Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

Où les dénominateurs sont à être interprété en REGEX.
Pour exemple, pour la première c'est soit le taux d'escompte pour une une annuité due ou le taux d'intérêt pour une immédiate.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{(i^{(m)}} \left(\frac{1}{|d^{(m)})} \middle| (1+i) \right)$$

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(d^{(m)}|i)} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(d^{(m)}|i)}$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad v = \frac{1}{1+i}$$

$$a(t) = (1+i)^t \qquad = e^{\int_0^t \delta_s ds} = (1-d)^{-t}$$

Sommations

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 Survie et mortalité

1.2 Probabilités de survie et de décès

X : Âge au décès d'un nouveau-né

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x.

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$
$$f_{T_x} = {}_tp_x \mu_{x+t}$$
$$F_{T_x} = {}_tq_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$
$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x$$
$${}_{t+y}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x \cdot {}_yq_{x+t}$$
$$S_{T_x}(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \mu_{x+s} ds \right\} = \exp\left\{ -\int_x^{x+t} \mu_s ds \right\}$$
$$T_x \in \mathbb{R}^+$$

K_x : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge x.

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$
$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_{k|}p_x$$
$$K_x \in \mathbb{Z}^+$$

μ_x : Force de mortalité pour (x)

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(S_X(x)) \Big)$$
$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ln({}_tp_x) \Big)$$
$$\alpha \mu_{x+s} + h(s) = ({}_tp_x)^{\alpha} e^{-\int_0^t h(s)ds}$$

R_x : Durée de vie résiduelle fractionnaire d'un individu d'âge x.

$$R_x = T_x - K_x$$
$$R_x \in [0,1)$$

$J_x^{(m)}$: Nombre de m-ème d'années vécus durant l'année du décès.

$$J_x^{(m)} \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$
$$J_x^{(m)} = [mR_x]$$

$H_x^{(m)}$: Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x exprimé en m-ème années.

$$H_x^{(m)} = [mT_x]$$
$$H_x^{(m)} \in \mathbb{Z}^+$$

1.3 Lois de mortalité

Loi de Moivre

Pas très réaliste car assume une chance **uniforme** de mourir n'importe quand alors qu'en réalité une personne agée de 90 ans a des plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans.
C'est la seule loi avec un **support fini**.

$$X \sim \text{Unif}(0, \omega)$$
$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \; 0 \leq x \leq \omega$$
$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \; 0 \leq x \leq \omega$$
$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$
$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x}, \; 0 \leq t \leq \omega - x$$

Loi Exponentielle

$$X \sim \text{Exp}(\mu)$$
$$S_x(x) = e^{-\mu x}, \; x \geq 0$$
$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$
$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \; t \geq 0$$
$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A, B, c)$$
$$A : \text{risque d'accident}$$
$$Bc^x : \text{risque lié au vieillissement}$$
$$\mu_x = A + Bc^x, \; x \geq 0$$
$${}_tp_x = e^{-At - \frac{Bc^x}{ln(c)}(c^t - 1)}, \; t \geq 0$$

Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B, c)$$

Loi de Weibull

$$X \sim \text{Wei}(k, n)$$
$$\mu_x = kx^n, \; x \geq 0$$
$${}_tp_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]}, \; t \geq 0$$

1.4 Tables de mortalité

ℓ_0 : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

ℓ_x : Nombre d'invidu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x.

${}_nd_x$: Nombre de décès entre l'âge x et $x + n$.

$$\ell x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$
$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_{t|u}q_x = \frac{{}_ud_{x+t}}{\ell_x}$$

1.5 Mortalité sélecte et ultime

$[x]$: âge de la sélection *(pas une valeur entière)*.

