Table des matières

Chapitre 1

Mesure du taux d'intérêt

1.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 1
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 1.4)

Une banque dit offrir un taux de 1,25 % sur ses comptes d'épargne, ce qui laisse d'abord croire qu'il s'agit d'un taux effectif annuel. Il n'en est rien. Comme les intérêts sont crédités mensuellement en appliquant la méthode de l'intérêt simple, en posant $t = 0$ au début de chaque mois, il s'agit plutôt d'un taux nominal composé mensuellement. Quel est donc le taux effectif annuel équivalent ?

Question 2 (section 1.5)

Un prêteur véreux fait de la publicité en annonçant qu'il consent des prêts à un taux de 20 % par an. Il se targue ainsi de ne pas être pire que les compagnies de carte de crédit ! Ce qu'il omet de préciser, c'est le type de taux dont il s'agit… Or il s'agit du type de taux qui conduit nécessairement au pourcentage le plus faible parmi tous les types de taux annuels que quelqu'un puisse indiquer… Quel est le taux d'intérêt annuel composé mensuellement qui lui est équivalent ? Cela permettra une meilleure comparaison avec les compagnies de carte de crédit qui affichent, elles, des taux d'intérêt annuels capitalisés mensuellement, même si ce n'est pas si limpide que ça non plus…

Question 3 (section 1.1)

Linda n'a que 1000 $ à investir, mais elle se fait offrir de l'intérêt simple au taux exceptionnel de 5 % par an. Alain a deux fois plus d'argent à investir, mais il se fait offrir de l'intérêt composé au taux effectif annuel de 1 %. À quel moment auront-ils accumulé le même montant ? (Vous pouvez d'abord prendre une expansion de Taylor pour trouver une réponse approximative en résolvant une équation du second degré. Vous pouvez ensuite procéder par tâtonnements pour trouver au moins le nombre entier d'années. Finalement, pour trouver la réponse exacte, vous voudrez probablement recourir à un chiffrier tel Excel.)

Question 4 (section 1.5)

Vos parents s'engagent à vous acheter une automobile valant 20 000 $ à la fin de vos études, lorsque vous recevrez votre diplôme à la collation des grades dans deux ans et neuf mois. Fier de vos nouvelles connaissances en mathématiques financières, vous leur dites que vous préférez en avoir la valeur actualisée dès maintenant, ce qui, de toute façon, est équivalent ! Quel montant recevez-vous si le taux d'escompte annuel nominal composé trimestriellement utilisé pour le calcul est de 3 % ?

Question 5 (section 1.1)

Si vous avez le choix entre 20 000 $ dans cinq ans et 12 000 $ dans un an, que choisissez-vous ? Autrement dit, pour quelles valeurs du taux d'intérêt effectif annuel préférez-vous la somme de 12 000 $?

Question 6 (section 1.1)

Vous venez de gagner le million! Vous le mettez de côté, vous engageant vis-à-vis vous-même de continuer à étudier puis travailler jusqu'à ce que vous ayez triplé ce montant. Dans combien de temps prendrez-vous votre retraite et profiterez-vous de vos gains de loterie si le taux effectif annuel est de 2 % les dix premières années et augmente ensuite de 0,5 % tous les dix ans?

Question 7 (section 1.1)

La fonction d'accumulation est donnée par la fonction suivante :

$$A(t) = 1000 + 10t + t^2, t \geq 0$$

Quel est le taux d'intérêt effectif de la 7^e année ?

Question 8 (section 1.6)

(Il s'agit d'une question refilée par Louis Adam, qui lui avait peut-être été transmise par Michel Jacques, l'ayant lui-même peut-être héritée d'André Prémont.)

À l'instant *t*, $t \geq 0$, la force d'intérêt prévalant sur le marché est définie par :

$$\delta_t = \frac{1}{[t] + t + 1},$$

où [*t*] est le plus grand entier inférieur ou égal à *t*. Trouvez la valeur, à *t* = 3, d'une somme de 2 $ investie à *t* = 1.

Question 9 (section 1.6)

Le facteur d'accumulation est défini par $a(t) = 1 + 0,08t + 0,002t^2, t \geq 0$. Simone dépose 500 $ à *t* = 0,5, et ce, pour 5 ans.

a) Quel montant a-t-elle gagné en intérêts la 2^e année de son dépôt?
b) Quelle est la force d'intérêt à *t* = 1,33?
c) Quel est le taux d'escompte de la 3^e année (de *t* = 2 à *t* = 3)?

Question 10 (section 1.7)

On peut savoir d’avance le taux d’intérêt qu’on aura sur un montant investi pour un an. Par contre, on ne peut pas savoir d’avance si l’inflation sera faible ou élevée dans l’année qui vient. Il s’ensuit que le taux d’intérêt réel ne peut se calculer qu’après coup.

Le 30 juin 2013, Georgette avait mis de côté 10 000 $ en vue d’un achat dans un an. On lui offrait alors un taux d’intérêt effectif annuel de 1,75 %. Alors que l’inflation des dernières années n’avait pas dépassé 1 %, il s’est avéré que le taux d’inflation calculé pour l’année se terminant le 30 juin 2014 a été de 2,10 %. Quel a donc été, pour Georgette, le taux d’intérêt réel?

Question 11 (section 1.7)

Martine parvient à se faire promettre un taux d’intérêt réel de 5 % pour les trois prochaines années alors que, sur cette même période, l’inflation est de 1 % la première année, 1,5 % la deuxième, et 1,75 % la troisième. Si Martine dépose 1500 $, combien aura-t-elle accumulé dans 3 ans? Quel taux d’escompte nominal composé deux fois l’an aurait été équivalent s’il avait été constant pour toute la durée du dépôt?

