

## Rappel de Math. financière

### Facteurs d'actualisation

Où les dénominateurs sont à être interprété en REGEX.

Pour exemple, pour la première c'est soit le **taux d'escompte** pour une **annuité due** ou le taux d'intérêt pour une immédiate.

$$\begin{aligned}
 a(t) &= (1+i)^t = (1-d)^{-t} & v(t) &= (1+i)^{-t} = (1-d)^t \\
 &= e^{\int_0^t \delta_s ds} & &= e^{-\int_0^t \delta_s ds} \\
 i &= \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 & d &= \frac{i}{1+i} & i^R &= \frac{i-r}{1+r} \\
 \ddot{a}_{\overline{m}|}^{(m)} &= \frac{1-v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} & \ddot{s}_{\overline{m}|}^{(m)} &= \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \\
 \ddot{a}_{\infty} &= \frac{1}{(i|d)} \\
 (I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{m}|}^{(m)} &= \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|}^{(m)} - nv^n}{(i|d^{(m)})} & (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{m}|}^{(m)} &= \frac{n - a_{\overline{m}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})} \\
 (I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{m}|}^{(m)} &= \frac{\ddot{s}_{\overline{m}|}^{(m)} - n}{(i|d^{(m)})} & (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{m}|}^{(m)} &= \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{m}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}
 \end{aligned}$$

### Sommutations

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n r^k &= r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r} & \sum_{k=0}^{\infty} kv^k &= \frac{v}{(1-v)^2} \\
 \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

## 1 Survie et mortalité

### 1.2 Probabilités de survie et de décès

$X$  : Âge au décès d'un nouveau-né

$T_x$  : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge  $x$ .

$$\begin{aligned}
 T_x &= (X - x | X \geq x) \\
 f_{T_x} &= {}_t p_x \mu_{x+t} \\
 F_{T_x} &= {}_t q_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)} \\
 \Pr(t \leq T_x \leq t+u) &= {}_t | u q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t} = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x \\
 {}_{t+y} q_x &= {}_t q_x + {}_t p_x \cdot {}_y q_{x+t} \\
 S_{T_x}(t) &= \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+s} ds \right\} = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \mu_s ds \right\} \\
 T_x &\in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

$K_x$  : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge  $x$ .  
 $K_x = \lfloor T_x \rfloor$

$$\begin{aligned}
 \Pr(K_x = k) &= \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_k | p_x \\
 K_x &\in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned}$$

$\mu_x$  : Force de mortalité pour  $(x)$

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x} (\ln(S_X(x)))$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\ln({}_t p_x))$$

$$\alpha \mu_{x+s} + h(s) = ({}_t p_x)^\alpha e^{-\int_0^t h(s) ds}$$

$R_x$  : Durée de vie résiduelle fractionnaire d'un individu d'âge  $x$ .

$$R_x = T_x - K_x$$

$$R_x \in [0, 1)$$

$J_x^{(m)}$  : Nombre de m-ème d'années vécus durant l'année du décès.

$$J_x^{(m)} = \lfloor m R_x \rfloor$$

$$J_x^{(m)} \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

$H_x^{(m)}$  : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge  $x$  exprimé en m-ème années.

$$H_x^{(m)} = \lfloor m T_x \rfloor$$

$$H_x^{(m)} \in \mathbb{Z}^+$$

### 1.3 Loïs de mortalité

#### Loi de Moivre

Pas très réaliste car assume une chance **uniforme** de mourir n'importe quand alors qu'en réalité une personne âgée de 90 ans a des plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans.  
 C'est la seule loi avec un **support fini**.

$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$

$${}_t p_x = 1 - \frac{t}{\omega - x} \quad \mu_x = \frac{1}{\omega - x} \quad {}_k | q_x = \frac{1}{\omega - x}$$

Généralisation :

$${}_t p_x = \left(1 - \frac{t}{\omega - x}\right)^\alpha \quad \mu_x = \frac{\alpha}{\omega - x} \quad \ell_x = \frac{\omega - x}{\alpha + 1}$$

#### Loi Exponentielle

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \quad {}_t p_x = e^{-\mu t}$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

#### Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A, B, c)$$

$A$  : risque d'accident

$Bc^x$  : risque lié au vieillissement

$$\mu_x = A + Bc^x \quad {}_t p_x = e^{-At - \frac{Bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)}$$

### Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B, c)$$

### Loi de Weibull

$$X \sim \text{Weibull}(k, n)$$

$$\mu_x = kx^n \quad {}_t p_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]}$$

### 1.4 Tables de mortalité

$\ell_0$  : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

$\ell_x$  : Nombre d'individus de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge  $x$ .

${}_n d_x$  : Nombre de décès entre l'âge  $x$  et  $x+n$ .

$$\ell_x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x} \quad {}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t | u q_x = \frac{{}_u d_{x+t}}{\ell_x}$$

### 1.5 Mortalité sélecte et ultime

$[x]$  : âge de la sélection (*pas une valeur entière*).

$[x] + j$  : âge atteint où  $j$  est le temps écoulé depuis la sélection.

$r$  : **Période sélecte** de durée  $r$  durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \dots$$

$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]r+j} p_{[x]} = \ell_{[x]r} p_{[x]} p_{x+r}$$

### 1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Pour  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Distribution uniforme des décès (DUD)**

Décès répartis uniformément sur l'année.

$$S_X(x+t) = (1-t) \times S_X(x) + t \times S_X(x+1), \quad t \in [0, 1]$$

$$S_X(x+t) = \frac{(c-t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x+1), \quad t \in [0, c]$$

les conditions pour  $t$  et  $x$  appliquent aux 3 équations suivantes

$${}_t q_x = \left(\frac{t}{c}\right) {}_c q_x, \quad t \in [0, c]$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c} {}_c q_x}{1 - \frac{t}{c} {}_c q_x}, \quad x \in \{0, c, 2c, \dots\}$$

$${}_y q_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right) {}_c q_x}{1 - \left(\frac{t}{c}\right) {}_c q_x}, \quad y \in [0, c - t]$$

On note que la force de mortalité à la même formule que la fonction de survie car avec **DUD**, la force est uniformément appliquée.

On note que la force de mortalité à la même formule que la fonction de survie car avec **DUD**, la force est uniformément appliquée.

**Force constante (FC)**

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{(1-t)} + S_X(x+1)^t, \quad t \in [0, 1]$$

$$S_X(x+t) = S_X(x)^{\frac{(c-t)}{c}} + S_X(x+1)^{\frac{t}{c}}, \quad t \in [0, c]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c} \ln({}_c p_x), \quad t \in [0, c]$$

$${}_y q_{x+t} = 1 - ({}_c p_x)^{\frac{y}{c}}, \quad t \in [0, c], y \in [0, c - t]$$

Sous :

**DUD** :  $K_X \perp R_X$

**FC** :  $K_X \perp R_X$  ssi  $p_{x+k} = p_x \forall k \in \{0, 1, \dots\}$

## 1.7 Caractéristiques individuelles

Lorsque  $0 \leq x < \omega$ , défini les fonctions suivantes pour 2 cas possible.

