1 Probabilités conditionnelles

- Rappel théorème de Bayes :
$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)}$$
- Distribution conditionnelle :
$$\Pr(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$
- L'espérance d'une fonction conditionnelle :
$$E[g(X_1)|X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x)\Pr(X_1 = x_1|X_2 = x_2)$$
- La variance d'une fonction conditionnelle :
$$\mathrm{Var}(g(X_1)|X_2) = E\left[g(X_1)^2|X_2\right] - E[g(X_1)|X_2]^2$$
- L'espérance conditionnelle :
$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1|X_2]\Pr(X_2 = x_2)$$
$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2] f_{X_2}(x_2)dx_2$$
- La variance conditionnelle :
$$\mathrm{Var}(X_1) = E[\mathrm{Var}(X_1|X_2)] + \mathrm{Var}(E[X_1|X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient
$$\begin{aligned} E[X_1|X_2] &= E[E[X_1|X_2, X_3]|X_2] \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} E[X_1|X_2, X_3]\Pr(X_3 = x_3|X_2 = x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2, X_3] f_{X_3|X_2}(x_3|x_2)dx_3 \end{aligned}$$
La variance conditionnelle devient
$$Var(X_1) = E[Var(X_1|X_2, X_3)] + \mathrm{Var}(E[X_1|X_2, X_3])$$
De plus,
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[\mathrm{Cov}(X,Y|Z)] + \mathrm{Cov}(E[X|Z], E[Y|Z])$$

2 Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est homogène si
$$\begin{aligned} \Pr(X_{n+1} = j|X_n = i, ..., X_0 = i_0) &= \Pr(X_{n+1} = j|X_n = i) \\ &= p_{ij} \end{aligned}$$

On définit la matrice des probabilités de transition
$$P = [p_{ij}]_{i\times j} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j|X_k = i)$$
$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$, avec $P^{(n)} = P^n = P \cdot P \cdot P \cdot ... \cdot P$.

$$\begin{aligned} \Pr(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j|X_0 = i)\Pr(X_0 = i) \end{aligned}$$

États accessibles et communicants

- j est accessible de i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- si i et j sont accessibles réciproquement ($i \leftrightarrow i$), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- Une chaîne de Markov est dite <u>irréductible</u> si elle est composée d'une seule classe.

Propriété d'une classe

- ✔ Réflexibilité : $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- ✔ Symétrie : $i \leftrightarrow j$ est équivalent à $j \leftrightarrow i$.
- ✔ Transitivité : si i communique avec j (i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$) et que j communique avec k (i.e. $p_{jk}^{(m)} > 0$), alors
$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurrents, transcients et absorbants

- f_{ii} : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i.
- **État récurrent**
$$f_{ii} = 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$
État transcient
$$f_{ii} < 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$$
- Si l'état i est récurrent et que $i \leftrightarrow j$, alors j est récurrent aussi.
- $f_{ii}^{(n)}$: probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini **n'a que des états récurrents**.
- **État absorbant** : j est un état absorbant si $p_{jj} = 1$. De plus, Si j est un état absorbant, alors
$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik} f_{kj}$$

Probabilité limites

- **État périodique** : si l'état a une période d, alors il sera possible de revenir à cet état après n étapes, qui est un multiple de d. i.e
$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$
- si $d(i) = 1$, alors l'état i est **apériodique**.
- La périodicité est une propriété de classe : si $i \leftrightarrow j$, alors $d(i) = d(j)$.
- Le temps de retour moyen pour l'état i est défini par
$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$
avec $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$
- **État récurrent positif** : si, à partir de l'état i, le temps de retour moyen μ_{ii} à l'état i est fini, alors l'état i est récurrent positif.

- **État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tout ses états sont ergodiques, alors
  (1) $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$
  (2) $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$
  (3) $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$
- On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos π_i.

Système Bonus Malus

$s_i(k)$: Le prochain état d'un assuré dans l'état i ayant eu k accidents.

a_k : Probabilité qu'un assuré ait k accidents.

3 Processus de Poisson

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle t.

Définitions

Définition 1

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

(1) $N(0) = 0$

(2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3$, les accroissements $(N(t_3) - N(t_2))$ et $(N(t_2) - N(t_1))$ sont stochastiquement indépendants.

(3) $\forall t$, $(N(s+t) - N(s)) \sim Pois(\lambda t)$. Alors,
$$\Pr(N(s+t) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Définition 2

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

(1) $N(0) = 0$

(2) a des accroissements indépendants et stationnaires

(3) $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$

(4) $\Pr(N(h) \geq 2) = o(h)$

Avec $o(h)$ une fonction où $f(h) = o(h)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(h)}{h} = 0$.

