Chapitre 3

Probabilité conditionnelle

Dans ce chapitre, on introduit un des concepts les plus importants en ① théorie des probabilités, soit la probabilité conditionnelle. Il y a deux raisons justifiant son importance. Dans un premier temps, on est souvent intéressé à calculer des probabilités lorsque de l'information partielle sur le résultat de l'expérience est connue. Dans ces cas, on cherche à évaluer des probabilités conditionnelles. ② Dans un deuxième temps, les probabilités conditionnelles peuvent faciliter le calcul de certaines probabilités même si aucune information partielle n'est connue.

3.1 Définition

Exemple 3.1 *On lance 2 dés supposant que chaque résultat a une chance de $\frac{1}{36}$ de se réaliser. De plus, on suppose que le premier dé lancé est un 3. Sachant cette information, quelle est la probabilité que la somme des deux dés soit de 8?*

Solution. • Étant donné que le premier tir est un 3, il y a 6 possibilités : $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$. *équiprobable

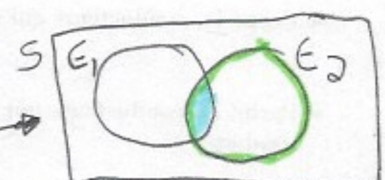
• Étant donné que les résultats sont équiprobables la probabilité que la $\Sigma = 8$ sachant que le $1^{er} = 3$ est $1/6$.

■

Proposition 3.2 *Soient les événements E_1 et E_2 et $\Pr(E_2) > 0$. Alors,*

*Probabilité que E_1 se produise sachant que E_2 s'est produit,

$$\Pr(E_1 | E_2) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_2)},$$



où $\Pr(E_1 \mid E_2)$ correspond à la probabilité conditionnelle que l'événement E_1 se réalise sachant que l'événement E_2 s'est réalisé. Si l'événement E_2 se réalise, alors pour que E_1 se réalise, il est nécessaire que le résultat appartienne à E_1 et E_2, c'est-à-dire $E_1 \cap E_2$. De plus, étant donné que E_2 s'est réalisé le nouvel espace échantillonnal est maintenant E_2.

Si l'on reprend l'exemple 3.1 avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\text{Somme des dés est de 8}\} \\ E_2 &= \{\text{Premier dé est un 3}\} \end{aligned}$$

et qu'on le résoud à l'aide de la Proposition 3.2, on obtient

$$\Pr(E_1 | E_2) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_2)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}.$$

premier dé est un 3

Remarque 3.3 *Lorsque les résultats sont équiprobables, on obtient*

en définissant nos événements, ça permet d'aller plus rapidement.

$$\Pr(E_1 | E_2) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_2)} = \frac{\left(\frac{\#(E_1 \cap E_2)}{\cancel{\# S}}\right)}{\left(\frac{\# E_2}{\cancel{\# S}}\right)} = \frac{\#(E_1 \cap E_2)}{\# E_2},$$

on élimine le S

où $\#(E)$ correspond au cardinal de l'ensemble E.

Remarque 3.4 *Relation importante:*

$$\boxed{\begin{aligned} \Pr(E_2 | E_1) &= \frac{\Pr(E_2 \cap E_1)}{\Pr(E_1)} \\ &= \frac{\Pr(E_1 | E_2)\Pr(E_2)}{\Pr(E_1)}. \end{aligned}}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Exemple 3.5 *Une compagnie d'assurance effectue une étude sur les jeunes conducteurs. Selon son expérience des 10 dernières années, elle a observé que:*

- 6% des jeunes conducteurs sont impliqués dans un accident responsable la 1ière année; ✓
- 70% des jeunes conducteurs ont pris des cours de conduite; ✓
- 10% des jeunes conducteurs portent des lunettes; ✓
- Parmi les conducteurs qui ont pris des cours de conduite, 1 sur 14 porte des lunettes; ✓
- Parmi les conducteurs qui ont eu un accident responsable la 1ière année, 1 sur 3 a pris des cours de conduite; ✓
- 1 jeune conducteur sur 100 porte des lunettes et a eu un accident responsable la 1ière année.

(a) Trouver la probabilité qu'un jeune conducteur qui porte des lunettes ait un accident responsable la 1ière année.