**Utilisant  $T_x$**

Si nous connaissons déjà la fonction de répartition/densité de  $T_x$  on peut trouver :

**Espérance** : Espérance de la durée de vie future complète d'une personne d'âge  $x$ .

$$E[T_x] = \bar{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x d$$

**Variance**

$$V(T_x) = \int_0^{\omega-x} t^2 {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} 2t {}_t p_x dt - (\bar{e}_x)^2$$

**Médiane** : Le nombre d'années avant que la population d'âge  $x$  aujourd'hui diminue de moitié.

Pour la trouver il suffit d'isoler :

$$Pr[T_x \leq m(x)] = m(x) q_x = \frac{1}{2}$$

**Mode** : Le moment où la population d'âge  $x$  aujourd'hui connaisse le plus de décès.

Pour le trouver, il faut le :

$$\arg \max_t {}_t p_x \mu_{x+t}$$

On peut utiliser la dérivée pour le trouver, mais il faut se méfier des **bornes** et que le résultat est un **maximum**.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

**Utilisant  $K_x$**

Si nous connaissons que la table de mortalité, les seules caractéristiques disponibles sont celles de  $K_x$ .

Pour obtenir celles de  $T_x$  il faut poser un hypothèse pour les âges fractionnaires.

**Espérance** : Espérance du nombre d'années entières à vivre pour une personne d'âge  $x$  (*espérance de vie abrégée*).

$$E[K_x] = e_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k {}_k q_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} k p_x$$

**Variance** :

$$V(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k^2 {}_k q_x - (e_x)^2$$

**Médiane** : Solution tel que :

$$Pr[K_x < m] < \frac{1}{2} \quad Pr[K_x \leq m] \geq \frac{1}{2}$$

**Mode** :

$$\arg \max_k Pr[K_x = k]$$

Liens entre les fonctions pour  $K_x$  et  $T_x$  :

$$\bar{e}_x = E[T_x] = E[K_x] + E[R_x]$$

$$\stackrel{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2}$$

$$V(T_x) = V(K_x + R_x) \stackrel{\perp}{=} V(K_x) + V(R_x)$$

$$\stackrel{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12}$$

**Variables censurées**

L'espérance de vie future **d'ici**  $n$  années d'un assuré d'âge  $x$  (*entre les âges  $x$  et  $x+n$* ).

Espérance de vie **complète** temporaire  $n$  années .

$$\bar{e}_{x:\overline{n}|} = E[T_x \wedge n]$$

$$= \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt + n {}_n p_x$$

$$= \int_0^n {}_t p_x dt, \quad 0 \leq x < \omega,$$

$$0 \leq n \leq \omega - x$$

Espérance de vie **abrégée** temporaire  $n$  années.

$$e_{x:\overline{n}|} = E[K_x \wedge n]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k {}_k q_x + n {}_n p_x$$

$$= \sum_{k=1}^n k p_x, \quad 0 \leq x < \omega - 1$$

$$n \in \{0, 1, \dots, \omega - x - 1\}$$

**Variables tronquées**

L'espérance de vie future **conditionnelle** au **décès** dans les  $n$  prochaines années d'un assuré d'âge  $x$  (*entre les âges  $x$  et  $x+n$* ).

$$E[T_x | T_x \leq n] = \frac{\bar{e}_{x:\overline{n}|} - n {}_n p_x}{n q_x}$$

$$E[K_x | K_x \leq n] = \frac{e_{x:\overline{n+1}|} - (n+1) {}_{n+1} p_x}{n+1 q_x}$$

$$E[T_x | T_x \leq 1] = a(x) = \frac{e_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\begin{aligned} \bar{e}_{x:\overline{n}|} &= E[T_x | T_x \leq n] n q_x + n {}_n p_x \\ &= E[K_x | K_x \leq n] n+1 q_x + (n+1) {}_{n+1} p_x \\ &\stackrel{\perp}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{n q_x}{2} \end{aligned}$$

**Formules de récurrence**

$$\bar{e}_{x:\overline{m}|} = \bar{e}_{x:\overline{m-1}|} + m p_x \bar{e}_{x+m:\overline{n-m}|}, \quad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$e_{x:\overline{m}|} = e_{x:\overline{m-1}|} + m p_x e_{x+m:\overline{n-m}|}, \quad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$m, n, (\omega - x) \in \mathbb{W}$$

$$\begin{aligned} e_{x+n} &= p_{x+n}(1 + e_{x+n+1}) \\ &= e_{x+n:\overline{1}|} + p_{x+n} e_{x+n+1} \end{aligned}$$

## 1.8 Caractéristiques de groupe

$T^{(j)}$  : v.a. de la  $j$ ème vie,  $j \in \{1, \dots, \ell_a\}$

$$\mathcal{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T^{(j)} > x-a\}}$$

$${}_n \mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}}$$

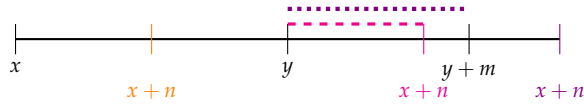
$\mathcal{L}_x$  : v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge  $x$ .  
 $E[\mathcal{L}_x] = \ell_x$   
 $\mathcal{L}_x \sim \text{Bin}(\ell_0, {}_x p_0)$

${}_n \mathcal{D}_x$  : v.a. du nombre de décès entre l'âge  $x$  et  $x+n$ .  
 $E[{}_n \mathcal{D}_x] = {}_n d_x$   
 ${}_n \mathcal{D}_x \sim \text{Bin}(\ell_0, {}_x | {}_n q_0)$   
 ${}_n \mathcal{D}_x = \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{x+n}$

On peut ensuite généraliser  $\forall x \geq a$   
 $\mathcal{L}_x \sim \text{Bin}(\ell_a, {}_{x-a} p_a)$   
 ${}_n \mathcal{D}_x \sim \text{Bin}(\ell_a, {}_{x-a} | {}_n q_a)$

Avec les sommations on trouve :

$$\text{Cov}({}_n \mathcal{D}_x, {}_m \mathcal{D}_y) = \begin{cases} -{}_x - a | {}_n q_a \cdot {}_y - a | {}_m q_a, & x+n \leq y \\ {}_y - a | x+n - y q_a - {}_x - a | {}_n q_a \cdot {}_y - a | {}_m q_a, & y < x+n \leq y+m \\ {}_y - a | {}_m q_a - {}_x - a | {}_n q_a \cdot {}_y - a | {}_m q_a, & y+m \leq x+n \end{cases}$$



$$\text{Raccourci : Cov}(A, B) = E[A \cap B] - \frac{E[A]E[B]}{\ell_a}$$

## 2 Contrats d'assurance-vie

### 2.1 Notation et introduction

#### Fonctions

$a(T)$  : Facteur d'accumulation.

$v(T)$  : Facteur d'actualisation.

$$v(t) = \frac{1}{a(t)}$$

$Z$  : v.a. de la valeur actualisée du montant payé selon les termes du contrat.

$$Z = z_t = b(T)v(f(T))$$

$b(T)$  : Prestation prévue en fonction de  $T$ .

$f(T)$  : Montant du paiement en fonction de  $T$ .

De plus, puisque  $f(T)$  n'a pas d'importance lorsque  $b(T) = 0$ , on définit son domaine pour simplifier des interprétations plus tard.

$$f(t) \geq T$$

$A$  : Pour simplifier la notation, on dénote la **prime unique nette (PUN)** par :

$$E[Z] = A_x = \int_0^{\omega-x} z_t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Le nom vient du fait qu'elle n'est payée qu'une seule fois (*unique*) et qu'elle ne couvre que le coût des prestations (*nette*).