$[x] + j$: âge atteint où j est le temps écoulé depuis la sélection.

r : **Période sélecte** de durée r durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \ldots$$
$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]+r+j}\, p_{[x]} = \ell_{[x]}\, {}_rp_{[x]}\, {}_jp_{x+r}$$

1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Pour $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{Z}$.
Distribution uniforme des décès (DUD)
Décès répartis uniformément sur l'année.

$$S_X(x+t) = (1-t) \times S_X(x) + t \times S_X(x+1), \qquad t \in [0,1]$$
$$S_X(x+t) = \frac{(c-t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x+1), \qquad t \in [0,c]$$

les conditions pour t et x appliquent aux 3 équations suivantes

$$_tq_x = \left(\frac{t}{c}\right) {_cq_x}, \qquad t \in [0,c]$$
$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c} {_cq_x}}{1 - \frac{t}{c} {_cq_x}}, \qquad x \in \{0, c, 2c, \ldots\}$$
$$_yq_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right) {_cq_x}}{1 - \left(\frac{t}{c}\right) {_cq_x}}, \qquad y \in [0, c-t]$$

On note que la force de mortalité à la même formule que la fonction de survie car avec **DUD**, la force est uniformément appliquée.
Force constante (FC)

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{(1-t)} + S_X(x+1)^t, \qquad t \in [0,1]$$
$$S_X(x+t) = S_X(x)^{\frac{(c-t)}{c}} + S_X(x+1)^{\frac{t}{c}}, \qquad t \in [0,c]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c} ln({_cp_x}), \qquad t \in [0,c]$$
$$_yq_{x+t} = 1 - ({_cp_x})^{\frac{y}{c}}, \qquad t \in [0,c], y \in [0, c-t]$$

Sous :

DUD : $K_x \perp R_x$

FC : $K_x \perp R_x$ ssi $p_{x+k} = p_x \; \forall k \in \{0, 1, ...\}$

1.7 Caractéristiques individuelles

Lorsque $0 \leq x < \omega$, défini les fonctions suivantes pour 2 cas possible.

Utilisant T_x

Si nous connaissons déjà la fonction de répartition/densité de T_x on peut trouver :

Espérance : Espérance de la durée de vie future complète d'une personne d'âge x.

$$\mathrm{E}[T_x] = \mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} t {_tp_x} \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {_tp_x} d$$

Variance

$$V(T_x) = \int_0^{\omega-x} t^2 {_tp_x} \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} 2t {_tp_x} dt - (\mathring{e}_x)^2$$

Médiane : Le nombre d'années avant que la population d'âge x aujourd'hui diminue de moitié.
Pour la trouver il suffit d'isoler :

$$Pr[T_x \leq m(x)] = {_{m(x)}q_x} = \frac{1}{2}$$

Mode : Le moment où la population d'âge x aujourd'hui connaisse le plus de décès.
Pour le trouver, il faut le :

$$\arg\max_t {_tp_x} \mu_{x+t}$$

On peut uiliser la dérivée pour le trouver, mais il faut se méfier **des bornes** et que le résultat est un **maximum**.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

Utilisant K_x

Si nous connaissons que la table de mortalité, les seules caractéristiques disponibles sont celles de K_x.
Pour obtenir celles de T_x il faut poser un hypothèse pour les âges fractionnaires.

Espérance : Espérance du nombre d'années entières à vivre pour une personne d'âge x *(espérance de vie abrégée)*.

$$\mathrm{E}[K_x] = e_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k \, {_{k|}q_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {_kp_x}$$

Variance :

$$V(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 \, {_{k|}q_x} - (e_x)^2$$

Médiane : Solution tel que :

$$Pr[K_x < m] < \frac{1}{2}$$
$$Pr[K_x \leq m] \geq \frac{1}{2}$$

Mode :

$$\arg\max_k \Pr[K_x = k]$$

Liens entre les fonctions pour K_x et T_x :

$$\begin{aligned}\mathring{e}_x &= E[T_x] \\ &= E[K_x] + E[R_x] \\ &\overset{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}V(T_x) &= V(K_x + R_x) \\ &\overset{\perp}{=} V(K_x) + V(R_x) \\ &\overset{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Variables censurées

L'espérance de vie future **d'ici** n années d'un assuré d'âge x (*entre les âges x et $x+n$*).

