# 1 Introduction aux produits dérivés

**Produits dérivés**

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.
Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. Cependant, on peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peut couper des patates. Les produits dérivés sont en fait des **outils de gestion du risque** qui deviennent utiles lorsque le risque du sous-jacent augmente.

**Origine**

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devises de chaque pays.

**Exemples de produits dérivés**

- Contrat à terme standardisé (« *futures contract* ») ;
- Contrat à terme de gré à gré (« *forward contract* ») ;

  *Gré* : acceptation, ou consentement ;
- Option d'achat (« *call* ») ;
- Option de vente (« *put* ») ;
- Les « ***swaps*** ».

**Exemples de sous-jacent aux produits dérivés**

- Action ;
- Indice boursier ;
- Devise ;
- Climat ;
- Prix d'une marchandise.

**Utilité**

- Gestion des risques (**hedging**) ;

  Par exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole ;

  On dit qu'elle « *hedge* » contre le prix du pétrole.
- **Spéculation** ;

  Par exemple, un investisseur croit que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat.
- **Réduction** des **frais** de **transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger ;
- **Arbitrage** réglementaire : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges.

  Par exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote.

**Parties prenantes**

**End-users** participants au contrat du produit dérivé ;

**Teneur de marché** intermédiaire visant à faire un profit de la transaction entre end-users ;

- « *Market-makers* ».

**Economic observers** observateurs du marché analysant et régulant les activités des teneurs de marché et end-users.

## Transactions

**Transaction gré à gré**

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse.

**Raisons pour ce type de transaction**

- Ce sont souvent de grosses transactions permettant d'économiser sur les frais de transaction ;
- On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs microtransactions et plusieurs types d'actifs.

### Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent ;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** » ;
   - C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc. ;
   - Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire surnommé le « **clearing house** » ;
   - Elle met en relation les acheteurs et vendeurs *(1ère étape)*, et tient compte des obligations et paiements.
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* » ;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

### Vente à découvert « *(short-sell)* »

Lorsqu'on croit que le prix d'une action va baisser, on peut faire un profit quand même.

#### Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre ;
2. Vente du titre ;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre ;
4. Remboursement du titre

### Exemple de vente à découvert

- Mon ami James possède 5 actions d'Apple ayant chacune une valeur de 5$ ;
- Je lui emprunte ses 5 actions et lui promets d'y retourner ;
- Immédiatement, je revends ses actions sur le marché des actions ;
  - Je ne suis pas inquiété, je suis certain que le prix va baisser ;
  - Ce faisant, je suis certain que je serai capable de racheter ses actions plus tard à un prix plus faible.
- Après une certaine période de temps, j'achète 5 actions au nouveau prix et j'y retourne.

### Raisons pour une vente à découvert

- **Spéculation** : Un investisseur tire profit d'une baisse de prix ;
- **Financement** : Une vente à découvert est une façon d'emprunter de l'argent ;
- **Couverture** (hedging) : Un investisseur peut éliminer le risque d'une position longue sur une action avec une vente à découvert.

### Type de risques

**Risque de défaut (de crédit)** Risque de ne pas être payé ;
- Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité ;
- « *credit risk* ».

**Risque de rareté** S'il est difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent (peu de transactions signifient beaucoup de négociations et de variation dans les prix).

### Frais

L'**investisseur** est le *short-seller* et le **prêteur** le *détenteur des actions empruntées* par l'investisseur.

**« *short-sale proceeds* »** Les recettes de la vente sont conservées comme collatéraux au cas où que l'investisseur ne retourne pas les actions ;
- Soit le prêteur, ou un parti tiers, va conserver les revenus de la vente à découvert jusqu'au retour des actions ;
- À ce moment, elles seront retournées à l'investisseur.

**« *a haircut* »** Marge de sécurité pour couvrir le risque que le prix des actions augmente trop pour que l'investisseur ait la capacité financière des retourner, le prêteur exige un « dépôt » additionnel ;
- Comme les recettes de la vente, cette marge de sécurité sera retournée au prêteur.

**« *Interest* »** Il est naturel que le prêteur exige un retour sur la vente à découvert également ;

- Dans le marché des actions, l'intérêt accumulé sur le collatéral est le « *short rebate* » ;
- Dans le marché des obligations, c'est le **taux de mise en pension** (« *repo rebate* ») ;
- Ces taux sont habituellement *plus faibles que* ceux du *marché* et sont fondés sur l'offre et la demande.

**« *Dividends* »** Il est possible que des dividendes soient payables lors du prêt ;

- Puisque le détenteur de l'action sera celui à qui l'investisseur a vendu les actions, l'investisseur et le prêteur ne vont pas les recevoir ;
- Du point de vue du prêteur, les dividendes sont des paiements en espèce qu'il aurait reçus s'il n'avait pas prêté l'action ;
- Ce faisant, l'investisseur va payer ces dividendes au prêteur s'il y en a ;
- Ce paiement se nomme le **taux de location** (« *lease rate* ») de l'actif.

## Mesures de taille et d'activité d'un marché

**Volume total des transactions :** Nombre total de titres transigés pendant une période ;

**Valeur marchande :** nombre d'actions $\times$ prix par action ($) ;

- « *Market value* ».

**Valeur notionnelle :** Valeur de l'actif sous-jacent du produit dérivé ;

**Position ouverte :** Nombre de contrats encore en vigueur du produit dérivé.

- « *Open interest* ».

**Rôle des marchés financiers** : Partage du risque et diversification des risques.

## Bid-Ask Spread

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**). Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$.

## Prix

**Ask :** Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent ;

- Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé ;
- « *ask price* » se traduit au **cours vendeur** représentant l'idée de regarder les prix auxquels se transigent l'actif.

**Bid :** Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent.

- Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible ;
- « *bid price* » se traduit au **cours acheteur**.

## Terminologie des marchés

**Ordre au cours du marché :** On achète et vend selon les prix Bid Ask actuels ;

- « *Market order* ».

**Ordre à cours limité :** On achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$ ;

- « *Limit order* ».

**Ordre de vente stop :** On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si $Bid \leq k$ ;

- « *Stop-loss order* ».

**Longue** On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent ;

**Courte** On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

## 2 Introduction aux Forwards et aux options

**Terminologie**

**Premium :** Flux financiers à $t = 0$ ;

Prix de l'option / prime ;

Si positif, il s'agit d'un **coût** ;

Si négatif, il s'agît d'une **compensation**.

**Valeur à l'échéance $T$ :** Les flux de trésorier au temps $t = T$ ;

- « *payoff* » ;
- C'est à dire, l'argent que l'on reçoit à l'échéance ;
- Dans le cas de l'achat d'un actif, on reçoit son prix et donc s'il est nul on ne reçoit rien ;
- C'est le profit qui prend en compte les dépenses initiales et qui sera négatif.

**Profit**[a] = (valeur à l'échéance) - (valeur accumulée du coût initial)
= $VA$(flux monétaires)[b]

---

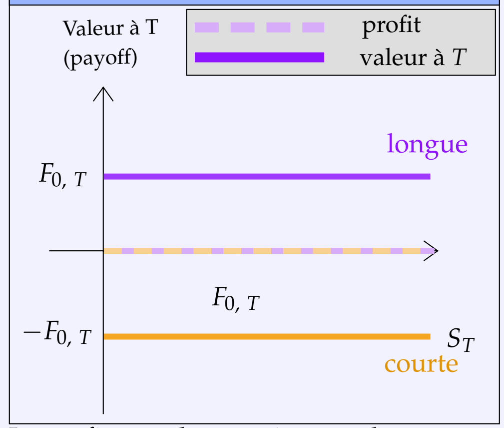
$r_f$ **:** taux d'intérêt sans risque (effectif annuel).

$r$ **:** force d'intérêt sans risque (annuelle).

a. Valeur **A**ccumulée au taux sans risque.
b. Par exemple acheter une voiture et la revendre 10 ans plus tard—(prix de revente à dans 10 ans) - (valeur accumulée du coût d'achat initial à 0 au courant des 10 dernières années).

### Obligation zéro coupon

Obligation zéro coupon




Le profit sera donc toujours nul.

