Notes du dernier cours
ACT-1001

Chapitre 7

Duration et immunisation

7.2 Appariement et immunisation

Anglais :

- Immunisation : *Immunization*
- Appariement : *Asset-Liability matching (ALM)*

Notation à utiliser :

- L_t : flux de passif (*liabilities*)
- A_t : flux d'actif (*assets*)

On suppose une structure plate ($s_0(t) = i \forall\ t$) et qu'on est dans un marché efficient (on emprunte et investit au même taux).

Objectif : on veut minimiser l'impact d'un changement dans le taux d'intérêt sur la situation de la compagnie. On peut le faire par appariement, soit

$$A_t = L_t \quad \forall\ t$$

Dans le même sens,

$$\sum_{t=0}^{n} (A_t - L_t)(1+i)^{-t} = 0$$

Ce qui signifie qu'en changeant le taux d'intérêt, les VA_A et VA_L vont changer, mais leur différence va toujours être égale à zéro. Nous en rediscuterons dans la section sur l'immunisation complète (7.2.2).

Sans surprise,

$$VA_A = \sum_{t=0}^{n} A_t (1+i)^{-t} \tag{7.1}$$

$$VA_L = \sum_{t=0}^{n} L_t (1+i)^{-t} \tag{7.2}$$

Exemple

On connaît $L_1 = 1, \quad L_2 = 2, \quad L_3 = 3$. On veut savoir combien d'obligations à coupon *annuel* de 2% il nous faut, selon leur échéance. Les obligations sont notées A_1, A_2 et A_3, où A_n est une obligation avec échéance dans n années. Pour les fins de l'exemple, on suppose un marché efficient où l'on peut acheter des fractions d'obligations.

On représente α_n comme le nombre d'obligation qui a échéance dans n années.

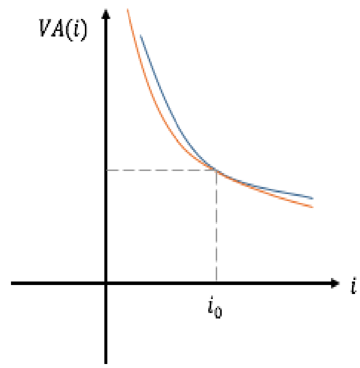
$$\begin{aligned}
A_1 &= 2\alpha_3 & +2\alpha_2 + 102\alpha_1 && = 1 \\
A_2 &= 2\alpha_3 & +102\alpha_2 && = 1 \\
A_3 &= 102\alpha_3 & && = 1
\end{aligned}$$

C'est un système d'équation très simple à résoudre en commencant par le flux d'actif A_3.

7.2.1 Immunisation selon Redington

Encore une fois, cette section est dans un contexte de Structure plate.

L'immunisation selon reddington fonctionne dans le cas où les taux subissent un choc instantanée, mais que la structure reste néanmoins plate.



Pour dire qu'on est immunisé, on désire que $VA_A > VA_L$ au taux actuel i_0 donné. Toutefois, si on veut une immunisation totale en tout point, le flux d'actif doit être plus convexe que le flux de passif. Bref, voici les 3 conditions de Redington à respecter :

$$VA_A(i_0) = VA_L(i_0) \tag{7.3}$$
$$\frac{d}{di}VA_A\Big|_{i=i_0} = \frac{d}{di}VA_L\Big|_{i=i_0} \tag{7.4}$$
$$\frac{d^2}{di^2}VA_A\Big|_{i=i_0} = \frac{d^2}{di^2}VA_L\Big|_{i=i_0} \tag{7.5}$$
$$\tag{7.6}$$

On peut ré-écrire ces 3 conditions de 2 autres façons :

$$VA_A(i_0) = VA_L \tag{7.7}$$
$$D_A(i_0) = D_L(i_0) \tag{7.8}$$
$$C_A(i_0) = C_A(i_0) \tag{7.9}$$
$$\tag{7.10}$$

$$VA_A(i_0) = VA_L \tag{7.11}$$
$$MD_A(i_0) = MD_L(i_0) \tag{7.12}$$
$$MC_A(i_0) = MC_A(i_0) \tag{7.13}$$
$$\tag{7.14}$$

⚠ L'immunisation de Reddington ne fonctionne que pour un petit choc.

On pose donc les 2 premières conditions, puis on isole A_{t_2} et A_{t_2} Dans les équations. Finalement, on valide la 3e condition pour la dérivée seconde.

7.2.2 Immunisation complète

en anglais : *Full Immunization.*

Définition : Les flux d'actifs immunisent complètement les flux de passif si

$$VA_A(i) \geq VA_L(i) \quad \forall\ i > 0 \tag{7.15}$$

Remarque : l'immunisation, qu'elle soit complète ou selon Redington, requiert en pratique des ajustements périodiques.

La preuve mathématique a été faite en cours (je l'épargne ici) que si on a des flux de passifs $L_t \quad t = r, r+1, ...s-1, s$, ces derniers seront complètement immunisés par des flux d'actifs $A_{t_1} \quad t_1 \leq r$ et $A_{t_2} \quad t_2 \geq s$ si les 2 premières conditions de Redington sont respectées, soit

$$VA_A(i_0) = VA_L(i_0)$$
$$t_1 A_{t_1}(1+i_0)^{-t_1} + t_2 A_{t_2}(1+i_0)^{-t_2} = \sum_{t=r}^{s} t L_t (1+i_0)^{-t}$$

Chapitre 9

Sujets avancés en finance

Dans le cadre du cours ACT-1001, on en voit qu'un seul : le modèle d'évaluation des actions par l'actualisation des dividendes (Dividend Discount Model).

9.1 Modèle d'évaluation des actions par l'actualisation des dividendes

Tout d'abord, un peu de vocabulaire :

Bid cours acheteur (Prix offert le plus élevé) ;

Ask cours vendeur (Prix demandé le plus faible) ;

Spread écart acheteur-vendeur (différence entre le *Bid* et le *Ask*).

On a déjà vu les formules suivantes lorsqu'on a parlé de somme géométrique dans le chapitre 2. P est le prix de l'action, d_t représente la dividende versé au moment t et g représente le taux de croissance du dividende (s'il y a lieu).

En présence d'une structure plate

Si on a une structure plate ($i_t = i \forall\ t$) :

$$P = \frac{d_1}{i - g} \tag{9.1}$$

En présence d'une autre structure des taux

Si on connaît nos taux au comptant (*spot*) :

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} d_t [1 + s_0(t)]^{-t} \tag{9.2}$$

Si on connaît nos taux à terme (*forward*) :

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{u=1}^{\infty} \frac{d_t}{1 + i_0(u-1, u)} \tag{9.3}$$