Compléments de mathématiques

Sommations

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k v^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mathématiques financières

Intérêt simple

$$a(t) = 1 + it \qquad v(t) = \frac{1}{1+it}$$

$$\text{Prix} = 100\left(1 - \frac{it}{365}\right)^{-1}$$

facteurs d'actualisation et d'accumulation

$$a(t) = (1+i)^t = (1-d)^{-t} = e^{\int_0^t \delta_s ds}$$

$$v(t) = (1+i)^{-t} = (1-d)^t = e^{-\int_0^t \delta_s ds}$$

Conversion de taux

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i^{R} = \frac{i-r}{1+r}$$

Taux d'intérêt effectif *annuel* $\quad i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

Taux d'intérêt nominal *annuel* $\quad i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right)$

Rentes constantes

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{(i|d)}$$

Rentes continues

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|i} - n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

Rentes (dé)croissantes annuellement

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

Rentes croissantes continûment

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d(i|d)}$$

Paiement en continu, valeurs accumulée et actualisée

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) \mathrm{e}^{\int_t^n \delta_s ds} dt$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) \mathrm{e}^{-\int_0^t \delta_s ds} dt$$

Rentes avec croissance géométrique

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i^{R}} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n}{i-r}(1+i) \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|i^{R}} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}(1+i)$$

T-Bills

$$\text{Prix} = 100\left(1 - \frac{dt}{360}\right)^t$$

Obligations

Formule de base

- P Prix de l'obligation
- F Valeur nominale de l'obligation *(face value)*
- r Taux de coupon par période de paiement *(coupon rate)*
- i Taux d'intérêt par période de paiement *(interest rate)*
  - Fr Montant par paiement.
- C Valeur de remboursement de l'obligation *(redemption value)*

$$\begin{aligned} \text{P} &= \text{F}r a_{\overline{n}|i} + \text{C}v^n \\ &= \text{C} + (\text{F}r - \text{C}i)a_{\overline{n}|i} + v^n \end{aligned}$$

Amortissement d'obligations

Book value

$$\text{BV}_t = (\text{F}r - \text{C})_{n-t}a_j + \text{C}$$

Analyse probabiliste des risques actuariels

Théorème du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème multinomial

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r):\\ n_1+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_r} x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$$

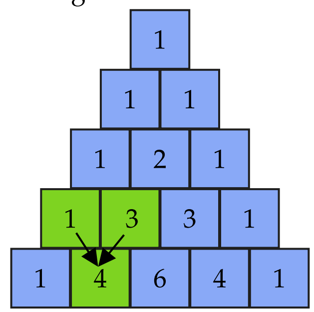
Relations factoriels

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Règle de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal



- Triangle des coefficients binomiaux
- Chaque nombre est la somme des 2 nombres directement au-dessus.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$