \simeq \frac{1}{m - j_0} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=j_0+1}^m X^{[j]} \right)$$

### 3 Mutualisation des risques

#### Terminologie

S Pertes totales

#### Méthode de Monte-Carlo

##### Étapes pour simuler

1. Produire  $M$  réalisations  $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$  de  $U$ ;
2. Approximer  $\theta$  par  $\hat{\theta}_m$  où :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_m &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \phi \left( F_X^{-1} \left( U^{(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \phi \left( X^{(j)} \right)\end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres,  $\hat{\theta}_m \xrightarrow{P} \theta$ .

#### Mesures de risque

**Capital économique** Allocation de surplus de la compagnie;

$$CE(S) = \rho(S) - E[S]$$

**Marge de risque** associée à une prime  $P(X)$ ;

$$MR(X) = \rho(X) - E[X]$$

$\rho$  introduit une marge de risque :

**positive** lorsque  $\rho(X) \geq E[X]$  pour une v.a.  $X$  avec  $E[X] < \infty$  ;

**justifiée** lorsque  $\rho(X) = \rho(a) = a$  pour une v.a.  $X$  avec  $\Pr(X = a) = 1, a > 0$  ;

**non-excessive** lorsque  $\rho(X) \leq a_{\max}$  pour une v.a.  $X$  s'il existe  $x_{\max} < \infty$  tel que  $\Pr(X \leq x_{\max}) = 1$ .

## 4 Modélisation de risques non-vie

### Notation

$M$  Variable aléatoire discrète du nombre de sinistres pour un risque;  
 $B_k$  Variable aléatoire continue du montant du  $k^{\text{e}}$  sinistre.  
 > La suite de v.a. positives (iid)  $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$  est indépendante de  $M$ .

### Modèle fréquence-sinistre

On définit la v.a.  $X$  comme étant les coûts (pertes) pour un risque tel que  $\forall M > 0$  :

$$X = \sum_{k=1}^M B_k$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E_M[E_B[X|M]] \\ &= E[M] \times E[B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \underbrace{\text{Var}_M(E_B[X|M])}_{\text{variabilité du nombre de sinistres}} + \underbrace{E_M[\text{Var}_B(X|M)]}_{\text{variabilité du coût par sinistre}} \\ &= E[M]\text{Var}(B) + E^2[B]\text{Var}(M) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) F_{B_1+\dots+B_k}(x)$$

Par exemple, pour  $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  :

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) H(x; \alpha k, \beta)$$

$$\mathcal{L}_X(t) = P_M(\mathcal{L}_B(t)), \quad t > 0$$

$$P_X(t) = P_M(P_B(t)), \quad t > 0$$

$$E[X \times \mathbf{1}_{\{X > b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) E[(B_1 + \dots + B_k) \times \mathbf{1}_{\{B_1 + \dots + B_k > b\}}]$$

Par exemple, pour  $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  :

$$E[X \times \mathbf{1}_{\{X > b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) \frac{k\alpha}{\beta} \bar{H}(b; \alpha k + 1, \beta)$$

## Simulation

### Simulation de réalisations de $X$

1. Simuler la réalisation  $M^{(j)}$  de la v.a.  $M$ ;
2. Si  $M^{(j)} = 0$ , alors  $X^{(j)} = 0$ ;
3. Si  $M^{(j)} > 0$ , alors :
  - (a) Simuler  $M^{(j)}$  réalisations de la v.a. (iid)  $B$  pour obtenir  $B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \dots, B_{M^{(j)}}^{(j)}$ ;
  - (b) On pose  $X^{(j)} = B_1^{(j)} + B_2^{(j)} + \dots + B_{M^{(j)}}^{(j)}$ .

## Heavy tailed and light tailed

Si la distribution de la v.a.  $B$  est sub-exponentielle alors :

$$\bar{F}_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \bar{F}_{B_1+\dots+B_k}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) k \bar{F}_B(x) = E[M] \bar{F}_B(x)$$

## Mutualisation

### ≡ Somme de variables aléatoires Poisson composée

Soient les variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors,  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i; F_C)$ .

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_s} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_s} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_s} F_{B_n}(x)$$

## 5 Mutualisation de risques non-vie

### Loi Poisson composée

Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim \text{PComp}(\lambda_i; F_{B_i})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors,  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{PComp}(\lambda_S; F_C)$  où :

- >  $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ,
- >  $F_C(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_S} F_{B_i}(s)$ .

### Loi Binomiale Négative composée

Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim \text{BNComp}(r_i, q; F_{B_i})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors,  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{BNComp}(r_S, q; F_B)$  où  $r_S = \sum_{i=1}^n r_i$ .

### Loi Binomiale composée

Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim \text{BinComp}(n_i, q; F_{B_i})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors,  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{BinComp}(n_S, q; F_B)$  où  $n_S = \sum_{i=1}^n n_i$ .

## Deuxième partie

## ACT-3000 : Théorie du risque

## 10 Processus de Poisson

## Notation

$T_k$  Temps d'occurrence de l'événement  $k = 1, 2, \dots$

> Il s'ensuit que  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  ;

>  $T_k \sim \text{Erlang}(k; \lambda)$  .

$W_k$  Temps écoulé entre l'événement  $k - 1$  et  $k$ .

> Il s'ensuit que  $W_k = T_k - T_{k-1}$  ;

>  $W_k \sim W \sim \text{Exp}(\lambda)$  .

## Processus de comptage

Soit le processus de comptage, ou processus de dénombrement,  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  sous les conditions suivantes :

- 1  $N(0) = 0$ .
- 2  $N(t) \geq 0$ .
- 3  $N(t) \geq N(s)$  si  $t > s$ .
- 4  $N(t) - N(s)$  correspond au nombre d'événements encourus durant l'intervalle  $(s, t]$  où  $t > s$ .

Au lieu de le définir en fonction d'une loi de Poisson, on peut définir  $N(t) = \sup\{k \geq 1 : T_k \leq t\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . C'est-à-dire, le dernier événement à se produire à ou avant le temps  $t$ .

## Processus de Poisson homogène

## Notation

$\lambda$  Taux, ou intensité, du processus.

$\Lambda(t)$  Intensité cumulée.

## Processus de Poisson

Le processus de comptage  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  est un **processus de Poisson** sous les conditions suivantes :

- 1  $N(0) = 0$ ;
- 2 Les accroissements sont indépendants et stationnaires ;
- 3  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$  ;
- 4  $N(t + s) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ .

De cette définition, on trouve que pour  $s \geq 0$  et  $t > 0$ ,  $N(s, s + t] = N(s + t) - N(s)$  .

Taux (intensité)  $\lambda$  et taux cumulé  $\Lambda(t)$ 

Le paramètre  $\lambda$  d'un processus correspond à son *taux* ou *intensité*. On définit l'intensité cumulée par  $\Lambda(t)$  où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda ds = \lambda t, \quad t > 0$$

Également, pour  $s \geq 0$  et  $t > 0$ ,  $\Lambda(s, s + t] = \Lambda(s + t) - \Lambda(s)$  .

Avec ces définitions, on trouve que pour  $k \in \mathbb{N}, t > 0, s \geq 0$ ,

$$\Pr(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \stackrel{\text{accroissements stationnaires}}{=} \Pr(N(s, s + t) = k)$$



### ✓ Propriétés d'un processus de Poisson homogène

Soit le processus de Poisson  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec les propriétés suivantes :

- 1  $N(0) = 0$ ;
- 2 Les accroissements sont indépendants et stationnaires;
- 3  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ;
- 4  $N(s, s+t] \equiv N(s+t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ;

Pour  $h \rightarrow 0$  et  $o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  :

- 5  $\Pr(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ ;
- 6  $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ ;
- 7  $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ .

### Algorithme de Processus de Poisson 1 (PP1)

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$ ;
2. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - a) On simule  $W_i^{(j)}$ ;
  - b) On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$ .

### Limitations de l'algorithme PP1

Bien que cet algorithme est simple d'application, il n'est pas toujours efficace pour produire des simulations du processus  $\underline{N}$  sur un intervalle fixe  $(0, t]$ . On peut trouver [un algorithme plus efficace](#) en utilisant la *Distribution du temps d'occurrence* conditionnelle au nombre d'événements sur un intervalle.

## Propositions

### □ Mélange de processus de Poisson avec une suite de v.a. Bernoulli

Soit :

- > Un processus de Poisson  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  de taux  $\lambda$ ;
- > La suite de variables aléatoires (iid) Bernoulli  $\underline{I} = \{I_k, k = 1, 2, \dots\}$  de paramètre  $q$ .

On pose que les processus  $\underline{N}$  et  $\underline{I}$  sont indépendants, puis obtient que

$$M(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} I_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

est aussi un processus de Poisson; c'est-à-dire, le processus  $\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda q$  et donc  $M(t) \sim \text{Pois}(\lambda q t)$ .

### □ Somme de processus de Poisson

Soit les processus de Poisson indépendants  $\underline{N}_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$  et  $\underline{N}_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$  de taux  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Alors,  $\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda_1 + \lambda_2$  où  $M(t) = N_1(t) + N_2(t)$ . C'est-à-dire,  $M(t) \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

## Distribution du temps d'occurrence

### Contexte

On sait que  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Cependant, on cherche à savoir ce qu'est la distribution de  $(T_1 | N(t) = 1)$ . C'est-à-dire, la distribution du temps d'occurrence du premier sinistre sachant qu'un sinistre est survenu entre 0 et  $t$ .

En développant  $\Pr(T_1 \leq s | N(t) = 1)$  pour  $s \in (0, t]$ , on trouve que  $\Pr(T_1 \leq s | N(t) = 1) = \frac{s}{t}$  et  $f_{T_1 | N(t)=1}(s) = \frac{1}{t}$ . Bref,  $(T_1 | N(t) = 1) \sim \text{Unif}(0, t)$ .

Ayant développé l'intuition pour le cas où seulement un événement se réalise sur l'intervalle de temps  $(0, t]$ , on peut généraliser pour  $n$  événements et identifier la loi de  $(T_1, \dots, T_n | N(t) = n)$ . Puisque  $T_i$  représente le temps d'occurrence du  $i^{\text{e}}$  événement, il s'ensuit que les temps seront en ordre croissant :  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq n$ .

En développant, on trouve que  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n}$  (voir la section 10.2 du manuel de référence pour la preuve). L'intuition est qu'il y a  $n!$  façons d'organiser les  $n$  temps d'occurrence des événements et que chacune a une densité de  $\frac{1}{t}$  qui devient  $\frac{1}{t^n}$ . La page 310 du manuel de Ross (Introduction to Probability Models) explique cette intuition.

La distribution de  $(T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n)$  découle du *vecteur de statistiques d'ordre* :

### Vecteur de statistiques d'ordre

Soit le vecteur de v.a. continues (iid)  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ . On déduit que puisque les v.a. sont identiquement distribuées,  $Y_i \sim Y \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  ce qui veut dire que la fonction de densité  $f_{Y_i} = f_Y$ .

On définit le vecteur de statistiques d'ordre  $(Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]})$  en posant que  $Y \sim U(0, t)$  pour obtenir la fonction de densité conjointe :

$$f_{Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! \times \prod_{i=1}^n f_Y(y_i), \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n$$

$$\stackrel{Y \sim U(0, t)}{=} \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq t$$

Donc, puisque les temps d'événements conditionnels sont uniformément distribués entre 0 et  $t$ ,  $(T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]})$ .

### Algorithme de processus de Poisson 2 (PP2)

- On fixe  $T_0^{(j)} = 0$ ;
- On simule la réalisation  $N(t)^{(j)}$  de  $N(t)$ ;
- Sachant  $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$  :
  - On simule le vecteur de réalisations  $(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \dots, U_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  de  $(U_1, U_2, \dots, U_{N(t)})$  où  $U_i \sim U \sim U(0, 1)$ ;
  - On trie ces réalisations pour obtenir le vecteur de statistiques d'ordre  $(U_{[1]}^{(j)}, U_{[2]}^{(j)}, \dots, U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  où  $U_{[1]}^{(j)} < U_{[2]}^{(j)} < \dots < U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)}$ ;
  - On multiplie les réalisations par  $t$  pour obtenir des réalisations uniformes sur  $(0, t)$  au lieu de  $(0, 1)$ , puis pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$  on pose que  $T_i^{(j)} = t \times U_{[i]}^{(j)}$ .