#### Prestations



$b A_x$  Si quelque chose est payable c'est  $b$ .

$b(IA)_x$  Paye  $b$  lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.

$b(DA)_x$  Paye  $b$  lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Force, ou multiple  $j$  de la, d'intérêt  $\delta$

$$0 \leq \delta < 1 \text{ et } j \in \mathbb{Z}_+$$

${}^\delta A_x$  Évaluation avec **force** d'intérêt  $\delta$  (*constante*).

${}^j A_x$  Évaluation avec  **$j$  fois force** d'intérêt  $\delta$  (*pas nécessairement constante*).

#### Période différée

${}_m | A_x$  Couverture débutant dans  $n$  années.

**Donc** si décède avant les  $m$  années, il n'y a pas de paiements.

#### Fréquence de variation

variation  $m$  fois par année

$$(I^{(m)} A)_x \text{ et } (D^{(m)} A)_x$$

(*dé*)croissance continue

$$(\bar{I} A)_x \text{ et } (\bar{D} A)_x$$

#### Type de variation de la prestation

$A_x$  Constant

$(IA)_x$  Croissant arithmétiquement

$(DA)_x$  Décroissant arithmétiquement

#### Durée temporaire de la variation

$(I_{\overline{n}|} A)_x$  Augmentation uniquement lors des  $n$  premières années de couverture.

#### Moment de paiement de la prestation de décès

$\bar{A}_x$  Au moment du décès.

$A_x^{(m)}$  À la fin du  $1/m$  année du décès.

Pour exemple, si  $m = 12$  alors c'est payable à la fin du mois de décès.

#### Couverture temporaire $n$ années

$A_{x:\overline{n}|}^1$  Cas de décès.

$A_{x:\overline{n}|}^{\bar{1}}$  Cas de survie.

$A_{x:\overline{n}|}$  Les deux cas.

$A_x$  En tout temps.

### Principes de calcul de la prime pour un seul contrat

Principes pour calculer la prime (*unique*) à payer pour un contrat d'assurance :

1.  $E[Z]$  **principe d'équivalence**
2.  $E[Z] + k\sigma_Z$
3.  $\xi$  **quantile de  $Z$** .

Interprétations pour un seul contrat

1. En moyenne l'assureur ne fait ni gains ni pertes
2. Lorsqu'il y a plusieurs contrats, le principe est équivalent au troisième mais lorsqu'il n'y en a qu'un seul alors il ne tient pas.
3. Plus petite prime  $\pi$  telle que  $Pr(Z \geq \pi) = p$

### Principes de calcul pour un portefeuille de plusieurs contrats

Généralement, on suppose les  $n$  différents contrats  $Z_j$  d'être identiques et les vies à être indépendantes (*i.i.d.*).

$$S = \sum_{j=1}^n Z_j$$

1. Par le **principe d'équivalence**,  $E[Z] = \pi$ .
3. **Principe du quantile**  $Pr(S \leq n\pi) \geq p$ , où  $p$  est la **probabilité de solvabilité**.

Cependant, si les contrats ne sont *pas identiques*, la **prime varie** selon le contrat.

1. Pour chaque type de contrat le **principe d'équivalence** ne change pas,  $E[Z] = \pi$ .
3. Pour le **Principe du quantile** on veut maintenant une **surcharge égale** pour tous les contrats et donc le plus petite  $h$  telle que  $Pr(S \leq h) \geq p$ .

$h$  : Prime collective sous le principe du quantile.

Doit trouver la surcharge  $\theta$  qui, lorsque appliqué à chacune des espérances individuelles, donnera la prime collective au total.

$\theta$  : **Surchage**

$$\pi = (1 + \theta)E[Z]$$

$$h = (1 + \theta)E[S]$$

**Surprime**

$$\theta E[Z]$$

Puisque par défaut les  $Z_j$  sont (*iid*) on applique l'**approximation normale** avec  $S \sim N(E[S] = nE[Z], V(S) = nV(Z))$ .

$$\Phi^{-1}(p) = z_{1-p}$$

$$z_{1-p} \leq \frac{\sqrt{n}(\pi - E[Z])}{\sigma_Z}$$

$$\pi \geq E[Z] + z_{1-p} \left( \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}} \right) = \pi_p \quad \pi\$ = \frac{[100\pi_p]}{100}$$

$$n \geq \left( \frac{z_{1-p}\sigma_Z}{\pi - E[Z]} \right)^2 = n_p$$

Donc avec  $h$  on résoud  $h = (1 + \theta)E[Z]$  et applique la surprime à tous les assurés.

## Règle des moments

$$E[Z^j] @ \delta_t = E[b \times Z^j] @ \delta_t$$

$$= b^j \times E[Z^j] @ \delta_t$$

Où  $Z = bZ'$ , donc  $Z'$  est la v.a. équivalente avec une prestation unitaire.

À noter que la règle est **seulement applicable** aux **prestations nivelées** et donc n'est pas applicable aux prestations variants arithmétiquement.

## 2.2 Payable au moment du décès

Le montant et moment du paiement ne dépendent que du **temps écoulé depuis l'émission de la police**.

De plus, toutes nos fonctions sont définies en fonction de la v.a. de la durée de vie future de l'assuré  $T$ .

## Assurance à prestation nivelée

**Assurance-vie entière** Est en vigueur tant que l'assuré est en vie et verse une prestation au moment de son décès.

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

**Assurance-vie temporaire** Si l'assuré décède dans les  $n$  années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

**Capital différé de  $n$  années** Si l'assuré *ne décède pas* dans les  $n$  années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de survie.

À noter qu'il est aussi connu comme le **facteur d'actualisation actuariel**.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 \Leftrightarrow A_{x:\overline{n}|}^1 = v^n {}_n p_x = {}_n E_x$$

**Assurance mixte** Si l'assuré *ne décède pas* dans les  $n$  années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès. S'il est toujours en vie, paye une prestation de survie.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1$$

**Assurance différée de  $m$  années** Si l'assuré décède *après* les  $m$  années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$${}_m | \bar{A}_x = \int_m^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

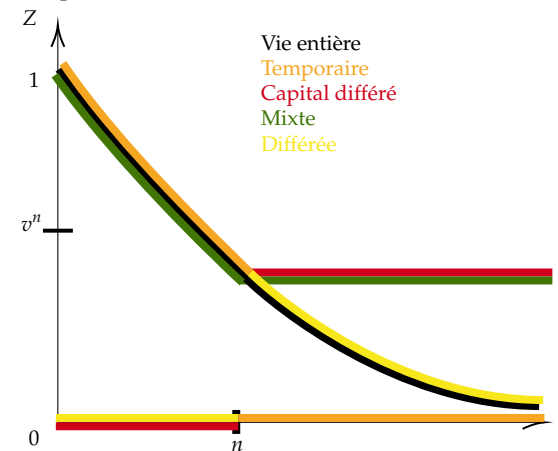
$$= v^m {}_m p_x \int_0^{\omega-x-m} v^s {}_s p_{x+m} \mu_{(x+m)+s} ds$$

$$= v^m {}_m p_x \bar{A}_{x+m} = {}_m E_x \bar{A}_{x+m}$$

**Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire**

$${}_m | \bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

Comparaison des différents contrats



## Assurance à prestation variant arithmétiquement

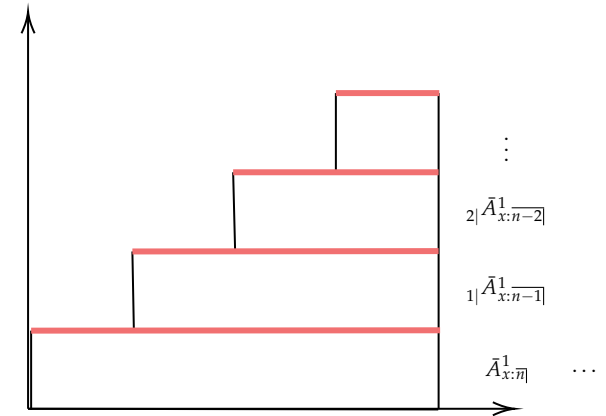
**Assurance Vie temporaire croissante**

Le capital **croît annuellement**.