La position

**longue** Équivaut à un dépôt ;

**courte** Équivaut à un emprunt.

| Valeur à l'échéance |
|---|
| $F_{0,T}$ |

| Profit |
|---|
| $F_{0,T} - (F_{0,T} - e^{-rT})e^{rT}$ |

### Contrat à terme (de gré à gré) « *forward contract* »

Contrat selon lequel :

- *deux* partis s'**engagent** d'**échanger**—un à *acheter* et l'autre à *vendre* ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent $S$ ;
- à un *certain* **prix**—prix à terme $F_{0,T}$ ;
- à un *certain* **endroit** à une *certaine* **date**—date d'échéance, $T$ ;

L'engagement est au départ à $t = 0$ mais aucune transaction y a lieu. Ce faisant, le profit sera égal à la valeur à l'échéance puisqu'il n'a pas de flux financiers à 0 à accumuler. L'achat **ferme** en revanche, implique l'*achat* et la livraison de l'actif au départ à $t = 0$. Donc :

| Transaction | Valeur à l'échéance | Profit |
|---|---|---|
| Achat ferme | $S_T$ | $S_T - S_0 e^{rT}$ |
| Contrat à terme (achat) | $S_T - F_{0,T}$ | $S_T - F_{0,T}$ |

### Notation de prix

$S_t$ : **Valeur** de l'actif sous-jacent à $t$ ;

$S_0$ : **Prix au comptant** ;

- Le prix au comptant représente le paiement pour la livraison immédiate à $t = 0$ ;
- « *(spot price)* ».

$F_{0,T}$ : est le **prix à terme** ;

- $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$

$F_{0,0}$ : est nul ;

- La notation $F_{0,T}$ vient de « future » ou « forward ».

### Exemple de bateau

- Je veux acheter un *(quantité)* bateau *(bien)*, mais il est inconvénient pour moi de le recevoir maintenant ;
- En lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente *(engagement)* pour l'acheter ;
- La seule différence entre l'acheter aujourd'hui *(au prix au comptant $S_0$)* et l'acheter lorsque la neige fond *(au prix à terme $F_{0,T}$)* est l'accumulation d'intérêt ;
- Puisqu'on suppose tout les deux d'êtres fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque ($r$) et le prix payable rendu à l'été ($T$) sera $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$ ;

  Si le taux sans risque est un **taux plutôt** qu'une *force* d'intérêt, on obtient $F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$.

## Exercice (levée)

Décision d'*exercer* l'option d'achat ou de vente.

### Notation

$K$ : **Prix d'exercice** ***(strike price)*** ;

### Types d'exercices

**<u>E</u>uropéen :** **Au moment** d'<u>e</u>xpiration de l'option $T$ ;

**<u>A</u>méricain :** **N'importe quand** (<u>a</u>ny moment) d'ici $T$ ;

**<u>B</u>ermudien :** À **quelques périodes** (<u>b</u>ounded periods) d'ici $T$ ;

En réalité, la *majorité sont européens* et donc nous effectuons uniquement des calculs avec ce type.

## Option d'achat

Contrat qui :

- *permet* **(optionnel)** à son *détenteur* **d'acheter** ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent ;
- à un *certain* **prix**—prix d'exercice $K$ ;
- à un *certain* **endroit** à, ou d'ici, une *certaine* **date**—date d'échéance, $T$ ;

### Notation

$C_0$ **Prix** pour acheter l'option d'achat ;

$C(K)$ Notation pour représenter l'option d'achat (« ***Call*** ») avec un prix d'exercice de $K$.

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $C(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec $C_0$.

## Option de vente

Contrat qui *permet* à son *détenteur* de **vendre** au lieu d'acheter.

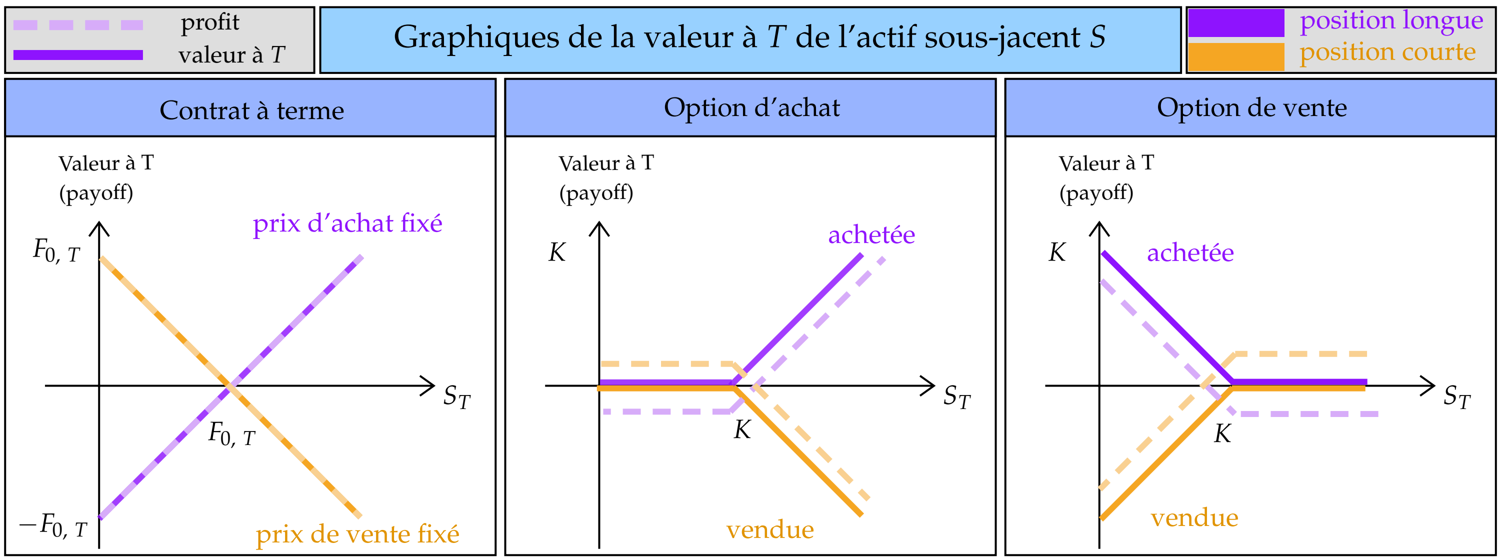
### Notation

$P_0$ **Prix** pour acheter l'option de vente ;

$P(K)$ Notation pour représenter l'option de vente (« ***Put*** ») avec un prix d'exercice de $K$.

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $P(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec $P_0$.

| Autre | Contrat | Position | Rôle | Stratégie | Valeur à $T$ (payoff ) | Profit |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Contrat à terme | | Longue | obligation d'acheter | garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent | $S_T - F_{0,T}$ | |
| | | Courte | obligation de vendre | garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent | $-(S_T - F_{0,T})$ | |
| Option | d'achat (call) | Longue | droit d'acheter | achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé | $\max\{0, S_T - K\}$ | $\max\{0, S_T - K\} - C_0 e^{rT}$ |
| | | Courte | obligation de vendre | vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé | $-\max\{0, S_T - K\}$ | $-\max\{0, S_T - K\} + C_0 e^{rT}$ |
| | de vente (put) | Longue | droit de vendre | achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible | $\max\{0, K - S_T\}$ | $\max\{0, K - S_T\} - P_0 e^{rT}$ |
| | | Courte | obligation d'acheter | vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible | $-\max\{0, K - S_T\}$ | $-\max\{0, K - S_T\} + P_0 e^{rT}$ |




| Degré de parité | « *Moneyness* » | Option d'achat | Option de vente |
|---|---|---|---|
| au cours | « *At-the-money* » | $S_0 = K$ | $S_0 = K$ |
| dans le cours | « *In-the-money* » | $S_0 > K$ | $S_0 < K$ |
| hors du cours | « *Out-of-the-money* » | $S_0 < K$ | $S_0 > K$ |

# 3 Stratégie de couverture

## Préliminaires

### Hypothèses

Pour tout le chapitre, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Taux d'intérêt $i$ constant ;
2. Aucuns frais de transaction ;
3. Aucun risque de défaut ;
4. Aucun versement intermédiaire.

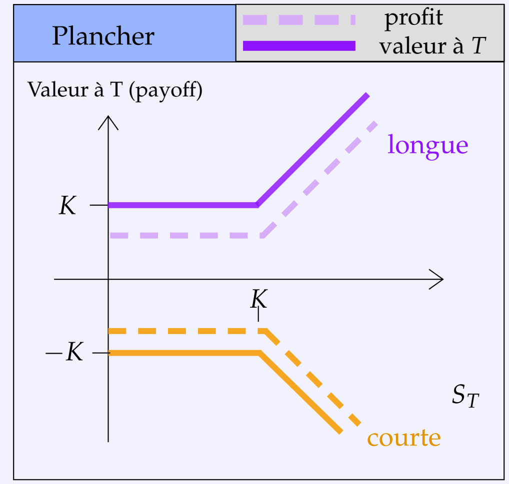
### Propriétés des maximums et minimums

$$\begin{aligned}
\max(a,b)+c &= \max(a+c,b+c)\\
\min(a,b)+c &= \min(a+c,b+c)\\
\min(a,b) &= -\max(-a,-b)\\
\max(a,b)\times c &= \max(a\times c,b\times c),\ c>0\\
\max(a,b)+\min(a,b) &= a+b
\end{aligned}$$

### Plancher « *floor* »

On achète une option de vente pour garantir un prix minimum de vente. On dit donc avoir une option de vente de protection qui sert de *plancher* minimale.

