Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

Où les dénominateurs sont à être interprété en REGEX. Pour exemple, pour la première c'est soit le taux d'escompte pour une une annuité due ou le taux d'intérêt pour une immédiate.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{(d^{(m)}|i^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(d^{(m)}|i)}$$

$$(D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(d^{(m)}|i)}$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Facteur d'accumulation

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

Sommations

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 Survie et mortalité

1.2 Probabilités de survie et de décès

X : Âge au décès d'un nouveau-né

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x.

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$
$$f_{T_x} = {}_tp_x \mu_{x+t}$$
$$F_{T_x} = {}_tq_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$
$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x$$
$${}_{t+y}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x \cdot {}_yq_{x+t}$$
$$S_{T_x}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right\} = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu_s ds\right\}$$
$$T_x \in \mathbb{R}^+$$

K_x : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge x.

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$
$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_{k|}p_x$$
$$K_x \in \mathbb{Z}^+$$

μ_x : Force de mortalité pour (x)

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(S_X(x))\Big)$$
$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ln({}_tp_x)\Big)$$
$$\alpha\mu_{x+s} + h(s) = ({}_tp_x)^\alpha e^{-\int_0^t h(s)ds}$$

R_x : Durée de vie résiduelle fractionnaire d'un individu d'âge x.

$$R_x = T_x - K_x$$
$$R_x \in [0,1)$$

$J_x^{(m)}$: Nombre de m-ème d'années vécus durant l'année du décès.

$$J_x^{(m)} \in \{0,1,2,\ldots,m-1)$$
$$J_x^{(m)} = [mR_x]$$

$H_x^{(m)}$: Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x exprimé en m-ème années.

$$H_x^{(m)} = [mT_x]$$
$$H_x^{(m)} \in \mathbb{Z}^+$$

1.3 Lois de mortalité

Loi de Moivre

Pas très réaliste car assume une chance **uniforme** de mourir n'importe quand alors qu'en réalité une personne agée de 90 ans a des plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans.
C'est la seule loi avec un **support fini**.

$$X \sim \text{Unif}(0,\omega)$$
$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega},\ 0 \leq x \leq \omega$$
$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x},\ 0 \leq x \leq \omega$$
$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$
$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x},\ 0 \leq t \leq \omega - x$$

Loi Exponentielle

$$X \sim \text{Exp}(\mu)$$
$$S_x(x) = e^{-\mu x},\ x \geq 0$$
$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$
$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t},\ t \geq 0$$
$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A,B,c)$$
$$A : \text{risque d'accident}$$
$$Bc^x : \text{risque lié au vieillissement}$$
$$\mu_x = A + Bc^x,\ x \geq 0$$
$${}_tp_x = e^{-At - \frac{Bc^x}{ln(c)}(c^t - 1)},\ t \geq 0$$

Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B,c)$$

Loi de Weibull

$$X \sim \text{Wei}(k,n)$$
$$\mu_x = kx^n,\ x \geq 0$$
$${}_tp_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]},\ t \geq 0$$

1.4 Tables de mortalité

ℓ_0 : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

ℓ_x : Nombre d'invidu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x.

${}_nd_x$: Nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$\ell x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$
$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_{t|u}q_x = \frac{{}_ud_{x+t}}{\ell_x}$$

1.5 Mortalité sélecte et ultime

$[x]$: âge de la sélection *(pas une valeur entière)*.

$[x]+j$: âge atteint où j est le temps écoulé depuis la sélection.

ode sélecte r : Période de durée r durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \ldots$$

$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]r+j}p_{[x]} = \ell_{[x]r}p_{[x]j}p_{x+r}$$

1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Pour $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{Z}$.
Distribution uniforme des décès (DUD)
Décès répartis uniformément sur l'année.

$$S_X(x+t) = (1-t) \times S_X(x) + t \times S_X(x+1), \qquad t \in [0,1]$$

$$S_X(x+t) = \frac{(c-t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x+1), \qquad t \in [0,c]$$

les conditions pour t et x appliquent aux 3 équations suivantes

$$_tq_x = \left(\frac{t}{c}\right) {}_cq_x, \qquad t \in [0,c]$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c}{}_cq_x}{1-\frac{t}{c}{}_cq_x}, \qquad x \in \{0, c, 2c, \ldots\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial t}{}_tq_x}{_tp_x}$$

$$_yq_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right){}_cq_x}{1-\left(\frac{t}{c}\right){}_cq_x}, \qquad y \in [0, c-t]$$