## Processus de Poisson non-homogène

### Processus de Poisson non-homogène

$\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  est un **processus de Poisson non-homogène** de fonction d'intensité  $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$  si :

- $N(0) = 0$ ;
- Les accroissements sont indépendants;
- $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ ;
- $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ ;

### Proposition :

Soit le processus de Poisson non-homogène  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec intensité  $\lambda(t)$ ; alors  $\forall t, s \geq 0$ ,

$$N(t+s) - N(t) \sim \text{Pois}(\Lambda(t+s) - \Lambda(s))$$

$$\text{où } \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy.$$

Ainsi,

$$\Pr(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{[\Lambda(t+s) - \Lambda(s)]^n e^{-[\Lambda(t+s) - \Lambda(s)]}}{n!}$$

> La suite de v.a. des temps inter-sinistres n'est pas  $\underline{W}$  indépendante ni identiquement distribuée.

### Exemples de fonctions d'intensité

**fonction linéaire**  $\lambda(t) = a + bt, a > 0, b \geq 0$ ;

**fonction puissance**  $\lambda(t) = (\beta t)^\tau, \beta, \tau > 0$ ;

**fonction log-linéaire**  $\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

**fonction périodique**  $\lambda(t) = a + b \cos(2\pi t), a > 0, b \in [0, a]$ .

## Distributions du temps d'occurrence

On sait que  $T_1 \equiv W_1$ .

$$F_{W_1}(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}, \quad t \geq 0$$

Plus généralement,

$$F_{W_n | T_{n-1}=s}(t) = 1 - e^{-\Lambda_s(t)}, \quad t \geq 0$$

**Algorithme de Processus de Poisson non-homogène 1 (PPNH1)**

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$  ;
2. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - a) On simule les réalisations  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$  du vecteur de v.a. (iid) avec  $Z_i \sim Z \sim \text{Exp}(1)$  ;
  - b) On simule  $W_i^{(j)} = \Lambda_{T_{i-1}^{(j)}}^{-1}(Z_i)$  ;
  - c) On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$ .

> Cet algorithme est simple d'application si l'expression  $\Lambda_s^{-1}$  est fermée ;  
 > Cependant, le prochain est plus efficace pour produire des simulations du processus  $\underline{N}$  sur un intervalle fixe  $(0, t]$ .

Pour  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$  :

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \prod_{i=1}^n \lambda(s_i)$$

Les hypothèses au vecteur de v.a. (iid)  $(V_1, V_2, \dots, V_{N(t)}^{(j)})$  sont appliquées de la même façon qu'auparavant avec  $(U_1, U_2, \dots, U_{N(t)}^{(j)})$ .

**Algorithme de Processus de Poisson non-homogène 2 (PPNH2)**

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$  .
  2. On simule la réalisation  $N(t)^{(j)}$  de  $N(t) \sim \text{Pois}(\Lambda(t))$ .
  3. Sachant  $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$  :
    - a) On simule le vecteur de réalisations  $(V_1^{(j)}, V_2^{(j)}, \dots, V_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  du vecteur de v.a. (iid)  $(V_1, V_2, \dots, V_{N(t)^{(j)}})$  ;
- Note :  $V_i \sim V$  avec  $f_V(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}$  pour  $0 < x < t$  et  $\forall i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$
- b) On trie ces réalisations pour obtenir le vecteur de statistiques d'ordre  $(V_{[1]}^{(j)}, V_{[2]}^{(j)}, \dots, V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  où  $V_{[1]}^{(j)} < V_{[2]}^{(j)} < \dots < V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)}$  ;

c) On calcule  $T_i^{(j)} = V_{[i]}^{(j)}$  pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$ .

**Note :** On pose que  $U_i \sim U \sim U(0, 1)$ .

4. Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - a) On simule les réalisations  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$  du vecteur de v.a. (iid) avec  $Z_i \sim Z \sim \text{Exp}(1)$  ;
  - b) On simule  $W_i^{(j)} = \Lambda_{T_{i-1}^{(j)}}^{-1}(Z_i)$  ;
  - c) On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$ .

> Cet algorithme est simple d'application si l'expression  $\Lambda_s^{-1}$  est fermée ;  
 > Cependant, le prochain est plus efficace pour produire des simulations du processus  $\underline{N}$  sur un intervalle fixe  $(0, t]$ .

## Processus de Poisson mixte

$$E[N(t)] = t\lambda$$

$$\text{Var}(N(t)) = t\lambda + t^2\text{Var}(\Theta)$$

Pour  $r \in [0, 1]$  :

$$M_{N(t)}(r) = M_{\Theta}(t(e^r - 1))$$

$$\mathcal{P}_{N(t)}(r) = M_{\Theta}(t(r - 1))$$

› Le processus de Poisson mixte  $\underline{N}$  possède des accroissements stationnaires mais pas indépendants.

$$\Pr(N(t+s) - N(s) = n | N(s) = m) \neq \Pr(N(t+s) - N(s) = n), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

### Algorithme de simulation d'un Processus de Poisson mixte

1. On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$ ;
2. On simule le  $j^{\text{e}}$  parcours de  $(\underline{N} | \Theta = \Theta^{(j)})$  avec l'algorithme PP1 pour un processus de Poisson avec intensité  $\lambda = \Theta^{(j)}$ .

## Processus de renouvellement

$$\{N(t) \geq k\} \equiv \{T_k \leq t\}, \quad t > 0, k \in \mathbb{N}.$$

$$m(t) = E[N(t)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t)$$

## Processus agrégés

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

## Valeur présente et processus agrégés

## 11 Méthodes récursives d'agrégation

### Motivations

#### Convolution

##### Produit de convolution

Soit les variables aléatoires indépendantes continues positives  $X_1$  et  $X_2$ .  
On définit  $S = X_1 + X_2$ , alors :

$$f_S(x) = \int_0^x f_{X_1}(y)f_{X_2}(x-y)dy = f_{X_1} * f_{X_2}(x)$$

Soit les variables aléatoires indépendantes discrètes positives  $X_1$  et  $X_2$  définies sur le support arithmétique  $0h, 1h, 2h, \dots$

>  $h$  est un « pas de discrétisation » positif ( $h > 0$ );

> Par exemple :  $10, 20, 30, \dots = 1h, 2h, 3h, \dots$  avec  $h = 10$ .

On définit  $S = X_1 + X_2$ , alors pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$f_S(kh) = \sum_{j=0}^k f_{X_1}(jh)f_{X_2}((k-j)h) = f_{X_1} * f_{X_2}(kh)$$

### Nombres complexes

$$z = \underbrace{x}_{\text{partie réelle, Re}(z)} + \underbrace{y}_{\text{partie imaginaire, Im}(z)} \times \underbrace{i}_{\text{Unité imaginaire, } i = \sqrt{-1}}$$

#### Propriétés de base

Soit les nombres complexes  $z_1 = x_1 + y_1i$  et  $z_2 = x_2 + y_2i$ .  
Règle de :

**addition**  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ ;

**multiplication**  $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$ ;

**soustraction**  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$ .

#### Représentation sous la forme polaire

$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$  où :

>  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  = **module** de  $z$ ;

>  $\theta$  est l'**argument** de  $z$ ; c'est-à-dire, l'angle du vecteur  $z$  dans le plan complexe.

#### Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué de  $z = x + yi$  est :  $\bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$ .

##### Propriétés de base du conjugué

Soit les nombres complexes  $z_1 = x_1 + y_1i$  et  $z_2 = x_2 + y_2i$ .

Règle de :

**addition**  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;

**multiplication**  $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ ;

**les exposants**  $\overline{z_1^n} = (\bar{z}_1)^n$ .

#### Règle de division

Soit les nombres complexes  $z_1 = x_1 + y_1i$  et  $z_2 = x_2 + y_2i$ .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{z_2 \times \bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 - y_2^2} + \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 - y_2^2}i$$

#### Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$\Rightarrow$

$$z = re^{i\theta} = r \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

## Somme de variables aléatoires discrètes

## Notation

$f_X^{*n}(k)$   $n^{\text{e}}$  produit de convolution de  $f_X$  avec elle-même.  
 $f_{S_n}(k) = f_{X_1+\dots+X_n}(k) = f_X^{*n}(k)$

$$f_{S_n}(k) = \sum_{k_1=0}^k \dots \sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{X_1, \dots, X_n} \left( k_1, \dots, k_{n-1}, \left( k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j \right) \right)$$

$$\mathcal{P}_{S_n}(t) = P_X(t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k$$

## Algorithme de De Pril

Cet algorithme permet de calculer  $f_X^{*n}(k)$  selon la relation récursive suivante pour  $k \in \mathbb{N}^+$  :

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^k \left( (n+1) \frac{j}{k} - 1 \right) f_X(j) f_{S_n}(k-j)$$

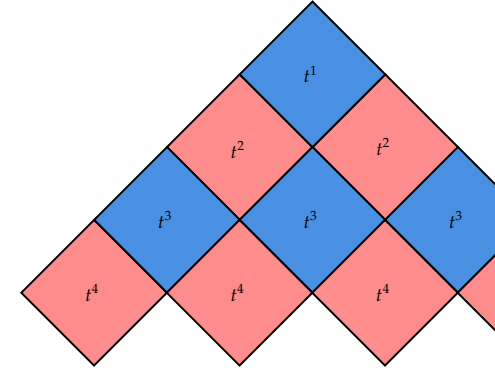
avec  $f_{S_n}(0) = (f_X(0))^n$  comme point de départ.

1. On calcule  $f_{S_n}(0) = (f_X(0))^n$ .
2. On calcule  $f_{S_n}(1) = \frac{1}{f_X(0)} \left( (n+1) \frac{1}{1} - 1 \right) f_X(1) f_{S_n}(0)$ .
3. Avec  $f_{S_n}(1)$ , on trouve  $f_{S_n}(2) = \frac{1}{f_X(0)} \left\{ f_X(1) \left( (n+1) \frac{1}{2} - 1 \right) f_{S_n}(1) + f_X(2) \left( (n+1) \frac{2}{2} - 1 \right) f_{S_n}(0) \right\}$ .
4. Répéter pour  $k \in \{3, 4, \dots\}$ .

Visuel du produit de sommations infinies :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ f_X(i) \cdot t^i \right\} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ j \cdot f_{S_n}(k) \cdot t^j \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ t^k \cdot \sum_{l=0}^{j-1} \left\{ (k-l) \cdot f_{S_n}(k-l) \cdot f_X(l) \right\} \right\}$$

	$0 f_{S_n}(0) t^0$	$f_{S_n}(1) t^1$	$2 f_{S_n}(2) t^2$	$3 f_{S_n}(3) t^3$
$f_X(0) t^0$	0	$t^1$	$t^2$	$t^3$
$f_X(1) t^1$	0	$t^2$	$t^3$	$t^4$
$f_X(2) t^2$	0	$t^3$	$t^4$	$t^5$
$f_X(3) t^3$	0	$t^4$	$t^5$	$\ddots$



## Somme aléatoire et algorithme de Panjer

Rappel que pour une variable aléatoire composée  $X$  :

$$f_X(0) = P_M(f_B(0))$$

$$f_X(k) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(k), \quad k \in \mathbb{N}^+$$

### Famille $(a, b, 0)$ de lois de fréquence

La distribution d'une v.a.  $M$  fait partie de la famille de distributions de fréquence  $(a, b, 0)$  ssi :  $f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)$  pour  $k \in \mathbb{N}^+$  avec un point de départ  $f_M(0) > 0$ .

Cette famille contient uniquement les distributions suivantes :

Distribution	$a$	$b$	$f_M(0)$
Poisson	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$-\frac{q}{1-q}$	$\frac{q}{1-q}(n+1)$	$(1-q)^n$
Binomiale négative $(r, q)$	$1-q$	$(1-q)(r-1)$	$q^r$
Binomiale négative $(r, \beta)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$\frac{\beta}{1+\beta}(r-1)$	$\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r$

### Relation récursive pour la FGP

$$\mathcal{P}'_M(t) = at\mathcal{P}'_M(t) + (a+b)\mathcal{P}_M(t)$$

### Algorithme de Panjer

Soit une variable aléatoire composée  $X$  avec une distribution de fréquence  $M$  faisant partie de la famille  $(a, b, 0)$  et une distribution de sévérité  $B$ .

Cet algorithme permet de calculer  $f_X(k)$  selon la relation récursive suivante pour  $k \in \mathbb{N}^+$  :

$$f_X(k) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \sum_{j=1}^k \left(a + b\frac{j}{k}\right) f_B(j) f_X(k-j)$$

avec  $f_X(0) = \mathcal{P}_M(f_B(0))$  comme point de départ.

1. On calcule  $f_{S_n}(0) = (f_X(0))^n$ .
2. On calcule  $f_{S_n}(1) = \frac{1}{f_X(0)} \left( (n+1)\frac{1}{1} - 1 \right) f_X(1) f_{S_n}(0)$ .
3. Avec  $f_{S_n}(1)$ , on trouve  $f_{S_n}(2) = \frac{1}{f_X(0)} \left\{ f_X(1) \left( (n+1)\frac{1}{2} - 1 \right) f_{S_n}(1) + f_X(2) \left( (n+1)\frac{2}{2} - 1 \right) f_{S_n}(0) \right\}$ .
4. Répéter pour  $k \in \{3, 4, \dots\}$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^+$ ,

$M \sim \text{Pois}(\lambda)$  :  $f_X(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^k j \times f_B(j) f_X(k-j)$  avec comme point de départ  $f_X(0) = e^{\lambda(f_B(0)-1)}$ .

