Contributeurs

ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

aut. Nicholas Langevin
aut. Gabriel Crépeault-Cauchon
aut. Alexandre Turcotte
aut., cre. Alec James van Rassel
src. Ilie-Radu Mitric

Rappels

Approximation Woolhouse

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

Hypothèse DUD

Mortalité

$${}_sq_x = sq_x,\ s \in (0,1)$$

Assurance

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}$$

$$A^{(m)}_{x::\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}$$

Rentes

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\, {}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\, {}_nE_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

où :

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Relations

Assurance

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Rente

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$$

$${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \underbrace{v^{\frac{1}{m}}\, {}_{\frac{1}{m}}p_x}_{{}_{\frac{1}{m}}E_x}\, \ddot{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{m}:\overline{n-\frac{1}{m}}|}$$

Note rente différée : pas faire l'erreur d'oublier de soustraire les n années sans paiements de la rente :

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & ,K = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & ,K = n, n+1 \end{cases}$$

Mortalité

Tables

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$$

$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \qquad {}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}$$

Sélection à l'âge $[x]$

$$\bar{A}^{\ 1}_{[x]+h:\overline{n-h}|} = \int_0^{n-h} e^{-\delta t}\, {}_tp_{[x]+h}\,\mu_{[x]+h+t}\,dt$$

$$= \int_h^n e^{-\delta(s-h)} \frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hp_{[x]}}\mu_{[x]+s}\,ds$$

1 Calcul de réserve

Notation

${}_hL$: Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h.

- Puisque la perte est évaluée au temps h, on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :
  $${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$$

${}_hV$: Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h.

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :
  $${}_hV = \text{E}[{}_hL]$$

${}_hV^g$: Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$: Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

${}_hV^I$ Réserve initiale au début de l'année h ;

$${}_hV^I = {}_hV + \pi$$

$VP_{@h}$: La valeur présente au temps h.

$VPA_{@h}$: La valeur présente anticipée au temps h.

$$VPA_{@t} = \text{E}[VP_{@h}]$$

Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$$
\begin{aligned}
{}_hL &= MZ_{x+h} - \pi\ddot{Y}_{x+h} \\
\text{Var}({}_hL) &= \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+h} - (A_{x+h})^2\right] \\
{}_hV^n &= MA_{x+h} - \pi\ddot{a}_{x+h} \\
&\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}
\end{aligned}
$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$$
\begin{aligned}
{}_hV^n &\overset{PEP}{=} M\left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right] \\
&\overset{PEP}{=} M\left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right]
\end{aligned}
$$

Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$$
\begin{aligned}
{}_hL &= b_{K_{x+h}+h+1}v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h}v^i \\
{}_hV^n &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1}v^{j+1}{}_jp_{x+h}q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h}v^i{}_jp_{x+h}
\end{aligned}
$$

Note

- La prestation b est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps h, il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

Calcul de réserves

Méthodes d'évaluation de la réserve

Prospective

$$
\begin{aligned}
{}_hV^g = \; & VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{prestations futures} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
& + VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{frais futurs} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
& - VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{primes futures} \\ \text{à recevoir}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Rétrospective

$$
{}_hV^g = \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x}
+ \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{primes recues} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x}
- \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{prestations à payer} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x}
$$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte n années :

Méthode prospective ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

Méthode rétrospective ${}_hV^n = 0 + \dfrac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA^{\;1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer **avant** h.

Relation : $\{T_x - t | T_x > t\} \overset{d}{=} T_{x+t}$ où $\overset{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$$
\begin{aligned}
{}_hV^n &= \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}b_{h+1}\right] v - \pi_h \\
{}_hV^g &= \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})\right] v - (G_h - e_h)
\end{aligned}
$$

La réserve pour l'année h est composée de :

- La réserve au temps $h+1$ si l'assuré survie l'année h et
- la prestation payable (et frais encourus) à $h+1$ si l'assuré décède lors de l'année h,
- actualisés de $h+1$ à h,
- moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année h.

où

G_h La prime (*gross premium*) à recevoir à $t = h$;

e_h Les frais reliés à la collecte de la prime (*per premium expenses*) ;

E_h Les frais reliés au paiement de la prestation (*settlement expenses*).

