# Contributeurs

**ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II**

**aut.** Nicholas Langevin
**aut.** Gabriel Crépeault-Cauchon
**aut.** Alexandre Turcotte
**aut.** Alec James van Rassel
**ctb.** Olivier Côté
**src.** Ilie-Radu Mitric

# Rappels

## Approximation Woolhouse

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

## Hypothèse DUD

**Mortalité**

$${}_sq_x = sq_x,\ s \in (0,1)$$

**Assurance**

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

$$A^{(m)}_{x::\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

**Rentes**

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_nE_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

où :

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

## Relations

**Assurance**

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$$

**Rente**

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$$

$${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \underbrace{v^{\frac{1}{m}}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x}_{{}_{\frac{1}{m}}E_x}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{m}:\overline{n-\frac{1}{m}}|}$$

**Note rente différée** : pas faire l'erreur d'oublier de soustraire les $n$ années sans paiements de la rente :

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & ,K = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & ,K = n, n+1 \end{cases}$$

## Mortalité

**Tables**

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$$

$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \qquad {}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}$$

**Sélection à l'âge** $[x]$

$$\bar{A}^{\ 1}_{[x]+h:\overline{n-h}|} = \int_0^{n-h} e^{-\delta t}\,{}_tp_{[x]+h}\mu_{[x]+h+t}dt$$

$$= \int_h^n e^{-\delta(s-h)}\frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hp_{[x]}}\mu_{[x]+s}ds$$

# 1 Calcul de réserve

## Notation

${}_hL$ : Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge $(x)$ au temps $h$.

- Puisque la perte est évaluée au temps $h$, on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :
  $${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$$

${}_hV$ : Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge $(x)$ au temps $h$.

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :
  $${}_hV = \mathrm{E}[{}_hL]$$

${}_hV^g$ : Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$ : Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

${}_hV^I$ Réserve initiale au début de l'année $h$;

$${}_hV^I = {}_hV + \pi$$

$VP_{@h}$ : La valeur présente au temps $h$.

$VPA_{@h}$ : La valeur présente anticipée au temps $h$.

$$VPA_{@t} = \mathrm{E}[VP_{@h}]$$

### Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$$\begin{aligned}
{}_hL &= MZ_{x+h} - \pi \ddot{Y}_{x+h} \\
\mathrm{Var}({}_hL) &= \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+h} - (A_{x+h})^2\right] \\
{}_hV^n &= MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h} \\
&\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}
\end{aligned}$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$$\begin{aligned}
{}_hV^n &\overset{PEP}{=} M\left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right] \\
&\overset{PEP}{=} M\left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right]
\end{aligned}$$

### Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$$\begin{aligned}
{}_hL &= b_{K_{x+h}+h+1} v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h} v^i \\
{}_hV^n &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1} v^{j+1} {}_jp_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h} v^i {}_jp_{x+h}
\end{aligned}$$

**Note**

- La prestation $b$ est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps $h$, il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

## Calcul de réserves

### Méthodes d'évaluation de la réserve

**Prospective**

$$\begin{aligned}
{}_hV^g = {} & VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{prestations futures} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
&+ VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{frais futurs} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
&- VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{primes futures} \\ \text{à recevoir}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Rétrospective**

$$\begin{aligned}
{}_hV^g = {} & \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x} \\
&+ \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{primes recues} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x} \\
&- \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{prestations à payer} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x}
\end{aligned}$$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte $n$ années :

**Méthode prospective** ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

**Méthode rétrospective** ${}_hV^n = 0 + \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA^{1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer avant $h$.

**Relation :** $\{T_x - t | T_x > t\} \overset{d}{=} T_{x+t}$ où $\overset{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

### Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$$ {}_hV^n = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}b_{h+1}\right] v - \pi_h $$
$$ {}_hV^g = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})\right] v - (G_h - e_h) $$

La réserve pour l'année $h$ est composée de :

- La réserve au temps $h+1$ si l'assuré survie l'année $h$ et
- la prestation payable (et frais encourus) à $h+1$ si l'assuré décède lors de l'année $h$,
- actualisés de $h+1$ à $h$,
- moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année $h$.

où

$G_h$ La prime *(gross premium)* à recevoir à $t = h$ ;

$e_h$ Les frais reliés à la collecte de la prime *(per premium expenses)* ;

$E_h$ Les frais reliés au paiement de la prestation *(settlement expenses)*.

