Contributeurs

Rappels

Rappel : Série de Taylor

La série de Taylor de $(1-t)^{-r}$ est $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r+i-1}{i} t^i}$.

Rappel : Théorème du binôme

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$.

1

Variables aléatoires

Notions aléatoires

1 Notion d'expérience aléatoire

Cadre dans lequel on observe différentes actions dues au hasard.

Notation

ω Le ***résultat*** d'une expérience aléatoire, alias *épreuve* ou *issue*.

Ω L'***ensemble*** **des résultats possibles**.

- Il s'ensuit que $\omega \in \Omega$.
- Par exemple, pour le lancer d'un dé où l'on désire savoir le résultat $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$.
- On dénote par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'**ensemble de toutes les parties** de Ω.

2 Notion d'événement aléatoire

Événement lié à une certain expérience aléatoire.

Un événement est tout **sous-ensemble** de Ω. Par exemple, pour l'expérience aléatoire de jeter un dé on a que l'ensemble des résultats possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement A « obtenir un nombre pair » s'écrit $A = \{2, 4, 6\}$. De ceci on déduit qu'à toute propriété définie sur Ω, on associe un sous-ensemble de Ω composé de tous les ω qui vérifient la propriété.

Algèbre de Boole des événements

Algèbre de Boole (« *boolean algebra* ») des événements

La classe $\mathcal{E}$ des événements est l'**algèbre de Boole de parties de** Ω, si elle contient Ω et est stable par intersection, réunion et complémentation.

Note On dit habituellement algèbre plutôt qu'algèbre de Boole.

Opérations logiques

Les opérations logiques que l'on peut effectuer sur les événements sont :

1. Soit les événements $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, alors :
   - $A \cup B$ est un événement réalisé ssi **au moins un** des deux est réalisé.
   - $A \cap B$ est un événement réalisé ssi **les deux** sont réalisés simultanément.
2. $\emptyset$ est un événement qui ne peut être réalisé appelé l'**événement impossible**. À chaque expérience, Ω est toujours réalisé et appelé l'**événement certain**.
3. $A \subset \Omega$ est un événement.
   - Le complément A^c ou $\overline{A}$ est appelé **événement contraire de** A et se réalise si $\omega \notin A$.
4. La **différence de deux événements** A et B est $\boxed{A \setminus B = A \cap B^c}$ se réalise si A est réalisé mais pas B.
5. La **différence symétrique** de A et B est $\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$ se réalise si l'un des deux événements est réalisé mais pas l'autre.
6. Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'événement A_n représente « **gagner** n **matchs** », alors
   - $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ représente « **gagner au moins un match** ».
   - $\cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ représente « **ne pas gagner de matchs** ».
7. Deux événements sont **incompatibles** si $\boxed{A_1 \cap A_2 = \emptyset}$.
   - On peut aussi dire que les parties de Ω représentées par A_1 et A_2 sont disjointes.
   - Si deux événements sont incompatibles, on a une somme au lieu d'une réunion avec $\boxed{A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2}$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
8. Si les événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment une **partition** de Ω, on dit que ses événements $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment un **système exhaustif** de Ω.
9. La suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :
   croissante ssi $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$
   décroissante ssi $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$
10. Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements d'un ensemble Ω, on représente que :
    une infinité de A_n **est réalisé** en écrivant que, quel que soit le rang $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des événements de rang supérieur (à k) qui sont réalisés : $\boxed{\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n}$.
    un nombre fini de A_n **est réalisé** en écrivant qu'il existe un rang tel qu'à partir de ce rang, tous les événements réalisés sont les contraires des événements A_n : $\boxed{\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n^c}$.

Limites de suite d'événements

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω. On défini les limites inf et sup d'événements par :

$$A_* = \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$A^* = \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

De plus, si les ensembles A_* et A^* coïncident, alors on écrit $A = A_* = A^* = \lim_{n \to \infty} A_n$.

Propositions

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω.

i) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ alors $\boxed{\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ alors $\boxed{\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Espaces probabilisables

Power set $\mathcal{P}$

Le « *power set* » $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble Ω ; il est plus facile de donner un exemple que d'expliquer en mots.

Exemple de « *power set* »

Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \begin{matrix} \{\} \\ \{a\}, \{b\}, \{c\} \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \\ \{a,b,c\} \end{matrix} \right\}$$

Pour un ensemble de n éléments, il y aura 2^n sous-ensembles possibles. Ceci découle du binaire ! Voir cette page pour plus d'information.

