Notes de cours
Mathématiques financières
Automne 2017
ACT-1001

Gabriel Crépeault-Cauchon

Dernière mise à jour : 5 décembre 2017

Table des matières

Chapitre 1

Mesure du taux d'intï£¡rï£¡t

Introduction

Les mathématiques financières sont utilisées dans plusieurs contextes :

— dépôt (*deposit*

— emprunt (*loan*

— prêt hypothécaire (*mortgage*

— obligation (*bond*

— investissement.

Remarque 1. *Par défaut, t mesure le temps en années, C représente le Capital et i représente le taux d'intérêt.*

Note : Il est possible de donner des dates auquel cas il peut être question d'années et de mois ($\frac{1}{12}$) ou d'années et de jours ($\frac{1}{365}$).

Remarque 2. *La t^e année va de $(t-1)$ à t. Par défaut, les calculs sont donc basé sur la fin de l'année.*

Exemple

Du 1er mars au 1er juin, il y a...

— si on compte en mois, il y a 3 mois ou $\frac{1}{4}$ an.

— si on compte en jours, $31+30+31=92$ jours ou $\frac{92}{365}$ ans.

Il existe plusieurs sortes de taux, notamment :

— TIOL : Taux inter-bancaire offert à Londres (*London Interbank Overnight Rate*)

— Taux de base des banques (*prime rate)*)

— Taux cible de la Réserve Fédérale (*Federal Reserve Target Rate*)

— Taux hypothécaire (*Mortgage Rate*)

Taux de rendement et taux d'intérêt

En général, on parle de **taux d'intérêt** (*interestrate*) quand il est fixé et connu d'avance au moins pour une certaine période. Sinon, on parle plutôt d'un **taux de rendement** (*Rate of Return*), lequel ne se mesure seulement qu'à *posteriori*. il faut donc faire attention à la terminologie et à la notation.

1.1 Accumulation d'intÃľrÃłt et taux d'intï£¡rï£¡t effectif

Remarque 3. *par convention, le taux d'intérêt est annuel (exemple* $8\%/$*an).*

Cela implique, conceptuellement, que les intérêts sont versés annuellement et qu'ils sont réinvestis.

exemple

Dépôt de $100\,000\$$. Taux d'intérêt de $2\%/$an.

$$\begin{array}{ll}
\text{À } t=1, & C + Ci = C(1+i) \\
\text{À } t=1, & C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)^2 \\
\text{À } t=1, & C(1+i)^{n-1} + c(1+i)^{n-1}i = C(1+i)^n
\end{array}$$

Question en suspens : mais que vaut le dépôt si $t \nexists \mathbb{Z}$?
Réponses :

— il est possible qu'il vaille $C(1+i)^{\lfloor t \rfloor}$ si aucun intérêt n'Est versé en cas de retrait en cours d'année.

— on est en présence d'intérêt composé (*compound*) ou simple

Notation

$a(t) =$ facteur d'accumulation (*accumulation factor*) de 0 à t
$A(t) =$ fonction de montant accumulé

Attention : il faut positionner $t = 0$!

Voici nos 2 premières équations d'accumulation

$$\boxed{A(t) = A(0) \cdot\ a(t)} \tag{1.1}$$

où

$$\boxed{a(t) = (1+i)^t} \tag{1.2}$$

Remarque 4. *Par défaut, l'intérêt est composé, sauf pour certains produits qui ont leur propre type de taux.*

Exemple 1.3 (rectifié) du livre

Monsieur Tremblay dépose $1\,000\$$ dans son compte de 2010-12-31. Les intérêts, au taux annuel de 5%, sont versés le 31 décembre. Il retire $200\$$ le 2012-12-31, dépose $100\$$ le 2013-12-31 et retire $250\$$ le 2015-12-31.

Quel est le solde de compte (*balance*) le 2017-12-31 ?

1$^{\text{ère}}$ approche :

Date	**Solde du compte**	
2010-12-31		$= 1\ 000,00\$$
2012-12-31	$1\ 000(1,05)^2 - 200$	$= 902,50\$$
2013-12-31	$902,50(1,05) + 100$	$= 1\ 047,62\$$
2015-12-31	$1\ 047,625(1,05)^2 - 250$	$= 905,0066\$$
2017-12-31	$905,0066(1,05)^2$	$=$ **997,77$**

2$^{\text{ième}}$ approche :

$1000(1,05)^7 - 200(1,05)5 + 100(1,05)^4 - 250(1,05)^2 =$ **997,77$**

Il suffit d'avancer les différents montants dans le temps, en considérant l'intérêt gagné (lors de dépôts supplémentaires) et l'intérêts perdu (lors de retrait supplémentaire). le choix de $t = 0$ n'est pas important ! Il suffit juste de compte le nombre d'années entre nos 2 dates :

$$\frac{a(t+5)}{a(t)} = \frac{1+i)^{t+5}}{(1+i)^t} = (1+i)^5$$

Si on change le contexte, et qu'on ferme le compte le 2018-03-31 :

en mois, $\quad 997,77(1,05)^{\frac{3}{12}} \quad = 1\ 000,01\$$
en jours, $\quad 997,77(1,05)^{\frac{31+28+31}{365}} \quad = 1\ 000,01\$$

Exemple

Madame Roy a $1\ 000\$$ à déposer.

a) Quelle sera la valeur accumulée dans 5 ans si $i = 3\%$?

$$1000(1,03)^5 = 1159,27\$$$

b) Combien de temps faudra-t-il pour accumuler $1200\$$ si $i = 3\%$?

$$\begin{aligned} 1000(1,03)^t &= 1200 \\ 1,03^t &= 1,2 \\ t\ln(1,03) &= \ln(1,2) \\ t &= \frac{\ln(1,2)}{\ln(1,03)} \\ t &= 6,168ans \end{aligned}$$

c) Quel taux i faudra-t-il utiliser pour accumuler $1\ 200\$$ en 5 ans ?

$$1000(1+i)^5 = 1200$$
$$1+i = (\frac{1200}{1000})^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \textbf{i=0,0371=3,71\%}$$

1.1.1 Intérêt simple

On sait que par défaut, l'intérêt est composé. **L'intérêt simple est souvent utilisé lorsque $t < 1$.**

En contexte **d'intérêt simple**, $t = 0$ au début de la transaction.

Exemple 1.4 du livre (écourté)

Le 31 janvier, Monsieur Tremblay emprunte (intérêt simple) à Mdame Roy et lui remet un billet à ordre de $5\ 000\$$ (*promisory note*). Selon le billet, remboursement le 30 avril, $i = 12\%$. Le 1er mars, Madame Roy vend le billet à Monsieur Gagnon. Monsieur Gagnon demande $i = 15\%$.

a) Combien devra payer Monsieur Tremblay le 30 avril ?

$28 + 31 + 30 = 89$ jours d'écoulés :

$$5000(1 + \frac{89}{365} * 0,12) = 5\ 146,30\$$$

b) Combien paye Monsieur Gagnon le 1er mars ?

nombre de jours$= 30 + 30 = 60$.

$$x(1 + \frac{60}{365} * 0,15) = 5\ 146,30 \Leftrightarrow x = 5\ 022,46\$$$

c) Quel taux i réalise Madame Roy ?

$$5000(1 + \frac{29}{365} * i) = 5\ 022,46 \Leftrightarrow i = 5,65\%$$

on revient au contexte d'intérêt composé...

Question : Est-ce que le taux est nécessairement annuel ?
Réponse : Non !

i taux d'intérêt effectif *annuel*

j taux d'intérêt effectif *par période*

Exemple

Georgette a $1\ 000\$$ à déposer, quelle sera la valeur de son investissement dans 2 ans si :

a)	$j = 1\%/mois$	$1000(1,01)^24 = 1\ 069,73\$$
b)	$j = 2\%/trimestre$	$1000(1,02)^8 = 1\ 171,66\$$
c)	$j = 6\%/semestre$	$1000(1,06)^4 = 1\ 262,48\$$
d)	$i = 12,36\%$	$1000(1,1236)^2 = 1\ 262,48\$$

Définition 1. *2 taux d'intérêt sont dit équivalents si on obtient la même valeur accumulée en utilisant l'un ou l'autre.*

Définition 2. *Le taux d'intérêt annuel effectif est la différence entre les valeurs de début et fin d'année.*

Calcul :

$$i = \frac{(valeur\ fin\ d'année) - (valeur\ début\ d'année)}{(valeur\ début\ d'année)} \tag{1.3}$$

également,

$$i = \frac{(valeur\ fin\ d'année)}{(valeur\ début\ d'année)} - 1 \tag{1.4}$$

Question : est-ce que le taux d'intérêt est nécessairement constant ? Non ! Il faut donc préciser la période t en question.

Définition 3. *i_t est le taux d'intérêt annuel en vigueur de $(t-1)$ à (t).*

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} \tag{1.5}$$

Ce qui équivaut aussi à :

$$i_t = \frac{a(t)}{a(t-1)} - 1 \tag{1.6}$$

1.2 Valeur actualisÃl'e

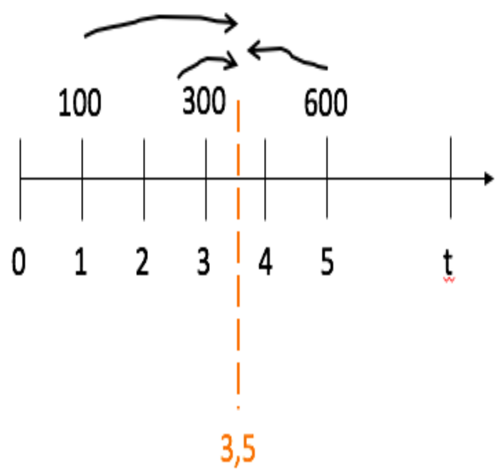
(En anglais : Present value)
~~valeur présente~~ ça ne veut rien dire, mauvaise traduction.

Inversement, on peut se demander combien d'argent il faut aujourd'hui pour accumuler un certain montant K à t. Il s'agit alors de la valeur actualisée (à 0) de K.

On connaît $\quad A(n) = k$
$\qquad\qquad\quad a(t) pour t \geq 0$

$\boxed{A(0) \cdot a(n) = k} \Leftrightarrow A(0) = \frac{k}{a(n)} = k(a())^{-1}$

Remarque 5. *Il faut connaître les montants, le moment où chaque montant est versé et le moment où on fait l'évaluation de chaque montant.*



Il faut mettre des signes distincts $(+/-)$ si dépôts et retraits

a(t) permet de déplacer $1\$$ t années dans le futur.
v(t) permet de déplacer $1\$$ t années dans le passé.

$$v(t) = \frac{1}{a(t)} \text{ si } t \geq 0$$

Intérêt composé :

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{a(t)} = \frac{1}{(1+i)^t} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = (1+i)^{-t} \text{ si } t \geq 0} \tag{1.7}$$

Notation

$$v = \frac{1}{1+i}$$

On peut aussi préciser le taux sous-jacent utilisé : $v_{0,08} = \frac{1}{1+0,08}$.

Remarque 6. ***facteur d'accumulation :*** *plus i est élevé, plus ça prend de la valeur et moins ça prends de temps pour atteindre une valeur choisie*

Remarque 7. ***facteur d'actualisation :*** *plus i est élevé, moins ça vaut cher aujourd'hui (relation inverse entre rendement et le prix*

Exemple 1.5 du livre (corrigé)

Mario veut 1 000 000$ dans 25 ans. Voici ses options :

- Fond commun de placement avec un taux historique de $19,5\%$/an
- Coupon zéro avec un taux garanti de $11,5\%$/an.

a) $1000000(1,195)^{-25} = 11635,96\$$
b) $1000000(1,115)^{-25} = 65785,22\$$
c) Mario a 25 000$ aujourd'hui, quel doit être son taux minimal pour atteindre son objectif ?

$$25000(1+i)^{25} = 1000000 \Leftrightarrow i = \left(\frac{1000000}{25000}\right)^{\frac{1}{25}} - 1 \Leftrightarrow \boxed{\text{i = 0,158097}}$$

d)

$$11635,96\$(1,115)^{t} = 1000000 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1000000/11635,96}{\ln 1,115} \Leftrightarrow \boxed{\text{t = 40,914}}$$

Remarque 8. *Bien lire les énoncés des questions pour s'assurer de bien répondre !*

Intérêt simple :

$$\boxed{a(t) = 1 + it} \tag{1.8}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{1+it}} \tag{1.9}$$

1.2.1 Bons du Trésor canadien

Éléments à savoir :

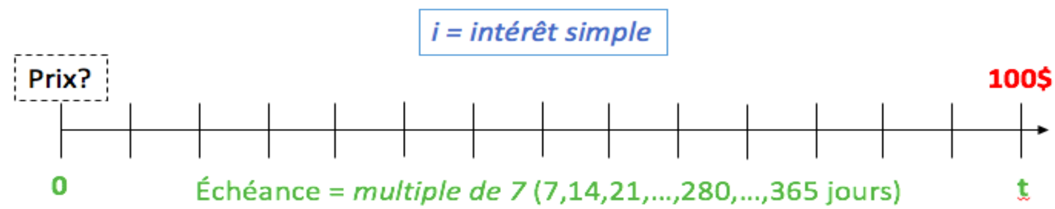
— intérêt simple

— année de 365 jours

— l'échéance = multiple de 7 jours

— prix basé sur valeur de 100$ à l'échéance

En résumé :



On calcule le prix d'un *T-Bills* avec cette formule :

$$\boxed{Prix = 100\left(1+\frac{i\cdot t}{365}\right)^{-1} \text{ où } t \text{ est en jour}} \tag{1.10}$$

Exemple

Bon du trésor canadien 91 jours avec $i = 0,6\%$. Quel est le prix du *T-Bills* ?

$$Prix = 100(1+\frac{0,006\cdot 91}{365})^{-1} = 99,85\$$$

1.3 ï£¡quation de valeur

L'équation de valeur (*equation value*) sert à :

— Égaler, en valeur, des entrées et sorties ;

— Comparer deux séries de flux monétaires (*Cash-flow*).

Pour comparer, il faut tout évaluer au même moment dans le temps. Donc il faut actualiser et accumuler certains flux monétaires.

Pour tout mettre du même côté ('=0"), il faut prévoir des signes différents pour les dépôts et retraits.

Exemple

Pierre emprunte 1000$ les 7, 14, 21 et 28 février. Il rembourse 1100$ les 7,14,21 mars, puis règle sa dette en payant X le 28 mars. Le taux d'intérêt $i = 8\%$/sem. Trouver X :

$$1000\left((1,08)^7+(1,08)^6+(1,08)^5+(1,08)^5\right)-1100\left((1,08)^3+(1,08)^2+(1,08)^1)\right)-x=0$$

etc...

1.4 Taux d'intï£¡rï£¡t nominaux

Nous avons convenu que, par défaut, le taux d'intérêt est annuel.

Donc, un taux effectif de 8%/an = a(t) = $(1,08)^t$
Mais un taux nominal de 8%/an =???

Exemple

24%/an capitalisé mensuellement
$\frac{24\%}{12} = 2\%/mois \Rightarrow$ taux effectif mensuel de 2%

$i^{(m)}$: taux d'intérêt annuel (nominal), composé m fois par an

$\frac{i^{(m)}}{m}$: taux d'intérêt effectif par $(\frac{1}{m})$ d'année.

$$a(t) = (1+i)^t = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{t \cdot m}$$

$$\Rightarrow a + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1$$

Donc,

$$\boxed{i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1} \tag{1.11}$$

$$\boxed{i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)} \tag{1.12}$$

où $i^{(m)} < i$ et $m > 1$.

Exemple 1.9 (modifié)

$i_A^{(2)}$ = 15,25% et $i_B^{(12)} = 15\%$, $i_A^{(12)} = ?$

$$\left(1 + \frac{i_A^{(2)}}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{i_A^{(12)}}{12}\right)^1 2$$

$$\Rightarrow i_A^{(12)} = 12\left[\left(1 + \frac{i_A^{(2)}}{2}\right)^{2/12} - 1\right]$$

$$i_A^{(12)} = 0,147869192$$

$$i_A^{(12)} < i_B^{(12)}$$

1.5 Taux d'escompte effectif et nominal

intérêt $\approx$ prime
escompte (*discount*) $\approx$ rabais

Mise en contexte j : taux d'intérêt par période
Si on a C au début, on a $C + Cj$ une période plus tard.

C_j : intérêt payé après une période
K : taux d'escompte par période

Si on a C à la fin, on a $C - Ck$ une période plus tôt.
Donc,

Début		Fin
C	$\rightarrow$	$C(1+j)$
$C(1-k)$	$\rightarrow$	C

1.5.1 Taux d'escompte effectif annuel

Notation : d

Remarque 9. *le taux d'escompte est composé et constant*
Définition :

$$\boxed{d = \frac{A(1) - A(0)}{A(1)}} \tag{1.13}$$

Note : la seule différence avec la formule de i est le dénominateur, qui est $A(1)$ pour d.

Généralisation...

$$d_t = \frac{A(1) - A(0)}{A(1)} = 1 - \frac{A(t-1)}{A(t)}$$

1.5.2 Lien entre d et i

$$A(0) = A(1)\left(\frac{1}{1+i}\right) = A(1)(1-d)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+i} = 1 - d = v(\text{facteur d'actualisation})$$
$$\Rightarrow d = 1 - v \Leftrightarrow d = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{(1+i)-1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}} \tag{1.14}$$

Aussi,

$$\frac{1}{1+i} = 1 - d \Leftrightarrow 1 + i = \frac{1}{1-d}$$
$$\Rightarrow i = \frac{1}{1-d} - 1 \Leftrightarrow i = \frac{1-(1-d)}{1-d} = \frac{d}{1-d}$$

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}} \tag{1.15}$$

Les formules du facteur d'accumulation et d'actualisation :

$$\boxed{v(t) = (1-d)^t} \tag{1.16}$$

et

$$\boxed{a(t) = (1-d)^{-t}} \tag{1.17}$$

Exemples

$$i = 7\%, d = \frac{0,07}{1-0,07} = 0,06542$$
$$d = 10\%, i = \frac{0,10}{1-0,10} = 0,11$$

1.5.3 Escompte simple et Bons du Trésor américain

Escompte simple

$$\boxed{v(t) = 1 - dt} \tag{1.18}$$

où $t \geq 0$ et $t < \frac{1}{d}$
Exemple

On veut 60$ dans 6 mois, $d_{simple} = 40\%$, combien faut-il aujourd'hui ?

$$60 \cdot v(0,5) = 60(1 - (0,40 \cdot 1/2)) = 60 \cdot 0,8 = 48\$$$

Bons du Trésor américains

Ce qu'il faut savoir :

— Escompte simple

— l'échance est un multiple de 7 jours

— prix fixé par 100$ à l'échéance

— année de 360 jours

$$\boxed{Prix = 100\left(1 - \frac{dt}{360}\right)} \tag{1.19}$$

Exemple 1.11 du livre
échéance de 28 jours :

$$Prix = 100\left(1 - 0,0005 \cdot \frac{28}{360}\right) = 99,99611$$

échéance de 364 jours :

$$Prix = 100\left(1 - 0,0026 \cdot \frac{2364}{360}\right) = 99,737111$$

1.5.4 Taux d'escompte nominal annuel

→ composé m fois / année.

Notation : $d^{(m)}$

Taux $d^{(m)}$: nominal annuel composé m fois/an

$\Rightarrow$ Taux d'escompte $\frac{d^{(m)}}{m}$ effectif par $\frac{1}{m}$ d'année.

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$\boxed{d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m} \tag{1.20}$$

Aussi,

$$\boxed{d^{(m)} = m(1 - (1 - d)^{1/m})} \tag{1.21}$$

Exemple

Si le taux d'escompte annuel composé deux fois l'an est 4%($d^{(2)} = 0,04$), calculez les taux suivants :
a) Taux d'escompte effectif annuel

$$\left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{d^{(1)}}{1}\right)^1$$
$$\left(1 - \frac{0,04}{2}\right)^2 = 1 - d$$
$$d = 1 - (1 - 0,02)^2 = 0,0396$$

b) Taux d'intérêt effectif annuel

$$d = 0,0396 \Leftrightarrow i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,0396}{1 - 0,0396} = 0,04123282$$

c) Taux d'intérêt annuel composé deux fois l'an

$i = 0,041233$et on cherche à savoir $i^{(2)}$.

$$\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{1}\right)^1 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 = 1 + 0,041233$$
$$i^{(2)} = 2 \cdot \left[(1 + 0,041233)^{1/2} - 1\right] = 0,040816327$$

Remarque : Tous ces taux sont équivalents, ont le même ordre de grandeur et respectent l'ordre croissant vu en classe.

1.6 Force d'intï£¡rï£¡t (*Force of interest*)

On a vu que plus un taux d'intérêt est capitalisé souvent dans une année (m/an), le taux effectif annuel augmente. Qu'en est-il si le taux d'intérêt est capitalisé continûment, soit $m = \infty$?

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = i^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 0 \cdot 0?$$

(Il faut appliquer la règle de l'Hôpital...)

$$\ldots$$

$$= \ln(1+i) = \delta$$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i) = \delta} \tag{1.22}$$

Même principe pour le taux d'escompte (d) :

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = d^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]}{1/m} = \frac{0}{0}?$$

(Il faut appliquer la règle de l'Hôpital...)

$$\ldots$$

$$= -\ln(1-d) = \ln\left(\frac{1}{1-d}\right)$$
$$= \ln(1+i) = \delta$$

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \ln\left(\frac{1}{1-d}\right) = \delta} \tag{1.23}$$

Rappel :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

Donc, on peut trouver que le taux i (en contexte de force d'intérêt) est représenté par :

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} i = e^{i^{(m)}}} \tag{1.24}$$

On peut aussi prouver l'équation du facteur d'accumulation en contexte de force d'intérêt (dans l'hypothèse d'une force d'intérêt continue :

$$
\begin{aligned}
a(t) &= (1+i)^t \\
\ln a(t) &= \ln\left((1+i)^t\right) \\
\ln a(t) &= t \cdot \ln(1+i) \\
\ln a(t) &= t \cdot \delta \\
e^{\ln a(t)} &= e^{t \cdot \delta} \\
a(t) &= e^{\delta t}
\end{aligned}
$$

1.6.1 Croissance continue de l'investissement

Dans un contexte de la croissance d'un investissement de (t) à $(t+1)$, le taux d'intérêt effectif se calcule comme suit :

$$\frac{A(t+1) - A(t)}{A(t)} = \frac{a(t+1) - a(t)}{a(t)}$$

Si c'est pour la période de (t) à $(t+h)$:

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)} = \frac{a(t+h) - a(t)}{a(t)}$$

Si h représente le temps (en année), h peut être égal à $\frac{1}{12}$, qui représente un mois.