La prestation est de 1 \$ dans la première année, 2 \$ dans la deuxième, etc. jusqu'à  $n$  \$ dans la  $n^{\text{ème}}$  année.

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n (1 + [t]) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_1 | \bar{A}_{x:\overline{n-1}|}^1 + \dots + {}_{n-1} | \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1$$



Le capital **croît (annuellement)** pendant  $r$  années.

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{r-1} {}_k | \bar{A}_{x:\overline{n-k}|}^1$$

Le capital **croît  $m$  fois par année**.

Paye une prestation de  $1/m$  \$ dans le premier  $1/m$  d'année,  $2/m$  \$ dans le deuxième, etc.

$$(I^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n \frac{([t \times m] + 1)}{m} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital est **différé de  $r$  années**.

$${}_r | (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = v^r {}_r p_x (I\bar{A})_{x+r:\overline{n}|}^1$$

Le capital **croît continûment**.

Paye une prestation de  $t$  au moment du décès, tant qu'il se produise dans les  $n$  premières années.

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^n {}_s | \bar{A}_{x:\overline{n-s}|}^1 ds$$

## Assurance Vie temporaire décroissante

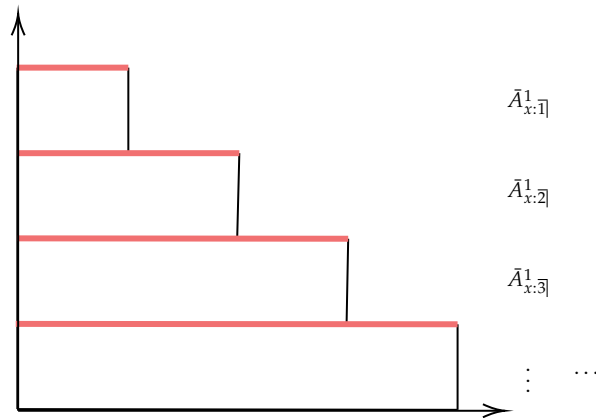
Le capital **décroit chaque année** et donc la prestation doit nécessairement être une temporaire.

Paye  $n$  \$ au début de la première année,  $n-1$  \$ au début de la deuxième, etc. jusqu'à 1 \$ au début de la dernière année.

On peut le voir de l'autre sens, la prestation du début de la dernière année est de 1 \$, 2 \$ au début de l'avant dernière année, etc.

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^{\omega-x} (n - [t]) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{2}|}^1 + \dots + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$



Le capital **décroît m fois par année**.

Paye une prestation de n \$ dans le premier 1/m d'année, n - 1/m \$ dans le deuxième, etc. jusqu'à 1/m \$ durant le dernier 1/m d'année.

$$(D^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n \left(n - \frac{1}{m} \times [mt]\right) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital est **différé de r années**.

$${}_r|(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=1}^n {}_r|A_{x:\overline{k}|}^1$$

Le capital **décroît continûment**.

Prévoit une prestation de n \$ pour un décès immédiat, par la suite la prestation décroît linéairement jusqu'à 0 \$ au bout de n années.

$$\begin{aligned} (\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n (n - t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^n \bar{A}_{x:\overline{s}|}^1 ds \end{aligned}$$

## Assurance mixte

L'assurance peut être mixte peut importe qu'elle soit croissante ou décroissante.

L'assurance **croissante** mixte n années, paierait n\$ en cas de survie (*peu importe la fréquence de la croissance*).

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = (\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 + n {}_n E_x$$

L'assurance **décroissante** mixte n années, paierait 1/m\$ en cas de survie si la prestation **décroît m fois par année**.

L'assurance **décroissante** mixte n années, paierait 1\$ en cas de survie si la prestation **décroît à chaque année** (*alias, m = 1*).

L'assurance **décroissante** mixte n années aurait une prestation de survie nulle si la prestation **décroît continûment**. Donc, en théorie une assurance décroissant continûment peut être mixte mais pas en pratique.

Comme pour les assurances à prestations constantes, une mixte est la combinaison d'une temporaire (*avec la même (dé)croissance*) et d'un capital différé.

$${}_r|(D\bar{A})_{x:\overline{n}|} = {}_r|(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n+\overline{r}}|}^1$$

## Assurance Vie entière croissante

Le capital **croît chaque année**.

La formule est équivalente à remplacer n par  $\omega - x$  dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

Donc, 1 \$ la première, 2 \$ la deuxième, etc. jusqu'à  $\omega - x$  \$ la dernière.

$$\begin{aligned} (I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1 + [t]) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + {}_2|\bar{A}_x + \dots \end{aligned}$$

Le capital **croît continûment**.

La formule est équivalente à remplacer n par  $\omega - x$  dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

$$\begin{aligned} (I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_s|\bar{A}_x ds \end{aligned}$$

Le capital **croît (annuellement) pendant n années**.

Comme une vie entière sauf que la capital cesse de croître après n années et paye n\$ pour la suite.

$$\begin{aligned} (I_{\overline{n}}\bar{A})_x &= (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 + n {}_n|\bar{A}_x \\ &= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_x \end{aligned}$$

## Relations

$$(I_{\overline{n}}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 + {}_r|A_{x:\overline{n+\overline{r}}|}^1$$

$${}_r|(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = v^r {}_r p_x (I\bar{A})_{x+r:\overline{n-r}|}^1$$

$${}_r|(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = v^r {}_r p_x (D\bar{A})_{x+r:\overline{n-r}|}^1$$

$$(D^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 + (I^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \left(n + \frac{1}{(m)}\right) \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

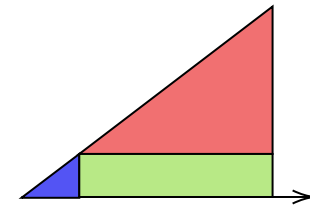
$${}_r|(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 + {}_r|(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = n {}_r|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n-1}|}^1 + (I_{\overline{n}}\bar{A})_x^1 = n \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

$${}_r|(D\bar{A})_{x:\overline{n-1}|}^1 + {}_r|(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = n {}_r|A_{x:\overline{n}|}^1$$