Avec la réserve pour l'année $h+1$ isolée :

$$
{}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}
$$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h+1$ isolé :

$$
\underbrace{(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g
$$

Note Si on a une assurance mixte dont la prestation est fonction de la réserve (e.g., $b_k = 1000 + {}_kV$), on commence de la fin puisqu'on sait que ${}_nV = M$.

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$$
{}_{h+s}V^g \approx \left({}_hV^g + G_h - e_h\right)(1-s) + \left({}_{h+1}V^g\right)(s),\ s \in (0,1)
$$

Profit de l'assureur

Notation

N_h : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps h.

${}_{h+1}V^E$: Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt (i), la mortalité (q_{x+h}) et les frais (e_h et E_h) **espérés** (***E**xpected*) pour l'année h.

${}_{h+1}V^A$: Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt (i'), la mortalité (q'_{x+h}) et les frais (e'_h et E'_h) **réellement** (***A**ctually*) encourus lors de l'année h.

Le profit de l'assureur pour l'année h sera donc ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$.

Si uniquement ______ change(nt), alors le profit sur ______ pour l'année h est :

les frais $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

l'intérêt $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e_h)\right)(i' - i)$.

la mortalité $\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g\right)\left(N_h q_{x+h} - N_h q'_{x+h}\right)$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.
Par exemple :

- Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e'_h)\right)(i' - i)$.
- Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_tV$.

$$
\frac{\partial}{\partial t}{}_tV^g = \delta_t\,{}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t}
$$

- Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps t.
- Le montant est fixe et payé au début de l'année t.
- Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à t.

on peut approximer ${}_hV^g$ avec la Méthode d'Euler :

$$
{}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h\left[(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}\right]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}}
$$

Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$$
\begin{aligned}
{}_hV^e = DAC_h &= VPA_{@t}\,(\text{frais}) - VPA_{@t}\,(\text{primes pour les frais futurs}) \\
&\equiv {}_hV^g - {}_hV^n
\end{aligned}
$$

- « *expense reserve* » ou « *Deferred Acquisition Costs* ».

- Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.
- Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^g = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

P^g : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute G).

P^n : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette P).

P^e : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^g - P^n$$

FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

π_0^{FTP} Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} bvq_{[x]}$$

π_h^{FTP} Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \ldots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} b\frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition ;
- Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contrat ;
- Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple ;
- Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première ;
- **Note** : Lorsqu'on calcule la réserve FTP ${}_hV^{\text{FTP}}$ on n'a pas besoin de calculer π_0^{FTP}, on y va directement avec π_h^{FTP}.

2 Modèles à plusieurs états

${}_{k}Q_t^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état i au temps t à l'état j au temps $t+k$.

- De façon équivalente, ${}_{k}p_{x+t}^{ij}$.

M_t État au temps t parmi les $\{1, 2, \ldots, r\}$ ou $\{0, 1, \ldots, r\}$ états.

- De façon équivalente, $M(t)$.
- Le processus M_t est une "Chaine de Markov" ssi $\forall t = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} Q_t^{(i,j)} &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, \ldots, M_0) \\ &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Q}_t$ Matrice des probabilités de transition.

- Les transitions sont en fin d'année.
- Si la matrice :

  dépend du temps alors M_t est une chaîne de Markov **non-homogène**.

  ne dépend pas du temps alors M_t est une chaîne de Markov **homogène**.

  Également, dans ce cas-ci, on dénote $\boldsymbol{Q}_t$ par $\boldsymbol{Q}$ puisque $Q_t^{ij} = Q^{ij}\ \forall t \geq 0$

${}_{k}\boldsymbol{Q}_t$ Matrice de k-étapes des probabilités de transition.

$$_{m+n}Q_t^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{r} {}_{m}Q_t^{(i,k)}\ {}_{n}Q_{t+m}^{(k,j)}$$

En temps continu

On généralise la notation utilisée auparavant (le *modèle actif-décédé*) pour des modèles à plusieurs états.