Question 12 (section 1.3)

Gaétan envisage deux possibilités de remboursement pour l’emprunt de 2500 $ qu’il vient de contracter. Soit il rembourse la somme en deux versements égaux X à $t = 1$ et $t = 3$, soit il rembourse intégralement la somme, augmentée des intérêts courus, pour un total de Y à $t = 2$. Que valent X et Y si le taux d’intérêt effectif annuel est de 4 %?

Question 13 (section 1.2)

Dominique et Claude, en parents prévoyants, mettent tout de suite de côté un montant suffisant pour verser 20 000 $ au début de chacune des 5 années d’études post-secondaires de leurs 2 enfants, âgés aujourd’hui, en ce début d’année scolaire, de 7 ans et de 10 ans. Les enfants auront 17 ans au début de leurs études post-secondaires. Le taux d’intérêt annuel effectif sera de 5 % pour les six prochaines années, puis de 7 % par la suite. Quel est le montant mis de côté aujourd’hui?

Pour les questions 14 à 17, comparez les résultats obtenus en utilisant les formules théoriques aux résultats obtenus en utilisant les fonctionnalités de la calculatrice BA.

Question 14 (section 1.4)

Si le taux d’intérêt nominal composé 6 fois l’an est de 12 %, quel est le taux d’intérêt annuel effectif?

Question 15 (section 1.4)

Si le taux d'intérêt nominal composé *m* fois l'an est de 15 % et le taux d'intérêt annuel effectif est 15,7625 %, que vaut *m*?

Note : Je veux que vous tentiez de résoudre cette question avec la calculatrice et constatiez que la calculatrice ne peut pas résoudre pour *m*.

Question 16 (section 1.2)

Suzie a dit à Georges qu'elle accepterait de lui prêter les 225 $ dont il a besoin aujourd'hui en autant qu'il s'engage à lui rembourser 300 $ dans 3 ans. Quel taux d'intérêt effectif annuel sous-tend l'offre de Suzie?

Question 17 (section 1.2)

Mathieu a une drôle de façon de prendre des décisions… Il a besoin de 100 $ aujourd'hui et il consent à emprunter ce montant de quiconque acceptera de le faire en retour d'un remboursement de 300 $ en autant que ce ne soit pas avant huit ans… Georgette dit qu'elle demande simplement un taux d'intérêt effectif annuel de 8 %, peu importe quand le montant est remboursé. Mathieu acceptera-t-il l'offre de Georgette? Si oui, dans combien de temps remboursera-t-il son emprunt?

Question 18 (section 1.1)

La valeur d'une part d'un fonds commun de placement prend les valeurs suivantes à la fin des années 2005 à 2010.

2005	2006	2007	2008	2009	2010
10,08	8,35	9,34	11,11	12,00	10,57

a) Calculer le taux de rendement de chacune des 5 années.
b) Calculer le taux de rendement annuel constant équivalent pour cette période de 5 ans.

Chapitre 2

Évaluation de rente

2.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 2
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Pour les questions 1 à 4, il est possible de recourir aux fonctionnalités de la calculatrice financière.
Faire d'abord 2ND – FV (CLR TVM) – CE/C. (C'est possiblement une bonne habitude de le faire avant chaque calcul pour éviter les mauvaises surprises causées par des valeurs laissées par erreur.)
Faire 2ND – I/Y (P/Y) – 1 – ENTER – 2ND – CPT (QUIT) pour indiquer à la calculatrice que taux et versement sont établis sur la même base périodique. (Il n'est pas nécessaire de répéter cette opération avant chaque calcul.)
N est le nombre de versements et donc aussi le nombre de périodes.
I/Y est le taux d'intérêt par période.
PV est la valeur actualisée (avec ou sans tréma si BEGIN ou END, respectivement) des versements.
PMT est le montant versé au début (BEGIN) ou à la fin (END) de chaque période.
FV est la valeur accumulée (avec ou sans tréma si BEGIN ou END, respectivement) des versements.
Par défaut, la calculatrice est en mode END, et il n'y a rien qui s'affiche à l'écran.
Pour passer en mode BEGIN, il faut faire 2ND – PMT (BGN) – 2ND – ENTER (SET) – 2ND – CPT (QUIT); BGN s'affiche alors à l'écran.
En fait, cette séquence de touches permet de passer du mode END au mode BGN et inversement.
Par ailleurs, pour les questions 1 à 4, il faut toujours que l'une de PV ou FV soit 0. Cela dépend de la valeur recherchée ou de la valeur connue. Les autres valeurs doivent être non nulles.
Ne vous étonnez pas! Si vous entrez une valeur de PV ou FV positive, la valeur de PMT sera négative, et inversement.
En supposant que l'écran n'affiche pas BGN, la séquence 36 N 1.2 I/Y 0 PV 100 PMT CPT FV vous donnerait la valeur accumulée tout de suite après le 36^{e} versement de 100 \$ si le taux d'intérêt pour chaque période est 1,2 %.

Question 1 (section 2.1)

Sylvia adore dormir à l'hôtel. Or, son travail n'entraîne pas de nuitées à l'extérieur. Aussi, cette année, pour Noël, elle a demandé à son frère Sylvio une carte-cadeau qui lui permettrait de dormir à l'hôtel les nuits des 22 et 23 mars, 22 et 23 juin, 22 et 23 septembre 2016. En tenant compte des diverses taxes, chacun des trois séjours à l'hôtel – Sylvia a déjà fait les réservations! – coûtera 442,26 $. Ce montant devra être réglé au moment de quitter la chambre.