Espérance de vie **complète** temporaire n années .

$$\begin{aligned}\mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}[T_x \wedge n] \\ &= \int_0^n t \, {_tp_x} \mu_{x+t} dt + n \, {_np_x} \\ &= \int_0^n {_tp_x} dt, \qquad 0 \leq x < \omega, \\ & \qquad 0 \leq n \leq \omega - x\end{aligned}$$

Espérance de vie **abrégée** temporaire n années.

$$\begin{aligned}e_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}[K_x \wedge n] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {_{k|}q_x} + n \, {_np_x} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {_kp_x}, \qquad 0 \leq x < \omega - 1 \\ & \qquad n \in \{0, 1, \ldots, \omega - x - 1\}\end{aligned}$$

Variables tronquées

L'espérance de vie future **conditionnelle** au **décès** dans les n prochaines années d'un assuré d'âge x (*entre les âges x et $x+n$*).

$$\mathrm{E}[T_x | T_x \leq n] = \frac{\mathring{e}_{x:\overline{n}|} - n \, {_np_x}}{_nq_x}$$
$$\mathrm{E}[K_x | K_x \leq n] = \frac{e_{x:\overline{n+1}|} - (n+1) \, {_{n+1}p_x}}{_{n+1}q_x}$$
$$\mathrm{E}[T_x | T_x \leq 1] = a(x) = \frac{e_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\begin{aligned}\mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}[T_x | T_x \leq n] \, {_nq_x} + n \, {_np_x} \\ &= \mathrm{E}[K_x | K_x \leq n] \, {_{n+1}q_x} + (n+1) \, {_{n+1}p_x} \\ &\overset{\perp}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{_nq_x}{2}\end{aligned}$$

Formules de récurrence

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \mathring{e}_{x:\overline{m}|} + {_mp_x} \mathring{e}_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$
$$e_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{m}|} + {_mp_x} e_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$
$$m, n, (\omega - x) \in \mathbb{W})$$

$$\begin{aligned}e_{x+n} &= p_{x+n}(1 + e_{x+n+1}) \\ &= e_{x+n:\overline{1}|} + p_{x+n} e_{x+n+1}\end{aligned}$$

1.8 Caractéristiques de groupe

$T^{(j)}$: v.a. de la jème vie, $j \in \{1, \ldots, \ell_a\}$

$$\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T^{(j)} > x-a\}}$$

$$_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}}$$

$\mathscr{L}_x$: v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x.

$$\mathrm{E}[\mathscr{L}_x] = \ell_x$$

$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_xp_0)$$

$_n\mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$\mathrm{E}[{}_n\mathcal{D}_x] = {}_nd_x$$

$$_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_{x|n}q_0)$$

$$_n\mathcal{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}_{x+n}$$

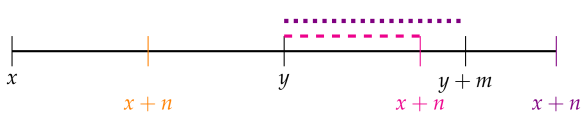
On peut ensuite généraliser $\forall\ x \geq a$

$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a}p_a)$$

$$_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a|n}q_a)$$

Avec les sommations on trouve :

$$\mathrm{Cov}({}_n\mathcal{D}_x, {}_m\mathcal{D}_y) = \begin{cases} -{}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & x+n \leq y \\ {}_{y-a|x+n-y}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y < x+n \leq y+m \\ {}_{y-a|m}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y+m \leq x+n \end{cases}$$



Raccourci : $\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}[A \cap B] - \frac{\mathrm{E}[A]\mathrm{E}[B]}{\ell_a}$

2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

2.1 Notation et introduction

Fonctions

$a(T)$: Facteur d'accumulation.

$v(T)$: Facteur d'actualisation.

$$v(t) = \frac{1}{a(t)}$$

Z : v.a. de la valeur actualisée du montant payé selon les termes du contrat.

$$Z = b(T)v(f(T))$$

$b(T)$: Prestation prévue en fonction de T.