On note que la force de mortalité à la même formule que la fonction de survie car avec **DUD**, la force est uniformément appliquée.
Force constante (FC)

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{(1-t)} + S_X(x+1)^t, \qquad t \in [0,1]$$

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{\frac{(1-t)}{c}} + S_X(x+1)^{\frac{t}{c}}, \qquad t \in [0,c]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c} ln({}_cp_x), \qquad t \in [0,c]$$

$$_yq_{x+t} = 1 - ({}_cp_x)^{\frac{y}{c}}, \qquad t \in [0,c], y \in [0, c-t]$$

Tableau résumé lorsque $c = 1$

	DUD	FC
$_tq_x$	$t \cdot q_x$	$1-p_x^t$
$_tp_x$	$1-t \cdot q_x$	p_x^t
$_1d_x$	$t \cdot {}_nd_x$	$\ell_x(1-p_x^t)$
$f_{T_x}(t)$	q_x	$-p_x^t \ln(p_x)$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-t \cdot q_x}$	$-\ln(p_x)$

Sous :

DUD : $K_x \perp R_x$

FC : $K_x \perp R_x$ ssi $p_{x+k} = p_x \ \forall k \in \{0, 1, \ldots\}$

1.7 Caractéristiques individuelles

Lorsque $0 \leq x < \omega$, défini les fonctions suivantes pour 2 cas possible.

Utilisant T_x

Si nous connaissons déjà la fonction de répartition/densité de T_x on peut trouver :

Espérance : Espérance de la durée de vie future complète d'une personne d'âge x.

$$\mathrm{E}[T_x] = \mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} t_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^{\omega-x} {}_tp_xd$$

Variance

$$V(T_x) = \int_0^{\omega-x} t^2{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^{\omega-x} 2t_tp_xdt - (\mathring{e}_x)^2$$

Médiane : Le nombre d'années avant que la population d'âge x aujourd'hui diminue de moitié.
Pour la trouver il suffit d'isoler :

$$Pr[T_x \leq m(x)] = {}_{m(x)}q_x = \frac{1}{2}$$

Mode : Le moment où la population d'âge x aujourd'hui connaisse le plus de décès.
Pour le trouver, il faut le :

$$\arg\max_t {}_tp_x\mu_{x+t}$$

On peut uiliser la dérivée pour le trouver, mais il faut se méfier **des bornes** et que le résultat est un **maximum**.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

Utilisant K_x

Si nous connaissons que la table de mortalité, les seules caractéristiques disponibles sont celles de K_x.
Pour obtenir celles de T_x il faut poser un hypothèse pour les âges fractionnaires.

Espérance : Espérance du nombre d'années entières à vivre pour une personne d'âge x *(espérance de vie abrégée)*.

$$\mathrm{E}[K_x] = e_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k \ {}_{k|}q_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x$$

Variance :

$$V(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 \ {}_{k|}q_x - (e_x)^2$$

Médiane : Solution tel que :

$$Pr[K_x < m] < \frac{1}{2}$$

$$Pr[K_x \leq m] \geq \frac{1}{2}$$

Mode :

$$\arg\max_k \Pr[K_x = k]$$

Liens entre les fonctions pour K_x et T_x :

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E[T_x] \\ &= E[K_x] + E[R_x] \\ &\overset{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2} \\ V(T_x) &= V(K_x + R_x) \\ &\overset{\perp}{=} V(K_x) + V(R_x) \\ &\overset{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Variables censurées

L'espérance de vie future **d'ici** n années d'un assuré d'âge x *(entre les âges x et $x+n$)*.

Espérance de vie **complète** temporaire n années .