(b) Trouver la probabilité qu'un jeune conducteur ayant pris des cours de conduite ait un accident responsable la 1ière année.

$A = \{$Jeune cond, porte lunette$\}$
$B = \{$Jeune ayant pris cours$\}$
$C = \{$ " " a accident resp.$\}$

Solution. $P(A) = 0{,}10$ $P(B) = 0{,}70$ $P(C) = 0{,}06$
$P(A|B) = 1/14$ $P(B|C) = 1/3$ $P(A \cap C) = 0{,}01$

a) $P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0{,}01}{0{,}10} = 0{,}1$

* il faut être capable de transformer la probabilité pour que ça fonctionne avec les chiffres qu'on a.

b) $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C) \cdot P(C)}{P(B)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}06}{0{,}70} = \frac{1}{35}$

■

3.2 Règle de multiplication

Proposition 3.6 *Soient n événements $E_1, E_2, ..., E_n$.*

$$\Pr(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = \Pr(E_1) \times \Pr(E_2 | E_1) \Pr(E_3 | E_1 \cap E_2) ... \Pr(E_n | E_1 \cap E_2 ... \cap E_{n-1}).$$

Preuve. $P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) \ldots P(E_n|E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{n-1})$

$\cancel{P(E_1)} \cdot \frac{P(E_2 \cancel{\cap E_1})}{\cancel{P(E_1)}} \cdot \frac{P(E_3 \cancel{\cap E_2 \cap E_1})}{P(\cancel{E_2 \cap E_1})} \times \ldots \frac{P(E_n \cap E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1})}{P(\cancel{E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}})}$

$= P(E_1 \cap \ldots \cap E_n)$

■

Exemple 3.7 *Une personne a 6 clés dont une seule peut débarrer la porte de sa maison. Si elle essaie chaque clé une seule fois au hasard (sans remise), quelle est la probabilité qu'elle trouve la bonne clé au 3ième essai? au 6ième essai?*

solution qu'elle s'attend

Solution. $E_i = \{\text{trouver la bonne clé au } i^{\text{ème}} \text{ essai}\}$

(1) On cherche

$$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3) = P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1}) \cdot P(E_3 \mid \overline{E_1} \cap \overline{E_2})$$

règle de la multiplication

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

(2) autre solution

$S = \{(1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), \dots, (0,0,0,0,0,1)\}$ où 1 indique que la porte est ouverte

* Ces évènements forment une partition de S et sont équiprobable...
On a donc $P(E_i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \dots 6$

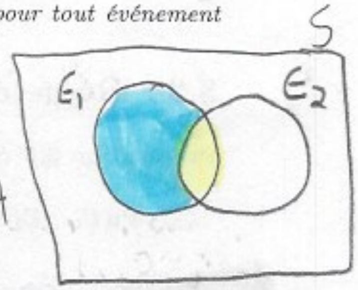
■

3.3 Loi des probabilités totales

Parfois, il s'avère impossible de calculer directement $\Pr(E_1)$ alors qu'il est possible d'évaluer $\Pr(E_1 | E_2)$ et $\Pr(E_1 | E_2^c)$ pour un événement donné E_2. Dans ces cas, on peut utiliser la loi des probabilités totales pour trouver $\Pr(E_1)$.

Proposition 3.8 *Soit un événement E_2 tel que $\Pr(E_2) > 0$ et $\Pr(E_2^c) > 0$. Alors, pour tout événement E_1, on a*

$$\Pr(E_1) = \Pr(E_1 | E_2)\Pr(E_2) + \Pr(E_1 | E_2^c)\Pr(E_2^c).$$



Preuve. $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})$

$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap \overline{E_2})$ car $(E_1 \cap E_2)$ et $(E_1 \cap \overline{E_2})$ sont mutuellement exclusif

$$= P(E_1 | E_2) \cdot \underset{\text{poids}}{P(E_2)} + P(E_1 | \overline{E_2}) \underset{\text{poids}}{P(\overline{E_2})}$$

$\boxed{\text{SIGNIFICATION}}$ ⇒ Moyenne pondérée de $P(E_1|E_2)$ et $P(E_1|\overline{E_2})$ où les poids sont les probabilités des cond.

