Contributeurs

ACT-1002 Analyse probabiliste des risques actuariels

aut. Alec James van Rassel
aut., cre. Félix Cournoyer
src. Hélène Cossette

1 Analyse combinatoire

1.1 Outils d'analyse combinatoire

Principe de base de comptage

Pour une expérience 1 avec m résultats possibles et une expérience 2 avec n résultats possibles, il y a $m * n$ résultats possible pour les deux expériences ensemble. Ce résultat peut être généralisé pour r expériences, où il y aurait $n_1 * n_2 * ... * n_r$ possibilités.

Permutations

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments **distincts** et où **l'ordre est important**, le nombre total de possibilités est représenté par $n!$.

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments de k types différents dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, ..., n_k sont identiques, et **où l'ordre est important**, le nombre total de possibilités est représenté par

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_k!}.$$

Combinaisons

Lorsqu'on s'intéresse au nombre de groupes possibles de k éléments parmi n et **où l'ordre n'est pas important**, le nombre total de possibilités est représenté par $\binom{n}{k}$.

Notation

De l'exemple précédent, on peut observer l'existence du coefficient binomial, qui est défini selon la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemples classiques sur les permutations et les combinaisons

1. **Combien de façons différentes peut-on placer 4 livres distincts sur une étagère ?** C'est une permutation entre 4 éléments. La réponse est $4!$.

2. **Combien d'arrangements ordonnées différents peut-on faire avec les lettres du mot LAVAL ?**

   C'est une permutation d'un ensemble qui contient deux paires d'éléments semblables. Donc, la réponse est $\frac{5!}{2!2!1!}$.

3. **Combien de façons différentes peut-on distribuer 12 cadeaux différents à 4 personnes ?**

   Attention ! Ici, il faut bien voir que pour chaque cadeau, il y a 4 possibilités (et non l'inverse !). Donc, la réponse est 4^{12}.

   Dans ce numéro, il faut aussi faire attention au fait qu'on précise que les cadeaux sont distincts (donc qu'on différencie les cadeaux). Si ce n'était pas le cas, il s'agirait d'un numéro sur des éléments indissociables.

4. **Combien de groupes différents de 2 jouets peut-on faire avec 6 jouets ?** La réponse est $\binom{6}{2}$.

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Théorème du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Coefficient multinomial

La généralisation du coefficient binomial va comme suit :

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * ... * k_m!}$$

où $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$. Cette formule est utile si on veut séparer des éléments à travers plusieurs groupes.

Coefficient multinomial (suite)

Par exemple, si j'ai 10 jouets à séparer à travers 3 enfants, dont le premier en veut 5, le deuxième en veut 2, et le troisième en veut 3, le nombre de possibilités est donné par $\binom{10}{5,2,3}$.

Si cette fois-ci on différencie les groupes, et qu'on ne sait pas quel groupe aura quel nombre d'objets, il faut multiplier le coefficient multinomial de la façon suivante :

$$coefficient\ multinomial * \frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_n!}$$

où n correspond au nombre de groupes et n_i correspond au nombre de groupes dans lesquels i éléments ont été placés.

Par exemple, si cette fois-ci on dit qu'il faut séparer 10 jouets à travers 3 enfants en donnant 3 jouets à 2 enfants et 4 jouets à l'autre enfant, sans spécifier quel enfant recevra 4 jouets, le résultat sera :

$$\binom{10}{3,3,4} * \frac{3!}{1!2!}.$$

Théorème multinomial

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$$

1.2 Nombre de solutions entières

Nombre de solutions entières

Dans certains cas, on s'intéressera au nombre de façons dont on peut distribuer des éléments indissociables dans des contenants. Ainsi, c'est le nombre d'éléments dans chaque contenant qui nous intéressent, et non quel élément va dans quel contenant. On peut ramener ce problème à une équation de la forme suivante :

$$k_1 + k_2 + ... + k_r = n$$

où k_i correspond au nombre d'éléments dans le contenant i et n le nombre d'éléments à placer dans les contenants. On essaie donc de trouver le nombre de combinaisons possibles de k_1, k_2, ..., k_r.

