# Contributeurs

# ACT-1XXX Cours de première année

aut., cre. Alec James van Rassel

**src.** Ilie Radu Mitric

**src.** Hélène Cossette

**src.** Thomas Landry

# Compléments de mathématiques

# Intégrales utiles à connaître

## Polynômes

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C \qquad \int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + C$$

### Fonctions exponentielles et logarithmiques

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \qquad \qquad \int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$$

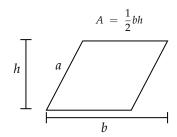
### Dérivées utiles à connaître

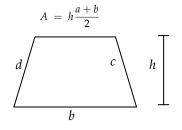
$$\frac{\partial}{\partial x}(a^x) = a^x \ln(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

#### Aires de formes





# Moyennes

La moyenne de n chiffres  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ .

#### Moyenne arithmétique

$$A(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

#### Moyenne géométrique

$$G(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = (x_1 \times x_2 \times ... \times x_n)^{1/n}$$

**Note:**  $G(x) \leq A(x)$ 

#### **Sommations**

$$\sum_{k=m}^{n} r^{k} = r^{m} \frac{1 - r^{n-m+1}}{1 - r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k v^{k} = \frac{v}{(1 - v)^{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{3} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

# **Estimation Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$
  
 
$$\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### Théorème de Leibnitz

Soit:

- $\rightarrow$  une fonction  $f(x, \alpha)$  continue sur [a, b] et
- $\Rightarrow$  des fonctions (dérivables) de  $\alpha$ ,  $u(\alpha)$  et  $v(\alpha)$ , prenant valeur dans [a,b]. Alors,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha) dx = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha) dx + f(v(\alpha),\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha) - f(u(\alpha),\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha)$$

### Domaines

 $\mathbb{R}$ : Real numbers,  $x \in (-\infty, \infty)$ .

 $\mathbb{Z}$ : Integers; all integers positive & negative,  $x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

 $\mathbb{N}$ : Natural numbers; all positive integers numbers,  $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ .

 $\mathbb Q$  : Rational numbers; numbers written as fractions, for example 1.25%,  $-0.4775, 3.\overline{153}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}.$ 

 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ : Irrational numbers; for example  $\pi$ , e,  $\sqrt{3}$ .

# **Fonction impaire**

Une fonction est impaire (*odd*) lorsque f(-x) = -f(x). Par exemple,  $\sin(-x) = -\sin(x)$ .

# Mathématiques financières

# Intérêt simple

$$a(t) = 1 + it$$

$$v(t) = \frac{1}{1 + it}$$

$$Prix = 100 \left(1 - \frac{it}{365}\right)^{-1}$$

#### facteurs d'actualisation et d'accumulation

$$a(t) = (1+i)^t$$
  $v(t) = (1+i)^{-t}$   
=  $(1-d)^{-t}$   $= e^{\int_0^t \delta_s ds}$   $= e^{-\int_0^t \delta_s ds}$ 

#### Conversion de taux

$$d=rac{i}{1+i}$$
  $i^{
m R}=rac{i-r}{1+r}$  Taux d'intérêt effectif annuel  $i=\left(1+rac{i^{(m)}}{m}
ight)^m-1$  Taux d'intérêt nominal annuel  $i^{(m)}=m\left((1+i)^{1/m}-1
ight)$  Taux d'escompte nominal annuel  $d^{(m)}=m\left(1-(1-d)^{1/m}
ight)$ 

#### **Rentes constantes**

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \qquad \qquad \ddot{\mathbf{s}}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$
$$\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{(i|d)}$$

#### **Rentes continues**

$$(\bar{I}\bar{s})_{\bar{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\bar{n}|i} - n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{s})_{\bar{n}|i} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\bar{n}|i}}{\delta} (\bar{I}\bar{a})_{\bar{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\bar{n}|i} - nv^n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{a})_{\bar{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\bar{n}|i}}{\delta}$$

#### Rentes (dé)croissantes annuellement

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^{n}}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$
$$(I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n(1+i)^{n} - s_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