■

Exemple 3.9 *Dans un portefeuille d'assurance auto, il y a deux catégories d'assurés, des bons et des mauvais. On détient les informations suivantes:*

Type d'assuré	*% du portefeuille*	$\Pr(\{\text{Avoir un accident}\})$
Bon	*70*	*0.05*
Mauvais	*30*	*0.25*

.

Si la réponse sort de nos bornes, on a fait un erreur de calcul!

15 questions par exam. Exam 1 : 1-2-3 + début chap.4

MOYENNE PONDÉRÉE

Quelle est la probabilité qu'un assuré du portefeuille ait un accident?

Solution.

A = {être un bon assuré}
B = {être un mauvais assuré}
E = {avoir un accident}

On cherche P(E)

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}11$$

■

Théorème 3.10 *(Loi des probabilités totales) Soit $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ une partition de l'espace échantillonnal S et $\Pr(F_i) > 0$ pour $i = 1, ..., n$. Alors pour tout événement E de S, on a*

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(E|F_1)\Pr(F_1) + \Pr(E|F_2)\Pr(F_2) + ... + \Pr(E|F_n)\Pr(F_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i).\end{aligned}$$

Généralisation de la proposition 3.8

3.4 Formule de Bayes

Théorème 3.11 *(Théorème de Bayes) Soit $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ une partition de l'espace échantillonnal S d'une expérience. Si pour $i = 1, ..., n$, $\Pr(F_i) > 0$, alors pour tout événement E de S avec $\Pr(E) > 0$, on a*

$$\boxed{\Pr(F_i|E) = \frac{\Pr(E|F_i)\Pr(F_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)}.}$$

on peut le modifier selon la loi généraliser des probabilités totales

Preuve. $P(F_i|E) = \frac{P(F_i \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|F_i)P(F_i)}{P(E)}$

relation importante, probabilité conditionnelle

$$= \frac{P(E|F_i)P(F_i)}{P(E|F_1)P(F_1) + ... + P(E|F_n)P(F_n)} = \frac{P(E|F_i)P(F_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

■

Remarque 3.12 *Si les événements F_i sont des hypothèses possibles reliées à une expérience, alors la formule de Bayes peut être interprétée comme une mise à jour des hypothèses de départ (F_i) suite à l'observation de l'événement E de l'expérience. Dans ce cas, on appelera probabilités a priori les $\Pr(F_i)$ et probabilités a posteriori les $\Pr(F_i|E)$.*

Exemple 3.13 *Une compagnie d'assurance protège des assurés contre des réclamations en soins de santé. Celle-ci classifie ses assurés comme des gens ayant de très bonnes habitudes de vie, des habitudes de vie acceptables et de mauvaises habitudes de vie. De plus, des données antérieures suggèrent que les gens dans chacune de ces catégories ont respectivement 10%, 20% et 40% de chance d'avoir plus de 2000\$ de réclamations en soins de santé au cours d'une année. La compagnie d'assurance croit également que son portefeuille est constitué de 30% de gens ayant de très bonnes habitudes de vie, 45% de gens ayant des habitudes de vie*

Important : bien traduire les problèmes de prob. conditionnelle et toujours identifier ses probabilités/évènements.

acceptables et 25% de gens ayant de mauvaises habitudes de vie. (a) Quelle est la probabilité qu'un assuré du portefeuille ait plus de 2000$ de réclamations en soins de santé au cours d'une année? (b) Un assuré a plus de 2000$ de réclamations au cours d'une année. Quelle est la probabilité que cet assuré ait été classé dans les gens ayant des habitudes de vie très bonnes, acceptables ou mauvaises?

Solution.