Note En anglais, on appelle la tribu $\mathcal{A}$ composée des « ***events*** » le « *event space* » et l'ensemble Ω composé des « ***outcomes*** » le « *sample space* ».

Tribu d'événements

La tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω tel que :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors l'événement $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Espace probabilisable (ou mesurable)

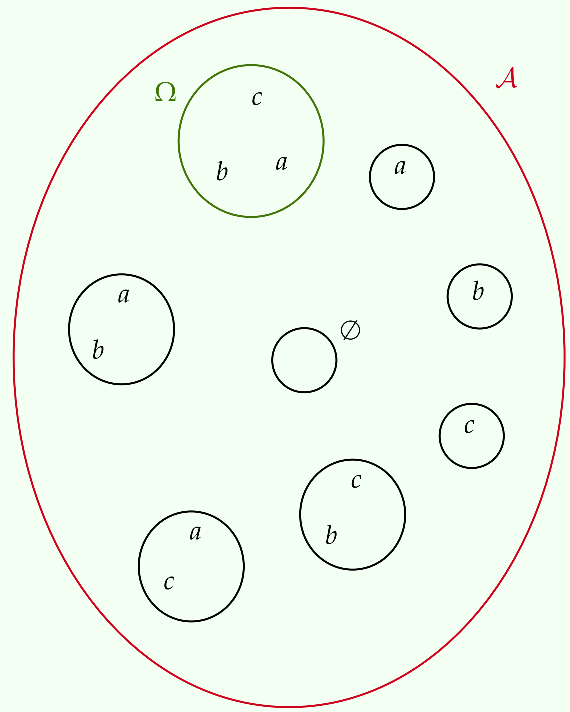
Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ composé d'un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.

Les éléments de Ω sont appelés ***éventualités*** (« *outcomes* ») et les éléments de $\mathcal{A}$ ***événements*** (« *events* »).

› En anglais, on dit « *measurable space* ».

Visualisation

Voici une visualisation de ce que représente l'espace mesurable :



On peut donc visualiser les 3 conditions dans la définition de la tribu. L'ensemble Ω est contenu, tous les événements possibles (alias toutes les combinaisons de $\{a, b, c\}$ possibles) sont contenus et tous leurs compléments sont contenus. Finalement, toute union d'événements sera contenue dans la tribu !

Propriétés de la tribu

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

a) $\boxed{\varnothing \in \mathcal{A}}$.

b) $\forall A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, alors $\boxed{\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}}$ et $\boxed{\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}}$.

c) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}}$.

d) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\liminf A_n \in \mathcal{A}}$.

e) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\limsup A_n \in \mathcal{A}}$.

Note Voir la page 19 des notes de cours du chapitre 1 pour les preuves.

Variables aléatoires

Variable aléatoire

On définit une **variable aléatoire** comme une *fonction mesurable*. Pour ce faire, on défini 2 espaces mesurables :

1. On pose que le premier est $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. On pose que le deuxième est tout ensemble E et sa tribu $\mathcal{E}$: $(E, \mathcal{E})$.
   - Habituellement, on pose que $E = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

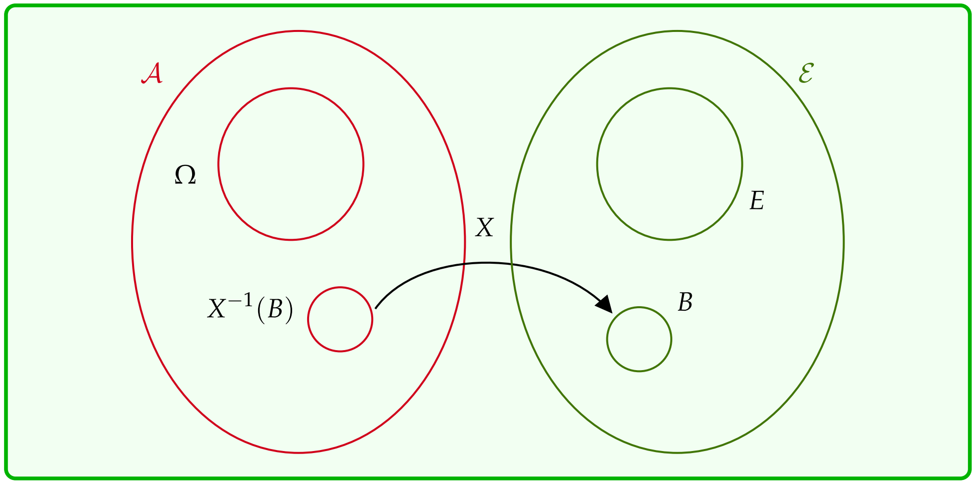
Une fonction mesurable est une fonction qui associe les éléments de Ω aux éléments de E avec quelques propriétés additionnelles. On note qu'en associant les éléments de Ω, la fonction associe les ***éventualités*** et non les *événements* aux éléments de E.

