Contributeurs

ACT-1XXX Cours de première année

aut., cre. Alec James van Rassel

src. Ilie Radu Mitric

src. Hélène Cossette

src. Thomas Landry

Compléments de mathématiques

Algèbre linéaire

Soit :
$$\frac{A}{B} = Q \text{ remainder } R$$
où

A Nombre dividende.

B Nombre diviseur.

- Selon la deuxième équation ci-dessous, on l'appel le *module*.

Q Quotient.

R Restant.

On peut donc aussi trouver que $\boxed{A \mod B = R}$.
L'opérateur de congruence $\equiv$ nous indique que 2 nombres ont le même restant. Donc, $A \equiv B(\mod C)$ implique que $A \mod C = B \mod C$.

- P. ex., $26 \mod 5 = 1$ et $11 \mod 5 = 1$ donc $26 \equiv 11(\mod 5)$.

Intégrales utiles à connaître

Polynômes

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C \qquad \int x^{\frac{p}{q}}dx = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}} + C$$

Fonctions exponentielles et logarithmiques

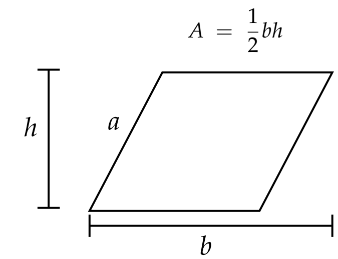
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \qquad \int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$$

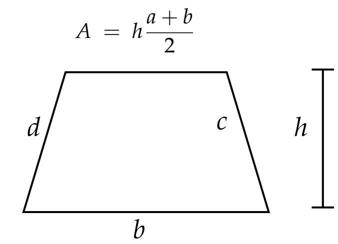
Dérivées utiles à connaître

$$\frac{\partial}{\partial x}(a^x) = a^x \ln(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin(x)) = \cos(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

Aires de formes





Moyennes

La moyenne de n chiffres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Moyenne arithmétique

$$A(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Moyenne géométrique

$$G(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = (x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)^{1/n}$$

Note : $\boxed{G(x) \leq A(x)}$.

Sommations

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1 - r^{n-m+1}}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Différenciation

Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit la fonction f qui répond aux critères suivants :

1. $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$;
2. $f(x)$ est différentiable sur l'intervalle ouvert (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe un nombre c tel que $\boxed{a < c < b}$ et $\boxed{f'(c) = 0}$; c'est-à-dire, $f(x)$ a un point critique dans (a, b).

Soit la fonction f qui répond aux critères suivants :

1. $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$;
2. $f(x)$ est différentiable sur l'intervalle ouvert (a, b).

Alors, il existe un nombre c tel que $\boxed{a < c < b}$ et $\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$.

Estimation Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Théorème de Leibnitz

Soit :

- une fonction $f(x, \alpha)$ continue sur $[a, b]$ et
- des fonctions (dérivables) de α, $u(\alpha)$ et $v(\alpha)$, prenant valeur dans $[a, b]$.

Alors,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx + f(v(\alpha), \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha) - f(u(\alpha), \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha)$$

Domaines

$\mathbb{R}$: Real numbers, $x \in (-\infty, \infty)$.

$\mathbb{Z}$: Integers; all integers positive & negative, $x \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N}$: Natural numbers; all positive integers numbers, $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{Q}$: Rational numbers; numbers written as fractions, for example 1.25%, -0.4775, $3.\overline{153}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$.

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: Irrational numbers; for example π, e, $\sqrt{3}$.

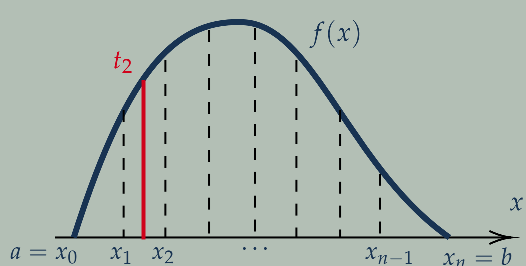
Intégrale de Riemann-Stieltjes

Intégrale de Riemann

Soit la fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$.

- On divise l'ensemble $[a, b]$ en n sous-intervalles $c_i = [x_{i-1}, x_i]$.
- Les n partitions P des sous-intervalles sont aux points $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.
- La norme des partitions est la longueur du plus long sous-intervalle $\|P\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \{|x_i - x_{i-1}|\}$.
- On dénote le i^{e} point du sous-intervalle c_i par $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Visuellement :



On obtient donc l'intégrale de Riemann :

$\boxed{\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx}$.

