

CONTRIBUTEURS

ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

aut. Nicholas Langevin

aut. Gabriel Crépeault-Cauchon

aut. Alexandre Turcotte

aut., cre. Alec James van Rassel

src. Ilie-Radu Mitric

Rappels

Approximation Woolhouse

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{m}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

Hypothèse DUD

Mortalité

$${}_sq_x = s q_x, \quad s \in (0, 1)$$

Assurance

$$\bar{A}_{x:\overline{m}|} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{m}|}^1 + A_{x:\overline{m}|}^{\frac{1}{m}}$$

$$A_{x:\overline{m}|}^{(m)} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{m}|}^1 + A_{x:\overline{m}|}^{\frac{1}{m}}$$

Rentes

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_n|\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m){}_n|\ddot{a}_x - \beta(m){}_nE_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

où :

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}\bar{d}^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}\bar{d}^{(m)}}$$

Relations

Assurance

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Rente

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1}$$

$${}_n|\ddot{a}_x = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \underbrace{v^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_x}_{\frac{1}{m} E_x} \ddot{a}_{x+\frac{1}{m}, \overline{n-\frac{1}{m}|}}^{(m)}$$

Note rente différée : pas faire l'erreur d'oublier de soustraire les n années sans paiements de la rente :

$${}_n|\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & , K = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Mortalité

Tables

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$$

$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

Sélection à l'âge $[x]$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{[x]+h:\overline{n-h}|}^1 &= \int_0^{n-h} e^{-\delta t} {}_tp_{[x]+h} \mu_{[x]+h+t} dt \\ &= \int_h^n e^{-\delta(s-h)} \frac{{}_sp_{[x]}}{h p_{[x]}} \mu_{[x]+s} ds \end{aligned}$$

1 Calcul de réserve

Notation

${}_hL$: Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h .

- Puisque la perte est évaluée au temps h , on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :

$${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$$

${}_hV$: Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h .

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :

$${}_hV = E[{}_hL]$$

${}_hV^g$: Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$: Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

${}_hV^I$ Réserve initiale au début de l'année h ;

$${}_hV^I = {}_hV + \pi$$

$VPA_{@h}$: La valeur présente au temps h .

$VPA_{@h}$: La valeur présente anticipée au temps h .

$$VPA_{@t} = E[VPA_{@h}]$$

Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$${}_hL = MZ_{x+h} - \pi \ddot{Y}_{x+h}$$

$$\text{Var}({}_hL) = \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 [2A_{x+h} - (A_{x+h})^2]$$

$${}_hV^n = MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h}$$

$$\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$${}_hV^n \stackrel{PEP}{=} M \left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x} \right]$$

$$\stackrel{PEP}{=} M \left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x} \right]$$

Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$${}_hL = b_{K_{x+h}+h+1} v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h} v^i$$

$${}_hV^n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h} v^i {}_j p_{x+h}$$

Note

- > La prestation b est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- > Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps h , il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

Calcul de réserves

Méthodes d'évaluation de la réserve

Prospective	Rétrospective
${}_hV^g = VPA_{@t} \left(\begin{array}{c} \text{prestations futures} \\ \text{à payer} \end{array} \right) + VPA_{@t} \left(\begin{array}{c} \text{frais futurs} \\ \text{à payer} \end{array} \right) - VPA_{@t} \left(\begin{array}{c} \text{primes futures} \\ \text{à recevoir} \end{array} \right)$	${}_hV^g = \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x} + \frac{VPA_{@0} \left(\begin{array}{c} \text{primes recues} \\ \text{avant } h \end{array} \right)}{{}_hE_x} - \frac{VPA_{@0} \left(\begin{array}{c} \text{prestations à payer} \\ \text{avant } h \end{array} \right)}{{}_hE_x}$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte n années :

Méthode prospective ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

Méthode rétrospective ${}_hV^n = 0 + \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA_{x:\overline{h}|}^1}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer **avant** h .