On désire avoir une correspondance entre les événements réalisés de $\mathcal{A}$ et l'ensemble transformé d'événements $\mathcal{E}$. Pour ce faire, on impose que la variable aléatoire (alias, la fonction mesurable) $X : \Omega \to E$ est définie telle que l'image réciproque $X^{-1}(B)$ sur Ω de tout ensemble $B \in \mathcal{E}$ sur E : $\boxed{X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{E}}$.

Donc, une **variable aléatoire réelle** est toute application à valeurs réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall$ intervalle B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ soit un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

Visualisation

On peut visualiser que l'événement B, où $B \in \mathcal{E}$, a un réciproque $X^{-1}(B)$ où $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.



En posant $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on obtient la *tribu borélienne*.

Tribu borélienne

La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous ses intervalles. Les éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sont appelés les ***boréliens*** de $\mathbb{R}$.

Pour une v.a. réelle X, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ on a $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Bref, $\boxed{(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})}$. On dit que la tribu $X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sur Ω est la ***tribu des événements engendrés par*** X.

Probabilités

Mesure

Pour un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, une fonction $\boxed{\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, \infty]}$ s'appelle une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si :

1. Elle attribue une masse de zéro à l'ensemble vide : $\boxed{\mathbb{P}(\emptyset) = 0}$.
2. Elle est « *countably additive* » : $\boxed{P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{A}}$.

Mesure de probabilité

Pour un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, on appelle ***probabilité*** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :

i) $\boxed{P(\Omega) = 1}$.

ii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'événements deux à deux disjoints, $\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)}$.

La mesure de probabilité est donc une mesure qui est **restreint** sur $[0, 1]$.

Espace probabilisé

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle un **espace probabilisé** et est composé de :

Ω Le « *sample space* ».

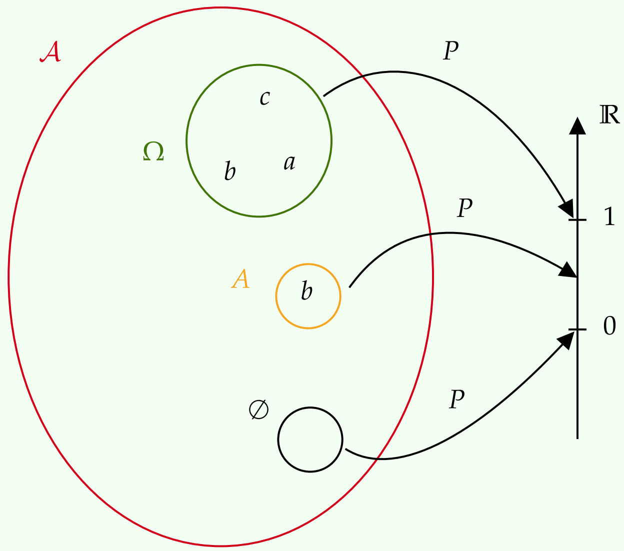
$\mathcal{A}$ Le « *event space* ».

P La ***mesure* de probabilité**.

› En anglais, on dit « ***probability space*** ».

Visualisation

Voici une visualisation de ce que représente l'*application* P :



On peut donc visualiser les 2 conditions dans la définition de l'espace probabilisé. La probabilité d'observer l'ensemble Ω est de 1 car il contient tous les événements possibles. La probabilité d'un événement sera contenu entre 0 et 1 ce qui veut dire que la probabilité de quelques événements *disjoints* correspond à la somme des probabilités.

On complète la notion précédente sur l'espace borélien avec $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ où P_X est appelée loi de probabilité de X. On définit $P_X(B) = P(X \in B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$.

Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Alors :

a) $P(\emptyset) = 0$.

b) Si A et B sont des événements disjoints, alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

c) Si A et B sont des événements quelconques, alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

d) Si A et B sont des événements tels que $A \subset B$, alors $\boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$ et $\boxed{P(A) \leq P(B)}$.

e) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$.

f) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements quelconques, alors $\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)}$.

g) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow \emptyset$, alors $\boxed{P(A_n) \downarrow 0}$.

h) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow A$, alors $\boxed{P(A_n) \downarrow P(A)}$.

i) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \uparrow A$, alors $\boxed{P(A_n) \uparrow P(A)}$.

Lemmes de Borel-Cantelli

Lemme de Borel-Cantelli *(1ère partie)*

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements telle que : $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty}$, alors $\boxed{P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0}$.

Probabilité conditionnelle

Formule de Bayes *(2 événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $\Pr(A) \neq 0, \Pr(A^C) \neq 0$ et $\Pr(B) \neq 0$. Alors :

$$\Pr(A \setminus B) = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|A^C)\Pr(A^C)}$$

Théorème des probabilités totales

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω telle que $\forall i, \Pr(A_i) \neq 0$. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$, $\boxed{\Pr(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Pr(B|A_i)\Pr(A_i)}$.

Formule de Bayes *(n événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ une partition **finie** de Ω telle que $\forall i, \Pr(A_i) \neq 0$. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$ tel que $\Pr(B) \neq 0$,

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(B|A_i)\Pr(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\Pr(B|A_j)\Pr(A_j)}$$

Indépendance

Indépendance *(2 événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A et B deux événements de $\mathcal{A}$. Alors A et B sont indépendants pour la probabilité P **si et seulement si** $\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)}$.

Il est important de bien saisir que le notion d'indépendance n'est pas intrinsèque aux événements, mais *dépend* de la probabilité P choisie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Deux événements peuvent êtres indépendants pour une probabilité, mais être dépendants pour une autre.

Propriétés *(2 événements)*

1. A^C et B sont indépendants.
2. A et B^C sont indépendants.
3. A^C et B^C sont indépendants.

Indépendance *(n événements)*

Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ un n-uple d'événements. On dit qu'ils sont **indépendants**, ou ***mutuellement indépendants***, **si et seulement si** $\forall k = 1, \ldots, n$, si $\forall$ sous-ensemble $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ de k événements choisis parmi les $(A_1, \ldots, A_n)$, on a $\boxed{\Pr(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \Pr(A_{i_1}) \times \cdot \times \Pr(A_{i_k})}$.

Indépendance *(suite d'événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et une suite d'événements indépendants $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{A}$. Alors on a $\boxed{\Pr\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \Pr(A_n)}$.

Lemme de Borel-Cantelli (2ème partie)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendants de $\mathcal{A}$ telle que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) = \infty}$, alors $\boxed{\Pr\left(\limsup_n A_n\right) = 1}$

Fonction de répartition

Mesure image

La mesure image, ou « *pushforward measure* » en anglais, est obtenue « *by pushing* » une mesure d'un espace mesurable à un autre avec une fonction mesurable.

Loi de probabilité

La *mesure image* de P par X, notée $\boxed{P_X}$, s'appelle la ***loi de probabilité*** de X.

Fonction de répartition

Pour une mesure de probabilité P_X, on a que $\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction F est définie comme $\boxed{F(x) = P_X(]-\infty, x])}$. Cette fonction a les propriétés suivantes :

1. F est croissante au sens large.
2. F est continue à droite.
3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Note Il y a une relation biunivoque entre les mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et les fonctions de répartition.

Classification des lois de probabilité sur la tribu borélienne

Pour une probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, on classifie les lois de probabilités en 2 groupes :

1 Diffuse

On dit que P est diffuse si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P(x) = 0}$.

2 Discrète

On dit que P est discrète s'il existe un ensemble au plus dénombrable S tel que $\boxed{P(S) = 1}$.

Cependant, si P désigne une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ni diffuse ni discrète, alors $\exists \alpha \in]0,1[$, P_1 une loi discrète et P_2 une loi diffuse tel que $\boxed{P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2}$.