Intégrale de Riemann-*Stieltjes*

L'intégrale de Riemann-*Stieltjes* généralise l'intégrale de Riemann avec une fonction g comme mesure de distance entre les points x_{i-1} et x_i.

Soit les fonction $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
On maintient les définitions de l'intégrale de Riemann et substitue $(x_{i-1} - x_i)$ pour $(g(x_{i-1}) - g(x_i))$ pour obtenir l'intégrale de Riemann-Stieltjes :

$\boxed{\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) = \int_a^b f(x)dg(x)}$.

Fonction impaire

Une fonction est impaire *(odd)* lorsque $f(-x) = -f(x)$.
Par exemple, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Mathématiques financières

Intérêt simple

$$a(t) = 1 + it \qquad v(t) = \frac{1}{1+it}$$

$$\text{Prix} = 100\left(1 - \frac{it}{365}\right)^{-1}$$

facteurs d'actualisation et d'accumulation

$$\begin{aligned} a(t) &= (1+i)^t \\ &= (1-d)^{-t} \\ &= e^{\int_0^t \delta_s ds} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v(t) &= (1+i)^{-t} \\ &= (1-d)^{t} \\ &= e^{-\int_0^t \delta_s ds} \end{aligned}$$

Conversion de taux

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i^{\mathrm{R}} = \frac{i-r}{1+r}$$

Taux d'intérêt effectif *annuel* $\quad i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

Taux d'intérêt nominal *annuel* $\quad i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right)$

Taux d'escompte nominal *annuel* $\quad d^{(m)} = m\left(1 - (1-d)^{1/m}\right)$

Rentes constantes

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \qquad \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{(i|d)}$$

Rentes continues

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|i} - n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

Rentes (dé)croissantes annuellement

$$(I^{(m)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} - nv^n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{n - a^{(m)}_{\overline{n}|}}{(i|d^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{s})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} - n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{s})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{n(1+i)^n - s^{(m)}_{\overline{n}|}}{(i|d^{(m)})}$$

Rentes croissantes continûment

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d(i|d)}$$

Paiement en continu, valeurs accumulée et actualisée

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) \mathrm{e}^{\int_t^n \delta_s ds} dt$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) \mathrm{e}^{-\int_0^t \delta_s ds} dt$$

Rentes avec croissance géométrique

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i^{\mathrm{R}}} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n}{i-r}(1+i) \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|i^{\mathrm{R}}} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}(1+i)$$

T-Bills

$$\text{Prix} = 100\left(1 - \frac{dt}{360}\right)^t$$

Obligations

Notation

P Le **prix** de l'obligation ;

F La **valeur nominale** de l'obligation.

- « *face amount* » ou « *par value* » ;
- La valeur nominale est l'unité dans laquelle l'obligation est émise.

C La valeur de remboursement de l'obligation ;

- « *redemption value* » ;
- Par défaut, $F = C$.

r Le taux de coupon par période de paiement ;

- « *coupon rate* » ;
- Le montant de chaque coupon est Fr ;
- Le taux est habituellement donné sous base **annuelle** mais la majorité des obligations ont des coupons payables semi annuellement.

g Le taux de coupon "spéciale" utilisé dans les formules mathématiques ;

- Taux tel que $Cg = Fr$.

n Number of remaining coupon **payments**.

i Le taux d'intérêt effectif par période de paiement ;

- C'est le « *yield-to-maturity* » pour une obligation se transigeant au prix P. Donc, contrairement au taux r qui est une composante fixe de l'obligation, i va varier selon le prix P ;
- C'est donc le taux i tel que $P = PV$(bond payments).

Formule pour prix

$$\begin{aligned} P &= Fr a_{\overline{n}|} + Cv^n \equiv Cg a_{\overline{n}|} + Cv^n \\ &= C + (Fr - Ci) a_{\overline{n}|} \equiv C + (Cg - Ci) a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

Condition	Équivalent	Obligation transigée	anglais
$P > C$	$Fr > Ci$	avec prime	with premium
$P = C$	$Fr = Ci$	avec parité	at par
$P < C$	$Fr < Ci$	avec escompte	with discount

Amortissement d'obligations

Book value

$$\mathrm{BV}_t = (\mathrm{Fr} - \mathrm{C})_{n-t} a_j + \mathrm{C}$$

Immunisation

$P(i)$ Valeur actualisée des flux monétaires au taux effectif i.

$$P(i) = \sum_{t=0}^{n} (A_t v^t)$$

Note La duration de ***Macaulay*** est surnommée « *duration* » par défaut alors que la convexité ***modifiée*** est surnommée « *convexité* » par défaut.