### Rentes croissantes continûment

$$(I\ddot{a})_{\overline{\bowtie}|}=rac{1}{d(i|d)}$$
 Paiement en continu, valeurs accumulée et actualisée  $(ar{I}ar{s})_{\overline{n}|\delta_s,h(t)}=\int_0^nh(t)\mathrm{e}^{\int_t^n\delta_sds}dt$   $(ar{I}ar{a})_{\overline{n}|\delta_s,h(t)}=\int_0^nh(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\delta_sds}dt$ 

# Rentes avec croissance géométrique

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}i^{\mathrm{R}}} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i}\right]^{n}}{i - r} (1+i) \qquad \qquad \ddot{\mathbf{s}}_{\overline{n}i^{\mathrm{R}}} = \frac{(1+i)^{n} - (1+r)^{n}}{i - r} (1+i)$$

# **T-Bills**

$$Prix = 100 \left( 1 - \frac{dt}{360} \right)^t$$

# **Obligations**

#### Notation

- *P* Le **prix** de l'obligation;
- *F* La **valeur nominale** de l'obligation.
- > « face amount » ou « par value »;
- > La valeur nominale est l'unité dans laquelle l'obligation est émise.
- C La valeur de remboursement de l'obligation;
- > « redemption value »;
- $\rightarrow$  Par défaut, F = C.
- *r* Le taux de coupon par période de paiement;
- > « coupon rate »;
- > Le montant de chaque coupon est *Fr*;
- > Le taux est habituellement donné sous base **annuelle** mais la majorité des obligations ont des coupons payables semi annuellement.
- g Le taux de coupon "spéciale" utilisé dans les formules mathématiques;
- $\rightarrow$  Taux tel que Cg = Fr.
- *n* Number of remaining coupon **payments**.
- *i* Le taux d'intérêt effectif par période de paiement;
- > C'est le « *yield-to-maturity* » pour une obligation se transigeant au prix *P*. Donc, contrairement au taux *r* qui est une composante fixe de l'obligation, *i* va varier selon le prix *P*;
- $\rightarrow$  C'est donc le taux *i* tel que P = PV(bond payments).

# Formule pour prix

$$P = Fra_{\overline{n}|} + Cv^n \equiv Cga_{\overline{n}|} + Cv^n$$
  
=  $C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|} \equiv C + (Cg - Ci)a_{\overline{n}|}$ 

Condition	Équivalent	Obligation transigée	anglais
P > C	Fr > Ci	avec prime	with premium
P = C	Fr = Ci	avec parité	at par
P < C	Fr < Ci	avec escompte	with discount

#### Amortissement d'obligations

Book value

$$BV_t = (Fr - C)_{n-t}a_j + C$$

#### **Immunisation**

P(i) Valeur actualisée des flux monétaires au taux effectif i.

$$P(i) = \sum_{t=0}^{n} (A_t v^t)$$

Note La duration de *Macaulay* est surnommée « duration » par défaut alors que la convexité *modifiée* est surnommée « *convexité* » par défaut.

#### **Duration**

$$D_{\text{mac}}(i) = \frac{-P'(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=0}^{n} (t)(A_t v^t)}{P(i)}$$

$$D_{\text{mod}}(i) = \frac{-P'(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{t=0}^{n} (t)(A_t v^{t+1})}{P(i)}$$

$$D_{\text{mod}}(i) = vD_{\text{mac}}(i)$$

Portfeuille de n obligations ayant chacune un prix de  $P_k$ :

$$D_{\text{mac}}(\text{ptf.}) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D_{\text{mac}}(k\text{-\`eme obligation}) P_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k}$$

## Convexité

$$C_{\text{mod}}(i) = \frac{P''(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t(t+1)v^{t+2}A_t}{P(i)}$$
$$C_{\text{mac}}(i) = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2v^tA_t}{P(i)}$$

$$C_{\mathrm{mac}}(i) = rac{P''(\delta)}{P(\delta)} = rac{\sum\limits_{t=1}^{n} t^2 v^t A_t}{P(i)}$$

$$C_{\text{mod}}(i) = (C_{\text{mac}}(i) + D_{\text{mac}}(i))v^2$$

## **Approximations**

Approximation linéaire Basée sur la duration modifiée.