Nombre de solutions entières (suite)

Voici une façon de résoudre les problèmes reliés au nombre de solutions entières :

- S'il faut placer au moins un élément dans chaque contenant (donc $k_i \geq 1$ pour tout i), on peut appliquer la formule : $\binom{n-1}{k-1}$.
- S'il n'y a pas de contraintes en lien avec le nombre d'éléments à placer (donc $k_i \geq 0$ pour tout i), on peut appliquer la formule : $\binom{n+k-1}{k-1}$.
- Si on mentionne dans l'énoncé qu'on peut ne pas distribuer tous les éléments, on rajoute un contenant de plus à l'équation (le nombre d'éléments dans ce contenant sera plus grand ou égal à 0).
- S'il y a une contrainte supérieure, on fait le problème sans tenir compte de cette contrainte, et on enlève le nombre de cas ne respectant pas la contrainte par la suite.
- Si la contrainte inférieure varie d'un contenant à un autre, ou si elle est supérieure à 2, on applique la stratégie suivante.

  Par exemple, il y a 10 balles à placer dans trois urnes : la première urne qui doit en contenir au minimum 0, la deuxième urne qui doit en contenir au minimum 1 et la troisième urne qui doit en contenir au minimum 3. on obtient ainsi l'équation ci-dessous :

  $$k_1 + k_2 + k_3 = 10.$$

  Ici, on va poser $y_1 = k_1 + 1$, $y_2 = k_2$ et $y_3 = k_3 - 2$ afin que $y_1 \geq 1$ pour tout i. On réécrit l'équation ci-dessus de la façon suivante :

  $$\begin{aligned} y_1 - 1 + y_2 + y_3 + 2 = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 9. \end{aligned}$$

  On peut par la suite calculer le nombre de possibilités en utilisant la formule lorsque le nombre d'éléments dans chaque contenant doit être plus grand ou égal à 1 : $\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2}$ possibilités.

2 Axiomes de probabilité

2.1 Définitions importantes

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est un processus dont on ne peut pas prédire le résultat, mais uniquement l'ensemble de tous les résultats possibles.

Espace échantillonal

L'espace échantillonal est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On dénote cet espace par Ω ou S.

Évènement

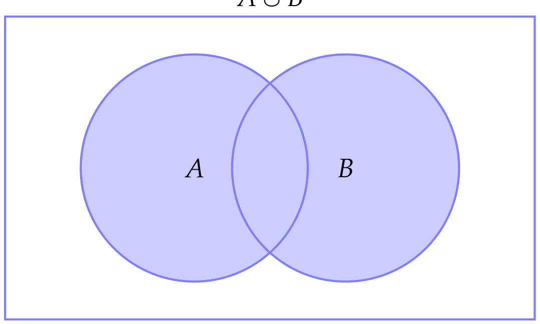
Un évènement est un sous-ensemble d'un espace échantillonal. On dénote l'évènement par une lettre majuscule A, B, C, etc.

2.2 Opérations sur les ensembles

L'union ($\cup$) : On peut le voir comme un « ou ». Lorsqu'il est utilisé, on s'intéresse à savoir si un élément est présent dans au moins un des ensembles.

- Si l'événement A est d'avoir 3 sur un dé et l'événement B est d'avoir 4 sur ce même dé, les résultats possibles de $A \cup B$ est 3 et 4.

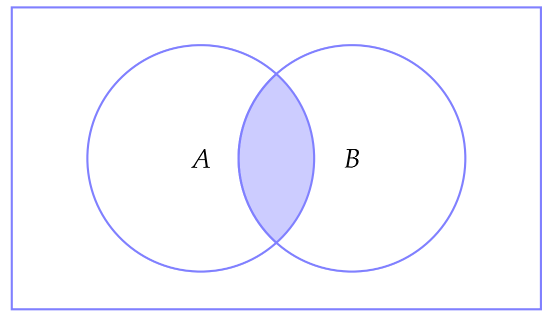
$A \cup B$



L'intersection ($\cap$) : On peut le voir comme un « et ». Lorsqu'il est utilisé, on s'intéresse à savoir si un élément est présent dans tous les ensembles impliqués.

- Si l'événement A est d'avoir un chiffre pair sur un dé et que l'événement B est d'avoir 5 ou 6 sur ce même lancer de dé, le résultat de $A \cap B$ est 6, car 6 est un nombre pair et fait partie de l'ensemble B.
- Une notation alternative est de simplement écrire AB.