Notation et hypothèses

$Y_x(t)$ Processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$ de l'état dont les transitions peuvent se produire à n'importe quel moment $t \geq 0$ et donc pas seulement en fin d'année ;

- De façon équivalente, $Y(x+t)$;
- $Y_x(t) = i$ pour un assuré d'âge (x) dans l'état i au temps t (ou, de façon équivalente, à l'âge $x+t$).

${}_{k}p_{x+t}^{ij}$ Probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps t soit dans l'état j (où j peut être égale à i) au temps $t+k$.

$${}_{k}p_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(t) = j | Y_x = i)$$

${}_{k}p_{x+t}^{\overline{ii}}$ Probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps t reste dans dans l'état i continument jusqu'au temps $t+k$.

$${}_{k}p_{x+t}^{\overline{ij}} = \Pr(Y_x(s) = i, \underbrace{\forall s \in [0,t]}_{\text{sans sortir et revenir}} | Y_x = i)$$

- Il s'ensuit que ${}_{k}p_{x+t}^{ij} \geq {}_{k}p_{x+t}^{\overline{ij}}$ car :

$${}_{k}p_{x+t}^{ij} = {}_{k}p_{x+t}^{\overline{ij}} + \Pr(Y_x(t) = i, \text{après avoir sorti et revenu} | Y_x = i)$$

μ_x^{ij} **Force de transition** de l'état i à l'état j ($\underline{i \neq j}$) pour un assuré d'âge (x).

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_{h}p_x^{ij}}{h},\ i \neq j$$

- On trouve que $\boxed{\text{pour } i \neq j}$:

$${}_{h}p_x^{ij} = h\mu_x^{ij} + o(h) \quad \Rightarrow {}_{h}p_x^{ij} \quad \approx h\mu_x^{ij},$$

  où $h > 0$ est très petit.

Hypothèses du modèle à plusieurs états

1. Le processus stochastique Y_t est une chaîne de Markov.
   $\Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i, Y_u, 0 \leq u < 1) = \Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i)$

2. Pour tout intervalle de longueur h,
$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{2, ou plus, transitions}\\ \text{pendant une période de longueur } h\end{array}\right) = o(h)$$

Note Une fonction $g \in o(h)$ si $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h} = 0$.

3. Pour tous les états i et j, et tout âge $x \geq 0$, ${}_tp_x^{ij}$ est différentiable par rapport à t.

› Cette hypothèse veille au bon déroulement mathématique en assurant :

– L'existence de la limite dans la définition de μ_x^{ij} ;

– Que la probabilité d'une transition dans un intervalle de longueur h tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Remarques

1. $\boxed{{}_hp_x^{ii} = {}_hp_x^{\overline{ij}} + o(h)}$ où $o(h)$ est la probabilité de sortir et revenir de l'hypothèse 2.
2.
$$\begin{aligned}{}_hp_x^{ij} \geq {}_hp_x^{\overline{ii}} &= 1 - \sum_{j=0, j\neq i}^{n} {}_hp_x^{ij} + o(h)\\ &\equiv 1 - h\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h)\end{aligned}$$

Formules

Nous pouvons exprimer toutes les probabilités en fonction des forces de transitions.
Approche directe :
$${}_tp_x^{\overline{ii}} = \exp\left\{-\int_0^t \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+s}^{ij}\, ds\right\}$$
Transition d'un état au prochain pour un **modèle d'invalidité permanente** :
$${}_up_x^{01} = \int_{t=0}^{u} ({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{11}})dt \approx \int_{t=0}^{u} ({}_tp_x^{\overline{00}})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{11}})({}_{dt}p_{x+t}^{01})$$

Transition d'un état à un état supérieur :
$$\begin{aligned}{}_up_x^{02} &= \int_{t=0}^{u}\left\{({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t}p_{x+t}^{12})\right\} + \left\{({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{02})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{22}})\right\} dt\\ &= 1 - {}_up_x^{\overline{00}} - {}_up_x^{01}\end{aligned}$$

Approximations

Pour les modèles où il est possible de sortir et de revenir à un état.

Kolmogorov's Forward Equations

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0, k\neq j}^{n}\left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk}\right)$$
Avec la **notation** $\mu_x^{ii} = -\sum_{k=0, k\neq i}^{n}\mu_x^{ik}$ on a :
$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0}^{n}{}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}$$
où μ_x n'est plus une force de transition mais **représente plutôt une notation** pour simplifier l'expression.

