Document de révision
Introduction à l'actuariat II

Gabriel Crépeault-Cauchon

Dernière mise à jour : 12 avril 2018

Table des matières

1 Principes de probabilité **5**
- 1.1 Espérance 5
  - 1.1.1 Espérance d'une fonction indicatrice 5
- 1.2 Espérance tronquée 6
- 1.3 Variance 6
- 1.4 Moments centrés 6
- 1.5 Covariance et coefficient de corrélation 7
- 1.6 Fonction génératrice des moments 8
- 1.7 Fonction génératrice des probabilités 8
- 1.8 Fonction Stop-Loss 8
- 1.9 Espérance limitée 9
- 1.10 Fonction quantile 9
  - 1.10.1 Théorème de la fonction quantile 9
  - 1.10.2 Propriétés importantes 10
- 1.11 Mean Excess-Loss 11

2 Mesures de risque **12**
- 2.1 $VaR_\kappa(X)$: Value-At-Risk 12
- 2.2 $TVaR_\kappa(X)$: Tail Value-At-Risk 12
  - 2.2.1 Formes alternatives explicites pour la $TVaR_\kappa$ 13
- 2.3 Propriétés d'une mesure de risque *cohérente* 13
  - 2.3.1 3 autres propriétés souhaitables 15
- 2.4 $LTVaR_\kappa(X)$: Lower-tail Value-at-Risk 15

3 Mutualisation des risques **16**
- 3.1 Sommes de variables aléatoires indépendantes 16
  - 3.1.1 Produit de convolution 17
- 3.2 Transformée de Laplace–Stieltjes 18

3.2.1 Propriétés importantes 19
3.3 Porte-feuille homogène de risques indépendants 19
3.4 Loi des grands nombres 21
3.4.1 Version de *Tchebychev* 21
3.4.2 la Loi des grands nombres, Version 2.0 21
3.5 Approximation normale et TCL 22
3.6 Mutualisation des risques et mesures de risques 22
3.6.1 Capital économique 23
3.6.2 Bénéfice de la mutualisation 23
3.6.3 Probabilité de ruine 23

4 Simulation stochastique 24
4.1 Méthode de simulation Monte Carlo 24

5 Modèles des coûts en assurance IARD 26
5.1 Modèle de base pour X (fréquence-sévérité) 27
5.1.1 Espérance de X 27
5.1.2 Variance de X 27
5.1.3 Fonction de répartition de X 27
5.1.4 La $VaR_\kappa(X)$ pour X 28
5.1.5 La $TVaR_\kappa(X)$ pour X 28
5.1.6 La simulation pour les calculs 29
5.1.7 $\mathcal{L}_X(t)$ de Laplace pour X 29
5.2 Lois de sévérité pour B 30
5.3 Bernouilli comme loi de fréquence M 30
5.3.1 Approche indemnitaire 30
5.3.2 Approche forfaitaire 31
5.4 Aggrégation des risques IARD 31
5.4.1 Quelques exemples simples 31
5.4.2 Somme de v.a. de la loi Poisson composée 32
5.4.3 Somme de v.a. Binomiale négative composée 32
5.4.4 Somme de v.a. Binomiale composée 33
5.4.5 Approximation par les moments (fondée sur la loi normale 33
5.5 Notions supplémentaires sur les lois de fréquence 33
5.5.1 Lois de Poisson mélange 33
5.5.2 Loi de fréquence avec modification de la masse à $k = 0$ 37
5.6 Notions additionnelles sur les lois de sinistres 37

5.6.1 *Heavy-tailed* vs *Light-tailed* 37
5.6.2 Lois Subexponentielles 38
5.7 Catastrophe et partage des risques 40

6 Allocation du capital et du risque **42**
6.1 Introduction 42
6.2 Propriété d'homogénéité 44
6.3 Théorème d'Euler 45
6.3.1 Version modifiée 45
6.4 Application de la variante du théorème d'Euler 46
6.5 Approximation de la contribution 49

7 Notions supplémentaires sur la mutualisation des risques **50**
7.1 Indépendance conditionnelle 51
7.2 l'Espérance 51
7.3 Variance 52
7.4 Distribution limite de W_n 56

8 Modélisation des risques en assurance-vie **57**
8.1 Définition de base 57
8.1.1 Notation actuarielle 60
8.1.2 Force de Mortalité 61
8.2 Table de mortalité 62
8.2.1 Observations à partir de la table de mortalité 64
8.3 Lois pour les durées de vie 66
8.3.1 Loi de Gompertz 66

A Preuves **69**
A.1 Stop-Loss ($\pi_X(d)$) 69
A.2 TVaR 71
A.2.1 Les 3 formes explicites de la $TVaR$ 71
A.3 Sous-additivité de la $TVaR$ 72
A.3.1 À l'aide de la fonction convexe $\varphi(x)$ 73
A.3.2 Avec les fonctions indicatrices 75
A.4 Loi des grands nombres 77
A.5 Somme de v.a. indépendantes d'une loi Poisson Composée . . 78
A.6 Théorème d'Euler 79
A.7 Dérivée de l'écart-type (générale) 80

A.8 Distribution limite de W_n 84

B Base de données Open-Source 86

B.1 Assurance-vie 86

Chapitre 1

Principes de probabilité

1.1 Espérance

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \\
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} S_X(x) dx
\end{aligned}
$$

L'espérance est un opérateur linéaire :

$$E[aX + b] = aE[X] + b \tag{1.1}$$

1.1.1 Espérance d'une fonction indicatrice

Si on a $Y = 1_{\{x \in c\}}$,

$$E[Y] = P(X \in c)$$

$$F_X(x) = E[1_{\{X \leq b\}}]$$

$$S(x) = E[1_{\{X > b\}}]$$

1.2 Espérance tronquée

$$E[X \times 1_{\{X \leq d\}}] = \int_{-\infty}^{d} x f_X(d) dx \tag{1.2}$$

1.3 Variance

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

La variance n'est pas un opérateur linéaire :

$$Var(aX + b) = Var(aX) = a^2 Var(X)$$

1.4 Moments centrés

1. Écart-type :

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

2. Coefficient de variation :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

3. coefficient d'asymétrie

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

4. Coefficient d'applatissement (*Kurtosis*)

$$\gamma_2 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

1.5 Covariance et coefficient de corrélation

On connaît la relation suivante :

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{1.3}$$

On sait que si X et Y sont indépendants, il en résulte que $E[XY] = E[X]E[Y]$, et $Cov(X,Y) = 0$.

Variance d'une somme de v.a. On peut exprimer cette variance sous une forme plus générale, soit

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n} Cov(X_i, X_k) \tag{1.4}$$

Propriétés de la covariance

$$\begin{aligned}
Cov(X,X) &= Var(X)\\
Cov(X,Y) &= Cov(Y,X)\\
Cov(aX,bY) &= abCov(X,Y)\\
Cov(aX+c,bY+d) &= abCov(X,Y)\\
Cov(X,Y+Z) &= Cov(X,Y)+Cov(X,Z)\\
Cov(W+X,Y+Z) &= Cov(W,Y)+Cov(W,Z)+Cov(X,Y)+Cov(X,Z)
\end{aligned}$$

Coefficient de corrélation de Pearson

$$\rho_P(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{1.5}$$

où $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

1.6 Fonction génératrice des moments

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = P(X = x_1)e^{tx_1} + ... + P(X = x_n)e^{tx_n}$$

propriété importante :

$$E[X^n] = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$$

1.7 Fonction génératrice des probabilités

$$P_X(t) = E[t^X] = M_X(\ln(t)) = P(X = x_1)t^{x_1} + ... + P(X = x_n)t^{x_n}$$

Propriétés de la fgp :

$$f_X(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} P_X(t)\Big|_{t=0}$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} P_x(t)\Big|_{t=1}$$

1.8 Fonction Stop-Loss

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= E[\max(X-d;0)] = E[(X-d)_+] \\
&= \int_d^\infty (x-d) f_X(x)dx \\
&= \int_d^\infty S(x)dx
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est à l'annexe A.1 □

En contexte discret :

$$\pi_X(d) = \sum_{u=d}^{\infty} \overline{F}_X(u)$$

Ou une variante :

$$\pi_X(d) = E[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]$$

Voici une propriété concernant la fonction quantile qui peut être intéressante :

$$\overline{F}_X(k) = \pi_X(k) - \pi_X(k+1)$$

1.9 Espérance limitée

$$E[X \Lambda d] = E[\min(X; d)] = \int_{-\infty}^{d} (x - d) f_X(d) dx$$

Relation importante :

$$E[X] = E[\min(X; d)] + E[\max(X - d; 0)]$$

1.10 Fonction quantile

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}$$

1.10.1 Théorème de la fonction quantile

Soit la v.a. X dont la fonction de répartition est F_X et la fonction quantile est F_X^{-1}. Soit $U \backsim Unif(0,1)$. On définit la v.a. Y par $Y = F_X^{-1}(u)$. Alors,$Y \backsim X$.

1.10.2 Propriétés importantes

1. Soit une v.a. X dont l'espérance existe (i.e $E[X] < \infty$)

$$E[X] = \int_0^1 F_X^{-1}(u)du$$

2. Soit une v.a. continue X dont la fonction de répartition est $F_X(x)$ et la fonction quantile F_X^{-1}. Soit la transformation croissante φ. Alors on définit $Y = \varphi(x)$. Alors, on a

$$F_Y^{-1}(u) = \varphi(F_X^{-1}(u)), \quad \text{pour } 0 < u < 1$$

Exemple avec fonction décroissante

(a) Si on a la v.a. X avec une $VaR_\kappa(X)$ et la v.a $Y = e^X$, alors

$$VaR_\kappa(Y) = e^{VaR_\kappa(X)}$$

(b) Si on a la v.a X avec fonction quantile $VaR_\kappa(X)$ et $Y = \frac{1}{X}$, alors

$$VaR_\kappa(Y) = \frac{1}{VaR_\kappa(X)}$$

3. Soit une v.a. continue X avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}. Soit φ une transformation strictement décroissante. Alors, on a

$$F_Y^{-1}(u) = \varphi(F_X^{-1}(1-u)), \quad \text{pour } u \in (0, 1)$$

Exemple avec une fonction décroissante

Soit X une v.a avec fonction quantile $VaR_\kappa(X)$ et $Y = e^{-X}$, alors

$$VaR_\kappa(Y) = e^{-VaR_{1-\kappa}(X)}$$

1.11 Mean Excess-Loss

$$\begin{aligned} e_X(d) &= E[X - d | X > d] \\ &= \frac{\pi_X(d)}{S_X(d)} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Mesures de risque

2.1 $VaR_\kappa(X)$: Value-At-Risk

La mesure a été introduite par la banque commerciale JP Morgan au millieu des années 90.

VaR Value-At-Risk

TVaR Tail Value-At-Risk

La définition : Soit une v.a. X font la fonction de répartition est F_X et la fonction quantile est F_X^{-1}. Alors, la valeur au risque de la v.a. X pour un niveau de confiance $\kappa \in (0,1)$ est définie par

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa), \quad \kappa \in (0,1) \tag{2.1}$$

Critique de la VaR :

Il est à noter que la VaR fournit seulement un point, c'est tout. Elle ne donne aucune information sur le comportement de X au delà de la $VaR_K(X)$. Les valeurs de la $VaR_K(X)$ sont très sensibles au choix de la loi pour X. Cela pose un défi à l'actuaire pour choisir le modèle adéquat pour X.

En réponse à la critique : la TVaR a été inventée.

2.2 $TVaR_\kappa(X)$: Tail Value-At-Risk

Définition : soit la v.a. X où $E[X] < \infty$ avec la fonction de répartition F_X et la fonction quantile F_X^{-1}. Alors, on définit la $TVaR_\kappa(X)$ de X avec un niveau de confiance $\kappa \in (0,1)$ (on prononce kappa).

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du, \quad \kappa \in (0,1) \tag{2.2}$$

Note : on observe que

$$\lim_{\kappa\to\infty} TVaR_\kappa(X) = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{1}{1-k}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du = E[X]$$

2.2.1 Formes alternatives explicites pour la $TVaR_\kappa$

Il existe des formes alternatives [1] pour calculer la TVaR : Premièrement, on peut trouver que

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \tag{2.3}$$

Ensuite, avec la définition de la Stop-Loss (section 1.8), on peut trouver que

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa} \tag{2.4}$$

Et **si X est une v.a. continue**, alors $F_X(VaR_\kappa(X) - \kappa) = 0$, et on peut avoir une autre expression pour la TVaR :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa} \tag{2.5}$$

2.3 Propriétés d'une mesure de risque *cohérente*

Ces propriétés peuvent être vérifiés sur toutes les sortes de mesures de risque, mais ici elle sont appliqués avec la VaR et la TVaR.

On dit qu'une mesure de risque est *cohérente* si elle répond aux 4 propriétés suivantes :

1. Les preuves de ces développements sont en annexe A.2.1

Invariance à la translation

Soit un scalaire $a \in \mathbb{R}$, Alors

$$VaR_\kappa(X+a) = VaR_\kappa(X) + a$$
et
$$TVaR_\kappa(X+a) = TVaR_\kappa(X) + a$$

Homogénéité : Invariance à la multiplication par un scalaire

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, Alors on a

$$VaR_\kappa(X) = aVaR_\kappa(X)$$
et
$$TVaR_\kappa(X) = aTVaR_\kappa(X)$$

Pour les 2 dernières propriétés, elles seront exprimés de façon plus générale.

Monotonocité

On a 2 risques X_1 et X_2 avec $P(X_1 \leq X_2) = 1$.
Une mesure de risque $\rho(X)$ est monotone si

$$\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$$

C'est logique : X_2 prends des plus grosses valeurs que X_1, il est donc cohérent que $\rho(X_1)$ soit plus petite que $\rho(X_2)$.

