Contributeurs

ACT-1002 Analyse probabiliste des risques actuariels

aut. Alec James van Rassel
aut., cre. Félix Cournoyer
src. Hélène Cossette

1 Chapitre 1 : Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire

Principe de base de comptage : Pour une expérience 1 avec m résultats possibles et une expérience 2 avec n résultats possibles, il y a m x n possibilités.

Permutations : Nombre d'arrangements en tenant compte de l'ordre. La façon de dénombrer les arrangements dépend du type de question.

Exemples : Combien de façons peut-on arranger les chiffres 1, 2, 3 et 4 dans un nombre à 4 chiffres ? La réponse est 4!. La réponse serait la même avec les chiffres 1, 2, 2 et 3, car les deux chiffres 2 ne sont pas considérés comme identiques.

Toutefois, si on demande combien de façons peut-on distribuer 12 cadeaux différents à 4 personnes, la réponse sera 4^{12} étant donné que chaque cadeau peut aller à quatre personnes.

Combinaisons : Nombre d'arrangements en **ne** tenant **pas** compte de l'ordre.

Exemples : En reprenant l'exemple des permutations, mais avec les chiffres 1, 1, 1, 2 et 2, il y aurait $5!/(3!2!)$ combinaisons puisque les trois 1 et les deux 2 sont considérés identiques.

Coefficient binomial : De l'exemple précédent, on peut observer l'existence du coefficient binomial, qui est défini selon la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Coefficient multinomial : La généralisation du coefficient binomial va comme suit :

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{(k_1)!\,(k_2)!\,...,(k_m)!}$$

Où $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$

Théorème multinomial : Le coefficient multinomial aide à trouver les coefficients devant les variables lors du développement de multinômes.

- Afin de mieux comprendre le théorème multinomial, voici un exemple :
  $$(-3x+5y^2)^4 = \sum \binom{4}{n_1, n_2} (-3x)^{n_1} (5y^2)^{n_2}$$
- Si on cherche le coefficient devant les variables x^3y^2, on remplace n_1 par 3 et n_2 par 1 et on obtient -540.

Solutions entières non-négatives : Le nombre de façons dont on peut distribuer un nombre d'objets indissociables dans des «contenants».

- Il peut y avoir aucun objet dans un «contenant».
- La solution à ce type de problème est donnée par $\binom{n+r-1}{r-1}$ où n est le nombre d'objets et r le nombre de «contenants».
- S'il est mentionné dans le problème qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les objets pour les mettre dans les contenants, on peut rajouter un contenant pour les objets «non-utilisés».

Solutions entières positives : Le nombre de façons dont on peut distribuer un nombre d'objets indissociables dans des «contenants» et ce, de façon à ce que chaque «contenant» ait au moins un objet.

- La solution à ce type de problème est donnée par $\binom{n-1}{r-1}$.

2 Chapitre 2 : Axiomes de probabilité

Domaine et définition

Random Process : Famille de variable aléatoires $\{X_t : t \in T\}$ qui associe un espace d'états Ω à un ensemble S.

Ω : L'espace d'états Ω est composé des événements possibles de la variable aléatoire X.

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $\Omega = \{\texttt{Face}, \texttt{Pile}\}$.

S : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω.

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $S = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

iid : Les variables aléatoire X_t doivent être indépendantes et identiquement distribuées. Ceci est dénoté par ***i.i.d.***.

indépendant : Si X_t est une variable aléatoire *iid* alors, pour 2 variables aléatoires X_i et X_j, où $i, j \in T$, le résultat de X_i n'a aucun impact sur le résultat de X_j pour tout $t \in T$.

identiquement distribué : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω.

Probabilité de X_t : La probabilité d'un événement X_t est dénoté $\Pr(X_t)$. Ces probabilités forment l'ensemble S.

Propriété : $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Pr(X_i) = 1$

Types de variables aléatoire : Il y a 2 types de variables aléatoire, les distributions *discrètes* et *continues*.

Discrète : Si l'ensemble S est dénombrable, c'est-à-dire que $S = \{s\}$, alors la variable aléatoire X est dite **discrète**.

Continue : Si l'ensemble S n'est pas dénombrable alors la variable aléatoire X est dite **continue**.

Concepts et opérations sur les ensembles

L'union (∪) : On peut le définir par un ou. Si l'événement A est d'avoir 3 sur un dé et l'événement B est d'avoir 4 sur ce même dé, les résultats possibles de A∪B est 3 et 4.

L'intersection (∩) : On peut le définir par un et. Si l'événement A est d'avoir un chiffre pair sur un dé et que l'événement B est d'avoir 5 ou 6 sur ce même lancer de dé, le résultat de A∩B est 6, car 6 est un nombre pair et fait partie de l'ensemble B.

Complémentaire : Un événement quelconque est le complémentaire d'un événement A lorsqu'il correspond à tous les résultats de Ω excluant les résultats de A. Un exemple est l'événement «Avoir un nombre pair sur un dé»; un événement complémentaire serait donc «Avoir un nombre impair sur un dé». Le complémentaire d'un événement A est désigné par $\overline{A}$, A^c et A^t.

«Somme d'unions»($\bigcup_{i=1}^{n} A_i$) : Représentation plus simple et courte de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

«Somme d'intersections»($\bigcap_{i=1}^{n} A_i$) : Représentation plus simple et courte de $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Opérations sur les ensembles : Les événements peuvent agir à un certain point comme des termes mathématiques, c'est-à-dire qu'on peut effectuer des opérations avec ceux-ci.

Commutativité : $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$

$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$

Associativité : $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$

$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$

Distributivité : $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

$(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$

Loi de DeMorgan : $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)$
$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c)$

Axiomes de probabilité

Définition : Des axiomes de probabilités sont en quelque sorte des règles, des contraintes ou des formules relatives aux probabilités.

Axiomes de probabilité

3 Chapitre 3 : Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Conditionnel : La probabilité que A arrive *sachant* que B est arrivé est :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

où la probabilité que B arrive est non-nulle, $\Pr(B) > 0$.

Indépendant : Les événements A et B sont indépendant si :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Avec la première définition de la probabilité conditionnelle, on peut trouver ces résultats :

Relation probabilité conditionnelle : La probabilité que l'événement E_2 ai lieu sachant que l'événement E_1 à déjà eu lieu est équivalent à la probabilité que l'événement E_1 ai lieu sachant que E_2 à *déjà* eu lieu multiplié par la probabilité que l'événement E_2 ai lieu peu importe E_1.
Le tout est encore pondéré par la probabilité que l'événement E_1 ai lieu peu importe si E_2 y a.

$$\begin{aligned}\Pr(E_2|E_1) &= \frac{\Pr(E_2 \cap E_1)}{\Pr(E_1)} \\ &= \frac{\Pr(E_1|E_2)\Pr(E_2)}{\Pr(E_1)}\end{aligned}$$

Loi des probabilités totales : Les probabilités liées à la variable aléatoire E lorsqu'elles sont conditionnelles à la variable aléatoire discrète F est dénoté comme suit :

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)$$

Formule de Bayes : On combine les deux résultats précédent :

$$\Pr(F_i|E) = \frac{\Pr(E|F_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)}$$