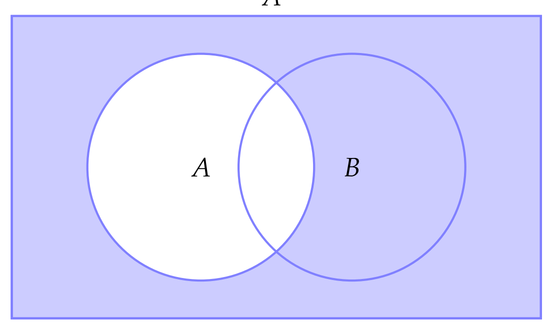
$A \cap B$



Complémentaire : Un événement quelconque est le complémentaire d'un événement A lorsqu'il correspond à tous les résultats de Ω excluant les résultats de A.

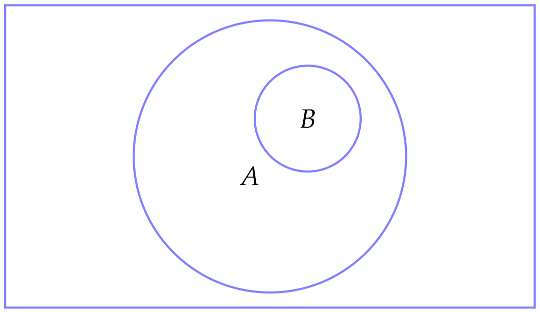
- Un exemple est l'événement « Avoir un nombre pair sur un dé » ; un événement complémentaire serait donc « Avoir un nombre impair sur un dé ».
- Le complémentaire d'un événement A est désigné par $\overline{\text{A}}$, A^c et A^t.

A^c



Inclusion ($\subset$) : Afin de dire que l'évènement B est comprise dans l'évènement A, on peut écrire le tout avec la notation suivante $B \subset A$. On peut donc dire que tous les éléments de l'évènement B se retrouvent aussi dans l'évènement A.

$B \subset A$



Propriétés des ensembles

Commutativité :

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$$
$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$$

Associativité :

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$
$$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$$

Distributivité :

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$$
$$(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$$

Loi de DeMorgan :

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)$$
$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c)$$

2.3 Axiomes de probabilité

Axiomes de probabilité

Supposons que pour chaque évènement E de Ω (espace échantillonal d'une expérience aléatoire), il existe un nombre $\Pr(E)$. On peut appeler ce nombre $\Pr(E)$ la probabilité de E si celle-ci satisfait les axiomes ci-dessous. Autrement dit, ces axiomes sont des règles que les probabilités se doivent de respecter :

1) $0 \leq \Pr(A) \leq 1$

2) $\Pr(\Omega) = 1$

3) Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors $\Pr(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$

Relations à savoir

1) $\Pr(\emptyset) = 0$

2) $\Pr(E^c) = 1 - P(E)$

3) Si $E \subset F$, alors $\Pr(E) \leq \Pr(F)$

4) (Formule de Poincaré)

$$\begin{aligned}\Pr(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = &\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \Pr(E_{i_1} E_{i_2}) + ... + \\ &(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r} \Pr(E_{i_1} E_{i_2} ... E_{i_r}) + ... + \\ &(-1)^{n+1} \Pr(E_1 E_2 ... E_n)\end{aligned}$$

› À deux évènements, on obtient :

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

› À trois évènements, on obtient :

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B \cup C) = &\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \\ &\Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \\ &\Pr(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

D'autre relations peuvent être déduites à l'aide d'un diagramme de Venn. Il faut toutefois utiliser la notation probabiliste à travers les calculs. Un diagramme de Venn **ne suffit pas**.

2.4 Résultats équiprobables

Résultats équiprobables

Si chaque élément de Ω a la même chance de se réaliser, on peut trouver la probabilité qu'un évènement A se réalise à l'aide de la formule suivante :

$$\Pr(A) = \frac{\textit{Nombre de résultats dans } A}{\textit{Nombre de résultats dans } \Omega}$$

Par exemple, si on cherche la probabilité d'obtenir un nombre pair au cours d'un lancer de dé, on peut utiliser la formule ci-dessus, car il y a autant de chances d'obtenir chacun des côtés d'un dé au cours d'un lancer. Ainsi, P(Obtenir un nombre pair) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Notation

Notation

On utilise la notation suivante afin de désigner la probabilité que l'évènement A se réalise sachant que l'évènement B s'est réalisé : $\Pr(A|B)$.