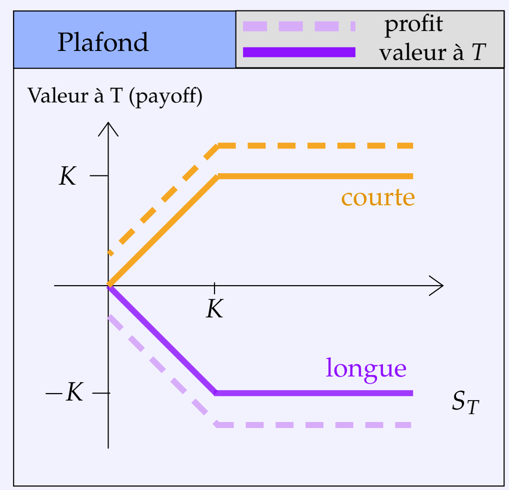
$$\begin{aligned}
\text{Floor} &= +S_T + P(K)\\
\text{Valeur à l'échéance} &= \max(0,K-S_T)+S_T = \max(S_T,K)
\end{aligned}$$




### Plafond « *cap* »

On achète une option d'achat pour garantir un prix maximal d'achat. Ce faisant, on *plafonne* le prix d'achat.

$$\begin{aligned}
\text{Cap} &= -S_T + C(K)\\
\text{Valeur à l'échéance} &= \max(0,S_T-K)-S_T = -\min(S_T,K)
\end{aligned}$$



## Écarts et tunnels

### Écart haussier « *Bull Spread* »

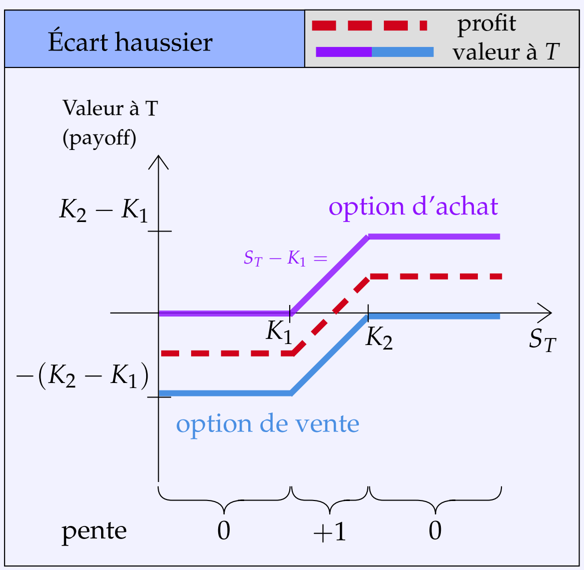
Crée en :

- Achetant une option d'achat $C(K_1)$ et vendant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$ ;
- Achetant une option de vente $P(K_1)$ et vendant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

**Contexte**

- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va augmenter, ***mais***
  - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
  - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
- « *Bull Spread* » provient de l'idée d'être « ***bull**-ish* » et prévoir une augmentation du prix de l'action à un intervalle ;

  On peut également visualiser un taureau avec ses cornes pointues vers le haut prêt à attaquer.




### Écart baissier « *Bear Spread* »

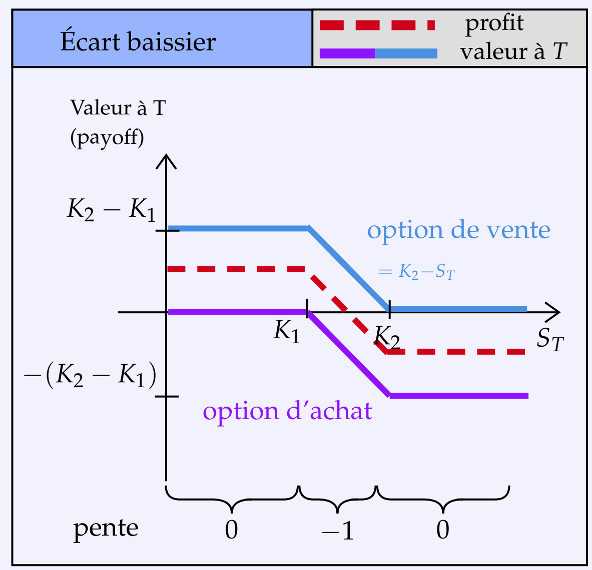
L'inverse d'un écart haussier, il est crée en :

- Vendant une option d'achat $C(K_1)$ et achetant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$ ;
- Vendant une option de vente $P(K_1)$ et achetant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

**Contexte**

- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va baisser, ***mais*** qu'il
  - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
  - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
- « *Bear Spread* » provient de l'idée d'investir avec précaution pour « ***bear**-er* » une et baisse du prix de l'action à un intervalle ;

  On peut également visualiser un ours qui va « strike down » avec ses pattes d'ours en attaque.



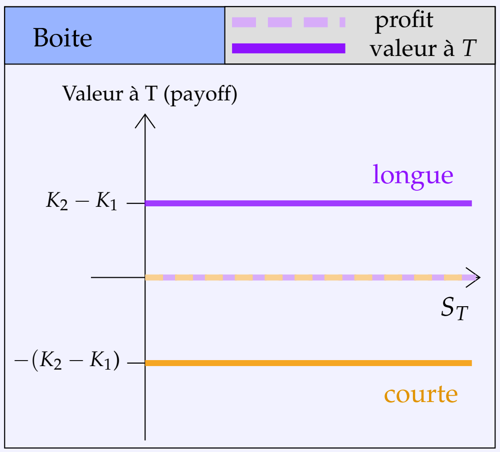
## Écart sur ratio d'options « *Ratio Spread* »

Crée en :

- **achetant** $m$ options à un prix d'exercice $K_1$ et
- puis **vendant** $n$ options à un prix d'exercice $K_2$ différent où
- $m \neq n$ et $K_1 \neq K_2$.

## Boite « *Box Spread* »

- La stratégie consiste à acheter un écart haussier ainsi qu'un écart baissier où l'un utilise des options d'achat et l'autre des options de vente (ayant les mêmes caractéristiques) ;
- Il est utilisé pour emprunter ou prêter de l'argent avec une valeur à l'échéance connue en avance, peu importe la direction prise par la valeur de l'actif sous-jacent ;
- Il est donc équivalent à une obligation zéro-coupons.




Par exemple, on achète (position longue) un écart haussier d'options d'achat et un écart baisser d'options de vente :

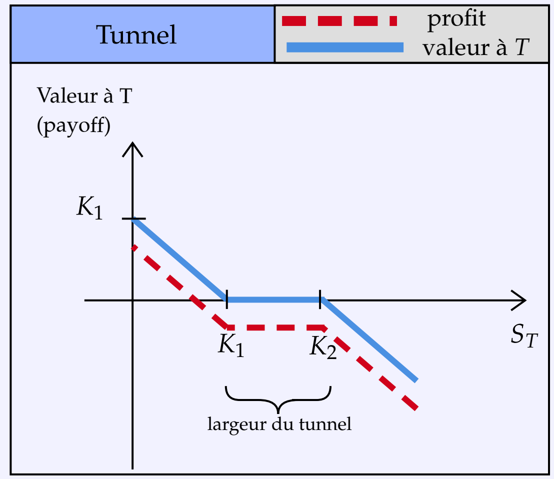
| option | $0 \leq S_T < K_1$ | $K_1 \leq S_T < K_2$ | $K_2 \leq S_T$ |
|---|---|---|---|
| $+C(K_1)$ | 0 | $S_T - K_1$ | $S_T - K_1$ |
| $-C(K_2)$ | 0 | 0 | $-(S_T - K_2)$ |
| $-P(K_1)$ | $-(K_1 - S_T)$ | 0 | 0 |
| $+P(K_2)$ | $K_2 - S_T$ | $K_2 - S_T$ | 0 |
| **net** | $K_2 - K_1$ | $K_2 - K_1$ | $K_2 - K_1$ |

