

CONTRIBUTEURS

ACT-1002 Analyse probabiliste des risques actuariels

aut. Alec James van Rassel

aut., cre. Félix Cournoyer

src. Hélène Cossette

1 Analyse combinatoire

Principe de base de comptage

Pour une expérience 1 avec m résultats possibles et une expérience 2 avec n résultats possibles, il y a $m * n$ résultats possible pour les deux expériences ensemble. Ce résultat peut être généralisé pour r expériences, où il y aurait $n_1 * n_2 * \dots * n_r$ possibilités.

Permutations

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments **distincts** et où **l'ordre est important**, le nombre total de possibilités est représenté par $n!$.

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments de k types différents dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, ..., n_k sont identiques, et où **l'ordre est important**, le nombre total de possibilités est représenté par

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Combinaisons

Lorsqu'on s'intéresse au nombre de groupes possibles de k éléments parmi n et où **l'ordre n'est pas important**, le nombre total de possibilités est représenté par $\binom{n}{k}$.

Notation

De l'exemple précédent, on peut observer l'existence du coefficient binomial, qui est défini selon la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemples classiques sur les permutations et les combinaisons

1 Combien de façons différentes peut-on placer 4 livres distincts sur une étagère? C'est une permutation entre 4 éléments. La réponse est $4!$.

2 Combien d'arrangements ordonnés différents peut-on faire avec les lettres du mot LAVAL?

C'est une permutation qui contient deux paires d'éléments semblables. Donc, la réponse est $\frac{5!}{2!2!1!}$.

3 Combien de façons différentes peut-on distribuer 12 cadeaux différents à 4 personnes?

Attention! Ici, il faut bien voir que pour chaque cadeau, il y a 4 possibilités (et non l'inverse!). Donc, la réponse est 4^{12} .

Dans ce numéro, il faut aussi faire attention au fait qu'on précise que les cadeaux sont distincts (donc qu'on différencie les cadeaux). Si ce n'était pas le cas, il s'agirait d'un numéro sur des éléments indissociables.

4 Combien de groupes différents de 2 jouets peut-on faire avec 6 jouets? La réponse est $\binom{6}{2}$.

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Théorème du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Coefficient multinomial

La généralisation du coefficient binomial va comme suit :

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

où $n = \sum_{i=1}^m k_i$. Cette formule est utile si on veut séparer des éléments à travers plusieurs groupes. Par exemple, si j'ai 10 jouets à séparer à travers 3 enfants dont le premier qui en veut 5, le deuxième qui en veut 2, et le troisième qui en veut 3, le nombre de possibilités est donné par $\binom{10}{5,2,3}$.

De plus, si on différencie les groupes, et qu'on ne sait pas quel groupe aura quel nombre d'objets, il faut multiplier le coefficient multinomial de la façon suivante :

$$\text{coefficient multinomial} * \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_n!}$$

où n correspond au nombre de groupes et n_i correspond au nombre de groupes dans lesquels i éléments ont été placés.

Si cette fois-ci on dit qu'il faut séparer 10 jouets à travers 3 enfants en donnant 3 jouets à 2 enfants et 4 jouets à un autre enfant, sans spécifier quel enfant recevra 4 jouets, le résultat sera :

$$\binom{10}{3,3,4} * \frac{10!}{1!2!}.$$

2 Chapitre 2 : Axiomes de probabilité

Domaine et définition

Random Process : Famille de variable aléatoires $\{X_t : t \in T\}$ qui associe un espace d'états Ω à un ensemble S .

Ω : L'espace d'états Ω est composé des événements possibles de la variable aléatoire X .

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $\Omega = \{\text{Face}, \text{Pile}\}$.

S : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω .

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $S = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

iid : Les variables aléatoire X_t doivent être indépendantes et identiquement distribuées. Ceci est dénoté par *i.i.d.*.

indépendant : Si X_t est une variable aléatoire *iid* alors, pour 2 variables aléatoires X_i et X_j , où $i, j \in T$, le résultat de X_i n'a aucun impact sur le résultat de X_j pour tout $t \in T$.

identiquement distribué : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω .

Probabilité de X_t : La probabilité d'un événement X_t est dénoté $\Pr(X_t)$. Ces probabilités forment l'ensemble S .

Propriété : $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Pr(X_i) = 1$

Types de variables aléatoire : Il y a 2 types de variables aléatoire, les distributions *discrètes* et *continues*.