Duration

$$D_{\text{mac}}(i) = \frac{-P'(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=0}^{n} (t)(A_t v^t)}{P(i)}$$

$$D_{\text{mod}}(i) = \frac{-P'(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{t=0}^{n} (t)(A_t v^{t+1})}{P(i)}$$

$$D_{\text{mod}}(i) = v D_{\text{mac}}(i)$$

Portfeuille de n obligations ayant chacune un prix de P_k :

$$D_{\text{mac}}(\text{ptf.}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{\text{mac}}(k\text{-ème obligation}) P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}$$

Convexité

$$C_{\text{mod}}(i) = \frac{P''(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t(t+1) v^{t+2} A_t}{P(i)}$$

$$C_{\text{mac}}(i) = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 v^t A_t}{P(i)}$$

$$C_{\text{mod}}(i) = (C_{\text{mac}}(i) + D_{\text{mac}}(i)) v^2$$

Approximations

Approximation linéaire Basée sur la duration modifiée.

$$P(i) \approx P(i_0)[1 - (i - i_0) D_{\text{mod}}(i_0)]$$

Approximation de Macaulay Basée sur la duration de Macaulay.

$$P(i) \approx P(i_0) \left(\frac{1 + i_0}{1 + i} \right)^{D_{\text{mac}}(i_0)}$$

Obligation zéro-coupon de n années

Mesure	Égale
C_{mac}	n^2
D_{mac}	n
C_{mod}	$\frac{n(n+1)}{(1+i)^2}$
D_{mod}	$\frac{n}{1+i}$

Taux au comptant et taux à terme

Notation

r_t Taux de rendement annuel effectif d'un investissement sur t années.

- **Taux au comptant** ou « *spot rate* ».
- Parfois appelé le taux zéro-coupon car $r_t = P_t^{-1/t} - 1$ où P_t est le prix d'une obligation zéro-coupon.
- C'est en fait une moyenne des taux sur la période.

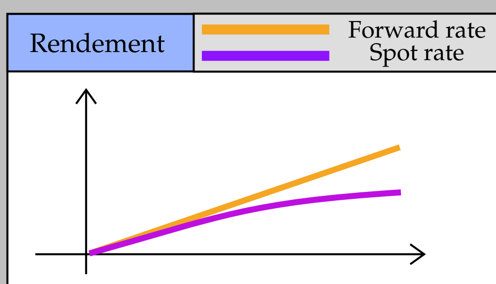
$$(1 + r_n)^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + f_{t_i})$$

$f_{[t_1,t_2]}$ Taux d'intérêt annuel effectif en vigueur de t_1 à t_2.

- **Taux à terme** ou « *forward rate* ».
- Habituellement, la période est d'un an ou d'un trimestre, mais en théorie il peut être appliqué sur n'importe quelle longueur de période.
- Le taux à terme est une anticipation pour une période future en date d'aujourd'hui.
- $(1 + f_{[t_1,t_2]})(1 + f_{[t_2,t_3]}) = (1 + f_{[t_1,t_3]})$
- Corrolaire :

$$f_{[t_1,t_2]} = \left[\frac{(1 + r_{t_2})^{t_2}}{(1 + r_{t_1})^{t_1}}\right]^{1/(t_2-t_1)} - 1$$

Pour bien saisir la distinction entre les deux :



Application aux obligations

1. Identifier les flux monétaires de l'obligation CF_t.
2. Actualiser chaque CF_t selon son taux à terme r_t pour déterminer le prix P.
3. Déterminer le taux de rendement i (« *Yield-to-Maturity* » , « *IRR* ») qui, en actualisant les CF_t, reproduit le prix P.
4. $P = \sum_t \frac{CF_t}{(1+r_t)^t} = \sum_t \frac{CF_t}{(1+i)^t}$

Analyse probabiliste des risques actuariels

Analyse combinatoire

Analyse combinatoire La théorie mathématique du comptage.

Principe de base de comptage

Deux expériences sont effectuées.
La première a m événements possibles, et la deuxième a n événements possibles.
Ensemble, il y a $m \times n$ événements possible pour les deux expériences.

