Guide de survie en actuariat

Gabriel Crépeault-Cauchon et Nicholas Langevin

7 septembre 2019

Table des matières

Première partie

Fondements mathématiques utiles

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Définition d'un vecteur et une matrice

Vecteur ligne Un vecteur ligne $\boldsymbol{x}$est un vecteur de dimension $p \times 1$, tel que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix}$$

Matrice Une matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ de dimension m lignes par n colonnes , définie telle que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Matrice carrée Une matrice carrée $\mathbf{A}$ de dimensions $m \times m$ a autant de lignes que de colonnes.

non-négative $\mathbf{A}$ est définie comme *non-négative* si $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

positive $\mathbf{A}$ est définie comme *positive* si $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq 0$.

semi-positive $\mathbf{A}$ est définie comme non-négative, mais elle n'est pas définie positive.

Orthogonale $\mathbf{A}$ est *orthogonale* si elle est non-singulière et $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\top$ (voir sous-section 1.4.3 pour définition de $\mathbf{A}^{-1}$)

Matrice symétrique La mactrice $\mathbf{A}$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$, i.e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) Une matrice inférieure $\mathbf{L}$ est constituée de 0 en dessous de la diagonale :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

À l'inverse, on peut aussi avoir une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{U}$, où les éléments en haut de la diagonale sont tous égaux à 0 :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale Une matrice diagonale $\mathbf{D}$ a des éléments $d_{ii} > 0$ sur sa diagonale seulement. Cette matrice est à la fois triangulaire inférieure et supérieure. i.e.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un cas spécial de la matrice diagonale est la matrice identité $\mathbf{I}$, où $\mathbf{I}_{ii} = 1,\ \forall i$, i.e

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Matrice diagonalisable Une matrice $\mathbf{A}_{n\times n}$ est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice carrée $\mathbf{Q}_{n\times n}$ inversible (ou non-singulière) et une matrice $\mathbf{D}$ diagonale telle que

$$\mathbf{Q^{-1}AQ} = \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{QDQ^{-1}} \tag{1.3}$$

(Théorème sur les matrices symétriques) : Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable apr uen matrice orthogonale $\mathbf{Q}$.

1.2 Matrice transposée

Soit la matrice $\mathbf{A}$ définie en (1.1). On peut trouver la matrice transposée $\mathbf{A}^\top$, où $[a_{ij}] = [a_{ji]}$. **En d'autres mots, les lignes deviennent des colonnes.** Voici quelques propriétés intéressantes avec les matrices transposées :

- $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
- $(\mathbf{kA})^\top = \mathbf{kA}^\top$
- $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$
- $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ sont symétriques.

1.3 Opérations matricielles

Voici une liste non-exhaustive des opérations matricielles possibles. Côté notation, A et B représente des matrices, c re présente une constante

- $\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$
- $\mathbf{A}-\mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]$
- $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$
- Produit matriciel :
$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right]_{i\times j} \tag{1.4}$$
, avec $\mathbf{A} = [a_{ip}]$ et $B = [b_{pj}]$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $\mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I} = \mathbf{AA^{-1}}$, où I est la matrice identité (voir Équation 1.2) et A^{-1} est la matrice inverse de A (voir sous-section 1.4.3 au besoin)
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1.4 Trace, déterminant et matrice inverse

1.4.1 Trace d'une matrice

Soit la matrice carrée $\mathbf{A}$. On peut trouver la trace de cette matrice en sommant les éléments de sa diagonale, i.e.

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{1.5}$$

Propriétés de la trace d'une matrice

- $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{B})$
- $\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$ et $\mathrm{Tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{CAB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BCA})$

1.4.2 Déterminant d'une matrice

Soit la matrice carrée $\mathbf{A}$. On peut trouver le déterminant de $\mathbf{A}$, noté $\det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$, avec

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1.6}$$

De façon générale, lorsque les dimensions de la matrice carrée sont supérieures à 2, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \tag{1.7}$$

avec $1 \leq i \leq n$ où $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ et M_{ij} est le déterminant de la nouvelle matrice en enlevant la ligne i et la colonne j.
Si la matrice $\mathbf{A}$ est inversible (ou non-singulière, voir la sous-section 1.4.3), alors le déterminant aura les propriétés suivantes :

- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(AB)} = \det(A)^{-1}$

1.4.3 Matrice inverse

Soit la matrice carrée $\mathbf{A}$. On peut trouver la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ telle que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \operatorname{Adj}(\mathbf{A}) \tag{1.8}$$

où $\operatorname{Adj}(\mathbf{A}) = [C_{ij}]^T_{m\times n}$ et $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.5 Décomposition LDU de Choleski

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée symétrique définie positive. Alors, il existe une décomposition unique telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU} \tag{1.9}$$

où $\mathbf{L}, \mathbf{D}, \mathbf{U}$ sont respectivement des matrices triangulaire inférieure, triangulaire supérieure et diagonale.
Cette décomposition peut être fortement utile en programmation lorsqu'on fait des opérations sur des matrices, afin de limiter le nombre d'opérations.