On peut récrire l'expression en forme matricielle :
$$\frac{\partial}{\partial t}{}_t\boldsymbol{P}_x = {}_t\boldsymbol{P}_x\boldsymbol{P}_{x+t}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}{}_tp_x^{00} & {}_tp_x^{01} & \cdots & {}_tp_x^{0n}\\ {}_tp_x^{10} & {}_tp_x^{11} & \cdots & {}_tp_x^{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}_tp_x^{n0} & {}_tp_x^{n1} & \cdots & {}_tp_x^{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}_tp_x^{00} & {}_tp_x^{01} & \cdots & {}_tp_x^{0n}\\ {}_tp_x^{10} & {}_tp_x^{11} & \cdots & {}_tp_x^{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}_tp_x^{n0} & {}_tp_x^{n1} & \cdots & {}_tp_x^{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{x+t}^{00} & \mu_{x+t}^{01} & \cdots & \mu_{x+t}^{0n}\\ \mu_{x+t}^{10} & \mu_{x+t}^{11} & \cdots & \mu_{x+t}^{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{x+t}^{n0} & \mu_{x+t}^{n1} & \cdots & \mu_{x+t}^{nn}\end{pmatrix}$$

Méthode d'Euler

Pour $h > 0$ très petit, on a :
$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ij} \approx \frac{({}_{t+h}p_x^{ij} - {}_tp_x^{ij})}{h}$$
avec la condition initiale $\forall i \neq j$:

${}_0p_x^{ii} = 1$ et ${}_0p_x^{ij} = 0$

Paiements

$\ddot{a}^{\overline{ii}}_{x:\overline{n}|}$ La VPA d'une rente temporaire payant 1$ à une vie dans l'état i seulement lorsqu'elle est dans l'état i.

$$\ddot{a}^{\overline{ii}}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x^{\overline{ii}} dt$$

On a aussi plus généralement :

$$\ddot{a}^{ij}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x^{ij} dt$$

$$\bar{A}_x^{ij} = \int_0^\infty \sum_{k\neq j} v^t {}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} dt$$

Modèle à plusieurs décroissances

- en anglais, « *Multiple Decrement Model* » ;
- Précédemment, il y avait résiliation du contrat uniquement en raison d'un décès ;
- Cependant, on généralise pour évaluer les primes et réserves de contrats dont les prestations diffèrent en fonction des causes de décroissances ;
- Ces modèles sont en fait des cas particuliers des chaînes de Markov.

T_x Temps de décroissance de x (alias, la *durée de vie* résiduelle de x) ;

J Cause de la décroissance ;

- Variable aléatoire discrète avec $J \in \{1, 2, \ldots, m\}$ où m est le nombre de causes possibles de décroissance.

${}_tq_x^{(j)}$ Probabilité de décroissance d'ici t années pour un assuré d'âge x en raison de la je cause ;

$$ {}_tp_x^{0j} = {}_tq_x^{(j)} = \Pr(T_x \leq t, J = j)$$

- Il s'ensuit de l'équation que ${}_tq_x^{(j)}$ est une distribution conjointe de T_x et J.

${}_tq_x^{(\tau)}$ Probabilité de décroissance d'ici t années pour un assuré d'âge x peu importe la cause ;

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \Pr(T_x \leq t) \\ &= \sum_{j=1}^m \Pr(T_x \leq t, J = j) = \sum_{j=1}^m {}_tq_x^{(j)} \end{aligned}$$

- En parallèle, ${}_tp_x^{(\tau)}$ est la probabilité de survivre pendant t années à toutes les causes de décroissance ;
- Cependant, ${}_tp_x^{(j)}$ **n'existe pas** et ${}_tp_x^{(j)} \neq 1 - {}_tq_x^{(j)}$.