$f(T)$: Montant du paiement en fonction de T.
De plus, puisque $f(T)$ n'a pas d'importance lorsque $b(T) = 0$, on défini son domaine pour simplifier des interprétations plus tard.

$$f(t) \geq T$$

A : Pour simplifier la notation, on dénote la *prime unique nette* $\mathrm{E}[Z]$, alias la **valeur actuarielle actualisée**, par $\mathrm{E}[Z] = A$.

Prestations

Prestation de base

bA_x Si quelque chose est payable c'est b.

$b(IA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.

$b(DA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Force, ou multiple j de la, d'intérêt δ

$0 \leq \delta < 1$ et $j \in \mathbb{Z}_+$

${}^\delta A_x$ Évaluation avec **force** d'intérêt δ *(constante)*.

${}^j A_x$ Évaluation avec ***j* fois force** d'intérêt δ *(pas nécessairement constante)*.

Période différée

${}_{m|}A_x$ Couverture débutant dans n années.
Donc si décède avant les m années, il n'y a pas de paiements.

Fréquence de variation

variation m fois par année

$(I^{(m)}A)_x$ et $(D^{(m)}A)_x$

*(dé)*croissance continue

$(\bar{I}A)_x$ et $(\bar{D}A)_x$

Type de variation de la prestation

A_x Constant

$(IA)x$ Croissant arithmétiquement

$(DA)x$ Décroissant arithmétiquement

Durée temporaire de la variation

$(I_{\overline{n}|}A)_x$ Augmentation uniquement lors des n premières années de couverture.

Moment de paiement de la prestation de décès

$\bar{A}_x$ Au moment du décès.

$A_x^{(m)}$ À la fin du 1/m année du décès.
Pour exemple, si $m = 12$ alors c'est payable à la fin du mois de décès.

Couverture temporaire n années

$A^1_{x:\overline{n}|}$ Cas de décès.

$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ Cas de survie.

$A_{x:\overline{n}|}$ Les deux cas.

A_x En tout temps.

Principes de calcul de la prime pour un seul contrat

Principes pour calculer la prime *(unique)* à payer pour un contrat d'assurance :

1. $\mathrm{E}[Z]$ **principe d'équivalence**
2. $\mathrm{E}[Z] + k\sigma_Z$
3. ξ **quantile de** Z.

Interprétations pour un seul contrat

1. En moyenne l'assureur ne fait ni gains ni pertes
2. Lorsqu'il y a plusieurs contrats, le principe est équivalent au troisième mais lorsqu'il n'y en a qu'un seul alors il ne tient pas.
3. Plus petite prime π telle que $Pr(Z \geq \pi) = p$

Principes de calcul pour un portefeuille de plusieurs contrats

Généralement, on suppose les n différents contrats Z_j d'être identique et les vies à être indépendantes *(i.i.d.)*.

$$S = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

1. Par le **principe d'équivalence**, $\mathrm{E}[Z] = \pi$.
3. **Principe du quantile** $Pr(S \leq n\pi) \geq p$, où p est la **probabilité de solvabilité**.

Cependant, si les contrats ne sont ***pas identique***, la **prime varie** selon le contrat.

1. Pour chaque type de contrat le **principe d'équivalence** ne change pas, $\mathrm{E}[Z] = \pi$.
3. Pour le **Principe du quantile** on veut maintenant une **surchage égale** pour tous les contrats et donc le plus petite h telle que $Pr(S \leq h) \geq p$.

h : Prime collective sous le principe du quantile.

Doit trouver la surchage θ qui, lorsqu'appliqué à chacune des espérances individuelles, donnera la prime collective au total.

θ : **Surchage**

$$\pi = (1+\theta)\mathrm{E}[Z]$$

$$h = (1+\theta)\mathrm{E}[S]$$

Suprime

$$\theta\mathrm{E}[Z]$$

Puisque par défaut les Z_j sont *(iid)* on applique **l'approximation normale** avec $S \sim N(\mathrm{E}[S] = n\mathrm{E}[Z], V(S) = nV(Z))$.