A = {avoir de très bonnes hab.} $P(A)=0{,}30$ $P(E|A)=0{,}1$

B = {habitudes de vie acceptables} $P(B)=0{,}45$ $P(E|B)=0{,}2$

C = { " " " mauvaises} $P(C)=0{,}25$ $P(E|C)=0{,}4$

E = {avoir plus de 2000$ de réclamations}

a) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)$

$= 0{,}10 \cdot 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 0{,}45 + 0{,}40 \cdot 0{,}25$

$= 0{,}22$

b) $P(A|E) = \dfrac{P(A\cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E|A)\,P(A)}{P(E)} = \dfrac{0{,}10 \cdot 0{,}30}{0{,}22} = \dfrac{3}{22}$

$P(B|E) = \dfrac{P(B\cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E|B)\,P(B)}{P(E)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}45}{0{,}22} = \dfrac{9}{22}$

$P(C|E) = \dfrac{P(C\cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E|C)\,P(C)}{P(E)} = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}22} = \dfrac{10}{22}$

	a priori	a posteriori
X	P(X)	P(X|E)
A	0,3	3/22
B	0,45	9/22
C	0,25	10/22
		1

■

Exemple 3.14 *Supposons qu'on ait 4 commodes, chacune ayant 2 tiroirs. On sait que dans chaque tiroir se trouve les pièces suivantes:*

Commode	*Tiroir no.1*	*Tiroir no.2*
no.1	*Or*	*Argent*
no.2	*Or*	*Argent*
no.3	*Or*	*Or*
no.4	*Argent*	*Argent.*

On choisit au hasard une commode et on ouvre un tiroir où l'on y trouve une pièce d'or.(a) Trouver la probabilité que l'autre tiroir de cette commode contienne une pièce d'argent. (b) Trouver la probabilité que l'autre tiroir de cette commode contienne une pièce d'or.

Solution.

Solution #1 : $C_i = \{\text{choisir la commode } i\}$

$O = \{\text{trouver une pièce d'or}\}$

a) $$P(C_1 \cup C_2 | O) = \frac{P((C_1 \cup C_2) \cap O)}{P(O)} = \frac{P(C_1 \cap O) + P(C_2 \cap O)}{P(O|C_1)P(C_1) + \ldots + P(O|C_4)P(C_4)}$$

$$= \frac{P(O|C_1)P(C_1) + P(O|C_2)P(C_2)}{P(O|C_1)P(C_1) + \ldots + P(O|C_4)P(C_4)} = \frac{(1/2)(1/4) + (1/2)(1/4)}{(1/2)(1/4) + (1/2)(1/4) + (1)(1/4) + 0}$$

étape importante pour avoir le dénominateur

$$= \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

b) $$P(C_3 | O) = \frac{P(C_3 \cap O)}{P(C_3)} = \frac{P(O|C_3)P(C_3)}{P(O)} = \frac{(1)(1/4)}{4/8} = \frac{1}{2}$$

Solution #2 : $O_{ij} = \{\text{piger de l'or dans le tiroir } j \text{ de la commode } i\}$

$A_{ij} = \{$ " l'argent " " " " " $\}$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (O_{11}, A_{12}), (O_{21}, A_{22}), (O_{31}, O_{32}), (A_{41}, A_{42}) \\ (A_{12}, O_{11}), (A_{22}, O_{21}), (O_{32}, O_{31}), (A_{42}, A_{41}) \end{array} \right\}$$

a) $$P(\text{Argent en } 2^{\text{ième}} | \text{Or en } 1^{\text{er}}) = \frac{P(\text{Argent } 2^{\text{e}} \cap \text{Or } 1^{\text{er}})}{P(\text{Or } 1^{\text{er}})}$$

$$= \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

b) $$P(\text{Or } 2^{\text{e}} | \text{Or en } 1^{\text{er}}) = \frac{P(\text{Or } 2^{\text{e}} \cap \text{Or } 1^{\text{er}})}{P(\text{Or } 1^{\text{er}})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

on reprend la sol. 2 en redéfinissant un nouvel espace échantillonal S^* tenant compte de la nouvelle information.

Solution #3:

■

$$S^* = \{(O_{11}, A_{12}), (O_{21}, A_{22}), (O_{31}, O_{32}), (O_{32}, O_{31})\}$$

a) $P(\text{Arg. } 2^e \mid \text{Or } 1^{er}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ b) $P(\text{Or } 2^e \mid \text{Or } 1^{er}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3.5 Événements indépendants

Dans les exemples de la section précédente, on a observé que la probabilité conditionnelle $\Pr(E_1 | E_2)$ n'était pas en général égale à la probabilité non-conditionnelle $\Pr(E_1)$. Dans l'Exemple 3.13, on avait $\Pr(A) = 0.3 \neq \Pr(A|E) = 0.1364$. La réalisation de l'événement E a donc un impact sur les chances de réalisation de l'événement A.