Avec la réserve pour l'année $h+1$ isolée :

$$ {}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}} $$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h+1$ isolé :

$$ \underbrace{\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g\right)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g $$

**Note** Si on a une assurance mixte dont la prestation est fonction de la réserve (e.g., $b_k = 1000 + {}_kV$), on commence de la fin puisqu'on sait que ${}_nV = M$.

### Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$$ {}_{h+s}V^g \approx \left({}_hV^g + G_h - e_h\right)(1-s) + \left({}_{h+1}V^g\right)(s),\ s \in (0,1) $$

## Profit de l'assureur

**Notation**

$N_h$ : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps $h$.

${}_{h+1}V^E$ : Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt ($i$), la mortalité ($q_{x+h}$) et les frais ($e_h$ et $E_h$) **espérés** (***E****xpected*) pour l'année $h$.

${}_{h+1}V^A$ : Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt ($i'$), la mortalité ($q'_{x+h}$) et les frais ($e'_h$ et $E'_h$) **réellement** (***A****ctually*) encourus lors de l'année $h$.

Le profit de l'assureur pour l'année $h$ sera donc ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$.

Si uniquement ______ change(nt), alors le profit sur ______ pour l'année $h$ est :

**les frais** $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

**l'intérêt** $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e_h)\right)(i' - i)$.

**la mortalité** $\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g\right)\left(N_hq_{x+h} - N_hq'_{x+h}\right)$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e'_h)\right)(i' - i)$.
- Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

## Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_tV$.

$$ \frac{\partial}{\partial t}{}_tV^g = \delta_t\,{}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t} $$

- Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps $t$.
- Le montant est fixe et payé au début de l'année $t$.
- Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à $t$.

on peut approximer ${}_hV^g$ avec la Méthode d'Euler :

$$ {}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h\left[(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}\right]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}} $$

## Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$$ {}_hV^e = DAC_h = VPA_{@t}\,(\text{frais}) - VPA_{@t}\,(\text{primes pour les frais futurs}) \equiv {}_hV^g - {}_hV^n $$

- « *expense reserve* » ou « *Deferred Acquisition Costs* ».

- Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.
- Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^g = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

$P^g$ : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute $G$).

$P^n$ : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette $P$).

$P^e$ : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^g - P^n$$

## FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

$\pi_0^{FTP}$ Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} bvq_{[x]}$$

$\pi_h^{FTP}$ Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \dots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} b\frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition ;
- Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contrat ;
- Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple ;
- Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première ;
- **Note** : Lorsqu'on calcule la réserve FTP ${}_hV^{\text{FTP}}$ on n'a pas besoin de calculer $\pi_0^{\text{FTP}}$, on y va directement avec $\pi_h^{\text{FTP}}$.

# 2 Modèles à plusieurs états

${}_{k}Q_t^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état $i$ au temps $t$ à l'état $j$ au temps $t+k$.

- De façon équivalente, ${}_{k}p_{x+t}^{ij}$.

$M_t$ État au temps $t$ parmi les $\{1,2,\ldots,r\}$ ou $\{0,1,\ldots,r\}$ états.

- De façon équivalente, $M(t)$.
- Le processus $M_t$ est une "Chaine de Markov" ssi $\forall t = 0,1,2,\ldots$ :

$$\begin{aligned} Q_t^{(i,j)} &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, \ldots, M_0) \\ &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Q}_t$ Matrice des probabilités de transition.

- Les transitions sont en fin d'année.
- Si la matrice :

  **dépend du temps** alors $M_t$ est une chaîne de Markov **non-homogène**.

  **ne dépend pas du temps** alors $M_t$ est une chaîne de Markov **homogène**.

  Également, dans ce cas-ci, on dénote $\boldsymbol{Q}_t$ par $\boldsymbol{Q}$ puisque $Q_t^{ij} = Q^{ij} \,\forall t \geq 0$

${}_{k}\boldsymbol{Q}_t$ Matrice de $k$-étapes des probabilités de transition.

$${}_{m+n}Q_t^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{r} {}_{m}Q_t^{(i,k)} \, {}_{n}Q_{t+m}^{(k,j)}$$

## En temps continu

On généralise la notation utilisée auparavant (le *modèle actif-décédé*) pour des modèles à plusieurs états.