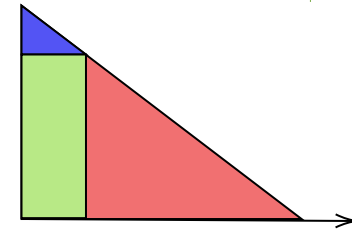
## Relations croissance

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = (\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{1}|}^1 + v p_x \left[ \bar{A}_{x+1:\overline{n-1}|}^1 + (\bar{I}\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^1 \right]$$

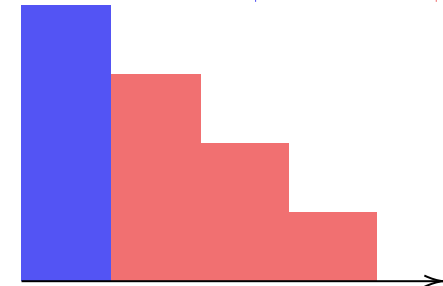


Relations décroissance

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = (n-1) \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + (\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{1}|}^1 + v p_x (\bar{D}\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$



$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = n \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + v p_x (D\bar{A})_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$



## Assurance à prestation variant exponentiellement

La prestation de référence est celle payable en cas de décès immédiat. La prestation est **indexée** continûment à force  $\tau$ ; généralement,  $\tau < \delta$  et peut même être négatif.

Exemple pour une assurance temporaire n année différée de r années  ${}_r|A_{x:\overline{n}|}^{\text{ind}}$ .

$$Z = {}^{\delta-\tau}{}_r|Z_{x:\overline{n}|}^1$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T < r \\ e^{-(\delta-\tau)T} & r < T < r+n \\ 0 & T > r+n \end{cases}$$

## Évolution du fonds

Fonds initialement constitué des primes reçues pour n contrats.

$$F_0 = n\pi$$

**Augmente** (*croît*) avec le taux de rendement réalisé sur les placements.

**Diminue** (décroit) chaque fois qu'une prestation est payable.

$F_t$  : valeur du fonds à  $t$  (après le paiement de prestations payables au temps  $t$  s'il y a lieu).

Soit  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  les **moments de décès** (en ordre croissant).

Soit  $\delta_s$ ,  $s > 0$  la force d'intérêt réalisée à  $s$ .

Tant que des prestations de décès sont payables :

$$F_{t_j^-} = F_{t_{j-1}^+} e^{\int_{t_{j-1}^+}^{t_j^-} \delta_s ds}$$

$$F_{t_j^+} = F_{t_j^-} - b(t_j)$$

Si le contrat se termine à  $r$

**sans** prestation de survie.

$$F_r = F_{t_k^+} e^{\int_{t_k^+}^r \delta_s ds}$$

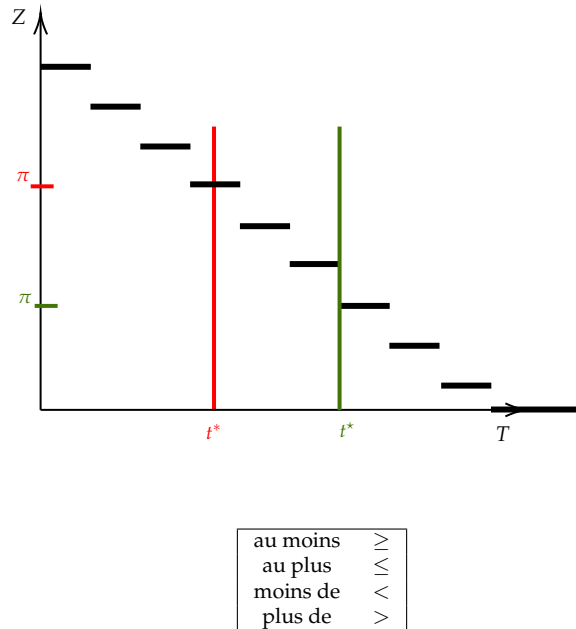
$$\text{où } t_k = \max\{t_j | t_j < r\}$$

**avec** prestation de survie

$$F_r = F_{t_k^+} e^{\int_{t_k^+}^r \delta_s ds} - b^*(r)(n - k)$$

$$\text{où } t_k = \max\{t_j | t_j < r\}$$

et  $b^*(r) =$  prestation de survie



## 2.3 Payable à la fin de l'année du décès

La prestation peut seulement changer aux anniversaires de la police (alias aux âges entiers).

L'information est souvent disponible sous format de table et donc les seuls calculs possible sont ceux des contrats payable à la fin de l'année du décès.

De façon générale, l'âge à l'émission, la durée de couverture et la période différée sont entiers  $x, n, r \in \mathbb{Z}$ .

### Principe général

**Valeur actualisée :**  $z_{k+1}$

**Prestation :**  $b_{k+1}$

**Facteur d'actualisation :**  $v_{k+1}$

$$f(T) = [T + 1]$$

$\forall K \in \mathbb{Z}_+$  alias  $(0, 1, 2, \dots)$

$$Z = z_{K+1} = b_{K+1} v_{K+1}$$

$$E[Z] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} z_{k+1} k | q_x$$

**Principe du quantile :** si on atteint entre 2 marches, on choisit toujours la **plus basse**.

$$\text{si } t^* \notin \mathbb{Z}_+, \pi = Z|_{k=[t^*]}$$

$$\text{si } t^* \in \mathbb{Z}_+, \pi = \min(Z|_{k=t^*}, Z|_{k=t^*-1})$$

### Assurance à prestation nivelée

La règle des moments s'applique.

#### Assurance-vie entière

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} k | q_x$$

#### Assurance-vie temporaire

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} k | q_x$$

$${}_m | A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1} k | q_x$$

#### Assurance mixte

$${}_r | A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{r+n-1} v^{k+1} k | q_x + v^{r+n} {}_n p_x$$

### Assurance différée de m années

$$\begin{aligned} {}_m | A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} k | q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} (k+m) | q_x \\ &= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} k | p_{x+m} q_{x+m+k} \\ &= {}_m E_x A_{x+m} \end{aligned}$$

### Liens

$$\begin{aligned} A_x &= v q_x + v p_x A_{x+1} & A_{w-1} &= v \\ A_x &= A_{x:\overline{n}|}^1 + v {}_n p_x A_{x+n} \\ A_{x:\overline{n}|}^1 &= v q_x + v p_x A_{x+1:\overline{n-1}|}^1 & A_{x+n-1:\overline{1}|}^1 &= v q_{x+n-1} \\ A_{x:\overline{n}|}^1 &= A_{x:\overline{n}|}^1 + v {}_r p_x A_{x+r:\overline{n-r}|}^1 \\ A_{x:\overline{n}|}^1 &= v {}_r p_x A_{x+r:\overline{n-r}|}^1 \end{aligned}$$

### Assurance à prestation variant arithmétiquement

Puisque la prestation est payable à la fin de l'année du décès, le changement ne se fera qu'une fois par année. Donc, la (dé)croissance est par défaut annuelle.

$$\begin{aligned} E[{}_r | (I_{\overline{n}|} Z)_{x:\overline{n}|}^1] &= \sum_{k=r}^{r+n-1} (k+1-r) v^{k+1} k | q_x \\ &+ \sum_{k=r+m}^{r+n-1} m v^{k+1} k | q_x \\ &+ (0) m v^{r+n} {}_r p_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[{}_r | (DZ)_{x:\overline{n}|}^1] &= \sum_{k=r}^{r+n-1} (n+r-k) v^{k+1} k | q_x \\ &+ (0) v^{r+n} {}_r p_x \end{aligned}$$