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{x:\overline{n|}} &= \mathrm{E}[T_x \wedge n] \\ &= \int_0^n t \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt + n \ {}_np_x \\ &= \int_0^n {}_tp_xdt, \qquad 0 \leq x < \omega, \\ & \qquad 0 \leq n \leq \omega - x \end{aligned}$$

Espérance de vie **abrégée** temporaire n années.

$$\begin{aligned} e_{x:\overline{n|}} &= \mathrm{E}[K_x \wedge n] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k_{k|}q_x + n \ {}_np_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x, \qquad 0 \leq x < \omega - 1 \\ & \qquad n \in \{0, 1, \ldots, \omega - x - 1\} \end{aligned}$$

Variables tronquées

L'espérance de vie future **conditionnelle** au **décès** dans les n prochaines années d'un assuré d'âge x *(entre les âges x et $x+n$)*.

$$\mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq n\right] = \frac{\mathring{e}_{x:\overline{n}|} - n\ {}_n p_x}{{}_n q_x}$$
$$\mathrm{E}\left[K_x | K_x \leq n\right] = \frac{e_{x:\overline{n+1}|} - (n+1)\ {}_{n+1} p_x}{{}_{n+1} q_x}$$
$$\mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq 1\right] = a(x) = \frac{e_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\begin{aligned}\mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq n\right] {}_n q_x + n\ {}_n p_x \\ &= \mathrm{E}\left[K_x | K_x \leq n\right] {}_{n+1} q_x + (n+1)\ {}_{n+1} p_x \\ &\stackrel{\perp}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_n q_x}{2}\end{aligned}$$

Formules de récurrence

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \mathring{e}_{x:\overline{m}|} + {}_m p_x \mathring{e}_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$
$$e_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{m}|} + {}_m p_x e_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$
$$m, n, (\omega - x) \in \mathbb{W})$$

$$e_{x+k} = p_{x+k}(1 + e_{x+k+1})$$
où $k \in \{(\omega - x - 2), (\omega - x - 3), \ldots, 2, 1, 0\}$

et $e_{\omega-1} = 0$ comme valeur de départ

1.8 Caractéristiques de groupe

$T^{(j)}$: v.a. de la jème vie, $j \in \{1, \ldots, \ell_a\}$

$$\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T^{(j)} > x-a\}}$$
$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}}$$

$\mathscr{L}_x$: v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x.

$$\mathrm{E}\left[\mathscr{L}_x\right] = \ell_x$$
$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_x p_0)$$

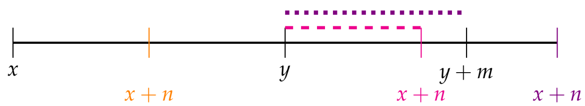
${}_n\mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$\mathrm{E}\left[{}_n\mathcal{D}_x\right] = {}_n d_x$$
$${}_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_{x|n} q_0)$$
$${}_n\mathcal{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}_{x+n}$$

On peut ensuite généraliser $\forall\ x \geq a$

$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a} p_a)$$
$${}_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a|n} q_a)$$

$$\mathrm{Cov}({}_n\mathcal{D}_x, {}_m\mathcal{D}_y) = \begin{cases} -{}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & x+n \leq y \\ {}_{y-a|x+n-y}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y < x+n \leq y+m \\ {}_{y-a|m}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y+m \leq x+n \end{cases}$$



Raccourci pour s'en souvenir où ℓ_a est le nombre inital de personnes :

$$\mathrm{Cov}(\text{Groupe A}, \text{Groupe B}) = \ell_a \times \Big(\Pr(\text{Appartenir aux groupes A et B}) - \Pr(\text{Appartenir au groupe A}) \times \Pr(\text{Appartenir au groupe B})\Big)$$

Lien entre ℓ_x et $S_X(x)$

$$\ell_x = \ell_a S_{T_a}(x-a) = \ell_a\ {}_{x-a}p_a$$

2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

2.1 Notation et introduction

Fonctions

$a(T)$: Facteur d'accumulation.

$v(T)$: Facteur d'actualisation.
$$v(t) = \frac{1}{a(t)}$$

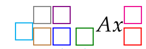
Z : v.a. de la valeur actualisée du montant payé selon les termes du contrat.
$$Z = b(T)v(f(T))$$

$b(T)$: Prestation prévue en fonction de T.

$f(T)$: Montant du paiement en fonction de T. De plus, puisque $f(T)$ n'a pas d'importance lorsque $b(T) = 0$, on défini son domaine pour simplifier des interprétations plus tard.
$$f(t) \geq T$$

A : Pour simplifier la notation, on dénote la *prime unique nette* $\mathrm{E}[Z]$, alias la **valeur actuarielle actualisée**, par $\mathrm{E}[Z] = A$.

Prestations



Prestation de base

$b A_x$ Si quelque chose est payable c'est b.

$b(IA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.