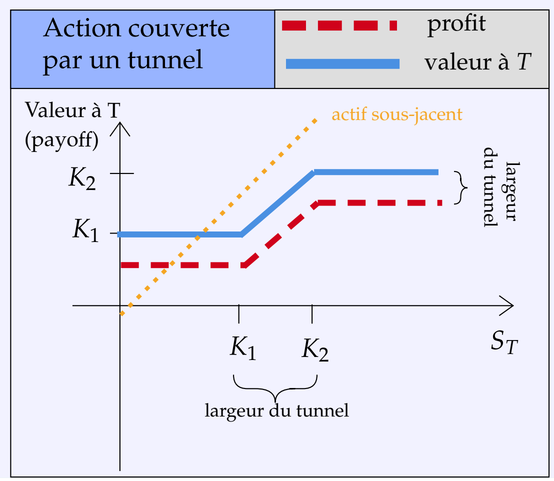
## Tunnel « *Collar* » et action couverte par un tunnel « *Collared stock* »

Le tunnel (« *Collar* ») est crée en

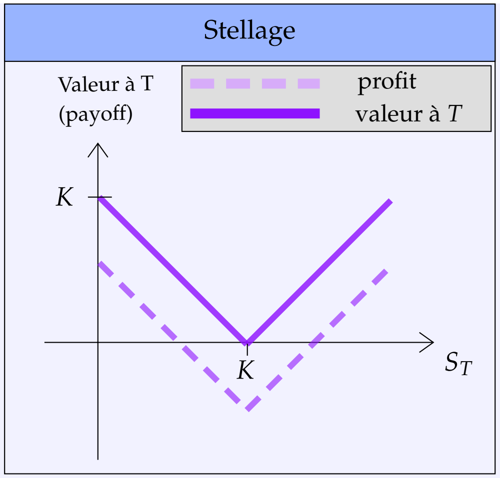
- Achetant une option de vente $P(K_1)$ et
- vendant une option d'achat $C(K_2)$ où
- $K_1 < K_2$.

Lorsqu'on achète l'actif (position longue) en plus, nous obtenons une action couverte par un tunnel (« *Collared stock* »).
La largeur du tunnel est $K_2 - K_1$.



$$\text{tunnel} = P(K_1) - C(K_2)$$
$$\text{action couverte par un tunnel} = P(K_1) - C(K_2) + S_T$$




## Spéculations sur la volatilité

### Stellage « *straddle* »

Créé en achetant une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice $K$.

**Contexte**

- Souvent bâti avec un prix d'exercice au cours du marché (in-the-money) ;
- L'idée est de faire un profit si le prix de l'actif sous-jacent **baisse ou descend** ;
- Son avantage est donc qu'il peut être profitable avec une baisse ou hausse du prix de l'actif sous-jacent ;
- Cependant, puisqu'il faut acheter deux options au cours du marché, le coût est plutôt élevé.

Straddle $= Put(K,T) + Call(K,T)$.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$|S_T - K| \equiv \begin{cases} (K - S_T) + 0 = K - S_T, & S_T \leq K \\ 0 + (S_T - K) = S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$

## Stellage élargi « *strangle* »

Créé en

- achetant une option de vente avec un prix d'exercice $K_1$ et
- achetant une option d'achat avec un prix d'exercice $K_2$ où
- $K_1 < K_2$.

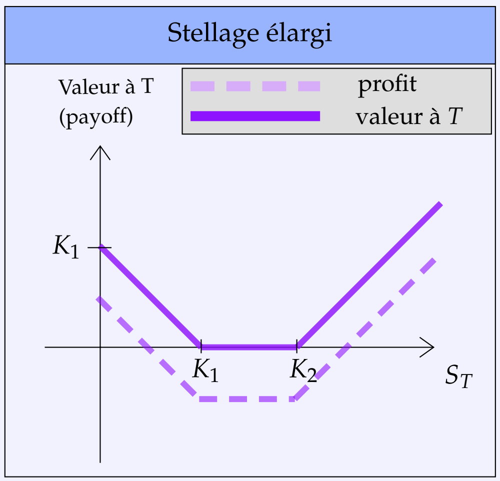
**Contexte**

- Pour réduire le coût des primes, les options sont à des prix d'exercice hors du cours du marché (out-of-the-money);
- Cela réduit la perte maximale, mais augmente la variation nécessaire pour faire un profit.

Strangle $= Put(K_1, T) + Call(K_2, T)$.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$\begin{cases} (K_1 - S_T) + 0 = K_1 - S_T, & S_T \leq K_1 \\ 0 + 0 = 0, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 + (S_T - K_2) = S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$




## Écart papillon « *Butterfly Spread (BFS)* »

Créé en

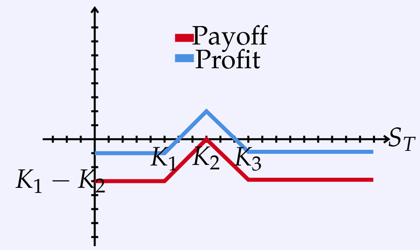
- achetant stellage élargi avec prix d'exercices $K_1$ et $K_3$;
- vendant un stellage avec un prix d'exercice $K_2$;
- où $K_1 < K_2 < K_3$;
- L'écart papillon est symétrique avec $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$.

BFS $= Put(K_1, T) + Call(K_3, T) - Put(K_2, T) - Call(K_2, T)$.

**Notes**

- Il existe plusieurs façons de recréer un écart papillon;
- Par exemple, un écart haussier aux prix d'exercice $K_1$ et $K_2$ combiné avec un écart baissier aux prix d'exercice $K_2$ et $K_3$.

BFS $= Call(K_1, T) - 2Call(K_2, T) + Call(K_3, T)$.




## Écart papillon asymétrique

- La distinction avec un écart papillon symétrique est qu'on achète/vend en différentes proportions des options d'achat;
- A-BFS $= mCall(K_1, T) - (m + n)Call(K_2, T) + nCall(K_3, T)$;
- L'écart est asymétrique avec $m(K_2 - K_1) = n(K_3 - K_2)$.

Puisque la différence en prix n'est pas symétrique, on fait une "interpolation" de sorte.

Pour calcule le nombre d'options à acheter/vendre aux différents prix :

1. On calcule la différence en prix total $K_3 - K_1$;
2. On calcule séparément les différences de prix :

$$K_2 - K_1$$
$$K_3 - K_2$$

**Intuition** La somme de ces deux différences résulte en l'écart total.

$$(K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) = (K_3 - K_1)$$

3. On :
   - vends $K_3 - K_1$ options au prix d'exercice $K_2$ ;
   - achète $K_2 - K_1$ options au prix $K_3$ ;
   - achète $K_3 - K_2$ options au prix $K_1$.
4. Avec des options d'achat, on obtient :

   $$+(K_3 - K_2)C(K_1) - (K_3 - K_1)C(K_2) + (K_2 - K_1)C(K_3)$$

   **Intuition** On peut donc pondérer par la différence totale et obtenir une "interpolation" :

   $$+\frac{(K_3 - K_2)}{(K_3 - K_1)}C(K_1) - C(K_2) + \frac{(K_2 - K_1)}{(K_3 - K_1)}C(K_3)$$

C'est d'ici que provient la notation avec $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Pour chaque option avec un prix d'exercice de $K_2$ vendue, on achète $\lambda K_1$ et $(1 - \lambda)K_3$.

# 5 Contrats à terme

## 4 façons d'acheter une action

| Contrat | Moment de paiement | Moment de d'achat | Paiement |
|---|---|---|---|
| Outright purchase | 0 | 0 | $S_0$ |
| Forward contract | $T$ | $T$ | $F_{0,T}$ |
| Prepaid forward contract | 0 | $T$ | $F^P_{0,T}$ |
| Fully leveraged purchase | $T$ | 0 | $S_0 e^{rT}$ |

**Achat pleinement par emprunt** « ***fully leveraged purchase*** » emprunte de l'argent pour acheter l'actif maintenant ($t = 0$) et rembourse l'argent au temps $T$ ;

**Contrat à terme de gré à gré prépayé** « ***prepaid forward contract*** » Au lieu de payer plus tard, on paye au début (à $t = 0$) au prix $F^P_{0,T}$, mais on reçoit quand même l'actif plus tard.

Ce faisant, on s'attend à ce que $F_{0,T} = F^P_{0,T} e^{rT}$.

**Notation de prix**

$F^P_{0,T}$ : est le **prix à terme** d'un contrat à terme de gré à gré **prépayé** ;

› $F_{0,T} = F^P_{0,T} e^{rT}$.

