Contributeurs

ACT-1XXX Cours de première année

aut., cre. Alec James van Rassel

Compléments de mathématiques

Sommations

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Estimation Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

Théorème de Leibnitz

Soit :

- une fonction $f(x,\alpha)$ continue sur $[a,b]$ et
- des fonctions (dérivables) de α, $u(\alpha)$ et $v(\alpha)$, prenant valeur dans $[a,b]$.

Alors,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)dx = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx + f(v(\alpha),\alpha)\frac{\partial v}{\partial \alpha}(\alpha) - f(u(\alpha),\alpha)\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\alpha)$$

Domaines

- $\mathbb{R}$: Real numbers, $x \in (-\infty, \infty)$.
- $\mathbb{Z}$: Integers ; all integers positive & negative, $x \in \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.
- $\mathbb{N}$: Natural numbers ; all positive integers numbers, $x \in \{1,2,3,\ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$: Rational numbers ; numbers written as fractions, for example 1.25%, -0.4775, $3.\overline{153}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$.
- $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: Irrational numbers ; for example π, e, $\sqrt{3}$.

Fonction impaire

Une fonction est impaire *(odd)* lorsque $f(-x) = -f(x)$.
Par exemple, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Mathématiques financières

Intérêt simple

$$a(t) = 1 + it \qquad v(t) = \frac{1}{1+it}$$

$$\text{Prix} = 100\left(1 - \frac{it}{365}\right)^{-1}$$

facteurs d'actualisation et d'accumulation

$$\begin{aligned} a(t) &= (1+i)^t \\ &= (1-d)^{-t} \\ &= e^{\int_0^t \delta_s ds} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v(t) &= (1+i)^{-t} \\ &= (1-d)^{t} \\ &= e^{-\int_0^t \delta_s ds} \end{aligned}$$

Conversion de taux

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i^{\mathrm{R}} = \frac{i-r}{1+r}$$

Taux d'intérêt effectif *annuel* $\quad i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

Taux d'intérêt nominal *annuel* $\quad i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right)$

Taux d'escompte nominal *annuel* $\quad d^{(m)} = m\left(1 - (1-d)^{1/m}\right)$

Rentes constantes

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \qquad \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{(i|d)}$$

Rentes continues

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|i} - n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

Rentes (dé)croissantes annuellement

$$(I^{(m)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} - nv^n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{n - a^{(m)}_{\overline{n}|}}{(i|d^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{s})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} - n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{s})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{n(1+i)^n - s^{(m)}_{\overline{n}|}}{(i|d^{(m)})}$$

Rentes croissantes continûment

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d(i|d)}$$

Paiement en continu, valeurs accumulée et actualisée

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) \mathrm{e}^{\int_t^n \delta_s ds} dt$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) \mathrm{e}^{-\int_0^t \delta_s ds} dt$$

Rentes avec croissance géométrique

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i^{\mathrm{R}}} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n}{i-r}(1+i) \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|i^{\mathrm{R}}} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}(1+i)$$

T-Bills

$$\text{Prix} = 100\left(1 - \frac{dt}{360}\right)^t$$

Obligations

Notation

P Le **prix** de l'obligation ;

F La **valeur nominale** de l'obligation.

- « *face amount* » ou « *par value* » ;
- La valeur nominale est l'unité dans laquelle l'obligation est émise.

C La valeur de remboursement de l'obligation ;

- « *redemption value* » ;
- Par défaut, $F = C$.

r Le taux de coupon par période de paiement ;

- « *coupon rate* » ;
- Le montant de chaque coupon est Fr ;
- Le taux est habituellement donné sous base **annuelle** mais la majorité des obligations ont des coupons payables semi annuellement.

g Le taux de coupon "spéciale" utilisé dans les formules mathématiques ;

- Taux tel que $Cg = Fr$.

n Number of remaining coupon **payments**.

i Le taux d'intérêt effectif par période de paiement ;

- C'est le « *yield-to-maturity* » pour une obligation se transigeant au prix P.
  Donc, contrairement au taux r qui est une composante fixe de l'obligation, i va varier selon le prix P ;
- C'est donc le taux i tel que $P = PV$(bond payments).