On trouve donc le taux effectif mensuel ainsi :

$$\frac{A(t+\frac{1}{12}) - A(t)}{A(t)} = \frac{a(t+\frac{1}{12}) - a(t)}{a(t)}$$

Et on trouve le taux nominal annuel capitalisé mensuellement($i^{(12)}$) ainsi :

$$12 \cdot \frac{A(t+\frac{1}{12}) - A(t)}{A(t)} = \frac{a(t+\frac{1}{12}) - a(t)}{\frac{1}{12} \cdot a(t)} = \frac{a(t+h) - a(t)}{h \cdot a(t)}$$

Si on fais tendre $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{a(t+h)-a(t)}{h \cdot a(t)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(t+h)-a(t)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{a(t)} \\
&= \frac{a'(t)}{a(t)} \Rightarrow \text{c'est la définition d'une dérivée.}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\partial}{\partial t} \ln a(t)} \tag{1.25}$$

1.6.2 Croissance d'un investissement basé sur la force d'intérêt

On sait que

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\partial}{\partial t} \ln a(t)$$

Donc,

$$\int_0^t \delta_s \; ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \ln a(s) \; ds = \ln a(s)\Big|_0^t = \ln a(t) - \ln a(0) = \ln a(t) - \ln(1)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \delta_s \; ds = \ln a(t)$$

$$\boxed{a(t) = e^{\int_0^t \delta_s \; ds}} \tag{1.26}$$

$$\boxed{A(t) = A(0) \cdot a(t) = A(0) \cdot e^{\int_0^t \delta_s \; ds}} \tag{1.27}$$

Note : il faut faire la somme de toutes les intégrales lorsque l'équation de δ_t change d'une période à l'autre.

$$A(n) - A(m) = \text{intérêts gagnés}$$
$$A(m) \cdot \frac{a(n)}{a(m)} - A(m) = \text{intérêts gagnés}$$

Et on peut déduire le facteur d'accumulation entre 2 périodes déterminées :

$$\boxed{\frac{a(n)}{a(m)} = \frac{e^{\int_0^n \delta_s \ ds}}{e^{\int_0^m \delta_s \ ds}} = e^{\int_m^n \delta_s \ ds}} \tag{1.28}$$

1.6.3 Force d'intérêt constante

Tel que déterminé dans l'introduction de cette section, lorsque notre δ reste constant pendant toute la période ($\delta_t = \delta, \quad \forall\ t$) :

$$\boxed{a(t) = e^{\delta t}} \tag{1.29}$$

et

$$\boxed{v(t) = e^{-\delta t}} \tag{1.30}$$

1.7 Inflation et taux d'intï£¡rï£¡t

IPC (*CPI*) : Indice des prix à la consommation

Contexte : tous les taux sont **effectifs annuels et composés** dans cette section

$$r : \text{taux d'inflation} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Ce qui coûte } X & \text{à } t = 0 \\ \text{Coûte } X(1+r) & \text{à } t = 1 \end{array}$$

$$i : \text{taux d'intérêt} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Ce qui vaut } X & \text{à } t = 0 \\ \text{vaudra } X(1+i) & \text{à } t = 1 \end{array}$$

Question à se poser : Quelle est l'augmentation réelle du **pouvoir d'achat** ?

Que vaut $i_{réel}$?

En temps normal, on indiquerait que

$$i = \frac{X(1+i)}{X} - 1$$

Sauf qu'on vient d'indiquer clairement qu'à $t = 1$, X est maintenant égal à $X(1+r)$. Donc :

$$i_{réel} = \frac{X(1+i)}{X(1+r)} - 1 = \frac{i-}{1+r}$$

Exemple

La valeur d'une *Porsche* de l'année est fixée à 125 000$. Vous avez actuellement 115 000$ en liquidité, donc vous décidez d'investir dans un placement et d'attendre à l'an prochain pour acheter la voiture.

a) quel est le taux d'intérêt i nécessaire pour atteindre l'objectif, si l'IPC reste constant ?

$$115000(1+i) = 125000 \Rightarrow i = 8,70\%$$

b) Si il y a une inflation (r) de 2% sur le marché des voitures de luxe, quel devra être le taux d'intérêt i.

$$115000(1+i) = 125000(1+0,02) \Rightarrow i = \frac{125000(1,02)}{115000} - 1 \Rightarrow i = 10,87\%$$

c) Quel est le taux d'intérêt réel ($i_{réel}$) réalisé par le placement s'il obtient l'objectif de b) ?

$$i_{réel} = \frac{i - r}{1 + r} = \frac{0,1087 - 0,02}{1,02} = 8,70\%$$

Remarque

On peut donc conclure que le taux d'intérêt réel est l'augmentation de notre pouvoir d'achat, le taux d'intérêt i une fois l'inflation r considérée.

Chapitre 2

ï£¡valuation de rentes

Remarque

Dans ce chapitre, l'intérêt sera pratiquement toujours composé.

Quelques définitions...

Rentes (*annuities*) série de versements périodiques.

Rente contingente conditionnel à la survie ou que l'entreprise reste ouverte.

Rente certaine C'est sûr à 100% qu'on recevra les versements (*ça sera toujours le cas dans le cours ACT-1001*)

Rappel super important

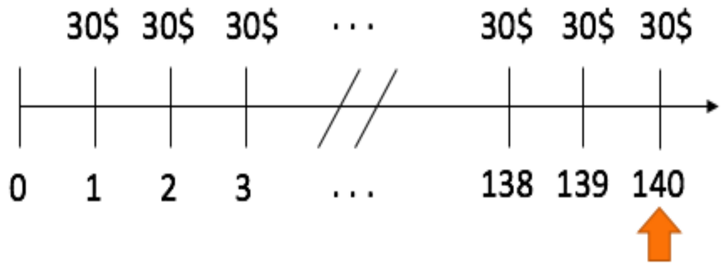
La propriétés des sommes géométriques, TRÈS IMPORTANT pour les annuités !

$$\boxed{\sum_{j=m}^{n} ar^j = ar^m \left(\frac{1-r^{n-m+1}}{1-r}\right)} \tag{2.1}$$

Exemple 2.1

On reçoit des versements périodiques de 30$/mois et on est capable d'obtenir un taux d'intérêt nominal annuel composé mensuellement ($i^{(12)}$) de 9%. Quelle est la valeur accumulée au moment du 140e versement ?

Tout d'abord, il est important de se faire un graphique :



Ensuite, on convertit notre taux d'intérêt pour le mettre sur la même fréquence que nos versements :

$$\frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0,09}{12} = 0,75\% \text{ par mois}$$

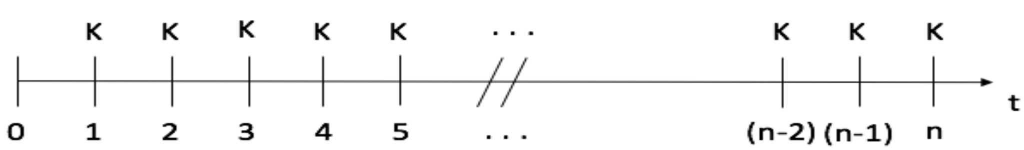
Après, on doit trouver la valeur accumulée de cette annuité (série de versements). Il s'agît d'une suite de versements qui peut être généralisée comme suit :

$$30(1+0,0075)^{139} + 30(1+0,0075)^{138} + ... + 30(1+0,0075)^{2} + 30(1+0,0075)^{1} + 30$$

Avec la propriété des sommes géométriques, on est capable de résoudre rapidement cette suite :

$$\sum_{m=1}^{139} 30(1+0,0075)^{m} = 30\left(\frac{1-(1+0,0075)^{140}}{1-(1+0,0075)}\right) = 7385,91\$$$

2.1 Rentes aux versements ï£¡gaux



2.1.1 Valeur accumulée d'une rente

2.1.1.0 ... au moment du dernier versement

Supposons :

k	par période
t	est mesuré en période
n	nombre de versements
j	taux effectif par période

$$\begin{aligned}\text{Valeur accumulée } &= k(1+j)^{n-1} + k(1+j)^{n-2} + ... + k(1+j) + k \\ &= k\sum_{m=0}^{n-1}(1+j)^m = k\left(\frac{(1+j)^n - 1}{j}\right) \\ &= k \cdot S_{\overline{n}|j}\end{aligned}$$

Remarques sur la notation

$S_{\overline{1}|j} = 1$
$S_{\overline{n}|1\%} = n$
$S_{\overline{n}|j} > n$ (si $j > 0$)

Fonctionnement de la BA II Plus

Section calculatrice, à compléter plus tard

2.1.1.1 ..quelques temps après le dernier prélèvement

Plus précisément, r périodes après le dernier versement. Dans ce cas particulier, on fait :

$$\begin{aligned}&k \cdot S_{\overline{n}|j}(1+j)^r \\ &= \frac{k(1+j)^n - 1}{j}(1+j)^r = k\left(\frac{(1+j)^{n+r} - (1+j)^r}{j}\right) \\ &= k\left(\frac{[(1+j)^{n+r} - 1] - [(1+j)^r - 1]}{j}\right) \\ &= k(S_{\overline{n+r}|j} - S_{\overline{n}|})\end{aligned}$$

dessin à insérer plus tard
Note : on peut décomposer une série de versements en plusieurs séries !

2.1.1.2 ... avec deux taux d'intérêt

j_1 en vigueur jusqu'à $t = m$
j_2 par la suite
$n + r$ versements
dessin à insérer plus tard

$$k \cdot s_{\overline{n}|j_1} + k \cdot s_{\overline{r}|j_2}$$

Exemple 2.4 Fait avec la calculatrice BA II Plus

$$\begin{aligned}
68\,\boxed{\text{N}}& \\
0.75\,\boxed{\text{I/Y}}& \\
0\,\boxed{\text{PV}}& \\
30\,\boxed{\text{PMT}}& \\
\boxed{\text{CPT}}\boxed{\text{FV}}& = -2648.50 \\
&\boxed{\text{+/-}}\boxed{\text{PV}} \\
&72\,\boxed{\text{N}} \\
&0.625\,\boxed{\text{I/Y}} \\
&\boxed{\text{CPT}}\boxed{\text{FV}} = -6862.22677
\end{aligned}$$

Thinking de la calculatrice BA :

$$\boxed{\text{PV}}\left(1 + \frac{\boxed{\text{I/Y}}}{100}\right)^{\boxed{\text{N}}} + \boxed{\text{PMT}} \cdot s_{\overline{\boxed{\text{N}}}|\boxed{\text{I/Y}}\%} + \boxed{\text{FV}} = 0$$

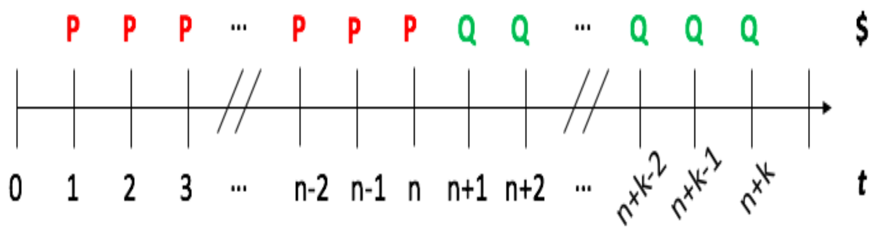
Donc les signes +/- sont très important !

Remarques

j de $s_{\overline{n}|j}$ est un taux effectif ($\frac{i(m)}{m}$) par période de n.

... avec un versement non constant

On a un versement de $P\$$ de $t = 1$ à $t = n$
Et un versement de $Q\$$ de $t = n + 1$ à $t = n + k$.
Quelle sera la valeur accumulée à $t = n + k$?



1ère approche

$$P \cdot s_{\overline{n}|j}(1 + j)^k + Q \cdot s_{\overline{k}|j}$$

2e approche

$$P \cdot s_{\overline{n+k}|j} + (Q - P) \cdot s_{\overline{k}|j}$$

Exemple 2.5

$$P = 50\$ \quad Q = 75\$ \quad n = 10 \quad k = 14 \quad j = 1\%$$

Solutions possibles :

$$\begin{array}{lcl} 50 s_{\overline{10}|1\%}(1,01)^{14} & + & 75 s_{\overline{14}|1\%} \\ 50 s_{\overline{24}|1\%}(1,01)^{14} & + & (75 - 50) s_{\overline{14}|1\%} \end{array}$$

Remarque 10. *il est question de valeur accumulée dès qu'on évalue la rente* ***au moment du dernier versement ou plus tard.***

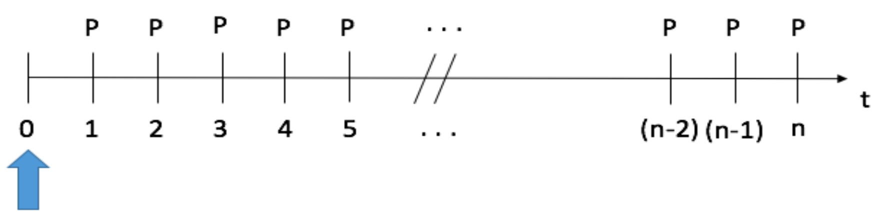
2.1.2 Valeur actualisée d'une rente...

~~valeur présente~~ $\rightarrow$ c'est un anglicisme.
Valeur actualisée = *present value*

Remarque 11. *il est question de valeur actualisée dès qu'on évalue la rente au moment du premier versement ou plus tôt.*

... de versements constants une période avant le 1er versement.

Supposons $P\$$ par période (en fin de période) de $t = 1$ à $t = n$, évalué avec un taux efectif de j par période.



$$\begin{aligned}
P(1+j)^{-1} + P(1+j)^{-2} + ... + P(1+j)^{-n} &= P\sum_{m=1}^{n}(1+j)^{-m} \\
&= P(1+j)^{-1}\left(\frac{1-(1+j)^{-n}}{1-(1+j)^{-1}}\right) \\
&= P\left(\frac{1-(1+j)^{-n}}{j}\right) \\
&= Pa_{\overline{n}|j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|j} = \frac{1-(1+j)^{-n}}{j}} \tag{2.2}$$

Note : j est un taux effectif par période. Une période dure le temps entre 2 versements consécutifs.

Remarque sur la calculatrice BA II Plus

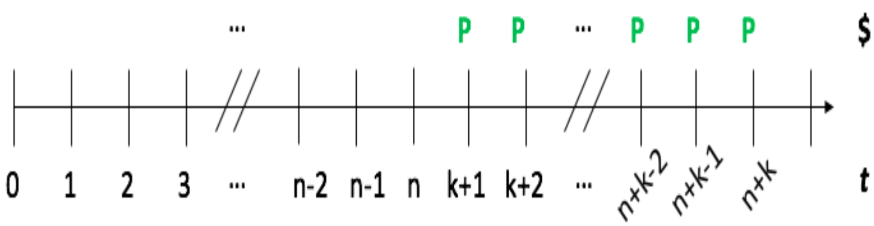
section à compléter plus tard, voir guide calculatrice.

Remarque 12.

$$a_{\overline{1}|j} = \frac{1}{(1+j)}$$
$$a_{\overline{n}|0\%} = n \qquad a_{\overline{n}|j} < n \text{(si } j > 0\%\text{)}$$

2.1.2.1 Quelques temps avant le 1er versement.

Supposons le premier de n versements à $t = k + 1$. On cherche la valeur à $t = 0$.



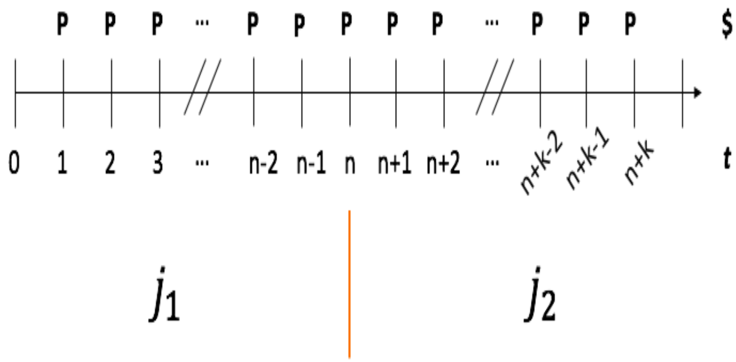
$$Pa_{\overline{n+k}|j} - Pa_{\overline{k}|j} = Pa_{\overline{n}|j}(1+j)^{-k}$$
ou
$$Pa_{\overline{k}|j} = Pa_{\overline{n+k}|j} - Pa_{\overline{n}|j}(1+j)^{-k}$$

2.1.2.2a ... avec des taux d'intérêts non constants

On a des versements de $P\$$ à $t = 1, 2, ..., n + k$.

Il y a deux taux :
j_1 de $t = 0$ à $t = n$
j_2 de $t = n$ à $t = n + k$.

On veut trouver la valeur actualisée à $t = 0$ de tous les *cash-flows* :



$$A(0) = Pa_{\overline{k}|j_2}(1+j_1)^{-n} + Pa_{\overline{n}|j_1}$$

2.1.2.2b ... avec un versement non constant

Dans le cas d'un taux constant j, mais avec des versements de $P\$$ à $t = 1, 2, ..., n$ et versements de $Q\$$ à $t = n+1, n+2, ..., n+k$

C'est presque la même chose qu'avec la valeur accumulée!

$$A(0) = Qa_{\overline{k}|j}(1+j)^{-n} + Pa_{\overline{n}|j}$$

ou

$$A(0) = Qa_{\overline{n+k}|j} + (P-Q)a_{\overline{n}|j}$$

Exemple 2.9 du livre

	$\underline{P}$	$\underline{pour...}$	$année$	$j/mois$
$A(0) = 10000$	x	$t = 1, 2, ..., 12$	1	$0,5\%$
	$x+25$	$t = 13, 14, ..., 24$	2	$0,75\%$
	$x+50$	$t = 25, 26, ..., 36$	3	1%

dessin à insérer ici plus tard

$$\begin{aligned}
10000 &= 50a_{\overline{12}|1\%}(1,0075)^{-12}(1,0050)^{-12} + 25a_{\overline{12}|0,75\%}(1,0050)^{-12} \\
&\quad + x(a_{\overline{12}|0,5\%} + a_{\overline{12}|0,75\%}(1,0050)^{-12} + a_{\overline{12}|1\%}(1,0075)^{-12}(1,0050)^{-12}) \\
&= 50(9,692) + 25(10,771) + x(11,619 + 10,771 + 9,692) \\
x &= 288,21\$
\end{aligned}$$

2.1.2.2 Lien entre $a_{\overline{n}|j}$ et $s_{\overline{n}|j}$

$$\boxed{a_{\overline{n}|j} = s_{\overline{n}|j}(1+j)^{-n}} \tag{2.3}$$

$$\boxed{s_{\overline{n}|j} = a_{\overline{n}|j}(1+j)^{n}} \tag{2.4}$$

2.1.2.3 évaluation de rentes perpétuelles (*perpetuity*)

Si $n \to \infty$, c'est une rente perpétuelle (~~perpétuité~~).

$$\boxed{Pa_{\overline{\infty}|j} = p\left(\frac{1-(1+k)^{-\infty}}{j}\right) = \frac{P}{j}} \tag{2.5}$$

une rente de fin de période *différée* de k périodes fait son premier versement à $t = k+1$.

2.1.3 Rentes de fin ou de début de période

Distinction importante à faire avec les termes en anglais :
fin $\to$ *immediate*
début $\to$ *due*

Pour les rentes de fin de période, les n versements sont à $t = 1, 2, 3, ...,$.

Pour les rentes de début de période, les n versements sont plutôt à $t = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Dans les 2 cas, on doit quand même calculer la valeur actualisée à $A(0)$ et la valeur accumulée à $A(n)$. Cela implique qu'on doit accumuler d'une période pour revenir au bon moment d'évaluation.

Le symbole utilisée pour représenter la valeur actualisée une rente de début de période est $\ddot{a}_{\overline{n}|j}$ et $\ddot{s}_{\overline{n}|j}$ pour la valeur accumulée.

$$\boxed{P\ddot{a}_{\overline{n}|j} = Pa_{\overline{n}|j}(1+j)^n} \tag{2.6}$$

et

$$\boxed{P\ddot{s}_{\overline{n}|j} = Ps_{\overline{n}|j}(1+j)^n} \tag{2.7}$$

2.2 Rentes aux versements constants

Quelques généralisations...

2.2.1 Lorsque la fréquence de versement $\neq$ fréquence des intérêts

Que faire ? Il suffit de trouver le taux effectif pour la période qui s'écoule entre 2 versements. En d'autres mots, on cherche $j = \frac{i^{(m)}}{m}$, où m est le nombre de versements par année.

Exemple 2.13

On sait que $m = 4$. On cherche notre taux j qu'on doit utiliser dans nos calculs de versements sachant...

1. $i^{(12)} = 9\%$

$$\frac{i^{(12)}}{12} = \frac{9\%}{12} = 0,75\%/\text{mois}$$

$$\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4} \Leftrightarrow j = \frac{i^{(4)}}{4} = (1,0075)^{12/4} - 1$$

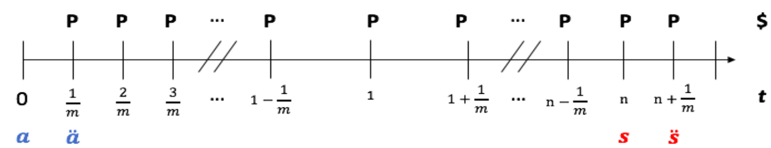
$$j = 2,2669172\%$$

2. $i = 10\%$

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4$$

$$j = \frac{i^{(4)}}{4} = (1 + 0,10)^{1/4} - 1 = 2,4113689\%$$

2.2.2 Rentes payable m fois l'an



Valeur à $= n$: $Ps_{\overline{n \cdot m}|j}$, où $j = \frac{i^{(m)}}{m}$.

$$\begin{aligned} Ps_{\overline{n \cdot m}|j} &= P\frac{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\frac{i^{(m)}}{m}} \\ &= mP\frac{\left(\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}\right)^{n} - 1}{i^{(m)}} \\ &= mP\frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} \\ &= mPs^{(m)}_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{mPs^{(m)}_{\overline{n}|i} = mP\frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}} \tag{2.8}$$

mP est le montant total versé par année.