$M \sim \text{Bin}(n, q)$  :  $f_X(k) = \frac{1}{(1-q)+qf_B(0)} \sum_{j=1}^k \left( -q + q(n+1)\frac{j}{k} \right) f_B(j) f_X(k-j)$  avec comme point de départ  $f_X(0) = (1-q + qf_B(0))^n$ .

$M \sim \text{BN}(r, q)$  :  $f_X(k) = \frac{1}{1-(1-q)f_B(0)} \sum_{j=1}^k \left( (1-q) + (1-q)(r-1)\frac{j}{k} \right) f_B(j) f_X(k-j)$  avec comme point de départ  $f_X(0) = \left( \frac{q}{1-(1-q)f_B(0)} \right)^r$ .

## Méthodes de discrétisation

Soit les v.a. indépendantes continues positives  $B_1, \dots, B_n$ . Soit  $S = \sum_{i=1}^n B_i$ . Afin d'utiliser les algorithmes récurrents de convolution, on approxime la v.a. continue  $B_i$  par la v.a. discrète  $\tilde{B}_i$  définie sur le support  $\mathcal{A}_h = \{0, 1h, 2h, 3h, \dots\}$  où  $h > 0$  est le pas de discrétisation. On définit donc  $\tilde{S} = \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i$ . Plusieurs méthodes existent pour approximer  $\tilde{B}$ .

### Méthodes upper et lower

#### Méthode upper

$$f_{\tilde{B}}(0) = F_B(h)$$

$$f_{\tilde{B}}(kh) = \Pr(kh \leq B < (k+1)h), \quad k \in \mathbb{N}^+$$

$$F_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} F_B(h), & 0 \leq x < h \\ F_B(2h), & h \leq x < 2h \\ F_B(3h), & 2h \leq x < 3h \\ \dots \end{cases}$$

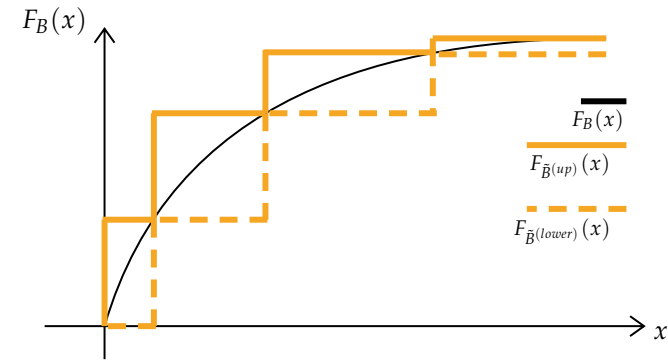
#### Méthode lower

$$f_{\tilde{B}}(0) = 0$$

$$f_{\tilde{B}}(kh) = \Pr((k-1)h \leq B < kh), \quad k \in \mathbb{N}^+$$

$$F_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < h \\ F_B(h), & h \leq x < 2h \\ F_B(2h), & 2h \leq x < 3h \\ \dots \end{cases}$$

Visuellement :



### Méthodes de dispersion de la masse avec espérance préservée

#### Lemme

Soit les scalaires  $a, b, c, d$  tels que :

- >  $a < b$
- >  $a < d < b$
- >  $0 \leq c < 1$
- >  $p_a, p_b \geq 0$

Alors la solution au système de deux équations avec les deux inconnus suivants :

$$p_a + p_b = c$$

$$ap_a + bp_b = d$$

est  $p_a = \frac{bc-d}{b-a}$  et  $p_b = \frac{d-ac}{b-a}$ .



### ✓ Méthode de dispersion de la masse

$$p_{kh}^- = \frac{(k+1)h}{h} \{F_B((k+1)h) - F_B(kh)\} - \frac{1}{h} \left\{ E[B \times \mathbf{1}_{(-\infty, (k+1)h)}] - E[B \times \mathbf{1}_{(-\infty, kh)}] \right\}$$

$$p_{(k+1)h}^+ = \frac{1}{h} \left\{ E[B \times \mathbf{1}_{(-\infty, (k+1)h)}] - E[B \times \mathbf{1}_{(-\infty, kh)}] \right\} - \frac{kh}{h} \{F_B((k+1)h) - F_B(kh)\}$$

Puis on obtient que pour  $k \in \mathbb{N}^+$   $f_{\bar{B}}(kh) = p_{kh}^+ + p_{kh}^-$ . C'est-à-dire,

$$f_{\bar{B}}(kh) = \dots = \frac{1}{h} \left\{ 2E[\min(B; kh)] - E[\min(B; (k-1)h)] - E[\min(B; (k+1)h)] \right\}$$

Avec comme point de départ  $f_{\bar{B}}(0) = 1 - \frac{E[\min(B; h)]}{h}$ .

### Agrégation et transformée de Fourier rapide

$$\varphi_X(t_j) = E[e^{it_j X}] = E[\cos(t_j X)] + i \times E[\sin(t_j X)]$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1} f_X(u) e^{i(2\pi)(j/n)u}$$

où  $t_j = i2\pi(j/n)$ .

Également,  $f_X(l) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(2\pi(j/n)) e^{-i2\pi(j/n)l}$ .

## Transformée de Fourier rapide

### Somme de deux v.a. discrètes indépendantes

Soit les v.a. discrètes  $X$  et  $Y$  avec la v.a.  $S = X + Y$ .

Pour calculer la fonction de masse de probabilité  $f_S$  de la v.a.  $S$ , les étapes sont les suivantes :

1. Construire les vecteurs  $\underline{f}_X$  et  $\underline{f}_Y$ .
  - > Ils doivent être d'une même longueur  $2^m$ .
  - > Pour faire ceci, on ajoute des 0 aux vecteurs.
2. Utiliser la fonction `fft` pour produire les vecteurs  $\tilde{\underline{f}}_X$  et  $\tilde{\underline{f}}_Y$  de  $\underline{f}_X$  et  $\underline{f}_Y$ .
3. Faire le produit des deux vecteurs pour obtenir  $\tilde{\underline{f}}_S = \tilde{\underline{f}}_X \times \tilde{\underline{f}}_Y$ .
  - > Ceci équivaut à une multiplication de vecteurs colonnes et donc le  $i^e$  élément de  $\tilde{\underline{f}}_X$  multiplie le  $i^e$  élément de  $\tilde{\underline{f}}_Y$ .
4. Utiliser la fonction `fft` avec `inverse = TRUE` pour produire le vecteur  $\underline{f}_S$  de  $\tilde{\underline{f}}_S$ .
  - > On utilise la fonction `Re` pour conserver uniquement la partie réelle du chiffre.
  - > Il faut diviser par  $2^m$  pour obtenir les densités.