Sylvio, malin, histoire d'économiser un peu, lui versera plutôt, le 24 décembre 2015, un montant suffisant dans son compte d'épargne pour financer les séjours désirés à l'hôtel.

a) Quel montant Sylvio déposera-t-il dans le compte d'épargne de Sylvia si, dans ce compte, le taux d'intérêt nominal capitalisé 4 fois l'an est de 1 % ?
b) Quel montant Sylvio met-il de côté aujourd'hui, le 24 septembre 2015, si sa fortune lui donne accès à un compte d'épargne qui verse un taux d'intérêt nominal capitalisé 4 fois l'an de 2 % ?

Question 2 (section 2.1)

Martina veut économiser sur base mensuelle un montant suffisant pour pouvoir retourner passer l'été dans son pays natal, le Costa Rica. Pour ce faire, elle doit avoir accumulé 2000 $ le 24 avril 2016, jour où elle achètera son billet d'avion aller-retour. (S'il lui reste des fonds après cet achat, elle prévoit rapporter de petits cadeaux à sa famille.)

Quel est ce montant mensuel si elle commence dès aujourd'hui, le 24 septembre 2015, à économiser, et ce, jusqu'au 24 avril 2016 inclusivement et si le taux d'intérêt nominal capitalisé mensuellement est 1,8 %?

Question 3 (section 2.1)

Refaire la question 2 (c.-à-d., calculer le montant versé aujourd'hui) si le montant mensuel est augmenté de 50 % pour les 3 derniers versements.

Question 4 (section 2.1)

Refaire la question 2 (c.-à-d., calculer le montant versé aujourd'hui) si le taux d'intérêt, initialement de 1,8 %, passe à 1,2 % le 24 décembre 2015.

Question 5 (section 2.1)

Quelle est la valeur le 31 décembre 2014 de 12 versements semestriels (aux 6 mois) de 150 $ si le 1er versement a été fait le 31 décembre 2012 et si le taux d'intérêt est de 3 % par semestre ?

Question 6 (section 2.2)

Georgette est bien embêtée. Elle veut savoir combien elle peut retirer à la fin de chaque mois pendant cinq ans si elle a 50 000,00 $ aujourd'hui à déposer dans son compte. Son problème, c'est que la banque lui dit qu'elle offre un taux effectif annuel de 5 % et, du coup, elle ne sait pas comment faire le calcul. Vous pouvez sûrement l'aider!

a) Faites d'abord le calcul en trouvant le taux effectif par mois.
b) Faites ensuite le calcul en respectant la notation propre aux rentes payables m fois l'an.

Question 7 (section 2.2)

Selon ce que j'ai pu trouver sur Internet, nous absorbons environ 2500 litres d'oxygène chaque jour. Cela fait presque 1 mégalitre par année!

Supposons que le gouvernement ou une entité quelconque nous facture 0,01 $ par litre d'oxygène et que la force d'intérêt applicable est 0,08.

Comparez la valeur actualisée d'une facture réglée quotidiennement en fin de journée (25 $ par jour) pendant 50 ans à celle d'une facture réglée continûment.

Question 8 (section 2.2)

Claire aime aller au cinéma. Elle vient de gagner 2000 $ à la loterie et elle décide de garder ce montant pour financer ses sorties mensuelles au grand écran. Il lui en coûte chaque fois 25 $. La prochaine sortie au cinéma est dans un mois. Le taux d'intérêt effectif mensuel est 0,5 %.

a) Combien de fois (nombre entier) pourrait-elle aller au cinéma avec cette mise de fonds initiale?
b) Combien de plus pourrait-elle dépenser lors de sa dernière sortie?
c) Si elle mettait de côté le montant restant lors de sa dernière sortie et le conservait jusqu'à ce qu'elle ait accumulé 25 $, combien de temps devrait-elle attendre avant de retourner au cinéma?

Question 9 (section 2.1)

Trouvez le taux d'intérêt effectif mensuel qui aurait permis à Claire d'aller au cinéma le même nombre de fois que celui trouvé en a) avec les données de la question 8, mais sans excédent pour la dernière sortie.

Question 10 (section 2.3)

Supposons que les salaires annuels sont versés en milieu d'année et qu'ils augmentent de 2 % par année. Le salaire d'Antonia, cette année, à être versé dans six mois, est de 45 000 $. Or, Antonia travaille par plaisir et n'a plus besoin de son salaire. En fait, elle s'est engagée à verser la valeur accumulée de ses salaires dans cinq ans à un organisme de bienfaisance. Quelle sera cette valeur si le taux d'intérêt effectif annuel est de 3 %?

Question 11 (section 2.3)

Quelle est la valeur actualisée de 30 sorties mensuelles au cinéma, la prochaine étant dans un mois et coûtant 25 $, si le coût augmente de 0,5 % tous les trois mois? Le taux d'intérêt effectif mensuel est 0,5 %.

Question 12 (section 2.3)

Robert aime bien faire son comique! Aussi, au lieu de vous dire quel sera le prochain dividende versé par l'action qu'il s'apprête à acheter, et dont il veut que vous calculiez le prix, il vous informe que le dividende, trimestriel, sera de 1,25 $ dans un an et de 1,50 $ dans cinq ans. Le taux à utiliser pour actualiser les dividendes, vu le niveau de risque de l'action, est 10 % (effectif annuel). Alors, combien Robert paye-t-il pour l'action?

Question 13 (section 2.3)

Yvonne reçoit aujourd'hui 100 $. L'an prochain, elle recevra 125 $. En fait, le montant qu'elle recevra chaque année augmentera de 25 $ chaque année jusqu'à ce qu'il soit de 500 $. En tout, elle recevra 50 versements. Quelle est la valeur actualisée, aujourd'hui, de tous ces versements si le taux d'intérêt effectif annuel est de 5 % ?