**La loi du prix unique**

Stipule que deux portefeuilles avec les mêmes profits doivent avoir le même prix.
Nous tarifions des contrats à terme de gré à gré *prépayé*s et utilisons ces prix pour dériver les prix des contrats à terme de gré à gré.

## Tarification d'un contrat à terme de gré à gré prépayé

Sans dividendes, le prix du contrat à terme de gré à gré prépayé est le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui—$S_0$.
Si une action a des dividendes, elles seront payables au propriétaire de l'action. Puisque l'acheteur du contrat (position longue) va seulement posséder le contrat au temps $T$, il ne recevra pas de dividendes. Cela va donc faire baisser la valeur de l'action et le prix du contrat devra le tenir en compte.
Dans le cas de **dividendes discrets**, il suffit de soustraire la valeur actualisée des dividendes : $F^P_{0,T} = S_0 - PV(div)$.
Un modèle de **dividendes payés continûment** suppose un taux de dividendes continûment composé $\delta$. Une part de l'action au temps initial devient $e^{\delta T}$ parts au temps $T$. Cependant, nous souhaitons avoir seulement une part au temps $T$ et donc achetons $e^{-\delta T}$ parts au début. Le prix du contrat est donc $F^P_{0,T} = S_0 e^{-\delta T}$.

En bref :

| Dividendes | Prix à terme prépayé | Prix à terme |
|---|---|---|
| Sans dividendes | $S_0$ | $S_0 e^{rT}$ |
| Dividendes payés continument | $S_0 e^{-\delta T}$ | $S_0 e^{(r-\delta)T}$ |
| Dividendes discrets | $S_0 - PV(div.)$ | $S_0 e^{rT} - FV(div.)$ |

**Prime à terme** « *forward premium* »

Défini comme le ratio du prix à terme au prix courant de l'actif sous-jacent :

$$\text{Prime à terme} = \frac{F_{0,T}}{S_0}$$

La prime à terme annualisée (« *annualized forward premium* ») est $\frac{1}{T} \ln\left(\frac{F_{0,T}}{S_0}\right)$.

**Contrat à terme synthétique** « *synthetic forward* »

Un contrat à terme synthétique réplique la valeur à l'échéance d'un contrat à terme sans réellement en signer un.
Avec un **vrai** contrat à terme :

› le coût initial est nul et

› la valeur à l'échéance est l'écart entre le prix à terme et la valeur du sous-jacent ($S_T - F_{0,T}$).

Avec un contrat à terme **synthétique** :

› on prévoit l'échange du bien contre un prix quelconque $K$ et

› la valeur à l'échéance est leur écart ($S_T - K$).

› Il s'ensuit que le coût initial ne peut être nul et

› c'est pourquoi on **emprunte de l'argent**, ou de façon équivalente, **vend une obligation zéro-coupons**.

En bref, on **achète l'actif** et **emprunte de l'argent** :

| Transaction | Flux au temps 0 | Flux au temps $T$ |
|---|---|---|
| Acheter un actif | $-S(0)$ | $+S(T)$ |
| Emprunter de l'argent | $+S(0)$ | $-S(0)e^{rT} = -F_{0,T}$ |
| Net des flux monétaires | 0 | $S(T) - F_{0,T}$ |

Est-ce de l'arbitrage ?

| Flux monétaires | Oui | Non |
|---|---|---|
| Au temps 0, est-ce que le flux monétaire net est $\geq 0$ ? | X | |
| Est-ce que tous les flux monétaires nets futurs sont $\geq 0$ ? | X | |
| Est-ce qu'au moins un des flux monétaires nets futurs est $> 0$ ? | X | |

Si la réponse à toutes les questions est oui, alors il y a une opportunité d'arbitrage. Pour identifier les flux monétaires, on utilise l'approche à deux étapes :

1. Écrire, sous forme d'inégalité, ce qui est observé ;
2. Déplacer tout ce qui est sur le côté inférieur ($<$) au côté supérieur ou égal ($\geq$) ;

   Nous avons les signes appropriés pour les transactions.

**Position synthétique**

Une position synthétique réplique la valeur à l'échéance d'une autre position.

**Achat au comptant - vente à terme « *Cash-and-carry* »**

L'investisseur reçoit de l'argent d'un emprunt qu'il utilise pour acheter l'action qu'il porte à terme au futur.

L'inverse arrive lorsque le marché offre un contrat à terme de gré à gré sous-évalué.

## Contrats de change

**Notation de devises**

DD **Devise domestique** (ou de départ) ;

DÉ **Devise étrangère** ;

$i_D$ taux d'intérêt dans la DD ;

$i_É$ taux d'intérêt dans la DÉ ;

$F^P_{0,T}$ : est le prix d'un contrat de change à terme prépayé en DD ;

$$F^P_{0,T} = x_0(1+i_É)^{-T}\text{DD}$$

$F_{0,T}$ : est le prix d'un contrat de change à terme en DD ;

$$F_{0,T} = x_0(1+i_É)^{-T}(1+i_D)^T\text{DD}$$

$x_t$ taux de change au temps $t$ en DD/DÉ

– Par exemple, $x_0 = \frac{2\$}{1€} = \left(2\frac{\$}{€}\right) \equiv \frac{2\text{DD}}{1\text{DÉ}}$

La logique des formules des contrats à terme de gré à gré est :

$$F^P_{0,T}(1\text{DÉ}) = \left(1\text{DÉ} \cdot \mathrm{e}^{-i_{\text{DÉ}}T}\right) \cdot \left(x_0 \frac{\text{DD}}{\text{DÉ}}\right) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{-i_{\text{DÉ}}T}\text{DD}$$

Un actif peut avoir un prix défini dans n'importe quelle devise ; on dit qu'il est « *denominated* » dans cette devise.

**Contrat de change synthétique**

1. Emprunt de $x_0(1+i_É)^{-T}$DD au taux $i_D$ ;
2. Convertir les DD en DÉ ;
3. Dépôt de $(1+i)^{-T}$DÉ (au taux $i$) de 0 à $T$.

La valeur à l'échéance sera $x_t - x_0\left(\frac{1+i_D}{1+i_É}\right)^T$.

## Contrat à terme standardisé

**Contrat à terme standardisé « *future contract* »**

Différences des contrats à terme standardisés aux contrats à terme de gré à gré :

1. **Personnalisable** ;
   - Pour un « *forward* », l'acheteur et le vendeur peuvent choisir n'importe quel prix, montant, date d'échéance ou actif sous-jacent ;
   - Pour un « *future* », ces composantes sont prédéterminées et ont dit donc qu'il est **standardisé**.
2. **Valorisation au prix du marché** « *Marked-to-Market* » ;
   - Pour un « *forward* », toutes les échanges d'argent se produisent à l'échéance (le contrat est réglé à l'échéance) ;
   - Pour un « *future* », les pertes et profits sont réglés tous les jours (processus de valorisation au prix du marché).
3. **Risque de défaut** ;
   - Pour un « *forward* », le contrat est pleinement exposé au risque de défaut ;
   - Pour un « *future* », avec le règlement quotidien des pertes et de profit le risque de défaut est minimisé.
4. **Liquidité** : fait référence à l'aise d'acheter ou de vendre un actif ou, de façon équivalente, de sortir ou entrer de leur position ;

- Pour un « *forward* », il est impossible de sortir d'un contrat et donc ils ne sont pas liquides ;
- Pour un « *future* », puisqu'ils sont transigés sur les marchés boursiers, ils sont liquides.

5. **Limite de prix** ;
   - Pour un « *forward* », il n'y a aucune limite de prix sur l'actif sous-jacent et il peut varier sans limites ;
   - Pour un « *future* », il y a des limites incluses dans le contrat.

Puisque le règlement des contrats à terme standardisé est différent des contrats à terme de gré à gré, le prix à terme sera également différent.

Ce faisant, la **balance de la marge** *dans une semaine* sera :

$$\overbrace{\underbrace{250}_{\substack{\text{nombre}\\\text{sous-jacent}}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{950}_{\text{prix inital}} \times \underbrace{0.10}_{\substack{\text{taux de}\\\text{marge initale}}} \times \underbrace{e^{0.06(1/52)}}_{\substack{\text{accumulé sur}\\\text{une semaine}}}}^{\text{marge de maintien}}$$

$$+ \overbrace{\underbrace{250}_{\substack{\text{nombre}\\\text{sous-jacent}}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{(F_{1/52,T} - 950)}_{\substack{\text{profit par action}\\\text{dans une semaine}}}}^{\text{gains (pertes)}}$$

## Marges initiales et de maintien « *initial and maintenance margins* »

**Compte** Afin de contrer le risque de défaut, l'acheteur et le vendeur doivent déposer de l'argent dans un compte (« a *margin account* ») accumulant de l'intérêt ;

**Marge initiale** Le dépôt initial est nommé la marge initiale (« *inital margin* ») ;

**Marge de maintien** Les pertes et profits sont soustraits du compte et donc un niveau minimal est requis—la marge de maintien (« *maintenance margin* ») ;

**Appel de marge** Si le montant dans le compte descend en dessous de la marge de maintien, nous recevons un appel de marge (« *margin call* ») qu'il faut y ajouter des fonds pour ramener la balance à la **marge initiale**.