$b(DA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Force, ou multiple j de la, d'intérêt δ

$0 \leq \delta < 1$ et $j \in \mathbb{Z}_+$

${}^{\delta}A_x$ Évaluation avec **force** d'intérêt δ *(constante)*.

${}^{j}A_x$ Évaluation avec ***j* fois force** d'intérêt δ *(pas nécessairement constante)*.

Période différée

${}_{m|}A_x$ Couverture débutant dans n années. ***Donc*** si décède avant les m années, il n'y a pas de paiements.

Fréquence de variation

variation m fois par année
$$(I^{(m)}A)_x \text{ et } (D^{(m)}A)_x$$

*(dé)*croissance continue
$$(\bar{I}A)_x \text{ et } (\bar{D}A)_x$$

Type de variation de la prestation

A_x Constant

$(IA)x$ Croissant arithmétiquement

$(DA)x$ Décroissant arithmétiquement

Durée temporaire de la variation

$(I_{\overline{n}|}A)_x$ Augmentation uniquement lors des n premières années de couverture.

Moment de paiement de la prestation de décès

$\bar{A}_x$ Au moment du décès.

$A_x^{(m)}$ À la fin du 1/m année du décès. *Pour exemple*, si $m = 12$ alors c'est payable à la fin du mois de décès.

Couverture temporaire n années

$A^{1}_{x:\overline{n}|}$ Cas de décès.

$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ Cas de survie.

$A_{x:\overline{n}|}$ Les deux cas.

A_x En tout temps.

Principes de calcul de la prime pour un seul contrat

Principes pour calculer la prime *(unique)* à payer pour un contrat d'assurance :

1. $\mathrm{E}[Z]$ **principe d'équivalence**
2. $\mathrm{E}[Z] + k\sigma_Z$
3. ξ **quantile de** Z.

Interprétations pour un seul contrat

1. En moyenne l'assureur ne fait ni gains ni pertes
2. Lorsqu'il y a plusieurs contrats, le principe est équivalent au troisième mais lorsqu'il n'y en a qu'un seul alors il ne tient pas.
3. Plus petite prime π telle que $Pr(Z \geq \pi) = p$

Principes de calcul pour un portefeuille de plusieurs contrats

Généralement, on suppose les n différents contrats Z_j d'être identique et les vies à être indépendantes *(i.i.d.)*.

$$S = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

1. Par le **principe d'équivalence**, $\mathrm{E}[Z] = \pi$.
3. **Principe du quantile** $Pr(S \leq n\pi) \geq p$, où p est la **probabilité de solvabilité**.

Cependant, si les contrats ne sont ***pas identique***, la **prime varie** selon le contrat.

1. Pour chaque type de contrat le **principe d'équivalence** ne change pas, $\mathrm{E}[Z] = \pi$.
3. Pour le **Principe du quantile** on veut maintenant une **surchage égale** pour tous les contrats et donc le plus petite h telle que $Pr(S \leq h) \geq p$.

h : Prime collective sous le principe du quantile.

Doit trouver la surchage θ qui, lorsqu'appliqué à chacune des espérances individuelles, donnera la prime collective au total.

θ : **Surchage**

$$\pi = (1+\theta)\mathrm{E}[Z]$$
$$h = (1+\theta)\mathrm{E}[S]$$

Suprime

$$\theta\mathrm{E}[Z]$$

Puisque par défaut les Z_j sont *(iid)* on applique **l'approximation normale** avec $S \sim N(\mathrm{E}[S] = n\mathrm{E}[Z], V(S) = nV(Z))$.
$\Phi^{-1} = z_{1-p}$

$$z_{1-p} \leq \frac{\sqrt{n}(\pi - \mathrm{E}[Z])}{\sigma_Z}$$
$$\pi \geq \mathrm{E}[Z] + z_{1-p}\left(\frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}\right)$$
$$n \geq \left(\frac{z_{1-p}\sigma_Z}{\pi - \mathrm{E}[Z]}\right) = n_p$$

Donc avec h on résoud $h = (1+\theta)\mathrm{E}[Z]$ et applique la surprime à tous les assurés.
On applique donc l'approximation normale avec la

Règle des moments

Lorsque $b_t^j = b_t, t \geq 0$, alias $b_t \in \{0,1\}$, alors :

$$\mathrm{E}\left[Z^j\right] @\delta_t = \mathrm{E}[Z] @j \times \delta_t$$

2.2 Durée temporaire

Assurance-vie entière On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$
$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Assurance-vie temporaire On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

Capital différé de n années On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après n années.