Relation : $\{T_x - t | T_x > t\} \stackrel{d}{=} T_{x+t}$ où $\stackrel{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$${}_hV^n = [p_{x+h|_{h+1}}V^n + q_{x+h}b_{h+1}]v - \pi_h$$

$${}_hV^g = [p_{x+h|_{h+1}}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})]v - (G_h - e_h)$$

La réserve pour l'année h est composée de :

- > La réserve au temps $h + 1$ si l'assuré survie l'année h et
- > la prestation payable (et frais encourus) à $h + 1$ si l'assuré décède lors de l'année h ,
- > actualisés de $h + 1$ à h ,
- > moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année h .

où

G_h La prime (gross premium) à recevoir à $t = h$;

e_h Les frais liés à la collecte de la prime (per premium expenses);

E_h Les frais liés au paiement de la prestation (settlement expenses).

Avec la réserve pour l'année $h + 1$ isolée :

$${}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h + 1$ isolé :

$$\underbrace{(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g$$

Note Si on a une assurance mixte dont la prestation est fonction de la réserve (e.g., $b_k = 1000 + {}_kV$), on commence de la fin puisqu'on sait que ${}_nV = M$.

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$${}_{h+s}V^g \approx ({}_hV^g + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V^g)(s), s \in (0,1)$$

Profit de l'assureur

Notation

N_h : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps h .

${}_{h+1}V^E$: Réserve totale pour l'année $h + 1$ du portefeuille selon l'intérêt (i), la mortalité (q_{x+h}) et les frais (e_h et E_h) **espérés** (Expected) pour l'année h .

${}_{h+1}V^A$: Réserve totale pour l'année $h + 1$ du portefeuille selon l'intérêt (i'), la mortalité (q'_{x+h}) et les frais (e'_h et E'_h) **réellement** (Actually) encourus lors de l'année h .

Le profit de l'assureur pour l'année h sera donc ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$.

Si uniquement _____ change(nt), alors le profit sur _____ pour l'année h est :

les frais $N_h [(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}]$.

l'intérêt $N_h ({}_hV^g + (G_h - e_h)) (i' - i)$.

la mortalité $(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g) (N_h q_{x+h} - N_h q'_{x+h})$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- > Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h ({}_hV^g + (G_h - e'_h)) (i' - i)$.
- > Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h [(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}]$.

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_tV$.

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tV^g = \delta_t {}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t}$$

- > Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps t .
- > Le montant est fixe et payé au début de l'année t .
- > Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à t .

on peut approximer ${}_hV^g$ avec la Méthode d'Euler :

$${}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h [(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}}$$

Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$${}_hV^e = DAC_h = VPA_{@t}(\text{frais}) - VPA_{@t}(\text{primes pour les frais futurs})$$

$$\equiv {}_hV^g - {}_hV^n$$

- > « expense reserve » ou « Deferred Acquisition Costs ».

› Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.

› Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^S = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

P^S : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute G).

P^n : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette P).

P^e : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^S - P^n$$

FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

π_0^{FTP} Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat} \\ \text{vie entière}}}{=} b v q_{[x]}$$

π_h^{FTP} Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \dots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat} \\ \text{vie entière}}}{=} b \frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- › Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition ;
- › Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contrat ;
- › Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple ;
- › Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première ;
- › **Note** : Lorsqu'on calcule la réserve FTP ${}_hV^{FTP}$ on n'a pas besoin de calculer π_0^{FTP} , on y va directement avec π_h^{FTP} .

2 Modèles à plusieurs états

${}_k Q_t^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état i au temps t à l'état j au temps $t+k$.

› De façon équivalente, ${}_k p_{x+t}^{ij}$.

M_t État au temps t parmi les $\{1, 2, \dots, r\}$ ou $\{0, 1, \dots, r\}$ états.

› De façon équivalente, $M(t)$.