Sous-additivité

Soit deux risques X_1 et X_2. La mesure de risque sera sous-additive si

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

Démonstration. Les différentes preuves de la sous-additivité de la $TVaR$ sont expliquées à l'annexe A.3. □

Cette propriétés est très importante et liée avec le bénéfice de mutualisation, car si la mesure utilisée est sous-additive, alors $BM_\kappa^\rho(X_1, X_2) \geq 0$

2.3.1 3 autres propriétés souhaitables

Marge de risque positive

Une mesure de risque introduit une marge de risque positive si

$$\rho_\kappa(X) > E[X] \quad , \kappa \in (0,1) \tag{2.6}$$

en supposant que l'espérance existe.

Note : la mesure $VaR_\kappa(X)$ ne satisfait pas cette propriété, mais la mesure $TVaR_\kappa(X)$ oui.

Marge de risque non-excessive

Soit une v.a. X tel que il existe un scalaire $c < \infty$ tel que $P(X < c) = 1$. Une mesure de risque n'introduit pas une marge de risque trop excessive si

$$\rho_\kappa(X) \leq c \quad , \kappa \in (0,1) \tag{2.7}$$

Interprétation : si les coûts d'un contrat n'excèdent pas c, alors la mesure $\rho(X)$ utilisée pour calculer la prime ne doit pas dépasser cette limite. Les mesures VaR et $TVaR$ satisfont à cette propriété.

Marge de risque justifiée

Soit une v.a. X tel que $P(X = c) = 1$. Une mesure de risque introduit une marge de risque justifiée si

$$\rho_\kappa(X) = \rho_\kappa(c) = c \quad , \kappa \in (0,1) \tag{2.8}$$

2.4 $LTVaR_\kappa(X)$: Lower-tail Value-at-Risk

On définit la $LTVAR_\kappa(X)$ comme

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_U(X)du \tag{2.9}$$

Chapitre 3

Mutualisation des risques

3.1 Sommes de variables aléatoires indépendantes

Soit $X_1, ..., x_n$ des variables aléatoires indépendantes. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + ... + X_n$$

L'espérance des coûts du portefeuille :

$$E[S_n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

La variance des coûts du portefeuille [1] :

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \quad \text{(si les } X_i \text{ sont indépendants)} \end{aligned}$$

1. Ce développement découle directement des propriétés de la variance et covariance énoncées à la section 1.5.

On va aussi s'intéresser à la distribution de la somme de ses variables aléatoires. Il y a 3 techniques pour trouver F_{S_n} :

- inversion de la $M_X(t)$
- inversion de la $P_X(t)$
- en utilisant la transformée de laplace ($\mathcal{L}$)

3.1.1 Produit de convolution

Si on a les v.a. X et Y indépendantes, et qu'on cherche la distribution de $S = X + Y$, on peut aussi utiliser la formule du produit de convolution appris en *ACT-1002* :

$$f_s(x) = \int_0^x f_X(u) f_Y(x-u) du \tag{3.1}$$

C'est utile lorsque X et Y ne sont pas *iid*.

Exemple avec le produit de convolution

Si on a $S = X_1 + X_2$ avec X_1 et X_2 qui sont des v.a. indépendantes $X_i \backsim Exp(\beta_i)$ et $\beta_1 \neq \beta_2$. On peut trouver la fonction de densité $f_S(x)$:

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_0^x \beta_1 e^{-\beta_1 y} \beta_2 e^{-\beta_2 (x-y)} dy \\
&= \beta_1\beta_2 \int_0^x e^{-\beta_1 y - \beta_2 x + \beta_2 y} dy \\
&= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 x} \int_0^x e^{-y(\beta_1-\beta_2)} dy \\
&= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 x} \left[\frac{e^{-y(\beta_1-\beta_2)}}{-(\beta_1-\beta_2)} \right]_0^x \\
&= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 x} \left(\frac{e^{-x(\beta_1-\beta_2)}}{-(\beta_1-\beta_2)} + \frac{e^0}{\beta_1-\beta_2} \right) \\
&= \beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 x} \left(\frac{e^{-x\beta_1+x\beta_2}}{-(\beta_1-\beta_2} + \frac{1}{\beta_1-\beta_2} \right) \\
&= \frac{\beta_1\beta_2 e^{-x\beta_1 + \cancel{x\beta_2 - x\beta_2}}}{\underbrace{\beta_2-\beta_1}_{\text{inversion signe négatif}}} + \frac{\beta_1\beta_2 e^{-\beta_2 x}}{\beta_1-\beta_2} \\
f_S(x) &= \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\beta_1 e^{-\beta_1 x} + \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\beta_2 e^{-\beta_2 x}
\end{aligned}$$

Cette fonction de densité correspond à une loi $ErlangG(\beta_1, \beta_2)$, soit la somme de n Exponentielle indépendantes.

3.2 Transformée de Laplace–Stieltjes

Soit une v.a. positive X. La transformée Laplace–Stieltjes de la v.a X est définie par

$$\mathcal{L}_X(t) = E[e^{-tX}] = M_X(-t) \quad t \geq 0$$

L'avantage de la transformée est qu'elle existe toujours, car l'espérance de cette exponentielle converge toujours.

3.2.1 Propriétés importantes

(1) Soit des v.a. positives ind. $X_1, ..., X_n$. On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S_n}(t) &= E[e^{-tS_n}] \\
&= E[e^{-t(X_1+...+X_n)}] \\
&= E[e^{-tX_1}...e^{-tX_n}] \\
&= E[e^{-tX_1}]...E[e^{-tX_n}] \quad \text{parce que les v.a. sont ind.} \\
&= \mathcal{L}_{X_1}(t)...\mathcal{L}_{X_n}(t)
\end{aligned}$$

3.3 Porte-feuille homogène de risques indépendants

Hypothèse : $X_1, ..., X_n$ sont des variables **indépendantes** et **identiquement distribuées** (*iid*).

Convention : *id* : $X_i \backsim X, i = 1, 2, ..., n$.

On définit une nouvelle v.a. $w_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}S_n$, où w_n est la part allouée à un contrat des coûts totaux du portefeuille.

$$E[w_n] = E[\frac{1}{n}S_n] = \frac{1}{n}E[S_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Mais puisque les v.a. sont *iid*, on peut dire que

$$E[X_i] = E[X] \Leftrightarrow E[w_n] = \frac{1}{n}nE[X] = E[X]$$

On peut trouver la variance de w_n, en faisant l'hypothèse que $Var(X_i) = Var(X) < \infty$

$$\begin{aligned}
Var(w_n) &= Var(\frac{1}{n}S_n) \\
&= \frac{1}{n^2}Var(S_n) \\
&= \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} x_i) \\
&\overset{iid}{=} \frac{1}{n^2}nVar(X) \\
&= \frac{Var(X)}{n}
\end{aligned}$$

Si on pose $n_1 > n_2$,

$$Var(w_{n_1}) = \frac{Var(x)}{n_1} < \frac{1}{n_2}Var(X) = Var(w_{n_2})$$

Exemple

Soit les v.a. *iid* $X_1, ..., X_n$ où $X_i \backsim Gamma(\alpha, \beta)$. Quelle est la loi de Wn ?

Pour répondre à cette question, on a recours à la transformée de Laplace, avec $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{w_n}(t) &= E[e^{-tw_n}] \\
&= E[e^{-t(\frac{1}{n}S_n)}] \\
&= E[e^{-\left(\frac{t}{n}\right)S_n}] \\
&= E[e^{-\left(\frac{t}{n}\right)(X_1+...+X_n)}] \\
&= E[e^{-\left(\frac{t}{n}\right)X_1}]...E[e^{-\left(\frac{t}{n}\right)X_n}] \\
&= E[e^{-\left(\frac{t}{n}\right)X}]^n \quad \text{car les v.a. sont } iid
\end{aligned}$$

Comme $X \backsim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $\mathcal{L}_X(s) = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^{\alpha}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{w_n}(t) &= \left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{t}{n}}\right)^{\alpha n} \\
&= \left(\frac{\beta n}{\beta n + t}\right)^{\alpha n}
\end{aligned}$$

Alors, $w_n \backsim Gamma(\alpha n, \beta n)$

3.4 Loi des grands nombres

3.4.1 Version de *Tchebychev*

Soit les v.a. *iid* $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \backsim X$ et $E[X^m] < \infty$ et $Var(X) < \infty$pour $m = 1, 2, ...$ Alors

$$\lim_{m\to\infty} F_{w_n}(x) \longrightarrow F_Z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

où Z est une v.a. où $P(Z = E[X]) = 1$

Cette version de la Loi des grands nombres est valide si $E[X] < \infty$ et $Var(X) < \infty$. Est-ce que la même phénomène existe malgré une variance qui n'existe pas ? OUI !

3.4.2 la Loi des grands nombres, Version 2.0

Soit des v.a. **positives** *iid* $X_1, ..., X_n$ (avec $X_i \backsim X$ pour $i = 1, 2, ..., n$) et $E[X] < \infty$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} F_{w_n}(x) \longrightarrow F_Z(x) \quad x \geq 0 \tag{3.3}$$

où Z est une v.a. tel que $P(Z = E[X]) = 1.$ [2]

2. la preuve ce cet énoncé ce trouve à l'annexe A.4. Cette preuve est importante à savoir pour l'examen intra et l'examen final.

Remarque : Soit les v.a. *iid* $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \backsim X$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$. Alors

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

parce que les v.a. sont *iid*, on peut poser l'égalité suivante :

$$= nE[X]$$

Alors, on suppose que $S_n = nX \rightarrow w_n = X$. Et donc $\mathcal{L}_{w_n}(t) = \mathcal{L}_X(t)$.

3.5 Approximation normale et TCL

Le théorème central limite mentionne qu'une somme de variables aléatoires, au-dessus d'un certains nombre d'observations, tend à suivre une loi normale $T \backsim N(\mu, \sigma)$. Alors,

$$VaR_\kappa(S_n) \approx VaR_\kappa(T) = \mu_T + \sigma_T \Phi^{-1}(\kappa)$$
$$TVaR_\kappa(S_n) \approx TVaR_\kappa(T) = \mu_T + \sigma_T \left(\frac{1}{1-\kappa}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\Phi^{-1}(\kappa)}{2}\right)^2}$$

Toutefois, l'approche n'est pas recommandé en actuariat, car elle ne fournit pas une bonne approximation pour des valeurs élevées de κ ou x, c'est-à-dire dans la queue droite. Toutefois, une autre forme d'approximation est utilisée à la section **??**

3.6 Mutualisation des risques et mesures de risques

Soit un portefeuille de contrats d'assurances. Les coûts sont définis par les v.a. positives $X_1, ..., X_n$. On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$ et φ une mesure de risque. On peut utiliser la mesure $\varphi(S_n)$ pour déterminer le capital économique associé au portefeuille.

3.6.1 Capital économique

Le capital économique est défini par

$$CE_{\kappa}(S_n) = \varphi(S_n) - E(S_n) \tag{3.4}$$

La capital économique correspond à un coussin que la compagnie d'assurance établit pour faire face aux surprises.

3.6.2 Bénéfice de la mutualisation

Il est possible de quantifier le bénéfice de la mutualisation avec la calcul suivant :

$$BM(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) - \varphi(S_n) \tag{3.5}$$

Évidemment, on veut avoir un bénéfice de mutualisation positif, sans quoi il n'y a pas d'avantage à mettre les risques en communs.

3.6.3 Probabilité de ruine

LA probabilité de ruine est une mesure de solvabilité qui permet d'évaluer le risque global d'un portefeuille de risque. C'est la probabilité que la compagnie ne rencontre pas ses engagements au cours de la période donnée, i.e.

$$\psi_n(u) = P\left(S_n > \sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right) = 1 - F_{S_n}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right) \tag{3.6}$$

u : capital initial au début de la période

π_i : prime prélevée pour le contrat i pendant la période

S_n : engagements totaux pour la période

Remarque
Si les risques peuvent avoir une forme d'indépendance, alors il faut analyser la mutualisation d'une autre méthode. Ce sujet est discuté au chapitre 7

Chapitre 4

Simulation stochastique

On veut utiliser les méthodes de simulation (apprises en ACT-2002) pour approximer toute quantité définie en fonction de $S_n = X_1 + ... + X_n$.

4.1 Méthode de simulation Monte Carlo

On suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et continues. On définit $S = X_1 + ... + X_n$, il en suit que la v.a. S est aussi continue.