$\Phi^{-1} = z_{1-p}$

$$z_{1-p} \leq \frac{\sqrt{n}(\pi - \mathrm{E}[Z]}{\sigma_Z}$$
$$\pi \geq \mathrm{E}[Z] + z_{1-p}\left(\frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}\right)$$
$$n \geq \left(\frac{z_{1-p}\sigma_Z}{\pi - \mathrm{E}[Z]}\right)^2 = n_p$$

Donc avec h on résoud $h = (1+\theta)\mathrm{E}[Z]$ et applique la surprime à tous les assurés.

Règle des moments

Lorsque $b_t^j = b_t, t \geq 0$, alias $b_t \in \{0,1\}$, alors :

$$\mathrm{E}\left[Z^j\right] @\delta_t = \mathrm{E}[Z] @j \times \delta_t$$

Sinon on généralise :

$$\mathrm{E}\left[Z^j\right] @\delta_t = \mathrm{E}\left[b \times Z'^j\right] @\delta_t = b^j \times \mathrm{E}[Z'] @j \times \delta_t$$

À noter que la règle est seulement appliquable aux prestations nivelées et donc n'est pas applicable aux prestations (dé)croissantes.

2.2 Payable au moment du décès

Assurance-vie entière On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$
$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Assurance-vie temporaire On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

Capital différé de n années On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après n années.

$$A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = {}_np_x v^n = {}_nE_x$$

où ${}_nE_x$ est le **facteur d'actualisation actuarielle**.

Assurance mixte On verse le capital à l'assuré si il décède dans les n prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_np_x = \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$$
$$A_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x + v^n {}_np_x$$

Assurance différée de n années On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de m années[1]

$$_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = v^m {}_mp_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_tp_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt = {}_mE_x \bar{A}_{x+m}$$
$$_{m|}A_x = \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)|}q_x = v^m {}_mp_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_kp_{x+m} q_{x+m+k} = {}_mE_x A_{x+m}$$

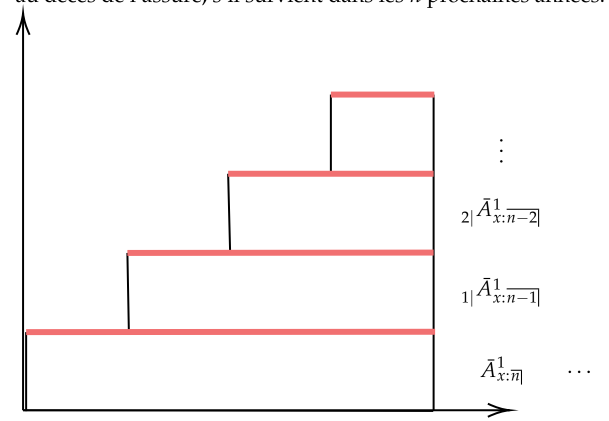
1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans m années.

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$$_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m|}}$$

Assurances à prestation variant arithmétiquement

Assurance Vie temporaire croissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.



Le capital **croit chaque année**.
La prestation est de 1 $ pour la première année, 2 $ pour la deuxième, etc. jusqu'à n $ la dernière année.

$$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + {}_{1|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-1|}} + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}^1_{x:\overline{1|}}$$

Le capital **croît m fois par année**.
Paye une prestation de 1/m $ dans le premier 1/m d'année, 2/m $ dans le deuxième, etc.

$$(I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \frac{(\lfloor t \times m \rfloor + 1)}{m} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital **croît pendant r années**.

$$(I_{\overline{r|}}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{r-1} {}_{k|}\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$$

Le capital est **différé de r années**.

$$_{r|}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = v^r {}_rp_x (I\bar{A})^1_{x+r:\overline{n|}}$$

Le capital **croît continûment**.
Paye une prestation de t au moment du décès, tant qu'il se produise dans les n premières années.