Formule pour prix

$$\begin{aligned} P &= Fra_{\overline{n}|} + Cv^n \equiv Cga_{\overline{n}|} + Cv^n \\ &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|} \equiv C + (Cg - Ci)a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

Condition	Équivalent	Obligation transigée	anglais
$P > C$	$Fr > Ci$	avec prime	with premium
$P = C$	$Fr = Ci$	avec parité	at par
$P < C$	$Fr < Ci$	avec escompte	with discount

Amortissement d'obligations

Book value

$$\text{BV}_t = (\text{Fr} - \text{C})_{n-t}a_j + \text{C}$$

Immunisation

$P(i)$ Valeur actualisée des flux monétaires au taux effectif i.

$$P(i) = \sum_{t=0}^{n} (A_t v^t)$$

Note La duration de ***Macaulay*** est surnommée « *duration* » par défaut alors que la convexité ***modifiée*** est surnommée « *convexité* » par défaut.

Duration

$$D_{\text{mac}}(i) = \frac{-P'(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=0}^{n} (t)(A_t v^t)}{P(i)}$$

$$D_{\text{mod}}(i) = \frac{-P'(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{t=0}^{n} (t)(A_t v^{t+1})}{P(i)}$$

$$D_{\text{mod}}(i) = v D_{\text{mac}}(i)$$

Portfeuille de n obligations ayant chacune un prix de P_k :

$$D_{\text{mac}}(\text{ptf.}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{\text{mac}}(k\text{-ème obligation}) P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}$$

Convexité

$$C_{\text{mod}}(i) = \frac{P''(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t(t+1) v^{t+2} A_t}{P(i)}$$

$$C_{\text{mac}}(i) = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 v^t A_t}{P(i)}$$

$$C_{\text{mod}}(i) = (C_{\text{mac}}(i) + D_{\text{mac}}(i)) v^2$$

Approximations

Approximation linéaire Basée sur la duration modifiée.

$$P(i) \approx P(i_0)[1 - (i - i_0) D_{\text{mod}}(i_0)]$$

Approximation de Macaulay Basée sur la duration de Macaulay.

$$P(i) \approx P(i_0) \left(\frac{1+i_0}{1+i} \right)^{D_{\text{mac}}(i_0)}$$

Obligation zéro-coupon de n années

Mesure	Égale
$C_{\textbf{mac}}$	n^2
$D_{\textbf{mac}}$	n
$C_{\textbf{mod}}$	$\frac{n(n+1)}{(1+i)^2}$
$D_{\textbf{mod}}$	$\frac{n}{1+i}$

Taux au comptant et taux à terme

Notation

r_t Taux de rendement annuel effectif d'un investissement sur t années.

- **Taux au comptant** ou « *spot rate* ».
- Parfois appelé le taux zéro-coupon car $r_t = P_t^{-1/t} - 1$ où P_t est le prix d'une obligation zéro-coupon.
- C'est en fait une moyenne des taux sur la période.

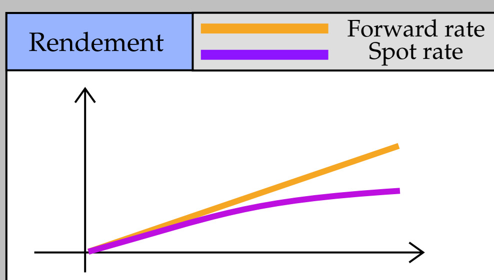
$$(1+r_n)^n = \prod_{i=1}^{n}(1+f_{t_i})$$

$f_{[t_1,t_2]}$ Taux d'intérêt annuel effectif en vigueur de t_1 à t_2.

- **Taux à terme** ou « *forward rate* ».
- Habituellement, la période est d'un an ou d'un trimestre, mais en théorie il peut être appliqué sur n'importe quelle longueur de période.
- Le taux à terme est une anticipation pour une période future en date d'aujourd'hui.
- $(1+f_{[t_1,t_2]})(1+f_{[t_2,t_3]}) = (1+f_{[t_1,t_3]})$
- Corrolaire :

$$f_{[t_1,t_2]} = \left[\frac{(1+r_{t_2})^{t_2}}{(1+r_{t_1})^{t_1}}\right]^{1/(t_2-t_1)} - 1$$

Pour bien saisir la distinction entre les deux :



Application aux obligations

1. Identifier les flux monétaires de l'obligation CF_t.
2. Actualiser chaque CF_t selon son taux à terme r_t pour déterminer le prix P.
3. Déterminer le taux de rendement (« *Yield-to-Maturity* » , « *IRR* ») i qui, en actualisant les CF_t, reproduit le prix P.
4. $P = \sum_t \frac{CF_t}{(1+r_t)^t} = \sum_t \frac{CF_t}{(1+i)^t}$