Faites le calcul tant en considérant la rente comme la somme d'une rente croissante et de deux rentes constantes que comme la différence entre une rente constante et une rente décroissante.

Question 14 (section 2.3)

Soit une rente continue dont le taux de paiement est donné par la fonction suivante :

$$h(t)=\begin{cases} t^2 & t\le 10 \\ 0 & t>10 \end{cases}$$

et qu'on évalue avec une force d'intérêt constante à 0,08. Quelle est en la valeur accumulée dans 15 ans?

Question 15 (section 2.4)

Suzette consent un prêt de 1000 $ à Sylvie au taux d'intérêt effectif annuel de 8 %, et ce, avec une échéance de 5 ans.
Si Suzette reçoit de l'argent de Sylvie, elle peut le réinvestir au taux d'escompte effectif annuel de 4 %.
Calculez le taux de rendement réalisé par Suzette sur base annuelle pendant la période de 5 ans dans chacun des cas suivants :

a) Sylvie rembourse Suzette via 5 versements annuels égaux.
b) Sylvie paye uniquement les intérêts courus à la fin de chaque année et rembourse le capital emprunté à l'échéance des 5 ans.
c) Sylvie ne paye rien avant l'échéance de 5 ans, auquel moment elle verse le capital et tous les intérêts courus.

Question 16 (section 2.4)

Une série de 15 flux monétaires de fin d'année, dont le premier était de 100 $, augmente de 10 $ par année. Il y a 4 ans, lors de l'achat de cette série, le taux d'intérêt était de 8 %. Il est maintenant de 7 %.
a) Quelle est aujourd'hui la valeur comptable de cette série de flux monétaires?
b) Quelle est aujourd'hui la valeur marchande de cette série de flux monétaires?

Question 17 (section 2.4)

Bertha se fait offrir une série de 12 versements mensuels de 1 000 $. Elle peut réinvestir ses versements au taux de 0,5 % par mois. Voici ses objectifs :
- réaliser un taux de rendement de 1 % par mois;
- récupérer dans un an le montant payé aujourd'hui;
- prélever une partie de chaque versement pour ses dépenses personnelles, cette partie étant constante.

Combien devrait-elle payer aujourd'hui pour atteindre ses objectifs?

Question 18 (section 2.4)

Sylvie prête 10 000 $ à son amie Yvonne. Yvonne remboursera le prêt en effectuant 8 versements trimestriels de 1 500 $. Sylvie peut réinvestir l'argent reçu d'Yvonne au taux effectif annuel de 3 %. Combien peut-elle garder tous les 3 mois tout en retrouvant les 10 000 $ du départ une fois qu'Yvonne aura remboursé le prêt?

Chapitre 3

Remboursement d'un prêt

3.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 3
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 3.1)

Faites le tableau de remboursement jusqu'à $t = 4$ pour un emprunt de 10 000 $ dont les quatre premiers versements annuels sont 500 $, 1000 $, 500 $ et 2000 $...

a) si le taux d'intérêt annuel est constant à 8 %;
b) si le taux d'intérêt de la t^e année est donné par $0{,}05+0{,}01t$.

Question 2 (section 3.1)

Un prêt de 100 000 $ est contracté selon les termes suivants : intérêts courus réglés mensuellement, capital remboursé intégralement à l'échéance. Quel est le montant du versement mensuel, avant l'échéance, si le taux d'intérêt effectif annuel est de 5 %?

Question 3 (section 3.1)

Le montant de l'emprunt est de 100 000 $ et le taux d'intérêt annuel est de 5 %. Le remboursement se fait en 6 versements annuels définis comme suit :

$$K_t = |t - 3{,}5| \times K, t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

a) Trouver K.
b) Calculer le solde à la fin de la 2^e année de façon récursive, rétrospective et prospective.
c) Calculer aussi les intérêts payés et le capital remboursé la 3^e année.

Question 4 (section 3.1)

Le montant de l'emprunt est 100 000 $ et il est remboursable en faisant six versements annuels égaux. Le taux d'intérêt est de 4 % les deux premières années, et de 6 % les quatre dernières.

a) Trouver le versement annuel.
b) Calculer le solde à la fin de la 4^e année de façon récursive, rétrospective et prospective.
c) Calculer aussi les intérêts payés et le capital remboursé la 4^e année.

Question 5 (section 3.2)

Le taux d'intérêt par période est de 5 %. Le capital remboursé à la fin de la 3^e période est de 150 $. Le nombre de versements périodiques égaux est 10.

a) Trouver le versement périodique.
b) Trouver le montant de l'emprunt.
c) Trouver le capital remboursé lors du 8^e versement.
d) Trouver le total des intérêts payés.

Question 6 (section 3.2)

Érica a contracté un emprunt de 100 000 $ il y a 5 ans. À cette époque, le taux d'intérêt composé 12 fois l'an était de 4,8 % et elle a fait des versements mensuels dans le but de rembourser son emprunt hypothécaire en 25 ans. Aujourd'hui, 5 ans plus tard, c'est le temps de renégocier son emprunt. Elle a le choix entre rester à la même institution avec un taux composé mensuellement de 5,4 % ou changer d'institution avec un taux composé mensuellement de 5,1 % mais en payant des frais F. Trouver le montant des frais F tel que Érica soit indifférente entre les deux options, selon les deux approches suivantes :

a) Les frais sont payés immédiatement et le taux équivalent qui en résulte est 5,4 % composé 12 fois l'an.
b) Les frais sont refinancés avec le solde de l'emprunt et les versements mensuels sont les mêmes.