Discrète : Si l'ensemble S est dénombrable, c'est-à-dire que $S = \{s\}$, alors la variable aléatoire X est dite **discrète**.

Continue : Si l'ensemble S n'est pas dénombrable alors la variable aléatoire X est dite **continue**.

Concepts et opérations sur les ensembles

L'union (\cup) : On peut le définir par un ou.

> Si l'événement A est d'avoir 3 sur un dé et l'événement B est d'avoir 4 sur ce même dé, les résultats possibles de $A \cup B$ est 3 et 4.

L'intersection (\cap) : On peut le définir par un et.

> Si l'événement A est d'avoir un chiffre pair sur un dé et que l'événement B est d'avoir 5 ou 6 sur ce même lancer de dé, le résultat de $A \cap B$ est 6,

car 6 est un nombre pair et fait partie de l'ensemble B .

Complémentaire : Un événement quelconque est le complémentaire d'un événement A lorsqu'il correspond à tous les résultats de Ω excluant les résultats de A .

> Un exemple est l'événement "Avoir un nombre pair sur un dé"; un événement complémentaire serait donc "Avoir un nombre impair sur un dé".

> Le complémentaire d'un événement A est désigné par \bar{A} , A^c et A^t .

ñSomme d'unions ($\bigcup_{i=1}^n A_i$) : Représentation plus simple et courte de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

ñSomme d'intersections ($\bigcap_{i=1}^n A_i$) : Représentation plus simple et courte de $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

Opérations sur les ensembles : Les événements peuvent agir à un certain point comme des termes mathématiques, c'est-à-dire qu'on peut effectuer des opérations avec ceux-ci.

Commutativité : $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$$

Associativité : $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$

$$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$$

Distributivité : $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

$$(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$$

Loi de DeMorgan : $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = (\bigcap_{i=1}^n A_i^c)$

$$(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = (\bigcup_{i=1}^n A_i^c)$$

Axiomes de probabilité

Définition : Des axiomes de probabilités sont en quelque sorte des règles, des contraintes ou des formules relatives aux probabilités.

Exemples : > $0 \leq \Pr(A) \leq 1$

> $\Pr(S) = 1$

> Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors $\Pr(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$

À partir des axiomes de probabilités, on peut trouver un bon nombre de formules de probabilités. On peut donc dire que les axiomes constitue une base logique de ce que représente les probabilités. On peut déduire par exemple les formules suivantes :

> $\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cap F)$

$$> \Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$$

3 Chapitre 3 : Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Conditionnel : La probabilité que A arrive *sachant* que B est arrivé est :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

où la probabilité que B arrive est non-nulle, $\Pr(B) > 0$. Il faut alors s'imaginer qu'en sachant que l'événement B est arrivé, B représente le nouvel ensemble des probabilités S .

Indépendant : Les événements A et B sont indépendant si :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Cette formule est bien sûr aussi bonne pour trois événements indépendants et plus :

$$\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \Pr(A_1) \Pr(A_2) \dots \Pr(A_n)$$

Avec la première définition de la probabilité conditionnelle, on peut trouver ces résultats :

Relation probabilité conditionnelle : La probabilité que l'événement E_2 ait lieu sachant que l'événement E_1 a déjà eu lieu est équivalent à la probabilité que l'événement E_1 ait lieu sachant que E_2 a *déjà* eu lieu multiplié par la probabilité que l'événement E_2 ait lieu peu importe E_1 .

Le tout est encore pondéré par la probabilité que l'événement E_1 ait lieu peu importe si E_2 y a.

$$\begin{aligned} \Pr(E_2|E_1) &= \frac{\Pr(E_2 \cap E_1)}{\Pr(E_1)} \\ &= \frac{\Pr(E_1|E_2) \Pr(E_2)}{\Pr(E_1)} \end{aligned}$$

Loi des probabilités totales : Les probabilités liées à la variable aléatoire E lorsqu'elles sont conditionnelles à la variable aléatoire discrète F est dénoté comme suit :

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^n \Pr(E|F_i) \Pr(F_i)$$

Formule de Bayes : On combine les deux résultats précédents :

$$\Pr(F_j|E) = \frac{\Pr(E|F_j) \cdot \Pr(F_j)}{\sum_{i=1}^n \Pr(E|F_i) \Pr(F_i)}$$

Cette formule apparaît surtout dans le genre de problèmes où il y a une inconnue parmi $\Pr(A|B)$, $\Pr(B|A)$, $\Pr(A)$ et $\Pr(B)$. Il ne restera alors qu'à isoler la probabilité que l'on cherche.