### Notation et hypothèses

$Y_x(t)$ Processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$ de l'état dont les transitions peuvent se produire à n'importe quel moment $t \geq 0$ et donc pas seulement en fin d'année ;

- De façon équivalente, $Y(x+t)$ ;
- $Y_x(t) = i$ pour un assuré d'âge $(x)$ dans l'état $i$ au temps $t$ (ou, de façon équivalente, à l'âge $x+t$).

${}_{k}p_{x+t}^{ij}$ Probabilité qu'un individu d'âge $x$ dans l'état $i$ au temps $t$ soit dans l'état $j$ (où $j$ peut être égale à $i$) au temps $t+k$.

$${}_{k}p_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(t) = j | Y_x = i)$$

${}_{k}p_{x+t}^{\overline{ii}}$ Probabilité qu'un individu d'âge $x$ dans l'état $i$ au temps $t$ reste dans dans l'état $i$ continument jusqu'au temps $t+k$.

$${}_{k}p_{x+t}^{\overline{ii}} = \Pr(Y_x(s) = i, \quad \underbrace{\forall s \in [0,t]}_{\text{sans sortir et revenir}} \quad | Y_x = i)$$

- Il s'ensuit que ${}_{k}p_{x+t}^{ii} \geq {}_{k}p_{x+t}^{\overline{ii}}$ car :

$${}_{k}p_{x+t}^{ij} = {}_{k}p_{x+t}^{\overline{ij}} + \Pr(Y_x(t) = i, \text{après avoir sorti et revenu} | Y_x = i)$$

$\mu_x^{ij}$ **Force de transition** de l'état $i$ à l'état $j$ ($\underline{i \neq j}$) pour un assuré d'âge $(x)$.

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_{h}p_x^{ij}}{h}, \; i \neq j$$

- On trouve que $\boxed{\text{pour } i \neq j}$ :

$${}_{h}p_x^{ij} = h \cdot \mu_x^{ij} + o(h) \qquad \Rightarrow {}_{h}p_x^{ij} \qquad \approx h\mu_x^{ij},$$

où $h > 0$ est très petit.

**Hypothèses du modèle à plusieurs états**

1. Le processus stochastique $Y_t$ est une chaîne de Markov.
$$\Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i, Y_u, 0 \leq u < 1) = \Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i)$$

2. Pour tout intervalle de longueur $h$,
$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{2, ou plus, transitions}\\ \text{pendant une période de longueur } h\end{array}\right) = o(h)$$

**Note** Une fonction $g \in o(h)$ si $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h} = 0$.

3. Pour tous les états $i$ et $j$, et tout âge $x \geq 0$, ${}_tp_x^{ij}$ est différentiable par rapport à $t$.

› Cette hypothèse veille au bon déroulement mathématique en assurant :
- L'existence de la limite dans la définition de $\mu_x^{ij}$ ;
- Que la probabilité d'une transition dans un intervalle de longueur $h$ tend vers 0 lorsque $h$ tends vers 0.

**Remarques**

1. $\boxed{{}_hp_x^{ii} = {}_hp_x^{\overline{ij}} + o(h)}$ où $o(h)$ est la probabilité de sortir et revenir de l'hypothèse 2.
2. $$\begin{aligned}{}_hp_x^{ii} \geq {}_hp_x^{\overline{ii}} &= 1 - \sum_{j=0,j\neq i}^{n} {}_hp_x^{ij} + o(h)\\ &\equiv 1 - h\sum_{j=0,j\neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h)\end{aligned}$$

## Formules

Nous pouvons exprimer toutes les probabilités en fonction des forces de transitions.
**Approche directe** :
$${}_tp_x^{\overline{ii}} = \exp\left\{-\int_0^t \sum_{j=0,j\neq i}^{n} \mu_{x+s}^{ij} ds\right\}$$
Transition d'un état au prochain pour un **modèle d'invalidité permanente** :
$$\begin{aligned}{}_up_x^{01} &= \int_{t=0}^{u} ({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{11}})dt\\ &\approx \int_{t=0}^{u} ({}_tp_x^{\overline{00}})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{11}})({}_{dt}p_{x+t}^{01})\end{aligned}$$

**Note** On **approxime** la mortalité instantanée $\mu_{x+t}^{01}dt$ par la mortalité au moment infiniment petit $dt$ ${}_{dt}p_{x+t}^{01}$.

Transition d'un état à un état supérieur :
$$\begin{aligned}{}_up_x^{02} &= \int_{t=0}^{u} \left\{({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t}p_{x+t}^{12})\right\} + \left\{({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{02})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{22}})\right\} dt\\ &= 1 - {}_up_x^{\overline{00}} - {}_up_x^{01}\end{aligned}$$
› L'important à retenir est qu'il faut considérer toutes les façons de se rendre de 0 à 2 (0 à 2, 0 à 1 à 2, etc.).