### Somme de $n$ v.a. discrètes indépendantes

Soit les v.a. discrètes  $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\{0, 1h, 2h, \dots\}$  avec la v.a.  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Pour calculer la fonction de masse de probabilité  $f_S$  de la v.a.  $S$ , les étapes sont les suivantes :

1. Construire les vecteurs  $\underline{f}_{X_1}, \dots, \underline{f}_{X_n}$ .
  - > Ils doivent être d'une même longueur  $2^m$ .
  - > Pour faire ceci, on ajoute des 0 aux vecteurs.
2. Utiliser la fonction `fft` pour produire les vecteurs  $\tilde{\underline{f}}_{X_1}, \dots, \tilde{\underline{f}}_{X_n}$  de  $\underline{f}_{X_1}, \dots, \underline{f}_{X_n}$ .
3. Faire le produit des  $n$  vecteurs pour obtenir  $\tilde{\underline{f}}_S = \tilde{\underline{f}}_{X_1} \times \dots \times \tilde{\underline{f}}_{X_n}$ .
4. Utiliser la fonction `fft` avec `inverse = TRUE` pour produire le vecteur  $\underline{f}_S$  de  $\tilde{\underline{f}}_S$  en conservant la partie réelle avec `Re` puis divisant par  $2^m$ .

### Somme aléatoire (loi composée)

Soit la v.a. composée  $X$  avec  $X = B_1 + \dots + B_M$  si  $M > 0$  ou  $X = 0$  si  $M = 0$  (et les hypothèses habituelles).

On pose que les v.a.  $B_1, B_2, \dots$  sont définies sur  $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ . Pour calculer la fonction de masse de probabilité  $f_X$  de la v.a.  $X$ , les étapes sont les suivantes :

1. Construire le vecteur  $\underline{f}_B$ .
  - > Ajouter des 0 au vecteur pour qu'il soit d'une longueur de  $2^m$ .
2. Utiliser la fonction `fft` pour produire le vecteur  $\tilde{\underline{f}}_B$  de  $\underline{f}_B$ .
3. Trouver le vecteur  $\tilde{\underline{f}}_X = \mathcal{P}_M(\tilde{\underline{f}}_B)$ .
4. Utiliser la fonction `fft` avec `inverse = TRUE` pour produire le vecteur  $\underline{f}_X$  de  $\tilde{\underline{f}}_X$  en conservant la partie réelle avec `Re` puis divisant par  $2^m$ .

## Distribution mélange d'Erlang

## 12 Comparaison des risques et ordres stochastiques

## 13 Distributions multivariées et agrégation des risques

### Contexte

Il est devenu crucial de tenir compte de la dépendance dans les modélisations d'un portefeuille de risques.

- › Il existe pour chaque loi paramétrique (discrète ou continue) plusieurs extensions multivariées.
- › Des lois multivariées peuvent être créées en se basant sur la théorie des copules.
- › Il existe des différentes approches pour construire des modèles multivariés de risque :
  - modèles avec chocs communs,
  - modèles avec mélange commun,
  - etc.

›  $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, \dots, F_n)$ .

Alors  $W(x_1, \dots, x_n) \leq F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n)$  pour  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

### Classes de Fréchet

Soit :

- › Des fonctions de répartition univariées (pas nécessairement identiques)  $F_1, \dots, F_n$ .
- › Le vecteur de v.a.  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  dont la fonction de répartition est  $F_{\underline{X}}$ .

 Classe de Fréchet  $\mathcal{CF}(F_1, \dots, F_n)$

Ensemble de toutes les fonctions de répartition multivariées  $F_{\underline{X}}$  ayant pour marginales  $F_1, \dots, F_n$ .

### Théorème 13.2

Soit :

- ›  $W(x_1, \dots, x_n) = \max(\sum_{i=1}^n F_i(x_i) - (n-1); 0)$ .
  - Ceci correspond à la borne inférieure de Fréchet et est une fonction de répartition si  $n = 2$ .
- ›  $M(x_1, \dots, x_n) = \min(F_1(x_1); \dots; F_n(x_n))$ .
  - Ceci correspond à la borne supérieure de Fréchet et est une fonction de répartition.

## Notions de dépendance

### L'indépendance

La notion de dépendance avec laquelle nous sommes familiers est l'indépendance.

#### Indépendance

Pour  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \times \dots \times F_{X_n}(x_n)$

### Comonotonicité

La comonotonicité est un cas particulier de relation de dépendance. Elle correspond à la relation de dépendance positive parfaite.

#### Comonotonicité

Le vecteur de v.a.  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  est comonotonique ssi il existe une v.a.  $Z$  et des fonctions non décroissantes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  telles que :

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} \phi_1(Z), \phi_2(Z), \dots, \phi_n(Z)$$

- > C'est à dire, le vecteur est comonotonique ssi ses composantes sont comonotones.
- > Les composantes sont comonotones ssi la fonction de répartition conjointe du vecteur est la borne supérieure de Fréchet  $M$ .

#### Simulation des réalisations d'un vecteur de v.a. comonotone

Soit le vecteur de v.a. comonotones  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

1. On simule une réalisation  $U^{(j)}$  d'une loi  $U(0, 1)$ .
2. On calcule le vecteur de réalisations  $X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}(U^{(j)}), \dots, X_n^{(j)} = F_{X_n}^{-1}(U^{(j)})$ .

#### Additivité des mesures de risque

Soit un vecteur de v.a. comonotones  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ . Alors,  $S = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(U) = \phi(U)$ .

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i)$$

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i)$$

Et

$$E[S \times \mathbf{1}_{\{S > d\}}] = \sum_{i=1}^n \int_{\phi^{-1}(d)}^1 F_{X_i}^{-1}(u) du$$

### Antimonotonicité

L'antimonotonicité correspond à la relation de dépendance **négative** parfaite définie pour des paires de v.a.