$$P(i) \approx P(i_0)[1 - (i - i_0)D_{\text{mod}}(i_0)]$$

**Approximation de Macaulay** Basée sur la duration de Macaulay.

$$P(i) \approx P(i_0) \left(\frac{1+i_0}{1+i}\right)^{D_{\text{mac}}(i_0)}$$

#### Obligation zéro-coupon de n années

Mesure	Égale
$C_{mac}$	$n^2$
$D_{mac}$	n
$C_{\mathbf{mod}}$	$\frac{n(n+1)}{(1+i)^2}$
$D_{\mathbf{mod}}$	$\frac{n}{1+i}$

# Taux au comptant et taux à terme

#### Notation

- $r_t$  Taux de rendement annuel effectif d'un investissement sur t années.
- > Taux au comptant ou « spot rate ».
- > Parfois appelé le taux zéro-coupon car  $r_t = P_t^{-1/t} 1$  où  $P_t$  est le prix d'une obligation zéro-coupon.
- > C'est en fait une moyenne des taux sur la période.

$$(1+r_n)^n = \prod_{i=1}^n (1+f_{t_i})$$

 $f_{[t_1,t_2]}$  Taux d'intérêt annuel effectif en vigueur de  $t_1$  à  $t_2$ .

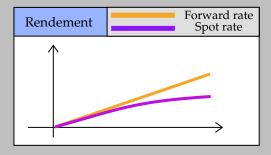
- > Taux à terme ou « forward rate ».
- > Habituellement, la période est d'un an ou d'un trimestre, mais en théorie il peut être appliqué sur n'importe quelle longueur de période.
- > Le taux à terme est une anticipation pour une période future en date d'aujourd'hui.

$$\rightarrow (1 + f_{[t_1,t_2]})(1 + f_{[t_2,t_3]}) = (1 + f_{[t_1,t_3]})$$

> Corrolaire:

$$f_{[t_1,t_2]} = \left[ \frac{(1+r_{t_2})^{t_2}}{(1+r_{t_1})^{t_1}} \right]^{1/(t_2-t_1)} - 1$$

Pour bien saisir la distinction entre les deux :



# Application aux obligations

- 1. Identifier les flux monétaires de l'obligation  $CF_t$ .
- 2. Actualiser chaque  $CF_t$  selon son taux à terme  $r_t$  pour déterminer le prix P.

3. Déterminer le taux de rendement i (« Yield-to-Maturity » , « IRR ») qui, en actualisant les  $CF_t$ , reproduit le prix P.

4. 
$$P = \sum_{t} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t} = \sum_{t} \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

# Analyse probabiliste des risques actuariels

# **Analyse combinatoire**

Analyse combinatoire La théorie mathématique du comptage.

## **■** Principe de base de comptage

Deux expériences sont effectuées.

La première a m événements possibles, et la deuxième a n événements possibles.

Ensemble, il y a  $m \times n$  événements possible pour les deux expériences.

On peut visualiser ceci avec un tableau:

(1,1)	(1,2)		(1,n)
(2,1)	(2,2)	• • •	(2,n)
:	:	٠.	:
(m,1)	( <i>m</i> , 2)		(m,n)

> Par exemple, la première cellule à l'événement 1 pour l'expérience 1 et l'événement 2 pour l'expérience 2.

# Théorèmes probabilistes

#### Théorème du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

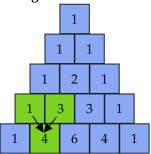
Théorème multinomial

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r):\\n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$$

Relations factoriels

$$\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal



> Triangle des coefficients binomiaux

Règle de Pascal

> Chaque nombre est la somme des 2 nombres directement au-dessus.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