Algorithme

Simulation :

1. On produit m réalisations de S : $S^{(1)}, ..., S^{(m)}$
2. On trie les réalisations (on identifie nos statistiques d'ordre) :
$$S^{[1]} < S^{[2]} < ... < S^{[n]}$$
3. On fixe κ et m tel que $\kappa, m \in \mathbb{R}$. Pour notre exemple, $m = 1000$ et $\kappa = 0.99$.
4. On peut calculer la VaR :
$$VaR_\kappa(S) = VaR_{0.99}(S) \approx S^{[\kappa m]} = S^{[990]}$$
5. On peut aussi calculer la $TVaR$:
$$TVaR_\kappa(S) \approx \frac{1}{m(1-\kappa} \sum_{j=\kappa m+1}^{m} S^{[j]} = \frac{1}{10}(S^{[991]} + ... + S^{[1000]})$$

Remarques

- les valeurs des approximations de la VaR et de la $TVaR$ par la méthode de Monte Carlo sont variables quand κ est élevé.
- On peut réduire cette variabilité en augmentant le nombre m de réalisations
- On peut aussi utiliser des méthodes de réduction de variance (acceptation-rejet)

Chapitre 5

Modèles des coûts en assurance IARD

Caractéristiques

- Soit X est les coûts pour un contrat d'assurance de dommage ou pour une ligne d'affaires.
- Pour un contrat d'assurance d'assurance de dommages individuel, $P(X = 0) > 90\%$
- La distribution de X comporte souvent une masse de probabilité non-nulle à 0 et une portion continue
- La v.a. X est positive, c'est-à-dire $P(X \geq 0) = 1$
- Un contrat d'assurance IARD peut conduire à plusieurs sinistres
- En assurance habitation individuelle et propriété commerciale, un contrat peut offrir des protections pour différents risques : eau, feu, vol, vandalisme, etc. Même chose pour l'automobile.
- Le modèle de base en assurance utilise une somme aléatoire de v.a. pour définir X
- La loi d'une somme aléatoire de v.a. est appelée une distribution composée

5.1 Modèle de base pour X (fréquence-sévérité)

On définit la v.a. X par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

où M est le nombre de sinistres et B_k le montant du k$^{\text{e}}$ sinistre, $k = 1, 2, ...$

Hypothèses On doit évidemment faire 2 hypothèses :

- $\underline{B} = \{B_k, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. *iid*
- $\underline{B}$ et M sont indépendants

5.1.1 Espérance de X

$$E[X] = E[B]\,E[M] \tag{5.2}$$

La preuve de ce résultat découle de l'espérance totale.

5.1.2 Variance de X

$$Var(X) = E[M]\,Var(B) + Var(M)\,(E[B])^2 \tag{5.3}$$

La preuve de ce résultat découle de la variance totale.

5.1.3 Fonction de répartition de X

$$F_X(x) = P(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{B_1 + ... + B_k}(x) P(M = k) \tag{5.4}$$

Note Parfois, lorsqu'on doit évaluer la borne supérieure de la somme de la formule, on pose k_0 tel que $P(M > k_0) = \epsilon = 10^{-6}, 10^{-8}$ (un chiffre très petit).

5.1.4 La $VaR_\kappa(X)$ pour X

2 options :

(1) Si $\kappa < P(M = 0)$, alors la $VaR_\kappa(X)$ sera égale à zéro.

(2) Sinon, on doit isoler la VaR un peu comme on procède pour les expressions de fonction quantile en se basant sur la formule de la fonction de répartition vue à la section 5.1.3

Remarque 1 Il arrive que la v.a. M est telle que $P(M > 1) = 0$. Si c'est le cas, il n'y a pas d'expression analytique. Toutefois, on peut **utiliser un outil d'optimisation nuérique** pour évaluer approximativement la $VaR_\kappa(X)$

Remarque 2 Il n'est pas nécessaire d'imposer la contrainte $E[X] < \infty$ pour calculer la $VaR_\kappa(X)$ de ce modèle.

5.1.5 La $TVaR_\kappa(X)$ pour X

Remarque Pour calculer la $TVaR_\kappa(X)$, on doit imposer la contrainte de $E[X] < \infty$

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} P(M=k)E\Big[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > VaR_\kappa(X)\}}\Big] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)\Bigg)$$

Remarque Si notre v.a. B est continue et positive, alorx X est mixte avec une masse de probabilité à zéro, puis continue par la suite. Si $\kappa < P(M = 0)$, alors la $VaR_\kappa(X) = 0$ et la deuxième partie du terme de la $TVaR$ tombe. Si $\kappa > VaR_\kappa(X)$, alors $F_X(VaR_\kappa(X) = \kappa$ et donc la deuxième partie de la $TVaR$ tombe, ce qui nous donne en tout temps l'expression suivante dans un contexte où B est continue :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{\sum_{k=1}^{n} P(M=k)E\Big[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > VaR_\kappa(X)\}}\Big]}{1-\kappa} \tag{5.5}$$

5.1.6 La simulation pour les calculs

Lorsque $P(M > 1) > 0$, on peut avoir recours à la simulation pour évaluer F_X, $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$ ou $E[\varphi(X)]$.

Algorithme

Voici l'algorithme pour faire de la simulation, dans un contexte où il y a une loi pour la fréquence (M) et une loi pour la sévérité (B) :

1. On produit un nombre important de réalisations de $U^{(j)}$ afin d'en avoir assez pour produire toutes nos réalisations de $M^{(j)}$ et $X^{(j)}$ Suggestion : Produire $m \times F_M(0.99)$ nombre de U.
2. On produit la réalisation $M^{(j)}$ de M
   - Si $M^{(j)} = 0$, la réalisation $X^{(j)} = 0$
   - Si $M^{(j)} > 0$, on produit les réalisations $B_1^{(j)}, ...B_{M(j)}^{(j)}$ et $X^{(j)} = \sum_{k=1}^{M^{(j)}} B_k$
3. on répète la boucle 1. pour $j = 1, 2, ...$

Attention !

Il faut introduire un compteur pour nos nombres U, car on n'a pas le droit d'utiliser 2 fois le même nombre U pour simuler un chiffre, que ce soit un M ou un B.

5.1.7 $\mathcal{L}_X(t)$ de Laplace pour X

Rappel La transformée est intéressante parce qu'elle existe pour <u>TOUTE</u> les lois de B. Ce n'est pas toujours le cas avec la fonction génératrice des moments ($M_X(t)$) par contre.

Comme pour toutes les autres expressions de X, on conditionne sur M :

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_M\Big(\mathcal{L}_B(t)\Big) \tag{5.6}$$

5.2 Lois de sévérité pour B

Rappel B représente les coûts reliés à un sinistre. Les principales lois que l'on voit pour représenter B en assurance IARD sont :

- $Gamma(\alpha, \beta)$: pour l'assurance automobile
- $LogNorm(\mu, \sigma)$: pour les coûts d'incendies, catastrophes, RC, etc.
- $Pareto(\alpha, \lambda)$: idem que Gamma

5.3 Bernouilli comme loi de fréquence M

Lorsque M est représentée par la loi de Bernouilli, on a le scénario suivant :

$$X = \begin{cases} B & , M = 1 \\ 0 & , M = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Mais il y a 2 façon de voir le sinistre : l'approche indemnitaire ou l'approche forfaitaire

5.3.1 Approche indemnitaire

L'approche indemnitaire suppose que l'évènement se produit une seule fois au maximum dans l'année. Alors, la forme de F_X, $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ sont quelques peu différentes :

Fonction de répartition de X

$$F_X(x) = (1 - q) + qF_B(x) \tag{5.8}$$

Value-at-risk

$$VaR_\kappa(X) = \begin{cases} 0 & , 0 < \kappa < (1 - q) \\ VaR_{\frac{\kappa-(1-q)}{q}}(B) & , 1 - q < \kappa < 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

C'est logique : si la κ est plus petit que la masse de probabilité à $M = 0$, alors la plus petite valeur pour laquelle la fonction de répartition est $\geq \kappa$ est 0.

Tail Value-at-risk

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{qE\Big[B \times 1_{\{B>VaR_\kappa(X)\}}\Big] + VaR_\kappa(X)\Big(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\Big)}{1-\kappa} \tag{5.10}$$

5.3.2 Approche forfaitaire

Le modèle a aussi une approche où $M = 0,1$ seulement, mais dans un autre contexte :

$$I = \begin{cases} 1 & \text{, si au moins un sinistre se produit} \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

5.4 Aggrégation des risques IARD

5.4.1 Quelques exemples simples

Exemple 1

Soit les v.a. X_1 et X_2 où $X_i \sim BinComp(1, q_i; F_{B_i})$ et $B_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta)$. Quelle est la loi de S ? Quelle est l'expression de F_s ?

Pour répondre à cette question, on peut utiliser les fonctions génératrices des moments de X_1 et X_2, et on a

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendants)} \\ &= (1 - q_1 + q_1 M_{B_1}(t))(1 - q_2 + q_2 M_{B_2}(t)) \\ &= (1-q_1)(1-q_2) + (1-q_1)q_2 M_{B_2}(t) \\ &+ (1-q_2)q_1 M_{B_1}(t) + q_1 q_2 M_{B_1}(t) M_{B_2}(t) \\ F_S(x) &= (1-q_1)(1-q_2) + (1-q_1)q_2 F_{B_2}(x) \\ &+ (1-q_2)q_1 F_{B_1}(x) + q_1 q_2 F_{B_1}(x) F_{B_2}(x) \end{aligned}$$

On sait que si on a $B_1 \sim Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $B_2 \sim Gamma(\alpha_2, \beta)$, on a $B_1 + B_2 \sim Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} F_S(x) = &(1-q_1)(1-q_2) + (1-q_1)q_2 H(x; \alpha_2, \beta) \\ &+ (1-q_2)q_1 H(x; \alpha_1, \beta) + q_1 q_2 H(x; \alpha_1 + \alpha_2, \beta) \end{aligned}$$

où $H(x; \alpha, \beta)$ la fonction de répartition d'une loi $Gamma(\alpha, \beta)$.

Exemple 2

Refaire l'Exemple 1 avec $B_1 \sim Exp(\beta_1)$ et $B_2 \sim Exp(\beta_2)$.

5.4.2 Somme de v.a. de la loi Poisson composée

Si $X_i \sim PoisComp(\lambda_i; F_{B_i})$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim PoisComp(\lambda_S, F_D) \tag{5.11}$$

où $\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Démonstration. La preuve détaillée se trouve dans l'annexe A.5. □

Remarques

(1) Ce résultat général existe *seulement pour la somme de v.a. indépendantes de la loi Poisson Composée.*

(2) Selon la représentation obtenue de la v.a $.S$, si un sinistre survient, le montant D sera égal à B_i avec une probabilité c_i, $i = 1, 2, ..., n$

5.4.3 Somme de v.a. Binomiale négative composée

Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où

$$X \sim BNComp(r_i, q; F_B) \quad , i = 1, ..., n$$

Alors on aura

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BNComp(r_S, q, F_B) \quad \text{où } r_S = \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{5.12}$$

5.4.4 Somme de v.a. Binomiale composée

Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où

$$X \sim BinComp(n_i, q; F_B) \quad , i = 1, ..., n$$

Alors on aura

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BinComp(n_S, q, F_B) \quad \text{où } n_S = \sum_{i=1}^{n} n_i \tag{5.13}$$

5.4.5 Approximation par les moments (fondée sur la loi normale

La méthode d'Approximation basée sur la loi normale (approximation normale) permet d'estimer la valeur de S où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec X qui suit un modèle de base fréquence-sévérité. On peut approximer S par $T \sim N(E[S], Var(S))$ et donc calculer certaines quantités-clés :

$$F_S(x) \simeq F_T(x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \tag{5.14}$$

$$VaR_\kappa(S) \simeq VaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} VaR_\kappa(Z) \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &\simeq TVaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} TVaR_\kappa(Z) \\ &= E[S] + \frac{\sqrt{Var(S)}}{(1-\kappa)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(VaR_\kappa(Z))^2}{2}} \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.5 Notions supplémentaires sur les lois de fréquence

5.5.1 Lois de Poisson mélange

Soit une v.a. Θ qui peut être discrète ou continue, avec $E[\Theta] = 1$. On a la v.a. M qui représente le nombre de sinistres.

$$M | \Theta = \theta \sim Pois(\lambda\theta) \tag{5.17}$$

Espérance de M

$$\begin{aligned} E[M] &= E_\Theta[E[M|\Theta = \theta]] \\ &= E[\lambda\Theta] \\ &= \lambda E[\Theta] \end{aligned}$$

Variance de M

$$\begin{aligned} Var(M) &= E[Var(M|\Theta)] + Var(E[M|\Theta]) \\ &= E[\lambda\Theta] + Var(\lambda\Theta]) \\ &= \lambda E[\Theta] + \lambda^2 Var(\Theta) \\ &= \lambda + \lambda^2 Var(\Theta) \end{aligned}$$

Interprétation : la multiplication du paramètre λ par la v.a. Θ ajoute de l'incertitude par rapport à la distribution de M. Cette incertitude se traduit par une augmentation de la variabilité du nombre de sinistre.

Fonction de masse de probabilité de M Si Θ est une v.a. discrète :

$$\begin{aligned} P(M = k) &= \sum_{j=1}^{m} P(M = k|\Theta = \theta_j)P(\Theta = \theta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{(\lambda\theta_j)^k e^{-j\lambda_j}}{k!} P(\Theta = \theta_j) \end{aligned}$$

Si Θ est une v.a. continue :

$$\begin{aligned} P(M = k) &= \int_0^\infty f_{M|\Theta=\theta}(k) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda\theta)^k e^{-\lambda\theta}}{k!} f_\Theta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Fonction génératrice des moments

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_M(s) &= E[s^M] \\ &= E[E[S^M|\Theta]] \\ &= E[e^{\lambda\theta(s-1)}] \\ &= M_\Theta(\lambda(s-1))\end{aligned}$$

Exemple

Soit $\Theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$, où β est fixé de telle sorte que $E[\Theta] = 1$. On peut déterminer la variance, la fonction génératrice des probabilités et trouver la loi de M :

(1) Variance de M

$$\begin{aligned}Var(M) &= \lambda(1 + \lambda Var(\Theta)) \\ &= \lambda(1 + \lambda\frac{\alpha}{\alpha^2}) \\ &= \lambda\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

(2) fgp de M :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_M(s) &= E[S^M|\Theta] \\ &= M_\Theta(\lambda(s-1)) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - \lambda(s-1)}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha - \lambda(s-1)}\right)^\alpha \quad \text{Binomiale négative ?}\end{aligned}$$

(3) On pose $r = \alpha$.