Définition 3.15 *On définit par événements indépendants, deux événements qui n'ont aucune incidence l'un sur l'autre. Le fait de connaître le résultat d'un de ses événements n'affecte aucunement les chances de réalisation de l'autre événement. On déduit donc les relations suivantes:*

$$\Pr(E_1 | E_2) = \Pr(E_1)$$
$$\Pr(E_2 | E_1) = \Pr(E_2).$$

Proposition 3.16 *Deux événements E_1 et E_2 sont dits indépendants **si et seulement si***

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_1)\Pr(E_2).$$

Preuve. $P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \overset{?}{=} P(E_1)$ → * on fait l'hypothèse que $P(E_1|E_2) = P(E_1)$, alors pour que ça marche, $P(E_1 \cap E_2)$ doit être égal à $P(E_1)P(E_2)$

$\Leftrightarrow P(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad \left(\frac{P(E_1)\cancel{P(E_2)}}{\cancel{P(E_2)}}\right)$

$\Leftrightarrow P(E_1 \cap E_2) \overset{?}{=} P(E_1)P(E_2)$

■

Exemple 3.17 *On lance deux dés. Soient les événements suivants:*

$$E_1 = \{\textit{La somme des dés égale } 6\};$$
$$E_2 = \{\textit{La somme des dés égale } 7\};$$
$$F = \{\textit{Le résultat du premier dé est } 4\}.$$

(a) Est-ce que les événements E_1 et F sont indépendants? (b) Est-ce que les événements E_2 et F sont indépendants?

a)

Solution.

$P(E_1) = P(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}) = \frac{5}{36}$

$P(F) = P(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(E_1 \cap F) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow P(E_1)P(F) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36} = P(E_1 \cap F)$

$\Rightarrow$ E_1 et F ne sont pas indépendants

$\Rightarrow$ dépend du résultat du 1er tir, car si c'est 6, alors E_1 ne peut pas se réaliser.

b) $P(E_2) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(F) = 1/6$

$P(E_2 \cap F) = P(\{(4,3)\}) = 1/36$

$\Rightarrow P(E_2)P(F) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36 = P(E_2 \cap F)$

$\Rightarrow$ E_2 et F sont indépendants

■

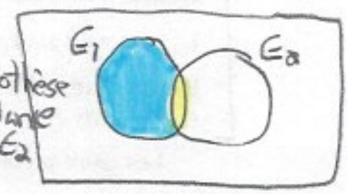
Proposition Si les événements E_1 et E_2 sont indépendants, alors

hypothèse importante
$$\begin{cases} E_1 \text{ et } E_2^c \text{ sont indépendants; } & \text{prouvé en a)} \\ E_1^c \text{ et } E_2^c \text{ sont indépendants. } & \text{prouvé en b)} \end{cases}$$

EXAMEN!

Preuve. (a) Supposons E_1 et E_2 des événements indépendants. Étant donné que $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)$ et que $(E_1 \cap E_2)$ et $(E_1 \cap E_2^c)$ sont des événements mutuellement exclusifs, on a

S



$$\begin{aligned} \Pr(E_1) &= \Pr(E_1 \cap E_2) + \Pr(E_1 \cap E_2^c) \\ &= \Pr(E_1)\Pr(E_2) + \Pr(E_1 \cap E_2^c) \end{aligned}$$

par hypothèse d'indépendance E_1 et E_2

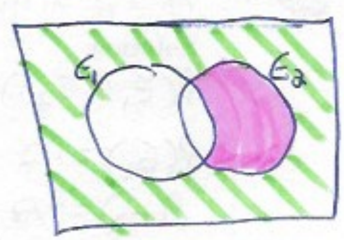
*étape par étape, ligne par ligne

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} \Pr(E_1 \cap E_2^c) &= \Pr(E_1) - \Pr(E_1)\Pr(E_2) \\ &= \Pr(E_1)(1 - \Pr(E_2)) \\ &= \Pr(E_1)\Pr(E_2^c). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\bar{E}_2 = 1 - E_2}$