### Relations de récurrence

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 + (IA)_{x:\overline{n}|}^1 = (n+1) A_{x:\overline{n}|}^1$$

$${}_r | (I_{\overline{n}|} A)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{j=0}^{m-1} {}_{j+r} | A_{x:\overline{n-j}|}^1$$

$${}_r | (DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=1}^n {}_r | A_{x:\overline{k}|}^1 + v^{r+n} {}_r p_x$$

$$\begin{aligned}
{}_r|(I_{\overline{m}|}A)_{x:\overline{m}}^1 &= v^r {}_r p_x \left\{ (IA)_x + r : \overline{s} \right. \\
&\quad \left. + v^r {}_s p_{x+r} \left[ (I_{\overline{m-s}|}A)_{x+r+s:\overline{n-s}}^1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + s A_{x+r+s:\overline{n-s}}^1 \right] \right\} \\
{}_r|(DA)_{x:\overline{m}}^1 &= v^r {}_r p_x \left\{ (DA)_x : \overline{m} \right. \\
&\quad \left. + (n-m) A_{x:\overline{m}}^1 \right. \\
&\quad \left. + v^m {}_m p_{x+r} (DA)_x + r + s : \overline{n-s} \right\}
\end{aligned}$$

### Assurance à prestation variant exponentiellement

Suppose que la prestation payable en cas de décès =  $b$  et qu'elle est ensuite indexée au taux d'inflation.

### Différée $r$ années temporaire $n$ années

$$\begin{aligned}
E \left[ {}_r|Z_{x:\overline{m}}^1 \right] &= \sum_{k=r}^{r+n-1} b(1 + \inf)^{k-r} v^{k+1} {}_k|q_x \\
&\quad + (0|b(1 + \inf)^{n-1} v^{r+n} {}_r|p_x)
\end{aligned}$$

### Évolution du fonds

$F_0$  Valeur du fonds initial avec l'achat par  $\ell_x$  personnes.

$\ell_x$  Nombre de personnes ayant initialement acheté au fonds.

$$F_0 = \ell_x \pi$$

$F_k^{(\text{att}|\text{obs})}$  Valeur du fonds (attendu | observée) à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  année.

$r_k$  Taux de rendement réalisé lors de la  $k^{\text{ème}}$

$i$  Taux de rendement espéré de la prime.

$d_{x+k-1}^{(\text{att}|\text{obs})}$  Nombre de décès (attendus | observés) lors de la  $k^{\text{ème}}$  année.

$$F_0^{\text{obs}} = F_0^{\text{att}} = \ell_x \pi$$

Tant qu'il y a couverture :

#### En cas de décès

$$F_{k+1}^{\text{att}} = F_k^{\text{att}}(1+i) - b_{k+1}^{\text{décès}} d_{x+k}^{\text{att}}$$

$$F_{k+1}^{\text{obs}} = F_k^{\text{obs}}(1+r_{k+1}) - b_{k+1}^{\text{décès}} d_{x+k}^{\text{obs}}$$

#### En cas de prestation de survie à $n$

$$F_n^{\text{att}} = F_{n-1}^{\text{att}}(1+i) - b_n^{\text{décès}} d_{x+n-1}^{\text{att}} - b_n^{\text{survie}} \ell_{x+n}^{\text{att}}$$

$$F_n^{\text{obs}} = F_{n-1}^{\text{obs}}(1+r_n) - b_n^{\text{décès}} d_{x+n-1}^{\text{obs}} - b_n^{\text{survie}} \ell_{x+n}^{\text{obs}}$$

## 2.4 Payable à la fin du 1/m d'année du décès

$$K = 0, 1, \dots, \omega - x - 1$$

$$J = 0, 1, \dots, m - 1$$

$$H_x^{(m)} = [mT_x]$$

Où  $h$  est une réalisation de  $H_x^{(m)}$ .

Par exemple, dans une année où  $m = 4$  entre  $K = 10$  et  $K = 11$ ,

$$H_x^{(4)} \in \{40, 41, 42, 43\}.$$

$$Z = b_{K+\frac{J+1}{m}} v_{K+\frac{J+1}{m}}$$

$$\Pr(K = k, J = j) = {}_{k+\frac{j}{m}}| \frac{1}{m} q_x$$

$$\stackrel{\text{DeMoivre}}{=} \frac{1}{m(\omega - x)}$$

$$\stackrel{\text{Exponentielle}}{=} e^{-\mu(k+\frac{1}{m})} (1 - e^{-\mu(\frac{1}{m})})$$

$${}_r|A_{x:\overline{m}}^{1(m)} = \sum_{h=rm}^{m(r+n)-1} v^{\frac{k+1}{m}} {}_{\frac{h}{m}}| \frac{1}{m} q_x + (0|v^{r+n} {}_r|p_x)$$

## 2.5 Relations entre payable au moment et celles payables à la fin de l'année du décès

Si :

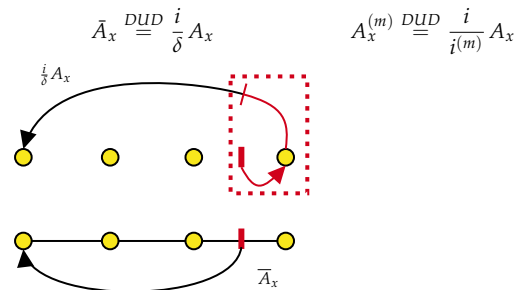
1. La force d'intérêt est constante.

$$v_t = v^t$$

2. Il y a seulement une prestation de décès.

3. Le plus souvent que la prestation peut varier est aux anniversaires de police; alias, elle est constant sur une période.

$$b_t = b_{[t]+1}$$



Généralisation

$$\bar{A}_{x:\overline{m}}^1 \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{m}}^1$$

$$A_x^{(m)} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

$$\bar{A}_{x:\overline{m}} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{m}}^1 + A_{x:\overline{m}}$$

Cas de croissance

$$(\bar{I}\bar{A})_x \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{\delta} \left[ (IA)_x - \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) A_x \right]$$

$$(I^{(m)}A)_x^{(m)} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} \left[ (IA)_x - \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d^{(m)}} \right) A_x \right]$$

Généralisation avec multiple de la force d'intérêt

$${}_j\bar{A}_x \stackrel{DUD}{=} \frac{e^{j\delta} - 1}{j\delta} {}_jA_x \quad {}_jA_x^{(m)} \stackrel{DUD}{=} \frac{e^{j\delta} - 1}{m(e^{\frac{j\delta}{m}} - 1)} {}_jA_x$$

### Approximations

$$\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x$$

$$A_x^{(m)} \approx (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} A_x$$

$$(D\bar{A})_{x:\overline{m}}^1 \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} (DA)_{x:\overline{m}}^1 \quad \bar{A}_{x:\overline{m}} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{x:\overline{m}}^1 + A_{x:\overline{m}}$$

$$(D\bar{A})_{x:\overline{m}}^1 \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \left[ (DA)_{x:\overline{m}}^1 - \frac{1}{2} A_{x:\overline{m}}^1 \right]$$

$$(I_{\overline{m}|}^m \bar{A})_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \left[ (I_{\overline{m}|}A)_x - \frac{m-1}{2m} A_{x:\overline{m}}^1 \right]$$

## 3 Contrats de rente

On note que pour les contrats de rente, chaque paiement est conditionnel à la survie du rentier jusqu'au moment du paiement (à moins de se trouver dans une période garantie).