(4) On pose $E[\Theta] = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{r}{r} = 1$

(5) On pose

$$\begin{aligned} E[M] &= \lambda \frac{r}{r} \\ &= r\left(\frac{1-q}{q}\right) \\ &= \frac{\lambda}{r} \\ &= \frac{(1-q)}{r} \end{aligned}$$

(6) Alors, la fgp de M devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M(t) &= \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(s-1)}\right)^r \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{(1-q)}{q}(s-1)}\right)^r \\ &= \left(\frac{q}{q-(1-q)(s-1)}\right)^r \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)s}\right)^r \end{aligned}$$

(7) Alors, $M \sim BinN\acute{e}g(r, q)$. La loi (mélange) Poisson-Gamma correspond donc à la loi binomiale négative.

Algorithme de simulation de nombre M Poisson-mélange

1. Produire une réalisation $\theta^{(j)}$ de Θ.
2. Produire une réalisation $M^{(j)}$ de M, où

$$M|\Theta = \theta_j \sim Pois(\lambda\theta^{(j)}) \quad , j = 1, 2, ..., m$$

5.5.2 Loi de fréquence avec modification de la masse à $k = 0$

Il arrive que les valeurs de la fonction de masse empirique pour $k = 1, 2, ...$ sont semblables aux valeurs d'une fonction de masse de probabilité d'un loi paramétrique connue. Par contre, les masses diffèrent à $k = 0$.

Présence d'un déductible La présence d'un déductible fait en sorte que l'assuré ne réclamera pas dans certains cas (pour empêcher sa prime de monter au renouvellement). Il y a donc une proportion α d'assurés qui vont réellement réclamer si jamais il arrive quelque chose. Alors,

$$P(M = k) = \begin{cases} (1-\alpha) + \alpha f^*(0) & k = 0 \\ \alpha f^*(k) & k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{5.18}$$

où $f^*(k)$ est une fonction de masse de probabilité d'une loi de probabilité connue.

5.6 Notions additionnelles sur les lois de sinistres

5.6.1 *Heavy-tailed* vs *Light-tailed*

Critère Pour déterminer si la loi est considérée *Heavy-tailed* ou *Light-tailed*, on valide avec la condition[1] suivante :

$$\lim_{x \to \infty} e^{tX} \overline{F}_B(x) < \infty$$

- Si $\lim_{x \to \infty} e^{tX} \overline{F}_B(x) \to \infty$, alors la distribution est *Heavy-Tailed*.
- Si $\lim_{x \to \infty} e^{tX} \overline{F}_B(x) < \infty$, alors la distribution est *Light-Tailed*.

Exemple de lois

- Lois *Light-Tailed* : Gamma, Exponentielle, Weibull (avec $\tau > 1$), Erlang, mélange d'exponentielles et loi Erlang généralisée.

1. On valide cette quantité, car il s'agit du premier terme de l'intégrale par partie, lorsqu'on développe l'expression de la fgm.

- Lois *Heavy-Tailed* : Pareto, Burr, Log-Logistique, Log-normale, Log Gamma.

5.6.2 Lois Subexponentielles

Rappel sur le comportement de $\max(X_1, ..., X_n)$.

Soit X_1 et X_2 des v.a. *iid.* Alors,

$$\begin{aligned}
P(\max(X_1, X_2) > x) &= 1 - P(\max(X_1, X_2) \leq x) \\
&= 1 - P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\
&= 1 - P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \quad \text{(car les v.a. sont indépendantes)} \\
&= 1 - (F_X(x))^2 \quad \text{(Car les v.a. sont } id\text{)} \\
&= 1 - \left(1 - \overline{F}_X(x)\right)^2 \\
&= 1 - \left(1 - 2\overline{F}_X(x) + (\overline{F}_X(x))^2\right) \\
&= \cancel{1 + 1} + 2\overline{F}_X(x) - (\overline{F}_X(x))^2 \\
&= 2\overline{F}_X(x) - \left(\overline{F}_X(x)\right)^2
\end{aligned}$$

On peut alors poser la définition pour le cas $n = 2$ ainsi que le cas général ($n = 2, 3, 4...$).

Définition

F_X appartient à la classe des loi subexponentielles si

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim P(\max(X_1, X_2) > x) \sim 2\overline{F}_X(x) \tag{5.19}$$

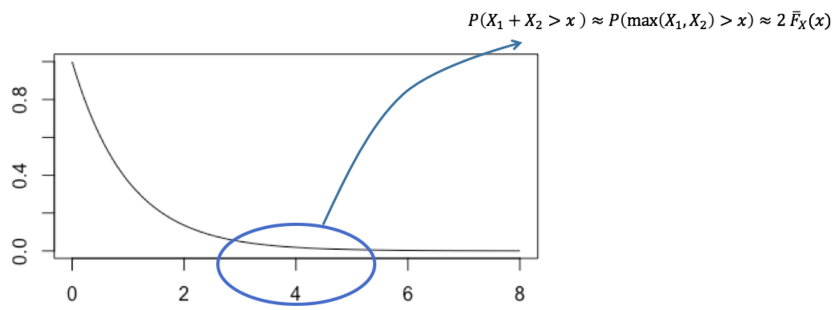
Définition générale

F_X appartient à la classe des loi subexponentielles si

$$P(X_1 + ... + X_n > x) \sim P(\max(X_1, ..., X_n) > x) \sim n\overline{F}_X(x) \quad (5.20)$$

et qu'il répond aux conditions suivantes :

- x est grand
- $X_1, ..., X_n$ sont des v.a. *iid*



Remarque La loi Log-normale n'est pas sub-exponentielle.

Exemple 1

Soit $X_1 \sim Pareto(1.5, 0.5)$ et $X_2 \sim Pareto(1.5, 0.5)$. Si x est grand, on peut estimer $\overline{F}_{X_1+X_2}(t)$ par

$$\overline{F}_{X_1+X_2}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 2\overline{F}_X(x) \approx \left(\frac{0,5}{0,5+t}\right)^{1,5}$$

Exemple 2

Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Exp(\beta)$ et $X_2 \sim Pareto(1,5; 0,5)$. Alors,

$$\overline{F}_{X_1+X_2}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \overline{F}_X(x)$$

Interprétation : pour des grandes valeurs de x, la distribution exponentielle ne contribue plus.

Application à X d'une loi composée Le résultat (5.20) nous permet d'estimer la fonction de survie de X, lorsque X suit une loi composée avec B qui appartient à une classe sub-exponentielle :

Si X obéit à une loi composée avec M la v.a. et fréquence et B la loi de sinistre qui est de classe exponentielle, alors on peut estimer la fonction de survie de X pour des grandes valeurs de X avec

$$\overline{F}_X(x) \approx E[M]\overline{F}_B(x) \tag{5.21}$$

Remarques additionnelles sur la loi de Pareto

La loi de Pareto est fréquemment utilisée pour modéliser les coûts futurs d'une catastrophe naturelle. Un document publié par la Swiss Re donne quelques exemples de paramètres α fixé pour certains types de catastrophes :

α	Type de catastrophe
1	Tremblement de terre ou tempête [a]
2	Incendies
1,5	Inceidie pour une industrie
2,5	Coûts en responsabilité civile suite à un accident automobile.
1,8	Coûts en responsabilité professionnelle
2	Assurance accident de travail

a. Si $E[X] < \infty$.

5.7 Catastrophe et partage des risques

Soti la v.a. S_i représentant les coûts pour la catastrophe $i \quad , i = 1, ..., n$. Pour simplifier, on suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont *iid*. On considère n réassureurs dont les capacités financières sont semblables.

Scénario 1 Chaque réassureur assume les coûts d'une seule catastrophe.

Scénario 2 Chaque réassureur prend une part $\frac{1}{n}$ des coûts X_i de la catastrophe i.

Si on représente les coûts d'un réassureurs selon le scénario choisi :

$$S^{\#1} = X_1$$
$$S^{\#2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Si on se concentre sur les propriétés de chaque scénario...

(1) l'espérance

$$E[S^{\#1}] = E[S^{\#2}]$$

(2) la variance

$$Var(S^{\#1}) = Var(X)$$
$$Var(S^{\#2}) = \frac{1}{n}Var(X)$$

On constate que la variabilité des coûts diminue à mesure que le nombre de réassureurs augmente. En augmentant le nombre de réassureur, on augmente la capacité financière du marché de la réassurance à prendre en charge des risques catastrophiques. Mais On ne peut pas augmenter le nombre de réassureurs vers l'infini. Quand le marché de la réassurance a atteint ses limites, les réassureurs se sont tournés vers les marchés financiers en émettant des produits structurés, dont le sous-jacent est lié à des catastrophes.

(3) la $TVaR$: on peut montrer que

$$TVaR_\kappa(S^{\#2}_{n_2}) \leq TVaR_\kappa(S^{\#2}_{n_1}) \quad \kappa \in (0,1) \quad \text{et } 1 \leq n_1 \leq n_2$$

Note Cette approche *partage des risques* est aussi appliquée dans le contexte où de nouveaux produits sont assurés.

Chapitre 6

Allocation du capital et du risque

6.1 Introduction

On considère le portefeuille de n risques (*contrats*) en assurance sur une période fixe. Les coûts associés au risque i sont définis par la v.a. X_i, $i = 1, ..., n$. Les coûts totaux sont définis par la v.a. S où $S = X_1 + ...X_n$. On mesure (ou quantifie) le risque du portefeuille par la mesure de risque $\rho(S)$. Pour ce chapitre, on considère que le besoin en capital du portefeuille correspond à $\rho(S)$.

Part allouée La part allouée au risque X_i est définie par $c_i = \rho(X_i, S) \quad i = 1, ..., n$.

Ce chapitre a pour objectif de montrer une méthode d'allocation basée sur le Théorème d'Euler.

Illustration de la méthode On illustre le résultat de la méthode dans l'exemple suivant, en ayant recours à $/rho = VaR$ et $p = TVaR$.

Exemple

Soit un couple de v.a. X_1, X_2. On a défini $S = X_1 + X_2$ et on a produit les réalisations suivantes de X_1, X_2 et S :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	20	400	420
2	200	150	250
3	320	180	500
4	40	120	160
5	210	30	240

On peut calculer

$$\begin{aligned} V\tilde{a}R_{0,60}(S) &= S^{[3]} = 350 \\ Tv\tilde{a}R_{0,80}(S) &= \frac{S^{[4]} + S^{[5]}}{2} = \frac{420 + 500}{2} = 460 \end{aligned}$$

Contexte 1 : on utilise la mesure $VaR_{0,60}(S)$ pour calculer le capital. Alors,

$$\begin{aligned} \rho(S) = VaR_{0,60}(S) &\approx V\tilde{a}R_{0,60}(S) = 350 \\ c_1 &\approx \tilde{c}_1 = 200 \\ c_2 &\approx \tilde{c}_2 = 150 \end{aligned}$$

Contexte 2 : on utilise la mesure $TVaR_{0,60}(S)$ pour calculer le capital. Alors,

$$\begin{aligned} \rho(S) = TVaR_{0,60}(S) &\approx Tv\tilde{a}R_{0,80}(S) = 460 \\ c_1 &\approx \tilde{c}_1 = \frac{20 + 320}{2} = 170 \\ c_2 &\approx \tilde{c}_1 = \frac{400 + 80}{2} = 290 \end{aligned}$$

Note : $\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 460 \leq TVaR_{0,60}(S)$, ce qui respecte le principe de sous-additivité de la $TvaR$.

6.2 Propriété d'homogénéité

Soit une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (i.e. une fonction qui prends des valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et qui produit des valeurs dans $\mathbb{R}$).

Définition La fonction ϕ est dire homogène d'ordre n si on a

$$\phi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^n \phi(x_1, ..., x_n) \quad \text{avec } \lambda > 0 \tag{6.1}$$

Exemple avec ϕ d'ordre 1

Soit $\phi(x_1, ..., x_m) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)\lambda a_1 x_1 + ... + \lambda a_n x_n \\ &= \lambda(a_1 x_1 + ... + a_n x_n) \\ &= \lambda \phi(x_1, ..., x_n)\end{aligned}$$

ϕ est donc une fonction homogène d'ordre 1 (voir l'exposant du lambda).
Attention ! si $\phi(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1 x_1 + ... a_n x_n$, avec $a_0 \neq a_1$, alors ϕ n'est pas homogène.

Exemple avec ϕ d'ordre n

Soit $\phi(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 ... x_n$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= \lambda x_1 ... \lambda x_n \\ &= \lambda^n (x_1 ... x_n) \\ &= \lambda^n \phi(x_1, ..., x_n)\end{aligned}$$

Dans cet exemple, ϕ est une fonction homogène d'ordre n.

Remarque Les fonctions $e^{x_1, ..., x_n}$ et $\ln(x_1, ..., x_n)$ ne sont pas homogènes.

6.3 Théorème d'Euler

Définition Soit une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogène d'ordre n. Alors, pour toute fonction ϕ dérivable partout, on a

$$n\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \phi(x_1, .., x_n)}{\partial x_i}$$

Démonstration. La preuve est faite dans l'annexe A.6 (page 79). □

Remarque Pour une fonction ϕ homogène d'ordre 1, on a

$$\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \phi(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

où $c_i = x_i \frac{\partial \phi(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \quad i = 1, ..., n$

Exemple

Soit $\phi(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$. On applique le théorème d'Euler :

1. $$\frac{\partial \phi(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} = a_i \quad , i = 1, ..., n$$

2. $$c_i = x_i \frac{\partial \phi(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} = x_i a_i$$

   c_i est donc la *contribution* du terme x_i.