(b) Supposons E_1 et E_2 des événements indépendants. Étant donné que $E_1^c = (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2^c)$ et que $(E_1^c \cap E_2)$ et $(E_1^c \cap E_2^c)$ sont des événements mutuellement exclusifs, on a



$$\begin{aligned} \Pr(E_1^c) &= \Pr(E_1^c \cap E_2) + \Pr(E_1^c \cap E_2^c) \\ &= \Pr(E_1^c)\Pr(E_2) + \Pr(E_1^c \cap E_2^c) \end{aligned}$$

HYPOTHÈSE car selon (a) E_1^c et E_2 sont indépendants si E_1 et E_2 sont indépendants. On a donc

$$\begin{aligned} \Pr(E_1^c \cap E_2^c) &= \Pr(E_1^c) - \Pr(E_1^c)\Pr(E_2) \\ &= \Pr(E_1^c)(1 - \Pr(E_2)) \\ &= \Pr(E_1^c)\Pr(E_2^c). \end{aligned}$$

■

mutuellement exclusif

Remarque 3.18 *Si l'événement E_1 est indépendant de l'événement E_2, alors la connaissance de la réalisation ou de la non-réalisation de E_2 n'a aucun impact sur les chances de réalisation ou de non-réalisation de E_1, c'est-à-dire* $\Pr(E_1|E_2) = \Pr(E_1|E_2^c) = \Pr(E_1)$, $\Pr(E_1^c|E_2) = \Pr(E_1^c|E_2^c) = \Pr(E_1^c)$) *et vice-versa.*

Remarque 3.19 *Si E_1 et E_2 sont des événements mutuellement exclusifs et $\Pr(E_1) > 0$, $\Pr(E_2) > 0$, alors E_1 et E_2 sont des événements* **dépendants** *car si un des deux événements se produit, alors les chances que l'autre se produise sont nulles.*

Proposition 3.20 ***(Généralisation de la Proposition 3.16)*** *Les événements $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sont indépendants si, pour toute combinaison $1 \le i < j < k < ... < n$, les relations suivantes sont vérifiées*

le cas où on a n évènements

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Pr(E_i \cap E_j) &=& \Pr(E_i)\Pr(E_j); \\ \Pr(E_i \cap E_j \cap E_k) &=& \Pr(E_i)\Pr(E_j)\Pr(E_k); \\ &\downarrow& \\ \Pr(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) &=& \Pr(E_1)\Pr(E_2)...\Pr(E_n). \end{array}\right.$$

En d'autres mots, $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sont des événements indépendants si tous les sous-ensembles de $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sont des événements indépendants. Pour le cas particulier $n = 3$, on a

Si on démontre toutes les poss., alors on pourra conclure qu'ils sont indépendants

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Pr(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &=& \Pr(E_1)\Pr(E_2)\Pr(E_3); \\ \Pr(E_1 \cap E_2) &=& \Pr(E_1)\Pr(E_2); \\ \Pr(E_1 \cap E_3) &=& \Pr(E_1)\Pr(E_3); \\ \Pr(E_2 \cap E_3) &=& \Pr(E_2)\Pr(E_3). \end{array}\right.$$

Remarque 3.21 *Si E_1, E_2,..., E_n sont des événements indépendants alors chaque événement E_i ($i = 1, ..., n$) est indépendant de tout événement formé à partir d'un sous-ensemble des événements $E_1, E_2, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$. Par exemple, l'événement E_1 est indépendant de l'événement $\bigcup_{i=2}^{n} E_i$.*

Remarque 3.22 $\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(E_i)$ *n'implique pas nécessairement que les événements E_i ($i = 1, ..., n$) sont indépendants.* → démontré à 3.24

somme

Remarque 3.23 $\Pr(E_i \cap E_j) = \Pr(E_i)\Pr(E_j)$, $\forall(i, j)$ *où $i \ne j$ n'implique pas nécessairement que les événements E_i ($i = 1, ..., n$) sont indépendants.* → démontré à 3.25

Les deux prochains exemples illustrent bien ces deux dernières remarques.