**Exemple**

On suppose l'achat d'une action se transigeant au prix de 950$ aujourd'hui ($S_0$) ayant 250 parts sous-jacentes. La force d'intérêt ($\delta$) est de 6%, la marge initiale égale à 80% de la valeur notionnelle et la marge de maintien 10% de la marge initiale.

# 9 Parité et autres liens entre les options

**Équation de parité des options vente-achat**

$$C_{\text{Eur}}(K,T) - P_{\text{Eur}}(K,T) = F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}$$

En anglais c'est le « ***Put-Call Parity Equation*** ».

## Positions synthétiques

Avec l'équation de parité, on peut créer des options, actions ou obligations zéro-coupon synthétiques.

**Option d'achat**

$$-C(S,K) = \underbrace{-P(S,K)}_{\substack{\text{achat d'une option}\\ \text{de vente équivalente}}} \quad \underbrace{-F^P_{0,T}(S)}_{\substack{\text{achat d'une part}\\ \text{de l'action}}} \quad \underbrace{+Ke^{-rT}}_{\substack{\text{emprunt de } Ke^{-rT}\\ \text{au taux sans risque}}}$$

**Option de vente**

$$-P(S,K) = \underbrace{-C(S,K)}_{\substack{\text{achat d'une option}\\ \text{d'achat équivalente}}} \quad \underbrace{+F^P_{0,T}(S)}_{\substack{\text{vente d'une part}\\ \text{de l'action}}} \quad \underbrace{-Ke^{-rT}}_{\substack{\text{pret de } Ke^{-rT}\\ \text{au taux sans risque}}}$$

**Action**

$$-S_0 = \underbrace{+e^{\delta T}P(S.K)}_{\substack{\text{vente de } e^{\delta T}\\ \text{options de vente}}} \quad \underbrace{-e^{\delta T}C(S,K)}_{\substack{\text{achat de } e^{\delta T}\\ \text{options d'achat}}} \quad \underbrace{-Ke^{-(r-\delta)T}}_{\substack{\text{pret de } Ke^{-(r-\delta)T}\\ \text{au taux sans risque}}}$$

**Bon du trésor** (« *Treasury Bill (T-Bill)* »)

$$-Ke^{-rT} = \underbrace{+C(S;K)}_{\substack{\text{vente d'une}\\ \text{option d'achat}}} \quad \underbrace{-P(S;K)}_{\substack{\text{achat d'une}\\ \text{option de vente}}} \quad \underbrace{-S_0e^{-\delta T}}_{\substack{\text{achat de } e^{-\delta T}\\ \text{parts de l'action}}}$$

## Parité des options

### Parité des options sur devises

$C(x_0, K, T)$ Option d'achat qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance $T$ ;

$P(x_0, K, T)$ Option de vente qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance $T$.

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(x_0,K,T) - P(x_0,K,T) = x_0(1+i_{É})^{-T} - K(1+i_D)^{-T}$$

### Parité des options sur obligation

$B_0$ Prix aujourd'hui ($t = 0$) d'une obligation avec coupons ;

$F^P_{0,T}(B)$ Prix d'un contrat à terme standardisé prépayé sur une obligation avec coupons.

$$F^P_{0,T}(B) = B_t - PV(\text{coupons})$$

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(B_0,K,T) - P(B_0,K,T) = F^P_{0,T}(B) - F^P_{0,T}(K)$$

### Parité généralisée et option d'échange

On peut généraliser toute option comme étant l'option d'échanger des actifs—l'*actif sous-jacent* et l'*actif d'exercice*—que l'on nomme des **options d'échange**.

Les options d'achat et de vente sont donc des options d'échange avec de l'argent comme actif d'exercice. On généralise d'abord la notation au-delà du concept d'achat et de vente pour un certain prix :

**Notation**

$C(S,K)$ **:** Permet au détenteur de l'option d'achat de recevoir $S$ en échange de $K$ ;

$P(S,K)$ **:** Permet au détenteur de l'option de vente de recevoir $K$ en échange de $S$.

On peut penser à cette notation comme $C(\text{Receive}, \text{Give up})$ et $P(\text{Receive}, \text{Give up})$. Dans les deux cas, la valeur à l'échéance est $\max(0; \text{Receive} - \text{Give up})$.

**Notation Claire**

$S_t$ **:** Prix à $t$ de l'actif sous-jacent—le titre $A$ ;

$Q_t$ **:** Prix à $t$ du prix d'exercice—le titre $B$ ;

$C_{\textbf{euro}}(S_t, Q_t, T-t)$ **:** Permet, à $T$, d'achat le titre $A$ au prix du titre $B$ ;

$P_{\textbf{euro}}(S_t, Q_t, T-t)$ **:** Permet, à $T$, de vendre le titre $A$ au prix du titre $B$.

**Équation de parité des options d'échange**

$$C_{\text{euro}}(S_t,Q_t,T-t) - P_{\text{euro}}(S_t,Q_t,T-t) = F^P_{t,T}(S) - F^P_{t,T}(Q)$$

### Options sur devise

$$C^{DD}(x_0, K, T) = K \cdot P^{DD}\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{K}; T\right) = x_0 K \cdot P^{\text{DÉ}}\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{K}; T\right)$$

**Note** Si le prix d'exercice sera dans la même devise que le prix de l'option.

## Comparaison de différentes options

### Considérations différents types d'options

La première considération est que la valeur à l'échéance d'une option ne sera jamais négative puisqu'un investisseur « rationnel » n'exercerait simplement pas l'option. L'émetteur de l'option va donc toujours demander une **prime positive** pour accepter ce risque de perte.

Donc les options américaines et européennes vont toujours avoir une **valeur d'au moins 0$** :

$C(S, K, T) \geq 0$ $\qquad$ $P(S, K, T) \geq 0$

Une option européenne peut uniquement être exercée à l'échéance alors qu'une option américaine peut être exercé à n'importe quel moment d'ici l'échéance. Il s'ensuit qu'une **option américaine vaut au moins autant qu'une option européenne** :

$C_{\text{amer}}(S, K, T) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T)$ $\qquad$ $P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq P_{\text{euro}}(S, K, T)$

### Bornes inférieures

**Option européenne** Avec l'équation de parité des options vente-achat et que le coût ne peut pas être négatif on obtient :

$$\begin{aligned} C_{\text{euro}}(S, K, T) &= F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT} + P_{\text{euro}}(S, K, T) \\ &\geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right) \\ P_{\text{euro}}(S, K, T) &= F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT} + C_{\text{euro}}(S, K, T) \\ &\geq \max\left(Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\right) \end{aligned}$$

**Option américaine** Une option américaine aura une valeur d'au moins l'option européenne. Également, puisqu'une option américaine peut être exercé à tout moment, sa valeur doit être au moins la valeur d'un exercice immédiat.

**En bref**

**Bornes inférieures options**

$$C_{\text{amer}}(S, K, T) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$

$$P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq P_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\right)$$

et

$C_{\text{amer}}(S, K, T) \geq S - K$ $\qquad$ $P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq K - S$

### Bornes supérieures

**Option américaine**

**Option d'achat** À son exercice, l'option permet d'obtenir l'actif sous-jacent. Si cette option coûtait plus que le prix du sous-jacent, on a simplement à l'acheter au lieu d'une option.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option d'achat américaine est le prix au comptant (« *spot price* ») :

$$S \geq C_{\text{amer}}(S, K, T) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$

**Option de vente** La valeur à l'échéance maximale d'une option de vente est le prix d'exercice $K$ ; lorsque la valeur de l'action est nulle on a $\max(K - 0; 0) = K$. Si le prix était supérieur à $K$, le vendeur n'aurait qu'à vendre son action directement sur le marché.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option de vente américaine est le prix d'exercice :

$$K \geq P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq P_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\right)$$

**Option européenne**

**Option d'achat** La valeur à l'échéance sera au plus $\max(S_T - 0; 0) = S_T$. Le prix aujourd'hui pour avoir $S_T$ à $T$ correspond à un contrat à terme de gré à gré prépayé $F^P_{0,T}(S)$.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option d'achat américaine est ce contrat à terme de gré à gré prépayé :

$$F^P_{0,T}(S) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$

**Option de vente** La distinction avec la valeur maximal d'une option européenne est qu'elle est seulement reçu à $T$.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option de vente européenne est le prix d'exercice actualisé à 0 :

$$Ke^{-rT} \geq P_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^{P}(S); 0\right)$$

## Exercice hâtif des options américaines

### Notions d'intérêt et d'escompte

La valeur actualisée de l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice $K$ est $PV(\text{intérêt sur le prix d'exercice}) = K(1 - e^{-rT})$.