$m \times n$ doit être un entier. Mais n n'a pas besoin d'être un entier.

En résumé,

	sans tréma	avec tréma
$a^{(m)}_{\overline{n}|i}$	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}}$	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{d^{(m)}}$
$s^{(m)}_{\overline{n}|i}$	$\frac{(1+i)^{n}-1}{i^{(m)}}$	$\frac{(1+i)^{n}-1}{d^{(m)}}$

2.2.3 Rentes continues

Définition : ça paie continûment. Dans la pratique, ça n'existe pas. Le plus loin qu'on va, c'est des versements au quotidien. Toutefois, en théorie, on peut calculer ce type de rentes :

$$\lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \bar{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$$

$$\lim_{m\to\infty} s^{(m)}_{\overline{n}|i} = \bar{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \int_0^n e^{-\delta t}dt \quad \bar{s}_{\overline{n}|i} = \int_0^n e^{\delta(n-t)}dt$$

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n\cdot m} \frac{1}{m}(1+i)^{-k/m} \quad \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=0}^{nm-1} \frac{1}{m}(1+i)^{-k/m}$$

$$s^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n\cdot m} \frac{1}{m}(1+i)^{n-\frac{k}{m}} \quad \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sum_{k=0}^{nm-1} \frac{1}{m}(1+i)^{n-\frac{k}{m}}$$

2.2.4 Résoudre pour le nombre de versements d'une rente *(durée inconnue)*

Versement P fixé, taux j connu et valeur visée X (actualisée ou accumulée).

$$X = Pa_{\overline{n}|j} \Leftrightarrow \quad n = \frac{-\ln(1-\frac{Xj}{P})}{\ln(1+j)}$$

$$X = P\ddot{a}_{\overline{n}|j} \Leftrightarrow \quad n = \frac{-\ln(1-\frac{Xd_j}{P})}{\ln(1+j)}$$

$$X = Ps_{\overline{n}|j} \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln(1+\frac{Xj}{P})}{\ln(1+j)}$$

$$X = P\ddot{s}_{\overline{n}|j} \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln(1+\frac{Xj}{P(1+j)})}{\ln(1+j)}$$

☆ Souvent, $n \notin \mathbb{Z}$, que faire ?

Commençons par considérer $X = Pa_{\overline{n}|j}$. Nous pouvons avoir $[n]$ versements de P... et un peu plus.

$$Pa_{\overline{[n]}|j} < X < Pa_{\overline{[n+1]}|j}$$

On a 2 possibilités :

1. Épuiser le capital à $t = [n]$ avec un versement $Q > P$ (*balloon payment*).

$$\begin{aligned} X &= Pa_{\overline{[n+1]}|j} + Q(1+j)^{-[n]} \\ &= Pa_{\overline{[n]}|j} + (Q-P)(1+j)^{-[n]} \end{aligned}$$

2. Épuiser le capital à $t = [n+1]$ avec un versement $R < P$ (*drop payment*).

$$X = Pa_{\overline{[n]}|j} + R(1+j)^{-[n+1]}$$

Remarque : On peut poser les deux méthodes de résolution équivalentes et trouver que $\mathbf{R} = (\mathbf{Q} - \mathbf{P})(\mathbf{1} + \mathbf{j})$.

Exemple

$X = 1000,\ P = 50$ et $j = 4\%$. Trouver n.

$$1000 = 50a_{\overline{n}|4\%} \Leftrightarrow n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{1000\times 0{,}04}{50}\right)}{\ln(1,04)} = 41,035$$

On doit trouver la valeur du dernier prélèvement pour avoir $[n]$ versements.

Si on résout avec la première possibilité :

$$\begin{aligned} 1000 &= 50a_{\overline{40}|4\%} + Q(1,04)^{-41} \\ &= 50\left(\frac{1-(1,04)^{-40}}{0,04}\right) + Q(1,04)^{-41} \\ &= 51,73\$ \end{aligned}$$

Si on résout avec la deuxième méthode :

$$\begin{aligned}1000 &= 50a_{\overline{41}|4\%} + R(1,04)^{-42} \\ &= 50\left(\frac{1-(1,04)^{-41}}{0,04}\right) + R(1,04)^{-42} \\ R &= 1,80\$\end{aligned}$$

Remarque : $(51,73 - 50)(1,04) = 1,80$.

Poursuivons en considérant $X = Ps_{\overline{n}|j}$, $n \notin \mathbb{Z}$ avec $[n]$ versements de P qui ne suffisent pas tout à fait...

$$Ps_{\overline{[n]}|j} < X < Ps_{\overline{[n+1]}|j}$$

trois possibilités :

1. Faire un $[n]^{\text{e}}$ paiement $Q > P$.

$$\begin{aligned}X &= Ps_{\overline{[n-1]}|j} + Q \\ &= Ps_{\overline{[n]}|j} + (Q - P)\end{aligned}$$

2. Faire un $[n+1]^{\text{e}}$ versement $R < P$ (si $Ps_{\overline{[n]}|j}(1+j) < X$).

$$X = Ps_{\overline{[n]}|j} + R$$

3. Attendre X ? t^* (si $Ps_{\overline{[n]}|j}(1+j) > X$).

$$X = Ps_{\overline{[n]}|j}(1+j)^{t^*-[n]}$$

Exemple 1.15 *amélioré*

retranscrire le problème du livre ici plus tard

1. $x = 1000$, $j = 4\%$ et $P = 50$

$$1000 = 50s_{\overline{n}|4\%} \Leftrightarrow n = 14,987\text{ans}$$

$n \notin \mathbb{Z}$, donc on peut trouver le dernier paiement selon les 2 possibilités :

   (a)

$$\begin{aligned} 1000 &= 50s_{\overline{13}|4\%}(1,04) + Q \\ &= ... \\ Q &= 135,40\$ \end{aligned}$$

   (b)

$$50s_{\overline{14}|4\%}(1,04) = ... = 951,18 < 1000$$

   Alors,

$$\begin{aligned} 1000 &= 50s_{\overline{14}|4\%}(1,04) + R \\ &= ... \\ R &= 48,82\$ \end{aligned}$$

2. Si **P = 25$...**

$$1000 = 25s_{\overline{n}|4\%} \Leftrightarrow n = 24,3$$

Alors,

   (a)

$$\begin{aligned} 1000 &= 25s_{\overline{23}|4\%}(1,04) + Q \\ &= ... \\ Q &= 47,93\$ \end{aligned}$$

(b)

$$25s_{\overline{24|}4\%}(1,04) = ... = 1016,15 > 1000$$

Alors,

$$\begin{aligned}
1000 &= 25s_{\overline{24|}4\%}(1,04)^{t^*-24} \\
&= 25\left(\frac{(1,04)^{24}-1}{0,04}\right)(1,04)^{t^*-24} \\
(1,04)^{t^*-24} &= 1,02347254 \\
t^* &= 24 + \frac{\ln(1,023473254)}{\ln(1,04)} \\
&= 24,785
\end{aligned}$$

2.2.5 Résoudre pour le taux d'intérêt d'une rente (intérêt inconnu)

On sait déjà comment faire, ça nous prends la *BA II Plus*. On *Compute* notre taux d'intérêt.

2.3 Rentes avec versements non constants

Cas général : n versements $P_1, P_2, ..., P_n$ à $t_1, t_2, ..., t_n$.

Valeur actualisée à $t = 0$	Valeur accumulée à $t = t_n$
$\sum_{k=1}^{n} P_k(1+j)^{t_k}$	$\sum_{k=1}^{n} P_k(1+j)^{t_n-t_k}$

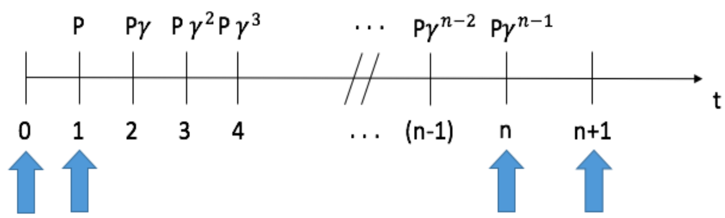
Deux cas particuliers :

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= P_k\gamma \qquad k = 2, 3, ..., n \\
|P_{k+1} - P_k| &= \beta \qquad k = 2, 3, ..., n
\end{aligned}$$

Note : $t_{k+1} - t_k = \alpha \quad k = 1, 2, 3, ..., n-1$

2.3.1 Rentes dont les versements forment une série géométrique

2.3.1.1 ... avec fréquence de versement égale à fréquence de variation géométrique



Supposons un taux effectif par période j.

Valeur à $t = 0$

$$P(1+j)^{-1} + P\gamma(1+j)^{-2} + ... + P\gamma^{n-1}(1+j)^{-n} = \sum_{k=1}^{n} P\gamma^{-1}\left(\frac{\gamma}{1+j}\right)^k$$
$$= ...$$

$$\boxed{P\gamma^{-1}a_{\overline{n}|j^*}, \text{où } j^* = \frac{1+j}{\gamma} - 1} \tag{2.9}$$

Valeur à $t = 1$

$$P + P\gamma(1+j)^{-1} + ... + P\gamma^{n-1}(1+j)^{-(n-1)}$$
$$= ...$$
$$= P\gamma^{-1}a_{\overline{n}|j^*}(1+j)$$

$$\boxed{P\ddot{a}_{\overline{n}|j^*}} \tag{2.10}$$

Valeur à $t = n$

$$P(1+j)^{n-1} + P\gamma(1+j)^{-2} + ... + P\gamma^{n-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} P\gamma^{n-1-k}(1+j)^k$$

$$\boxed{P\gamma^{n-1} s_{\overline{n}|j^*}} \tag{2.11}$$

Valeur à $t = n+1$

$$P(1+j)^n + ... + P\gamma^{n-1}(1+j)$$
$$= ...$$
$$= P\gamma^{n-1} s_{\overline{n}|j^*}(1+j)$$

$$\boxed{P\gamma^n \ddot{s}_{\overline{n}|j^*}} \tag{2.12}$$

2.3.1.2 ... avec fréquence de versement supérieure à fréquence de variation géométrique

Supposons $n \times m$ versements égaux, taux j par période et une *augmentation* des versements tous les m versements.

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 &= ... = P_m &= P \\ P_{m+1} = P_{m+2} &= ... = P_{2m} &= P\gamma \\ ... & & \\ P_{m(n-1)+1} = P_m(n-1)+2 &= ... = P_{mn} &= P\gamma^{n-1} \end{aligned}$$

<u>Exemple concret pour démontrer les prochaines formules</u> :

$$m = 4 \quad n = 3 \qquad j = 1\%$$

Alors,

$$\begin{array}{ll} A & Pv^1 + pv^2 + Pv^3 + Pv^4 \\ B & P\gamma v^5 + P\gamma v^6 + P\gamma v^7 + P\gamma v^8 \\ C & P\gamma^2 v^9 + P\gamma^2 v^{10} + P\gamma^2 v^{11} + P\gamma^2 v^{12} \end{array}$$

Si on veut passer de A à $B \to \gamma v^4$
Si on veut passer de A à $C \to \gamma^2 v^8$
Donc,

$$\text{Valeur à } t=0 = Pa_{\overline{4}|1\%} + P\gamma a_{\overline{4}|1\%} v^4 + Pa_{\overline{4}|1\%}\gamma^2 v^8$$
$$= Pa_{\overline{4}|j^*} \underbrace{(1+\gamma v^4 + \gamma^2 v^8)}_{\ddot{a}_{\overline{3}|j^*}} \quad \text{,où } 1+j^* = \frac{(1,01)^4}{\gamma}$$

Généralisation :

$$\boxed{Pa_{\overline{m}|j^*} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|j^*} \quad \text{où } j^* = \frac{(1+j)^m}{\gamma} - 1} \tag{2.13}$$

2.3.1.3 Modèle d'évaluation des actions par actualisation des dividendes

— supposons prochain dividende : D
— Croissance par un facteur γ à chaque période
— Taux j par période (qui est égale à l'intervalle entre 2 versements)[1]
— dividende payable à perpétuité

Prix de l'action = VA des dividendes futurs.

$$\text{Prix} = Dv^1 + D\gamma v^2 + D\gamma^2 v^3 + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} D\gamma^k (1+j)^{-k-1}$$

$$\boxed{\text{Prix} = \frac{D}{1+j-\gamma}} \tag{2.14}$$

1. Note : le taux j en contexte d'évaluation d'actions est plus élevé, car il y a un risque supérieur.

Remarque : si $\gamma = 1 + g$

$$\boxed{\text{Prix} = \frac{D}{j - g}} \tag{2.15}$$

Remarques On suppose $1 + j > \gamma$, mais $\gamma < 1$ est possible (diminution des dividendes d'une pédiode à l'autre).

L'action peut aussi être revendue. Supposons une revente après le versement d'un dividende :

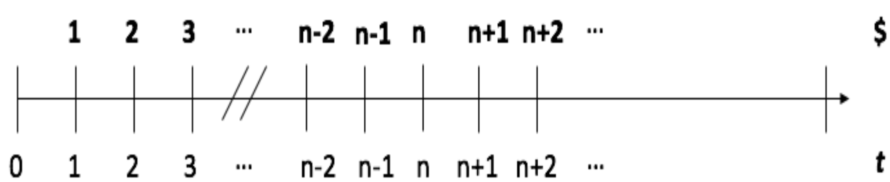
— Supposons la revente à $t = n$ au prix Q.

— Le prix à $t = 0$ est dénoté P

$$P = D(1+j)^{-1} + D\gamma(1+j)^{-2} + ... + D\gamma^{n-1}(1_j)^{-n} + Q(1+j)^{-n}$$
$$P - D\gamma^{-1} a_{\overline{n}|j^*} + Q(1+j)^{-n} \quad \text{où } j^* = \frac{1+j}{\gamma} - 1$$

2.3.2 Rentes dont les versements forment une série arithmétique

2.3.2.1 Rentes croissantes



$$\boxed{(Ia)_{\overline{n}|j} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|j} - nv^n}{j}} \tag{2.16}$$

Démonstration. Si on écrit mathématiquement le dessin ci-haut :

$$\begin{aligned}(Ia)_{\overline{n}|j} &= (1+j)^{-1} + 2(1+j)^{-2} + 3(1+j)^{-3} + ... + n(1+j)^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(1+j)^{-k}\end{aligned}$$

Si on évalue la série une période plus tard, ça serait équivalent à :

$$\begin{aligned}(1+j)(Ia)_{\overline{n}|j} &= 1 + 2v + 3v^2 + ... + (n-1)v^{(n-2)} + nv^{(n-1)} \\ {\color{red}(Ia)_{\overline{n}|j}} + j(Ia)_{\overline{n}|j} &= 1 + 2v + 3v^2 + ... + (n-1)v^{(n-2)} + nv^{(n-1)} \\ j(Ia)_{\overline{n}|j} &= 1 + 2v + 3v^2 + ... + (n-1)v^{(n-2)} + nv^{(n-1)} \\ &\quad {\color{red} -v^1 - 2v^2 - 3v^3 - ... - \underbrace{nv^n}_{\text{ne se simplifie avec rien}}} \\ &= \underbrace{1 + v + v^2 + v^3 + ...v^{(n-1)}}_{\ddot{a}_{\overline{n}|j}} - nv^n \\ j(Ia)_{\overline{n}|j} &= \ddot{a}_{\overline{n}|j} - nv^n \\ (Ia)_{\overline{n}|j} &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|j} - nv^n}{j}\end{aligned}$$

□

à $t = 1$,

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_{\overline{n}|j} &= (1+j)(Ia)_{\overline{n}|j} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|j} - nv^n}{\frac{j}{1+j}} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|j} - nv^n}{d_j}\end{aligned}$$

$$\boxed{(I\ddot{a})_{\overline{n}|j} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|j} - nv^n}{d_j}} \tag{2.17}$$

à $t = n$,

$$\boxed{(Is)_{\overline{n}|j} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|j} - n}{j}} \tag{2.18}$$

à $t = n + 1$,

$$\boxed{(I\ddot{s})_{\overline{n}|j} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|j} - n}{d_j}} \tag{2.19}$$

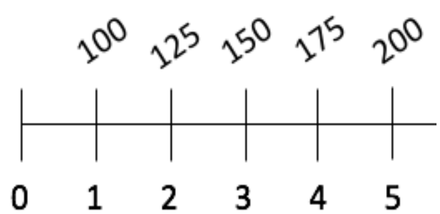
Généralisation

$P_k = P + (k-1)\beta \quad k = 1, 2, ..., n$

$$\text{Valeur}_{\text{moment donnée}} = (P - \beta)\diamond_{\overline{n}|j} + \beta(I\diamond)_{\overline{n}|j}$$

On peut remplacer le diamant par un $a, \ddot{a}, s$ ou $\ddot{s}$.

Exemple rapide



On cherche la valeur à $t = 0$:

$$A(0) = 75\ddot{a}_{\overline{5}|j} + 25(I\ddot{a})_{\overline{5}|j}$$

2.3.2.2 Rentes décroissantes

$P_k = n + 1 - k$

$$\boxed{(Da)_{\overline{n}|j} = \frac{n - a_{\overline{n}|j}}{j}} \tag{2.20}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(Da)_{\overline{n}|j} &= nv + (n-1)v^2 + ... + 2v^{n-1} + v^n \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)v^k \\ &= ... \\ &= \frac{n - a_{\overline{n}|j}}{j}\end{aligned}$$

□

$$\boxed{(D\ddot{a})_{\overline{n}|j} = \frac{n - a_{\overline{n}|j}}{d_j}} \tag{2.21}$$

$$\boxed{(Ds)_{\overline{n}|j} = \frac{n(1+j)^n - s_{\overline{n}|j}}{j}} \tag{2.22}$$

$$\boxed{(D\ddot{s})_{\overline{n}|j} = \frac{n(1+j)^n - s_{\overline{n}|j}}{d_j}} \tag{2.23}$$

Remarque 13. *On peut prouver que* $(Ia)_{\overline{n}|j} + (Da)_{\overline{n}|j} = (n+1)a_{\overline{n}|j}$

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|j} - n(1+j)^{-n}}{j} + \frac{n - a_{\overline{n}|j}}{j} &= \frac{n(1-(1+j)^{-n}) + 1 - (1+j)^{-n}}{j} \\ &= \frac{(n+1)(1-(1+j)^{-n})}{j} \\ &= (n+1)a_{\overline{n}|j}\end{aligned}$$

Généralisation

.

$$\begin{aligned}P_k &= P - (k-1)\beta & k &= 1,2,...,n \\ &= (P - n\beta) + (n+1-k)\beta & k &= 1,2,...,n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Valeur} = (P - n\beta)\diamond_{\overline{n}|j} + \beta(D\diamond)_{\overline{n}|j}}$$

2.3.2.3 Rentes continues

$h(t)$: taux de versement annuel à t, $0 \leq t \leq n$.

Valeur actualisée à $t = 0$, avec δ non constant

$$\boxed{\int_0^n h(u) \underbrace{e^{-\int_0^u \delta_s ds}}_{e^{-\delta u} \text{ si } \delta_t = \delta \ \forall \ t} du} \tag{2.24}$$

Valeur accumulée à $t = n$, avec δ non constant

$$\boxed{\int_0^n h(u) \underbrace{e^{\int_u^n \delta_s ds}}_{e^{\delta(n-u)} \text{ si } \delta_t = \delta \ \forall \ t} du} \tag{2.25}$$

Rente continue croissante

Si $h(t) = t$, $0 \leq t \leq n$ et $\delta_t = \delta \ \forall \ t$.

Par intégration par partie, on peut prouver la formule suivante (beaucoup plus simple que d'intégrer !)

$$\boxed{(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|i} - ne^{-\delta n}}{\delta}} \tag{2.26}$$

et

$$\boxed{(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|i} - n}{\delta}} \tag{2.27}$$

Rente décroissante

Si $h(t) = n - t$, $0 \leq t \leq n$ et $\delta_t = \delta \ \forall \ t$.

Même chose, on peut intégrer par partie pour se débarasser de l'intégrale et obtenir ces formules :

$$\boxed{(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}} \tag{2.28}$$

et

$$\boxed{(\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{ne^{\delta n} - \bar{s}_{\overline{n}|i}}{\delta}} \tag{2.29}$$

Taux d'intérêt inconnu...

à compléter

2.4 Applications et illustrations

2.4.0.1 Taux de rendement et taux de réinvestissement

Taux de rendement (*yield rate*) : y
Taux de réinvestissement (*reinvestment rate*) : j
Taux de rendement interne : i
Si investissement initial à $t = 0$: L
Valeur finale $t = n$: M
$L(1+y)^n = M$

Exemple p.137 Carole prête 10 000 à Caroline au taux annuel de 5% pour 10 ans ($i = 5\%$). Le taux de réinvestissement est à 3%. Trouver le taux de rendement si Caroline...