Question 7 (section 3.3)

Le montant emprunté est 100 000 $. Le taux d'intérêt sur l'emprunt est 5 %. Les termes du contrat prévoient que seuls les intérêts courus seront réglés annuellement et que la dette sera remboursée dans 10 ans. L'emprunteur va reconstituer le capital emprunté en faisant des dépôts annuels égaux dans un compte offrant 3 % par année.

a) Calculer le 5^{e} versement total, en le décortiquant en ses deux composantes : celui au prêteur et celui dans le fonds d'amortissement.
b) Calculer le capital remboursé lors du 5^{e} versement, en le décortiquant en ses deux composantes : capital remboursé au prêteur et capital ajouté dans le fonds d'amortissement.
c) Calculer les intérêts payés lors du 5^{e} versement, en les décortiquant selon qu'ils sont versés au prêteur ou qu'ils sont reçus dans le fonds d'amortissement.
d) Calculer le solde net de l'emprunt tout de suite après le 5^{e} versement, en décortiquant encore une fois selon ce qui est dû au prêteur et ce qui est accumulé dans le fonds d'amortissement.

Question 8 (section 3.1)

Vous contractez un prêt de 100 000 $. Votre situation financière vous permet d'effectuer des versements mensuels de 1000 $. Le taux d'intérêt effectif annuel est de 10 %.

a) Dans combien d'années aurez-vous remboursé votre prêt?
b) Quel est le montant du dernier versement que vous effectuerez?

Chapitre 4

Évaluation d'une obligation

4.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 4
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 4.1)

Une obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 8 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 6 %. L'obligation vient à échéance dans 5 ans. La valeur nominale est de 100 $.

a) Quel est le prix aujourd'hui?
b) Quel sera le prix dans 6 mois si le taux de rendement demandé par le marché est alors de 7 %?
c) Quel sera le prix dans 15 mois si le taux de rendement demandé par le marché est alors de 5 %?
d) Et quel sera le prix indiqué dans le journal dans 15 mois?

Question 2 (section 4.1)

Une autre obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 5 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 4 %. La valeur nominale est de 1000 $. La valeur de remboursement est de 1250 $. Quel est le prix de l'obligation?

Question 3 (section 4.1)

Une dernière obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 4 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 4 %. La valeur nominale est de 1000 $. La valeur de remboursement est de 1050 $. L'échéance est de 10 ans.

a) Quel est le prix de l'obligation?
b) L'obligation est-elle vendue au-dessus du pair, au pair ou au-dessous du pair?
c) À quel prix devez-vous la revendre dans 5 ans pour avoir réalisé un taux de rendement de 4,5 %?
d) À quel prix devez-vous la revendre dans 5 ans pour avoir réalisé un taux de rendement de 4,5 % sur l'ensemble des transactions si vous tenez compte du fait que vous avez réinvesti tous les coupons dans un compte offrant 1 % tous les 6 mois?

Question 4 (section 4.1)

Trouvez le taux de rendement nominal composé deux fois l'an pour les obligations suivantes :

a) Taux de coupon de 8 % composé semestriellement, valeur nominale de 100 $, prix de 105 $, échéance dans 5 ans
b) Taux de coupon de 6 % composé semestriellement, valeur nominale de 100 $, valeur de remboursement de 105 $, prix de 95 $, échéance dans 10 ans
c) Taux de coupon de 4 % composé semestriellement, valeur nominale de 100 $, prix de 100 $, échéance dans 7 ans

Question 5 (section 4.2)

Une obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 8 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 6 %. L'obligation vient à échéance dans 4 ans. La valeur nominale est de 100 $.

Complétez le tableau de remboursement pour cette obligation.

Question 6 (section 4.2)

Une autre obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 4 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 4 %. La valeur nominale est de 1000 $. La valeur de remboursement est de 1050 $. L'échéance est de 4 ans.

Complétez le tableau de remboursement pour cette obligation.

Question 7 (section 4.3)

Une obligation doit venir à échéance dans 10 ans. Le coupon payable chaque semestre est de 3,25 $. Le remboursement peut être fait par anticipation lors de n'importe quel coupon en autant qu'au moins la moitié des coupons ait été versée. Si les coupons sont numérotés de 1 à 20, 1 étant le premier dans 6 mois, un remboursement fait lors d'un coupon pair verse 105 $ en sus du coupon, alors qu'un remboursement fait lors d'un coupon impair verse 110 $ en sus du coupon. Le taux de rendement minimalement visé, composé 2 fois l'an, est 6 %.

a) Quel prix devrait-on offrir pour cette obligation?
b) À ce prix, quel est le meilleur taux de rendement qu'on peut réaliser?

Chapitre 5

Mesure du taux de rendement

5.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 5
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 5.1)

Adrien alterne, annuellement, les dépôts et les retraits d'un montant qui est toujours le même. Le premier dépôt se fait aujourd'hui. Le premier retrait se fait dans un an. Dans 6 ans, quand Adrien vient pour faire son 4^e dépôt, il se rend compte qu'il a en banque exactement le montant qu'il s'apprêtait à déposer. Aussi, au lieu de faire le dépôt, il retire tout et ferme le compte!

a) Quelle est l'équation à résoudre pour trouver le taux de rendement interne?
b) Essayez une valeur (strictement positive) pour ce taux et indiquez dans quelle direction il faudrait aller pour trouver le bon taux (strictement positif).

Question 2 (section 5.1)

Un projet nécessite un investissement immédiat de 60 000 $ et un autre investissement de 50 000 $ dans un an. Dans deux ans, les revenus seront de 20 000 $ et cette entrée nette de fonds augmentera de 2 % par année. L'investissement générera des revenus positifs pendant 10 ans. Le coût du capital est de 12 %. Quelle est la valeur actualisée nette du projet?