La valeur actualisée des dividendes correspond à l'écart entre le prix de l'action aujourd'hui $S_0$ et le prix à terme prépayé $F_{0,T}^{P}$ ; $PV_{0,T}(\text{divs}) = S_0 - F_{0,T}^{P}(S)$.

Dans le cas continu, $PV(\text{dividendes}) = S_0(1 - e^{-\delta T})$ et le cas discret $PV(\text{dividendes}) = \sum_{i=1}^{n} \text{div}_i e^{-rt_i}$.

### Options d'achat américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la **réception des dividendes**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est **l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice** $K$ et la protection, ou *assurance*, **contre le risque d'une baisse du prix de l'action**. Une protection contre ce risque de baisse correspond donc à une **option de vente**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K) - PV(\text{assurance})$ ;

   $PV(\text{assurance})$ sera donc égale au coût de l'option de vente équivalente.
2. Il n'est **jamais rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une option d'achat américaine **sans dividendes** ;

   Il s'ensuit qu'une **option d'achat américaine** sur une action **sans dividendes** a le **même prix** qu'une **option d'achat européenne** équivalente.
3. Il est ***possiblement* rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K)$.

### Options de vente américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la réception de prix d'exercice $K$ et **l'intérêt qu'on peut accumuler avec**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est de **continuer à recevoir des dividendes**. Également, la protection contre le risque de **ne *pas* vendre l'action à un prix plus élevé**. Une protection contre ce risque d'une hausse de prix correspond donc à une **option d'achat**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes}) + PV(\text{assurance})$ ;

   $PV(\text{assurance})$ sera donc égale au coût de l'option d'achat équivalente.
2. Il est ***possiblement* rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes})$ ;
3. Il s'ensuit qu'il est ***possiblement* rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une **option d'achat** américaine **sans dividendes**.

## Effet du prix d'exercice

Trois arguments sur comment différents prix d'exercices font varier les prix d'options. Ces arguments, ou *propositions*, expliquent le lien :

- La première proposition relie le prix d'option au prix d'exercice ;
- La deuxième proposition relie la différence des prix d'options à la différence des prix d'exercices ;
- La troisième proposition relie le taux de variation du prix de l'option selon le prix d'exercice.

### Proposition 1 : Lien entre les prix d'options et d'exercice

**Option d'achat** Une $\uparrow K$ mène à $\downarrow$valeur à l'échéance ainsi que $\downarrow C(K)$ ;

$$C(K_1) \geq C(K_2) \geq C(K_3)$$

**Option de vente** Une $\uparrow K$ mène à $\uparrow$valeur à l'échéance ainsi que $\uparrow P(K)$ ;

$$P(K_1) \leq P(K_2) \leq P(K_3)$$

### Proposition 2 : Lien entre la différence des prix d'options et d'exercice

- Une option d'achat profite d'une hausse de prix ;
- Si le prix d'exercice baisse de, par exemple, 10\$, alors la valeur à l'échéance maximale possible augmente de 10\$ ;

- Ce faisant le plus que je serai prêt à payer pour potentiellement avoir 10$ de plus *est* 10$ de plus.

**Option d'achat**

$$C_{\text{amer}}(K_1) - C_{\text{amer}}(K_2) \leq K_2 - K_1$$

$$C_{\text{euro}}(K_1) - C_{\text{euro}}(K_2) \leq (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

**Option de vente**

$$P_{\text{amer}}(K_2) - P_{\text{amer}}(K_1) \leq K_2 - K_1$$

$$P_{\text{euro}}(K_2) - P_{\text{euro}}(K_1) \leq (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

Si la différence en prix d'option était supérieure à la différence en prix d'exercice il y a arbitrage ; on peut avoir aucun risque de perte. Pour comprendre ceci, voir le graphique d'un écart-baissier et imaginer la ligne pointillée rouge uniquement au-dessus de l'axe des x.

### Proposition 3 : Lien entre le taux de variation des prix d'option et d'exercice

- Le prix d'une option d'achat décroît plus lentement lorsque le prix d'exercice augmente ;
- Le prix d'une option de vente croît plus rapidement lorsque le prix d'exercice augmente.

**Option d'achat**

$$\frac{C(K_1) - C(K_2)}{K_2 - K_1} \geq \frac{C(K_2) - C(K_3)}{K_3 - K_2}$$

**Option de vente**

$$\frac{P(K_2) - P(K_1)}{K_2 - K_1} \leq \frac{P(K_3) - P(K_2)}{K_3 - K_2}$$

# 10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

**Modèle binomial d'évaluation des options** le prix de l'actif sous-jacent au début d'une période devient un de deux prix possibles à la fin de la période ;

- en anglais c'est le « *Binomial Option Pricing Model* ».

**Notation de prix**

$u$ facteur de hausse « *"up" factor* » ;

$d$ facteur de baisse « *"down" factor* » ;

$S_u$ prix de l'action s'il y a une hausse ;
$S_u = S_0 u$

$S_d$ prix de l'action s'il y a une baisse ;
$S_d = S_0 d$

$h$ durée de chaque période ;

$\Delta$ nombre de parts d'actions à acheter ;

$B$ montant à prêter au taux sans risque ;

$V_u$ valeur à la node supérieure « *value at upper node* » ;

$V_d$ valeur à la node inférieur « *value at lower node* » ;

$V_0$ valeur du portefeuille au temps 0 alias **le prix**.

## Portefeuille réplicatif « *Replicating Portfolio* »

**Créer un portefeuille réplicatif**

1. Acheter $\Delta = \mathrm{e}^{-\delta h}\left(\frac{V_u - V_d}{S_0(u-d)}\right)$ parts de l'action ;
2. Prêter $B = \mathrm{e}^{-rh}\left[V_d\left(\frac{u}{u-d}\right) - V_u\left(\frac{d}{u-d}\right)\right]$ au taux sans risque ;

La valeur initiale du portefeuille réplicatif est donc $V_0 = \Delta S_0 + B$.

Selon les signes on observe :

| | $+$ | $-$ |
|---|---|---|
| $\Delta$ | achète des parts de l'action | vend des parts de l'action |
| $B$ | prête de l'argent | emprunte de l'argent |

Également, pour répliquer les options, les combinaisons sont :

| | Option d'achat | Option de vente |
|---|---|---|
| $\Delta$ | $+$ | $-$ |
| $B$ | $-$ | $+$ |

## Évaluation neutre au risque

- Présume que $\mathrm{E}[\text{rendement}] = r_f$ ;
- La technique pondère les possibilités de valeur à l'échéance des options avec des probabilités neutre au risque puis les actualise au taux sans risque ;
- En raison de la simplicité des calculs, les options sont souvent tarifiées avec l'évaluation neutre au risque ;
- Le prix est en fait identique à celui obtenu avec l'approche du portefeuille réplicatif.

**Notation**

$p^*$ la probabilité neutre au risque d'une hausse de l'actif.

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

Le prix est donc :

$$V_0 = \mathrm{e}^{-rh}\left[p^* V_u + (1 - p^*) V_d\right]$$

On déduit que $0 < p^* < 1$ ce qui mène à l'équation suivante :

$$d < \mathrm{e}^{(r-\delta)h} < u$$

Sinon, il y a arbitrage.

## Construction d'un arbre binomial

**Méthode générale** Arbitrairement sélectionner des valeurs de $u$ et $d$ pour l'arbre binomial crée ;

**Arbre binomial standard** Sélectionner des valeurs de $u$ et $d$ selon des prix à terme résultant en un arbre binomial standard.

### Arbre binomial standard

L'intuition est de multiplier le prix à terme de l'action par un facteur variant selon la volatilité.

**Notation**

$\sigma$ la volatilité annuelle du rendement de l'action composée continûment ;

L'écart type de la volatilité sur une période de durée $h$ est donc $\sigma\sqrt{h}$.

