Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

Où les dénominateurs sont à être interprété en REGEX. Pour exemple, pour la première c'est soit le taux d'escompte pour une annuité due ou le taux d'intérêt pour une immédiate.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{(d^{(m)}|i^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(d^{(m)}|i)}$$

$$(D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(d^{(m)}|i)}$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Facteur d'accumulation

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

Sommations

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 Survie et mortalité

1.2 Probabilités de survie et de décès

X : Âge au décès d'un nouveau-né

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x.

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$
$$f_{T_x} = {}_tp_x \mu_{x+t}$$
$$F_{T_x} = {}_tq_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$
$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x$$
$${}_{t+y}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x \cdot {}_yq_{x+t}$$
$$S_{T_x}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right\} = \exp\left\{-\int_x^{x+t}\mu_s ds\right\}$$
$$T_x \in \mathbb{R}^+$$

K_x : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge x.

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$
$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_{k|}p_x$$
$$K_x \in \mathbb{Z}^+$$

μ_x : Force de mortalité pour (x)

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(S_X(x))\Big)$$
$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ln({}_tp_x)\Big)$$
$$\alpha\mu_{x+s} + h(s) = ({}_tp_x)^\alpha e^{-\int_0^t h(s)ds}$$

R_x : Durée de vie résiduelle fractionnaire d'un individu d'âge x.

$$R_x = T_x - K_x$$
$$R_x \in [0,1)$$

$J_x^{(m)}$: Nombre de m-ème d'années vécus durant l'année du décès.

$$J_x^{(m)} \in \{0,1,2,\ldots,m-1)$$
$$J_x^{(m)} = [mR_x]$$

$H_x^{(m)}$: Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x exprimé en m-ème années.

$$H_x^{(m)} = [mT_x]$$
$$H_x^{(m)} \in \mathbb{Z}^+$$

1.3 Lois de mortalité

Loi de Moivre

Pas très réaliste car assume une chance **uniforme** de mourir n'importe quand alors qu'en réalité une personne agée de 90 ans a des plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans.
C'est la seule loi avec un **support fini**.

$$X \sim \text{Unif}(0,\omega)$$
$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega},\ 0 \leq x \leq \omega$$
$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x},\ 0 \leq x \leq \omega$$
$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$
$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x},\ 0 \leq t \leq \omega - x$$

Loi Exponentielle

$$X \sim \text{Exp}(\mu)$$
$$S_x(x) = e^{-\mu x},\ x \geq 0$$
$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$
$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t},\ t \geq 0$$
$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A,B,c)$$
$$A : \text{risque d'accident}$$
$$Bc^x : \text{risque lié au vieillissement}$$
$$\mu_x = A + Bc^x,\ x \geq 0$$
$${}_tp_x = e^{-At - \frac{Bc^x}{ln(c)}(c^t - 1)},\ t \geq 0$$

Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B,c)$$

Loi de Weibull

$$X \sim \text{Wei}(k,n)$$
$$\mu_x = kx^n,\ x \geq 0$$
$${}_tp_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]},\ t \geq 0$$

1.4 Tables de mortalité

ℓ_0 : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

ℓ_x : Nombre d'invidu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x.

${}_nd_x$: Nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$\ell x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$
$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_{t|u}q_x = \frac{{}_ud_{x+t}}{\ell_x}$$

1.5 Mortalité sélecte et ultime

$[x]$: âge de la sélection *(pas une valeur entière)*.

$[x]+j$: âge atteint où j est le temps écoulé depuis la sélection.

ode sélecte r : Période de durée r durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \dots$$

$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]r+j} p_{[x]} = \ell_{[x]r} p_{[x]j} p_{x+r}$$

1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Pour $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{Z}$.
Distribution uniforme des décès (DUD)
Décès répartis uniformément sur l'année.

$$S_X(x+t) = (1-t) \times S_X(x) + t \times S_X(x+1), \qquad t \in [0,1]$$

$$S_X(x+t) = \frac{(c-t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x+1), \qquad t \in [0,c]$$

les conditions pour t et x appliquent aux 3 équations suivantes

$$_t q_x = \left(\frac{t}{c}\right) {}_c q_x, \qquad t \in [0,c]$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c} {}_c q_x}{1 - \frac{t}{c} {}_c q_x}, \qquad x \in \{0, c, 2c, \dots\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial t} {}_t q_x}{{}_t p_x}$$

$$_y q_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right) {}_c q_x}{1 - \left(\frac{t}{c}\right) {}_c q_x}, \qquad y \in [0, c-t]$$

On note que la force de mortalité à la même formule que la fonction de survie car avec **DUD**, la force est uniformément appliquée.
Force constante (FC)