#### Antimonotonicité

Les composantes du couple de v.a.  $\underline{X} = (X_1, X_2)$  sont antimonotoniques ssi il existe une v.a.  $Z$ , une fonction croissante  $\phi_1$  et une fonction décroissante  $\phi_2$  telles que :

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\phi_1(Z), \phi_2(Z))$$

- > Donc, si la fonction de répartition conjointe est la borne inférieure de Fréchet  $F_{X_1, X_2}^-$ .

#### Simulation des réalisations d'un couple de v.a. antimonotones

Soit le couple de v.a. antimonotones  $(X_1, X_2)$ .

1. On simule une réalisation  $U^{(j)}$  d'une loi  $U(0, 1)$ .
2. On calcule le vecteur de réalisations  $X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}(U^{(j)}), X_2^{(j)} = F_{X_2}^{-1}(1 - U^{(j)})$ .

## Notation

## Notation

$(X_1^+, X_2^+)$  Couple de v.a. comonotones avec

$$F_{X_1^+, X_2^+}(x_1, x_2) = M(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1); F_2(x_2)).$$

$(X_1^-, X_2^-)$  Couple de v.a. antimonotones avec

$$F_{X_1^-, X_2^-}(x_1, x_2) = W(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0).$$

$(X_1^\perp, X_2^\perp)$  Couple de v.a. indépendantes avec

$$F_{X_1^\perp, X_2^\perp}(x_1, x_2) = W(x_1, x_2) = F_1(x_1) \times F_2(x_2).$$

## Notation

$$\Delta_{a_i, b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{\underline{X}}(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n) - F_{\underline{X}}(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n).$$

$$\text{Pour } n = 2, \Pr(a < X \leq b) = \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{\underline{X}}(b_1, b_2) - F_{\underline{X}}(a_1, b_2) - F_{\underline{X}}(b_1, a_2) + F_{\underline{X}}(a_1, a_2).$$

## Loi multivariées

## Loi de Poisson bivariée de Teicher

Soit :

- > Le couple de v.a.  $(M_1, M_2)$  où  $M_i \sim \text{pois}(\lambda_i)$  pour  $i = 1, 2$ .
- > Les v.a. indépendantes  $K_0, K_1, K_2$  avec  $K_i \sim \text{Pois}(\alpha_i)$  pour  $i = 0, 1, 2$  et  $\alpha_i = \lambda_i - \alpha_0$  pour  $i = 1, 2$  où  $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$ .

On définit  $M_i = K_i + K_0$  pour  $i = 1, 2$ .

- >  $K_i$  représente la fréquence d'un « choc » spécifique à la  $i^{\text{e}}$  ligne d'affaires pour  $i = 1, 2$ .
- >  $K_0$  représente la fréquence d'un « choc » commun aux deux lignes d'affaires.

Donc,  $(M_1, M_2) \sim \text{PBivTeicher}(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_0)$ .

## Lois composées multivariées

### Covariance totale

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E_{M_1, M_2} [\text{Cov}(X_1, X_2 | M_1, M_2)] + \text{Cov}_{M_1, M_2} (E[X_1 | M_1, M_2], E[X_2 | M_1, M_2])$$

### Loi Poisson composée

Soit :

- › Les v.a. indépendantes  $K_0, K_1, \dots, K_n$  avec :
  - $K_0 \sim \text{Pois}(\alpha_0)$  pour  $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ ,
  - $K_i \sim \text{Pois}(\alpha_i = \lambda_i - \alpha_0)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- › Le vecteur de v.a. de fréquence  $(M_1, \dots, M_n)$  obéit à une loi de Poisson multivariée de Teicher (avec choc commun).
  - Les composantes du vecteur sont définies par  $M_i = K_i + K_0$ .
  - Alors,  $M_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$ .
- › Le vecteur de v.a.  $(X_1, \dots, X_n)$  obéit à une loi de Poisson composée multivariée.

Alors,  $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{PComp}(\lambda_S; F_C)$  où :

- ›  $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i - (n-1)\alpha_0$ .
- ›  $F_C(x) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_S} F_{B_i}(x) \right\} + \frac{\alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1 + \dots + B_n}(x)$ .



## 14 Théorie des copules

### Famille de copules archimédiennes

Une copule  $C$  est dite **archimédienne** si elle s'écrit sous la forme

$$C(u_1, \dots, u_n) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_n)).$$

La fonction  $\psi$  est appelé **générateur** et satisfait aux propriétés suivantes :

- 1  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  avec  $\psi(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ ;
- 2  $\psi$  est une fonction continue;
- 3  $\psi$  est une fonction strictement décroissante sur  $[0, \infty)$ ;
- 4  $\psi^{-1}$  est la fonction inverse tel que  $\psi^{-1} = \inf\{u, \psi(u) \leq x\}$ .

### Copule de Clayton

Pour  $i = 1, 2, u \in [0, 1]$  et  $\alpha > 0$  :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1 + \alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-1/\alpha}$$

### Copule de Gumbel

Pour  $i = 1, 2, u \in [0, 1]$  et  $\alpha \geq 1$  :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left( [-\ln(u_1)]^\alpha + [-\ln(u_2)]^\alpha \right)^{1/\alpha} \right\}$$

## Troisième partie

# Autres

## 15 Terminologie

$\arg \max$  Si on pose que  $\hat{\theta} = \arg \max L(\theta; X)$  on dit que la valeur maximale de  $L(\theta; X)$  est au point  $\hat{\theta}$ .

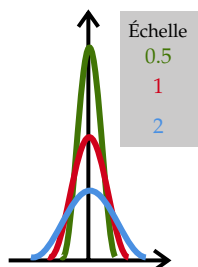
Paramètre

**de forme** Affecte la forme générale de la distribution ;

- > « *shape parameter* » ;
- > Il est important de saisir que le paramètre de forme n'a aucune incidence sur l'emplacement de la densité (paramètre de l'emplacement) ni sur l'échelle de la densité (paramètre d'échelle) ;
- > Par exemple, la distribution Gamma a un paramètre de forme qui impact comment qu'elle est représentée ;
- > Par exemple, la distribution exponentielle n'a pas de paramètre de forme et bien que l'échelle de la distribution peut être modifiée, la forme générale est constante.