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = {}_np_x v^n = {}_nE_x$$

où ${}_nE_x$ est un facteur d'actualisation actuarielle.

Assurance mixte On verse le capital à l'assuré si il décède dans les n prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_np_x = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$
$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x + v^n {}_np_x$$

Assurance différée On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de m années[1]

$${}_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = v^m {}_mp_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_tp_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt = {}_mE_x \bar{A}_{x+m}$$
$${}_{m|}A_x = \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)|}q_x = v^m {}_mp_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_kp_{x+m} q_{x+m+k} = {}_mE_x A_{x+m}$$

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$${}_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|}$$

Assurance Vie entière croissante On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots$$

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans m années.

Assurance Vie temporaire croissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital croit chaque années.

$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{1|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-1}|} + ... + {}_{n-1|}\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}
\end{aligned}
$$

Assurance vie entière croissante temporairement On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croit pendent n années

$$
\begin{aligned}
(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x &= \int_0^n (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&+ \int_n^{\omega-x} n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + ... + {}_{n-1|}\bar{A}_x
\end{aligned}
$$

Assurance Vie temporaire décroissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital décroit chaque années.

$$
\begin{aligned}
(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{\omega-x} (n-t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{\omega-x} (n-\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + \bar{A}^1_{x:\overline{2}|} + ... + \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

3 Contrats de rente

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$
\begin{aligned}
Y &= \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1-v^{T_x}}{\delta} = \frac{1-\bar{Z}_x}{\delta} \\
\bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x}|} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt \\
&= \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1-v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & ,T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & ,T_x \geq n \end{cases} = \frac{1-\bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^n v^t {}_tp_x dt \\
&= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{20:\overline{10}|}^{\ \ \ 1} - {}_{m|}\bar{Z}_{20}}{\delta} \\
{}_{m|}\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{t-m}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= {}_mE_x \bar{a}_{x+m} \\
&= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}
\end{aligned}
$$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}Y_x \\
\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_nq_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x
\end{aligned}
$$

4 Primes nivelées

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étalle sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où Z est la valeur présente actuarielle est prestations à payer et Y la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où Y_1 représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et Y_2 la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivellée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[L] &= 0 \\
\mathrm{E}[Z] - \mathrm{E}[Y] &= 0 \\
\mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}[Y]
\end{aligned}
$$

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_{t^*}p_x$ pour solutionner π^{PPMP}.

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n}{n} < \lambda\right) &\geq \alpha \\
\Pr(L_1 + ... + L_n < n\lambda) &\geq \alpha
\end{aligned}
$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(L_1 + ... + L_n)}} < \frac{n\lambda - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où $Z \sim N(0,1)$ et Φ la fonction de répartition de Z. Le défi se trouve dans le calcul de $\mathrm{Var}(L)$, où

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(Z-Y)\\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(Z,Y)\\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\left(\mathrm{E}[ZY] - \mathrm{E}[Z]\,\mathrm{E}[Y]\right)\end{aligned}$$

4.5 Retour de primes

- Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel (α) ou total des cotisations (accumulées au taux $j < i$)[2] en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.
- On introduit la v.a. W, qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que
$$W = \begin{cases} \alpha\pi v_i^{K_x+1}\ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0,1,...,n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$
Alors,
$$L = Y_1 - Y_2 + W$$
- Aussi, on trouve que
$$\mathrm{E}[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha\pi v_i^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k+1}|j}\, {}_{k|}q_x = \alpha\pi\psi$$

4.6 Primes brutes

- Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G, qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.
- Alors, on a
$$L = Z + D - Y$$
avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π.
- Il y a 3 types de dépenses :
  - I) Dépenses initiales ;
    - À l'émission du contrat ;
    - Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M) ;
    - Coût des employés qui saisissent les informations dans le système ;
    - Impression et envoi par courrier de la police.
    - ...
  - II) Dépenses de renouvellement ;
    - Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).
  - III) Dépenses de fin de contrat.
    - Saisie informatique et frais de fermeture de dossier ;
    - Émission du chèque de prestations ;
    - Enquête (dans certains cas).

2. Le taux i est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux j est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.