1 Distribution multivariées

1.1 Classes de Fréchet

Soit $F_1, \ldots, F_n$ des fonction de répartition univariées et $F_{\mathbf{X}} = F_{X_1,\ldots,X_n}$ la fonction de répartition du vecteur **X**.
On définit la classe de Fréchet $CF(F_1, \ldots, F_n)$ par l'ensemble des fonctions de répartition $F_{\mathbf{X}}$ dont les marginales sont $F_1, \ldots, F_n$.

1.1.1 Bornes d'une classe de Fréchet

Si $F_{\mathbf{X}} \in CF(F_1, \ldots, F_n)$, alors
$$W(x_1, \ldots, x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \leq M(x_1, \ldots, x_n)$$
où
$$W(x_1, \ldots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1); 0\right)$$
$$M(x_1, \ldots, x_n) = \min\left(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\right)$$

Preuve des bornes à savoir !

1.2 Comonotonicité

Les composantes de **X** sont dites comonotones si $X_i = F_{X_i}(U)$, $i = 1, \ldots, n$ et $U \sim U(0,1)$.

1.2.1 Algorithme

1. Simuler $U^{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$
2. Calculer $X_i^{(j)} = F_{X_i}(U^{(j)}), i = 1, \ldots, n$

variable comonotone et la borne supérieure de Fréchet

Le vecteur **X** a des composantes comonotones ssi
$$F_{\mathbf{X}(x_1,\ldots,x_n)} = M(x_1, \ldots, x_n)$$
Preuve à savoir

Additivité des VaR et $TVaR$

On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(U) = \varphi(U)$, où φ est une fonction croissante pour $y \in (0,1)$. Alors, on a
$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i)$$
$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i)$$
Preuve à savoir

1.3 Antimonotonicité

Un couple de v.a.[1] $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ dont les composantes sont définies par $X_1 = F_{X_1}(U)$ et $X_2 = F_{X_2}(1-U)$ est antimonotone par définition.

1.3.1 Algorithme

1. Simuler $U_{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$
2. Calculer $X_1^{(j)} = F_{X_1}(U^{(j)})$ et $X_2^{(j)} = F_{X_2}(1 - U^{(j)})$

variable antimonotone et la borne inférieure de Fréchet

Le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ a des composantes antimonotone ssi
$$F_{\mathbf{X}(x_1,x_2)} = W(x_1, x_2)$$
Preuve à savoir

1.4 Loi de Poisson bivariée Teicher

- Couple de v.a. (M_1, M_2) dont les marginales sont $Pois(\lambda_1)$ $Pois(\lambda_2)$
- paramètre de dépendance α_0 avec $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$
- $\alpha_1 = \lambda - \alpha_0$ et $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$
- On définit les v.a. M_1 et M_2 telles que (avec $K_i \sim Pois(\alpha_i)$)
  $$M_1 = K_1 + K_0 \text{ et } M_2 = K_2 + K_0$$
  avec $M_i \sim Pois(\lambda_i)$

1.4.1 Fonction de masse de probabilité (fmp)

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = e^{-\lambda_i - \lambda_2 + \alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1, m2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1 - j}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2 - j}}{(m_2 - j)!}$$

1. L'antimonotonicité est seulement définie pour $n = 2$.

Preuve à savoir

1.4.2 Fonction génératrice des probabilités (fgp)

$$P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) = e^{(\lambda_1-\alpha_0)(t_1-1)}e^{(\lambda_2-\alpha_0)(t_2-1)}e^{\alpha_0(t_1t_2-1)}$$

Preuve à savoir

Covariance de M_1 et M_2 $\mathrm{Cov}\left(M_1,M_2\right) = \mathrm{Var}\left(K_0\right) = \alpha_0$ Preuve à savoir

1.4.3 Connaître la loi de $N = M_1 + M_2$

À terminer

1.5 Loi exponentielle bivariée EFGM

fonction de répartition La fonction de répartition est

$$\begin{aligned}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= (1-e^{-\beta_1x_1})(1-e^{-\beta_2x_2})\\ &\quad + \theta(1-e^{-\beta_1x_1})(1-e^{-\beta_2x_2})e^{-\beta_1x_1}e^{-\beta_2x_2}\end{aligned}$$

fgm Il faut savoir prouver que la fgm est

$$\begin{aligned}M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right)\\ &\quad -\theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right)-\theta\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right)\\ &\quad +\theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right)\end{aligned}$$

Coefficient de corrélation Il faut savoir prouver que la coefficient de corrélation est

$$\rho_P(X_1,X_2) = \frac{\theta}{4}$$

Fonction de densité On peut obtenir la fonction de densité de la loi exponentielle bivariée en dérivant 2 fois

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

2 Annexe

2.1 Les 3 formes explicites de la $TVaR$

Pour la $TVaR$, il y a 3 preuves à bien connaître :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
TvaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (\underbrace{VaR_u(X)}_{\text{fonction quantile}} - VaR_\kappa(X))du + \underbrace{\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X)du}_{\text{intégration d'une constante}} \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)) \underbrace{f_U(u)}_{U\backsim Unif(0,1)} du \\
&+ \frac{1}{\cancel{1-\kappa}} VaR_\kappa(X)(\cancel{1-\kappa}) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(\underbrace{F_X^{-1}(U)}_{F_X^{-1}\backsim X} - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)
\end{aligned}$$

□

à partir de la preuve ci-dessus, on peut démontrer celle-ci :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa}E[VaR_\kappa(X) \times \underbrace{1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}}_{=S_X(VaR_\kappa(X))}] \\
&+ VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1 - F_X(VaR_\kappa(X))) \\
&+ \frac{1-\kappa}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(-1 + F_X(VaR_\kappa(X)) + 1 - \kappa)}{1-\kappa} \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}
\end{aligned}$$

□

Une dernière preuve fortement utilisée pour la $TVaR$, qui découle directement de la dernière :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa}$$

Démonstration. Étant donné que cette formule ne fonctionne seulement que pour une v.a. continue, elle est très facile à prouver :

$$\text{si } X \text{ est continue,} \quad \forall x, F_X(VaR_\kappa(X))) = \kappa$$

Alors, on peut enlever la partie de droite de l'équation. □