**d'échelle** Sert à déterminer la forme et l'emplacement de la distribution en étirant ou compressant la densité ;

- > « *scale parameter* » ;
- > Le plus gros le paramètre d'échelle, le plus rependue la distribution ;
- > On peut voir ceci visuellement où avec un paramètre d'échelle de 1, la distribution est inchangée :



**de fréquence** L'interprétation dépend du contexte.

- > « *rate parameter* » ;
- > Dans le cas d'un processus de Poisson, le paramètre de fréquence décrit le taux auquel les événements se produisent ;

- > Souvent, il est défini comme le réciproque du paramètre d'échelle pour indiquer le taux de déclin d'une fonction exponentielle ;
- > Des valeurs près de 1 impliquent un déclin lent alors que des valeurs près de 0 impliquent un déclin rapide.

**d'emplacement** Stipule où la densité est située.

- > « *location parameter* » ;
- > Plus précisément, indique où sur l'axe des  $x$  la distribution est centrée relatif à la distribution normale standard ;
- > Une distribution normale standard est centrée à 0 donc un paramètre d'emplacement de 5 implique que la densité est centrée à  $x = 5$ .

### Notation

$S$  Les coûts d'un portefeuille.

$\rho(S)$  Une mesure de risque.

## 16 Preuves

### Preuve du théorème de la fonction quantile

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(U)} &= \Pr(F_X^{-1}(U) \leq x) \\ &\stackrel{2}{=} \Pr(U \leq F_X(x)) \\ &\stackrel{1}{=} F_X(x) \end{aligned}$$

1. Pour  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $F_U(u) = \Pr(U \leq u) = u$  alors  $F_U(F_X(x)) = F_X(x)$ .
2. On doit prouver que :

$$\{F_X^{-1}(U) \leq x\} \equiv \{U \leq F_X(x)\}$$

#### Cas 1 : X est une variable aléatoire continue

- > Alors, l'équivalence est vraie puisque  $\{F_X^{-1}(U) \leq x\}$  est la solution unique à  $\{U \leq F_X(x)\}$  par définition.

#### Cas 2 : X est une variable aléatoire quelconque

1. On fixe  $x = F_X^{-1}(u) = \inf\{y \in \mathbb{R}; F_X(y) \geq u\}$  ;
  - > Donc, ce "x" est une valeur parmi les valeurs "y" qui rencontre la condition  $F_X(y) \geq u$  ;
  - > Il s'ensuit que puisque  $u \leq F_X(y)$  alors  $u \leq F_X(x)$ .

$$\{F_X^{-1}(U) \leq x\} \Rightarrow \{U \leq F_X(x)\}$$

2. On fixe  $u \leq F_X(x)$  ;
  - > Puisque la fonction quantile est la plus petite valeur de y tel que  $u \leq F_X(y)$ , il s'ensuit que  $F_X^{-1}(u) \leq x$ .

$$\{U \leq F_X(x)\} \Rightarrow \{F_X^{-1}(U) \leq x\}$$

Donc :

$$\{F_X^{-1}(U) \leq x\} \equiv \{U \leq F_X(x)\}$$

### Preuve de la fonction Stop-Loss comme la survie

1. Premièrement, on développe l'expression :

$$\begin{aligned} \pi_X(d) &= E[\max(X - d; 0)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(x - d; 0) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^d (0) f_X(x) dx + \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx \\ &= \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

Pour la prochaine étape, nous avons recours au théorème des accroissements finis :

#### Théorème des accroissements finis

Soit la fonction  $f$  qui répond aux critères suivants :

1.  $f(x)$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  ;
2.  $f(x)$  est différentiable sur l'intervalle ouvert  $(a, b)$ .

Alors, il existe un nombre  $c$  tel que  $a < c < b$  et  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

De plus, nous avons recours à l'intégrale de Riemann-Stieltjes :

#### Intégrale de Riemann-Stieltjes

Sois les fonctions  $f$  et  $g$  continues sur l'intervalle  $[a, b]$ .

- > On divise l'ensemble  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $c_i = [x_{i-1}, x_i]$ .
- > Les  $n$  partitions  $P$  des sous-intervalles sont aux points  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ .
- > La norme des partitions est la longueur du plus long sous-intervalle  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$ .
- > On dénote le  $i^e$  point du sous-intervalle  $c_i$  par  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

On obtient donc l'intégrale de Riemann :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx.$$

L'intégrale de Riemann-Stieltjes généralise l'intégrale de Riemann avec une fonction  $g$  comme mesure de distance entre les points  $x_{i-1}$  et  $x_i$  ; l'intégrale de Riemann-Stieltjes est donc :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

2. On réécrit l'**intégrale indéfinie** avec une limite afin d'obtenir un intervalle borné :

$$\int_d^\infty (x-d)f(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c (x-d)f(x)dx \quad (2)$$

3. On réécrit l'intégrale sous la forme de l'**intégrale de Riemann** :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c (x-d)f(x)dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) f(t_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) \frac{\partial F(t_i)}{\partial x} (x_i - x_{i-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

4. On applique le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) \frac{\partial F(t_i)}{\partial x} (x_i - x_{i-1}) \\ = \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) (F(x_i) - F(x_{i-1})) \end{aligned} \quad (4)$$

5. On réécrit l'**intégrale de Riemann-Stieltjes** sous la forme normale :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - d) (F(x_i) - F(x_{i-1})) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c (x-d) dF(x) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c (x-d) d\bar{F}(x) \end{aligned}$$

6. On sépare en 2 intégrales, puis on simplifie avec  $\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{F}(c) = 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c (x-d) d\bar{F}(x) &= \lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c x d\bar{F}(x) + d \int_d^c d\bar{F}(x) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c x d\bar{F}(x) + d (\bar{F}(c) - \bar{F}(d)) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c x d\bar{F}(x) - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

7. On applique la substitution ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) avec  $u = x$  et  $dv = d\bar{F}(x)$  :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} - \int_d^c x d\bar{F}(x) - d\bar{F}(d) = \lim_{c \rightarrow \infty} - x\bar{F}(x) \Big|_d^c + \int_d^c (1)\bar{F}(x) - d\bar{F}(d)$$

8. Lorsque  $c \rightarrow \infty$ ,  $\bar{F}(c)$  tend vers 0 plus rapidement que  $c$  tend vers l'infini. On simplifie donc l'expression :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} - x\bar{F}(x) \Big|_d^c + \int_d^c (1)\bar{F}(x)dx - d\bar{F}(d) \\ = d\bar{F}(d) + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c \bar{F}(x)dx - d\bar{F}(d) \\ = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c \bar{F}(x)dx \end{aligned}$$

9. Finalement, on réécrit l'intégrale sous la forme d'un intégrale impropre :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_d^c \bar{F}(x)dx = \int_d^\infty \bar{F}(x)dx$$