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{(1-t)} + S_X(x+1)^t, \qquad t \in [0,1]$$

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{\frac{(1-t)}{c}} + S_X(x+1)^{\frac{t}{c}}, \qquad t \in [0,c]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c} ln({}_c p_x), \qquad t \in [0,c]$$

$$_y q_{x+t} = 1 - ({}_c p_x)^{\frac{y}{c}}, \qquad t \in [0,c], y \in [0, c-t]$$

Tableau résumé lorsque $c = 1$

	DUD	FC
$_t q_x$	$t \cdot q_x$	$1 - p_x^t$
$_t p_x$	$1 - t \cdot q_x$	p_x^t
$_1 d_x$	$t \cdot {}_n d_x$	$\ell_x (1 - p_x^t)$
$f_{t_x}(t)$	q_x	$-p_x^t \ln(p_x)$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1 - t \cdot q_x}$	$-\ln(p_x)$

Sous :

DUD : $K_x \perp R_x$

FC : $K_x \perp R_x$ ssi $p_{x+k} = p_x \; \forall k \in \{0, 1, \dots\}$

1.7 Caractéristiques individuelles

Lorsque $0 \leq x < \omega$, défini les fonctions suivantes pour 2 cas possible.

Utilisant T_x

Si nous connaissons déjà la fonction de répartition/densité de T_x on peut trouver :

Espérance : Espérance de la durée de vie future complète d'une personne d'âge x.

$$\mathrm{E}[T_x] = \mathring{e}_x = \int_0^{\omega - x} t_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x d$$

Variance

$$V(T_x) = \int_0^{\omega - x} t^2 {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega - x} 2 t_t p_x dt - (\mathring{e}_x)^2$$

Médiane : Le nombre d'années avant que la population d'âge x aujourd'hui diminue de moitiée.
Pour la trouver il suffit d'isoler :

$$Pr[T_x \leq m(x)] = {}_{m(x)} q_x = \frac{1}{2}$$

Mode : Le moment où la population d'âge x aujourd'hui connaisse le plus de décès.
Pour le trouver, il faut le :

$$\arg\max_t {}_t p_x \mu_{x+t}$$

On peut uiliser la dérivée pour le trouver, mais il faut se méfier **des bornes** et que le résultat est un **maximum**.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

Utilisant K_x

Si nous connaissons que la table de mortalité, les seules caractéristiques disponibles sont celles de K_x.
Pour obtenir celles de T_x il faut poser un hypothèse pour les âges fractionnaires.

Espérance : Espérance du nombre d'années entières à vivre pour une personne d'âge x *(espérance de vie abrégée)*.

$$\mathrm{E}[K_x] = e_x = \sum_{k=0}^{\omega - x - 1} k \; {}_{k|} q_x = \sum_{k=1}^{\omega - x} {}_k p_x$$

Variance :

$$V(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega - x - 1} k^2 \; {}_{k|} q_x - (e_x)^2$$

Médiane : Solution tel que :

$$Pr[K_x < m] < \frac{1}{2}$$

$$Pr[K_x \leq m] \geq \frac{1}{2}$$

Mode :

$$\arg\max_k \Pr[K_x = k]$$

Liens entre les fonctions pour K_x et T_x :

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E[T_x] \\ &= E[K_x] + E[R_x] \\ &\overset{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2} \\ V(T_x) &= V(K_x + R_x) \\ &\overset{\perp}{=} V(K_x) + V(R_x) \\ &\overset{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Variables censurées

L'espérance de vie future **d'ici** n années d'un assuré d'âge x (*entre les âges x et $x+n$*).

Espérance de vie **complète** temporaire n années .

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}[T_x \wedge n] \\ &= \int_0^n t \; {}_t p_x \mu_{x+t} dt + n \; {}_n p_x \\ &= \int_0^n {}_t p_x dt, \qquad 0 \leq x < \omega, \\ & \qquad 0 \leq n \leq \omega - x \end{aligned}$$

Espérance de vie **abrégée** temporaire n années.

$$\begin{aligned} e_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}[K_x \wedge n] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k_{k|} q_x + n \; {}_n p_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_k p_x, \qquad 0 \leq x < \omega - 1 \\ & \qquad n \in \{0, 1, \dots, \omega - x - 1\} \end{aligned}$$

Variables tronquées

L'espérance de vie future **conditionnelle** au **décès** dans les n prochaines années d'un assuré d'âge x (*entre les âges x et $x+n$*).

