

CONTRIBUTEURS

ACT-1002 Analyse probabiliste des risques actuariels

aut., cre. Alec James van Rassel

src. Hélène Cossette

Domaine et définition

Random Process : Famille de variable aléatoires $\{X_t : t \in T\}$ qui associe un espace d'états Ω à un ensemble S .

Ω : L'espace d'états Ω est composé des événements possibles de la variable aléatoire X .

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $\Omega = \{\text{Face}, \text{Pile}\}$.

S : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω .

Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie $S = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

iid : Les variables aléatoire X_t doivent être indépendantes et identiquement distribuées. Ceci est dénoté par *i.i.d.*.

indépendant : Si X_t est une variable aléatoire *iid* alors, pour 2 variables aléatoires X_i et X_j , où $i, j \in T$, le résultat de X_i n'a aucun impact sur le résultat de X_j pour tout $t \in T$.

identiquement distribué : L'ensemble S est l'ensemble des probabilités des événements dans Ω .

Probabilité de X_t : La probabilité d'un événement X_t est dénoté $\Pr(X_t)$. Ces probabilités forment l'ensemble S .

Propriété : $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Pr(X_i) = 1$

Types de variables aléatoire : Il y a 2 types de variables aléatoire, les distributions *discrètes* et *continues*.

Discrète : Si l'ensemble S est dénombrable, c'est-à-dire que $S = \{s\}$, alors la variable aléatoire X est dite **discrète**.

Continue : Si l'ensemble S n'est pas dénombrable alors la variable aléatoire X est dite **continue**.

Principes de base de comptage

Définition du principe de base : Pour une expérience 1 avec m résultats possibles et une expérience 2 avec n résultats possibles, il y a $m \times n$ possibilités.

Permutations : Nombre de possibilités d'arrangements en tenant compte de l'ordre. La façon de dénombrer les arrangements dépend du type de question.

Exemples : Combien de façons peut-on arranger les chiffres 1, 2, 3 et 4 dans un nombre à 4 chiffres ? La réponse est 4!.

Toutefois, si on demande combien de façons on peut distribuer 12 cadeaux différents à 4 personnes, la réponse sera $4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!$ (chaque cadeau peut aller à l'une ou l'autre des quatre personnes).

Probabilité conditionnelle

Conditionnel : La probabilité que A arrive sachant que B est arrivé est :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

où la probabilité que B arrive est non-nulle, $\Pr(B) > 0$.

Indépendant : Les événements A et B sont indépendants si :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Avec la première définition de la probabilité conditionnelle, on peut trouver ces résultats :

Relation probabilité conditionnelle : La probabilité que l'événement E_2 ait lieu sachant que l'événement E_1 a déjà eu lieu est équivalent à la probabilité que l'événement E_1 ait lieu sachant que E_2 a déjà eu lieu multiplié par la probabilité que l'événement E_2 ait lieu peu importe E_1 .

Le tout est encore pondéré par la probabilité que l'événement E_1 ait lieu peu im-

porte si E_2 y a.

$$\begin{aligned} \Pr(E_2|E_1) &= \frac{\Pr(E_2 \cap E_1)}{\Pr(E_1)} \\ &= \frac{\Pr(E_1|E_2) \Pr(E_2)}{\Pr(E_1)} \end{aligned}$$

Loi des probabilités totales : Les probabilités liées à la variable aléatoire E lorsqu'elles sont conditionnelles à la variable aléatoire discrète F est dénoté comme suit :

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^n \Pr(E|F_i) \Pr(F_i)$$

Formule de Bayes : On combine les deux résultats précédents :

$$\Pr(F_i|E) = \frac{\Pr(E|F_i) \Pr(F_i)}{\sum_{i=1}^n \Pr(E|F_i) \Pr(F_i)}$$