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalentes.

Rappels sur la loi de Poisson

La fonction génératrice des moments de $X \sim Pois(\lambda)$ est
$$M_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = e^{-\lambda(e^t - 1)}$$

Temps séparant 2 évènements successifs

- Soit T_i le temps entre le $(i-1)^{\text{e}}$ et le i^{e} évènement.
- Alors, $T_n \sim Exp(\lambda)$.
- Soit S_n le moment où se produit le i^{e} évènement. On a
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$
- On peut facilement prouver que $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
- Si $N(t) \geq n$, alors nécessairement $S_n \leq t$.

Processus de Poisson avec évènements de type I et II

- Soit un Processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ où il peut y avoir un évènement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q.
- Nécessairement, on a
$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$
Avec $N_1(t)$ et $N_2(t)$ qui sont stochastiquement indépendants.
- $N_i(t) \sim Pois(\lambda p_i t)$, où p_i est la probabilité que l'évènement de type i se produise.

Distribution conditionnelle des temps d'occurence

- Pour un processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, la distribution conditionnelle des temps d'occurence $S_1, ...S_n$ sachant que $N(t) = n$ est définie par
$$f_{S_1,...,S_n|N(t)}(s_1, ..., s_n|n) = \frac{n!}{t^n}$$
pour $0 < s_1 < ... < s_n$.
- La distribution de $S_1, ..., S_n|N(t) = n$ a la même distribution que les statistiques d'ordre :
$$U_{(1)}, ..., U_{(n)} \sim U(0, t)$$

Processus de Poisson non-homogène

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

(1) $N(0) = 0$;

(2) $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;

(3) $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;

(4) $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(s))}$$
où $m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$. On a alors que
$$N(t+s) - N(s) \sim Pois(m(t+s) - m(s))$$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurence du n^{e} évènement, alors
$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,
$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{\infty} \lambda(s)\lambda(t+s)m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. *iid* indépendantes de $N(t)$.

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que $\Pr\left(Y_i = \alpha_j\right) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépentantes telles que $N_j(t) \sim Pois(\lambda p_j t)$. Lorsque $t \to \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\lambda t \mathrm{E}\left[Y\right], \lambda t \mathrm{E}\left[Y^2\right]\right)$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1 \lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition

Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t)|\Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

De plus, on a $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ et $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. Aussi, la transformée de Laplace pour $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ est

$$\mathcal{L}_X(s) = \mathrm{E}\left[e^{-sX}\right] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha$$

Remarques importantes

(1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps) ;

(2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants ;

(3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors [1]

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

(4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$\mathrm{E}\left[N(t)\right] = t\mathrm{E}\left[\Lambda\right]$$
$$\mathrm{Var}\left(N(t)\right) = t\mathrm{E}\left[\Lambda\right] + t^2 \mathrm{Var}\left(\Lambda\right)$$

(5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$F_{\Lambda|N(t)}(x|n) = \frac{\Pr\left(\Lambda \leq x | N(t) = n\right)}{\Pr\left(N(t) = n\right)} = \frac{\Pr\left(N(t) = n|\Lambda\right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Pr\left(N(t) = n | \Lambda = \lambda\right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda}$$

1. Être capable de faire cette démonstration pour l'examen
2. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.

(6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \overline{F}_\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$$

4 Processus de renouvellement

Définitions générales

- T_n : intervalle de temps entre le $(n-1)^e$ et le n^e renouvellement ;
- $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurence du n^e renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus [2] ;
- $\mu = E[T_i]$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements ;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr(N(t) = n) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

Dans le cas où $T \sim Erlang(m, \lambda)$, alors

$$\Pr(N(t) = n) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^\infty F_T^{*(n)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait *l'équation de renouvellement*, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x)f_T(x)dx$$

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\hat{m}(s) = \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s)\hat{f}_T(s) = \frac{\hat{f}(s)}{s\left(1-\hat{f}(s)\right)}$$

Théorèmes limites

(1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus, $\frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{E[T]}$ avec une probabilité *presque certaine*.