Question 3 (section 5.2)

Un fonds commun de placement a une valeur totale de 500 000 $ le 31 décembre 2013. Ce fonds connaît des flux de trésorerie importants à chaque trimestre. Le 31 mars 2014, on constate un retrait net de 100 000 $ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 425 000 $. Le 30 juin 2014, on constate un dépôt net de 50 000 $ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 470 000 $. Le 30 septembre 2014, on constate un dépôt net de 25 000 $ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 500 000 $. Enfin, le 31 décembre 2014, on constate un retrait net de 75 000 $ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 410 000 $.

a) Quel est le taux de rendement pondéré en dollars?
b) Quel est le taux de rendement pondéré par période?

Question 4 (section 5.3)

Une banque n'offre pas toujours le même taux d'intérêt année après année. Voici le tableau des taux pertinents, selon l'année du dépôt.

Année du dépôt	Taux d'intérêt
2010	0,08
2011	0,09
2012	0,08
2013	0,07
2014	0,06

Combien vaudra à la fin de 2014 un dollar déposé au début de 2013?

Chapitre 6

Structure par échéance des taux d'intérêt

6.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 6
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 6.1)

Voici les taux de rendement à l'échéance pour les obligations coupon zéro disponibles sur le marché.

Échéance	Taux
1 an	2 %
2 ans	3 %
3 ans	4 %
4 ans	4½ %
5 ans	5 %

Calculez le prix des obligations suivantes, toutes deux ayant une valeur nominale de 100 $.

a) Obligation avec coupon annuel de 2 % échéant dans 2 ans.
b) Obligation avec coupon annuel de 6 % échéant dans 5 ans.

Question 2 (a – section 6.1; b – section 6.3)

Voici le prix de quelques obligations coupon zéro dont la valeur nominale est de 100 $.

Échéance	Prix
1 an	95
2 ans	90
3 ans	85

a) Que sont les taux comptants 1 an, 2 ans et 3 ans?
b) Que sont les taux à terme de la 1re année, de la 2^{e} année et de la 3^{e} année?

Question 3 (a – section 6.1; b – section 6.3)

Voici le prix de différentes obligations à coupon annuel de 3 % et valeur nominale de 100 $.

Échéance	Prix
1 an	99
2 ans	97
3 ans	95

a) Que sont les taux comptants 1 an, 2 ans et 3 ans?
b) Que sont les taux à terme de la 1re année, de la 2^{e} année et de la 3^{e} année?

Question 4 (section 6.3)

Recalculez le prix des deux obligations de la question 1 si les taux à terme sont tels que donnés ci-dessous.

Année	Taux
1re	2½ %
2e	3 %
3e	3½ %
4e	4 %
5e	4½ %

Question 5 (section 6.3)

Vous comptez acheter une automobile dans 3 ans et vous savez que vous aurez alors besoin d'emprunter 30 000 $. Vous savez aussi que vous serez en mesure de rembourser capital et intérêts un an plus tard. Autrement dit, vous emprunterez la somme uniquement pour un an. Les taux comptants sont actuellement de 8 % pour 3 ans et 7 % pour 4 ans.

a) En théorie, en l'absence d'arbitrage, à quel taux devriez-vous pouvoir emprunter dans 3 ans pour 1 an si vous fixez le taux aujourd'hui?
b) Combien économiseriez-vous en intérêts si quelqu'un s'engageait aujourd'hui à vous faire le prêt dont vous avez besoin dans 3 ans à un taux de 3¾ %?

6.2 Solutions

1. Pour cette question, on nous donne les *spot-rate* pour des obligations zéro-coupon venant à échéance dans 1 à 5 ans. Donc, on peut voir les obligations qu'on nous demande de calculer en a) et b) comme plusieurs obligations *zéro-coupon* avec des échéances différentes (pour chaque coupon.)

   a) Pour cette obligation, c'est comme si on avait 2 obligations zéro-coupon : une avec une échéance dans 1 an, et l'autre avec une échéance dans 2 ans. Alors,

   $$P = P(0,1) + P(0,2)$$

   $$\begin{aligned} P(0,1) &= Fr(1+s_0(1))^{-1} \\ &= (100 \cdot 0,02)(1+0,02)^{-1} \\ &= 1,96 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P(0,2) &= F(1+r)(1+s_0(2))^{-2} \\ &= 102(1,03)^{-2} \\ &= 96,14478273 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P &= 1,960784314 + 96,14478273 \\ &= 98,10556704 \end{aligned}$$

   b) Même principe pour le b), mais avec 5 obligations... c'est donc beaucoup plus long :

   $$\begin{aligned} P &= P(0,1) + P(0,2) + P(0,3) + P(0,4) + P(0,5) \\ &= Fr(1+s_0(1))^{-1} + Fr(1+s_0(2))^{-2} + Fr(1+s_0(3))^{-3} \\ &\quad + Fr(1+s_0(4))^{-4} + F(1+r)(1+s_0(5))^{-5} \\ &= 6(1,02)^{-1} + 6(1,03)^{-2} + 6(1,04)^{-3} + 6(1,045)^{-4} + 106(1,05)^{-5} \\ &= 104,9570483 \end{aligned}$$

2. Si l'on connaît le prix des obligations *zéro-coupon* avec des échéances données, nous somme capable d'isoler $s_0(n)$.

   a)

$$\begin{aligned} P(0,1) &= F(1+s_0(1))^{-1} \\ s_0(1) &= \frac{F}{P(0,1)} - 1 \\ &= \frac{100}{95} - 1 \\ &= 0,052631579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0,2) &= F(1+s_0(2))^{-2} \\ s_0(2) &= \frac{F}{P(0,2)} - 1 \\ &= \left(\frac{100}{90}\right)^{1/2} - 1 \\ &= 0,054092553 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0,3) &= F(1+s_0(3))^{-3} \\ s_0(3) &= \frac{F}{P(0,3)} - 1 \\ &= \left(\frac{100}{85}\right)^{1/3} - 1 \\ &= 0,055667192 \end{aligned}$$

   b) Les taux à termes (*Forward rate*) sont des taux pour lesquels, en fonction des taux *spot* en vigueur, le rendement que l'on peut faire d'une année à l'autre dans le futur.