Fonctions de densité

$$\begin{aligned} f_{T_x,J}(t,j) &= ({}_tp_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(j)}) \\ f_J(j) &= \int_0^\infty f_{T_x,J}(t,j)dt = {}_\infty q_x^{(j)} \\ \mathrm{E}[T_x] &= \int_0^\infty {}_tp_x^{(\tau)} dt \\ f_{J|T_x}(J|t) &= \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{f_{T_x}(t)} \equiv \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \end{aligned}$$

Force de décroissance totale

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^m \mu_{x+t}^{(j)} \\ f_{T_x}(t) &= \sum_{j=1}^m f_{T_x,J}(t,j) = ({}_tp_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(\tau)}) \\ {}_tq_x^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^m {}_tq_x^{(j)} \end{aligned}$$

De plus :

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds}$$

Force de décroissance de la j^{e} cause

$\mu_{x+t}^{(j)}$ Force de décroissance de la j^{e} cause pour un assuré d'âge x.

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$$

Incorporation de K_x

$$\begin{aligned} {}_{k|}q_x^{(j)} &= \Pr(k \leq T_x < k+1, J = j) \\ &= \int_k^{k+1} f_{T_x,J}(t,j)dt \equiv \int_0^{k+1} f_{T_x,J}(t,j)dt - \int_0^k f_{T_x,J}(t,j)dt \\ &= {}_{k+1}q_x^{(j)} - {}_kq_x^{(j)} \end{aligned}$$

Aussi

$$ {}_{k|}q_x^{(j)} = \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt = {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}$$

Note Développer cette expression s'il y a un manque d'information sur des ℓx ; voir l'exercice 2.10 du cours 8 pour un exemple.
Loi marginale :

$$\begin{aligned} {}_{k|}q_x^{(\tau)} &= \Pr(K_x = k) = \sum_{j=1}^{m} \Pr(K_x = k, J = j) = \sum_{j=1}^{m} {}_{k|}q_x^{(j)} \\ &\equiv {}_{k+1}q_x^{(\tau)} - {}_{k}q_x^{(\tau)} = {}_{k}p_x^{(\tau)} - {}_{k+1}p_x^{(\tau)} \\ &\equiv {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)} \end{aligned}$$

Tables de mortalité

${}_{r}d_x$ Nombre de décès d'une cohorte de ℓx personnes entre les temps 0 et r (alias, entre les âges x et $x+r$) ;

${}_{r}d_x^{(j)}$ Nombre de décès d'une cohorte de ℓx personnes entre les temps 0 et r en cause la décroissance j.

Note Pour des paiements selon l'état, voir l'exercice 2.12 à la fin du cours 8.
Si $\mu_{x+t}^{(1)}, \ldots, \mu_{x+t}^{(m)}$ sont des constantes $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(m)}$ alors :

$$\frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(1)} + \cdots + \mu_{x+t}^{(m)}} = k = \text{constante}$$

$$\Rightarrow {}_{t}q_x^{(j)} = k_t q_x^{(\tau)}$$

Modèles à décroissance unique associés

$T_x'^{(j)}$ Temps de décroissance de x (alias, la *durée de vie* résiduelle de x) **en supposant** qu'il est uniquement exposé à la cause j ;

- C'est une durée de vie théorique, mais utile ;
- Comme il y a un seul type de décès, c'est le modèle actif-décédé de vie I ;
- Généralement, on suppose que les décroissances $T_x'^{(j)}$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$ sont indépendantes ;
- Avec l'indépendance, on trouve que la distribution de T_x est la même que la première cause de décès $\boxed{T_x \overset{d}{=} \min\left\{T_x'^{(1)}, T_x'^{(2)}, \ldots, T_x'^{(m)}\right\}}$.

${}_{t}q_x'^{(j)}$: Probabilité de décroissance d'ici t années pour un assuré d'âge x en raison de la je cause **en supposant** qu'il est uniquement exposé à la cause j ;

- Puisque c'est le modèle actif-décédé, il s'ensuit que $\boxed{{}_{t}p_x'^{(j)} = 1 - {}_{t}q_x'^{(j)}}$.

On peut relier les 2 modèles :

$$\mu_{x+s}^{(j)} = \mu_{x+s}'^{(j)}$$

$${}_{t}p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_{t}p_x'^{(j)}$$

- La multiplication des ${}_{t}p_x$ ci-dessus illustre le lien avec la fonction de survie du minimum.