(2) *Théorème élémentaire du renouvellement* : avec $t \to \infty$, on a $\frac{m(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{E[T]}$

(3) Lorsque $t \to \infty$, $N(t)$ est aymptotiquement normale, telle que

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{E[T]}, \frac{t\text{Var}(T)}{E[T]^3}\right)$$

Équation de renouvellement

De façon générale, si on a une équation intégrale d'une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF_T(x)$$

Alors, la seule solution est

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm(x)$$

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \overline{F}_T(t) + \int_0^x \overline{F}_T(t-y)dm(y)$$

et

$$E\left[S_{N(t)}\right] = tF_T(t) - \int_0^t (t-y)\overline{F}_T(t-y)dm(y)$$

De plus, selon l'équation de Wald [3],

$$E\left[S_{N(t)+1}\right] = E[T](m(t)+1)$$

Key renewal theorem

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{E[T]}\int_0^\infty h(x)dx$$

Processus de renouvellement avec délai

- Soit $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ des temps entre des renouvellements succesifs qui sont *iid* tel que $F_{T_n}(t) = F_{T_2}(t)$ pour $n \geq 2$ et $F_{T_1(t)} \neq F_{T_2}(t)$. Alors $\{N_d(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de renouvellement avec délai.
- La distribution de $N_d(t)$ est
  $$\Pr(N_d(t) = n) = F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t) - F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n)}(t)$$
- la fonction de renouvellement $m_d(t)$ est donc
  $$m_d(t) = \sum_{n=1}^\infty F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t)$$
- De plus, $m_d(t)$ satisfait aussi l'équation de renouvellement, telle que
  $$m_d(t) = F_{T_1}(t) + \int_0^t m_o(t-x)f_{T_1}(x)dx$$
  où $m_o(t)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire qui débute à T_2.

Processus de renouvellement *stationnaire*

- Un processus de renouvellement $\{N_e(t); t \geq 0\}$ est dit stationnaire si
  $$F_{T_1} = F_e(t) = \frac{\int_0^t \overline{F}_{T_2}(x)dx}{E[T_2]}$$
- La fonction de renouvellement $m_e(t)$ est définie par
  $$m_e(t) = E[N_e(t)] = \frac{t}{E[T_2]}$$
- La distribution de $N_e(t)$ est définie par
  $$\Pr(N_e(t+h) - N_e(t) = n) = \Pr(N_e(h) = n)$$
  Car les accroissements sont stationnaires.

3. l'équation de Wald se base sur le concept que $S_n = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$, très semblable au modèle fréquence-sévérité.

Processus de renouvellement alterné

- Soit la suite $\{(T_n, T_n'); n \in \mathbb{N}\}$ des vecteurs *iid* où les composantes (T_n, T_n') peuvent être dépendantes. T_n représente un intervalle de temps dans lequel le processus (de renouvellement) est *on* et T_n' un intervalle de temps où le processus est *off*.
- On peut donc définir 2 processus (*on* et *off*) :
  - $\{N_1(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *avec délai* généré par la suite des temps $\{T_1, T_n' + T_{n+1}; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est
  $$m_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2+T_1'}^{*(n-1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)}(t) * F_{T_1'}^{*(n-1)}(t)$$
  - $\{N_2(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *ordinaire* généré par la suite des temps $\{T_n + T_n'; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est
  $$m_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1+T_1'}^{*(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)} * F_{T_1'}^{*(n)}(t)$$
- **Proposition 1 :** Supposons que T_n est indépendant de T_n', $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $p_i(t)$ la probabilité que le processus de renouvellement alterné soit dans l'état i au temps t, $i = 1, 2$. Alors,
$$p_1(t) = m_2(t) - m_1(t) + 1 = 1 - p_2(t)$$
- **Proposition 2 :** Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition 1, on a
$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\mathrm{E}[T_1]}{\mathrm{E}[T_1] + \mathrm{E}[T_1']} = 1 - \lim_{t\to\infty} p_2(t)$$

Application : somme de renouvellements avec réclamations escomptées

- On considère le processus des réclamations escomptées à $t = 0$, soit $\{Z(t); t \geq 0\}$, défini par
$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta S_k} X_k$$
où
  - $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de renouvellement ordinaire ;
  - S_k est le moment où se produit la k^{e} réclamation ;
  - La suite $\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de v.a. *iid* et indépendantes de $N(t)$ représentant les montants de réclamations ;
  - δ est la force d'intérêt appliquée pour actualiser les réclamations.
- Dans un processus de renouvellement ordinaire, on a, pour $k = 1, 2, ..., n$,
$$f_{S_k|N(t)}(x|n) = f_{S_k}(x)\frac{\Pr(N(t-x) = n-k)}{\Pr(N(t) = n)}$$
- On peut calculer le premier moment du processus des réclamations escomptées $\{Z(t); t \geq 0\}$:
$$\mathrm{E}[Z(t)] = \mathrm{E}[X]\int_0^t e^{-\delta x} dm(x)$$
où $m(t)$ est la fonction de renouvellement du processus de renouvellement $\{N(t); t \geq 0\}$.