      La formule générale pour trouver un taux $i_o(n)$ est :

$$i_0(n-1,n) = \frac{(1+s_0(n))^n}{(1+s_0(n-1))^{n-1}} - 1$$

Alors,

$$\begin{aligned} i_0(0,1) &= s_0(1) \\ &= 0,052631579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_0(1,2) &= \frac{(1+s_0(2))^2}{(1+s_0(1))^1} - 1 \\ &= \frac{(1,054092553)^2}{0,052631579} \\ &= 0,0555555555 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_0(2,3) &= \frac{(1+s_0(3))^3}{(1+s_0(2))^2} \\ &= \frac{(1+0,055667192)^3}{(1+0,054092553)^2} \\ &= 0,058823529 \end{aligned}$$

3. Ici la question est posée différente. Les prix donnés correspondent à des obligations normales <u>avec coupon</u>.

   Il faut donc commencer par isoler $s_0(1)$ avec le prix de l'obligation qui va être échue dans 1 an, puis isoler $s_0(2)$ sachant qu'on connaît $s_0(1)$, etc...

a) Pour l'obligation à échéance 1 ans

$$\begin{aligned}
P &= F(1+r)(1+s_0(1))^{-1} \\
s_0(1) &= \frac{F(1+r)}{P} - 1 \\
&= \frac{100(1,03)}{99} - 1 \\
&= 0,0404040404
\end{aligned}$$

l'obligation 2 ans ...

$$\begin{aligned}
P &= Fr(1+s_0(1))^{-1} + F(1+r)(1+s_0(2))^{-2} \\
s_0(2) &= \left(\frac{P - Fr(1+s_0(1))^{-1}}{F(1+r)}\right)^{-1/2} - 1 \\
&= \left(\frac{97 - 3(1,0404040404)^{-1}}{103}\right)^{-1/2} - 1 \\
&= 0,046130146
\end{aligned}$$

l'obligation 3 ans ...

$$\begin{aligned}
P &= Fr(1+s_0(1))^{-1} + Fr(1+s_0(2))^{-2} + F(1+r)(1+s_0(3))^{-3} \\
s_0(2) &= \left(\frac{P - Fr(1+s_0(1))^{-1} - Fr(1+s_0(2))^{-2}}{F(1+r)}\right)^{-1/3} - 1 \\
&= \left(\frac{97 - 3(1,0404040404)^{-1} - 3(1,046130146)^{-2}}{103}\right)^{-1/3} - 1 \\
&= 0,048431327
\end{aligned}$$

b) pour trouver les taux *forward*, on effectue exactement les mêmes calculs qu'au numéro 2 ci-haut :

$$\begin{aligned}
i_0(0,1) &= 0,0404040404 \\
i_0(1,2) &= 0,051887767 \\
i_0(2,3) &= 0,053048886
\end{aligned}$$

4. On nous donne dans la question nos $i_0(n-1,n)$, il faut connaître l'entité suivante :

$$(1+s_0(n))^n = (1+i_0(0,1) \times (1+i_0(1,2)) \times ... \times (1+i_0(n-1,n)))$$

On n'a donc pas besoin de convertir nos taux *forward*, simplement successivement les coupons des obligations avec les bons taux.

a)

$$\begin{aligned} P &= Fr(1+i_0(0,1))^{-1} + F(1+r)(1+i_0(0,1))(1+i_0(1,2)) \\ &= 2(1,025)^{-1} + 102(1,025)^{-1}(1,03)^{-1} \\ &= 98,5165001184 \end{aligned}$$

b) Même principe, mais les calculs se rallongent ...

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{5} Fr \prod_{u=1}^{k} (1+i_0(u-1,u))^{-1} + \frac{100}{\prod_{u=1}^{5}(1+i_0(u-1,u))} \\ &= \frac{6}{1,025} + \frac{6}{(1,025)(1,03)} + ... \\ P &= 111,567160440 \end{aligned}$$

5. (a) On nous demande seulement de calculer notre $i_(3,4)$ sachant qu'on connaît $s_0(4)$ et $s_0(4)$.

$$\begin{aligned} i_0(3,4) &= \frac{(1+s_0(4))^4}{(1+s_0(3))^3} - 1 \\ &= \frac{(1,07)^4}{(1,08)^3} - 1 \\ &= 0,040552134 \end{aligned}$$

(b) Si quelqu'un nous offre un taux inférieur au taux *forward* auquel on pourrait s'engager, alors l'économie conrrespond à la différence entre le taux $i_(3,4)$ trouvé en a) et le taux i^* offert :

$$\begin{aligned} \text{économies} &= |i_0(3,4) - i^*| \times 30\ 000\$ \\ &= (0,040552134 - 0,0375) \times 30000 \\ &= 91,56402\$ \end{aligned}$$

Chapitre 7

Duration et immunisation

7.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 7
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 7.1)

Le taux de rendement à l'échéance pour une obligation à coupon annuel de 4 % échéant dans 5 ans est de 6 %.

a) Calculez la duration, la duration modifiée, la convexité et la convexité modifiée pour cette obligation.
b) Déterminez, par approximation au 1^er^ et au 2^e^ degré, le prix de l'obligation si le taux de rendement à l'échéance passe subitement à 5,9 %.