## **Moments**

Moment d'ordre n (autour de l'origine).	$E[X^n] = \sum_i x_i^n \Pr(X = x_i)$
Moment <i>centré</i> d'ordre <i>n</i> .	$E[(X - E[X])^n] = \sum_{i} (x_i - E[X])^n \Pr(X = x_i)$
Moment <i>réduit</i> d'ordre <i>n</i> .	$E\left[\left(\frac{X}{\sqrt{V(X)}}\right)^n\right] = \sum_{i}^{r} \left(\frac{x_i}{\sqrt{V(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$
Moment <i>centré-réduit</i> d'ordre <i>n</i> .	$\left  E\left[ \left( \frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}} \right)^n \right] = \sum_i \left( \frac{x_i - E[X]}{\sqrt{V(X)}} \right)^n \Pr(X = x_i)$
Coefficient d'asymétrie (Skewness)	$\gamma_X = \mathrm{E}\left[\left(rac{\mathrm{X} - \mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}\right)^3\right]$
Coefficient d'aplatissement (Kurtosis)	$\kappa_X = \mathrm{E}\left[\left(rac{\mathrm{X} - \mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}} ight)^4 ight]$
Fonction stop-loss	$\pi_X(d) = \mathbb{E}\left[\max(X - d; 0)\right]$
Fonction d'excès-moyen	$\pi_X(d) = \mathrm{E}\left[X - d X > d\right]$

Note: Il est intéressant de savoir que les moments impairs d'une loi normal avec

moyenne nulle sont nuls. Ceci est la normal avec une moyenne nulle est parfaitement symétrique tel que f(-x) = -f(x); pour plus de détails, voir ce vidéo YouTube.

#### Raccourci bernoulli

Soit

$$X = \begin{cases} a & p \\ b & 1 - p \end{cases}$$

Alors

$$Var(X) = (b - a)^2 p(1 - p)$$

#### **Conditionnels**

$$E[X] = E_Y[E[X|Y]]$$

$$V(X) = E_Y[V(X|Y)] + V_Y(E[X|Y])$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

- 1. Cov(X, Y) = Cov(Y, X)
- 2. Cov(X, X) = V(X)
- 3.  $Cov(X,Y) \stackrel{\perp}{=} 0$
- 4. Cov(c, X) = 0
- 5. Cov(cX, Y) = cCov(X, Y)
- 6.  $Cov(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j Cov(X_i, Y_j)$

$$V(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j)$$
$$\rho_{P}(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

#### Convolution

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) dy$$

### Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire. Soit la fonction

de densité	$f_X(x) = \Pr(X = x)$	Density Function
de masse de probabilité	$f_X(x) \neq \Pr(X = x)$	Probability Mass Function (PMF)
de répartition	$F_X(x) = \Pr(X \le x)$	Cumulative Density Function (CDF)
de survie	$S_X(x) = \Pr(X > x)$	Survival Function (CDF)

 $F_X(x)$ 

#### Lois multivariées

#### Loi multinomiale

$$\Pr(X_1 = x_1, \dots, X_r = x_r) = \binom{n}{x_1, \dots, x_r} p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r}$$

#### Loi normale multivariée

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top} \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$$

### Théorèmes limites

# Inégalité de Markov

Soit la variable aléatoire (non-négative) *X*.

Alors  $\forall a > 0$  on a :

$$\Pr(X \ge a) \le \frac{\mathrm{E}[X]}{a}$$

## Inégalité de Tchebychev

Soit la variable aléatoire X avec  $\mu$ ,  $\sigma^2 < \infty$ .

Alors  $\forall k > 0$  on a :

$$\Pr\left(|X - \mu| \ge k\sigma\right) \le \frac{1}{k^2}$$
 ou  $\Pr\left(|X - \mu| \ge k^*\right) \le \frac{\sigma^2}{(k^*)^2}$ 

### Loi (faible) des grands nombres (WLLN)

Soit la suite de variables aléatoires (iid)  $X_1, \ldots, X_n$  tel que  $\forall i = 1, \ldots, n$   $E[X_i] = \mu$  et  $Var[X_i] = \sigma^2 > 0$ .

Alors  $\forall \epsilon > 0$  où  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|\bar{X}_n - \mu| \ge \epsilon\right) \to 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

où  $\mathbb{P}$  représente la convergence en probablité.

# Théorème central limite (CLT)

Soit la suite de variables aléatoires (iid)  $X_1, \ldots, X_n$  tel que  $\forall i=1,\ldots,n$   $\mathrm{E}[X_i]=\mu$  et  $\mathrm{Var}[X_i]=\sigma^2>0$ .

Alors pour  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \Leftrightarrow \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où  $\mathcal L$  représente la convergence en distribution ("law").