› Le processus M_t est une "Chaîne de Markov" ssi $\forall t = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} Q_t^{(i,j)} &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, \dots, M_0) \\ &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i) \end{aligned}$$

Q_t Matrice des probabilités de transition.

› Les transitions sont en fin d'année.

› Si la matrice :

dépend du temps alors M_t est une chaîne de Markov **non-homogène**.

ne dépend pas du temps alors M_t est une chaîne de Markov **homogène**.

Également, dans ce cas-ci, on dénote Q_t par Q puisque $Q_t^{ij} = Q^{ij} \forall t \geq 0$

${}_k Q_t$ Matrice de k -étapes des probabilités de transition.

$${}_{m+n} Q_t^{(i,j)} = \sum_{k=1}^r {}_m Q_t^{(i,k)} {}_n Q_{t+m}^{(k,j)}$$

En temps continu

${}_k p_{x+t}^{ij}$ probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps $x+t$ soit dans l'état j (où j peut être égale à i) au temps $x+t+k$.

$${}_k p_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(t) = j | Y_x = i)$$

${}_k \bar{p}_{x+t}^{ij}$ probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps $x+t$ reste dans l'état i continuellement jusqu'au temps $x+t+k$.

$${}_k \bar{p}_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(s) = i, \underbrace{\forall s \in [0, t]}_{\text{sans sortir et revenir}} | Y_x = i)$$

$Y_x(t)$ Processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$ de l'état dont les transitions peuvent se produire à n'importe quel moment $t \geq 0$ et donc pas seulement en fin d'année.

› De façon équivalente, $Y(x+t)$.

› $Y_x(t) = i$ si l'assuré d'âge (x) est à l'état i au temps t (ou, à l'âge $x+t$).

Il s'ensuit que ${}_k p_{x+t}^{ij} \geq {}_k \bar{p}_{x+t}^{ij}$ car :

$${}_k p_{x+t}^{ij} = {}_k \bar{p}_{x+t}^{ij} + \Pr(Y_x(t) = i, \text{après avoir sorti et revenu} | Y_x = i)$$

Donc, pour le modèle actif (0) décédé (1), on substitue ${}_t p_x$ pour ${}_t \bar{p}_x^{00}$ (ou ${}_t p_x^{00}$ puisque décéder est un état absorbant) et ${}_t q_x$ pour ${}_t p_x^{01}$ avec la nouvelle notation.

Hypothèses

1. Le processus stochastique Y_t est une chaîne de Markov.

$$\Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i, Y_u, 0 \leq u < t) = \Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i)$$

2. Pour toute intervalle de longueur h ,

$$\Pr \left(\begin{array}{c} 2, \text{ ou plus, transitions} \\ \text{pendant une période de longueur } h \end{array} \right) = o(h)$$

› Une fonction $g \in o(h)$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.

3. Pour tous les états i et j et toute âge $x \geq 0$, ${}_t p_x^{ij}$ est différentiable par rapport à t .

μ_x^{ij} Force de transition de l'état i à l'état j pour un assuré d'âge (x) .

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{{}_h p_x^{ij} - {}_h p_x^{ii}}{h}, i \neq j$$

› Il s'ensuit que ${}_h p_x^{ij} = h \mu_x^{ij} + o(h)$.

Donc, ${}_h p_x^{ij} \approx h \mu_x^{ij}, i \neq j$ pour $h > 0$ très petit.

› Pour le modèle actif (0) décédé (1), μ_x^{01} est la force de mortalité μ_x .

Remarques

1. ${}_h p_x^{ii} = {}_h p_x^{ij} + o(h)$ où $o(h)$ est la probabilité de sortir et revenir de l'hypothèse 2.

2.

$${}_h p_x^{ij} \geq {}_h \bar{p}_x^{ij} = 1 - \sum_{j \neq i, j=0}^n {}_h p_x^{ij} + o(h) = 1 - h \sum_{j \neq i, j=0}^n \mu_x^{ij} + o(h)$$