1. rembourse en versements annuels égaux

$$Xa_{\overline{10}|5\%} = 10000 = L$$
$$M = Xs_{\overline{10}|3\%}$$
$$L(1+y)^{10} = M \Leftrightarrow y = 4,030736\%$$

2. rembourse seulement les intérêts et rembourse le capital à la fin

$$P_1 = P_2 = ... = P_9 = 10000(0,05) = 500$$
$$P_{10} = 10000 + 500 = 10500$$
$$M = 500s_{\overline{10}|3\%} + 10000$$
$$L(1+y)^{10} = M \Leftrightarrow y = 4,635301\%$$

3. Rembourse tout dans 10 ans

$$\begin{gathered}P_1 = P_2 = P_9 = 0 \\ P_{10} = 10000(1,05)^{10} \\ M = 10000(1,05)^{10} \\ L(1+y)^{10} = M \Leftrightarrow y = 5\%^1\end{gathered}$$

Exemple 2.26 On fait un investissement de $100\$$ à la fin de chaque mois. L'intérêt mensuel est crédité au taux de $0,5\%$ et réinvesti au taux de 1% dans un compte secondaire. Quelle est la valeur accumulée après n mois ?

versements dans le compte principal : $100n$

versements dans le compte secondaire :

$$\begin{aligned}
&P_1 && = 0 \quad P_2 = 100 \cdot 0,005 = 0,50 \\
&P_3 = 200 \cdot 0,005 && = 1 \quad P_4 = 300 \cdot 0,005 = 1,50 \\
&\ldots \\
&P_n = (n-1) \cdot 0,005 && = 0,50(n-1)
\end{aligned}$$

Donc, la valeur accumulée dans le compte secondaire à $t = n$ est $0,50(Is)_{\overline{n-1|}1\%}$

Donc,

$$M = 100n + 0,50(Is)_{\overline{n-1|}1\%} = 100s_{\overline{n|}y}$$

On peut ensuite prendre la BA II Plus pour trouver le taux y.

2.4.1 Valeur comptable et valeur marchande

On actualise tous les versements futurs (on ne tient pas compte des versements passés en utilisant...

valeur comptable taux en vigueur à l'achat

valeur marchande taux en vigueur au moment du calcul

1. Le taux de rendement interne est égal au taux de rendement demandé sur le prêt car il n'y a pas eu de réinvestissement !

2.4.2 Méthode de l'amortissement à intérêt composé

Anglais : *Sinking fund valuation*

On veut trouver le prix P à payer pour une série de versements afin de réaliser le taux de rendement interne y. On connaît i.

On présume que

1. retrait de Py(paiement des intérêts) chaque année et réinvestissement du reste du versement.
2. On récupère P à la fin (grâce au réinvestissement dans un autre compte)

On veut une rente de n versements de k\$ de fin d'année. Avec quoi on récupère P ?

$$(K - Py)s_{\overline{n}|j} = P$$
$$P = \frac{ks_{\overline{n}|j}}{1 + ys_{\overline{n}|j}}$$

On sait aussi que la valeur actualisée de tout l'argent

$$P = Ka_{\overline{n}|i}$$

Exemple $k = 1000 \quad n = 10 \quad y = 8\% \quad j = 5\% \quad P =? \quad i =?$

Réponses :

$P = 6269,412650$ et $i = 9,534416\%$

Remarque 14. *il peut arriver que ce que les versements ne soient pas constants... mais ce qui est retiré pour mettre dans le* sinking fund *est constant.*

Alors,

$$\sum_{t=1}^{n}(K_t - Py)(1 + j)^{n-t} = P$$

et

$$\sum_{t=1}^{n} K_t(1+j)^{n-t} = P(1+ys_{\overline{n}|j})$$

Chapitre 3

Remboursement d'un pri£¡t

Contexte : jamais de début de période ($\ddot{a}$) lorsqu'on est en contexte de remboursement de prêt.

Pour rembourser un prêt, il faut retourner le capital et payer les intérêts. On peut le faire de 2 méthodes :

1. amortissement
2. fonds d'amortissement

3.1 Mï£¡thode de l'amortissement

$$\text{Notation à respecter :} \begin{cases} t & \text{tout de suite après un paiement.} \\ & t \text{ est mesuré en période.} \\ OB_t & \text{solde à } t \text{ (\textit{outstanding balance}).} \\ K_t & \text{versement à } t \text{ (\textit{payment}).} \\ I_t & \text{intérêts courus/payés à } t \text{ (\textit{interest due}).} \\ PR_t & \text{Capital remboursé à } t \text{ (\textit{principal repaid}).} \\ j_t & \text{taux effectif par période de } (t-1) \text{ à } t. \\ L & \text{montant emprunté (\textit{loan}).} \end{cases}$$

Quelques éléments importants :

$$\begin{aligned} OB_0 &= L \\ OB_n &= 0\$ \\ OB_t &= OB_{t-1} - PR_t \end{aligned}$$

$$K_t = \underbrace{I_t}_{\text{intérêts}} + \underbrace{PR_t}_{\text{capital remboursé}}$$

$$I_t = OB_{t-1} \cdot j_t$$

3.1.1 Méthode générale de l'amortissement

On fait d'abord l'hypothèse que $j_t = j \forall\ t$.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{t=1}^{n} K_t (1+j)^{-t} \\ &= \sum_{t=1}^{n} K_t v^t \end{aligned}$$

3.1.2 Tableau d'amortissement

t	j_t	K_t	I_t	PR_t	OB_t
0	$-$	$-$	$-$	$-$	L
1		K_1	$OB_0 \cdot j_1$	$K_1 - I_1$	$OB_0 - PR_1$
2		K_2	$OB_1 \cdot j_2$	$K_2 - I_2$	$OB_1 - PR_2$
$\ldots$					
$n-1$		K_{n-1}	$OB_{n-2} \cdot j_{n-1}$	$K_{n-1} - I_{n-1}$	OB_{n-1}
n		K_n	$OB_{n-1} \cdot j_n$	OB_{n-1}	0

$$
\begin{aligned}
K_T &= \sum_{t=1}^{n} K_t && \Rightarrow \text{montant qu'on a réellement payé pour notre emprunt} \\
I_T &= \sum_{t=1}^{n} I_t && \Rightarrow \text{montant total payé en intérêt} \\
PR_T &= K_T - I_T \\
&= L = OB_0
\end{aligned}
$$

Exemple

Note : c'est exactement la démarche qu'il faudra utiiliser à l'examen pour les tableaux d'amortissement.

avec $i = 5\%$.

t	j_t	K_t	I_t	PR_t	OB_t
0					1000
1	5%	150	1000 x 0,05 = **50**	150 - 50 = **100**	1000 - 100 = **900**
2	5%	150	900 x 0,05 = **45**	150 - 45 = **105**	900 - 105 = **795**
3	5%	150	804 x 0,05 = **39,75**	150 - 39,75 = **110,25**	795 - 110,25 = **684,75**

3.1.3 Forme rétrospective

Méthode qui consiste à accumuler le montant initial du prêt et d'y soustraire la valeur accumulée des paiements passés faits.

avec j qui varie :

$$\boxed{OB_t = L\prod_{s=1}^{t}(1+j_s) - \sum_{u=1}^{t} K_u(1+j_s)} \tag{3.1}$$

avec j constant :

$$\boxed{OB_t = L(1+j)^t - \sum_{u=1}^{t} K_u(1+j_s)^{t-u}} \tag{3.2}$$

Exemple

avec $i = 5\%$

$$\begin{aligned} OB_3 &= 1000(1,05)^3 - 150\sum_{u=1}^{3}(1,05)^{3-u} \\ &= 1000(1,05)^3 - 150 s_{\overline{3}|5\%} \\ &= 1000(1,05)^3 - 150\left(\frac{(1,05)^3-1}{0,05}\right) \\ &= 684,75\$ \end{aligned}$$

3.1.4 Forme prospective du solde

On actualise tous les paiements restants au prêt.

avec j qui varie :

$$\boxed{OB_t = \sum_{u=t+1}^{n} K_u \prod_{s=t+1}^{n}(1+j_s)^{-1}} \tag{3.3}$$

avec j constant :

$$\boxed{OB_t = \sum_{u=t+1}^{n} K_u(1+j)^{-(u+t)}} \tag{3.4}$$

3.1.5 Propriétés avec additionnelles de l'amortissement

3.1.5.1 Taux d'intérêt non constant

Exemple :

t	j_t	K_t	I_t	PR_t	OB_t
0					1000
1	5%	150	1000 x 0,05 = **50**	150 - 50 = **100**	1000 - 100 = 900
2	6%	150	900 x 0,06 = 54	150 - 54 = **96**	900 - 96 = 804
3	3%	150	804 x 0,03 = **24,12**	150 - 24,12 = **125,88**	804 - 125,88 = 678,12

On aurait pu résoudre de façon rétrospective,

$$\begin{aligned} OB_3 &= 1000(1,05)(1,06)(1,03) - 150(1,06)(1,03) - 150(1,06)(1,03) - 150(1,03) - 150 \\ &= 678,12\$ \end{aligned}$$

3.1.5.2 Capitalisation de l'intérêt

Si le paiement K_4 est plus petit que les intérêts à payer pour la période I_t, l'intérêt se capitalise et $OB_t > OB_{t-1}$.

Exemple avec $i = 5\%$

t	j_t	K_t	I_t	PR_t	OB_t
0					1000
1	5%	0	1000 x 0,05 = **50**	0 - 50 = **-50**	1000 - (-50) = **1050**
2	5%	564,7	1050 x 0,05 = **52,50**	564,60 - 52,50 = **512,20**	1050 - 512,50 = **537,80**
3	5%	564,69	537,80 x 0,05 = **26,89**	564,69 - 26,89 = **537,80**	**537,80** - 537,80 = **0**

3.1.5.3 Amortissement avec capital remboursé constant

$$\boxed{PR_1 = PR_2 = ... = PR_n}$$

$$PR_T = L \Rightarrow PR_t = \frac{1}{n}L$$

$$OB_t = (n-t)\frac{L}{n} = \frac{n-t}{n}L = (1-\frac{t}{n})L$$

$$I_t = OB_{t-1}j_t = \frac{n-1+1}{n}L \cdot j_t$$

$$K_t = \frac{L}{n} + \frac{n-t+1}{n}L \cdot j_t$$

Exemple avec $i = 5\%$

t	j_t	K_t	I_t	PR_t	OB_t
0					1000
1	5%	300	1000 x 0,05 = **50**	250	750
2	5%	387,5	750 x 0,05 = **37,50**	250	500
3	5%	275	500 x 0,05 = **25**	250	250
4	5%	262,5	250 x 0,05 = **12,50**	250	0

Remarque : $1000 = 312,50 a_{\overline{4}|5\%} - 12,50 (Ia)_{\overline{4}|5\%}$

3.1.5.4 Intérêts seulement avec remboursement du Capital à la fin.

$PR_1 = PR_2 = ... = PRn - 1 = 0$ et $PR_n = L$

Donc,

$$OB_0 = OB_1 = ... = OB_{n-1} = L$$

$$K_t = I_t = (OB_{t-1}j_t) = Lj_t \quad , t = 1, 2, ..., n-1$$

$$K_n = Lj_n + L = L(1 + j_n)$$

Exemple avec $i = 5\%$

t	j_t	K_t	I_t	PR_t	OB_t
0					1000
1	5%	50	1000 x 0,05 = **50**	0	1000
2	6%	60	750 x 0,06 = **60**	0	1000
3	3%	30	500 x 0,03 = **30**	0	1000
4	4%	1040	1000 x 0,04 = **40**	1000	0

3.2 Amortissement d'un prï£¡t avec des versements ï£¡gaux

$j_t = j \forall\ t$ et $K_t = K \quad$ pour $t = 1, 2, ..., n$

$$\boxed{L = K a_{\overline{n}|j}} \tag{3.5}$$

Donc $OB_0 = L \quad , OB_n = 0$

OB_t avec la méthode **rétrospective**

$$OB_t = L(1+j)^t - K s_{\overline{t}|j} \quad t = 1, 2, ..., n$$

OB_t avec la méthode **prospective**

$$OB_t = K a_{\overline{n-t}|j} \quad t = 0, 1, 2, ..., n-1$$

$$K_T = nK$$

$$\begin{aligned} PR_t &= OB_{t-1} - OB_t \\ &= K(a_{\overline{n-t+1}|j} - a_{\overline{n-t}|j} \\ &= K(1+j)^{-(n-t+1)} \\ &= Kv^{n-t+1} \rightarrow \text{progression géométrique} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_t &= K_t - PR_t \\
&= K(1 - v^{n-t+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_T &= K_T - PR_T \\
&= nK - L
\end{aligned}
$$

Si $K_t = K_{t+1}$ et $j_t = j_{t+1} = j$, alors

$$
PR_{t+1} = PR_t(1 + j)
$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
PR_{t+1} &= K - OB_t j \\
&= K - (OB_{t-1}(1 + j) - K)j \\
&= K + Kj - OB_{t-1}j(1 + j) \\
&= K(1 + j) - OB_{t-1}j(1 + j) \\
&= (K - OB_{t-1}j)(1 + j) \\
&= PR_t(1 + j)
\end{aligned}
$$

□

ⓘ Au Canada, les taux sont mesuré i ou $i^{(2)}$.
Supposons N années de versements mensuels, $n = 12N$.

$$
\begin{aligned}
L &= K a_{\overline{12N}|j} \\
&= 6K a^{(6)}_{\overline{2N}|i^{(2)}/2} \\
&= 12K a^{(12)}_{\overline{N}|i}
\end{aligned}
$$

ⓘ Au États-Unis, $i^{(12)}$

$$L = K a_{\overline{12N}|i^{(12)}/12}$$

Ça peut paraître moins cher, mais il y a des frais F !

Si on veut trouver le vrai taux,

$$L - F = K a_{\overline{12N}|j^{(12)}/12}$$

Supposons un emprunt initial (par exemple, un hypothèque) de L sur N années. Le taux initial $i^{(2)}$ fixé pour n années. Les versmements mensuels sont égaux. On sait aussi que le prêt initial est contracté à la banque A.

$$L = 6K a^{(6)}_{\overline{2N}|i^{(2)}/2}$$
$$K = \frac{L}{6a^{(6)}_{\overline{2N}|i^{(2)}/2}}$$

Au bout de n années, est-ce qu'on change pour la banque B ? On choisit $i_A^{(2)}$ ou $i_B^{(2)}$?

Pour répondre à cette question, calculons les 2 soldes :

$$OB_{12n} = 6K a^{(6)}_{\overline{2(N-n)}|i^{(2)}/2}$$

Mais il faut aussi considérer les frais F pour changer...

1. Supposons qu'on peut financer F dans le nouveau prêt à la banque B. On va comparer les versements : si $K_A \leq K_B$, ça ne sert à rien de changer !
   (a)
   $$OB_{12n} = 6K_A a^{(6)}_{\overline{2(N-n)}|i_A^{(2)}/2}$$
   (b)
   $$OB_{12n} + F = 6K_B a^{(6)}_{\overline{2(N-n)}|i_B^{(2)}/2}$$

2. Supposons que les frais F ne sont pas financés (contexte à l'américaine).

$$OB_{12n} = 6K_B a^{(6)}_{\overline{2(N-n)}|i_B^{(2)}/2}$$
$$OB_{12n} - F = 6K_B a^{(6)}_{\overline{2(N-n)}|i_{B*}^{(2)}/2}$$

Exemple

$N = 25 \quad n = 5 \qquad i = 6\% \quad L = 100000$
Trouver le montant des paiements mensuels égaux :

$$100000 = 12Ka^{(12)}_{\overline{25}|6\%}$$
$$\ldots$$
$$k = 634,620844\$$$

Solde :

$$OB_{60} = 12Ka^{(12)}_{\overline{20}|6\%}$$
$$= \ldots.$$
$$= 89725,429508\$$$

Options :

1. renouveler à $i_A = 4\%$
2. ou refinancer à $i_B = 3,75\%$ mais pénalité de $2000\$$

1.

$$OB_{60} = 12K_A a^{(12)}_{\overline{20}|4\%}$$
$$= \ldots$$
$$K_A = 540,343367$$

$$
\begin{aligned}
Ob_{60} &= K_B a^{(12)}_{\overline{20}|3,75\%} \\
&= \ldots \\
K_B &= 540,829142
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
OB_{60} &= 12K_B^* a^{(12)}_{\overline{20}|3,75\%} \\
&= \ldots \\
K_B^* &= 529,036793
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
OB_{60} - 2000 &= 12K_B^* a^{(12)}_{\overline{20}|i_B^*} \\
&= \ldots \\
i_B^* &= 4,016598\%
\end{aligned}
$$

3.3 Mï£¡thode du remboursement d'un prï£¡t via un fond d'amortissement

L : montant emprunté
J_1 : taux demandé par le prêteur
j_2 : taux fonds d'amortissement
n : nombre de versements

Contexte : si on contracte un emprunt L à un taux d'intérêt donné (exemple 5%), mais qu'on est capable d'obtenir un placement F pour la même période de temps avec un taux d'intérêt supérieur (exemple 6%), on a *intérêt* à payer seulement les intérêts pour le prêt L et déposer le reste du paiement prévu dans l'autre compte F. De cette façon, on va accumuler le montant emprunté plus rapidement et on va payer moins d'intérêts (I_T).

Lorsque le taux d'intérêt du fonds d'amortissement est plus bas que le taux d'intérêt du prêt, ça semble illogique... mais dans le contexte d'un obligation (sera vue au chapitre 4), on reçoit des coupons qui doivent être réinvestis dans un compte quelconque. On essaie donc d'avoir le meilleur taux disponible. Encore là, on pourrait dire *pourquoi ne pas faire un remboursement anticipé ? Comme ça on va sauver des frais d'intérêt !* Mais il est plutôt rare que les obligations peuvent être modifiée, surtout en ce qui a trait au coupon.

$OB_t^L \quad K_t^L \quad I_t^L \quad PR_t^L \Rightarrow$ représente la relation avec le prêteur, soit tout ce qui concerne l'endroit où on a contracté le prêt. Les différents éléments du tableau d'amortissement peuvent être calculés de la même façon qu'à la section 3.1.5.4.

Pour ce qui est du compte F (*sinking fund*) :
Les paiements qu'on fait au fonds sont calculés ainsi :

$$\boxed{K_1^F = K_2^F = ... = K_{n-1}^F = \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}}} \tag{3.6}$$

Démonstration. **Objectif** : les dépôts égaux faits dans le compte (*fond d'amortissement*) produisent une valeur accumulée L.

Supposons que K représente le dépôt périodique : on veut donc $L = ks_{\overline{n}|j_2} \Leftrightarrow k = \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}}$. □

Les paiements sont tous égaux, sauf le dernier (qui est négatif car on doit rembourser au prêteur le Capital). Car après le dernier dépôt, on retire L du compte pour rembourser le Capital au prêteur. Et en même temps, on paye aussi les intérêts courus comme d'habitude.

$$\boxed{K_n^F = \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}} - L} \tag{3.7}$$

$$\underbrace{OB_0^F = 0}_{\text{Car on ne doit rien au } \textit{sinking fund}.}$$

$$\boxed{OB_t^F = \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} s_{\overline{t}|j_2} \quad \text{pour } t = 1, 2, ..., n-1} \tag{3.8}$$

Démonstration. On sait que $OB_0^F = 0$

Alors, de façon prospective on peut dire que

$$\begin{aligned} OB_t^F &= 0(1+j_2)^t - \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}} s_{\overline{t}|j_2} \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} s_{\overline{t}|j_2} \end{aligned}$$

□

$$K_t = K_t^F + K_t^L$$

$$OB_t = OB_t^F + OB_t^L$$

$$\boxed{PR_t^F = \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}} (1+j_2)^{t-1}} \tag{3.9}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} PR_t^F &= OB_{t-1}^F - OB_t^F \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} (s_{\overline{t-1}|j_2} - s_{\overline{t}|j_2}) \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} \left(\frac{(1+j_2)^{t-1} - 1}{j_2} - \frac{(1+j_2)^t - 1}{j_2} \right) \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} \left(\frac{(1+j_2)^{t-1} - (1+j_2)^t}{j_2} \right) \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} (1+j_2)^{t-1} \left(\frac{\cancel{1} - (\cancel{1} + \cancel{j_2})}{\cancel{j_2}} \right) \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} (1+j_2)^{t-1} (-1) \\ &= \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}} (1+j_2)^{t-1} \end{aligned}$$

$\square$

$$\boxed{PR_n^F = \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}}(1+j_2)^{n-1} - L} \tag{3.10}$$

Démonstration. On peut dire que

$$PR_n^F = OB_{n-1}^F - \cancel{OB_n^F} = OB_{n-1}^F$$

Alors, prospectivement :

$$PR_n^F = OB_{n-1}^F - OB_n^F \qquad = \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} s_{\overline{n-1}|j_2}$$

prospectivement

$$= \frac{L}{s_{\overline{n}|j_2}}(/ + j_2)^{n-1} - L$$

$\square$

$$\boxed{I_t^F = \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}}\left[(1+j_2)^{t-1} - 1\right]} \tag{3.11}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_t^F &= OB_{t-1}^F j_2 \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} s_{\overline{t-1}|j_2} j_2 \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} \left(\frac{(1+j_2)^{t-1} - 1}{\cancel{j_2}}\right) \cancel{j_2} \\ &= \frac{-L}{s_{\overline{n}|j_2}} \left[(1+j_2)^{t-1} - 1\right] \end{aligned}$$

$\square$

Au total,

Tableau synthèse des 2 comptes		
éléments	Relation avec prêteur (L)	Fonds d'amortissement (F)
OB_0	$OB_0^L = L$	$OB_0^F = 0$
OB_t	$OB_t^L = L$	OB_t^F
OB_n	$OB_n^L = 0$	$OB_n^F = 0$
K_t	$K_t^L = Lj_1$	$K_t^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rceil j_2}}$
K_n	$K_n^L = Lj_1 + L$	$K_n^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rceil j_2}} - L$
I_t	$I_t^L = Lj_1$	$I_t^F = \frac{-L}{s_{\overline{n}\rceil j_2}} \left[(1+j_2)^{t-1} - 1\right]$
PR_t	$PR_t^L = 0$	$PR_t^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rceil j_2}}(1+j_2)^{t-1}$
PR_n	$PR_n^L = L$	$PR_n^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rceil j_2}}(1+j_2)^{n-1} - L$

Chapitre 4

ï£¡valuation d'une obligation

Obligation (*Bond*) : forme de dettes qui est ï£¡mise par les entreprises ou gouvernement. Une obligation verse des coupons (ï£¡gaux) tous les 6 mois par dï£¡faut jusqu'ï£¡ l'ï£¡chï£¡ance.

Relation : plus le taux promis est ï£¡levï£¡, plus la valeur de l'obligation est faible.

4.1 Calcul du prix d'une obligation

Caractéristiques

- ✓ valeur nominale F (*face amount*)
- ✓ Taux de coupon r (*coupon rate*)
- ✓ Date d'échéance T (*maturity date*)
- ✓ valeur de remboursement C (*redemption value*)

Important !

