

## Rappel de Math. financière

### Facteurs d'actualisation

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$$

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \int_0^n v^t dt = \frac{1-v^n}{\delta}$$

### Facteur d'accumulation

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

## 1 Survie et mortalité

### 1.1 Définitions de base

$X$  : Âge au décès d'un nouveau-né

$T_x$  : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge  $x$ .

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$

$$f_{T_x} = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

$$F_{T_x} = {}_t q_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$

$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_t u q_x = {}_x p_t u q_{x+t}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right\}$$

$K_x$  : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge  $x$ .

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_k p_x$$

$\mu_x$  : Force de mortalité pour  $(x)$

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_t q_x}{t} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(S_X(x)))$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\ln({}_t p_x))$$

### 1.2 Tables de mortalité

$\ell_0$  : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

$\ell_x$  : Nombre d'individu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge  $x$ .

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t u q_x = \frac{{}_u d_{x+t}}{\ell_x}$$

$I_j(x)$  : Indicateur de survie du  $j^{\text{e}}$  individu jusqu'à l'âge  $x$ .  
 $I_j(x) \sim \text{Bin}(1, S_X(x))$

$\mathcal{L}_x$  : v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge  $x$ .

$$\ell_x = E[\mathcal{L}_x] = \sum_{j=1}^{\ell_0} I_j(x)$$

${}_n \mathcal{D}_x$  : v.a. du nombre de décès entre l'âge  $x$  et  $x+n$ .

$${}_n \mathcal{D}_x = \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{x+n}$$

$${}_n d_x = E[{}_n \mathcal{D}_x] = \ell_x - \ell_{x+n}$$

### 1.3 Espérance de vie résiduelle

$$e_x = E[T_x] = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

$$e_{x:\overline{n}|} = \left( \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt \right) + n \cdot {}_n p_x = \int_0^n {}_t p_x dt$$

### 1.4 Hypothèses d'interpolation

Pour  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Distribution uniforme des décès (DUD)**

$$\ell_{x+t} = (1-t)\ell_x + t\ell_{x+1}$$

**Force constante (FC)**

$$\ell_{x+t} = \ell_x^{(1-t)} \ell_{x+1}^t$$

**Tableau résumé**

|              | DUD                         | FC                   |
|--------------|-----------------------------|----------------------|
| ${}_t q_x$   | $t \cdot q_x$               | $1 - p_x^t$          |
| ${}_t p_x$   | $1 - t \cdot q_x$           | $p_x^t$              |
| ${}_t d_x$   | $t \cdot {}_n d_x$          | $\ell_x (1 - p_x^t)$ |
| $f_{t_x}(t)$ | $q_x$                       | $-p_x^t \ln(p_x)$    |
| $\mu_{x+t}$  | $\frac{q_x}{1-t \cdot q_x}$ | $-\ln(p_x)$          |

### 1.5 Loïs de mortalité

**DeMoivre**

$$X \sim \text{Unif}(0, \omega)$$

$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad 0 < x < \omega$$

$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$

$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x}, \quad 0 < t < \omega - x$$

### Loi Exponentielle

$$x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_x(x) = e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

## 2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la  $\frac{1}{m}$  d'année.

**Assurance-vie entière** On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$A_x = v q_x + v p_x A_{x+1}$$

**Assurance-vie temporaire** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les  $n$  prochaines années.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

**Assurance-vie dotation pure** On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après  $n$  années.

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n p_x v^n = {}_n E_x$$

où  ${}_n E_x$  est un facteur d'actualisation actuarielle.

**Assurance mixte** On verse le capital à l'assuré si il décède dans les  $n$  prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette pé-

riode.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x \\ &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1 \\ A_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_x + v^n {}_n p_x\end{aligned}$$

**Assurance différée** On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de  $m$  années<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}{}_m|\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= v^m {}_m p_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_t p_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt \\ &= {}_m E_x \bar{A}_{x+m} \\ {}_m|A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} ({}_{k+m}|q_x) \\ &= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_k p_{x+m} q_{x+m+k} \\ &= {}_m E_x A_{x+m}\end{aligned}$$

**Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire**

$${}_m|\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{m}|}^1$$

**Assurance Vie entière croissante** On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ (I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + {}_2|\bar{A}_x + \dots\end{aligned}$$

**Assurance Vie temporaire croissante** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les  $n$  prochaines années. Ce capital croît chaque années.