6.3.1 Version modifiée

Au fin de notre utilisation, il existe une version *modifiée* de la relation du théorème d'Euler :

$$\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial \phi(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n)}{\partial \lambda_i} \right|_{\lambda_1 = ... \lambda_i = ... \lambda_n - 1} \tag{6.2}$$

Exemple

Soit la fonction homogène d'ordre 1 $\phi(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$.

$$\begin{aligned}
c_i &= \frac{\partial \phi(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_)}{\partial \lambda_i}\bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_i=...=\lambda_n=1} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(a_1\lambda_1 x_1 + ... + a_n\lambda_n x_n)\bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_i=...=\lambda_n=1} \\
&= a_i x_i\bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_i=...=\lambda_n=1} \\
&= a_i x_i
\end{aligned}$$

6.4 Application de la variante du théorème d'Euler

On revient au contexte présenté à la section 6.1. Pour appliquer le théorème d'Euler, la mesure ρ (utilisée pour calculer le capital) doit être homogène[1]. On applique la variante de l'équation (6.2) du théorème d'Euler pour calculer la contribution c_i de la v.a. X_i à $\rho(S)$.

Des exemples de mesures ...

- Homogènes : $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$, $\sqrt{Var(X)}$ et $E[X] + a\sqrt{Var(X)}$ avec $a > 0$.
- Non-homogènes : $Var(X)$

Définition de la contribution c_i selon la méthode d'Euler soit une mesure de risque ρ homogène (implicitement d'ordre 1). La contribution c_i

1. la mesure ρ est implicitement d'ordre 1.

de la v.a. X_i à $\rho(S) = \rho(X_1 + ... + X_n)$ est définie par

$$c_i = \left.\frac{\partial \rho(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_i x_i + ... + \lambda_n x_n)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \tag{6.3}$$

Exemple 1 : $\sqrt{Var(X)}$

On a $\rho(X_1 + ... + X_n) = \sqrt{Var(X_1 + ... X_n)}$. Alors, on peut trouver l'expression de la contribution :

$$\begin{aligned}
c_i &= \left.\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\sqrt{Var(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n)}\right|_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 Var(X_j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{n} \lambda_j \lambda_{j'} Cov(X_j, X_{j'})}\right|_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \\
&= \left.\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\lambda_i Var(X_i) + \cancel{2}\sum_{j'=1, j' \neq i}^{n} Cov(X_i, X_{j'})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} Var(X_j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{n} \lambda_j \lambda_{j'} Cov(X_j, X_{j'})}}\right|_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \\
&= \frac{Var(X_i) + \sum_{j'=1, j' \neq i}^{n} Cov(X_i, X_{j'})}{\sqrt{Var(S)}} \\
&= \frac{Cov(X_i, S)}{\sqrt{Var(S)}}
\end{aligned}$$

Le passage de la dérivée de l'intérieur pour $\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}$ n'a pas besoin d'être expliquée en détai à l'examen. Néamoins, on peut trouver à l'annexe A.7 la démonstration complète de la dérivée de l'écart-type.

Exemple 2 : $VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$

Soit un portefeuille de n v.a. continues $X_1, ..., X_n$ et $S = X_1 + ... + X_n$. On souhaite identifier l'expression de c_i à $VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$.

POur identifier les expressions de c_i quand $\phi = VaR$ ou $\phi = TVaR$, on considère que X est une v.a. continue. Dans le cas de la VaR, on doit utiliser un lemme additionnel :

Lemme 1. *Soit une v.a. continue X_i avec fonction de densité f_{X_i}. Alors,*

$$\begin{aligned} b &= E[X|X=b] \\ &= \frac{E[X \times 1_{\{X=b\}}]}{f_X(b)} \end{aligned}$$

Avec le lemme 1, on peut trouver la contribution :

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{\partial VaR_\kappa(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n)}{\partial \lambda_i}\Bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ c_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{E[\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n \times 1_{\{X_1+...+X_n=VaR_\kappa(S)\}}]}{f_{X_1+...+X_n}(VaR_\kappa(S))}\Bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j E[X_j \times 1_{\{X_1+...+X_n=VaR_\kappa(S)\}}]}{f_S(VaR_\kappa(S))}\Bigg|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\ &= \frac{E[X_i \times 1_{\{S=VaR_\kappa(S)\}}]}{f_S(VaR_\kappa(S))} \\ &= E[X_i|S=VaR_\kappa(S)] \end{aligned}$$

Exemple 3 : $TVaR_\kappa(S)$

Soit les v.a. continues $X_1, ..., X_n$ et $S = X_1 + ... + X_n$. On calcule le capital avec $\rho(S) = TVaR_\kappa(S) \quad , k \in (0,1)$. On veut trouver c_i.

Pour la $TvaR$, on n'a pas à faire référence au même lemme que la VaR, car on peut déjà ré-écrire la $TvaR$ avec l'une des 3 façons qu'on a vu dans les preuves (page 71).

$$
\begin{aligned}
c_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} TVaR_\kappa(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n)\Big|_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right]}{1-\kappa}\Bigg|_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \\
&= ... \\
&= \frac{E[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}]}{1-\kappa}
\end{aligned}
$$

6.5 Approximation de la contribution

On peut approximer la contribution d'une v.a. au portefeuille à l'aide d'une définition de base de la dérivée :

$$
C_i(x_1, .., n_n) \approx \frac{\phi(x_1, ..., (1+\epsilon)x_i, ..., x_n) - \phi(x_1, ..., x_n)}{\epsilon} \tag{6.4}
$$

Avec ϵ très petit (i.e 10^{-3} ou 10^{-4}).

Chapitre 7

Notions supplémentaires sur la mutualisation des risques

Dans cette section, on considère des portefeuilles où les risques ne sont pas forcément indépendants. Soit une v.a. Θ positive (discrète ou continue). La v.a. Θ représente des conditions environementales qui pourront influencer le comportement des coûts du portefeuille.

- Θ : conditions environnementales (climatiques, économiques, écologiques, naturelles, etc.)
- $X_1, ..., X_n$: coûts des risques d'un portefeuille.
- X_i coût d'un contrat, $i = 1, ..., n$.
- Hypothèse : Sachant $\Theta = \theta$ (i.e. la valeur prise par Θ en sachant les conditions), $(X_1|\Theta = \theta), ..., X_n|\Theta = \theta)$ sont conditionellement indépendants[1].
- Si Θ est une v.a. discrète avec support $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$, alors on a

$$F_{X_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} P(\Theta = \theta_j) F_{X_i|\Theta=\theta_j}(x) \quad , x \in \mathbb{R} \quad i = 1, ..., n \tag{7.1}$$

1. il est très important de distinguer des risques **indépendants** et des risques **conditionnement indépendants**.

7.1 Indépendance conditionnelle

Si on a $X_1, ..., X_n$ qui sont des risques indépendants, alors

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \neq F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n)$$

Mais l'indépendance conditionnelle nous permet de dire que

$$\begin{aligned} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j) F_{X_1,...,X_n|\Theta=\theta_j}(x_1, ..., x_n) \\ &= F_{X_1|\Theta=\theta_j}(x_1)...F_{X_n|\Theta=\theta_j}(x_n) \end{aligned}$$

Quand les conditions se déteriorent, les contrats sont exposés à produire des coûts de sinistres plus élevés. Cet environnement influence tous les contrats du portefeuille simultanément. Cet environnement (aléatoire) induit une relation de dépendance entre les risques du portefeuille.

Soit $S = X_1 + ... + X_n$. On déduit que

$$F_S(x) = \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j) F_{S|\Theta=\theta_j}(x) \tag{7.2}$$

7.2 l'Espérance

L'astuce est de conditionner d'abord $E[X_i]$, puis on peut aisément calculer $E[S]$ par la suite :

$$\begin{aligned} E[X_i] &= E_\Theta\Big[E[X_i|\Theta = \theta_j]\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j) E[X_i|\Theta = \theta_j] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E[S] = E[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

7.3 Variance

C'est le même concept que l'espérance. On va aussi utiliser le fait que $X_1, ..., X_n$ sont conditionellement indépendants pour sortir les sommations des variances.

$$E[X_i^2] = E_\theta\Big[E[X_i^2|\Theta = \theta_j\Big] = \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j)E[X_i^2|\Theta = \theta_j]$$

Une autre quantité qui peut être utile :

$$\begin{aligned} E[X_i X_{i'}] &= E_\Theta\Big[E[X_i X_{i'}|\Theta = \theta_j]\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j) \underbrace{E[X_i X_{i'}|\Theta = \theta_j]}_{\text{Cond. indép.}} \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j)E[X_i|\Theta = \theta_j]E[X_{i'}|\Theta = \theta_j] \end{aligned}$$

Ainsi, on peut facilement découler l'expression de $Var(X_i)$. Qu'en est-il de $Var(S)$? Voici une première façon classique :

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{n} Cov(X_i, X_{i'}) \\ &= \underbrace{E[(X_1 + ... + X_n)^2]}_{\text{On peut le développer}} - E[X_1 + ... + X_n]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j)E[(X_1 + ... + X_n)^2|\Theta = \theta_j] - E[X_1 + ... + X_n]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j)\left(Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i|\Theta = \theta_j\right) + E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i|\Theta = \theta_j\right]^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(\Theta = \theta_j)\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i|\Theta = \theta_j\right)}_{\text{Car cond. indép}} + \left(\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i|\Theta = \theta_j\right]\right)^2\right) \end{aligned}$$

Exemple 1

Soit la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ avec $P(\Theta = \theta_j) = \alpha_j \quad , j = 1, 2, 3, \quad \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j = 1$. Soit les v.a. $X_1, ..., X_n$ où $(X_i | \Theta = \theta_j) \sim Pois(\lambda_{i,j}), \quad i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, 3$. On définit $S = X_1 + ... + X_n$. Quelle est la loi de S ?

On va chercher à identifier les expressions de $\mathcal{P}_{X_i}(t)$ et $\mathcal{P}_S(t)$:

1. l'expression de $\mathcal{P}_{X_i}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X_i}(t) &= E[t^{X_i}] \\ &= E_\Theta\left[E\left[t^{X_i} | \Theta = \theta_j\right]\right] \\ &= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j E\left[t^{X_i} | \Theta = \theta_j\right] \end{aligned}$$

On peut donc déduire que X_i obéit à un mélange de 3 lois poisson.

2. l'expression de $\mathcal{P}_S(t)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= E\left[t^S\right] \\
&= E_\Theta\left[E\left[t^S|\Theta = \theta_j\right]\right] \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j E\left[t^{X_1+...+X_n}|\Theta = \theta_j\right] \\
&\text{Si on pose l'hypothèse de l'indépendance conditionnelle,} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j E[t^{X_1}|\Theta = \theta_j]...E[t^{X_n}|\Theta = \theta_j] \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \prod_{i=1}^{n} E[t^{X_i}|\Theta = \theta_j] \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_{i,j}(t-1)} \quad \text{car } (X_i|\Theta) \sim Pois(\lambda_{i.j}) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}(t-1)} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e^{\lambda_{S,j}(t-1)} \quad \text{où } \lambda_{S,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}
\end{aligned}
$$

S obéit dont aussi à une loi mélange de poisson.

Définition 1 (Échangeables)**.** *Soit un vecteur de v.a.* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$*. Les v.a.* $X_1, ..., X_n$ *sont dites échangeables si on a*

$$X_1 \sim X_2 \sim ... \sim X_n$$

ou encore

$$(X_1, X_2) \sim (X_1, X_3) \sim ... \sim (X_1, X_n) \sim ... \sim (X_{n-1}, X_n)$$

bref, toutes les combinaisons du vecteur sont distribués de la même façon. Dans le contexte où les v.a. sont conditionnellement indépendantes, on peut *représenter F_x de la façon suivante :*

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{m} F_{X_1|\Theta=\theta_j}(x_1)...F_{X_n|\Theta=\theta_j}(x_n)P(\Theta=\theta_j) \quad \textit{(discret)}$$
$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \int_0^{\infty} F_{X_1|\Theta=\theta_j}(x_1)...F_{X_n|\Theta=\theta_j}(x_n)Pf_{\Theta}(\theta)d\theta \quad \textit{(continu)}$$

Exemple 2

On considère un portefeuille de risques $X_1, ..., X_n$ qui sont échangeables (voir définition 1 au besoin). On a aussi une v.a. Θ représentant les conditions environnementales. Sachant $\Theta = \theta_j$,

$$(X_1|\Theta=\theta_j) \sim ... \sim (X_n|\Theta=\theta_j) \sim ... \sim (X|\Theta=\theta_j)$$

On définit $X = X_1 + ... + X_n$. On examine le comportement de $W_n = \frac{S_n}{n}$:

1. l'espérance de W_n :

$$\begin{aligned} E[W_n] &= \frac{1}{n}E[X_1 + ... + X_n] \\ &= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}E[X] \end{aligned}$$

2. la variance de W_n :

$$\begin{aligned}
Var(W_n) &= \frac{1}{n^2} Var(S_n) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{n} Cov(X_i, X_{i'}) \\
&= \frac{\cancel{n}}{n^2} Var(X) + \frac{n(n-1)}{n^2} Cov(X_1, X_2) \\
&= \frac{1}{n} Var(X) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) Cov(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

3. Si on prends la limite à $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} Var(W_n) = Cov(X_1, X_2) \quad , Cov(X_1, X_2) \geq 0$$

4. interprétations :
   - Présence du risque lié aux conditions environnementales induit une dépendance entre les composantes d'un portefeuille homogène.
   - Cette relation de dépendance est appelée *échangeabilité*. C'est une généralisation de la relation *iid*.
   - Conséquence : la compagnie d'assurance ne peut plus éliminer complètement la variabilité de W_n par la mutualisation d'jun grand nombre de contrats.