- ✓ Par défaut $F = C$
- ✓ taux de coupon de type $r^{(2)}$ (payable semi-annuellement)
- ✓ premier coupon dans 6 mois
- ✓ dernier coupon à l'échéance

Dans le cas des obligations, la taux de rendement interne est appelé le **taux de rendement à l'échéance**. (*YTM* = *yield to maturity*).

4.1.1 Prix d'une obligation à une date de coupon

évaluation tout de suite APRÈS le versement du coupon.

r = taux de coupon par période de coupon

$$r = \frac{r^{(2)}}{2} \tag{4.1}$$

n : nombre de coupons

$$n = 2T \tag{4.2}$$

Fr : montant de chaque coupon (même si $F \neq C$)
j : taux d'évaluation par période de coupons

$$j = \frac{y^{(2)}}{2} \tag{4.3}$$

Le prix de l'obligation est la valeur actualisée des coupons qui seront versés en plus de la valeur nominale C.

$$\boxed{P = Fr a_{\overline{n}|j} + Cv^n} \tag{4.4}$$

En manipulant la formule un peu, on obtient :

$$\boxed{P = (Fr - Cj)a_{\overline{n}|j} + C} \tag{4.5}$$

Par défaut, $F = 100$, les prix sont indiqués à 3 décimales et les taux $r^{(2)}$ et $y^{(2)}$ sont indiqués à décimales en $\%$.

4.1.2 Obligations achetées ou vendues au dessus ou au dessous du pair

Lorsque...	équivalent	l'obligation est transigée...	(*terme anglais*)
$P > C$	$Fr > Cj$	au **dessus du pair**	*at a premium*
$P = C$	$Fr = Cj$	**au pair**	*at par*
$P < C$	$Fr < Cj$	au **dessous du pair**	*at a discount*

4.1.3 Prix d'une obligation entre 2 coupons

Définitions :

P_0	prix lors du dernier coupon (il vient d'être versé)
P_1	prix après le versement du prochain coupon
t	temps écoulé (en période de coupons) depuis le dernier coupon
P_t	prix d'une obligation entre 2 coupons au temps t

$$t = \frac{\text{nombre de jours depuis le dernier coupon}}{\text{nombre jours entre le dernier coupon et le prochain coupon}}$$

On peut trouver le prix de l'obligation avec la méthode rétrospective :

$$\boxed{P_t = P_0(1+j)^t} \tag{4.6}$$

Ou avec la méthode prospective :

$$\boxed{P_t = (P_1 + Fr)(1+j)^{-(1-t)}} \tag{4.7}$$

l'exposant est $-(1-t)$ car on actualise seulement la fraction de période de coupon manquante pour obtenir notre P_t désiré.

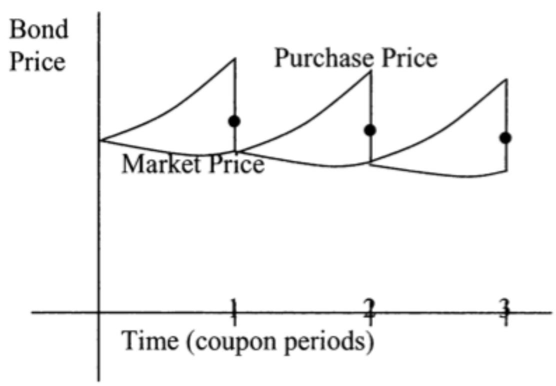


FIGURE 4.3

Toutefois, P_t n'est pas le prix qu'on trouverait sur des sites de données financières... Quel est le *prix du marché* ?

Prix du marché

$$\boxed{\text{Prix}_t = P_t - t \times Fr} \tag{4.8}$$

4.1.4 Valeur comptable d'une obligation

On calcule la valeur d'une obligation seulement avec les coupons futurs et la valeur de remboursement.

pour la valeur comptable, on prends le taux d'évaluation qui était en vigueur lors de l'achat de l'obligation.

4.1.5 Trouver le taux de rendement à l'échéance (RAE) d'une obligation

Un peu de vocabulaire :
Cours acheteur (*Bid*) $\Rightarrow$ cours le plus bas auquel on veut vendre
Cours vendeur (*Ask*) $\Rightarrow$ cours le plus haut auquel on veut acheter

En réalité, on négocie P afin d'obtenir le taux j désiré !

Taux de rendement tout de suite après un coupon :

$$P = Fra_{\overline{n}|j} + Cv^n$$

Taux de rendement entre 2 coupons il faut procéder avec la BA-II Plus.
2nd 9 pour accéder à l'utilitaire BOND

Lorsqu'on est prêt à enregistrer notre valeur, on appuie sur ENTER. On navigue ensuite au travers des différentes options ci-dessous avec les touches ↓.

Option	signification	format d'entrée
SDT	date d'achat	mm.jjaa
CPN	montant de coupon annuel	
RDT	date d'échéance	mm.jjaa
RV	valeur de remb. C	
ACT	ne pas modifier !	
2/Y	nombre de coupons versés/an	
YLD	taux RAE $y^{(2)}$	mm.jjaa
PRI	prix du marché Prix$_t$	mm.jjaa
AI	à ajouter au prix pour avoir P_t	mm.jjaa

On a seulement qu'à faire CPT sur la variable qu'il faut faire calculer. Dans notre cas, cet utilitaire nous intéresse pour son calcul du *yield* entre 2 périodes de coupon ! autrement, on peut le calculer plus rapidement avec la méthode analytique.

Exemple 4.3 de Broverman

a)

SDT	1.1510	
CPN	8	
RDT	1.1530	
RV	100	
PRI	70.400	
YLD	CPT	$\rightarrow 11.9129647(\%)$

b)

(i)

SDT	1.1515	
PRI	112.225	
YLD	CPT	$\rightarrow 6.695830543(\%)$

(ii)

SDT	1.1510	
RDT	1.1515	
RV	112.225	
PRI	70.40	
YLD	CPT	$\rightarrow 18.99983616(\%)$

(iii) Ce numéro ne se fait pas avec l'utilitaire : on le fait avec les touches de la calculatrice, ou de façon analytique.
2nd CPT Pour sortir de l'utilitaire

N	10
I/Y	3
PV	0
PMT	-4
FV	CPT $\rightarrow 45.85551725$

c) 2nd CPT pour retourner dans l'utilitaire

SDT	4.0115
RDT	1.1430
RV	100
PRI	112.225
YLD	CPT $\rightarrow 6.684204681(\%)$
AI	1.679558011

4.1.6 Amortissement d'une obligation

Un peu comme à la section 3.3, on peut amortir une obligation :

$$K_t = Fr \quad \text{pour } t = 1, 2, ..., n-1 \tag{4.9}$$

$$K_n = Fr + C \tag{4.10}$$

$$OB_0 = P \tag{4.11}$$

$$OB_t = \underbrace{BV_t}_{\text{book value}} = (Fr - C)a_{\overline{n-t|}j} + C \tag{4.12}$$

$$I_t = OB_{t-1}j = (Fr - Cj)(1 - v^{n-t+1}) + Cj \tag{4.13}$$

$$Pr_t = Fr - I_t = (Fr - Cj)v^{n-t+1} \tag{4.14}$$

$$PR_n = (Fr - Cj)(1 - v^{n-t+1}) + C \tag{4.15}$$

Remarque

Si $P > C \rightarrow PR_t > 0$ et on se constitue un amortissement de la prime (*the amount for amortization of premium*) égale à $P - C$

TABLE 4.3a

k	Outstanding Balance	Payment	Interest Due	Principal Repaid
0	10,673.27	–	–	–
1	10,600.21	500	426.93	73.07
2	10,524.22	500	424.01	75.99
3	10,445.19	500	420.97	79.03
4	10,363.00	500	417.81	82.19
5	10,277.52	500	414.52	85.48
6	10,188.62	500	411.10	88.90
7	10,096.16	500	407.54	92.46
8	0	10,500	403.85	10,096.15

Si $P < C \rightarrow Pr_t < 0$ et on se constitue une accumulation de l'escompte (*the amount for amortization of discount*) égale à $C - P$

TABLE 4.3c

k	Outstanding Balance	Payment	Interest Due	Principal Repaid
0	9379.02	—	—	—
1	9441.76	500	562.74	−62.74
2	9508.27	500	566.51	−66.51
3	9578.77	500	570.50	−70.50
4	9653.50	500	574.73	−74.73
5	9732.71	500	579.21	−79.21
6	9816.67	500	583.96	−83.96
7	9905.67	500	589.00	−89.00
8	0	10,500	594.34	9905.66

4.2 Applications et illustrations

4.2.1 Obligation remboursable par anticipation : dates optionnelles de remboursement

en anglais : *Callable bond*

C'est l'émetteur de l'obligation qui décide des moments où le remboursement anticipé peut être fait. C peut dépendre de la date choisie.

Le taux de rendement à l'échéance (RAE) dépend du vrai T et du vrai C.

Si $Fr = Cj$, tout est équivalent.

Si $Fr < Cj$, les coupons sont *petit* et l'émetteur aura avantage à attendre. Donc, on calculera le prix (le plus petit) et le taux j (le plus petit) en supposant le remboursement à l'échéance.

Si $Fr > Cj$, les coupons sont *gros* et l'émetteur aura avantage à se dépêcher.

Notes

- ✓ Calculs de P et j se font en supposant un remboursement dès que possible.
- ✓ Ces observations supposent que la valeur de remboursement est toujours C.
- ✓ Sinon, il faut faire les calculs pour chaque C possibles et prendre le plus petit P (ou j).

Chapitre 5

Mesure du taux de rendement d'un investissement

Rappel : il y a un lien direct *(inverse)* entre le prix le taux d'intérêts.

Ça l'implique que comparer les prix, c'est comparer les taux (dans un contexte de prix, avec une série de versements fixes à recevoir).

Taux de rendement interne (TRI) En anglais, *internal rate of return (IRR)*. Le taux contient toute l'information pertinente si il y a l'une de ces 2 situations :

a) le réinvestissement se fait au même taux

b) il n'y a pas de réinvestissement

5.1 Le taux de rendement interne et valeur actualisï£¡e nette

Il y a une fonction sur la calculatrice $\boxed{\text{NPV}}$, mais il ne pourra pas être utilisé à l'examen.

Valeur actualisée nette = *Net Present Value*

Est-ce qu'on préfère un TRI élevé ou faible ? Ça dépend de quel côté de l'équation on se trouve ! Si on emprunte, on préfère un TRI faible. À l'inverse, on préfère un TRI élevé si on prête de l'argent.

5.1.1 Définition du taux de rendement interne

Définition *Le* (n'importe lequel) taux d'intérêt pour lequel VA(paiements faits) - VA(versements reçus).

VA valeur actualisée

paiements faits sorties de fonds

versements reçus entrées de fonds

la VAN est donc une équation de valeur !

il faut que les deux VA soient calculés au même moment. Mais on pourrait aussi se placer ailleurs (évaluer à $t \neq 0$) et même prendre des valeurs accumulés.

Jusqu'à maintenant, nous avions une seule solution possible pour le taux j et le problème était tel que $j > 0$. Il en était ainsi parce que les entrées de fonds suivaient les sorties de fonds (ou l'inverse). Il n'y avait donc qu'un seul changement de signe dans les flux monétaires (*Cash-flows*).

On va généraliser. Supposons qu'il y a des flux monétaires à $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$.

soit $A_k \geq 0$, l'entrée de fonds à t_k, $\quad k = 0, 1, ..., n$

Soit $B_k \geq 0$, la sortie de fonds à t_k, $\quad k = 0, 1, ..., n$

Équation de valeur :

$$\sum_{k=0}^{n} A_k v^{t_k} = \sum_{k=0}^{n} B_k v^{t_k}$$
$$\sum_{k=0}^{n} (A_k - B_k) v^{t_k} = 0$$

Soit $C_k = A_k - B_k$ le flux monétaire net à t_k, $\quad k = 0, 1, ..., n$. Donc si $C_k < 0$, c'est une sortie de fonds nette. Et si $C_k > 0$, c'est une entrée de fonds nette.

Définition : le TRI est n'importe quel taux d'intérêt j qui vérifie l'égalité suivante :

$$\sum_{k-0}^{n} C_k (1+j)^{-t_k} = 0$$

où j est un taux effectif par période et les t_k sont mesurées en périodes.

Nous supposons toujours l'intérêt composé

Le TRI peut être négatif et il peut y avoir plus d'une solution...

Exemple 5.1

$t_0 = 0 \quad t_1 = \frac{1}{2}$ an $\quad t_2 = 1 \quad t_3 = 1\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 - 1000 \times 5 \times 1,02 \\ &= -5100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1000 \times 0,20 - \underbrace{200}_{4\times 50} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 - 500 \times 4,50 \times 1,02 \\ &= -2295 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= (1550 \times 0,25 \times +1550 \times 5 \times 0,98) - 0 \\ &= 7982,50 \end{aligned}$$

L'équation à poser :

$$-5100 - 2295(1+i)^{-1} + 7982,50(1+i)^{-1,5} = 0$$

Claire ne s'attend pas à ce qu'on soit capable de résoudre une équation de 3e degré, mais on doit être capable d'utiliser le discriminant d'une quadratique.

Si on utilise la calculatrice BA II-Plus

$\boxed{\text{CFo}}$	$= C_0$
$\boxed{\text{C01}}$	$= C_1$
$\boxed{\text{F01}}$	= fréquence
$\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{CPT}}$	= TRI

Remarque : Les flux monétaires doivent être également espacés ($t_{k-1} - t_k = \Delta t, \quad k = 0, 1, ..., n$). Cela peut nécessiter l'ajout de paiements de 0\$, pour mettre tous les paiements sur la même base.

La BA II Plus trouve <u>un</u> taux effectif par période (Δt)

alors,

$\boxed{\text{CF}}$
-5100 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\downarrow}$ 0 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\downarrow}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\downarrow}$ -2295 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\downarrow}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\downarrow}$ 7982.5 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\downarrow}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{CPT}}$ = 3.246381644(%)

Sauf que le taux trouvé est $j = \frac{i^{(2)}}{2} = 0,03246381644$, alors

$$i = (1+j)^2 - 1 = 0,06598$$

5.1.2 Unicité du TRI

résultats pertinents de l'exercice 5.1.6 Soit l'équation $\sum_{k=0}^{n} C_k v^k = 0$ où $v = \frac{1}{1+j}$ est le facteur d'actualisation pour une période ($t_0 = 0, t_{k-1} - t_k = \Delta t, \quad k = 0, 1, ...,$).

Implicitement, $C_0 \neq 0 \quad C_n \neq 0$

Résultat 1

Cette équation a au plus m solutions $v > 0$ où m est le nombre de changement de signe dans la suite $\{C_0, C_1, C_2, ..., C_n\}$

Zéro (0) est neutre. Il n'entraîne pas de changements de signe.

Ce n'est pas parce que $v > 0$ que nécessairement $j > 0$. Si $v > 0$, alors on est sûr que $j > -100\%$.

Résultat 2

Il y a une seule solution $j > -100\%$ si la suite $\{C_0, C_1, C_2, ..., C_n\}$ a un seul changement de signe.

Résultat 3

Soit $F_k = \sum_{s=0}^{k} C_s$ le flux monétaire cumulatif de t_0 à t_k. Il y a une seule solution $j > 0$ si la suite$\{F_0, F_1, ..., F_n\}$ n'a qu'un changement de signe.

On suppose de facto,

$$C_0 \neq 0$$
$$F_n \neq 0$$

Exemple 5.2

Équations quadratiques avec 0,1 ou 2 solutions :

$$C_0 + C_1 v + C_2 v^2 = 0$$

Dans l'exemple 5.2 ... $C_0 = -1 \quad C_1 = 2,3 \quad C_2 \in \{-1,33; -1,32; -1,3125; -1,2825\}$

— Le résultat 2 n'est pas applicable

— Le résultat 1 $\rightarrow \leq 2$ solutions (pas pertinent, on n'avance pas)

— Résultat 3 $F_0 = -1 \quad F_1 = 1,3 \quad F_2 \in \{-0,03; -0,02; -0,0125; 0,0175\}$
Ce résultat n'est pas intéressant pour a) b) c), mais il est utile le d)

Remarque 15. *l'équation pour trouver le TRI suppose que le même taux s'applique, qu'on soit à découvert ou non, que F_k soit positif ou négatif.*

5.1.3 Évaluation de projet en utilisant la valeur actualisée nette

Au lieu de comparer les TRI, on va comparer les VAN (valeur actualisées nettes). On veut la VAN la plus élevée possible (et ≥ 0). Implicitement, on sait que c'est le taux utilisé pour actualiser.

À quel taux actualise-t-on ? Au taux d'intérêt de préférence de l'individu (au *taux d'intérêt décrété* !)

Le choix (décision) est sensible au taux utilisé.

$$\boxed{VAN = \sum_{k=0}^{n} C_k v^{t_k}} \tag{5.1}$$

(Souvent, $C_0 < 0$ et $C_k \geq 0 \quad k = 1, ..., n$)

Coût du capital taux d'intérêt de préférence (*interest preference rate*)

$$\boxed{TRI = i \text{ tel que } VAN = 0} \tag{5.2}$$

5.2 Taux de rendement pondéré en dollars et par période

Traduction de l'anglais :

Dollar-weighted pondéré par dollars

Time-weighted pondéré par période

But : Calculer le taux de rendement <u>annuel</u> d'un fonds commun de placement ou d'une caisse de retraite.

5.2.1 Taux de rendement pondéré en dollar

C'est un TRI...

a) sur base d'intérêt simple
b) avec équation de valeur posée à $t = 1$
c) et compteur remis à 0 séparément au moment de chaque transaction.

Soit

A **:** valeur du fonds à $t = 0$

B **:** valeur du fonds à $t = 1$

C_k **:** flux monétaire net à t_k

Équation :

$$A(1+i) + \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + (1 - t_k)i) = B$$

Si on isole i, on obtient :

$$\boxed{i = \frac{I}{A + \sum_{k=1}^{n} C_k(1 - t_k)}} \tag{5.3}$$

où $I = B - (A + \sum_{n=1}^{n} C_k)$

On peut aussi faire une approximation (s'il y a beaucoup de t_k) :

$$\boxed{i \approx \frac{I}{A + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} C_k}} \tag{5.4}$$

5.2.2 Taux de rendement pondéré par période

Composition des taux de rendement réalisée par période entre flux monétaires successifs.

Petit exemple

2016-01-01	A
2016-02-28	depuis le 1er janvier, rendement 1%
2016-02-28	dépôt ou retrait
2016-09-30	depuis le dépôt et avant le prochain dépôt, rendement 2%

Puis, entre après le dépôt du 30 septembre et le 31 décembre, il y a eu un rendement de 0,5% pendant cette période.

Si on fais le produit de tous les rendements de périodes qu'on a calculé pour la période, on obtient le rendement annuel !

A **:** valeur du fonds à $t = 0$

B **:** valeur du fonds à $t = 1$

C_k **:** flux monétaire net à $t_k, \quad 0 < t_k < 1, \quad k = 1, ..., n$

F_k **:** valeur du fonds à t_k^- (juste avant le flux monétaire net C_k)

Équation :

$$\boxed{1 + i = \left(\frac{F_1}{A}\right) \times \left(\frac{F_2}{F_1 + C_1}\right) \times \left(\frac{F_2}{F_2 + C_2}\right) \times ... \times \left(\frac{F_n}{F_{n-1} + C_{n-1}}\right) \times \left(\frac{B}{F_n + C_n}\right)} \tag{5.5}$$

il est possible qu'on vous donne plutôt, comme dans l'exemple 5.4 du livre, des valeurs à t_k^+ (c'est-à-dire qu'on nous donne des C_k et des $F_k + C_k$).

5.2.3 Applications et illustrations

5.2.3.1 Méthode du portefeuille (*Portfolio method*)

Le taux d'intérêt qui s'applique ne dépend que de l'année civile courante.

Cette section est toujours dans un contexte d'intérêt composé.

Chapitre 6

Structure par ï£¡chï£¡ance des taux d'intï£¡rï£¡ts

en anglais, *term structure of interest rates*

Considï£¡rations pour fixer i :

- cote de crï£¡dit (*credit rating*)
- ï£¡chï£¡ance (*term*)

Variantes :

normale (*normal*) : taux augmente avec l'ï£¡chï£¡ance. C'est la structure qu'on retrouve en gï£¡nï£¡ral.

plate (*flat*) : taux (ï£¡ peu prï£¡s) constant (variante)

inversï£¡e (*inverted*) : taux qui dï£¡croï£¡t, au moins ï£¡ partir d'une certaine ï£¡chï£¡ance (variante)

Remarque 16. *Deux obligations avec mï£¡me n, mais r diffï£¡rents, n'ont pas nï£¡cessairement le mï£¡me j.*

Obligation coupon zï£¡ro (*zero-coupon bond*) $\Rightarrow r = 0$

Supposons $C = 1$ (d'habitude $C = 100$).

$s_0(t)$: taux comptant (effectif annuel) au temps 0 pour une obligation zï£¡ro-coupon avec ï£¡chï£¡ance dans t annï£¡es. (anglais : *spot-rate*)

Le prix d'un *zï£¡ro coupon* ï£¡chï£¡ant dans t annï£¡es est

$$\boxed{P = \frac{1}{(1+s_0(t))^t}} \tag{6.1}$$

oï£¡ $s_0(t)$ est un taux effectif annuel.

Structure : $\{s_0(t), t > 0\}$

Remarque 17. *broverman considï£¡re aussi des* $s_0(t)^{(2)}$.

Si $C = 1, p = (1 + s_0(t))^{-t}$. Mais de faï£¡on plus gï£¡nï£¡rale, $P = C(1 + s_0(t))^{-t}$.

Important de distinguer :

Point de base *basis point*, ï£¡a vaut 0,01%

point de pourcentage 1%

Dans les journaux, $C = 100$.
$S_0(0)$ n'est pas dï£¡fini. Il est implicite que

$$C_0(1 + s_0(0))^{-0} = c_0$$

Ensemble de flux monï£¡taires $C_0, C_1, ..., C_n$ ï£¡ $t = 0, 1, ..., n$ respectivement.