Question 2 (section 7.1)

Une série de flux monétaires prévoit le versement de 100 $ dans un an, 200 $ dans deux ans et 250 $ dans trois ans. Le taux d'intérêt est constant à 8 %.

a) Calculez la duration, la duration modifiée, la convexité et la convexité modifiée pour cette série de flux monétaires.
b) Déterminez, par approximation au 1^er^ et au 2^e^ degré, le prix de la série si le taux d'intérêt augmente subitement d'un point de base.

Question 3 (section 7.1)

Vous bâtissez un portefeuille en combinant quatre séries de flux monétaires. Les prix, durations et convexités de ces séries sont donnés ci-dessous.

Série k	P_k	D_k	C_k
1	1256,639	3,589	14,493
2	1329,837	2,436	7,247
3	1299,872	2,870	10,891
4	1618,533	4,299	20,124

Calculez la duration, la duration modifiée, la convexité et la convexité modifiée du portefeuille si le taux d'intérêt est constant à 5 %.

Question 4 (section 7.2)

Sont disponibles sur le marché les obligations suivantes, toutes à valeur nominale de 100 $:

- Coupon annuel de 1 %, échéance de 1 an;
- Coupon annuel de 2 %, échéance de 2 ans;
- Coupon annuel de 3 %, échéance de 3 ans.

Comment combinerez-vous ces obligations pour apparier l'ensemble de flux de passif suivant : $L_1 = 100$, $L_2 = 150$ et $L_3 = 250$.

Question 5 (section 7.2)

Le taux d'intérêt est de 10 %. Les flux de passif prévus sont de 100 $ dans 2 ans, 200 $ dans 4 ans et 500 $ dans 6 ans.

a) Quels flux d'actif à recevoir dans 3 ans et 5 ans permettent de satisfaire aux deux premières conditions d'immunisation selon Redington?
b) Ces flux d'actif satisfont-ils à la troisième condition d'immunisation selon Redington?

Question 6 (section 7.2)

Le taux d'intérêt est de 8 %. Les flux de passif prévus sont $L_2 = 100$, $L_4 = 300$ et $L_6 = 200$. Quels flux d'actif faut-il prévoir à $t = 1$ et $t = 7$ pour avoir immunisation complète?

1. (a) Rappel de la formule pour trouver la duration :

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tK_t(1+i)^{-t}}{\text{Prix flux monétaire}}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\text{Prix} &= (Fr - Cj)a_{\overline{5}|4\%} + C \\
&= (4-6)\left(\frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06}\right) + 100 \\
&= 95,57527243
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{5} tK_t(1,06)^{-t} &= (1)(4)(1,06)^{-1} + (2)(4)(1,06)^{-2} \\
&+ (3)(4)(1,06)^{-3} + (4)(4)(1,06)^{-4} + (5)(104)(1,06)^{-5} \\
&= 422,2167363
\end{aligned}$$

Si on remet tout ensemble,

$$\begin{aligned}
D &= \frac{422,2167363}{95,56430512} \\
&= 4,61059
\end{aligned}$$

On peut rapidement trouver la duration modifiée :

$$MD = \frac{D}{(1+i)} = \frac{4,61059}{1,06} = 4,349613208$$

Pour la convexité, c'est presque le même calcul que la duration :

$$C = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2K_t(1+i)^{-t}}{\text{Prix flux monétaire}}$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{5} t^2 K_t (1,06)^{-t} &= (1)^2(4)(1,06)^{-1} + (2)^2(4)(1,06)^{-2} \\
&\quad + (3)^2(4)(1,06)^{-3} + (4)^2(4)(1,06)^{-4} + (5)^2(104)(1,06)^{-5} \\
&= 2041,805066
\end{aligned}
$$

La convexité est donc :

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{2041,805066}{95,57527243} \\
&= 21,36331934
\end{aligned}
$$

Et on peut calculer la convexité modifiée via cette relation :

$$
MC = \frac{C + D}{(1+i)^2} = \frac{4,61059 + 21,36331934}{(1,06)^2} = 23,11668685
$$

(b) Petite précision sur la notation utilisée dans la solution : P_i est le prix de l'obligation à un taux d'intérêt i.

$y = 0,06$, $y + h = 0,059$, alors $h = 0,01$.
Pour le premier degré,

$$
\begin{aligned}
P_{y+h} &\approx P_y - h \cdot P_y \cdot DM \\
P_{0,059} &\approx P_{0,06} - 0,001 P_{0,06} DM \\
&\approx (91,575) - 0,001(91,575)(4,34962) \\
&\approx 91,97359
\end{aligned}
$$

Et au deuxième degré,

$$\begin{aligned}
P_{y+h} &\approx P_y - h \cdot P_y \cdot DM + \frac{1}{2}h^2 \cdot CM \\
&\approx P_{0{,}06} - 0,001 P_{0{,}06} DM + \frac{1}{2}(-0,001)^2 CM \\
&\approx 91,575 - 0,001(91,575)(4,34962) + \frac{1}{2}(-0,001)^2(23,11668685) \\
&\approx 91,974687
\end{aligned}$$

2. (a)

Duration (D)	2,22889
Duration modifiée (MD)	2,063786
Convexité (C)	5,544830427
Convexité Modifiée (MC)	6,664711609

   (b) Avec $h = 0,01\% = 0,0001$,

   Au premier degré : $P_{0{,}0801} \approx 462,422963$
   Au deuxième degré : $P_{i+h} \approx 462,422978$

3.