7.4 Distribution limite de W_n

Soit la v.a. Z où $\Pr(Z = E[X]) = 1$. On veut démontrer [2] (comme à la section 3.4.2. **Cette preuve risque fortement d'être à l'examen final**.) (à l'aide des transformées de Laplace) que

$$F_{W_n}(x) \longleftarrow F_Z(x) \quad x > 0$$

2. La preuve complète se trouve à l'annexe A.8

Chapitre 8

Modélisation des risques en assurance-vie

Jusqu'à présent, on a surtout modéliser les coûts de contrats d'assurance dont la période de couverture n'excédait pas 1 an. Dans le présent chapitre, on examine la modélisation des coûts pour des contrats traditionnels d'assurance et de rente.

Pour le chapitre, la v.a. représentant les coûts d'un contrat est définie en fonction de la durée de vie de l'assuré, qui est aussi une v.a. Bref, les coûts d'un contrat d'assurance ou de rente s'expriment comme une fonction d'une v.a. représentant la durée de vie de l'assuré.

8.1 Définition de base

Soit la v.a. continue strictement positive X qui représente la durée de vie d'un nouveau-né. Voici quelques notes au niveau de la notation :

(1) Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = P(\text{Nouveau-né décède avant l'âge } x)$$

(2) Fonction de survie de la v.a. X :

$$\begin{aligned} S_X(x) &= \overline{F}_X(x) \\ &= P(\text{Nouveau-né décède au-delà de l'âge } x) \\ &= P(\text{Nouveau-né survive jusqu'à l'âge } x) \end{aligned}$$

(3) Fonction de densité de la v.a. X :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \overline{F}_X(x) \end{aligned}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} f_X(x)dx &= P(x < X < x + dx) \\ &= P(\text{Nouvea-né décède entre } x \text{ et } x + dx) \end{aligned}$$

(4) L'espérance de X :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty \overline{F}_X(x) dx \\ &= \text{Espérance de vie future d'un nouveau-né} \\ &= \mathring{e}_0 \end{aligned}$$

(5) On introduit une 2$^{\text{e}}$ v.a. nommée T_x, où

$$T_x = (X - x | X > x) \tag{8.1}$$

T_x représente la durée de vie d'un individu d'âge x, c'est-à-dire la durée de vie excédentaire d'un individu sachant qu'il a survécu jusqu'à l'âge x.

(5.1) Fonction de survie de T_X :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{T_x}(t) &= P(T_X > t) \\
&= \frac{P(X - x > t | X > x)}{P(X > x} \\
&= \frac{P(X > x + t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{\overline{F}_X(x + t)}{\overline{F}_X(x)}
\end{aligned}$$

Interprétation : $\overline{F}_X(t)$ correspond à laprobabilité que l'individu d'âge x survive t années.

(5.2) Fonction de répartition de T_X :

$$F_{T_X}(t) = \frac{F_X(x + t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \tag{8.2}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
F_{T_X}(t) &= P(T_x \leq t) \\
&= P(X - x \leq t | X > x) \\
&= \frac{P(X - x \leq t, X > x}{P(X > x)} \\
&= \frac{P(x < X < x + t)}{P(X > x} \\
&= \frac{F_X(x + t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}
\end{aligned}$$

On peut aussi le voir d'une autre approche :

$$\begin{aligned}
F_{T_X}(t) &= 1 - \overline{F}_{T_x}(t) \\
&= 1 - \frac{\overline{F}_X(x+t)}{\overline{F}_X(x)} \\
&= \frac{\overline{F}_X(x) - \overline{F}_X(x+t)}{\overline{F}_X(x)} \\
&= \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}
\end{aligned}$$

□

Interprétation :$F_{T_x}(t)$ correspond à la probabilité qu'un individu d'âge x décède pendant les t prochaines années.

(5.3) Fonction de densité de T_x :

$$\begin{aligned}
f_{T_X}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} F_{T_x}(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \right) \\
&= ... \\
&= \frac{f_X(x+t)}{\overline{F}_X(t)}
\end{aligned}$$

Interprétation : $f_{T_X}(t)$ correspond à la probabilité qu'un individu décède entre les durées t et $t + dt$.

8.1.1 Notation actuarielle

Note : pour avoir accès à tous les symboles actuarielles dans LaTeX, consultez le package actuarialsymbol.

(1)

$$_tq_x = P(T_x \leq t) = F_{T_x}(t) \tag{8.3}$$

(2)

$$_tP_x = P(T_x > t) = \overline{F}_{T_x}(t) \tag{8.4}$$

(3) On peut représenter directement le comportement de X avec cette notation :

$$ {}_xq_0 = F_X(x) \tag{8.5}$$

et

$$ {}_xP_0 = \overline{F}_X(x) \tag{8.6}$$

(4) Lorsqu'on veut représenter la probabilité de décès d'un individu d'âge x dans la prochaine année, on n'indique pas le 1 en indice à l'avant :

$$ {}_1P_x = P_x \tag{8.7}$$

C'est la même chose pour q :

$$ {}_1q_x = q_x \tag{8.8}$$

$$ {}_{t|u}q_x = P(t < T_x < t+u) \tag{8.9}$$

Il y a plusieurs façons de ré-écrire l'équation (8.9) :

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tP_x - {}_{t+u}P_X \\ &= {}_xP_X \cdot {}_uq_{x+t} \end{aligned}$$

8.1.2 Force de Mortalité

Rappel : Force d'intérêt

Tel que vu en **ACT-1001**, on représente la force de mortalité par δ, où

(1) δ = taux instantanné de décès

(2)

$$\begin{aligned} v^t &= \text{valeur actualisée à } t = 0 \text{ de 1\$ versé à } t \\ &= e^{-\delta t} \\ &= e^{-\int_0^t \delta ds} \end{aligned}$$

On introduit la fonction $\mu(y)$, qui représente la force de mortalité à l'âge y (taux instantanné de décès à l'âge y).

Relation entre $\overline{F}_X(x)$ et $\mu(y)$

$$\overline{F}_X(x) = e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_X(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \mu(y)dy\right)e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \quad \text{Par la théorème de Leibtniz} \\ &= \mu(x)\overline{F}_X(x) \end{aligned}$$

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)} \tag{8.10}$$

Interprétation de $\mu(x)$: Probabilité qu'un nouveau-né décède entre l'âge x et l'âge $(x + dx)$, sachant qu'il a survécu jusqu'à l'âge x.

Il me manque les notes de cours sur la force de mortalité et la loi Exponentielle

8.2 Table de mortalité

Les tables de mortalité sont construites à partir de l'expérience d'une *population*. L'espérience peut être construite sur une année (plutôt rare) ou plusieurs (5, 10, 15 ans ?),

Population Population d'un pays. Condition : il faut qu'il existe un organisme national fiable qui recueille et conserve les informations sur la mortalité observée de la population du pays. **Plusieurs exemples de tables de mortalité se trouve facilement sur le web**[1].

1. Voir l'annexe B.1 à la page 86.

Approche non-paramétrique Les tables de mortalité peuvent être utilisées pour modéliser T_x sans utiliser de lois connues.

Exemple de calcul avec la table de mortalité

On nous fournit une table de mortalité suivante :

x	q_x
30	0,0015
31	0,0018
32	0,0022
33	0,0027

Calculer $\Pr(T_{30} > 3)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(T_{30} > 3) &= \overline{F}_{T_{30}}(3) \\
&= e^{-\int_0^3 \mu(30+s)ds} \\
&= e^{-\int_0^1 \mu(30+s)ds - \int_1^2 \mu(30+s)ds - \int_2^3 \mu(30+s)ds} \\
&= e^{-\int_0^1 \mu(30+s)ds} e^{-\int_1^2 \mu(30+s)ds} e^{-\int_2^3 \mu(30+s)ds} \\
&= P_{30}\left(e^{-\int_0^1 \mu(31+u)du} e^{-\int_0^1 \mu(32+u)du}\right) \\
&= P_{30}P_{31}P_{32} \\
&= {}_3P_{30}
\end{aligned}$$

Relation générale

$$\overline{F}_{T_x}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ P_x & k = 1 \\ \prod_{j=0}^{k-1} P_{x+j} & k = 2, 3, ... \end{cases} \tag{8.11}$$

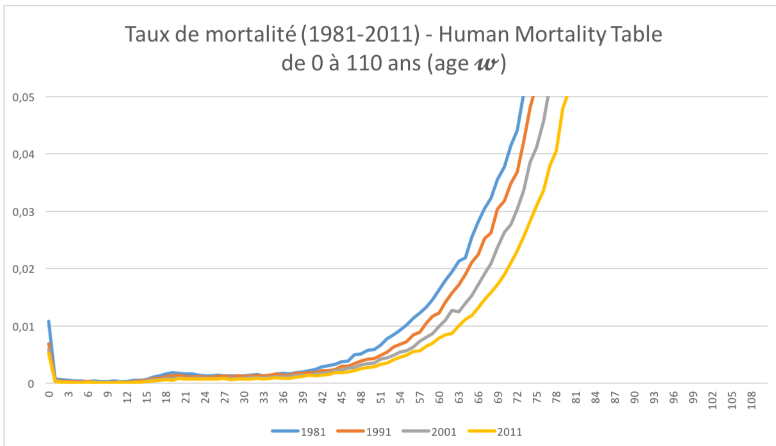
Avec $x \geq 0$. Aussi, on remarque que

$$\overline{F}_{T_x}(t+s) = \overline{F}_{T_x}(t)\overline{F}_{T_x}(s) \quad \text{pour } x, t, s > 0 \tag{8.12}$$

8.2.1 Observations à partir de la table de mortalité

À partir de données accessible sur le web [2], on peut rapidement analyser les taux de mortalités selon l'âge, ainsi que l'évolution pour les années.

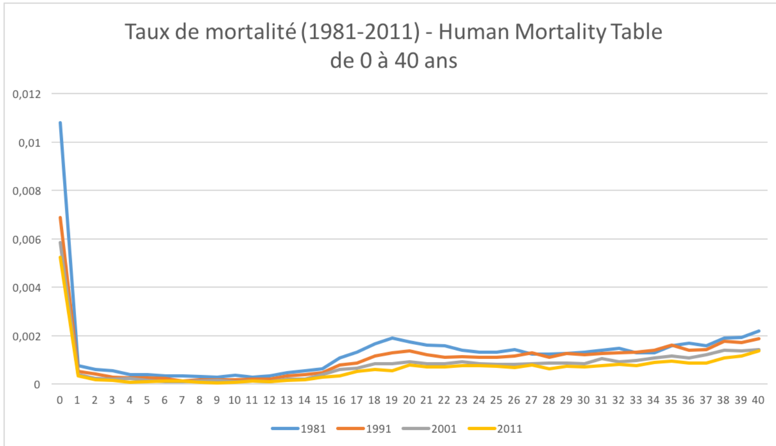
Portrait global



On voit sur le précédent graphique qu'il y a 3 moments importants où la probabilité de décès augmente considérablement : de 0-2 ans (mortalité infantile), à l'adolescence (15-15 ans) et après 40 ans (croissance exponentielle). On analyse chacunes de ces 3 périodes spécifiquement dans les prochaines sous-sections. Aussi, on observe une nette amélioration des taux de mortalité de 1981 à 2011.

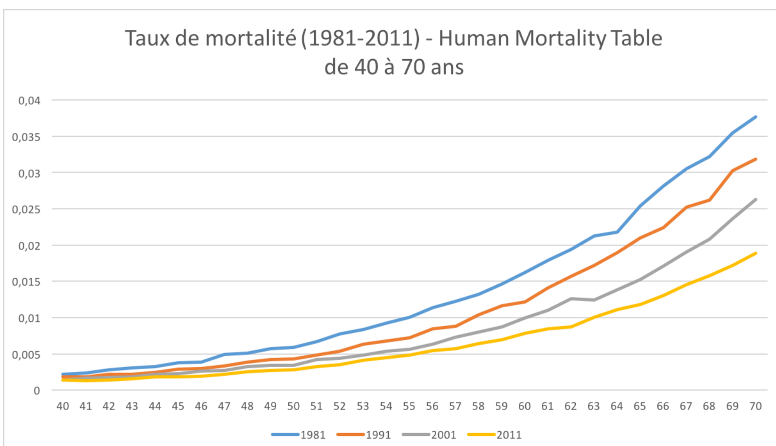
Mortalité infantile et mortalité à l'adolescence

2. Voir l'annexe pour accéder aux données de Human Mortality Database

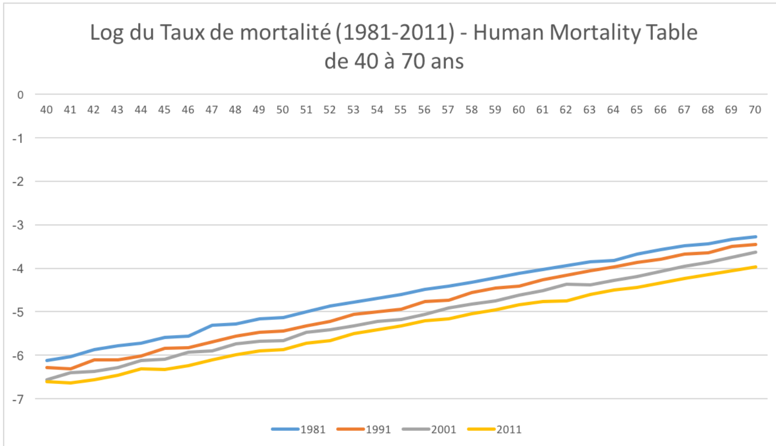


On constate sur le graphique ci-haut 2 importantes hausses de q_x : de 0-1 ans et à l'adolescence.

Mortalité après 40 ans Le premier graphique qu'on va présenter montre bien la croissance exponentielle (après 40 ans) du taux de mortalité.



Remarque : Si on pose le logarithme des q_x, on remarque une relation linéaire (voir graphique ci-dessous).