$$\mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq n\right] = \frac{\mathring{e}_{x:\overline{n}|} - n\ {}_np_x}{{}_nq_x}$$
$$\mathrm{E}\left[K_x | K_x \leq n\right] = \frac{e_{x:\overline{n+1}|} - (n+1)\ {}_{n+1}p_x}{{}_{n+1}q_x}$$
$$\mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq 1\right] = a(x) = \frac{e_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq n\right] {}_nq_x + n\ {}_np_x \\ &= \mathrm{E}\left[K_x | K_x \leq n\right] {}_{n+1}q_x + (n+1)\ {}_{n+1}p_x \\ &\overset{\text{\tiny UDD}}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_nq_x}{2} \end{aligned}$$

Formules de récurrence

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \mathring{e}_{x:\overline{m}|} + {}_mp_x \mathring{e}_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$
$$e_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{m}|} + {}_mp_x e_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$
$$m, n, (\omega - x) \in \mathbb{W})$$

$$e_{x+k} = p_{x+k}(1 + e_{x+k+1})$$
où $k \in \{(\omega - x - 2), (\omega - x - 3), \ldots, 2, 1, 0\}$

et $e_{\omega-1} = 0$ comme valeur de départ

1.8 Caractéristiques de groupe

$T^{(j)}$: v.a. de la jème vie, $j \in \{1, \ldots, \ell_a\}$

$$\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T^{(j)} > x-a\}}$$
$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}}$$

$\mathscr{L}_x$: v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x.

$$\mathrm{E}\left[\mathscr{L}_x\right] = \ell_x$$
$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_xp_0)$$

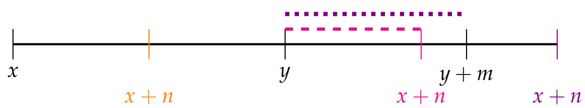
${}_n\mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x + n$.

$$\mathrm{E}\left[{}_n\mathcal{D}_x\right] = {}_nd_x$$
$${}_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_{x|n}q_0)$$
$${}_n\mathcal{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}_{x+n}$$

On peut ensuite généraliser $\forall\ x \geq a$

$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a}p_a)$$
$${}_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a|n}q_a)$$

$$\mathrm{Cov}({}_n\mathcal{D}_x, {}_m\mathcal{D}_y) = \begin{cases} -{}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & x + n \leq y \\ {}_{y-a|x+n-y}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y < x + n \leq y + m \\ {}_{y-a|m}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y + m \leq x + n \end{cases}$$



Raccourci pour s'en souvenir où ℓ_a est le nombre inital de personnes :

$$\mathrm{Cov}(\text{Groupe A}, \text{Groupe B}) = \ell_a \times \Big(\Pr(\text{Appartenir aux groupes A et B}) - \Pr(\text{Appartenir au groupe A}) \times \Pr(\text{Appartenir au groupe B})\Big)$$

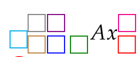
Lien entre ℓ_x et $S_X(x)$

$$\ell_x = \ell_a S_{T_a}(x - a) = \ell_a\ {}_{x-a}p_a$$

2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

Notation



Couverture temporaire n années

$A^{1}_{x:\overline{n}\vert}$	Cas de décès.
$A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}$	Cas de survie.
$A_{x:\overline{n}\vert}$	Les deux cas.
A_x	En tout temps.

Période différée

${}_{m\vert}A_x$	Couverture débutant dans n années.

Type de variation de la prestation

A_x	Constant
$(IA)x$	Croissant arithmétiquement
$(DA)x$	Décroissant arithmétiquement

Fréquence de variation

variation m fois par année

$(I^{(m)}A)_x$ et $(D^{(m)}A)_x$

*(dé)*croissance continue

$(\bar{I}A)_x$ et $(\bar{D}A)_x$

Durée temporaire de la variation

$(I_{\overline{n}|}A)_x$ Augmentation uniquement lors des n premières années de couverture.

Prestation de base

$b\,A_x$	Si quelque chose est payable c'est b.
$b(IA)_x$	Paye b lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.
$b(IA)_x$	Paye b lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Moment de paiement de la prestation de décès

$\bar{A}_x$	Au moment du décès.
$A_x^{(m)}$	À la fin de 1/m années du décès.

Force, ou multiple j de la, d'intérêt δ

$0 \leq \delta < 1$ et $j \in \mathbb{Z}_+$

${}^{\delta}A_x$	Évaluation avec **force** d'intérêt δ *(constante)*.
${}^{j}A_x$	Évaluation avec ***j* fois force** d'intérêt δ *(pas nécessairement constante)*.

2.1 Durée temporaire

Assurance-vie entière On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x$$
$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}$$

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Assurance-vie temporaire On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ A^{1}_{x:\overline{n|}} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}\end{aligned}$$

Assurance-vie dotation pure On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après n années.