5 Mouvement Brownien

Définitions

Définition générale

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un mouvement Brownien *avec paramètre de variance* σ^2 si

(1) $X(0) = 0$;

(2) $\{X(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires ;

(3) $\forall t > 0$, $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Note : on appelle aussi σ le *paramètre de volatilité* ou *coefficient de diffusion*. Un mouvement Brownien est dit *standard* si $\sigma = 1$.

Proposition 1

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, on a

$$f_{X_1(t_1),...,X_n(t_n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + ... + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(t_1(t_2-t_2)...(t_n-t_{n-1}))}$$

3cm

Proposition 2

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < s < t$, $X(s)|X(t)$ obéit à une loi normale, tel que

$$\mathrm{E}[X(s)|X(t) = x] = \frac{s}{t}x$$
$$\mathrm{Var}(X(s)|X(t) = x) = \frac{s}{t}(t-s)$$

Temps d'atteinte d'une barrière

- Soit T_a le le premier moment où le mouvement Brownien standard atteint le niveau a. Alors,
$$\Pr(T_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
- On peut trouver la distribution de la valeur maximale que peut prendre $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, telle que
$$\Pr\left(\max_{0\leq s\leq t} X(s) \geq a\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Variations sur le mouvement Brownien

Mouvement Brownien avec dérive

Un mouvement Brownien avec dérive (*drifted*) a exactement la même définition qu'un mouvement Brownien standar, à l'exception que
$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\mu t, \sigma^2 t\right)$$
où μ est le *paramètre de dérive*.
Note : on a donc que $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Mouvement Brownien géométrique

Définition

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien brownien avec dérive μ et volatilité σ. Alors, le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ défini par
$$X(t) = e^{Y(t)}$$
est dit être un mouvement Brownien *géométrique*.

Proposition : Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien géométrique avec dérive μ et volatilité σ. Alors,

$$\mathrm{E}\left[X(t)|X(u)\right] = X(s)e^{(t-s)\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

pour $0 \leq u \leq s \leq t$.

Pont Brownien

Processus Gaussien

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus Gaussien si, $\forall 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, $X(t_1), ..., X(t_n)$ a une distribution normale multivariée.

Définition alternative d'un mouvement Brownien standard

Un processus $\{X(t); t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard ssi

(1) $\{X(t); t \geq 0\}$ est un processus Gaussien ;

(2) $\forall t > 0$, $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = 0$, avec $X(0) = 0$;

(3) $\forall 0 \leq s \leq t$, on a $\mathrm{Cov}\left(X(s), X(t)\right) = s$.

Définition d'un pont Brownien

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. Alors, le processus conditionnel $\{X(t); 0 \leq t \leq 1|X(1) = 0\}$ est dit être un *pont* Brownien. De plus, on a

$$\mathrm{E}\left[X(t)|X(1) = 0\right] = 0$$

Et, pour $s < t < 1$,

$$\mathrm{Cov}\left(X(s), X(t)|X(1) = 0\right) = s(1-t).$$

Une autre condition pour déterminer si le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ est un point Brownien est de vérifier que l'équation suivante est respectée :

$$Z(t) = X(t) - tX(1)$$

Mouvement Brownien intégré

Définition de l'Intégrale d'Îto

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard et une fonction f est une dérivée continue. Alors, nous définissons *l'intégrale stochastique d'Îto* comme

$\int_a^b f(t)dX(t) = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b X(t)df(t)$

Définition du mouvement Brownien intégré

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard, alors le processus Soit $\{Z(t); t \geq 0\}$ défini par (en utilisant *l'intégrale d'Îto)*

$$Z(t) = \int_0^t X(s)ds = tX(t) - \int_0^t v \cdot dX(v)$$

Proposition 2

L'espérance et la variance de $\int_a^b f(t)dX(t)$ sont respectivement

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b f(t)dX(t)\right] = 0$$

$$\mathrm{Var}\left(\int_a^b f(t)dX(t)\right) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

Proposition 3

La mouvement Brownien intégré (tout comme le mouvement Brownien standard) obéit à une loi Normale. En combinant avec les hypothèses de la proposition 2, on a

$$\int_a^b f(t)dX(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_a^b f(t)^2 dt\right)$$

et

$$\int_a^b X(t)df(t) \sim \mathcal{N}\left(0, a\left(f(b) - f(a)\right)^2 + \int_a^b \left(f(b) - f(t)\right)^2 dt\right.$$