On peut trouver la valeur actualisï£¡e de cet ensemble lï£¡ (trouver le prix) :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(1 + s_0(k))^{-k}$$

6.1 Taux d'intï£¡rï£¡t au comptant

Dans les journaux, on trouve des $s_0^{(2)}(t)$.

La loi du prix unique (*Law of one price*) : Dans un marchï£¡ efficient, un titre (instrument financier, sï£¡rie de flux monï£¡taire) doit avoir un prix unique, peu importe comment il est crï£¡ï£¡.

6.2

6.3 Taux d'intï£¡rï£¡t ï£¡ terme

anglais : *forward rate*

6.3.1 ... vus comme des taux d'emprunts ou de prï£¡t diffï£¡rï£¡s

Hypothï£¡se : Les mï£¡me taux s'appliquent que nous soyons prï£¡teur ou emprunteur.

Supposons $s_0(n)$ et $s_0(n+1)$ connus.

1. Supposons que nous empruntons $K\$$ pour n annï£¡es et dï£¡posons $K\$$ pour $n+1$ annï£¡es.[1]

	$t=0$	$t=n$	$t=n+1$
emprunt$*$	$+K$	$-k(1+s_0(n))^n$	
dï£¡pï£¡t$*$	$-K$		$+K(1+s_0(n+1))^{n+1}$
ensemble	0	$-k(a+s_0(n))^n$	$+K(1+s_0(n+1))^{n+1}$

ï£¡a ï£¡quivaut ï£¡ dï£¡poser $K(1+s_0(n))^n$ ï£¡ $t=n$ pendant 1 an. Mais... il faut tout figer ï£¡ $t=0$.

1. Il faut ï£¡tre capable de remplir ce tableau pour l'examen

Quel est le rendement ?

$$\boxed{i_0(n, n+1) = \frac{K(1+s_0(n+1))^{n+1}}{k(1+s_0(n))^n} - 1} \tag{6.2}$$

$i_0(n, n+1)$ est le taux ï£¡ terme de la $(n+1)^{e}$ annï£¡e.

⚠ Tous les engagements se prennent ï£¡ $t = 0$.

voir un exemple plus clair aux pages suivantes ...

6.3.2 Arbitrage avec les taux d'intï£¡rï£¡t ï£¡ terme

Conseil : Lire la sous-section 6.4.1 du livre (n'est pas ï£¡ l'examen par contre).

Gain d'arbitrage : Gain garanti (pas de risque) strictement positif sur investissement nul (*free lunch*).

Un taux d'intï£¡rï£¡t ï£¡ terme (*forward rate of interest*) est un taux que nous pouvons fixer aujourd'hui pour une pï£¡riode dans le futur.

Si on peut s'engager aujourd'hui pour la pï£¡riode de $t = n$ ï£¡ $t = n+1$ ï£¡ un taux qui ne correspond pas ï£¡ celui implicite dans la suite de taux au comptant, on peut faire un gain d'arbitrage.

Supposons $j > i_0(n, n+1)$ comme taux auquel dï£¡poser $K\$$ ï£¡ $t = n$ pour 1 an si je m'engage aujourd'hui.

	$t = 0$	$t = n$	$t = n+1$
Dépôt		$-K$	$+K(1+j)$
Retrait ...	$-K(1+s_0(n))^{-n}$	$+K$	
emprunt...	$+K(1+s_0(n))^{-n}$		$\frac{-K(1+s_0(n))^{n+1}}{(1+s_0(n))^n}$

ï£¡ $t = n+1$,

$$K(1+j) - K\frac{(1+s_0(n+1))^{n+1}}{(1+s_0(n))^n} = k(1+j) - k(1+i_0(n, n+1))$$

ACT 1001 Exemple de taux d'emprunt différé

Q : Comment fait-on pour fixer aujourd'hui le taux auquel nous pourrons emprunter 30 000 \$ dans 3 ans, pour 1 an, si $s_0(3) = 3{,}4\%$ et $s_0(4) = 3{,}5\%$? Quel est ce taux ?

R. : Comme nous voulons emprunter de $t=3$ à $t=4$, il faut, aujourd'hui, emprunter pour 4 ans et déposer pour 3 ans. Voici le tableau qui montre l'ensemble des opérations.

	$t=0$	$t=3$	$t=4$
déposer $30\,000(1{,}034)^{-3}$ pour 3 ans au taux de 3,4 %	$-30\,000(1{,}034)^{-3}$	$+30\,000$	
emprunter $30\,000(1{,}034)^{-3}$ pour 4 ans au taux de 3,5 %	$+30\,000(1{,}034)^{-3}$		$-\dfrac{30\,000}{(1{,}034)^3}(1{,}035)^4$
	0	$+30\,000$	$-30\,000\,\dfrac{1{,}035^4}{1{,}034^3}$

Il faut donc emprunter $30\,000(1{,}034)^{-3}$ pour 4 ans à 3,5 % et déposer cette somme pour 3 ans à 3,4 % pour fixer aujourd'hui le taux auquel nous pourrons emprunter 30 000 \$ pour un an dans trois ans.

À quel taux aurons-nous emprunté grâce aux opérations faites à $t=0$?

$$\frac{30\,000\left(\frac{1{,}035^4}{1{,}034^3}\right)}{30\,000} - 1 = 0{,}038\,005\,806$$

Le taux que nous devrons payer sur l'emprunt est donc 3,800 581 %.

Remarques:

1. En inversant les positions et les signes on fixerait plutôt un taux de dépôt de $t=3$ à $t=4$.

2. Au lieu de demander comment fixer un taux d'emprunt de $t=3$ à $t=4$, on peut demander à quoi équivaut un dépôt pour 3 ans jumelé à un emprunt pour 4 ans de la même somme (ou un emprunt pour 3 ans jumelé à un dépôt pour 4 ans de la même somme).

	$t=0$	$t=3$	$t=4$
s'engager à $t=0$ à déposer X à $t=3$ pour 1 an à 4%		$-X$	$+X(1{,}04)$
déposer $X(1{,}034)^{-3}$ pour 3 ans à 3,4%	$-X(1{,}034)^{-3}$	$+X$	
emprunter $X(1{,}034)^{-3}$ pour 4 ans à 3,5%	$+X(1{,}034)^{-3}$		$-X(1{,}034)^{-3}(1{,}035)^{4}$
	0	0	Y

$$Y = X(1{,}04) - X(1{,}034)^{-3}(1{,}035)^{4} = 0{,}001\,994\,194\,X$$

Remarque : En examen, je dois vous donner les taux. Ensuite, dans la mesure où il y a arbitrage, je peux vous fournir X (comme étant le montant maximal que vous pouvez vous engager aujourd'hui à déposer ou emprunter plus tard) ou Y (comme étant le gain d'arbitrage à réaliser.

ACT 1001 Exemple d'arbitrage

En théorie, nous devrions avoir $\frac{(1+s_0(4))^4}{(1+s_0(3))^3} = 1+i_0(3,4)$.

Autrement dit, si $s_0(4) = 3,5\%$ et $s_0(3) = 3,4\%$, nous devrions observer que le taux à terme de la 4e année est

$$i_0(3,4) = (1,035)^4/(1,034)^3 - 1 = 3,800\,581\%$$

Si on nous offre de nous engager aujourd'hui à emprunter ou déposer de $t=3$ à $t=4$ à un taux différent il y a opportunité d'arbitrage!

Supposons que quelqu'un nous offre la possibilité de déposer ou d'emprunter X de $t=3$ à $t=4$ au taux de 4%. Pour se prévaloir de l'offre, il faut s'engager aujourd'hui! (Il faut aussi choisir si on préfère emprunter ou déposer!)

On a le choix entre 3,800 581% qu'il faut "reproduire" et 4% qui est directement disponible. On exploite l'arbitrage en déposant à 4% et en faisant l'équivalent d'un emprunt à 3,800 581%.

L'objectif est de ne pas sortir d'argent ni à $t=0$ ni à $t=3$, mais de dégager un profit (gain d'arbitrage) à $t=4$.

Voyons comment faire en remplissant un tableau.

Dans un problï£¡me, on peut fixer :

a) le montant ï£¡ $t = 0$;

b) le montant ï£¡ $t = n$;

c) le gain d'arbitrage ï£¡ $t = n + 1$.

6.3.3 Dï£¡finition gï£¡nï£¡rale des taux d'intï£¡rï£¡t ï£¡ terme

$$\boxed{i_0(0,1) = s_0(1)} \tag{6.3}$$

$$\boxed{i_0(n,n+1) = \frac{K(1+s_0(n+1))^{n+1}}{k(1+s_0(n))^n} - 1} \tag{6.4}$$

$$\boxed{(1+s_0(n))^n = \prod_{k=1}^{n}(1+i_0(k-1,k))} \tag{6.5}$$

$$\boxed{(1+s_0(n))^n = (1+s_0(n-1))^{n-1}(1+i_0(n-1,n))} \tag{6.6}$$

Remarque 18. *Si les $i_0(k-1,k)$ sont croissants, les $s_0(k)$ le sont aussi.*

Chapitre 7

Duration et immunisation des flux monï£¡taires

Le prix d'une obligation change...

a) avec le temps ;
b) avec les taux d'intï£¡rï£¡t ;
c) si le niveau de risque change. (pas vu dans la cadre de ce cours-ci).

Nous nous intï£¡ressons ï£¡ l'impact d'un changement instantanï£¡ dans les taux d'intï£¡rï£¡t.

On cherche une faï£¡on de mesurer la sensibilitï£¡ du prix d'un ensemble de flux monï£¡taires ï£¡ un tel changement.

7.1 Duration d'un ensemble de flux monï£¡taires et duration d'une obligation

Duration = duration de Macaulay = D

D : moyenne pondï£¡rï£¡e des moments oï£¡ sont prï£¡vus les flux monï£¡taires (en annï£¡es).

Soit K_j le flux monï£¡taire prï£¡vu ï£¡ $t = j, \quad j = 1, 2, ..., n$.

$$\boxed{D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tK_t(1 + s_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1 + s_0(t))^{-t}}} \tag{7.1}$$

Convexitï£¡ de Macauley

$$\boxed{C = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2K_t(1 + s_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1 + s_0(t))^{-t}}} \tag{7.2}$$

Supposons une structure plate ($s_0(t) = i \forall\ t$).

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tK_t(1 + i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1 + i)^{-t}}$$

Et pour la convexitï£¡,

$$C = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2K_t(1 + i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1 + i)^{-t}}$$

Idï£¡e de base : le risque augmente avec D.

$$P(i) = \sum_{t=1}^{n} K_t(1 + i)^{-t}$$

$$P'(i) = -\sum_{t=1}^{n} tK_t(1 + i)^{-t-1}$$

duration modifiï£¡e :

$$MD = -\frac{P'(i)}{P(i)}$$

$$\begin{aligned} MD &= \frac{\sum_{t=1}^{n} tK_t(1 + i)^{-(t+1)}}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1 + i)^{-t}} \\ &= \frac{D}{1 + i} \end{aligned}$$

convexitï£¡ modifiï£¡e :

$$
\begin{aligned}
MC &= \frac{P''()}{P(i)} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t(1+i)^{-(t+2)}}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1+i)^{-t}} \\
&= \frac{C+D}{(1+i)^2}
\end{aligned}
$$

7.1.1 Duration d'une obligation coupon zï£¡ro

Supposons que l'obligation vient ï£¡ ï£¡chiï£¡ance dans n annï£¡es.

$$
\begin{aligned}
D &= n \\
C &= n^2 \\
P(i) &= F(1+i)^{-n} \\
P'(i) &= -nF(1+i)^{-n-1} \\
P''(i) &= n(n+1)F(1+i)^{-n-2} \\
MD &= \frac{n}{1+i} \\
MC &= \frac{n(n+1)}{(1+i)^2}
\end{aligned}
$$

7.1.2 Duration appliquï£¡e pour approximer les changements dans la valeur actualisï£¡e d'un ensemble de flux monï£¡taires

— Soit i_0 le taux d'intï£¡rï£¡t initial.

— Soit $i = i_0 + h$ le nouveau taux d'intï£¡rï£¡t.

Remarque 19. *h peut ï£¡tre nï£¡gatif, mais est gï£¡nï£¡ralement petit*

$$P(i) = P(i_0) + hP'(i_0) + \frac{1}{2}h^2P''(i_0) + ...$$

Approximation liniï£¡aire

$$\begin{aligned} P(i) &\approx P(i_0) + hP'(i_0) \\ &\approx P(i_0) - hP(i_0)MD \\ &\approx P(i_0)(1 - h \cdot MD) \end{aligned}$$

Approximation quadratique

$$\begin{aligned} P(i) &\approx P(i_0) - hP(i_0)MD + \frac{1}{2}h^2P(i_0)MC \\ &\approx P(i_0)(1 - h \cdot MD + \frac{1}{2}h^2 \cdot MC) \end{aligned}$$

Approximation de Macauley (gï£¡nï£¡ralement meilleure)

$$P(i) \approx P(i_0)\left(\frac{1+i_0}{1+i_0+h}\right)^D$$

7.1.3 Duration d'une obligation ï£¡ coupons

Nous supposons des coupons annuels

Rappel de la formule du prix d'une obligation :

$$P(i) = Fra_{\overline{n}|j} + C(1+i)^{-n}$$

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\sum_{t=1}^{n} tFrv^t + nCv^n}{\sum_{t=1}^{n} Frv^t + Cv^n} \\
&= \frac{Fr(Ia)_{\overline{n}|} + nCv^n}{Fra_{\overline{n}|} + Cv^n}
\end{aligned}
$$

Remarque 20. *Augmenter r fait diminuer D*

7.1.4 Duration d'un portefeuille d'ensembles de flux monï£¡taires

Soit $K_{t,j}$ le flux monï£¡taire prï£¡vu ï£¡ t dans le j^{e} ensemble, $j = 1, 2, ..., n$ et $t = 1, 2, .., n$.

$$
\begin{aligned}
P_j(i) &= \sum_{t=1}^{n} K_{t,j}(1+i)^{-t} \\
D_j(i) &= \frac{\sum_{t=1}^{n} tK_{t,j}(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} K_{t,j}(1+i)^{-t}} \\
C_j(i) &= \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2K_{t,j}(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} K_{t,j}(1+i)^{-t}}
\end{aligned}
$$

On cherche $P(i), D(i)$ et $C(i)$ pour le porte-feuille au complet.

$$
\begin{aligned}
P(i) &= \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} K_{t,j}\right)(1+i)^{-t} \\
&= \sum_{j=1}^{m} P_j(i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(i) &= \frac{\sum_{t=1}^{n} t\left(\sum_{j=1}^{m} K_{t,j}\right)(1+i)^{-t}}{P(i)} \\
&= \frac{1}{P(i)}\sum_{j=1}^{m} P_j(i) D_j(i) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(i)}{P(i)} D_j(i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(i) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(i)}{P(i)} C_j(i) \\
MC(i) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(i)}{P(i)} MC_j(i) \\
MD(i) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(i)}{P(i)} MD_j(i)
\end{aligned}
$$

7.1.5 rï£¡sultats bons uniquement pour un petit dï£¡placement parralï£¡le de la courbe

Notes du dernier cours ACT-1001

Chapitre 7

Duration et immunisation

7.2 Appariement et immunisation

Anglais :

— Immunisation : *Immunization*

— Appariement : *Asset-Liability matching (ALM)*

Notation à utiliser :

— L_t : flux de passif (*liabilities*)

— A_t : flux d'actif (*assets*)

On suppose une structure plate ($s_0(t) = i \forall\ t$) et qu'on est dans un marché efficient (on emprunte et investit au même taux).

Objectif : on veut minimiser l'impact d'un changement dans le taux d'intérêt sur la situation de la compagnie. On peut le faire par appariement, soit

$$A_t = L_t \quad \forall\ t$$

Dans le même sens,

$$\sum_{t=0}^{n} (A_t - L_t)(1+i)^{-t} = 0$$

Ce qui signifie qu'en changeant le taux d'intérêt, les VA_A et VA_L vont changer, mais leur différence va toujours être égale à zéro. Nous en rediscuterons dans la section sur l'immunisation complète (7.2.2).

Sans surprise,

$$VA_A = \sum_{t=0}^{n} A_t(1+i)^{-t} \tag{7.1}$$

$$VA_L = \sum_{t=0}^{n} L_t(1+i)^{-t} \tag{7.2}$$

Exemple

On connaît $L_1 = 1, \quad L_2 = 2, \quad L_3 = 3$. On veut savoir combien d'obligations à coupon *annuel* de 2% il nous faut, selon leur échéance. Les obligations sont notées A_1, A_2 et A_3, où A_n est une obligation avec échéance dans n années. Pour les fins de l'exemple, on suppose un marché efficient où l'on peut acheter des fractions d'obligations.

On représente α_n comme le nombre d'obligation qui a échéance dans n années.

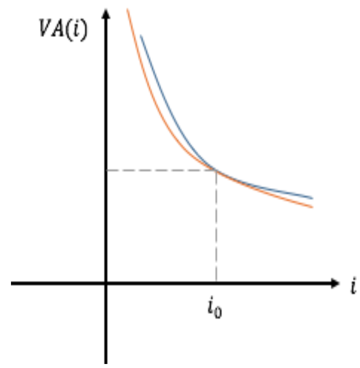
$$\begin{array}{llll}
A_1 = 2\alpha_3 & +2\alpha_2 + 102\alpha_1 & & = 1 \\
A_2 = 2\alpha_3 & +102\alpha_2 & & = 1 \\
A_3 = 102\alpha_3 & & & = 1
\end{array}$$

C'est un système d'équation très simple à résoudre en commencant par le flux d'actif A_3.

7.2.1 Immunisation selon Redington

Encore une fois, cette section est dans un contexte de Structure plate.

L'immunisation selon reddington fonctionne dans le cas où les taux subissent un choc instantanée, mais que la structure reste néanmoins plate.



Pour dire qu'on est immunisé, on désire que $VA_A > VA_L$ au taux actuel i_0 donné. Toutefois, si on veut une immunisation totale en tout point, le flux d'actif doit être plus convexe que le flux de passif. Bref, voici les 3 conditions de Redington à respecter :

$$VA_A(i_0) = VA_L(i_0) \tag{7.3}$$
$$\frac{d}{di}VA_A\bigg|_{i=i_0} = \frac{d}{di}VA_L\bigg|_{i=i_0} \tag{7.4}$$
$$\frac{d^2}{di^2}VA_A\bigg|_{i=i_0} = \frac{d^2}{di^2}VA_L\bigg|_{i=i_0} \tag{7.5}$$
$$\tag{7.6}$$

On peut ré-écrire ces 3 conditions de 2 autres façons :

$$VA_A(i_0) = VA_L \tag{7.7}$$
$$D_A(i_0) = D_L(i_0) \tag{7.8}$$
$$C_A(i_0) = C_A(i_0) \tag{7.9}$$
$$\tag{7.10}$$

$$VA_A(i_0) = VA_L \tag{7.11}$$
$$MD_A(i_0) = MD_L(i_0) \tag{7.12}$$
$$MC_A(i_0) = MC_A(i_0) \tag{7.13}$$
$$\tag{7.14}$$

L'immunisation de Reddington ne fonctionne que pour un petit choc.

On pose donc les 2 premières conditions, puis on isole A_{t_2} et A_{t_2} Dans les équations. Finalement, on valide la 3e condition pour la dérivée seconde.

7.2.2 Immunisation complète

en anglais : *Full Immunization.*

Définition : Les flux d'actifs immunisent complètement les flux de passif si

$$VA_A(i) \geq VA_L(i) \quad \forall\ i > 0 \tag{7.15}$$

Remarque : l'immunisation, qu'elle soit complète ou selon Redington, requiert en pratique des ajustements périodiques.

La preuve mathématique a été faite en cours (je l'épargne ici) que si on a des flux de passifs $L_t \quad t = r, r+1, ...s-1, s$, ces derniers seront complètement immunisés par des flux d'actifs $A_{t_1} \quad t_1 \leq r$ et $A_{t_2} \quad t_2 \geq s$ si les 2 premières conditions de Redington sont respectées, soit

$$VA_A(i_0) = VA_L(i_0)$$

$$t_1 A_{t_1}(1+i_0)^{-t_1} + t_2 A_{t_2}(1+i_0)^{-t_2} = \sum_{t=r}^{s} t L_t (1+i_0)^{-t}$$

Chapitre 9

Sujets avancés en finance

Dans le cadre du cours ACT-1001, on en voit qu'un seul : le modèle d'évaluation des actions par l'actualisation des dividendes (Dividend Discount Model).

9.1 Modèle d'évaluation des actions par l'actualisation des dividendes

Tout d'abord, un peu de vocabulaire :

Bid cours acheteur (Prix offert le plus élevé) ;

Ask cours vendeur (Prix demandé le plus faible) ;

Spread écart acheteur-vendeur (différence entre le *Bid* et le *Ask*).

On a déjà vu les formules suivantes lorsqu'on a parlé de somme géométrique dans le chapitre 2. P est le prix de l'action, d_t représente la dividende versé au moment t et g représente le taux de croissance du dividende (s'il y a lieu).