Donc :

$${}_{t}q_x^{(\tau)} = {}_{t}q_x^{(1)} + {}_{t}q_x^{(2)} + \cdots + {}_{t}q_x^{(m)} \qquad {}_{t}p_x^{(\tau)} = {}_{t}p_x'^{(1)} \times {}_{t}p_x'^{(2)} \times \cdots \times {}_{t}p_x'^{(m)}$$

Il s'ensuit que $\boxed{{}_{t}p_x^{(\tau)} \leq {}_{t}p_x'^{(j)}, \forall j = 1, 2, \ldots, m}$ et $\boxed{{}_{t}q_x'^{(j)} \geq {}_{t}q_x^{(j)}, \forall j = 1, 2, \ldots, m}$.

Interrelations

Hypothèses

Pour $x \in \mathbb{Z}^+, t \in [0,1], j = 1, 2, \ldots, m$,

DUD ${}_{t}q_x'^{(j)} = t \times q_x'^{(j)}$;

FC $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$.

- Si les mortalités $T_x'^{(j)}$ suivent des lois DeMoivre, alors DUD est exact.

Trouver $q_x^{(j)}$ de $q_x^{\prime(j)}$

Sachant $q_x^{\prime(1)}, \ldots, q_x^{\prime(m)}$,

1. Poser une hypothèse (DUD ou FC) sur les décroissances uniques $T_x^{\prime(j)}$ pour trouver ${}_sq_x^{\prime(j)}$;
2. Trouver $\mu_{x+s}^{\prime(j)} = \mu_{x+s}^{(j)}$;
3. Trouver ${}_sp_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+s}^{(j)}$;
4. Trouver ${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$.

Sous DUD

$$q_x^{(j)} = q_x^{\prime(j)} \int_0^t \left[\prod_{k \neq j, k=1}^{m} \left(1 - t \cdot q_x^{\prime(k)}\right) \right] dt$$

Cas particuliers pour $t = 1$:

- Si $m = 2$, $\boxed{q_x^{(1)} = q_x^{\prime(1)} \left(1 - \frac{q_x^{\prime(2)}}{2}\right)}$ et $\boxed{q_x^{(2)} = q_x^{\prime(2)} \left(1 - \frac{q_x^{\prime(1)}}{2}\right)}$;
- Si $m = 3$, $\boxed{q_x^{(1)} = q_x^{\prime(1)} \left[1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{\prime(2)} + q_x^{\prime(3)}\right) + \frac{1}{3}\left(q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right)\right]}$.

Sous FC

$${}_tq_x^{(j)} = \frac{\ln(p_x^{\prime(j)})}{\ln(p_x^{(\tau)})} {}_tq_x^{(\tau)}$$

Trouver ${}_tq_x^{\prime(j)}$ de ${}_tq_x^{(j)}$

Sachant ${}_tq_x^{(1)}, \ldots, {}_tq_x^{(m)}$,

1. Poser une hypothèse (DUD ou FC) sur les décroissances $(T_x^{(j)})$ pour trouver ${}_tq_x^{(j)}$;
2. Trouver $\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\frac{\partial_t q_x^{(j)}}{\partial t}}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \mu_{x+t}^{\prime(j)}$;
3. Trouver ${}_tp_x^{\prime(j)} = \mathrm{e}^{\int_0^t \mu_{x+s}^{\prime(j)} ds}$.

Sous DUD

$${}_tq_x^{\prime(j)} = 1 - \left(1 - t \times q_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}$$

$${}_tp_x^{\prime(j)} = \left({}_tp_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}$$

Sous FC

$${}_tp_x^{\prime(j)} = \left({}_tp_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}$$

3 Contrats d'assurance et de rente sur plusieurs têtes

Notation

T_x et T_y Durée de vie future pour les individus d'âges (x) et (y) ;

› Nous étudions le cas le plus simple où $T_x \perp T_y$.

f_{T_x,T_y} et F_{T_x,T_y} Fonction de densité (répartition) du couple (x, y) ;

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = \Pr(T_x \leq t, T_y \leq s) = \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{s} f_{T_x,T_y}(u,v)dvdu$$
$$\overset{T_x \perp T_y}{=} \Pr(T_x \leq t)\Pr(T_y \leq s) = F_{T_x}(t)F_{T_y}(s)$$