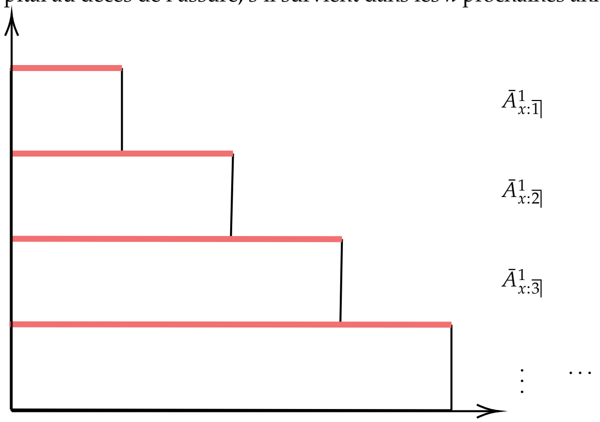
$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^n {}_{s|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n-s}|} ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (n-t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^n \bar{A}^{1}_{x:\overline{s}|} ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x &= (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + n\, {}_{n|}\bar{A}_x \\
&= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}_x
\end{aligned}
$$

Assurance Vie temporaire décroissante

On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.



Le capital **décroit chaque année** et donc la prestation doit nécessairement être une temporaire.
Paye n \$ au début de la première année, n-1 \$ au début de la deuxième, etc. jusqu'à 1 \$ au début de la dernière année.
On peut le voir de l'autre sens, la prestation du début de la dernière année est de 1 \$, 2 \$ pour le début de l'avant dernière année, etc.

$$
\begin{aligned}
(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{\omega-x} (n-\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} + \bar{A}^{1}_{x:\overline{2}|} + \ldots + \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Le capital **décroît m fois par année**.
Paye une prestation de n \$ dans le premier 1/m d'année, n - 1/m \$ dans le deuxième, etc. jusqu'à 1/m \$ durant le dernier 1/m d'année.

$$
(D^{(m)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \left(n - \frac{1}{m} \times \lfloor mt \rfloor\right) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt
$$

Le capital est **différé de r années**.

$$
{}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{k}|}
$$

Le capital **décroît continûment**.
Prévoit une prestation de n \$ pour un décès immédiat, par la suite la prestation décroît linéairement jusquà 0 \$ au bout de n années.

Assurance mixte

L'assurance peut être mixte peut importe qu'elle soit croissante ou décroissante.

L'assurance ***croissante*** mixte n années, paierait n\$ en cas de survie *(peu importe la fréquence de la croissance)*.

L'assurance ***décroissante*** mixte n années, paierait 1/m\$ en cas de survie si la prestation **décroît m fois par année**.

L'assurance ***décroissante*** mixte n années, paierait 1\$ en cas de survie si la prestation **décroît à chaque année** *(alias, m = 1)*.

L'assurance ***décroissante*** mixte n années aurait une prestation de survie nulle si la prestation **décroît continûment**. Donc, en théorie une assurance décroissant continûment peut être mixte mais pas en pratique.

Comme pour les assurances à prestations constantes, une mixte est la combinaison d'une temporaire *(avec la même (dé)croissance)* et d'un capital différé.

$$
{}_{r|}(D\bar{A})_{x:\overline{n}|} = {}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n+r}|}^{\quad\;\; 1}
$$

Assurance Vie entière croissante

On verse le capital au décès de l'assuré.

Le capital **croît chaque année**.
La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.
Donc, 1 \$ la première, 2 \$ la deuxième, etc. jusqu'à $\omega - x$\$ la dernière.

$$
\begin{aligned}
(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots
\end{aligned}
$$

Le capital **croît continûment**.
La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{\omega-x} {}_{s|}\bar{A}_x ds
\end{aligned}
$$

Le capital **croit *(annuellement)* pendant n années**.
Comme une vie entière sauf que la capital cesse de croître après n années et paye n\$ pour la suite.

Relations *à clarifier*

Assurance différée et assurance (dé)croissant continûment.