On peut visualiser ceci avec un tableau :

$(1,1)$	$(1,2)$	$\ldots$	$(1,n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$\ldots$	$(2,n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$(m,1)$	$(m,2)$	$\ldots$	(m,n)

- Par exemple, la première cellule à l'événement 1 pour l'expérience 1 et l'événement 2 pour l'expérience 2.

Théorèmes probabilistes

Théorème du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème multinomial

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r): \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_r} x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$$

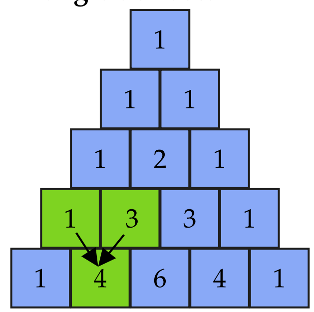
Relations factoriels

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Règle de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal



- Triangle des coefficients binomiaux
- Chaque nombre est la somme des 2 nombres directement au-dessus.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Moments

Moment d'ordre n *(autour de l'origine)*.	$\mathrm{E}[X^n] = \sum_i x_i^n \Pr(X = x_i)$
Moment ***centré*** d'ordre n.	$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n] = \sum_i (x_i - \mathrm{E}[X])^n \Pr(X = x_i)$
Moment ***réduit*** d'ordre n.	$\mathrm{E}\left[\left(\frac{X}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Moment ***centré-réduit*** d'ordre n.	$\mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Coefficient d'asymétrie (***Skewness***)	$\gamma_X = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^3\right]$
Coefficient d'aplatissement ***(Kurtosis)***	$\kappa_X = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^4\right]$
Fonction stop-loss	$\pi_X(d) = \mathrm{E}\left[\max(X-d;0)\right]$
Fonction d'excès-moyen	$\pi_X(d) = \mathrm{E}\left[X - d \vert X > d\right]$

Note : Il est intéressant de savoir que les moments impairs d'une loi normal avec moyenne nulle sont nuls. Ceci est la normal avec une moyenne nulle est parfaitement symétrique tel que $f(-x) = -f(x)$; pour plus de détails, voir ce vidéo YouTube.

Raccourci bernoulli

Soit
$$X = \begin{cases} a & p \\ b & 1-p \end{cases}$$
Alors
$$\text{Var}(X) = (b-a)^2 p(1-p)$$

Conditionnels

$$\text{E}[X] = \text{E}_Y[\text{E}[X|Y]] \qquad \text{V}(X) = \text{E}_Y[\text{V}(X|Y)] + \text{V}_Y(\text{E}[X|Y])$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \text{E}[XY] - \text{E}[X]\text{E}[Y]$$

1. $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$
2. $\text{Cov}(X,X) = \text{V}(X)$
3. $\text{Cov}(X,Y) \stackrel{\perp}{=} 0$
4. $\text{Cov}(c,X) = 0$
5. $\text{Cov}(cX,Y) = c\text{Cov}(X,Y)$
6. $\text{Cov}(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^m \beta_j Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$

$$\text{V}(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^2 \text{V}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\rho_{\text{P}}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Convolution

Convolution de deux variables aléatoires

Soit deux v.a. continues indépendantes X et Y.
Le produit de convolution de X et Y est :
$$f_X * f_Y(s) = f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) dy$$
$$F_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y) f_Y(y) dy$$

Soit deux v.a. discrètes indépendantes X et Y.
Le produit de convolution de X et Y est :
$$\Pr(X+Y=s) = \sum_{y=0}^{s} \Pr(X = s-y) \Pr(Y=y)$$

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire.
Soit la fonction

de densité	$f_X(x) = \Pr(X=x)$	Density Function
de masse de probabilité	$f_X(x) \neq \Pr(X=x)$	Probability Mass Function (PMF)
de répartition	$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$	Cumulative Density Function (CDF)
de survie	$S_X(x) = \Pr(X > x)$	Survival Function (CDF)

$F_X(x)$

Lois multivariées

Loi multinomiale

$$\Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) = \binom{n}{x_1, \ldots, x_r} p_1^{x_1} \ldots p_r^{x_r}$$

Loi normale multivariée

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{\Sigma})}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Théorèmes limites

Inégalité de Markov

Soit la variable aléatoire (non-négative) X.
Alors $\forall a > 0$ on a :

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{a}$$

Inégalité de Tchebychev

Soit la variable aléatoire X avec $\mu, \sigma^2 < \infty$.
Alors $\forall k > 0$ on a :

$$\Pr\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{ou} \qquad \Pr\left(|X-\mu| \geq k^*\right) \leq \frac{\sigma^2}{(k^*)^2}$$

Loi (faible) des grands nombres (WLLN)

Soit la suite de variables aléatoires (iid) $X_1, \ldots, X_n$ tel que $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 > 0$.
Alors $\forall \epsilon > 0$ où $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) \to 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

où $\mathbb{P}$ représente la convergence en probablité.