3.2 Relations à savoir

Relations à savoir

1) On obtient tout d'abord :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

2) On peut calculer $\Pr(A \cap B)$ des deux façons suivantes :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) * \Pr(B)$$
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) * \Pr(A)$$

On peut également généraliser ce résultat pour n évènements en utilisant la règle de multiplication :

$$\Pr(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = \Pr(E_1)\Pr(E_2|E_1 \cap E_2)...\Pr(E_n|E_1 \cap E_2 ... \cap E_{n-1})$$

3) On peut réécrire l'équation du point 1 de la façon suivante (à l'aide du point 2) :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

4) (Loi des probabilités totales)

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)$$

Pour pouvoir appliquer cette relation, il faut que F_i forment une partition de Ω, c'est-à-dire que $\Pr(F_1) + \Pr(F_2) + ... + \Pr(F_n) = 1$ et qu'il n'y ait aucun élément en commun pour aucune paire de F_i (donc que $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour toutes paires de i et j.

Relations à savoir (suite)

5) (Théorème de Bayes) Si on reprend la formule du point 3, et qu'on applique la loi des probabilités totales au dénominateur, j'obtiens la formule de Bayes.

$$\begin{aligned}\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{Pr(B|A) * \Pr(A)}{Pr(B|A) * \Pr(A) + \Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}\end{aligned}$$

On peut également généraliser ce résultat pour un ensemble d'évènements $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ qui forment une partition de Ω.

$$\Pr(F_j|E) = \frac{\Pr(E|F_j)\Pr(F_j)}{\sum_{i=1}^{n}\Pr(E|F_i)\Pr(F_i)}$$

Indépendance

S'il y a indépendance entre les évènements (A et B par exemple), les relations suivantes sont vraies :

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

On peut également généraliser ces relations lorsqu'il y a plusieurs évènements indépendants entre eux.

Démarche afin de répondre aux questions contextuelles du chapitre 2 et 3

Pour ce qui est des questions contextuelles (donc avec une mise en situation) portant sur les éléments du chapitre 2 et du chapitre 3, voici la démarche à suivre.

Exemple : Il y a deux types d'assurés, les bons et les mauvais. La probabilité qu'un bon assuré ait au moins 1 accident au cours de l'année est de 20%. La probabilité qu'un mauvais assuré n'ait pas d'accident au cours d'un année est de 70%. Il y a 3 fois plus de bon asssurés que de mauvais assurés. Quelle est la probabilité que, sachant qu'un assuré a eu au moins un accident au cours de l'année, que celui-ci soit un mauvais assuré ?

1) Il faut bien définir les évènements.

A : L'assuré est un bon assuré.
B : L'assuré a au moins 1 accident au cours de l'année.

2) Il faut bien définir les informations présentes dans le texte sous notation probabiliste. La notation doit être cohérente avec la définition des évènements.

$$\Pr(A) = 3\Pr(A^c)$$
$$\Pr(B|A) = 0.2$$
$$\Pr(B^c|A^c) = 0.7$$

3) Il faut bien définir l'information recherchée sous notation probabilitste. Encore une fois cette notation doit être cohérente avec la définition des évènements.

On cherche $\Pr(A^c|B)$.

4) Selon les informations données, on applique une des relations présentées dans le chapitre 2 ou dans le chapitre 3. Cette partie est la plus difficile, et c'est à force de faire des numéros qu'on reconnait quelle relation utilisée.

Dans ce cas-ci, on peut développer la probabilité recherchée de la façon suivante :

$$\Pr(A^c|B) = \frac{\Pr(A^c \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Puisque je n'ai aucune information sur $\Pr(A^c \cap B)$ et sur $\Pr(B)$, je développe cette formule pour obtenir le théorème de Bayes :

$$\frac{\Pr(A^c \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}{Pr(B|A) * \Pr(A) + \Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}.$$

Ici, je peux trouver $\Pr(A)$, $\Pr(A^c)$ et $\Pr(B|A^c)$ à l'aide de la relation qui relie les probabilités d'évènement complémentaires.