UN EXEMPLE COMME ÇA À L'EXAM C'EST SUR!!!

Exemple 3.24 *On lance un dé régulier et on note le nombre obtenu. Soit les événements suivants:*

$$\begin{array}{rcl} E_1 &=& \{\textit{Obtenir un nombre pair}\}; \\ E_2 &:& \{\textit{Obtenir un nombre impair}\}; \\ E_3 &:& \{\textit{Obtenir un nombre supérieur à } 6\}. \end{array}$$

Est-ce que ces événements sont indépendants?

Solution.

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\emptyset) = 0$

$P(E_1) = 1/2$

$P(E_2) = 1/2$

$P(E_3) = 0$

$P(E_1 \cap E_2) = P(\emptyset) = 0$

$P(E_1) = 1/2$

$P(E_2) = 1/2$

$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) \ne P(E_1)\,P(E_2)$

$\Rightarrow$ les évènements ne sont pas indépendants, même si $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)\,P(E_2)\,P(E_3)$

■

Exemple 3.25 *On lance deux dés réguliers et on note les résultats obtenus. Soit les événements suivants:*

$$E_1 = \{\text{Obtenir un nombre impair sur le 1er dé}\};$$
$$E_2 = \{\text{Obtenir un nombre impair sur le 2ième dé}\};$$
$$E_3 = \{\text{Obtenir un nombre impair pour la somme des 2 résultats}\}.$$

Est-ce que ces événements sont indépendants?

Solution.

$$E_1 = \{(1,1),(1,2),\ldots(1,6),(3,1),(3,2),\ldots(3,6),(5,1),(5,2),\ldots(5,6)\}$$

$$E_2 = \{(1,1),(2,1),\ldots,(6,1),(1,3),(2,3),\ldots(6,3),(1,5),(2,5),\ldots(6,5)\}$$

$$E_3 = \left\{\begin{matrix}(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6)\\(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\end{matrix}\right\}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P\left(\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,3),(1,5)\\(3,1),(3,3),(3,5)\\(5,1),(5,3),(5,5)\end{matrix}\right\}\right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \qquad P(E_1 \cap E_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$
$$P(E_2 \cap E_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

■ $\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \underbrace{P(E_1)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(E_2)}_{1/2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{4} = \underbrace{P(E_1)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(E_3)}_{1/2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(E_2 \cap E_3) = 1/4 = \underbrace{P(E_2)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(E_3)}_{1/2} = 1/4$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\emptyset) = 0 \neq \underbrace{P(E_1)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(E_2)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(E_3)}_{1/2} = 1/8$$

$\Rightarrow E_1, E_2$ & E_3 ne sont pas indépendants même si $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$

Résumé Ch3 - Prob. Conditionnelle

Probabilité conditionnelle

→ Déf. $P(F_i|E) = \dfrac{P(F_i \cap E)}{P(E)}$

Règle de multiplication

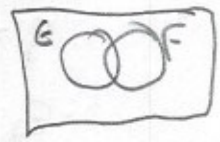
$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap n) = P(E_1)P(E_2|E_1) \cdot \dots \cdot P(E_n) P(E_n|E_{n-1})$

Relation importante

$P(F_i|E) = \dfrac{P(E|F_i)\,P(F_i)}{P(E)}$

Loi des probabilités totales

$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)$



*c'est la forme généralisée

→ $P(E) = P(E \cap F) \cup P(E \cap \overline{F})$

Théorème de Bayes

$P(F_i|E) = \dfrac{P(E|F_i)\,P(F_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)}$

Remarque importante de l'indépendance

$P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1)\,P(\overline{E_2})$

$P(E_1|E_2) = P(E_1|\overline{E_2}) = P(E_1)$

$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1})(\overline{E_2})$

*si E_1 et E_2 sont indépendants

Indépendance des évènements

(conditions pour l'indépendance)

Si "n" évènements

$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j)$

$P(E_i \cap E_j \cap \dots E_n) = P(E_i) \cdot P(E_j) \cdot \dots \cdot P(E_n)$

*les 2 énoncés doivent mener à une égalité

Si 2 évènements

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$