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = {}_np_x v^n = {}_nE_x$$

où ${}_nE_x$ est un facteur d'actualisation actuarielle.

Assurance mixte On verse le capital à l'assuré si il décède dans les n prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_np_x \\ &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \\ A_{x:\overline{n|}} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x + v^n {}_np_x\end{aligned}$$

Assurance différée On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de m années [1]

$$\begin{aligned}{}_{m|}\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= v^m {}_mp_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_tp_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt \\ &= {}_mE_x \bar{A}_{x+m} \\ {}_{m|}A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)|}q_x \\ &= v^m {}_mp_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_kp_{x+m} q_{x+m+k} \\ &= {}_mE_x A_{x+m}\end{aligned}$$

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$${}_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^{1}_{x:\overline{m|}}$$

Assurance Vie entière croissante On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ (I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots\end{aligned}$$

Assurance Vie temporaire croissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital croit chaque années.

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^{n} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^{n} (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_{1|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n-1|}} + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{1|}}\end{aligned}$$

Assurance vie entière croissante temporairement On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croit pendent n années

$$\begin{aligned}(I_{\overline{n|}}\bar{A})_x &= \int_0^{n} (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &+ \int_n^{\omega-x} n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}_x\end{aligned}$$

Assurance Vie temporaire décroissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital décroit chaque années.

$$\begin{aligned}(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^{\omega-x} (n-t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ (D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^{\omega-x} (n-\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{1|}} + \bar{A}^{1}_{x:\overline{2|}} + \ldots + \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\end{aligned}$$

3 Contrats de rente

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\begin{aligned}Y = \bar{a}_{\overline{T_x|}} &= \frac{1-v^{T_x}}{\delta} = \frac{1-\overline{Z}_x}{\delta} \\ \bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x|}} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt \\ &= \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1-v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}\end{aligned}$$

Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$\begin{aligned}Y &= \begin{cases}\bar{a}_{\overline{T_x|}} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & , T_x \geq n\end{cases} = \frac{1-\overline{Z}_{x:\overline{n|}}}{\delta} \\ \bar{a}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t|}} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^n v^t {}_tp_x dt \\ &= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}^2_{x:\overline{n|}}}{\delta^2}\end{aligned}$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$$\begin{aligned}Y &= \begin{cases}0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m|}} & T_x \geq m\end{cases} = \frac{\overline{Z}_{20:\overset{1}{\overline{10|}}} - {}_{m|}\overline{Z}_{20}}{\delta} \\ {}_{m|}\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{t-m} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= {}_mE_x \bar{a}_{x+m} \\ &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m|}}\end{aligned}$$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans m années.

l'assuré.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \overline{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}Y_x$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_nq_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x \end{aligned}$$

4 Primes nivelées

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étalle sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où Z est la valeur présente actuarielle est prestations à payer et Y la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où Y_1 représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et Y_2 la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivellée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[L] &= 0 \\ \mathrm{E}[Z] - \mathrm{E}[Y] &= 0 \\ \mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}[Y] \end{aligned}$$

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_{t^*}p_x$ pour solutionner π^{PPMP}.

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha \\ &\Pr(L_1 + ... + L_n < n\lambda) \geq \alpha \end{aligned}$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(L_1 + ... + L_n)}} < \frac{n\lambda - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où $Z \sim N(0,1)$ et Φ la fonction de répartition de Z. Le défi se trouve dans le calcul de $\mathrm{Var}(L)$, où

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(Z - Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(Z, Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2(\mathrm{E}[ZY] - \mathrm{E}[Z]\,\mathrm{E}[Y]) \end{aligned}$$

4.5 Retour de primes

- Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel (α) ou total des cotisations (accumulées au taux $j < i$)[2] en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.
- On introduit la v.a. W, qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha\pi v_i^{K_x+1} \ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

  Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

- Aussi, on trouve que

$$\mathrm{E}[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha\pi v_i^{k+1} \ddot{s}_{\overline{k+1}|j}\, {}_{k|}q_x = \alpha\pi\psi$$

4.6 Primes brutes

- Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G, qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.
- Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$

  avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π.
- Il y a 3 types de dépenses :
  I) Dépenses initiales ;
    - À l'émission du contrat ;
    - Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M) ;
    - Coût des employés qui saisissent les informations dans le système ;
    - Impression et envoi par courrier de la police.
    - ...
  II) Dépenses de renouvellement ;
    - Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).
  III) Dépenses de fin de contrat.
    - Saisie informatique et frais de fermeture de dossier ;
    - Émission du chèque de prestations ;
    - Enquête (dans certains cas).

2. Le taux i est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux j est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.