Souvent, les contrats d'assurance (ou de rente) d'un couple (x, y) sont définis selon ces deux statuts :

1. Statut conjoint (ou premier décès).
2. Statut dernier survivant (ou dernier décès).

Statut conjoint

› Dénoté xy, (xy) ou $x : y$;

› Demeure actif tant que (x) *et* (y) sont en vie et donc cesse au premier décès parmi (x) et (y).

$$T_{xy} = \min\{T_x, T_y\}$$

De plus :

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy} &= S_{T_{xy}}(t) = \Pr(\min\{T_x, T_y\} > t) \\ &= \Pr(T_x > t, T_y > t) = S_{T_x,T_y}(t,t) \\ {}_tq_{xy} &= 1 - {}_tp_{xy} = \Pr(T_x \leq t \cup T_y \leq t) \end{aligned}$$

Statut dernier survivant

› Dénoté $\overline{xy}$, $(\overline{xy})$ ou $\overline{x : y}$.

$$T_{\overline{xy}} = \max\{T_x, T_y\}$$

De plus :

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{xy}} &= F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \Pr(\max\{T_x, T_y\} \leq t) \\ &= \Pr(T_x \leq t, T_y \leq t) = F_{T_x,T_y}(t,t) \\ {}_tp_{\overline{xy}} &= 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = \Pr(T_x > t \cup T_y > t) \end{aligned}$$

Relations entre probabilités

$$\begin{aligned} {}_tq_{xy} &= \Pr(T_x \leq t \cup T_y \leq t) = \Pr(T_x \leq t) + \Pr(T_y \leq t) - \Pr(T_x \leq t, T_y \leq t) \\ &= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{\overline{xy}} \\ {}_tp_{\overline{xy}} &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \end{aligned}$$

Relations entre variables aléatoires

En gros, (xy) plus $(\overline{xy})$ est égale à la somme de (x) et (y) avec ces 3 relations principales :

$$\begin{aligned} T_{xy} \times T_{\overline{xy}} &= T_x \times T_y \\ T_{xy} + T_{\overline{xy}} &= T_x + T_y \\ a^{T_{xy}} + a^{T_{\overline{xy}}} &= a^{T_x} + a^{T_y} \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} {}_tq_{xy} + {}_tq_{\overline{xy}} &= {}_tq_x + {}_tq_y \\ \mathring{e}_{xy} + \mathring{e}_{\overline{xy}} &= \mathring{e}_x + \mathring{e}_y \\ \bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} &= \bar{A}_x + \bar{A}_y \\ \bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} &= \bar{a}_x + \bar{a}_y \end{aligned}$$

D'autres notations

$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{(x) et (y) sont en vie au temps u,} \\ \text{mais qu'au moins l'un décède au cours} \\ \text{des } t \text{ prochaines années}\end{array}\right) = \Pr(u < T_{xy} \leq u + t) = {}_{u|t}q_{xy}$$

$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{(x) meurt avant le temps } t \\ \text{et avant } (y)\end{array}\right) = \Pr(T_x \leq t, T_x < T_y) = {}_tq^{1}_{xy}$$

$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{(x) meurt avant le temps } t \\ \text{et après le décès de } (y)\end{array}\right) = \Pr(T_x \leq t, T_y < T_x) = {}_tq^{2}_{xy}$$

$$\Pr\left(\text{(x) meurt avant (y)}\right) = \Pr(T_y < T_x) = {}_\infty q^{1}_{xy}$$

Force de mortalité

$$\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T_{xy}}(t)}{S_{T_{xy}}(t)}$$

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{S_{T_{\overline{xy}}}(t)}$$

Si $T_x \perp T_y$,

$$\mu^{01}_{x+t:y+t} = \mu^{23}_{y+t} = \mu_{y+t}$$

$$\mu^{02}_{x+t:y+t} = \mu^{13}_{x+t} = \mu_{x+t}$$

$$\mu^{03}_{x+t:y+t} = 0$$

Puis (voir la preuve à la page 15 des notes de cours du chapitre 11)

$$_sp_{xy} = {}_sp_{x\,s}p_y$$

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$