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c)$$
$$3\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A^c)$$
$$\Pr(A^c) = \frac{1}{4}$$

Et donc, $\Pr(A^c) = \frac{1}{4}$ et $\Pr(A) = \frac{3}{4}$. Pour trouver $\Pr(B|A^c)$:

$$\Pr(B|A^c) = 1 - \Pr(B^c|A^c) = 0.3.$$

En remplaçant ces valeurs dans la formule de Bayes (et en utilisant $\Pr(B|A) = 0.2$, soit une information qui nous était déjà fournie), on obtient

$$\Pr(A^c|B) = \frac{1}{3}.$$

4 Chapitre 4 : Variable aléatoire discrète

La variable aléatoire

Définition : Nous avons déjà vu que les événements sont délimités par l'ensemble échantillonal S, c'est-à-dire les résultats possibles de l'événement. La variable aléatoire, disons X, sera une fonction de cet ensemble S (S $\in \mathbb{R}$).
Le support, que l'on peut comparer à l'image de la fonction, d'un événement X est composé des résultats possibles d'une expérience, par exemple [0, 1] ou encore un ensemble dénombrable comme {0, 1/2, 1}.
Pour bien comprendre la différence entre l'espace échantillonal et le support de X, voici un petit exemple :
On lance une pièce de monnaie deux fois et on définit la variable aléatoire X comme étant le nombre de faces obtenus. L'espace échantillonal de l'expérience est {(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)} et le support de X est de {0, 1, 2}.

Fonction de masse de probabilité : La probabilité d'avoir un résultat égal à x. Cette fonction est définie par $\Pr(X = x_i)$

Fonction de répartition ($F_X(x)$) : La probabilité d'avoir un résultat inférieur à x.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \Pr(X = x_i) \end{aligned}$$

Pour illustrer la fonction de répartition, on peut s'imaginer un lancer de dé et définir X comme le résultat du lancer. $F_X(2)$, par exemple, donnerait alors $1/3$ car seuls les résultats 1 et 2 sont considérés sur l'ensemble des 6 possibilités.

Propriétés de la fonction de répartition : La valeur de la fonction de répartition se situe toujours entre 0 et 1, ce qui est logique étant donné que la somme de toutes les probabilités est toujours égale à 1 et qu'il n'existe pas de probabilité inférieure à 0.
La fonction est aussi toujours non-décroissante, car il est impossible de perdre des probabilités alors que les probabilités qui s'ajoutent à mesure que x augmente sont toujours supérieures à 0 (pour une variable aléatoire discrète, cela donne une fonction en escalier à droite).
On sait donc que $F_X(a) \leq F_X(b)$ pour a < b. On peut alors trouver que Pr(a < X $\leq$ b) = $F_X(b) - F_X(a)$.

Fonction de répartition inverse ($F_X^{-1}(u)$) : Aussi nommée la fonction quantile, cette fonction sert à déterminer quel résultat correspond à une quantité u de probabilités accumulées. Par exemple, si je prends un u de 0,5, le résultat sera la médiane.
Cela fonctionne de la façon suivante : on remplace le x de la fonction de répartition par u et cette nouvelle fonction est mise égale à x et on isole le u. Autrement dit, il faut trouver une fonction réciproque.

Espérance : L'espérance correspond à une moyenne pondéré des probabilités où les pondérations correspondent aux différents valeurs que peut prendre la variable X. Elle est définie de la façon suivante :

$$E[X] = \sum_i x_i * \Pr(X = x_i)$$

. L'espérance correspond au résultat espéré lors de l'expérience. Par exemple, l'espérance d'une expérience consistant à lancer un dé serait 3.5. De plus,
il est possible de calculer l'espérance d'une fonction $g(X)$. L'espérance, dans ce cas-ci, est définie de la façon suivante : $E[g(X)] = \sum_i g(x_i) * \Pr(X = x_i)$.

Propriétés de l'espérance : L'espérance est un opérateur linéaire. Ainsi, $E[2x^2 + 6x + 5]$ peut se réécrire, une fois simplifiée, $2E[X^2] + 6E[X] + 5$. Aussi, si $g(x) \leq h(x), \forall x$, alors $E[g(x)] \leq E[h(h)]$.

Variance : La variance est une mesure de dispersion qui se trouve à être la moyenne du carrée des écarts entre x et sa moyenne. La variance est définie de la façon suivante : $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$. En développant cette expression, on retrouve l'expression davantage utilisée en probabilité, soit $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. Afin de calculer la variance on trouve habituellement le premier et le deuxième moment de X et on remplace dans la formule.
De plus, la variance n'est pas un opérateur linéaire. Cependant, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ où a et b sont des constantes réelles.