

1 Rappels d'intro 2

1.1 Mesures de risques

Voir les preuves de TVaR en annexe. Il est pratique de se rappeler des 3 formes de la TVaR.

Value-at-risk $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa)$. De plus, pour φ une fonction strictement croissante, on a que

$$VaR_\kappa(\varphi(X)) = \varphi(VaR_\kappa(X))$$

2 Distribution multivariées

2.1 Classes de Fréchet

Soit F_1, \dots, F_n des fonction de répartition univariées et $F_X = F_{X_1, \dots, X_n}$ la fonction de répartition du vecteur \mathbf{X} .

On définit la classe de Fréchet $CF(F_1, \dots, F_n)$ par l'ensemble des fonctions de répartition F_X dont les marginales sont F_1, \dots, F_n .

2.1.1 Bornes d'une classe de Fréchet

Si $F_X \in CF(F_1, \dots, F_n)$, alors

$$W(x_1, \dots, x_n) \leq F_X(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n)$$

où

$$W(x_1, \dots, x_n) = \max \left(\sum_{i=1}^n F_i(x_i) - (n-1); 0 \right)$$

$$M(x_1, \dots, x_n) = \min(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Preuve des bornes à savoir!

2.2 Comonotonicité

Les composantes de \mathbf{X} sont dites comonotones si $X_i = F_{X_i}(U)$, $i = 1, \dots, n$ et $U \sim U(0, 1)$.

2.2.1 Algorithme

1. Simuler $U^{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0, 1)$
2. Calculer $X_i^{(j)} = F_{X_i}(U^{(j)})$, $i = 1, \dots, n$

1. L'antimonotonicité est seulement définie pour $n = 2$.

variable comonotone et la borne supérieure de Fréchet

Le vecteur \mathbf{X} a des composantes comonotones ssi

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = M(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve à savoir

Additivité des VaR et TVaR

On définit $S = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_{X_i}(U) = \varphi(U)$, où φ est une fonction croissante pour $y \in (0, 1)$. Alors, on a

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i)$$

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i)$$

Preuve à savoir

2.3 Antimonotonicité

Un couple de v.a.¹ $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ dont les composantes sont définies par $X_1 = F_{X_1}(U)$ et $X_2 = F_{X_2}(1 - U)$ est antimonotone par définition.

2.3.1 Algorithme

1. Simuler $U_{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0, 1)$
2. Calculer $X_1^{(j)} = F_{X_1}(U^{(j)})$ et $X_2^{(j)} = F_{X_2}(1 - U^{(j)})$

variable antimonotone et la borne inférieure de Fréchet

Le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ a des composantes antimonotone ssi

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = W(x_1, x_2)$$

Preuve à savoir

2.4 Loi de Poisson bivarieée Teicher

- › Couple de v.a. (M_1, M_2) dont les marginales sont $Pois(\lambda_1)$ $Pois(\lambda_2)$
- › paramètre de dépendance α_0 avec $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$
- › $\alpha_1 = \lambda - \alpha_0$ et $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$

› On définit les v.a. M_1 et M_2 telles que (avec $K_i \sim \text{Pois}(\alpha_i)$)

$$M_1 = K_1 + K_0 \text{ et } M_2 = K_2 + K_0$$

avec $M_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$

2.4.1 Fonction de masse de probabilité (fmp)

$$f_{M_1, M_2}(m_1, m_2) = e^{-\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1, m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1-j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2-j)!}$$

Preuve à savoir

2.4.2 Fonction génératrice des probabilités (fgp)

$$P_{M_1, M_2}(t_1, t_2) = e^{(\lambda_1 - \alpha_0)(t_1 - 1)} e^{(\lambda_2 - \alpha_0)(t_2 - 1)} e^{\alpha_0(t_1 t_2 - 1)}$$

Preuve à savoir

Covariance de M_1 et M_2 $\text{Cov}(M_1, M_2) = \text{Var}(K_0) = \alpha_0$ Preuve à savoir

2.4.3 Connaître la loi de $N = M_1 + M_2$

À terminer

2.5 Loi exponentielle bivariée EFGM

fonction de répartition La fonction de répartition est

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \theta(1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2})e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}$$

fgm Il faut savoir prouver que la fgm est

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = (1 + \theta) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2} \right) - \theta \left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2} \right) - \theta \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2} \right) + \theta \left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2} \right)$$

Coefficient de corrélation Il faut savoir prouver que le coefficient de corrélation est

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\theta}{4}$$

Fonction de densité On peut obtenir la fonction de densité de la loi exponentielle bivariée en dérivant 2 fois

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$$

3 Problématiques d'un rapport du BSIF

Un extrait d'un rapport du BSIF² présente **plusieurs incohérences**, notamment :

- › La corrélation est la formule ou la méthode utilisée dans le présent document pour mesurer l'association entre des variables;
- › L'intervalle de confiance est de -1 à 1
- › Une corrélation de 1 (corrélation positive parfaite) sous-entend que l'augmentation d'une variable donnée équivaldra à la hausse d'une autre variable;
- › Une corrélation de -1 (corrélation négative parfaite) sous-entend que l'augmentation d'une variable donnée se traduira par une baisse correspondante d'une autre variable
- › Une corrélation zéro sous-entend l'absence de relation, ou indépendance, entre deux variables.

2. Étude d'impact quantitative No4 du BSIF, 2012.

4 Annexe

4.1 Les 3 formes explicites de la $TVaR$

Pour la $TVaR$, il y a 3 preuves à bien connaître :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X)) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 \underbrace{(VaR_u(X) - VaR_\kappa(X))}_{\text{fonction quantile}} du + \underbrace{\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X) du}_{\text{intégration d'une constante}} \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)) \underbrace{f_U(u)}_{U \sim \text{Unif}(0,1)} du \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} VaR_\kappa(X) (1-\kappa) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(\underbrace{F_X^{-1}(U)}_{F_X^{-1} \sim X} - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \end{aligned}$$

à partir de la preuve ci-dessus, on peut démontrer celle-ci :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa} E[VaR_\kappa(X) \times \underbrace{1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}}_{=S_X(VaR_\kappa(X))}] \\ &\quad + VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa} VaR_\kappa(X)(1 - F_X(VaR_\kappa(X))) \\ &\quad + \frac{1-\kappa}{1-\kappa} VaR_\kappa(X) \\ &= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(-1 + F_X(VaR_\kappa(X)) + 1 - \kappa)}{1-\kappa} \\ &= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa} \end{aligned}$$

□

Une dernière preuve fortement utilisée pour la $TVaR$, qui découle directement de la dernière :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa}$$

Démonstration. Étant donné que cette formule ne fonctionne seulement que pour une v.a. continue, elle est très facile à prouver :

si X est continue, $\forall x, F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$

Alors, on peut enlever la partie de droite de l'équation.

□

□