8.3 Lois pour les durées de vie

On étudie certaines lois de probabilité (appelées lois de survie ou mortalité [3]) qui sont utilisées pour décrire le comportement de la v.a. X (et T_x).

Le choix est basé sur une calibration aux données de mortalité. Souvent, les lois de survie sont définies à partir de la force de mortalité.

8.3.1 Loi de Gompertz

En 1826, Gompertz a proposé une loi avec les caractéristiques suivantes :

(1) La relation linéaire décrite à la section précédente (65) :

$$\ln(\mu(x)) = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

(2) Selon les observations (tables q_x), cette relation *semble* entre les âges $x = 30$ et 80

(3) Alors, l'expression [4] pour $\mu(x)$ est

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\alpha_0+\alpha_1 X}\\ &= e^{\alpha_0}e^{\alpha_1 X}\\ &= \beta e^{\gamma x} \quad \forall x \geq 0\end{aligned}$$

3. Ces lois sont dans l'annexe fourni à l'examen
4. On voit souvent dans la littérature $\mu(x) = bc^x, \quad b = \beta, c = e^\gamma$

Interprétations

(1) Selon la loi exponentielle, $\mu(x) = \beta \quad , x \geq 0$

(2) Selon la loi Gompertz, $\mu(x) = \beta e^{\gamma x} \quad , x \geq 0$

(3) $e^{\beta x}$ = facteur d'accélération de la mortalité avec l'âge. Ce phénomène s'observe chez l'humain entre 30 et 90 ans, selon les données recueillis dans différents pays. Il s'agit d'un phénomène *naturel* de vieillissement (dû à des causes biologiques)

(4) Que se passe-t-il vers 80-90 ans ?
   - Il y a beaucoup de discussions et recherches à ce sujet
   - On constate une décélération, voir un applatissement de la force de mortalité
   - Attention ! Le nombre de personnes dont les âges excèdent 90 ans est assez faible pour pouvoir tirer des conclusions.

Fonction de survie de la loi Gompertz

$$\begin{aligned}
\overline{F}_X(x) &= e^{-\int_0^\infty \mu(y)dy} \\
&= e^{-\int_0^\infty \beta e^{\gamma y} dy}
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\overline{F}_X(x) = e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)} \tag{8.13}$$

Expression de $\overline{F}_{T_x}(t)$

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{T_x}(t) &= \frac{\overline{F_X(t+x)}}{\overline{F}_X(x)} \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma(x+t)}-1)}}{e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)}} \\
&= e^{-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma(x+t)}-e^{\gamma x})} \\
&= e^{-\frac{\beta}{\gamma}e^{\gamma x}(e^{\gamma t}-1)}
\end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $\beta_x = \beta e^{\gamma x}$, on obtient

$$\overline{F}_{T_x}(t) = e^{-\frac{\beta_x}{\gamma}(e^{\gamma t}-1)} \tag{8.14}$$

On déduit donc que $T_x \sim Gompertz(\beta_x, \gamma)$, avec le paramètre modifié β_x qui dépend de l'âge x.

Espérancede T_x de la loi Gompertz

$$\begin{aligned}
E[T_x] &= \int_0^\infty t f_{T_x}(t)dt \\
&= \int_0^\infty t\overline{F}_{T_x}(t)\mu(x+t)dt \quad \text{(Selon la relation (8.10))} \\
&= \int_0^\infty te^{-\frac{\beta}{\gamma}e^{\gamma x}(e^{\gamma t}-1)}\beta e^{\gamma x+t}dt
\end{aligned}$$

Annexe A

Preuves

A.1 Stop-Loss $(\pi_X(d))$

Dans un contexte continu,

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}(d)du$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= E[\max(X-d,0)] \\
&= \int_0^{\infty} \max(x-d,0)F_X(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} (x-d)1_{\{X>d\}}f_X(x)dx \\
&= \int_d^{\infty} (x-d)f_X(x)dx \\
&= \int_d^{\infty} xf_X(x)dx - \int_d^{\infty} df_X(x)dx
\end{aligned}$$

On doit alors faire une intégration par partie, en posant

$$\begin{aligned}
u &= x & du &= dx \\
dv &= dF_X(x) & v &= -S(x)
\end{aligned}$$

Note : si on fait tendre $S(x)$ vers l'infini, ça va tendre plus rapidement vers 0 que x seul.

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= -xS(x)\Big|_d^\infty - \int_d^\infty -S(x)dx - d\Big(F(\infty) - F(d)\Big) \\
&= 0 + \cancel{dS(d)} + \int_d^\infty S(x)dx - \cancel{dS(d)} \\
&= \int_d^\infty S(x)dx
\end{aligned}$$

□

Il existe aussi le contexte discret :

$$\pi_X(d) = \sum_{k=d}^{\infty} S(k)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\pi_X(k) &= E[\max(N-k),0)] \\
&= \sum_{j=k}^{\infty}(j-k)P(N=j) \\
&= (k-k)P(N=k) + ((k+1)-k)P(N=k+1) + P((k+2)-k)P(N=k+2) + ... \\
&= P(N=k+1) + 2P(N=k+2) + 3P(N=k+3) + ... \\
&= \underbrace{(P(N=k+1) + P(N=k+2) + P(N=k+3) + ...)}_{S(k)} \\
&+ \underbrace{(P(N=k+2) + P(N=k+3) + P(N=k+4) + ...)}_{S(k+1)} \\
&+ \underbrace{(P(N=k+3) + (PN=k+4) + P(N=k+5) + ...)}_{S(k+2)} \\
&+ ... \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} S(i)
\end{aligned}$$

□

A.2 TVaR

A.2.1 Les 3 formes explicites de la $TVaR$

Pour la $TVaR$, il y a 3 preuves à bien connaître :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
TvaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (\underbrace{VaR_u(X)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{quantile}}} - VaR_\kappa(X))du + \underbrace{\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X)du}_{\text{intégration d'une constante}} \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)) \underbrace{f_U(u)}_{U\backsim Unif(0,1)} du + \frac{1}{\cancel{1-\kappa}}VaR_\kappa(X)(\cancel{1-\kappa}) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(\underbrace{F_X^{-1}(U)}_{F_X^{-1}\backsim X} - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)
\end{aligned}$$

□

à partir de la preuve ci-dessus, on peut démontrer celle-ci :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa}E[VaR_\kappa(X) \times \underbrace{1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}}_{=S_X(VaR_\kappa(X))}] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1 - F_X(VaR_\kappa(X))) + \frac{1-\kappa}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(-1 + F_X(VaR_\kappa(X)) + 1 - \kappa)}{1-\kappa} \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}
\end{aligned}$$

□

Une dernière preuve fortement utilisée pour la $TVaR$, qui découle directement de la dernière : :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa}$$

Démonstration. Étant donné que cette formule ne fonctionne seulement que pour une v.a. continue, elle est très facile à prouver :

$$\text{si } X \text{ est continue,} \quad \forall x, F_X(VaR_\kappa(X))) = \kappa$$

Alors, on peut enlever la partie de droite de l'équation. □

A.3 Sous-additivité de la $TVaR$

Il y a plusieurs façons de prouver la sous-additivité de la $TVaR$.

A.3.1 À l'aide de la fonction convexe $\varphi(x)$

On sait que la fonction $\varphi(x)$ est convexe :

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)$$

Et on sait aussi que

$$TVaR_\kappa(X) = \inf\Big\{\varphi(x)\Big\}$$

Il faut prouver que $TVaR_\kappa(X+Y) \leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y)$

Démonstration. Puisque $\varphi(x)$ est une fonction convexe, on peut dire que

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &\leq \varphi(x) \\ &\leq x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x) \end{aligned}$$

On pose le changement de variable $\boxed{X^* = \alpha X + (1-\alpha)Y}$

On peut donc remplacer x dans $\varphi(x)$ par

$$\begin{aligned} x_0 &= VaR_\kappa(X^*) \\ &= VaR_\kappa(\alpha X + (1-\alpha)Y) \\ &= \alpha VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)VaR_\kappa(Y) \end{aligned}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(\alpha X+(1-\alpha)Y) \leq\ & \alpha VaR_\kappa(X)+(1-\alpha)VaR_\kappa(Y)\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E[\max(\alpha X+(1-\alpha)Y-\alpha VaR_\kappa(X)+(1-\alpha)VaR_\kappa(Y);0)]\\
&=\alpha VaR_\kappa(X)+(1-\alpha)VaR_\kappa(Y)\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E[\max(\alpha(X-VaR_\kappa(X))+(1-\alpha)(Y-VaR_\kappa(Y));0)]\\
&\leq \alpha VaR_\kappa(X)+(1-\alpha)VaR_\kappa(Y)\\
&+\alpha\left(\frac{1}{1-\kappa}E[\max(X-VaR_\kappa(X);0)]\right)\\
&+(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\kappa}E[\max(X-VaR_\kappa(X);0)]\right)\\
&\text{Si on met en commun, on retrouve les expressions de la } TVaR\\
&=\alpha\left(\frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X))+VaR_\kappa(X)\right)\\
&+(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\kappa}\pi_Y(VaR_\kappa(Y))+VaR_\kappa(Y)\right)\\
TVaR_\kappa(\alpha X+(1-\alpha)Y) \leq\ & \alpha TVaR_\kappa(X)+(1-\alpha)TVaR_\kappa(Y)
\end{aligned}
$$

La relation se vérifie très bien avec le cas où $\alpha = 0,5$:

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(0,5X+(1-0,5)Y) &\leq 0,5TVaR_\kappa(X)+(1-0,5)TVaR_\kappa(Y)\\
0,5TVaR_\kappa(X+Y) &\leq 0,5TVaR_\kappa(X)+0,5TVaR_\kappa(Y)\\
&\text{on multiplie par 2 pour enlever les 0,5}\\
\mathbf{TVaR}_\kappa(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) &\leq \mathbf{TVaR}_\kappa(\mathbf{X})+\mathbf{TVaR}_\kappa(\mathbf{Y})
\end{aligned}
$$

$\square$

A.3.2 Avec les fonctions indicatrices

Si on a les v.a. continues X et Y (les espérances existent) avec les fonctions de répartition respectives F_X et F_Y, alors

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa}$$
$$(1-\kappa)TVaR_\kappa(X) = E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]$$

est valide pour toute v.a. continue X.

On veut alors démontrer que

$$TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) - TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0 \tag{A.1}$$

Démonstration. .

(1) On peut écrire le membre de gauche de l'inégalité (A.1) comme

$$\underbrace{(1-\kappa)TVaR_\kappa(X)}_{E[X\times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]} + \underbrace{(1-\kappa)TVaR_\kappa(Y)}_{E[Y\times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}]} - \underbrace{(1-\kappa)TVaR_\kappa(X+Y)}_{E[(X+Y)\times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}]}$$
$$= E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + E[Y \times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}] - \underbrace{E[(X+Y) \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}]}_{\text{On } \textit{split} \text{ cette espérance}}$$
$$= \underbrace{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}]}_{\text{On peut rassembler les indicatrices}}$$
$$+ \underbrace{E[Y \times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}] - E[Y \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}]}_{\text{ici aussi}}$$

$$= E[X\times(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}})] + E[Y\times(1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}})] \tag{A.2}$$

(2) Rendu ici, on veut prouver que chacun de ces espérance ≥ 0, pour que la somme des 2 soit ≥ 0 aussi. Étant donné que les 2 parties du membre de gauche sont identiques, on va le prouver seulement pour un côté.

(2.1) Pour nous aider, on va créer un terme *auxiliaire*, i.e un terme qui est égal à zéro, mais qui va nous aider à faire la preuve, soit le terme suivant :

$$\begin{aligned}
&E[VaR_\kappa(X) \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \\
&= VaR_\kappa(X) E[(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \\
&= VaR_\kappa(X)\Big((1-\kappa) - (1-\kappa)\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2.2) Alors, l'équation (A.2) devient

$$E[(X - VaR_\kappa(X)) \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})]$$

(2.3) On va prouver que la quantité à l'intérieur de l'espérance ci-haut sera toujours ≥ 0, de sorte que l'espérance sera toujours positive aussi :

$$\begin{aligned}
&(X - VaR_\kappa(X))(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}) \geq 0 \text{ si} \quad X < VaR_\kappa(X) \\
&(X - VaR_\kappa(X))(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}) = 0 \text{ si} \quad X = VaR_\kappa(X) \\
&(X - VaR_\kappa(X))(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}) \geq 0 \text{ si} \quad X > VaR_\kappa(X)
\end{aligned}$$

(2.4) Alors, on déduit que

$$\begin{aligned}
&E[(X - VaR_\kappa(X)) \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \\
&= E[X \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \geq 0
\end{aligned}$$

(3) Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(1-\kappa)TVaR_\kappa(X) + (1-\kappa)TVaR_\kappa(Y) - (1-\kappa)TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0 \\
\mathbf{TVaR}_\kappa\mathbf{(X)} + \mathbf{TVaR}_\kappa\mathbf{(Y)} - \mathbf{TVaR}_\kappa\mathbf{(X+Y)} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\square$

A.4 Loi des grands nombres

Cette preuve était demandée à l'examen Intra traditionnel H2017.

Théorème

Soit les v.a. *iid* $X_1, ..., X_n$ avec $E[X^m] < \infty \quad , m = 1, 2, ...$ et $Var(X) < \infty$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) \longrightarrow F_Z(x) \tag{A.3}$$

où Z est une v.a. tel que $P(Z = E[X]) = 1$.

Démonstration. .

