Contributeurs

ACT-1003 Compléments de mathématiques

aut., cre. Félix Cournoyer

src. Ilie Radu Mitric

1 Rappels

Propriétés des limites

- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} k * f(x) = k * \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
- $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$
- $\lim_{x\to a} \log_b(x) = \log_b a \iff a > 0$
- $\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \quad \infty \iff b > 1, \quad = -\infty \iff 0 < b < 1$
- $\lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = -\infty \iff b > 1, \quad = \infty \iff 0 < b < 1$

Opérations avec les ∞

- $k \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty * \pm\infty = \pm\infty$
- $k * \pm\infty = \pm\infty$
- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$
- $\frac{k}{0^+} = \infty$, $\frac{k}{0^-} = -\infty$, pour k > 0

Limites indéterminées

Il est possible d'avoir une limite évaluée à l'infini qui donne $\frac{\infty}{\infty}$, ce qui est indéterminé. Pour évaluer cette limite, on peut passer par la règle de L'Hospital, où l'on dérive le numérateur et le dénominateur. Il y a toutefois une autre façon qui est assez simple, c'est-à-dire sortir l'élément qui a la puissance la plus élevée. Voici un exemple :

- $\lim_{x\to\infty} \frac{7*x^4-2*x+4}{2*x^5-3*x^3-11} = \frac{\infty}{\infty}$
- On peut toutefois sortir x^4 du numérateur et x^5 du dénominateur.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4*(7-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4})}{x^5*(2-\frac{3}{x^2}-\frac{11}{x^5})} = \lim_{x\to\infty} \frac{7-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{x*(2-\frac{3}{x^2}-\frac{11}{x^5})}$
- De ce qu'on a vu précédemment avec les opérations avec les ∞, le numérateur donne 7 et le dénominateur donne $2 * \infty$, ce qui nous amène à la valeur de la limite qui est de 0.

2 Fonctions

Caractéristiques de fonctions

Il existe trois caractéristiques pour une fonction donnée : la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité.

Lorsque tous les y d'une fonction, c'est-à-dire chaque élément de son image, sont tous reliés à au moins un x, la fonction est dite surjective. Par exemple, la fonction x^2 n'est pas surjective car y=-1 n'a pas de x dans les réels. Si on limite toutefois l'image aux réels positifs, la fonction devient surjective, car chaque y des réels positifs ont au moins un x correspondant.

Lorsque tous les y d'une fonction ne sont reliés qu'à un seul x, la fonction est dite injective. En reprenant x^2, on peut démontrer qu'elle n'est pas injective : $x^2 = (-x)^2$. Toutefois, 2x est injective car il n'existe pas deux x pouvant donner le même y.

La fonction est bijective lorsqu'elle est à la fois bijective et injective, ce qui veut dire que chaque y de la fonction ne possède qu'un seul x. En reprenant 2x, on peut démontrer sa bijectivité : chaque y possède un x dans les réels. La fonction étant aussi injective, elle devient alors bijective.

Racines réelles

On peut identifier les racines réelles à l'aide d'un calcul simple. Si on a la fonction $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$, on doit utiliser la fonction suivante :

$$\pm\frac{Facteurspositifsdea_0}{Facteurspositifsdea_k}$$

Le numérateur serait 24 et le dénominateur serait 1 (car $24x^0$ et $1x^3$). Les racines de la fonction sont donc $\in \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24\}$. Il faut ensuite essayer les chiffres de l'ensemble de la fonction. Par exemple, en ayant x=2, la fonction donne 0. En divisant la fonction par (x-2), il reste $x^2 - x - 12$. On peut encore essayer avec les racines du départ et on verrait qu'en ayant x=-3, la fonction donne 0, ou on peut déjà voir qu'il reste (x+3)(x-4).

Fonctions inverses

Pour obtenir une fonction inverse, il faut avoir une fonction bijective sur l'intervalle donné dans l'énoncé. Par la suite, on isole x dans la fonction et on remplace x par $f^{-1}(x)$ et y par x. Pour reprendre l'exemple plus haut :

$f(x) = x^2$

On peut trouver l'inverse lorsque les intervalles sont de $[0, \infty[\to [0, \infty[$ étant donné la bijectivité sur cet intervalle. En isolant x, on a la fonction $\sqrt{y} = x$ et on remplace les variables. On obtient $\sqrt{x} = f^{-1}(x)$ pour les intervalles $[0, \infty[\to [0, y[$.

Fonctions monotones

Il existe quatre types de fonctions monotones.

La première la fonction dite non-décroissante; elle augmente sans arrêt, mais peut avoir un plateau ($f(x_1) \leq f(x_2)$).

Il y a la fonction strictement croissante, qui s'apparente à la première, mais qui ne peut avoir de plateaux ($f(x_1) < f(x_2)$). On peut penser à une fonction linéaire à pente positive pour se l'imaginer. Une fonction qui est strictement croissante est donc aussi non-décroissante. Une fonction en escalier avec une "pente positive" serait par exemple une fonction non-décroissante, mais pas strictement croissante avec ses plateaux.

Il existe aussi la fonction non-croissante, qui se veut une fonction décroissante sur son domaine, mais qui peut avoir un plateau ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Pour finir, il y a aussi la fonction strictement décroissante, où il ne peut y avoir de plateaux ($f(x_1) > f(x_2)$). On peut penser à une fonction linéaire à pente négative pour se l'imaginer. Une fonction qui est strictement décroissante est donc automatiquement une fonction non-croissante.

3 Limites

3.1 Théorème du sandwich

Nous avons au départ :

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$

Nous avons aussi h suivant :

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

Le but du théorème est alors de trouver la valeur de la limite de h, comme on peut voir par cette image :