4 Chapitre 4 :

Variable aléatoire discrète

La variable aléatoire

Définition : Nous avons déjà vu que les événements sont délimités par l'ensemble échantillonnal S , c'est-à-dire les résultats possibles de l'événement. La variable aléatoire, disons X , sera une fonction de cet ensemble S ($S \in \mathbb{R}$).

Le support, que l'on peut comparer à l'image de la fonction, d'un événement X est composé des résultats possibles d'une expérience, par exemple $[0, 1]$ ou encore un ensemble dénombrable comme $\{0, 1/2, 1\}$.

Pour bien comprendre la différence entre l'espace échantillonnal et le support de X , voici un petit exemple :

On lance une pièce de monnaie deux fois et on définit la variable aléatoire X comme étant le nombre de faces obtenus. L'espace échantillonnal de l'expérience est $\{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$ et le support de X est de $\{0, 1, 2\}$.

Fonction de masse de probabilité : La probabilité d'avoir un résultat égal à x . Cette fonction est définie par $\Pr(X = x_i)$

Fonction de répartition ($F_X(x)$) : La probabilité d'avoir un résultat inférieur à x .

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \\ = \sum_{x_i \leq x} \Pr(X = x_i)$$

Pour illustrer la fonction de répartition, on peut s'imaginer un lancer de dé et définir X comme le résultat du lancer. $F_X(2)$, par exemple, donnerait alors $1/3$ car seuls les résultats 1 et 2 sont considérés sur l'ensemble des 6 possibilités.

Propriétés de la fonction de répartition : La valeur de la fonction de répartition se situe toujours entre 0 et 1, ce qui est logique étant donné que la somme de toutes les probabilités est toujours égale à 1 et qu'il n'existe pas de probabilité inférieure à 0.

La fonction est aussi toujours non-décroissante, car il est impossible de perdre des probabilités alors que les probabilités qui s'ajoutent à mesure que x augmente sont toujours supérieures à 0 (pour une variable aléatoire discrète, cela donne une fonction en escalier à droite).

On sait donc que $F_X(a) \leq F_X(b)$ pour $a < b$. On peut alors trouver que $\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Fonction de répartition inverse ($F_X^{-1}(u)$) : Aussi nommée la fonction quantile, cette fonction sert à déterminer quel résultat correspond à une quantité u de probabilités accumulées. Par exemple, si je prends un u de

0,5, le résultat sera la médiane.

Cela fonctionne de la façon suivante : on remplace le x de la fonction de répartition par u et cette nouvelle fonction est mise égale à x et on isole le u . Autrement dit, il faut trouver une fonction réciproque.

Espérance : L'espérance correspond à une moyenne pondérée des probabilités où les pondérations correspondent aux différentes valeurs que peut prendre la variable X . Elle est définie de la façon suivante :

$$E[X] = \sum_i x_i * \Pr(X = x_i)$$

. L'espérance correspond au résultat espéré lors de l'expérience. Par exemple, l'espérance d'une expérience consistant à lancer un dé serait 3.5. De plus,

il est possible de calculer l'espérance d'une fonction $g(X)$. L'espérance, dans ce cas-ci, est définie de la façon suivante : $E[g(X)] = \sum_i g(x_i) * \Pr(X = x_i)$.

Propriétés de l'espérance : L'espérance est un opérateur linéaire. Ainsi, $E[2x^2 + 6x + 5]$ peut se réécrire, une fois simplifiée, $2E[X^2] + 6E[X] + 5$. Aussi, si $g(x) \leq h(x)$, $\forall x$, alors $E[g(x)] \leq E[h(x)]$.

Variance : La variance est une mesure de dispersion qui se trouve à être la moyenne du carré des écarts entre x et sa moyenne. La variance est définie de la façon suivante : $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$. En développant cette expression, on retrouve l'expression davantage utilisée en probabilité, soit $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. Afin de calculer la variance on trouve habituellement le premier et le deuxième moment de X et on remplace dans la formule.

De plus, la variance n'est pas un opérateur linéaire. Cependant, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ où a et b sont des constantes réelles.