Le prix à terme est donc multiplié par $e^{\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix avec une hausse $S_u = F_{t,t+h}e^{\sigma\sqrt{h}}$ et $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix $S_d = F_{t,t+h}e^{-\sigma\sqrt{h}}$ avec une baisse.

On isole :

$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \qquad d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

Également, pour ce cas spécial, $p^*$ se simplifie à $p^* = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$

## Arbres binomiaux à plusieurs périodes

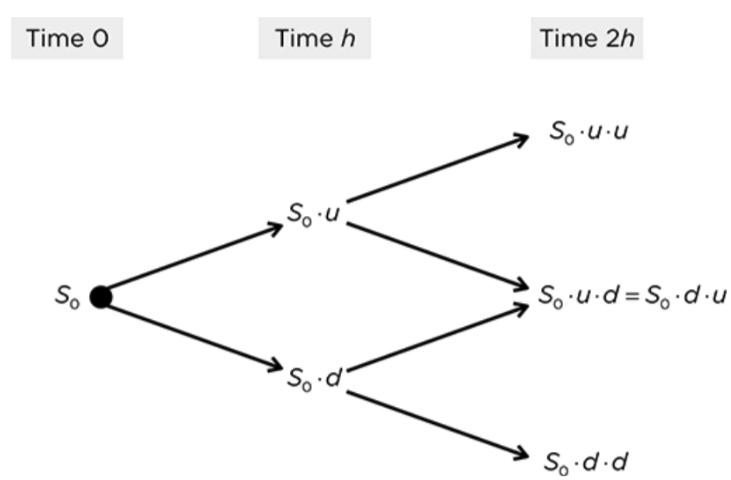
**Notation**

$n$ nombre de périodes ;

$h$ durée de chacune des périodes ;

$$h = \frac{T}{n}$$

La généralisation des méthodes précédente pour les arbres binomiaux à plusieurs périodes se résume à multiplier les facteurs $u$ et $d$.
Par example :




Lorsque les facteurs $u$ et $d$ sont fixes, l'arbre se recombine et $S_0 \cdot u \cdot d = S_0 \cdot d \cdot u$.

### Évaluation neutre au risque

Il y a 2 approches :

**Nœud par nœud** On calcule la valeur de l'option à chaque nœud récursivement avec l'évaluation neutre au risque jusqu'à arriver au prix ;

**Approche directe** Pour les **options européennes** dont l'**exercice hâtif n'est pas possible**.

**Approche directe**

1. Calculer la valeur à l'échéance ;
2. La pondérer par la probabilité neutre au risque de l'atteindre ;
3. L'actualiser au taux sans risque.

---

- La probabilité d'atteindre un nœud terminal est calculée avec une distribution binomiale ;
- Pour $n$ périodes, $k$ est le nombre de hausses $u$ pour atteindre le nœud ;
- La probabilité est :

$$\Pr(\text{atteindre un nœud ayant } k \text{ hausses}) = \binom{n}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{n-k}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

**Pour un nœud $u$**

$$V_u = e^{-rh}\left[p^* V_{uu} + (1-p^*)V_{ud}\right]$$

### Portefeuille réplicatif

$\Delta$ et $B$ ne restent pas constants et donc il faut prendre l'approche nœud par nœud. Ce faisant, il est ***beaucoup*** plus compliqué et long de trouver le prix avec cette approche.

**Pour un nœud $u$**

$$\Delta_u = e^{-\delta h}\left(\frac{V_{uu}-V_{ud}}{S_u(u-d)}\right)$$
$$B_u = e^{-rh}\left[V_{ud}\left(\frac{u}{u-d}\right) - V_{uu}\left(\frac{d}{u-d}\right)\right]$$
$$V_u = \Delta_u S_u + B_u$$

## Tarification d'options américaines

La distinction avec les options américaines est la possibilité d'un exercice hâtif.

**Valeur espérée actualisée (VEA)** valeur (« *payoff* ») pour un maintien de l'option ;

- « *Pull-back value* » car on se retire (« *pull-back* ») d'exercer l'option immédiatement.

**Valeur si levée (VSL)** valeur (« *payoff* ») pour un exercice hâtif.

- « *Immediate exercice value* ».

**Pour un nœud $u$**

$$VSL = \begin{cases}\max(0, S_u - K), & \text{option d'achat}\\ \max(0, K - S_u), & \text{option de vente}\end{cases}$$
$$VEA = e^{-rh}\left[p^* V_{uu} + (1-p^*)V_{ud}\right]$$
$$V_u = \max(VEA, VSL)$$

**Processus de tarification**

1. À partir du nœud le plus à droite de l'arbre décider à chaque nœud de l'arbre si l'exercice hâtif est optimal ;
   - Si $VSL > VEA$ alors il y a un exercice hâtif sinon on maintient l'option au moins une période de plus ;
   - Donc valeur au nœud $= \max\left(\begin{array}{cc}\text{valeur pour un} & \text{valeur pour un}\\ \text{maintien de l'option}, & \text{exercice immédiat}\end{array}\right)$.
2. Répéter jusqu'au nœud initial.

## Tarification d'options sur un contrat à terme standardisé

**Pas sur l'examen partiel hiver 2020.**

**Notation**

$T_F$ temps d'expiration du contrat à terme standardisé ;

$T$ temps d'expiration d'une option ;
$$T \leq T_F$$

$F_{t,T_F}$ Prix à terme au temps $t$ pour un contrat à terme standardisé expirant au temps $T_F$.
$$F_{t,T_F} = S_t e^{(r-\delta)(T_F-t)}$$

$u_F$ **et** $d_F$ Facteurs de hausse et de baisse pour un arbre de contrats à terme standardisés ;
$$u_F = u e^{-(r-\delta)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}$$
$$d_F = d e^{-(r-\delta)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

L'équation pour un arbre de contrats à terme standardisés suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} \quad\Rightarrow\quad p^* = \frac{e^{(r-r)h} - d_F}{u_F - d_F} = \frac{1-d_F}{u_F-d_F}$$
$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad u = e^{(r-r)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{\sigma\sqrt{h}}$$
$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad d = e^{(r-r)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$
$$\Delta = e^{-\delta h}\left(\frac{V_u - V_d}{S(u-d)}\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta = \frac{V_u - V_d}{F(u_F - d_F)}$$
$$B = e^{-rh}\left[V_d\frac{u}{u-d} - V_u\frac{d}{u-d}\right] \quad\Rightarrow\quad B = e^{-rh}[p^* V_u + (1-p^*)V_d]$$
$$V_u = \Delta(F u_F - F) + B e^{rh} \qquad V_d = \Delta(F d_F - F) + B e^{rh}$$

## Tarification d'options sur devises

**Notation**

$r_{\text{DD}}$ taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché domestique ;

$r_{\text{DÉ}}$ taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché étranger.

L'équation pour un arbre standard suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} \quad\Rightarrow\quad p^* = \frac{e^{(r_{\text{DD}}-r_{\text{DÉ}})h} - d}{u-d}$$
$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad u = e^{(r_{\text{DD}}-r_{\text{DÉ}})h+\sigma\sqrt{h}}$$
$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad d = e^{(r_{\text{DD}}-r_{\text{DÉ}})h-\sigma\sqrt{h}}$$

## Volatilité

**Notation**

$R$ variable aléatoire de la force du rendement (sous base annuelle) ;

**Hypothèse** Les rendements composés continûment sur des périodes disjointes, mais de même longueur $h$, sont i.i.d.

On suppose $n$ rendements, sur une période de $h$ années, composés continûment $r_{t,t+h}, r_{t+h,t+2h}, \ldots, r_{t+(n-1)h,t+nh}$. On peut estimer la volatilité historique avec :

$$s_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_{t+(i-1)h,t+ih} - \bar{r})^2}{n-1}}, \qquad \text{où} \qquad \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{t+(i-1)h,t+ih}}{n}$$

Donc $s_h$ estime $\sigma_h$ et $\bar{r}_h$ estime $\mu_h$ où :

$$\sigma_h = \sqrt{\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)\right)} = \sqrt{\mathrm{Var}(R_{t,t+h})}$$

$$\mu_h = \mathrm{E}[R_{t,t+h}]$$

Pour changer d'une base annuelle (le défaut de $h$) à une base quelconque, on divise par $h$ puisqu'il faut additionner $\frac{1}{h}$ rendements.

Par exemple, sous base mensuelle $h = \frac{1}{12}$ on a $\sigma = s_{1/12}\sqrt{12}$ ou sous base hebdomadaire $h = \frac{1}{52}$ on a $\sigma = s_{1/52}\sqrt{52}$.