### Double force

$${}^2i = 2i + i^2$$

$${}^2d = 2d - d^2$$

### 3.2 Rentes continues

#### Rentes nivelées

**Rente viagère** On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\bar{Y}_x = \bar{a}_{T_x|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega-x} \bar{a}_{\bar{t}|} p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} v^t p_x dt$$

$$= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta} (\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x) - \bar{a}_x^2$$



**Rente temporaire  $n$  années** Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum  $n$  années.

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{x:\overline{n}|} &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|} n p_x \\ &= \int_0^n v^t p_x dt \\ &= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\ \text{Var}(\bar{Y}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta} (\bar{a}_{x:\overline{n}|} - 2\bar{a}_{x:\overline{n}|}^2) - \bar{a}_{x:\overline{n}|}^2\end{aligned}$$

**Rente viagère différée  $m$  années** C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans  $m$  années (si  $(x)$  est en vie).

$$\begin{aligned}{}_m|\bar{Y}_x &= \begin{cases} 0 & T_x \leq m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x > m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{x:\overline{m}|} - m|\bar{Z}_x}{\delta} \\ {}_m|\bar{a}_x &= \int_m^{\omega-x} \bar{a}_{\overline{t-m}|} p_x \mu_{x+t} dt \\ &= {}_mE_x \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}\end{aligned}$$

On note que  ${}_m|\bar{Y}_x = \bar{Y}_x - \bar{Y}_{x:\overline{m}|}$

**Rente garantie (certaine)  $n$  années** Le contrat prévoit une rente minimale de  $n$  années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$\begin{aligned}Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_n|Y_x \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot n q_x + \int_n^{\omega} \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\bar{a}_x\end{aligned}$$

**Valeur actuarielle accumulée**

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{n E_x}$$

**Rentes variant arithmétiquement**

**Rentes variant annuellement** Limitons à les exprimer comme une somme de rentes dont le taux de paiement est constant. **Croissante**

$$\begin{aligned}{}_r|(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|} &= \int_{\min(T,r)}^{\min(T,r+n)} \min(m, [u+1-r]) e^{-\delta u} du \\ E[{}_r|(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|}] &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{r+k}|\bar{a}_{x:\overline{n-k}|}\end{aligned}$$

**Décroissante**

$$\begin{aligned}{}_r|(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|} &= \int_{\min(T,r)}^{\min(T,r+n)} \min(m, [u+1-r]) e^{-\delta u} du \\ E[{}_r|(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|}] &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{r+k}|\bar{a}_{x:\overline{n-k}|}\end{aligned}$$

**Rentes variant continûment** **Croissante**  
**Décroissante**

**Rentes variant exponentiellement**

### 3.3 Rentes discrètes

**Rentes nivelées**

**Rente viagère** Pour  $K = 0, 1, 2, \dots$  on obtient :  
Début de période Fin de période

$$\begin{aligned}\bar{Y}_x &= \bar{a}_{\overline{K+1}|} & Y_x &= a_{\overline{K}|} \\ &= \frac{1}{d} [1 - Z_x] & &= \frac{1}{i} [1 - (1+i)Z_x] \\ E[\bar{Y}_x] &= \bar{a}_x & E[Y_x] &= a_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \bar{a}_{\overline{k+1}|} k p_x q_{x+k} & &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} a_k k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k k p_x & &= \sum_{k=1}^{\omega-x-1} v^k k p_x\end{aligned}$$

On note que :

**Variance rente**

$$\begin{aligned}\text{Var}(\bar{Y}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{1}{d^2} (2A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^2) = \text{Var}(Y_x) \\ &= \frac{2}{d} (\bar{a}_{x:\overline{n}|} - 2\bar{a}_{x:\overline{n}|}^2) + 2\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2\end{aligned}$$

Relation entre début et fin de période :

$$Y_x = a_{\overline{K}|} \Leftrightarrow \bar{a}_{\overline{K+1}|} - 1 = \bar{Y}_x - 1$$

$$\Rightarrow a_x = \bar{a}_x - 1$$

Relation de récurrence :

$$\begin{aligned}a_x &= v p_x + v p_x a_{x+1} & \bar{a}_x &= \bar{a}_{x:\overline{n}|} + n E_x a_{x+n} \\ &= v p_x \bar{a}_{x+1}\end{aligned}$$

**Rente temporaire  $n$  années** Pour une temporaire on ajoute une limite jusqu'où sommer :  
on obtient :

$$\bar{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{K+1}|} & , K = 0, 1, \dots, n-1 \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

Fin de période

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{d} [1 - Z_{x:\overline{n}|}] & Y_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{i} [1 - (1+i)Z_{x:\overline{n+1}|}] \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{a}_{\overline{k+1}|} k p_x q_{x+k} + \bar{a}_{\overline{n}|} n p_x & a_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|} k p_x q_{x+k} + a_{\overline{n}|} n p_x \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} v^k k p_x & &= \sum_{k=1}^n v^k k p_x\end{aligned}$$

Et :

$${}_n|\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} \quad a_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + n E_x$$

**Rente garantie  $n$  années** On obtient :

$$\bar{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & , K = 0, 1, \dots, n-1 \\ \bar{a}_{\overline{K+1}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

Fin de période

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{\overline{n}|} n q_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} \bar{a}_{\overline{k+1}|} k p_x q_{x+k} & a_{x:\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|} n q_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} a_{\overline{k}|} k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k k p_x & &= \sum_{k=1}^n v^k + \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k k p_x\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}E[\bar{Y}_{x:\overline{n}|}^2] &= \frac{2}{d} (\bar{a}_{x:\overline{n}|} - 2\bar{a}_{x:\overline{n}|}^2) + 2\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\bar{a}_x\end{aligned}$$

**Rente différée  $n$  années** on obtient :

$${}_n|\bar{Y}_x = \begin{cases} 0 & , K = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n \bar{a}_{\overline{K+1-n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

Fin de période

$$\begin{aligned}{}_n|\bar{Y}_x &= \frac{1}{d} [Z_{x:\overline{n}|} - {}_n|Z_x] & {}_n|Y_x &= \frac{1}{i} [Z_{x:\overline{n+1}|} - {}_{n+1}|Z_x] \\ {}_n|\bar{a}_x &= \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^n \bar{a}_{\overline{k+1-n}|} k p_x q_{x+k} & {}_n|a_x &= \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^n a_{\overline{k-n}|} k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k k p_x & &= \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k k p_x\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}{}_n|\bar{a}_x &= n E_x \bar{a}_{x+n} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} \\ &= v p_x {}_{n-1}|\bar{a}_{x+1} \\ {}_n|a_x &= {}_{n+1}|\bar{a}_x = {}_n|\bar{a}_x - n E_x\end{aligned}$$



**Valeur actuarielle accumulée** On obtient :

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{nE_x}$$

## Rentes à paiement variant arithmétiquement

**Rente viagère croissante**

$$\dot{Y} = (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|}, K = 0, 1, 2, \dots$$