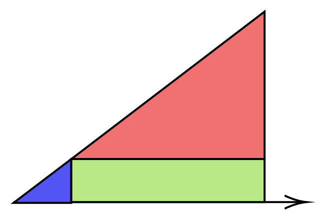
$$
\begin{aligned}
(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|} + {}_1E_x \left[(I\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^{\quad\;\; 1} + \bar{A}_{x+1:\overline{n-1}|}^{\quad\;\; 1}\right] \\
(I\bar{A})_{x:\overline{n}|} &= (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + n\, {}_nE_x \\
(I_{\overline{r}|}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{r}|} + r\, {}_{r|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n-r}|} \\
{}_{r|}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= v^r {}_rp_x (I\bar{A})_{x+r:\overline{n}|}^{\quad\;\; 1}
\end{aligned}
$$

$$
{}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = v^r {}_rp_x (D\bar{A})^{1}_{x+r:\overline{n}|}
$$

$$
\begin{aligned}
(D^{(m)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + (I^{(m)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \left(n + \frac{1}{(m)}\right) \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \\
{}_{r|}(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{r|}(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= n\, {}_{r|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \\
(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n-1}|} + (I_{\overline{n}|}\bar{A})^{1}_{x} &= n\, \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \\
{}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{r|}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= (n+1)\, {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{n}|} \\
{}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n-1}|} + {}_{r|}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= n\, {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

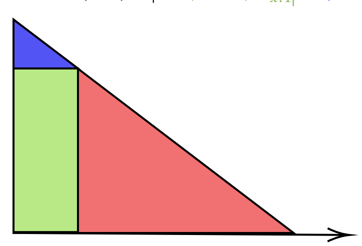
Relations croissance

$$
(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|} + v p_x \left[\bar{A}_{x+1:\overline{n-1}|}^{\quad\;\; 1} + (\bar{I}\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^{\quad\;\; 1}\right]
$$

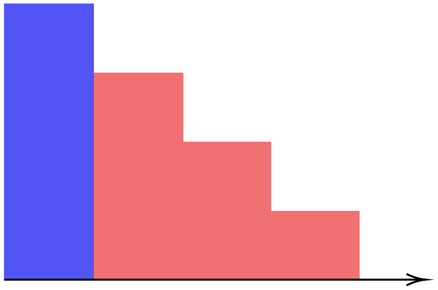


Relations décroissance

$$
(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = (n-1)\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} + (\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|} + v p_x (\bar{D}\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^{\quad\;\; 1}
$$



$$
(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = n\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} + v p_x (D\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^{\quad\;\; 1}
$$



Assurances à prestation variant exponentiellement

La prestation de référence est celle payable en cas de décès immédiat. La prestation est ***indexée*** continûment à force $M\tau$; généralement, $\tau < \delta$ et peut même être négatif.
Exemple pour une assurance temporaire n année différée de r années ${}_{r|}\bar{A}^{1\text{ind}}_{x:\overline{n}|}$.

$$Z = {}^{\delta-\tau}{}_{r|}\bar{Z}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T < r \\ e^{-(\delta-\tau)T} & r < T < r+n \\ 0 & T > n+r \end{cases}$$

Évolution du fonds

à compléter

2.3 Payable à la fin de l'année du décès

La prestation peut seulement changer aux anniversaires de la police (alias aux âges entiers).
Plus facile à calculer et donc souvent on va calculer la prestation payable à la fin de l'année et utiliser une relation pour établir la prime d'une assurance avec prestation payable au moment du décès.
De plus, l'information est souvent disponible sous format de table et donc les seuls calculs possible sont ceux des contrats payable à la fin de l'année du décès.
De façon générale, l'âge à l'émission, la durée de couverture et la période différée sont entiers $x, n, r \in \mathbb{Z}$

