Contributeurs

ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

aut. Nicholas Langevin
aut. Gabriel Crépeault-Cauchon
aut. Alexandre Turcotte
aut., cre. Alec James van Rassel
src. Ilie-Radu Mitric

Rappels

Woolhouse

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

DUD

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}$$

Relation

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + v^{\frac{1}{m}}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x\,\ddot{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{m}:\overline{n-\frac{1}{m}}|}$$

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$$

Sélection à l'âge $[x]$

$$\begin{aligned}\bar{A}^{\,1}_{[x]+h:\overline{n-h}|} &= \int_0^{n-h} \mathrm{e}^{-\delta t}\,{}_tp_{[x]+h}\mu_{[x]+h+t}dt \\ &= \int_h^n \mathrm{e}^{-\delta(s-h)}\frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hp_{[x]}}\mu_{[x]+s}ds\end{aligned}$$

1 Calcul de réserve

Notation

${}_hL$: Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h.

- Puisque la perte est évaluée au temps h, on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :
  ${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$

${}_hV$: Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h.

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :
  ${}_hV = \mathrm{E}[{}_hL]$

${}_hV^g$: Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$: Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

$VP_{@h}$: La valeur présente au temps h.

$VPA_{@h}$: La valeur présente anticipée au temps h.
$VPA_{@t} = \mathrm{E}[VP_{@h}]$

Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$$\begin{aligned} {}_hL &= MZ_{x+h} - \pi \ddot{Y}_{x+h} \\ \mathrm{Var}({}_hL) &= \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+h} - (A_{x+h})^2\right] \\ {}_hV^n &= MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h} \\ &\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d} \end{aligned}$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$$\begin{aligned} {}_hV^n &\overset{PEP}{=} M\left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right] \\ &\overset{PEP}{=} M\left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right] \end{aligned}$$

Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$$\begin{aligned} {}_hL &= b_{K_{x+h}+h+1} v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h} v^i \\ {}_hV^n &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1} v^{j+1} {}_jp_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h} v^i {}_jp_{x+h} \end{aligned}$$

Note

- La prestation b est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps h, il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

Calcul de réserves

Méthodes d'évaluation de la réserve

Prospective	Rétrospective
$${}_hV^g = VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{prestations futures}\\ \text{à payer}\end{pmatrix} + VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{frais futurs}\\ \text{à payer}\end{pmatrix} - VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{primes futures}\\ \text{à recevoir}\end{pmatrix}$$	$${}_hV^g = \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x} + \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{primes recues}\\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x} - \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{prestations à payer}\\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x}$$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte n années :

Méthode prospective ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

Méthode rétrospective ${}_hV^n = 0 + \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA^{1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer **avant** h.

Relation : $\{T_x - t | T_x > t\} \overset{d}{=} T_{x+t}$ où $\overset{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$$ {}_hV^n = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}b_{h+1}\right] v - \pi_h $$
$$ {}_hV^g = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})\right] v - (G_h - e_h) $$

La réserve pour l'année h est composée de :

- La réserve au temps $h+1$ si l'assuré survie l'année h et
- la prestation payable (et frais encourus) à $h+1$ si l'assuré décède lors de l'année h,
- actualisés de $h+1$ à h,
- moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année h.

où

G_h La prime *(gross premium)* à recevoir à $t = h$;

e_h Les frais reliés à la collecte de la prime *(per premium expenses)* ;

E_h Les frais reliés au paiement de la prestation *(settlement expenses)*.

Avec la réserve pour l'année $h+1$ isolée :

$$ {}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}} $$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h+1$ isolé :

$$ \underbrace{(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g $$

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$$ {}_{h+s}V^g \approx \left({}_hV^g + G_h - e_h\right)(1-s) + \left({}_{h+1}V^g\right)(s),\ s \in (0,1) $$

Profit de l'assureur

Notation

N_h : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps h.

${}_{h+1}V^E$: Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt (i), la mortalité (q_{x+h}) et les frais (e_h et E_h) **espérés** (**E**xpected) pour l'année h.

${}_{h+1}V^A$: Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt (i'), la mortalité (q'_{x+h}) et les frais (e'_h et E'_h) **réellement** (**A**ctually) encourus lors de l'année h.

Le profit de l'assureur pour l'année h sera donc ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$.

Si uniquement ______ change(nt), alors le profit sur ______ pour l'année h est :

les frais $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

l'intérêt $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e_h)\right)(i' - i)$.

la mortalité $\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g\right)\left(N_h q_{x+h} - N_h q'_{x+h}\right)$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e'_h)\right)(i' - i)$.
- Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_tV$.

$$ \frac{\partial}{\partial t}{}_tV^g = \delta_t\,{}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t} $$

- Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps t.
- Le montant est fixe et payé au début de l'année t.
- Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à t.

on peut approximer ${}_hV^g$ avec la Méthode d'Euler :

$$ {}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h\left[(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}\right]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}} $$

Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$$ {}_hV^e = DAC_h = VPA_{@t}\,(\text{frais}) - VPA_{@t}\,(\text{primes pour les frais futurs}) $$
$$ \equiv {}_hV^g - {}_hV^n $$

- « *expense reserve* » ou « *Deferred Acquisition Costs* ».
- Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.
- Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^g = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

P^g : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute G).

P^n : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette P).

P^e : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^g - P^n$$

FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

π_0^{FTP} Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} bvq_{[x]}$$

π_h^{FTP} Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \ldots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} b\frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition.
- Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contra.
- Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple.
- Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première.

2 Modèles à plusieurs états

${}_{k}p_{x+t}^{ij}$ probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps $x+t$ soit dans l'état j (où j peut être égale à i) au temps $x+t+k$.

> De façon équivalente, ${}_{k}Q_{t}^{(i,j)}$.

${}_{k}p_{x+t}^{\overline{ij}}$ probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps $x+t$ reste dans dans l'état i continument jusqu'au temps $x+t+k$.

Donc, où l'état 0 est la vie et 1 la mort, ${}_{t}p_{x}$ devient ${}_{t}p_{x}^{\overline{00}}$ (ou ${}_{t}p_{x}^{00}$ puisque décéder est un état absorbant) avec la nouvelle notation et ${}_{t}q_{x}$ devient ${}_{t}p_{x}^{01}$.

${}_{k}Q_{t}^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état i au temps t à l'état j au temps $t+k$.

M_t État au temps t parmi les $\{1,2,\ldots,r\}$ ou $\{0,1,\ldots,r\}$ états.

> De façon équivalente, $M(t)$.

> Le processus M_t est une "Chaine de Markov" ssi $\forall t = 0,1,2,\ldots$:

$$Q_{t}^{(i,j)} = \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, \ldots, M_0) \quad = \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i)$$

$\boldsymbol{Q}_t$ Matrice des probabilités de transition.

> Les transitions sont en fin d'année.

> Si la matrice :

dépend du temps alors M_t est une chaîne de Markov **non-homogène**.

ne dépend pas du temps alors M_t est une chaîne de Markov **homogène**.

Également, dans ce cas-ci, on dénote $\boldsymbol{Q}_t$ par $\boldsymbol{Q}$ puisque $Q_{t}^{ij} = Q^{ij}\,\forall t \geq 0$

${}_{k}\boldsymbol{Q}_t$ Matrice de k-étapes des probabilités de transition.

$$ {}_{m+n}Q_{t}^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{r} {}_{m}Q_{t}^{(i,k)}\, {}_{n}Q_{t+m}^{(k,j)}$$