Transition par deux états :
Par exemple, aller de 0 à 1 et finir à 2 par le temps $u$ :
$$\int_0^u {}_tp_x^{01}\mu_{x+t}^{12}{}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{22}}dt = \int_0^u \left\{\int_0^t {}_sp_x^{\overline{00}}\mu_{x+s}^{01}{}_{t-s}p_{x+s}^{\overline{11}}ds\right\}\mu_{x+t}^{12}{}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{22}}dt$$
› On commence par la fin avec ${}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{22}}$ puis on intègre jusqu'à la forme connue.

## Approximations

Pour les modèles où il est possible de sortir et de revenir à un état.

**Kolmogorov's Forward Equations**

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk}\right)$$

| la variation de la probabilité d'aller de l'état $i$ à l'état $j$ | = | taux auquel ceux hors de l'état $j$ entrent dans l'état $j$ de tout autre état | − | taux auquel ceux dans l'état $j$ quittent l'état $j$ pour tout autre état |
|---|---|---|---|---|

Avec la **notation** $\mu_x^{ii} = -\sum_{k=0,k\neq i}^{n} \mu_x^{ik}$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0}^{n} {}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj}$$

où $\mu_x$ n'est plus une force de transition mais **représente plutôt une notation** pour simplifier l'expression.

On peut récrire l'expression en forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t\boldsymbol{P}_x = {}_t\boldsymbol{P}_x \boldsymbol{P}_{x+t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} {}_tp_x^{00} & {}_tp_x^{01} & \cdots & {}_tp_x^{0n} \\ {}_tp_x^{10} & {}_tp_x^{11} & \cdots & {}_tp_x^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_tp_x^{n0} & {}_tp_x^{n1} & \cdots & {}_tp_x^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_tp_x^{00} & {}_tp_x^{01} & \cdots & {}_tp_x^{0n} \\ {}_tp_x^{10} & {}_tp_x^{11} & \cdots & {}_tp_x^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_tp_x^{n0} & {}_tp_x^{n1} & \cdots & {}_tp_x^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{x+t}^{00} & \mu_{x+t}^{01} & \cdots & \mu_{x+t}^{0n} \\ \mu_{x+t}^{10} & \mu_{x+t}^{11} & \cdots & \mu_{x+t}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x+t}^{n0} & \mu_{x+t}^{n1} & \cdots & \mu_{x+t}^{nn} \end{pmatrix}$$

**Méthode d'Euler**

Pour $h > 0$ très petit, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tp_x^{ij} \approx \frac{({}_{t+h}p_x^{ij} - {}_tp_x^{ij})}{h}$$

$$\Rightarrow {}_{t+h}p_x^{ij} \approx {}_tp_x^{ij} + h \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \left( {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} \right)$$

avec la condition initiale $\forall i \neq j$ :

$${}_0p_x^{ii} = 1 \qquad \text{et} \qquad {}_0p_x^{ij} = 0$$

## Paiements

$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{\overline{ii}}$ La VPA d'une rente temporaire payant 1$ à une vie dans l'état $i$ seulement lorsqu'elle est dans l'état $i$.

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{\overline{ii}} = \int_0^n v^t {}_tp_x^{\overline{ii}} dt$$

On a aussi plus généralement pour une rente qui paye lorsque le individu est dans l'état $j$ :

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ij} = \int_0^n v^t {}_tp_x^{ij} dt$$

$$\bar{A}_x^{ij} = \int_0^\infty \sum_{k\neq j} v^t {}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} dt$$

# Modèle à plusieurs décroissances

- en anglais, « *Multiple Decrement Model* » ;
- Précédemment, il y avait résiliation du contrat uniquement en raison d'un décès ;
- Cependant, on généralise pour évaluer les primes et réserves de contrats dont les prestations diffèrent en fonction des causes de décroissances ;
- Ces modèles sont en fait des cas particuliers des chaînes de Markov.

$T_x$ Temps de décroissance de $x$ (alias, la *durée de vie* résiduelle de $x$) ;

$J$ Cause de la décroissance ;

- Variable aléatoire discrète avec $J \in \{1, 2, \ldots, m\}$ où $m$ est le nombre de causes possibles de décroissance.