1.6 Vecteurs et valeurs propres

1.6.1 Définition

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée. On dit que λ est une *valeur propre* de $\mathbf{A}$ s'il existe un vecteur $\mathbf{x} \neq 0$ tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{1.10}$$

On appelle le vecteur $\mathbf{x}$ un *vecteur propre* correspondant à la valeur propre λ. De plus, l'ensemble des nombres réels λ satisfaisant l'Équation 1.10 est appelé *spectre* de la matrice $\mathbf{A}$.

1.6.2 Propriétés intéressantes

Les vecteurs propres et valeurs propres permettent d'avoir plusieurs propriétés appréciables, notamment :

- Si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ correspondant à la valeur propre λ, alors $c\mathbf{x}$ sera également un vecteur propre de $\mathbf{A}$ correspondant à λ.

- Si $\mathbf{A}$ est symétrique et $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ sont des vecteurs ortogonaux, i.e. $\mathbf{x_1}^\top \mathbf{x_2} = 0$.
- Si $\mathbf{A}$ a les valeurs propres (pas nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

1.6.3 Décomposition spectrale

Soit $\mathbf{A}_{n\times n}$ une matrice symétrique avec les n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Il existe une matrice orthogonale $\mathbf{Q}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^\top \tag{1.11}$$

avec $\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Cette décomposition est fort utile lorsqu'on veut faire des produits matriciels successifs de la même matrice (appliqué directement dans les chaînes de Markov, voir section 4.1) :

$$\begin{aligned}\mathbf{AA} &= \mathbf{Q\Lambda} \underbrace{Q^\top Q}_{=\mathbf{I}} \mathbf{\Lambda Q}^\top \\ &= \mathbf{Q\Lambda^2 Q}^\top\end{aligned}$$

1.7 Dérivées de matrice ou vecteurs

Voici quelques entités pratiques :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{w}^\top \mathbf{v} = w$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)\mathbf{v}$$

Deuxième partie

Matière vue dans le baccalauréat en actuariat

Chapitre 2

Probabilités et statistiques

2.1 Concepts de probabilité de base

2.1.1 Probabilité conditionnelle

Définition de base

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \tag{2.1}$$

Loi des probabilités totales Soit E_i le *outcome* i parmi l'ensemble des n *outcome* possibles de l'évènement E, alors, on peut représenter la probabilité que l'évènement A survienne comme

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A|E_i) \Pr(E_i) \tag{2.2}$$

avec $\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) = 1$.

Relation importante de l'Équation 2.1, on peut représenter $\Pr(A|B)$ comme

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)} \tag{2.3}$$

2.1.2 Théorème de Bayes

En combinant l'Équation 2.3 et la loi des probabilités totales (l'Équation 2.2), on obtient le théorème de Bayes :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\sum_{i=1}^{n}\Pr(B|A_i)\Pr(A_i)} \tag{2.4}$$

2.2 Définition d'une variable aléatoire

2.3 Distribution d'une variable aléatoire

Fonction de densité, répartition, survie, hazard rate, etc.

2.4 Moments et quantités importantes

Espérance, variance, covariance, coefficient de variation, corrélation

Espérance Soit une v.a. X (continue ou discrète). Son espérance est définie telle que

$$\mathrm{E}[X] = \mu = \sum_{x=0}^{\infty} x\Pr(X=x) = \int_{0}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{2.5}$$

L'espérance d'une fonction de la v.a X est

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)\Pr(X=x) = \int_{0}^{\infty} g(x)f_X(x)dx \tag{2.6}$$

Variance

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 \tag{2.7}$$

quelques propriétés à savoir :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX) &= a^2\mathrm{Var}(X)\\ \mathrm{Var}(X+b) &= \mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

Covariance

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \sigma_{X,Y} = \operatorname{E}[(X - \operatorname{E}[X])(Y - \operatorname{E}[Y])] = \operatorname{E}[XY] - \operatorname{E}[X]\operatorname{E}[Y] \tag{2.8}$$

2.5 Distribution de probabilité qui reviennent souvent

Un tableau récapitulatif des différentes distribution de probabilité est disponible à l'

Chapitre 3

Mathématiques financières

Chapitre 4

Processus aléatoire

4.1 Chaîne de Markov

Troisième partie

Matière pour les examens professionnels

Annexe A

Principales distribution de probabilité utilisées

introduction