Variable aléatoire discrète

Toute variable aléatoire X telle qu'il existe un sous-ensemble fini ou dénombrable S_X (ou tout simplement S) de $\mathbb{R}$ vérifiant $P(\{X \in S\} = 1$. On peut donc définir $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} : P_X(\{x\}) = P((\{X = x\}) > 0\}}$. Donc, on note $p_x = P((\{X = x\}) = P_X(\{x\})$

Loi continue

Une mesure de probabilité absolument continue est une mesure de probabilité de la forme $\boxed{P(B) = \int_B f(x)dx}$ $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ où f est une densité de probabilité. C'est-à-dire, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions :

1. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Toute variable aléatoire X telle qu'il existe un sous-ensemble fini ou dénombrable S_X (ou tout simplement S) de $\mathbb{R}$ vérifiant $P(\{X \in S\} = 1$. On peut donc définir $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} : P_X(\{x\}) = P((\{X = x\}) > 0\}}$. Donc, on note $p_x = P((\{X = x\}) = P_X(\{x\})$

2

Moments et transformations de variables

Cas discret

Espérance

Sous réserve d'existence, l'***espérance mathématique*** ou la *moyenne* de X est le nombre $\boxed{\mathrm{E}[X] = m_X = \sum_k x_k P(X = x_k)}$.

Invariance à la translation ou multiplication par un scalaire

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b}$.

Espérance d'une puissance s

Sous réserve d'existence, $\boxed{\mathrm{E}[X^s] = \sum_{x \in S} x^s P_X(x)}$.

Variance

Sous réserve d'existence, la **variance** de X est le nombre $\boxed{\mathrm{Var}(X)}$ ou $\boxed{\sigma_X^2}$ où $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \sum_{x \in S}(x - m_X)^2 P(X = x)}$. On peut également réécrire $\boxed{\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2}$.

Translation ou multiplication par un scalaire

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)}$. Donc, contrairement à l'espérance, la variance n'est **pas** invariante à la translation ou multiplication par un scalaire.

Moment centré et réduit de puissance s

Sous réserve d'existence, le **moment centrée** s de X est $\boxed{\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^s\right]}$.

Variable aléatoire réelle centrée

Sous réserve d'existence de la moyenne, toute variable dont la moyenne est nulle.

Variable aléatoire réelle réduite

Sous réserve d'existence de la moyenne, toute variable de variance 1.

Donc, la variable aléatoire réelle **centrée et réduite** est, sous réserve d'existence, toute variable de moyenne nulle et de variance 1.

Covariance

La covariance entre deux variables X et Y est $\boxed{Cov(X, Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right]}$.

Vecteur

Espérance d'un vecteur

Soit un vecteur aléatoire de n v.a. discrètes $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Sous réserve d'existence de $\mathrm{E}[X_i]$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, l'**espérance mathématique** de $\boldsymbol{X}$ est le n-uple $\boxed{(\mathrm{E}[X_1], \ldots, \mathrm{E}[X_n])}$.

Espérance de la somme

Si l'espérance mathématique du vecteur $\boldsymbol{X}$ existe, alors l'espérance mathématique de la somme $X_1 + \cdots + X_n$ est $\boxed{\mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n]}$.

Espérance du produit

Si l'espérance mathématique du vecteur $\boldsymbol{X}$ existe, et que les **composantes du vecteur sont indépendantes**, alors l'espérance mathématique du produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ est $\mathrm{E}[X_1 \times \cdots \times X_n] = \mathrm{E}[X_1] \times \cdots \times \mathrm{E}[X_n]$.

Matrice de variances-covariances d'un vecteur

Si elle existe, la matrice de variances-covariances d'un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ est définie par le terme général $\forall i, j$ t.q. $1 \leq i, j \leq n$: $Cov(X_i, X_j) = \mathrm{E}\left[(X_i - \mathrm{E}[X_i])\,(X_j - \mathrm{E}[X_j])\right]$.

Variance de la somme

Si le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ est composé de v.a.r. discrètes **indépendantes**, dont le moment d'ordre 2 existe, alors la variance de la somme $\sigma^2_{X_1+\cdots+X_n} = \sigma^2_{X_1} + \cdots + \sigma^2_{X_n}$.

Autres mesures

Coefficient de corrélation de Pearson

Soit le couple de v.a.r. (X, Y), possédant des variances non nulles, le **coefficient de corrélation** de X et de Y est le nombre $\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Cas continu

Espérance

Si X est une v.a.r. à densité f, alors l'***espérance mathématique***, sous réserve d'existence, est le nombre $\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$.

Espérance d'une fonction g de X

Si la loi P_X de X est **absolument continue** et de densité f, alors, sous réserve d'existence, $\mathrm{E}[g \circ X] = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$.