En présence d'une structure plate

Si on a une structure plate ($i_t = i \forall\ t$) :

$$P = \frac{d_1}{i-g} \tag{9.1}$$

En présence d'une autre structure des taux

Si on connaît nos taux au comptant (*spot*) :

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} d_t[1 + s_0(t)]^{-t} \tag{9.2}$$

Si on connaît nos taux à terme (*forward*) :

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{u=1}^{\infty} \frac{d_t}{1 + i_0(u-1, u)} \tag{9.3}$$

Annexe A

Feuille de formules

Chapitre 1

intérêt composé		
Nom	notation	formule
Facteur d'accumulation	$a(t)$	$a(t) = (1+i)^t$
Valeur accumulée	$A(t)$	$A(t) = A(0)(1+i)^t$
facteur d'actualisation	v^t	$v^t = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t$
Valeur actualisée	$A(0)$	$A(0) = A(t)v_i^t$
intérêt simple		
Nom	notation	formule
Facteur d'accumulation	$a(t)$	$a(t) = (1+it)$
Facteur d'actualisation	$v(t)$	$v(t) = \frac{1}{1+it}$
Prix d'un bon du trésor canadien	*T-Bills*	$Prix = 100\left(1+\frac{it}{365}\right)^{-1}$
Conversion de taux		
Nom	notation	formule
Taux intérêt effectif *annuel*	i	$i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$
Taux d'intérêt nominal *annuel*	$i^{(m)}$	$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$
Taux d'escompte		
Nom	notation	formule
Conversion du taux d'intérêt Conversion du taux d'escompte	$i \to d$ $d \to i$	$d = \frac{i}{1+i}$ $i = \frac{1}{1-d}$
Taux d'escompte nominal *annuel*	$d^{(m)}$	$d^{(m)} = m\left(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right)$
Taux d'escompte effectif *annuel*	d	$d = 1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$
Valeur accumulée	$a(t)$	$a(t) = (1-d)^{-t}$
Valeur actualisée	$v(t)$	$v(t) = (1-d)^t$
Prix d'un bon du trésor américain		$Prix = 100\left(1-\frac{dt}{360}\right)^t$
Contexte d'inflation		
Nom	notation	formule
Taux d'intérêt réel (après inflation)	$i_{réel}$	$i_{réel} = \frac{i-r}{1+r}$

Force d'intérêt		
Nom	notation	formule
Force d'intérêt	$\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$ $\delta = \lim_{m\to\infty} d^{(m)}$	$\delta = \ln(1+i)$ $\delta = \ln(\frac{1}{1-d})$ $\delta = \frac{a'(t)}{a(t)}$
Taux effectif	i	$i = e^{i^{(m)}}$
$a(t)$**si force d'intérêt continue**	$\delta_t = \delta$	$a(t) = e^{\delta t}$
$a(t)$**si force d'intérêt variable**	$\delta_t = \delta_t$	$a(t) = e^{\int_0^t \delta_s ds}$
facteur accumulation		$\frac{a(n)}{a(m)} = e^{\int_m^n \delta_s ds}$

Chapitre 2

Somme géométrique	
Définition somme géométrique	$\sum_{j=m}^{n} ar^m = \left(\frac{1-r^{n-m+1}}{1-r}\right)$
Valeur accumulée d'une rente	
au moment	formule
du dernier versement	$k \cdot s_{\overline{n}\rvert j}$ $s_{\overline{n}\rvert j} = \left(\frac{(1+j)^n-1}{j}\right)$
r période après le dernier versement *équivalent à*	$k \cdot s_{\overline{n}\rvert j}(1+j)^r$ $k \cdot \left(s_{\overline{n+r}\rvert j} - s_{\overline{n}\rvert j}\right)$
Valeur actualisée d'une rente	
au moment	formule
fin de période	$k \cdot a_{\overline{n}\rvert j}$ $a_{\overline{n}\rvert j} = \left(\frac{1-(1+j)^{-n}}{j}\right)$
début de période	$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert j} = a_{\overline{n}\rvert j}(1+j)$
rente perpétuelle ($n \to \infty$)	$\frac{k}{j}$
plusieurs paiements dans un même année	
$mPs^{(m)}_{\overline{n}\rvert i} = mP\left(\frac{(1+i)^n-1}{i^{(m)}}\right)$ $mPa^{(m)}_{\overline{n}\rvert i} = mP\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}}\right)$	$mP\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\rvert i} = \left(\frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}}\right)$ $mP\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\rvert i} = \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{d^{(m)}}\right)$

Croissance des versements géométrique	
valeur$_{t=1} = P\gamma^{-1} a_{\overline{n}\rvert j^*}$	valeur$_{t=0} = P\ddot{a}_{\overline{n}\rvert j^*}$
valeur$_{t=n} = P\gamma^{n-1} s_{\overline{n}\rvert j^*}$	valeur$_{t=n+1} = P\gamma^{n} \ddot{s}_{\overline{n}\rvert j^*}$
où$j^* = \frac{1+j}{\gamma} - 1$	

si fréquence versements > que croissance géométrique	
$P a_{\overline{m}\rvert j^*} \ddot{a}_{\overline{n}\rvert j^*}$	où $j^* = \frac{(1+j)^m}{\gamma} - 1$

Modèle d'actualisation des dividendes	
Prix $= \frac{D}{1+j-\gamma} = \frac{D}{j-g}$	où $\gamma = 1 + g$

Croissance arithmétique (*increasing annuities*)	
$(Ia)_{\overline{n}\rvert j} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}\rvert j} - nv^n}{j}$	$(I\ddot{a})_{\overline{n}\rvert j} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}\rvert j} - nv^n}{d_j}$
$(Is)_{\overline{n}\rvert j} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert j} - n}{j}$	$(I\ddot{s})_{\overline{n}\rvert j} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert j} - n}{d_j}$

décroissance arithmétique (*decreasing annuities*)	
$(Da)_{\overline{n}\rvert j} = \frac{n - a_{\overline{n}\rvert j}}{j}$	$(D\ddot{a})_{\overline{n}\rvert j} = \frac{n - a_{\overline{n}\rvert j}}{d_j}$
$(Ds)_{\overline{n}\rvert j} = \frac{n(1+j)^n - s_{\overline{n}\rvert j}}{j}$	$(D\ddot{s})_{\overline{n}\rvert j} = \frac{n(1+j)^n - s_{\overline{n}\rvert j}}{d_j}$

Rentes à paiement continu	
$VA = \int_0^n h(u) \underbrace{e^{-\int_0^u \delta_s ds}}_{e^{-\delta u} \text{ si } \delta_t = \delta \ \forall \ t} du$	Valeur$_{t=n} = \int_0^n h(u) \underbrace{e^{\int_u^n \delta_s ds}}_{e^{\delta(n-u)} \text{ si } \delta_t = \delta \ \forall \ t} du$
$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}\rvert i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}\rvert i} - ne^{-\delta n}}{\delta}$	$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}\rvert i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}\rvert i} - n}{\delta}$
$(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}\rvert i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}\rvert i}}{\delta}$	$(\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}\rvert i} = \frac{ne^{\delta n} - \bar{s}_{\overline{n}\rvert i}}{\delta}$

Chapitre 3

Tableau synthèse des 2 comptes		
éléments	Relation avec prêteur (L)	Fonds d'amortissement (F)
OB_0	$OB_0^L = L$	$OB_0^F = 0$
OB_t	$OB_t^L = L$	OB_t^F
OB_n	$OB_n^L = 0$	$OB_n^F = 0$
K_t	$K_t^L = Lj_1$	$K_t^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rvert j_2}}$
K_n	$K_n^L = Lj_1 + L$	$K_n^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rvert j_2}} - L$
I_t	$I_t^L = Lj_1$	$I_t^F = \frac{-L}{s_{\overline{n}\rvert j_2}}\left[(1+j_2)^{t-1} - 1\right]$
PR_t	$PR_t^L = 0$	$PR_t^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rvert j_2}}(1+j_2)^{t-1}$
PR_n	$PR_n^L = L$	$PR_n^F = \frac{L}{s_{\overline{n}\rvert j_2}}(1+j_2)^{n-1} - L$

Chapitre 4

Prix obligation après un coupon	
première forme deuxième forme	$P = Fra_{\overline{n}\rvert j} + Cv^n$ $P = (Fr - Cj)a_{\overline{n}\rvert j} + C$
Prix obligation entre 2 coupons	
avec méthode rétrospective avec méthode prospective Prix du marché	$P_t = P_0(1+j)^t$ $P_t = (P_1 + Fr)(1+j)^{-(1-t)}$ $\text{Prix}_t = P_t - t \times Fr$

Amortissement d'une obligation		
OB_t	$OB_t = OB_{t-1} - PR_t$	$OB_t = BV_t = (Fr - Cj)a_{\overline{n-t}\rvert j} + C$
I_t	$I_t = OB_{t-1}j$	$I_t = (Fr - Cj)(1 - v_j^{n-t+1}) + Cj$
PR_t	$PR_t = K_t - I_t$	$PR_t = (Fr - Cj)v_j^{n-t+1}$
PR_n	$PR_n = K_t + C - I_t$	$PR_n = (Fr - Cj)(1 - v_j^{n-t+1}) + C$

Chapitre 5

Taux de rendement pondéré en dollar	
$i = \frac{I}{A + \sum_{k=1}^{n} C_k(1-t_k)}$	$I = B - (A + \sum_{k=1}^{n} C_k)$

Taux de rendement pondéré par période
$1+i = \left(\frac{F_1}{A}\right) \times \left(\frac{F_2}{F_1+C_1}\right) \times \left(\frac{F_3}{F_2+C_2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{F_n}{F_{n-1}+C_{n-1}}\right) \times \left(\frac{B}{F_n+C_n}\right)$

Chapitre 6

Structure par échéance des taux d'intérêt	
Prix Obligation *Zero-Coupon*	$P(0,t) = (1+s_0(t))^{-t}$
Taux au comptant (*spot*)	$s_0(t)$
Taux à terme (*Forward*)	$1+i_0(t-1,t) = \frac{(1+s_0(t))^t}{(1+s_0(t-1))^{t-1}} - 1$
Relation entre les taux *Spot* et les taux *Forward*	
$(1+s_0(n))^n = \prod_{k=1}^{n}(1+i_0(k-1,k))$	

Chapitre 7

Duration de Macauley		
Duration	$\frac{\sum_{t=1}^{n} tK_t(1+s_0(t))-t}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1+s_0(t))-t}$	
Convexité	$\frac{\sum_{t=1}^{n} t^2K_t(1+s_0(t))-t}{\sum_{t=1}^{n} K_t(1+s_0(t))-t}$	
Duration modifiée	$-\frac{P'(i)}{P(i)}$	$\frac{D}{1+i}$
Convexité modifiée	$\frac{P''(i)}{P(i)}$	$\frac{C+D}{(1+i)^2}$

Duration d'un obligation *Zéro-coupon*	
Duration	n
Convexité	n^2
MD	$\frac{n}{1+i}$
MC	$\frac{n(n+1)}{(1+i)^2}$

Approximation du prix dû à un changement de taux d'intérêt	
Approximation linéaire	$P(i) \approx P(i_0)(1-h\cdot MD)$
Approximation quadratique	$P(i) \approx P(i_0)(1-h\cdot MD + \frac{1}{2}h^2\cdot MC)$
Approximation Macauley	$P(i) \approx P(i_0)\left(\frac{1+i_0}{1+i_0+h}\right)^D$

Annexe B

Dï£¡pannages

B.1 Chapitre 1

B.1.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 1
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 1.4)

Une banque dit offrir un taux de 1,25 % sur ses comptes d'épargne, ce qui laisse d'abord croire qu'il s'agit d'un taux effectif annuel. Il n'en est rien. Comme les intérêts sont crédités mensuellement en appliquant la méthode de l'intérêt simple, en posant $t = 0$ au début de chaque mois, il s'agit plutôt d'un taux nominal composé mensuellement. Quel est donc le taux effectif annuel équivalent ?

Question 2 (section 1.5)

Un prêteur véreux fait de la publicité en annonçant qu'il consent des prêts à un taux de 20 % par an. Il se targue ainsi de ne pas être pire que les compagnies de carte de crédit ! Ce qu'il omet de préciser, c'est le type de taux dont il s'agit… Or il s'agit du type de taux qui conduit nécessairement au pourcentage le plus faible parmi tous les types de taux annuels que quelqu'un puisse indiquer… Quel est le taux d'intérêt annuel composé mensuellement qui lui est équivalent ? Cela permettra une meilleure comparaison avec les compagnies de carte de crédit qui affichent, elles, des taux d'intérêt annuels capitalisés mensuellement, même si ce n'est pas si limpide que ça non plus…

Question 3 (section 1.1)

Linda n'a que 1000 $ à investir, mais elle se fait offrir de l'intérêt simple au taux exceptionnel de 5 % par an. Alain a deux fois plus d'argent à investir, mais il se fait offrir de l'intérêt composé au taux effectif annuel de 1 %. À quel moment auront-ils accumulé le même montant ? (Vous pouvez d'abord prendre une expansion de Taylor pour trouver une réponse approximative en résolvant une équation du second degré. Vous pouvez ensuite procéder par tâtonnements pour trouver au moins le nombre entier d'années. Finalement, pour trouver la réponse exacte, vous voudrez probablement recourir à un chiffrier tel Excel.)

Question 4 (section 1.5)

Vos parents s'engagent à vous acheter une automobile valant 20 000 $ à la fin de vos études, lorsque vous recevrez votre diplôme à la collation des grades dans deux ans et neuf mois. Fier de vos nouvelles connaissances en mathématiques financières, vous leur dites que vous préférez en avoir la valeur actualisée dès maintenant, ce qui, de toute façon, est équivalent ! Quel montant recevez-vous si le taux d'escompte annuel nominal composé trimestriellement utilisé pour le calcul est de 3 % ?

Question 5 (section 1.1)

Si vous avez le choix entre 20 000 $ dans cinq ans et 12 000 $ dans un an, que choisissez-vous ? Autrement dit, pour quelles valeurs du taux d'intérêt effectif annuel préférez-vous la somme de 12 000 $?

Question 6 (section 1.1)

Vous venez de gagner le million! Vous le mettez de côté, vous engageant vis-à-vis vous-même de continuer à étudier puis travailler jusqu'à ce que vous ayez triplé ce montant. Dans combien de temps prendrez-vous votre retraite et profiterez-vous de vos gains de loterie si le taux effectif annuel est de 2 % les dix premières années et augmente ensuite de 0,5 % tous les dix ans?

Question 7 (section 1.1)

La fonction d'accumulation est donnée par la fonction suivante :

$$A(t) = 1000 + 10t + t^2, t \geq 0$$

Quel est le taux d'intérêt effectif de la 7^e année ?

Question 8 (section 1.6)

(Il s'agit d'une question refilée par Louis Adam, qui lui avait peut-être été transmise par Michel Jacques, l'ayant lui-même peut-être héritée d'André Prémont.)

À l'instant t, $t \geq 0$, la force d'intérêt prévalant sur le marché est définie par :

$$\delta_t = \frac{1}{[t] + t + 1},$$

où $[t]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à t. Trouvez la valeur, à $t = 3$, d'une somme de 2 $ investie à $t = 1$.

Question 9 (section 1.6)

Le facteur d'accumulation est défini par $a(t) = 1 + 0{,}08t + 0{,}002t^2, t \geq 0$. Simone dépose 500 $ à $t = 0{,}5$, et ce, pour 5 ans.

a) Quel montant a-t-elle gagné en intérêts la 2^e année de son dépôt?
b) Quelle est la force d'intérêt à $t = 1{,}33$?
c) Quel est le taux d'escompte de la 3^e année (de $t = 2$ à $t = 3$)?

Question 10 (section 1.7)

On peut savoir d'avance le taux d'intérêt qu'on aura sur un montant investi pour un an. Par contre, on ne peut pas savoir d'avance si l'inflation sera faible ou élevée dans l'année qui vient. Il s'ensuit que le taux d'intérêt réel ne peut se calculer qu'après coup.

Le 30 juin 2013, Georgette avait mis de côté 10 000 $ en vue d'un achat dans un an. On lui offrait alors un taux d'intérêt effectif annuel de 1,75 %. Alors que l'inflation des dernières années n'avait pas dépassé 1 %, il s'est avéré que le taux d'inflation calculé pour l'année se terminant le 30 juin 2014 a été de 2,10 %. Quel a donc été, pour Georgette, le taux d'intérêt réel?

Question 11 (section 1.7)

Martine parvient à se faire promettre un taux d'intérêt réel de 5 % pour les trois prochaines années alors que, sur cette même période, l'inflation est de 1 % la première année, 1,5 % la deuxième, et 1,75 % la troisième. Si Martine dépose 1500 $, combien aura-t-elle accumulé dans 3 ans? Quel taux d'escompte nominal composé deux fois l'an aurait été équivalent s'il avait été constant pour toute la durée du dépôt?

Question 12 (section 1.3)

Gaétan envisage deux possibilités de remboursement pour l'emprunt de 2500 $ qu'il vient de contracter. Soit il rembourse la somme en deux versements égaux X à $t = 1$ et $t = 3$, soit il rembourse intégralement la somme, augmentée des intérêts courus, pour un total de Y à $t = 2$. Que valent X et Y si le taux d'intérêt effectif annuel est de 4 %?

Question 13 (section 1.2)

Dominique et Claude, en parents prévoyants, mettent tout de suite de côté un montant suffisant pour verser 20 000 $ au début de chacune des 5 années d'études post-secondaires de leurs 2 enfants, âgés aujourd'hui, en ce début d'année scolaire, de 7 ans et de 10 ans. Les enfants auront 17 ans au début de leurs études post-secondaires. Le taux d'intérêt annuel effectif sera de 5 % pour les six prochaines années, puis de 7 % par la suite. Quel est le montant mis de côté aujourd'hui?

Pour les questions 14 à 17, comparez les résultats obtenus en utilisant les formules théoriques aux résultats obtenus en utilisant les fonctionnalités de la calculatrice BA.

Question 14 (section 1.4)

Si le taux d'intérêt nominal composé 6 fois l'an est de 12 %, quel est le taux d'intérêt annuel effectif?

Question 15 (section 1.4)

Si le taux d'intérêt nominal composé *m* fois l'an est de 15 % et le taux d'intérêt annuel effectif est 15,7625 %, que vaut *m*?

Note : Je veux que vous tentiez de résoudre cette question avec la calculatrice et constatiez que la calculatrice ne peut pas résoudre pour *m*.

Question 16 (section 1.2)

Suzie a dit à Georges qu'elle accepterait de lui prêter les 225 $ dont il a besoin aujourd'hui en autant qu'il s'engage à lui rembourser 300 $ dans 3 ans. Quel taux d'intérêt effectif annuel sous-tend l'offre de Suzie?

Question 17 (section 1.2)

Mathieu a une drôle de façon de prendre des décisions… Il a besoin de 100 $ aujourd'hui et il consent à emprunter ce montant de quiconque acceptera de le faire en retour d'un remboursement de 300 $ en autant que ce ne soit pas avant huit ans… Georgette dit qu'elle demande simplement un taux d'intérêt effectif annuel de 8 %, peu importe quand le montant est remboursé. Mathieu acceptera-t-il l'offre de Georgette? Si oui, dans combien de temps remboursera-t-il son emprunt?

Question 18 (section 1.1)

La valeur d'une part d'un fonds commun de placement prend les valeurs suivantes à la fin des années 2005 à 2010.

2005	2006	2007	2008	2009	2010
10,08	8,35	9,34	11,11	12,00	10,57

a) Calculer le taux de rendement de chacune des 5 années.
b) Calculer le taux de rendement annuel constant équivalent pour cette période de 5 ans.

B.1.2 Solutions

ï£¡ compliï£¡ter

Question 1

$$\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^1 2 = \left(1+\frac{i}{1}\right)^1 \Leftrightarrow i = \left(1+\frac{0,0125}{12}\right)^{12} - 1 = 0,01257$$

Question 2

ï£¡ savoir :

$$d < d^{(m)} < \delta < i^{(m)} < i$$

Rï£¡ponse :

$$\begin{aligned} d &= 0,20 \\ (1-d)^{-1} &= \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^1 2 = 1+i \\ (1-0,2)^{-1} &= \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^1 2 \\ 1,25 &= \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^1 2 \\ i^{(12)} &= 12[(1,25)^{1/12}-1] \\ i^{(12)} &= 0,225231 \end{aligned}$$

Question 3

Non compliï£¡tï£¡e

Question 4

Question 8

$$\delta_t = \frac{1}{[t]+t+1}, a(3) =?$$
$$A(3) = A(1)\cdot e^{\int_1^3 \delta_t dt}$$
$$= A(1)\cdot e^{\int_1^3 \frac{1}{[t]+t+1} dt}$$

On peut trouver que

$$[2] = 2, [3] = 3$$
$$2 \leq t \geq 3$$

$$[t] = 2$$
$$3 < t < 4$$
$$[t] = 3$$

Alors,

$$\boxed{\text{A(3)}} = A(1)\cdot e^{\int_1^2 ([t]+t+1)^{-1} dt + \int_1^2 ([t]+t+1)^{-1} dt}$$
$$= 2e^{\int_1^2 (t+2)^{-1} dt + \int_2^3 (t+3)^{-1} dt}$$
$$= 2e^{\ln(t+2)\Big|_1^2 + \ln(t+3)\Big|_2^3}$$
$$= 2e^{\ln(4)-\ln(3)+\ln(6)-ln(5)}$$
$$= 2e^{\ln(\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5})}$$
$$= 2\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6}{5}\right) = \boxed{3{,}2}$$

B.2 Chapitre 2

B.2.1 Questions

Question 1 (section 2.1)

Sylvia adore dormir à l'hôtel. Or, son travail n'entraîne pas de nuitées à l'extérieur. Aussi, cette année, pour Noël, elle a demandé à son frère Sylvio une carte-cadeau qui lui permettrait de dormir à l'hôtel les nuits des 22 et 23 mars, 22 et 23 juin, 22 et 23 septembre 2016. En tenant compte des diverses taxes, chacun des trois séjours à l'hôtel – Sylvia a déjà fait les réservations! – coûtera 442,26 $. Ce montant devra être réglé au moment de quitter la chambre.

Sylvio, malin, histoire d'économiser un peu, lui versera plutôt, le 24 décembre 2015, un montant suffisant dans son compte d'épargne pour financer les séjours désirés à l'hôtel.

a) Quel montant Sylvio déposera-t-il dans le compte d'épargne de Sylvia si, dans ce compte, le taux d'intérêt nominal capitalisé 4 fois l'an est de 1 % ?
b) Quel montant Sylvio met-il de côté aujourd'hui, le 24 septembre 2015, si sa fortune lui donne accès à un compte d'épargne qui verse un taux d'intérêt nominal capitalisé 4 fois l'an de 2 % ?

Question 2 (section 2.1)

Martina veut économiser sur base mensuelle un montant suffisant pour pouvoir retourner passer l'été dans son pays natal, le Costa Rica. Pour ce faire, elle doit avoir accumulé 2000 $ le 24 avril 2016, jour où elle achètera son billet d'avion aller-retour. (S'il lui reste des fonds après cet achat, elle prévoit rapporter de petits cadeaux à sa famille.)

Quel est ce montant mensuel si elle commence dès aujourd'hui, le 24 septembre 2015, à économiser, et ce, jusqu'au 24 avril 2016 inclusivement et si le taux d'intérêt nominal capitalisé mensuellement est 1,8 %?