Analyse probabiliste des risques actuariels

Théorèmes probabilistes

Théorème du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème multinomial

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r):\\ n_1+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_r} x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r} s$$

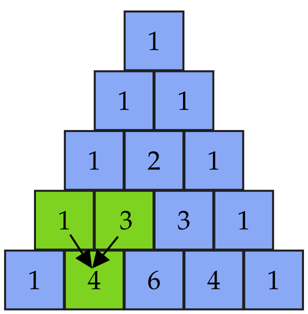
Relations factoriels

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Règle de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal



- Triangle des coefficients binomiaux
- Chaque nombre est la somme des 2 nombres directement au-dessus.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Moments

Moment d'ordre n *(autour de l'origine)*.	$\mathrm{E}[X^n] = \sum_i x_i^n \Pr(X = x_i)$
Moment ***centré*** d'ordre n.	$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n] = \sum_i (x_i - \mathrm{E}[X])^n \Pr(X = x_i)$
Moment ***réduit*** d'ordre n.	$\mathrm{E}\left[\left(\frac{X}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Moment ***centré-réduit*** d'ordre n.	$\mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Coefficient d'asymétrie (***Skewness***)	$\gamma_X = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^3\right]$
Coefficient d'aplatissement (***Kurtosis***)	$\kappa_X = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^4\right]$
Fonction stop-loss	$\pi_X(d) = \mathrm{E}\left[\max(X-d;0)\right]$
Fonction d'excès-moyen	$\pi_X(d) = \mathrm{E}\left[X - d \mid X > d\right]$

Note : Il est intéressant de savoir que les moments impairs d'une loi normal avec moyenne nulle sont nuls. Ceci est la normal avec une moyenne nulle est parfaitement symétrique tel que $f(-x) = -f(x)$; pour plus de détails, voir ce vidéo YouTube.

Raccourci bernoulli

Soit

$$X = \begin{cases} a & p \\ b & 1-p \end{cases}$$

Alors

$$\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2 p(1-p)$$

Conditionnels

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}[X|Y]] \qquad \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}_Y[\mathrm{V}(X|Y)] + \mathrm{V}_Y(\mathrm{E}[X|Y])$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
2. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{V}(X)$
3. $\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\perp}{=} 0$
4. $\mathrm{Cov}(c,X) = 0$
5. $\mathrm{Cov}(cX,Y) = c\mathrm{Cov}(X,Y)$
6. $\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^m \beta_j Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

$$V(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i^2 V(X_i) + 2\sum\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\rho_P(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Convolution

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y)f_Y(y)dy$$

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire.

Soit la fonction

de densité	$f_X(x) = \Pr(X = x)$	Density Function
de masse de probabilité	$f_X(x) \neq \Pr(X = x)$	Probability Mass Function (PMF)
de répartition	$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$	Cumulative Density Function (CD
de survie	$S_X(x) = \Pr(X > x)$	Survival Function (CDF)

$F_X(x)$

Lois multivariées

Loi multinomiale

$$\Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) = \binom{n}{x_1, \ldots, x_r} p_1^{x_1} \ldots p_r^{x_r}$$

Loi normale multivariée

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Théorèmes limites

Inégalité de Markov

Soit la variable aléatoire (non-négative) X.
Alors $\forall a > 0$ on a :

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{a}$$

Inégalité de Tchebychev

Soit la variable aléatoire X avec $\mu, \sigma^2 < \infty$.
Alors $\forall k > 0$ on a :

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{ou} \quad \Pr(|X-\mu| \geq k^*) \leq \frac{\sigma^2}{(k^*)^2}$$

Loi (faible) des grands nombres (WLLN)

Soit la suite de variables aléatoires (iid) $X_1, \ldots, X_n$ tel que $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 > 0$.
Alors $\forall \epsilon > 0$ où $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

où $\mathbb{P}$ représente la convergence en probablité.

Théorème central limite (CLT)

Soit la suite de variables aléatoires (iid) $X_1, \ldots, X_n$ tel que $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 > 0$.
Alors pour $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq z\right) = \Phi(z) \quad \Leftrightarrow \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où $\mathcal{L}$ représente la convergence en distribution ("law").