Bases de processus aléatoire

Domaine et définition

Random Process : Famille de variable aléatoires $\{X_t : t \in T\}$ qui associe un espace d'états Ω à un ensemble S.

Ω : L'espace d'états Ω est composé des événements possible de la variable aléatoire X.

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $\Omega = \{\texttt{Face}, \texttt{Pile}\}$.

S : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω.

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $S = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

iid : Les variables aléatoire X_t doivent être indépendantes et identiquement distribuées. Ceci est dénoté par ***i.i.d.***.

indépendant : Si X_t est une variable aléatoire *iid* alors, pour 2 variables aléatoire X_i et X_j, où $i, j \in T$, le résultat de X_i n'a aucun impact sur le résultat de X_j pour tout $t \in T$.

identiquement distribué : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω.

Probabilité de X_t : La probabilité d'un événement X_t est dénoté $\Pr(X_t)$. Ces probabilité forment l'ensemble S.

Propriété : $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Pr(X_i) = 1$

Types de variables aléatoire : Il y a 2 types de variables aléatoire, les distributions *discrètes* et *continues*.

Discrète : Si l'ensemble S est dénombrable, c'est-à-dire que $S = \{s\}$, alors la variable aléatoire X est dite **discrète**.

Continue : Si l'ensemble S n'est pas dénombrable alors la variable aléatoire X est dite **continue**.

Probabilité conditionnelle

Conditionnel : La probabilité que A arrive *sachant* que B est arrivé est :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

où la probabilité que B arrive est non-nulle, $\Pr(B) > 0$.

Indépendant : Les événements A et B sont indépendant si :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Avec la première définition de la probabilité conditionnelle, on peut trouver ces résultats :

relation probabilité conditionnelle : La probabilité que l'événement E_2 ai lieu sachant que l'événement E_1 à déjà eu lieu est équivalent à la probabilité que l'événement E_1 ai lieu sachant que E_2 à *déjà* eu lieu multiplié par la probabilité que l'événement E_2 ai lieu peu importe E_1.
Le tout est encore pondéré par la probabilité que l'événement E_1 ai lieu peu importe si E_2 y a.

$$\begin{aligned}\Pr(E_2|E_1) &= \frac{\Pr(E_2 \cap E_1)}{\Pr(E_1)} \\ &= \frac{\Pr(E_1|E_2)\Pr(E_2)}{\Pr(E_1)}\end{aligned}$$

Loi des probabilités totale : Les probabilités liées à la variable aléatoire E lorsqu'elles sont conditionnelles à la variable aléatoire discrète F est dénoté comme suit :

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)$$

Formule de Bayes : On combine les deux résultats précédent :

$$\Pr(F_i|E) = \frac{\Pr(E|F_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)}$$