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_1|\bar{A}_{x:\overline{n-1}|}^1 + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_{x:\overline{1}|}^1\end{aligned}$$

**Assurance vie entière croissante temporairement** On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croît pendant  $n$  années

$$\begin{aligned}(I_{\overline{n}}\bar{A})_x &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &+ \int_n^{\omega-x} n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_x\end{aligned}$$

**Assurance Vie temporaire décroissante** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les  $n$  prochaines années. Ce capital décroît chaque années.

$$\begin{aligned}(\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^{\omega-x} (n - t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ (D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^{\omega-x} (n - \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{2}|}^1 + \dots + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1\end{aligned}$$

### 3 Contrats de rente

**Rente viagère** On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\begin{aligned}Y &= \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta} \\ \bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt \\ &= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \\ \text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{1 - v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}\end{aligned}$$

**Rente temporaire  $n$  années** Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum  $n$  années.

$$\begin{aligned}Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^n v^t {}_t p_x dt \\ &= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2}\end{aligned}$$

**Rente viagère différée  $m$  années** C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans  $m$  années (si  $(x)$  est en vie).

$$\begin{aligned}Y &= \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{20:\overline{10}|} - {}_m|\bar{Z}_{20}}{\delta} \\ {}_m|\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t-m}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= {}_m E_x \bar{a}_{x+m} \\ &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}\end{aligned}$$

**Rente garantie (certaine)  $n$  années** Le contrat prévoit une rente minimale de  $n$  années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$\begin{aligned}Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_n|Y_x \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n q_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\bar{a}_x\end{aligned}$$

### 4 Primes nivelées

#### 4.1 Notation et définitions

On définit  $L$  comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étale sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où  $Z$  est la valeur présente actuarielle des prestations à payer et  $Y$  la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans  $m$  années.

rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où  $Y_1$  représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et  $Y_2$  la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivelée  $\pi$  selon 3 principes.

## 4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence,  $\pi^{PE}$  est la solution de

$$E[L] = 0$$

$$E[Z] - E[Y] = 0$$

$$E[Z] = E[Y]$$

## 4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable,  $\pi^{PPMP}$  est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer  $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_t^*p_x$  pour solutionner  $\pi^{PPMP}$ .

## 4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* :  $\pi^{PP}$  est la solution de

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha$$

$$\Pr(L_1 + \dots + L_n < n\lambda) \geq \alpha$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{\text{Var}(L_1 + \dots + L_n)}} < \frac{n\lambda - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où  $Z \sim N(0, 1)$  et  $\Phi$  la fonction de répartition de  $Z$ . Le défi se trouve dans le calcul de  $\text{Var}(L)$ , où

$$\text{Var}(L) = \text{Var}(Z - Y)$$

$$= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(Z, Y)$$

$$= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2(E[Z]E[Y] - E[Z]E[Y])$$

- Saisie informatique et frais de fermeture de dossier;
- Émission du chèque de prestations;
- Enquête (dans certains cas).

## 4.5 Retour de primes

> Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel ( $\alpha$ ) ou total des cotisations (accumulées au taux  $j < i$ )<sup>2</sup> en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.

> On introduit la v.a.  $W$ , qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha \pi v_i^{K_x+1} s_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

> Aussi, on trouve que

$$E[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \pi v_i^{k+1} s_{\overline{k+1}|j} q_x = \alpha \pi \psi$$

## 4.6 Primes brutes

> Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute*  $G$ , qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur  $D$  dans le calcul de la perte à l'émission.

> Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$

avec  $Y$  qui est fonction de  $G$  (la prime brute), et non  $\pi$ .

> Il y a 3 types de dépenses :

I) Dépenses initiales;

- À l'émission du contrat;
- Commission des ventes (% de  $G$  ou du montant d'assurance  $M$ );
- Coût des employés qui saisissent les informations dans le système;
- Impression et envoi par courrier de la police.
- ...

II) Dépenses de renouvellement;

- Commission de renouvellement (% de  $G$  ou du montant d'assurance  $M$ ), si  $G$  est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).

III) Dépenses de fin de contrat.

2. Le taux  $i$  est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux  $j$  est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.