Question 3 (section 2.1)

Refaire la question 2 (c.-à-d., calculer le montant versé aujourd'hui) si le montant mensuel est augmenté de 50 % pour les 3 derniers versements.

Question 4 (section 2.1)

Refaire la question 2 (c.-à-d., calculer le montant versé aujourd'hui) si le taux d'intérêt, initialement de 1,8 %, passe à 1,2 % le 24 décembre 2015.

Question 5 (section 2.1)

Quelle est la valeur le 31 décembre 2014 de 12 versements semestriels (aux 6 mois) de 150 $ si le 1er versement a été fait le 31 décembre 2012 et si le taux d'intérêt est de 3 % par semestre ?

Question 6 (section 2.2)

Georgette est bien embêtée. Elle veut savoir combien elle peut retirer à la fin de chaque mois pendant cinq ans si elle a 50 000,00 $ aujourd'hui à déposer dans son compte. Son problème, c'est que la banque lui dit qu'elle offre un taux effectif annuel de 5 % et, du coup, elle ne sait pas comment faire le calcul. Vous pouvez sûrement l'aider!

a) Faites d'abord le calcul en trouvant le taux effectif par mois.
b) Faites ensuite le calcul en respectant la notation propre aux rentes payables m fois l'an.

Question 7 (section 2.2)

Selon ce que j'ai pu trouver sur Internet, nous absorbons environ 2500 litres d'oxygène chaque jour. Cela fait presque 1 mégalitre par année!

Supposons que le gouvernement ou une entité quelconque nous facture 0,01 $ par litre d'oxygène et que la force d'intérêt applicable est 0,08.

Comparez la valeur actualisée d'une facture réglée quotidiennement en fin de journée (25 $ par jour) pendant 50 ans à celle d'une facture réglée continûment.

Question 8 (section 2.2)

Claire aime aller au cinéma. Elle vient de gagner 2000 $ à la loterie et elle décide de garder ce montant pour financer ses sorties mensuelles au grand écran. Il lui en coûte chaque fois 25 $. La prochaine sortie au cinéma est dans un mois. Le taux d'intérêt effectif mensuel est 0,5 %.

a) Combien de fois (nombre entier) pourrait-elle aller au cinéma avec cette mise de fonds initiale?
b) Combien de plus pourrait-elle dépenser lors de sa dernière sortie?
c) Si elle mettait de côté le montant restant lors de sa dernière sortie et le conservait jusqu'à ce qu'elle ait accumulé 25 $, combien de temps devrait-elle attendre avant de retourner au cinéma?

Question 9 (section 2.1)

Trouvez le taux d'intérêt effectif mensuel qui aurait permis à Claire d'aller au cinéma le même nombre de fois que celui trouvé en a) avec les données de la question 8, mais sans excédent pour la dernière sortie.

Question 10 (section 2.3)

Supposons que les salaires annuels sont versés en milieu d'année et qu'ils augmentent de 2 % par année. Le salaire d'Antonia, cette année, à être versé dans six mois, est de 45 000 $. Or, Antonia travaille par plaisir et n'a plus besoin de son salaire. En fait, elle s'est engagée à verser la valeur accumulée de ses salaires dans cinq ans à un organisme de bienfaisance. Quelle sera cette valeur si le taux d'intérêt effectif annuel est de 3 %?

Question 11 (section 2.3)

Quelle est la valeur actualisée de 30 sorties mensuelles au cinéma, la prochaine étant dans un mois et coûtant 25 $, si le coût augmente de 0,5 % tous les trois mois? Le taux d'intérêt effectif mensuel est 0,5 %.

Question 12 (section 2.3)

Robert aime bien faire son comique! Aussi, au lieu de vous dire quel sera le prochain dividende versé par l'action qu'il s'apprête à acheter, et dont il veut que vous calculiez le prix, il vous informe que le dividende, trimestriel, sera de 1,25 $ dans un an et de 1,50 $ dans cinq ans. Le taux à utiliser pour actualiser les dividendes, vu le niveau de risque de l'action, est 10 % (effectif annuel). Alors, combien Robert paye-t-il pour l'action?

Question 13 (section 2.3)

Yvonne reçoit aujourd'hui 100 $. L'an prochain, elle recevra 125 $. En fait, le montant qu'elle recevra chaque année augmentera de 25 $ chaque année jusqu'à ce qu'il soit de 500 $. En tout, elle recevra 50 versements. Quelle est la valeur actualisée, aujourd'hui, de tous ces versements si le taux d'intérêt effectif annuel est de 5 % ?

Faites le calcul tant en considérant la rente comme la somme d'une rente croissante et de deux rentes constantes que comme la différence entre une rente constante et une rente décroissante.

Question 14 (section 2.3)

Soit une rente continue dont le taux de paiement est donné par la fonction suivante :

$$h(t) = \begin{cases} t^2 & t \leq 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases}$$

et qu'on évalue avec une force d'intérêt constante à 0,08. Quelle est en la valeur accumulée dans 15 ans?

Question 15 (section 2.4)

Suzette consent un prêt de 1000 $ à Sylvie au taux d'intérêt effectif annuel de 8 %, et ce, avec une échéance de 5 ans.
Si Suzette reçoit de l'argent de Sylvie, elle peut le réinvestir au taux d'escompte effectif annuel de 4 %.
Calculez le taux de rendement réalisé par Suzette sur base annuelle pendant la période de 5 ans dans chacun des cas suivants :

a) Sylvie rembourse Suzette via 5 versements annuels égaux.
b) Sylvie paye uniquement les intérêts courus à la fin de chaque année et rembourse le capital emprunté à l'échéance des 5 ans.
c) Sylvie ne paye rien avant l'échéance de 5 ans, auquel moment elle verse le capital et tous les intérêts courus.

Question 16 (section 2.4)

Une série de 15 flux monétaires de fin d'année, dont le premier était de 100 $, augmente de 10 $ par année. Il y a 4 ans, lors de l'achat de cette série, le taux d'intérêt était de 8 %. Il est maintenant de 7 %.
a) Quelle est aujourd'hui la valeur comptable de cette série de flux monétaires?
b) Quelle est aujourd'hui la valeur marchande de cette série de flux monétaires?

Question 17 (section 2.4)

Bertha se fait offrir une série de 12 versements mensuels de 1 000 $. Elle peut réinvestir ses versements au taux de 0,5 % par mois. Voici ses objectifs :
- réaliser un taux de rendement de 1 % par mois;
- récupérer dans un an le montant payé aujourd'hui;
- prélever une partie de chaque versement pour ses dépenses personnelles, cette partie étant constante.

Combien devrait-elle payer aujourd'hui pour atteindre ses objectifs?

Question 18 (section 2.4)

Sylvie prête 10 000 $ à son amie Yvonne. Yvonne remboursera le prêt en effectuant 8 versements trimestriels de 1 500 $. Sylvie peut réinvestir l'argent reçu d'Yvonne au taux effectif annuel de 3 %. Combien peut-elle garder tous les 3 mois tout en retrouvant les 10 000 $ du départ une fois qu'Yvonne aura remboursé le prêt?

B.3 Chapitre 3

B.3.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 3
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 3.1)

Faites le tableau de remboursement jusqu'à $t = 4$ pour un emprunt de 10 000 \$ dont les quatre premiers versements annuels sont 500 \$, 1000 \$, 500 \$ et 2000 \$...

a) si le taux d'intérêt annuel est constant à 8 %;
b) si le taux d'intérêt de la t^e année est donné par $0{,}05+0{,}01t$.

Question 2 (section 3.1)

Un prêt de 100 000 \$ est contracté selon les termes suivants : intérêts courus réglés mensuellement, capital remboursé intégralement à l'échéance. Quel est le montant du versement mensuel, avant l'échéance, si le taux d'intérêt effectif annuel est de 5 %?

Question 3 (section 3.1)

Le montant de l'emprunt est de 100 000 \$ et le taux d'intérêt annuel est de 5 %. Le remboursement se fait en 6 versements annuels définis comme suit :

$$K_t = |t - 3{,}5| \times K, t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

a) Trouver K.
b) Calculer le solde à la fin de la 2^e année de façon récursive, rétrospective et prospective.
c) Calculer aussi les intérêts payés et le capital remboursé la 3^e année.

Question 4 (section 3.1)

Le montant de l'emprunt est 100 000 \$ et il est remboursable en faisant six versements annuels égaux. Le taux d'intérêt est de 4 % les deux premières années, et de 6 % les quatre dernières.

a) Trouver le versement annuel.
b) Calculer le solde à la fin de la 4^e année de façon récursive, rétrospective et prospective.
c) Calculer aussi les intérêts payés et le capital remboursé la 4^e année.

Question 5 (section 3.2)

Le taux d'intérêt par période est de 5 %. Le capital remboursé à la fin de la 3^e période est de 150 \$. Le nombre de versements périodiques égaux est 10.

a) Trouver le versement périodique.
b) Trouver le montant de l'emprunt.
c) Trouver le capital remboursé lors du 8^e versement.
d) Trouver le total des intérêts payés.

Question 6 (section 3.2)

Érica a contracté un emprunt de 100 000 $ il y a 5 ans. À cette époque, le taux d'intérêt composé 12 fois l'an était de 4,8 % et elle a fait des versements mensuels dans le but de rembourser son emprunt hypothécaire en 25 ans. Aujourd'hui, 5 ans plus tard, c'est le temps de renégocier son emprunt. Elle a le choix entre rester à la même institution avec un taux composé mensuellement de 5,4 % ou changer d'institution avec un taux composé mensuellement de 5,1 % mais en payant des frais F. Trouver le montant des frais F tel que Érica soit indifférente entre les deux options, selon les deux approches suivantes :

a) Les frais sont payés immédiatement et le taux équivalent qui en résulte est 5,4 % composé 12 fois l'an.
b) Les frais sont refinancés avec le solde de l'emprunt et les versements mensuels sont les mêmes.

Question 7 (section 3.3)

Le montant emprunté est 100 000 $. Le taux d'intérêt sur l'emprunt est 5 %. Les termes du contrat prévoient que seuls les intérêts courus seront réglés annuellement et que la dette sera remboursée dans 10 ans. L'emprunteur va reconstituer le capital emprunté en faisant des dépôts annuels égaux dans un compte offrant 3 % par année.

a) Calculer le 5^{e} versement total, en le décortiquant en ses deux composantes : celui au prêteur et celui dans le fonds d'amortissement.
b) Calculer le capital remboursé lors du 5^{e} versement, en le décortiquant en ses deux composantes : capital remboursé au prêteur et capital ajouté dans le fonds d'amortissement.
c) Calculer les intérêts payés lors du 5^{e} versement, en les décortiquant selon qu'ils sont versés au prêteur ou qu'ils sont reçus dans le fonds d'amortissement.
d) Calculer le solde net de l'emprunt tout de suite après le 5^{e} versement, en décortiquant encore une fois selon ce qui est dû au prêteur et ce qui est accumulé dans le fonds d'amortissement.

Question 8 (section 3.1)

Vous contractez un prêt de 100 000 $. Votre situation financière vous permet d'effectuer des versements mensuels de 1000 $. Le taux d'intérêt effectif annuel est de 10 %.

a) Dans combien d'années aurez-vous remboursé votre prêt?
b) Quel est le montant du dernier versement que vous effectuerez?

B.4 Chapitre 4

B.4.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 4
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 4.1)

Une obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 8 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 6 %. L'obligation vient à échéance dans 5 ans. La valeur nominale est de 100 $.

a) Quel est le prix aujourd'hui?
b) Quel sera le prix dans 6 mois si le taux de rendement demandé par le marché est alors de 7 %?
c) Quel sera le prix dans 15 mois si le taux de rendement demandé par le marché est alors de 5 %?
d) Et quel sera le prix indiqué dans le journal dans 15 mois?

Question 2 (section 4.1)

Une autre obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 5 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 4 %. La valeur nominale est de 1000 $. La valeur de remboursement est de 1250 $. Quel est le prix de l'obligation?

Question 3 (section 4.1)

Une dernière obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 4 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 4 %. La valeur nominale est de 1000 $. La valeur de remboursement est de 1050 $. L'échéance est de 10 ans.

a) Quel est le prix de l'obligation?
b) L'obligation est-elle vendue au-dessus du pair, au pair ou au-dessous du pair?
c) À quel prix devez-vous la revendre dans 5 ans pour avoir réalisé un taux de rendement de 4,5 %?
d) À quel prix devez-vous la revendre dans 5 ans pour avoir réalisé un taux de rendement de 4,5 % sur l'ensemble des transactions si vous tenez compte du fait que vous avez réinvesti tous les coupons dans un compte offrant 1 % tous les 6 mois?

Question 4 (section 4.1)

Trouvez le taux de rendement nominal composé deux fois l'an pour les obligations suivantes :

a) Taux de coupon de 8 % composé semestriellement, valeur nominale de 100 $, prix de 105 $, échéance dans 5 ans
b) Taux de coupon de 6 % composé semestriellement, valeur nominale de 100 $, valeur de remboursement de 105 $, prix de 95 $, échéance dans 10 ans
c) Taux de coupon de 4 % composé semestriellement, valeur nominale de 100 $, prix de 100 $, échéance dans 7 ans

Question 5 (section 4.2)

Une obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 8 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 6 %. L'obligation vient à échéance dans 4 ans. La valeur nominale est de 100 $.

Complétez le tableau de remboursement pour cette obligation.

Question 6 (section 4.2)

Une autre obligation est émise aujourd'hui. Le taux de coupon est de 4 %. Le taux de rendement à l'échéance est de 4 %. La valeur nominale est de 1000 $. La valeur de remboursement est de 1050 $. L'échéance est de 4 ans.

Complétez le tableau de remboursement pour cette obligation.

Question 7 (section 4.3)

Une obligation doit venir à échéance dans 10 ans. Le coupon payable chaque semestre est de 3,25 $. Le remboursement peut être fait par anticipation lors de n'importe quel coupon en autant qu'au moins la moitié des coupons ait été versée. Si les coupons sont numérotés de 1 à 20, 1 étant le premier dans 6 mois, un remboursement fait lors d'un coupon pair verse 105 $ en sus du coupon, alors qu'un remboursement fait lors d'un coupon impair verse 110 $ en sus du coupon. Le taux de rendement minimalement visé, composé 2 fois l'an, est 6 %.

a) Quel prix devrait-on offrir pour cette obligation?
b) À ce prix, quel est le meilleur taux de rendement qu'on peut réaliser?

B.5 Chapitre 5

B.5.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 5
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 5.1)

Adrien alterne, annuellement, les dépôts et les retraits d'un montant qui est toujours le même. Le premier dépôt se fait aujourd'hui. Le premier retrait se fait dans un an. Dans 6 ans, quand Adrien vient pour faire son 4^{e} dépôt, il se rend compte qu'il a en banque exactement le montant qu'il s'apprêtait à déposer. Aussi, au lieu de faire le dépôt, il retire tout et ferme le compte!

a) Quelle est l'équation à résoudre pour trouver le taux de rendement interne?
b) Essayez une valeur (strictement positive) pour ce taux et indiquez dans quelle direction il faudrait aller pour trouver le bon taux (strictement positif).

Question 2 (section 5.1)

Un projet nécessite un investissement immédiat de 60 000 \$ et un autre investissement de 50 000 \$ dans un an. Dans deux ans, les revenus seront de 20 000 \$ et cette entrée nette de fonds augmentera de 2 % par année. L'investissement générera des revenus positifs pendant 10 ans. Le coût du capital est de 12 %. Quelle est la valeur actualisée nette du projet?

Question 3 (section 5.2)

Un fonds commun de placement a une valeur totale de 500 000 \$ le 31 décembre 2013. Ce fonds connaît des flux de trésorerie importants à chaque trimestre. Le 31 mars 2014, on constate un retrait net de 100 000 \$ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 425 000 \$. Le 30 juin 2014, on constate un dépôt net de 50 000 \$ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 470 000 \$. Le 30 septembre 2014, on constate un dépôt net de 25 000 \$ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 500 000 \$. Enfin, le 31 décembre 2014, on constate un retrait net de 75 000 \$ et, après tous les dépôts et retraits, la valeur du fonds est de 410 000 \$.

a) Quel est le taux de rendement pondéré en dollars?
b) Quel est le taux de rendement pondéré par période?

Question 4 (section 5.3)

Une banque n'offre pas toujours le même taux d'intérêt année après année. Voici le tableau des taux pertinents, selon l'année du dépôt.

Année du dépôt	Taux d'intérêt
2010	0,08
2011	0,09
2012	0,08
2013	0,07
2014	0,06

Combien vaudra à la fin de 2014 un dollar déposé au début de 2013?

B.6 Chapitre 6

B.6.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 6
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 6.1)

Voici les taux de rendement à l'échéance pour les obligations coupon zéro disponibles sur le marché.

Échéance	Taux
1 an	2 %
2 ans	3 %
3 ans	4 %
4 ans	4½ %
5 ans	5 %

Calculez le prix des obligations suivantes, toutes deux ayant une valeur nominale de 100 $.

a) Obligation avec coupon annuel de 2 % échéant dans 2 ans.
b) Obligation avec coupon annuel de 6 % échéant dans 5 ans.

Question 2 (a – section 6.1; b – section 6.3)

Voici le prix de quelques obligations coupon zéro dont la valeur nominale est de 100 $.

Échéance	Prix
1 an	95
2 ans	90
3 ans	85

a) Que sont les taux comptants 1 an, 2 ans et 3 ans?
b) Que sont les taux à terme de la 1re année, de la 2e année et de la 3e année?

Question 3 (a – section 6.1; b – section 6.3)

Voici le prix de différentes obligations à coupon annuel de 3 % et valeur nominale de 100 $.

Échéance	Prix
1 an	99
2 ans	97
3 ans	95

a) Que sont les taux comptants 1 an, 2 ans et 3 ans?
b) Que sont les taux à terme de la 1re année, de la 2e année et de la 3e année?

Question 4 (section 6.3)

Recalculez le prix des deux obligations de la question 1 si les taux à terme sont tels que donnés ci-dessous.

Année	Taux
1^{re}	2½ %
2^{e}	3 %
3^{e}	3½ %
4^{e}	4 %
5^{e}	4½ %

Question 5 (section 6.3)

Vous comptez acheter une automobile dans 3 ans et vous savez que vous aurez alors besoin d'emprunter 30 000 $. Vous savez aussi que vous serez en mesure de rembourser capital et intérêts un an plus tard. Autrement dit, vous emprunterez la somme uniquement pour un an. Les taux comptants sont actuellement de 8 % pour 3 ans et 7 % pour 4 ans.

a) En théorie, en l'absence d'arbitrage, à quel taux devriez-vous pouvoir emprunter dans 3 ans pour 1 an si vous fixez le taux aujourd'hui?
b) Combien économiseriez-vous en intérêts si quelqu'un s'engageait aujourd'hui à vous faire le prêt dont vous avez besoin dans 3 ans à un taux de 3¾ %?

B.7 Chapitre 7

B.7.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 7
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 7.1)

Le taux de rendement à l'échéance pour une obligation à coupon annuel de 4 % échéant dans 5 ans est de 6 %.

a) Calculez la duration, la duration modifiée, la convexité et la convexité modifiée pour cette obligation.
b) Déterminez, par approximation au 1^{er} et au 2^{e} degré, le prix de l'obligation si le taux de rendement à l'échéance passe subitement à 5,9 %.

Question 2 (section 7.1)

Une série de flux monétaires prévoit le versement de 100 \$ dans un an, 200 \$ dans deux ans et 250 \$ dans trois ans. Le taux d'intérêt est constant à 8 %.

a) Calculez la duration, la duration modifiée, la convexité et la convexité modifiée pour cette série de flux monétaires.
b) Déterminez, par approximation au 1^{er} et au 2^{e} degré, le prix de la série si le taux d'intérêt augmente subitement d'un point de base.

Question 3 (section 7.1)

Vous bâtissez un portefeuille en combinant quatre séries de flux monétaires. Les prix, durations et convexités de ces séries sont donnés ci-dessous.

Série k	P_k	D_k	C_k
1	1256,639	3,589	14,493
2	1329,837	2,436	7,247
3	1299,872	2,870	10,891
4	1618,533	4,299	20,124

Calculez la duration, la duration modifiée, la convexité et la convexité modifiée du portefeuille si le taux d'intérêt est constant à 5 %.

Question 4 (section 7.2)

Sont disponibles sur le marché les obligations suivantes, toutes à valeur nominale de 100 $:

- Coupon annuel de 1 %, échéance de 1 an;
- Coupon annuel de 2 %, échéance de 2 ans;
- Coupon annuel de 3 %, échéance de 3 ans.

Comment combinerez-vous ces obligations pour apparier l'ensemble de flux de passif suivant : $L_1 = 100$, $L_2 = 150$ et $L_3 = 250$.

Question 5 (section 7.2)

Le taux d'intérêt est de 10 %. Les flux de passif prévus sont de 100 $ dans 2 ans, 200 $ dans 4 ans et 500 $ dans 6 ans.

a) Quels flux d'actif à recevoir dans 3 ans et 5 ans permettent de satisfaire aux deux premières conditions d'immunisation selon Redington?
b) Ces flux d'actif satisfont-ils à la troisième condition d'immunisation selon Redington?

Question 6 (section 7.2)

Le taux d'intérêt est de 8 %. Les flux de passif prévus sont $L_2 = 100$, $L_4 = 300$ et $L_6 = 200$. Quels flux d'actif faut-il prévoir à $t = 1$ et $t = 7$ pour avoir immunisation complète?

B.8 Chapitre 9

B.8.1 Questions

Exercices portant sur le chapitre 9
composés par Claire Bilodeau sauf indication contraire

Question 1 (section 9.1)

Le prochain dividende annuel sera de 2 $. Il augmentera ensuite de 1 % annuellement. Combien vaut l'action si les taux comptants pour les durées jusqu'à 15 ans inclusivement sont de 5 % alors que, pour des durées supérieures à 15 ans, ils sont de 7 %?

Question 2 (section 9.1)

Le prochain dividende annuel sera de 0,25 $. Il augmentera de 4 % par année par la suite. Les taux à terme des 5 prochaines années sont de 4 % alors que les suivants sont de 8 %. Combien vaut l'action?