(1) Première étape, on va démontrer que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{w_n}(t) \to \mathcal{L}_Z(t)$

(1.1) On sait que $\mathcal{L}_{w_n}(t) = \mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)^n \quad n = 1, 2, ...$

(1.2) Soit une v.a. Y positive. On fixe t tout petit

(1.3) Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(t) &= E[e^{-tY}] \\ &\approx E[1 - tY] \quad \text{par dév. de Taylor} \quad = E[1] - tE[Y]\end{aligned}$$

(1.4)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{w_n}(t) &= \mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)^n \\ &\simeq \left(1 - \frac{t}{n}E[X]\right)^n\end{aligned}$$

(1.5) On prends la limite de part et d'autre de l'égalité en (1.3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{w_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\ &\simeq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}E[X]\right)^n \\ &= e^{-tE[X]} \\ &= \mathcal{L}_Z(t)\end{aligned}$$

Ce qui correspond à la Transformée de la v.a. Z où $P(Z = E[X]) = 1$

(2) On applique le résultat de (1.4)

$$\lim_{n\to\infty} F_{w_n}(x) = F_Z(x), \quad \forall x$$

□

A.5 Somme de v.a. indépendantes d'une loi Poisson Composée

Démonstration. Soit les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où
$X_i \sim PoisComp(\lambda_i; F_{B_i}) \quad , i = 1, ..., n$
Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1}(t) &= \mathcal{P}_{M_i}\left(\mathcal{L}_{B_i}(t)\right)\\ &= e^{\lambda\left(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1\right)} \quad , i = 1, 2, ..., n\end{aligned}$$

On peut trouver la transformée de S,

$$\mathcal{L}_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda\left(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1\right)} \tag{A.4}$$

Le passage de l'équation (A.4) aux étapes suivantes résulte d'une propriété de la loi de Poisson, i.e.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1\right)}\\ &= e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{L}_{B_i}(t)-\lambda_i}\\ &= e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{L}_{B_i}(t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\\ &= e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{L}_{B_i}(t)-\lambda_S}\end{aligned}$$

Si on met en évidence le λ_S ...

$$\mathcal{L}_S(t) = e^{\lambda_S\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\mathcal{L}_{B_i}(t)-1\right)} \tag{A.5}$$

Si on pose $c_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_S}$, on observe que $0 < c_i < 1$ et que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

On se définit une nouvelle v.a., D, où

$$\mathcal{L}_D(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{L}_{B_i}(t) \tag{A.6}$$

Ce qui implique que D obéit à une loi mélange :

$$F_D(x) = \sum_{i=1}^{n} c_1 F_{B_i}(x) \quad , x \geq 0$$

en combinant (A.5) et (A.6), on obtient

$$\mathcal{L}_S(t) = e^{\lambda_S(\mathcal{L}_D(t)-1)} \tag{A.7}$$

On introduit une nouvelle v.a., $N_S \sim Pois(\lambda_S)$ et $P_N(s) = e^{\lambda_S(s-1)}$. Alors, (A.7) devient

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{P}_{N_S}(\mathcal{L}_D(t))$$

On peut donc représenter S comme

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_s} D_k & N_s > 0 \\ 0 & N_s = 0 \end{cases}$$

où $D_k, \quad k = 1, 2, ...$ forme une suite de v.a *iid*, et D et N_s sont indépendants.

$\square$

A.6 Théorème d'Euler

Définition Soit une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogène d'ordre n. Alors, pour toute fonction ϕ dérivable partout, on a

$$n\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \phi(x_1, .., x_n)}{\partial x_i}$$

Démonstration. .

(1) Puisque ϕ est homogène d'ordre n, on a

$$\phi(x_1, ..., x_n) = \lambda^n \phi(x_1, ..., x_n) \tag{A.8}$$

(2) On dérive le terme de gauche de l'équation dans l'équation (A.8) par rapport à λ et on pose $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^n\phi(x_1,...,x_n)\bigg|_{\lambda=1} &= n\lambda^{n-1}\phi(x_1,...,x_n)\bigg|_{\lambda=1}\\ &= n\phi(x_1,...,x_n)\end{aligned}$$

(3) On dérive le terme de droite de l'équation dans l'équation (A.8) par rapport à λ et on pose $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^n\phi(x_1,...,x_n)\bigg|_{\lambda=1} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi(x_1,...,x_n)}{\partial(\lambda x_i)}\frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\lambda x_i,...,\lambda x_n)}{\partial\lambda x_i}x_i\bigg|_{\lambda=1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}\end{aligned}$$

(4) On pose (4) = (3), et on obtient le résultat souhaité.

□

A.7 Dérivée de l'écart-type (générale)

Lorsqu'on prouve la contribution $C(X_i)$ pour $\rho(X) = \sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}$, on doit dériver l'écart-type... voici le développement complet, avec un exemple où $n = 3$. Ce qui est important de suivre, c'est qu'on cherche ici la contribution de la v.a. X_i : alors, lorsqu'on dérive par rapport à λ_i, ça peut être n'importe quoi le i : $1, 2, ..., n$.

Rappel d'ACT-1002 Pour les propriétés de la covariance, voir la sous-section 1.5.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i\right)}}\right) \times$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1, k\neq i}^{n}\lambda_i\lambda_k Cov(X_i, X_k)$$

Explication de la forme générale de la variance

Avec un exemple $n = 3$, il est très facile de comprendre d'où vient la formule générale de la variance (qui est universelle si les X_i sont indépendants ou non).

$$\begin{aligned} Var(X_1 + X_2 + X_3) &= Cov(X_1 + X_2 + X_3, X_1 + X_2 + X_3) \\ &= Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) \\ &+ Cov(X_2, X_1) + Cov(X_2, X_2) + Cov(X_2, X_3) \\ &+ Cov(X_3, X_1) + Cov(X_3, X_2) + Cov(X_3, X_3) \end{aligned}$$

On remarque en bleu les variances séparées pour chacun de nos X_i de notre exemple, qu'on va pouvoir rassembler ensemble dans une même somme. On remarque aussi que les covariances sont similaires. On remarque en orange les covariances reliées à X_1, en vert les covariances reliées à X_2 et finalement en violet les covariances qui sont reliées à X_3.

En étant attentif, on remarque qu'on peut sommer ensemble chaque *paquet* de covariance sur tout le support ($n = 3$), sauf la combinaison $Cov(X_i, X_i)$, car celle-ci a été prise pour rassembler les variances ensemble ($Var(X_i) = Cov(X_i, X_i)$).

Alors, on obtient (pour le cas $n = 3$) :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right) = \sum_{i=1}^{3} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1, k\neq i}^{3} Cov(X_i, X_k)$$

Si on développe le la dérivée en rouge seule du reste (en prenant l'exemple du cas $n - 3$ et qu'on dérive par rapport à λ_1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\rho(X_1 + X_2 + X_3) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\Big[\lambda_1^2 Var(X_1) + \lambda_2^2 Var(X_2) + \lambda_3^2 Var(X_3) \\
&+ \lambda_1\lambda_2 Cov(X_1, X_2) + \lambda_1\lambda_3 Cov(X_1, X_3) \\
&+ \lambda_2\lambda_1 Cov(X_2, X_1) + \lambda_2\lambda_3 Cov(X_2, X_3) \\
&+ \lambda_3\lambda_1 Cov(X_3, X_1) + \lambda_3\lambda_2 Cov(X_3, X_2)\Big] \\
&= 2\lambda_1 Var(X_1) \\
&+ \lambda_2 Cov(X_1, X_2) + \lambda_3 Cov(X_1, X_3) \\
&+ \lambda_2 Cov(X_2, X_1) + \lambda_3 Cov(X_3, X_1) \\
&= 2\lambda_1 Var(X_1) + \sum_{k=1, k\neq 1}^{3} \lambda_k Cov(X_1, X_k) + \sum_{k=1, k\neq 1}^{3} \lambda_k Cov(X_k, X_1) \\
&= 2\lambda_1 Var(X_1) + 2\sum_{k=1, k\neq 1}^{3} \lambda_k Cov(X_1, X_k)
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remettre toute l'équation ensemble :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\lambda_i Var(X_i) + \cancel{2}\sum_{k=1, k\neq i}^{3} \lambda_k Cov(X_i, X_k)}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right)}}$$

Si on pose $\lambda_1 = ... = \lambda_i = ... = \lambda_n = 1$ et qu'on utilise les définitions des covariances pour rentrer les sommes dans la covariance, tel que

$$\begin{aligned}
Var(X_i) + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} Cov(X_i, X_k) &= \sum_{k=1}^{n} Cov(X_i, X_k) \\
&= Cov\left(X_i, \sum_{k=1}^{n} X_k\right)
\end{aligned}$$

Alors,

$$C(X_i) = \frac{Cov\left(X_i, \sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{Cov(X_i, S)}{\sqrt{Var(S)}}$$

A.8 Distribution limite de W_n

Soit la v.a. Z où $\Pr(Z = E[X]) = 1$. On veut démontrer (à l'aide des transformées de Laplace) que

$$F_{W_n}(x) \longleftarrow F_Z(x) \quad x > 0$$

où $\Pr(Z = \gamma_j) = \Pr(\Theta = \theta_j)$ et $\gamma_j = E[X|\Theta = \theta_j]$.

Démonstration. Pour faire la preuve, il faut savoir les 2 résultats suivants :

$$e^x = 1 - x \tag{A.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{A.10}$$

Si on développe la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E[e^{-tW_n}] \\
&= E_\Theta[E[e^{-tW_n}|\Theta = \theta]] \\
&= \int_0^\infty E[e^{-tW_n}|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty E[e^{\frac{t}{n}(X_1+\ldots+X_n)}|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} E[e^{-\frac{t}{n}X_i}|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty E[e^{-\frac{t}{n}X}|\Theta = \theta]^n f_\Theta(\theta) d\theta \quad \text{(car les v.a. sont } iid\text{)} \\
&= \int_0^\infty \left(e^{-tE[X|\Theta]}\right)^n f_\Theta(\theta) d\theta \\
&\approx \int_0^\infty E\left[\left(1 - \frac{t}{n}X\right)|\Theta = \theta\right]^n f_\Theta(\theta) d\theta \quad \text{(par l'équation (A.9))} \\
&= \int_0^\infty \left(E[1|\Theta] - \frac{t}{n}E[X|\Theta]\right)^n f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{n}E[X|\Theta]\right)^n f_\Theta(\theta) d\theta \\
&\text{Si on pose la limite } n \to \infty, \\
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}E[X|\Theta]\right)^n f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty e^{-tE[X|\Theta]} f_\Theta(\theta) d\theta \quad \text{(par l'équation (A.10))} \\
&= \int_0^\infty e^{-t\gamma} f_\Theta(\theta) d\theta \quad \text{, où } \gamma = E[X|\Theta] \\
&= \mathcal{L}_Z(t)
\end{aligned}$$

□

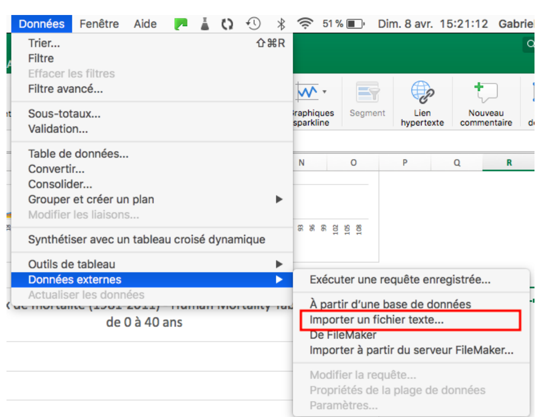
Annexe B

Base de données Open-Source

B.1 Assurance-vie

En assurance-vie, on peut avoir accès à plusieurs bases de données *Open-Source* pour faire des projets ou des études. Voici une liste non-exhaustive :

- Human Mortality database Une base de données accessible gratuitement. Toutefois, il faut se créer un compte et accepter les termes et conditions (pas d'usage commerciale, citation de la source à chaque utilisation, etc.). Voici une procédure pour l'extraction des données.
  1. On doit se créer un compte gratuit (prends quelques minutes)
  2. On demande d'avoir accès aux données d'un pays donnée en format *1x1*
  3. On ouvre le fichier.txt à l'aide de l'option `Données/Données externes` et on laisse le Wizard d'Excel faire le reste :



4. Les données ne sont pas très intéressantes à travailler : il y a une colonne pour l'année où les données ont été compilées, puis une colonne pour l'âge de décès. À l'aide de la fonction `CONCATENER()` D'Excel, on ajoute une colonne pour concaténer l'année des données et l'âge
5. On peut faire una matrice dans un autre onglet avec l'âge comme ligne et l'année des données en colonnes. On combine `RECHERCHEV()` d'Excel avec la colonne créé à l'étape précédente pour faire la transposition des données.
6. Par la suite, il sera beaucoup plus facile de faire des graphiques pour les données nécessaires.

Note : On pourrait facilement combiner les tables de mortalité de plusieurs pays en faisant usage de la fonction `INDIRECT()` et en nommant de façon appropriée chaque onglet représentant les données brutes des tables.

- Human Life table database Même concept que *Human Mortality*, sauf qu'on n'a pas besoin de compte pour accéder aux tables. Attention ! Les tables sont en format pdf, et non en format .csv
- Table de mortalité de Statistiques Canada On peut télécharger en fichier Excel les tables de mortalité pour plusieurs intervalles d'années depuis 1980 jusqu'à aujourd'hui [1]
- Institut de statistiques du Québec très semblable à *StatCan*, mais par rapport au Québec.
- *Society of Actuaries* Life Table database Données sur la mortalité (principalement aux États-Unis). Les données remontent à très longtemps et sont exportables dans plusieurs formats (.csv, Excel, .xml).
- *Canadian Institute of actuaries* Studies and tables Études et tables de mortalité créés en collaboration avec l'ICA. On peut avoir les tables en pdf, excel.

1. Au moment d'écrire ce document, les plus récentes données nous donnaient l'information pour 2015.