Variance

Par l'inégalité $|x| < x^2 + 1$, si $\mathrm{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathrm{E}[X] = m$ est définie. Sous réserve d'existence, la **variance** de X est donc $\mathrm{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 f(x) dx$.

Vecteur

on dénote $\boldsymbol{M} = \mathrm{E}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top]$ et $\sigma_X = \mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^\top]$.

Lois conditionnelles continues

On dénote la distribution conditionnelle de X par Y comme $\boxed{f_X^{\{Y=y\}}(x) = \frac{f(x,y)}{g(y)}}$.

Fonction génératrice des moments

Pour la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\boxed{M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)}$.

$\boxed{\mathrm{E}[X^n] = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}}$.

Calcul de lois

3

Quelques inégalités classiques

Inégalité de Schwartz

Si $\mathrm{E}[X^2]$ et $\mathrm{E}[Y^2]$ existent, alors $\mathrm{E}[XY]$ existe et $\boxed{\mathrm{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]}\sqrt{\mathrm{E}[Y^2]}}$.

Inégalité de Tchebychev

Soit X une v.a.r. positive et g une application strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathrm{E}[g(X)]$ existe, alors $\boxed{\Pr(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{E}[g(X)]}{g(\alpha)}}$ $\boxed{\forall \alpha > 0}$.

Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. positive et intégrable, alors $\boxed{\Pr(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{\alpha}}$ $\boxed{\forall \alpha > 0}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. de carré intégrable, alors $\boxed{\Pr(|X - \mathrm{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\alpha^2}}$ $\boxed{\forall \alpha > 0}$.

Inégalité de Jensen (cas unidimensionnel)

Rappel : Fonction convexe

Une fonction g définie sur un intervalle ouvert I et à valeurs réelles est dite ***convexe*** ssi $\boxed{\forall a, b \in I \text{ et } \lambda \in [0,1]}$, $\boxed{g(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b)}$.

Soient I un intervalle ouvert et $g : I \to \mathbb{R}$, une fonction convexe. Soit X une v.a. à valeurs dans I. Alors, $\boxed{g(\mathrm{E}[X]) \leq \mathrm{E}[g(X)]}$. Soit X une v.a.r. de carré intégrable, alors $\boxed{\Pr(|X - \mathrm{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\alpha^2}}$ $\boxed{\forall \alpha > 0}$.

Inégalité de Jensen (cas multidimensionnel)

Rappel : Fonction convexe multivariée

On pose que, $\forall \gamma \in (0,1)$, pour deux points $x, y \in \mathbb{R}^k$: $\boxed{\gamma x + (1-\gamma) y = (\gamma x_1 + (1-\gamma) y_1 + \cdots + \gamma x_k + (1-\gamma) y_k)^t}$.

Un sous-ensemble $C \in \mathbb{R}^k$ est ***convexe*** si $\forall x, y \in C$ et $\gamma \in [0,1]$: $\boxed{\gamma x + (1-\gamma) y \in C}$. Une fonction réelle φ définie sur un ouvert convexe C **est convexe** si $\forall x, y \in C$ et $\gamma \in [0,1]$: $\boxed{\varphi(\gamma x + (1-\gamma) y) \leq \gamma \varphi(x) + (1-\gamma) \varphi(y)}$.

Soit un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans un ouvert convexe $C \in \mathbb{R}^k$ ayant une espérance $\mathrm{E}[X]$. Soit φ une fonction convexe sur C, telle que $\mathrm{E}[\varphi(X)]$ existe. Alors, $\boxed{\varphi(\mathrm{E}[X]) \leq \mathrm{E}[\varphi(X)]}$.

Également, sous les mêmes hypothèses, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, alors $\boxed{\varphi(\mathrm{E}[X|\mathcal{B}]) \leq \mathrm{E}[\varphi(X)|\mathcal{B}]}$.

Inégalité de Hölder

Soient les nombres conjugués p et $q > 1$ tels que $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$. Si $\mathrm{E}[X^p]$ et $\mathrm{E}[Y^q]$ existent, alors $\mathrm{E}[XY]$ existe, et $\boxed{\mathrm{E}[|XY|] \leq \mathrm{E}[|X|^p]^{1/p} \mathrm{E}[|Y|^q]^{1/q}}$.

Note Si $p = q = 2$, on retrouve *l'inégalité de Schwartz*.