Théorème central limite (CLT)

Soit la suite de variables aléatoires (iid) $X_1, \ldots, X_n$ tel que $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 > 0$.
Alors pour $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \Leftrightarrow \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où $\mathcal{L}$ représente la convergence en distribution ("law").

Méthodes numériques

Génération de nombres aléatoires uniformes

Congruence

Les nombres a et b sont dits *équivalents*, ou **congruents modulo** m si leur différence est divisible par m.

$$a \equiv b \mod m \Leftrightarrow \frac{b-a}{m} = k, k \in \mathbb{Z}$$

P. ex. :

- $5 \equiv 14 \mod 3$ car $\frac{14-5}{3} = 3$—14 et 5 sont distants de 9, un multiple de 3.
- $-1 \equiv 5 \mod 2$ car $\frac{5-(-1)}{3} = 2$—5 et -1 sont distants de 6, un multiple de 3.

Générateurs congruentiels linéaires

Tout nombre dans la suite générée détermine le nombre suivant avec la relation $\boxed{x_i = (ax_{i-1} + c) \mod m}$ où $\boxed{0 \leq x_i < m}$ et :

a Multiplicateur.

c L'incrément.

- Si $c = 0$, le générateur est *multiplicatif*.
- Sinon, il est *mixe*.

m Le module.

x_0 L'amorce (« *seed* »).

- Pour générer des nombres entre 0 et 1, on défini $u_i = \frac{x_i}{m}$

Arithmétique des ordinateurs

Unité	Capacité	Symbole
Bit	1 b	b
Octet (« *byte* ») »	8 b	o
Kilooctet	1 024 o	ko
Megaoctet	1 048 576 o	mo
Gigaoctet	1 073 741 824 o	go

Base de numération b

Une "base" de numération correspond au nombre de chiffres utilisé pour représenter des nombres.

- Nous utilisons la base 10 comportant 10 chiffres $(0, 1, \ldots, 8, 9)$.
- La base 2 correspond au binaire avec 0 et 1 comme chiffres.
- Au delà de 10, on utilise des lettres pour représenter des chiffres.
- P. ex., la base 12 a les chiffres $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C$.

Représentation d'un nombre sous une base quelconque

Notation

x Nombre composé de m chiffres (ou symboles).

b Base de numération.

Sous cette notation, on écrit $\boxed{x = x_{m-1}x_{m-2}\ldots x_1x_0}$ où $\boxed{x_i \in [0, b-1]}$.

On peut réécrire ce chiffre comme $\boxed{x = \sum_{i=0}^{m-1} x_i b^i}$.

Par exemple, le nombre 12 sous la base 10 est $12 = 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0$.

Quotient d'une division

Partie entière de la division de deux entiers a et d : $\boxed{q = \left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor}$.

P. ex. : $\left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 4$.

Restant d'une division

L'écart entre le nombre et le prochain multiple de la division : $\boxed{r = a - d \times \left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor = a \mod d}$.

P. ex. : $13 - 3 \times \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 13 - 3 \times 4 = 1$.

- Il s'ensuit que $r \in \{0, 1, d - 1\}$.

Convertir un nombre de la base 10 à une base b

Pour convertir un nombre a vers la base b, on trouve récursivement le restant $r = a \mod b$ avec le quotient de la division précédente jusqu'à ce que le quotient soit nul.

P. ex., pour convertir le nombre 12 à la base 2 :

- $a \mod b = 12 \mod 2 = 0 = x_0$, le quotient est $\left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor = 6$ et le restant de la division 0.
- $q \mod b = 6 \mod 2 = 0 = x_1$, le quotient est $\left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3$ et le restant de la division 0.
- $3 \mod 2 = 1 = x_2$, le quotient est $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$ et le restant de la division 1.
- $1 \mod 2 = 1 = x_3$, le quotient est $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$ et le restant de la division 1.
- Donc, $12 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$