Principe général

Valeur actualisée : z_{k+1}

Prestation : b_{k+1}

Facteur d'actualisation : v_{k+1}

$\forall K \in \mathbb{Z}_+$ alias $(0, 1, 2, \dots)$

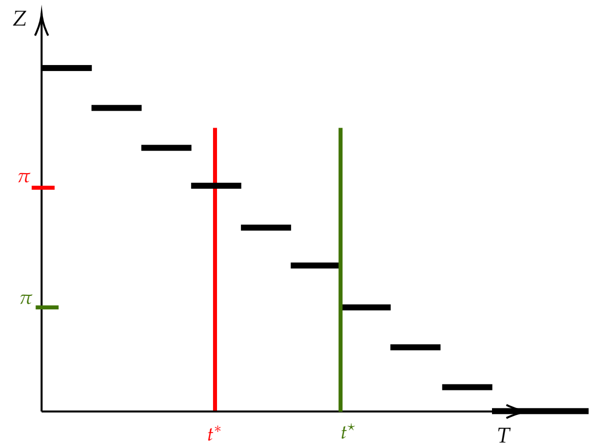
$$Z = z_{K+1} = b_{K+1} v_{K+1}$$

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} z_{k+1}\, {}_{k|}q_x$$

Principe du quantile : si on atteint entre 2 marches, on choisit toujours ***la plus basse***.

$$\text{si } t^* \notin Z_+, \pi = Z|_{k=[t^*]}$$

$$\text{si } t^* \in Z_+, \pi = \min(Z|_{k=t^*}, Z|_{k=t^*-1})$$



2.4 Payable à la fin du 1/m d'année du décès

2.5 Relations entre payable au moment et celles payables à la fin de l'année du décès

3 Contrats de rente

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$Y = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x dt \\ &= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\frac{1 - v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}$$

Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^n v^t\, {}_tp_x dt \\ &= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}}{\delta^2}$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$$Y = \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x - m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}^{\;1}_{20:\overline{10}|} - {}_{m|}\bar{Z}_{20}}{\delta}$$

$$\begin{aligned} {}_{m|}\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{t-m}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= {}_mE_x \bar{a}_{x+m} \\ &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|} \end{aligned}$$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \overline{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}Y_x$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_nq_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|\,t}p_x\mu_{x+t}dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x \end{aligned}$$

4 Primes nivelées

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étalle sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où Z est la valeur présente actuarielle est prestations à payer et Y la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où Y_1 représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et Y_2 la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivellée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[L] &= 0 \\ \mathrm{E}[Z] - \mathrm{E}[Y] &= 0 \\ \mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}[Y] \end{aligned}$$

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_{t^*}p_x$ pour solutionner π^{PPMP}.

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha \\ &\Pr(L_1 + ... + L_n < n\lambda) \geq \alpha \end{aligned}$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(L_1 + ... + L_n)}} < \frac{n\lambda - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où $Z \sim N(0,1)$ et Φ la fonction de répartition de Z. Le défi se trouve dans le calcul de $\mathrm{Var}(L)$, où

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(Z - Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(Z, Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2(\mathrm{E}[ZY] - \mathrm{E}[Z]\,\mathrm{E}[Y]) \end{aligned}$$

4.5 Retour de primes

- Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel (α) ou total des cotisations (accumulées au taux $j < i$)[2] en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.
- On introduit la v.a. W, qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha\pi v_i^{K_x+1}\ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

  Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

- Aussi, on trouve que

$$\mathrm{E}[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha\pi v_i^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k+1}|j\;k|}q_x = \alpha\pi\psi$$

4.6 Primes brutes

- Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G, qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.
- Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$

  avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π.
- Il y a 3 types de dépenses :
  I) Dépenses initiales ;
     - À l'émission du contrat ;
     - Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M) ;
     - Coût des employés qui saisissent les informations dans le système ;
     - Impression et envoi par courrier de la police.
     - ...
  II) Dépenses de renouvellement ;
     - Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).
  III) Dépenses de fin de contrat.
     - Saisie informatique et frais de fermeture de dossier ;
     - Émission du chèque de prestations ;
     - Enquête (dans certains cas).

2. Le taux i est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux j est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.