Début de période

Fin de période

$$\begin{aligned} E[\dot{Y}] &= (I\ddot{a})_x & E[\ddot{Y}] &= (Ia)_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|k|} q_x & &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (Ia)_{\overline{K}|k|} q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)v^k p_x & &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} kv^k p_x \end{aligned}$$

De plus :

$$(Ia)_x = (I\ddot{a})_x - \ddot{a}_x$$

**Rente temporaire n années croissante** on obtient :

$$\dot{Y} = \begin{cases} (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|} & , K = 0, 1, \dots, n-1 \\ (I\ddot{a})_{\overline{n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

Fin de période

$$\begin{aligned} E[\dot{Y}] &= (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} & E[\ddot{Y}] &= (Ia)_{x:\overline{n}|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (I\ddot{a})_{\overline{K}|k|} q_x + (I\ddot{a})_{\overline{n}|n} p_x & &= \sum_{k=0}^{n-1} (Ia)_{\overline{K}|k|} q_x + (Ia)_{\overline{n}|n} p_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k p_x & &= \sum_{k=0}^{n-1} kv^k p_x \end{aligned}$$

Relations

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} + {}_nE_x$$

le dernier paiement est omis  
et donc on l'actualise les n années  
avec la probabilité des survie

1er paiement

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x [(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|} + \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}]$$

actualiser l'année de moins

survie l'année de plus

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

## Rentes variant exponentiellement

$${}_m|\dot{Y}_{x:\overline{n}|}^{inf} = \sum_{k=m}^{\min(K, m+n-1)} (1+inf)^{k-m} v^k, K = 0, 1, 2, \dots$$

## 3.4 Rentes payables m fois l'an

**Rente viagère** on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_x^{(m)} &= \sum_{h=0}^{mK+j^{(m)}} \frac{1}{m} v^{\frac{h}{m}} \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{K+\frac{j^{(m)}+1}{m}}|}^{(m)} \\ &= \frac{1}{d^{(m)}} \left[ 1 - v^{K+\frac{j^{(m)}+1}{m}} \right] \\ &= \frac{1}{d^{(m)}} (1 - Z_x^{(m)}) \end{aligned} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

$$j^{(m)} = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\text{avec } Y_x^{(m)} = \dot{Y}_x^{(m)} - \frac{1}{m}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_x^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}_{k+\frac{j+1}{m}}^{(m)} \frac{1}{m} q_x \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=0}^{m(\omega-x)-1} \ddot{a}_{\frac{h+1}{m}}^{(m)} \frac{1}{m} q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{k+\frac{j}{m}} \frac{1}{m} p_x \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=0}^{m(\omega-x)-1} \frac{1}{m} v^{\frac{h}{m}} \frac{1}{m} p_x \end{aligned}$$

et :

$$\text{Var}(\dot{Y}_x^{(m)}) = \frac{2}{d^{(m)}} (\ddot{a}_x^{(m)} - 2\ddot{a}_x^{(m)} + 2\ddot{a}_x^{(m)} - (\ddot{a}_x^{(m)})^2)$$

### Hypothèse DUD

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_n|\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m){}_n|\ddot{a}_x - \beta(m){}_nE_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \quad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

### Hypothèse traditionnelle

Le seul changement de DUD sont les formules pour le  $\alpha(m)$  et  $\beta(m)$ , le reste de l'équation reste pareille.

La différence est que l'hypothèse traditionnelle suppose la linéarité du **facteur d'actualisation actuarielle**  ${}_nE_x$  au lieu de uniquement supposer la linéarité de la **mortalité**  ${}_t p_x$ .

Pour  $x = 0, 1, 2, \dots$  et  $0 \leq t \leq 1$

$${}_t E_x = (1-t) + tE_x$$

Et donc, pour le cas d'une rente viagère, on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{k+\frac{j}{m}} E_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{1}{m} v^k E_x \times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{\frac{j}{m}} E_{x+k} \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \end{aligned}$$

Où les nouveaux paramètres sont :

$$\alpha(m) = 1 \quad \beta(m) = \frac{m-1}{2m}$$

Une équation utile pour les rentes de fin de période est

$$\gamma(m) = \alpha(m) - \beta(m) - \frac{1}{m}$$

$$\stackrel{DUD}{=} \frac{d^{(m)} - d}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

$$\stackrel{Trad.}{=} \frac{m-1}{2m}$$

Il suffit de remplacer  $-\beta(m)$  par  $+\gamma(m)$  pour obtenir les formules des rentes en fin de période.

### Approximation de Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} (\delta + \mu_x)$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2} (\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

## Autres rentes payables m fois l'an

## 4 Primes nivelées

### 4.1 Notation et définitions

On définit  $L$  comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étale sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où  $Z$  est la valeur présente actuarielle des prestations à payer et  $Y$  la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où  $Y_1$  représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et  $Y_2$  la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivelée  $\pi$  selon 3 principes.

## 4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence,  $\pi^{PE}$  est la solution de

$$\begin{aligned} E[L] &= 0 \\ E[Z] - E[Y] &= 0 \\ E[Z] &= E[Y] \end{aligned}$$

## 4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable,  $\pi^{PPMP}$  est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer  $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_{t^*}p_x$  pour solutionner  $\pi^{PPMP}$ .

## 4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* :  $\pi^{PP}$  est la solution de

$$\begin{aligned} \Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n}{n} < \lambda\right) &\geq \alpha \\ \Pr(L_1 + \dots + L_n < n\lambda) &\geq \alpha \end{aligned}$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{\text{Var}(L_1 + \dots + L_n)}} < \frac{n\lambda - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où  $Z \sim N(0, 1)$  et  $\Phi$  la fonction de répartition de  $Z$ . Le défi se trouve dans le calcul de  $\text{Var}(L)$ , où

$$\begin{aligned} \text{Var}(L) &= \text{Var}(Z - Y) \\ &= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(Z, Y) \\ &= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2(E[Z]E[Y]) \end{aligned}$$

## 4.5 Retour de primes

- › Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel ( $\alpha$ ) ou total des cotisations (accumulées au taux  $j < i$ )<sup>1</sup> en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.

- › On introduit la v.a.  $W$ , qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha \pi v_i^{K_x+1} \ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

- › Aussi, on trouve que

$$E[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \pi v_i^{k+1} \ddot{s}_{\overline{k+1}|j|k|q_x} = \alpha \pi \psi$$

## 4.6 Primes brutes

- › Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute*  $G$ , qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur  $D$  dans le calcul de la perte à l'émission.

- › Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$

avec  $Y$  qui est fonction de  $G$  (la prime brute), et non  $\pi$ .

- › Il y a 3 types de dépenses :

I) Dépenses initiales;

- À l'émission du contrat;
- Commission des ventes (% de  $G$  ou du montant d'assurance  $M$ );
- Coût des employés qui saisissent les informations dans le système;
- Impression et envoi par courrier de la police.
- ...

II) Dépenses de renouvellement;

- Commission de renouvellement (% de  $G$  ou du montant d'assurance  $M$ ), si  $G$  est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).

III) Dépenses de fin de contrat.

- Saisie informatique et frais de fermeture de dossier;
- Émission du chèque de prestations;
- Enquête (dans certains cas).

1. Le taux  $i$  est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux  $j$  est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.