Contributeurs

Variables aléatoires

Notions aléatoires

1 Notion d'expérience aléatoire

Cadre dans lequel on observe différentes actions dues au hasard.

Notation

ω Le ***résultat*** d'une expérience aléatoire, alias *épreuve* ou *issue*.

Ω L'***ensemble* des résultats possibles**.

- Il s'ensuit que $\omega \in \Omega$.
- Par exemple, pour le lancer d'un dé où l'on désire savoir le résultat $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$.
- On dénote par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'**ensemble de toutes les parties** de Ω.

2 Notion d'événement aléatoire

Événement lié à une certain expérience aléatoire.

Un événement est tout **sous-ensemble** de Ω. Par exemple, pour l'expérience aléatoire de jeter un dé on a que l'ensemble des résultats possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement A « obtenir un nombre pair » s'écrit $A = \{2, 4, 6\}$. De ceci on déduit qu'à toute propriété définie sur Ω, on associe un sous-ensemble de Ω composé de tous les ω qui vérifient la propriété.

Algèbre de Boole des événements

Algèbre de Boole (« *boolean algebra* ») des événements

La classe $\mathcal{E}$ des événements est l'**algèbre de Boole de parties de** Ω, si elle contient Ω et est stable par intersection, réunion et complémentation.

Note On dit habituellement algèbre plutôt qu'algèbre de Boole.

Opérations logiques

Les opérations logiques que l'on peut effectuer sur les événements sont :

1. Soit les événements $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, alors :
   - $A \cup B$ est un événement réalisé ssi **au moins un** des deux est réalisé.
   - $A \cap B$ est un événement réalisé ssi **les deux** sont réalisés simultanément.
2. $\emptyset$ est un événement qui ne peut être réalisé appelé l'**événement impossible**. À chaque expérience, Ω est toujours réalisé et appelé l'**événement certain**.
3. $A \subset \Omega$ est un événement.
   - Le complément A^c ou $\overline{A}$ est appelé **événement contraire de** A et se réalise si $\omega \notin A$.
4. La **différence de deux événements** A et B est $\boxed{A \setminus B = A \cap B^c}$ se réalise si A est réalisé mais pas B.
5. La **différence symétrique** de A et B est $\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$ se réalise si l'un des deux événements est réalisé mais pas l'autre.
6. Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'événement A_n représente « **gagner** n **matchs** », alors
   - $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ représente « **gagner au moins un match** ».
   - $\cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ représente « **ne pas gagner de matchs** ».
7. Deux événements sont **incompatibles** si $\boxed{A_1 \cap A_2 = \emptyset}$.
   - On peut aussi dire que les parties de Ω représentées par A_1 et A_2 sont disjointes.
   - Si deux événements sont incompatibles, on a une somme au lieu d'une réunion avec $\boxed{A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2}$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
8. Si les événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment une **partition** de Ω, on dit que ses événements $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment un **système exhaustif** de Ω.
9. La suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :
   croissante ssi $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$
   décroissante ssi $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$
10. Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements d'un ensemble Ω, on représente que :
    une infinité de A_n est réalisé en écrivant que, quel que soit le rang $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des événements de rang supérieur (à k) qui sont réalisés : $\boxed{\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n}$.
    un nombre fini de A_n est réalisé en écrivant qu'il existe un rang tel qu'à partir de ce rang, tous les événements réalisés sont les contraires des événements A_n : $\boxed{\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n^c}$.

Limites de suite d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω. On défini les limites inf et sup d'événements par :

$$A_* = \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$A^* = \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

De plus, si les ensembles A_* et A^* coïncident, alors on écrit $A = A_* = A^* = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Propositions

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω.

i) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ alors $\boxed{\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ alors $\boxed{\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Espaces probabilisables

Tribu d'événements

La tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω tel que :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors l'événement $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Il y a une multitude de façons de choisir une tribu. Par exemple :

- la tribu la plus "grossière" est $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
- la tribu la plus "grosse" est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Espace probabilisable (ou mesurable)

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ composé d'un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.

Les éléments de Ω sont appelés ***éventualités*** et les éléments de $\mathcal{A}$ ***événements***.

Propriétés de la tribu

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

a) $\boxed{\emptyset \in \mathcal{A}}$.

b) $\forall A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, alors $\boxed{\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}}$ et $\boxed{\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}}$.

c) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}}$.

d) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\liminf A_n \in \mathcal{A}}$.

e) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\limsup A_n \in \mathcal{A}}$.

Note Voir la page 19 des notes de cours du chapitre 1 pour les preuves.

Variables aléatoires

Contexte

Souvent, un événement s'énonce de façon numérique (p. ex. : « rouler un 5 », « pluie de 2mm », etc.). Donc, à toute expérience ω, on associe un nombre $X(\omega)$ ou un n-uple de nombres $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ mesurant un caractère, ou un ensemble de n caractères, du résultat de l'expérience.

On suppose que X désigne une application : $\Omega \to \mathbb{R}$ et que $(X_1, \ldots, X_n)$ désigne une application $\Omega \to \mathbb{R}^n$. On dénote les événements les plus simples comme $\boxed{\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} = X^{-1}(I)}$ où I est un intervalle réel.

Variable aléatoire réelle

Tout application à valeurs réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall$ intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{X \in I\}$ soit un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

Tribu borélienne

La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous ses intervalles. Les éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sont appelés les ***boréliens*** de $\mathbb{R}$.

Pour une v.a. réelle X, alors $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ on a $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$.

Bref, $\boxed{(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})}$. On dit que la tribu $X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sur Ω est la ***tribu des événements engendrés par*** X.

Probabilités

Notion de Probabilité

Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle ***probabilité*** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :

i) $\boxed{P(\Omega) = 1}$.

ii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'événements deux à deux disjoints, $\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)}$.

Espace probabilisé

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle un espace probabilisé.

On complète la notion précédente sur l'espace borélien avec $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ où P_X est appelée loi de probabilité de X. On définit $P_X(B) = P(X \in B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$.

Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Alors :

a) $P(\emptyset) = 0$.

b) Si A et B sont des événements disjoints, alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

c) Si A et B sont des événements quelconques, alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

d) Si A et B sont des événements tels que $A \subset B$, alors $\boxed{P(A \setminus B) = P(B) - P(A)}$ et $\boxed{P(A) \leq P(B)}$.

e) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$.

f) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements quelconques, alors $\boxed{P\left(\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)}$.

g) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow \emptyset$, alors $\boxed{P(A_n) \downarrow 0}$.

h) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow A$, alors $\boxed{P(A_n) \downarrow P(A)}$.

i) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \uparrow A$, alors $\boxed{P(A_n) \uparrow P(A)}$.