${}_tq_x^{(j)}$ Probabilité de décroissance d'ici $t$ années pour un assuré d'âge $x$ en raison de la $j$e cause ;

$${}_tp_x^{0j} = {}_tq_x^{(j)} = \Pr(T_x \leq t, J = j)$$

- Il s'ensuit de l'équation que ${}_tq_x^{(j)}$ est une distribution conjointe de $T_x$ et $J$.

${}_tq_x^{(\tau)}$ Probabilité de décroissance d'ici $t$ années pour un assuré d'âge $x$ peu importe la cause ;

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \Pr(T_x \leq t) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Pr(T_x \leq t, J = j) = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \end{aligned}$$

- En parallèle, $\boxed{{}_tp_x^{(\tau)}}$ est la probabilité de survivre pendant $t$ années à toutes les causes de décroissance et $\boxed{{}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}}$ ;
- Cependant, ${}_tp_x^{(j)}$ **n'existe pas** et ${}_tp_x^{(j)} \neq 1 - {}_tq_x^{(j)}$.

## Fonctions de densité

$$\begin{aligned} f_{T_x,J}(t,j) &= ({}_tp_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(j)}) \\ f_J(j) &= \int_0^\infty f_{T_x,J}(t,j) dt = {}_\infty q_x^{(j)} \\ \mathrm{E}[T_x] &= \int_0^\infty {}_tp_x^{(\tau)} dt \\ f_{J|T_x}(J|t) &= \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{f_{T_x}(t)} \equiv \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \end{aligned}$$

**Note** La relation tient avec ${}_\infty q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_\infty q_x^{(j)}$.

### Force de décroissance totale

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)}$$

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j) = ({}_tp_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(\tau)})$$

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}$$

De plus :

$${}_tp_x^{(\tau)} = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds}$$

### Force de décroissance de la $j^{\text{e}}$ cause

$\mu_{x+t}^{(j)}$ Force de décroissance de la $j^{\text{e}}$ cause pour un assuré d'âge $x$.

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j) ds = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$$

### Incorporation de $K_x$

$$\begin{aligned}
{}_{k|}q_x^{(j)} &= \Pr(k \leq T_x < k+1, J = j) \\
&= \int_k^{k+1} f_{T_x,J}(t,j) dt \equiv \int_0^{k+1} f_{T_x,J}(t,j) dt - \int_0^k f_{T_x,J}(t,j) dt \\
&= {}_{k+1}q_x^{(j)} - {}_kq_x^{(j)}
\end{aligned}$$

Aussi

$${}_{k|}q_x^{(j)} = \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt = {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}$$

**Note** Développer cette expression s'il y a un manque d'information sur des $\ell_x$ ; voir l'exercice 2.10 du cours 8 pour un exemple.

Loi marginale :

$$\begin{aligned}
{}_{k|}q_x^{(\tau)} &= \Pr(K_x = k) = \sum_{j=1}^{m} \Pr(K_x = k, J = j) = \sum_{j=1}^{m} {}_{k|}q_x^{(j)} \\
&\equiv {}_{k+1}q_x^{(\tau)} - {}_kq_x^{(\tau)} = {}_kp_x^{(\tau)} - {}_{k+1}p_x^{(\tau)} \\
&\equiv {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)}
\end{aligned}$$

### Tables de mortalité

${}_rd_x$ Nombre de décès d'une cohorte de $\ell x$ personnes entre les temps 0 et $r$ (alias, entre les âges $x$ et $x+r$) ;

${}_rd_x^{(j)}$ Nombre de décès d'une cohorte de $\ell x$ personnes entre les temps 0 et $r$ en cause la décroissance $j$.

**Note** Pour des paiements selon l'état, voir l'exercice 2.12 à la fin du cours 8.

Si $\mu_{x+t}^{(1)}, \ldots, \mu_{x+t}^{(m)}$ sont des constantes $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(m)}$ alors :

$$\frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(1)} + \cdots + \mu_{x+t}^{(m)}} = k = \text{constante}$$

$$\Rightarrow {}_tq_x^{(j)} = k \, {}_tq_x^{(\tau)}$$

## Modèles à décroissance unique associés

$T_x^{\prime(j)}$ Temps de décroissance de $x$ (alias, la *durée de vie* résiduelle de $x$) **en supposant** qu'il est uniquement exposé à la cause $j$ ;

- C'est une durée de vie théorique, mais utile ;
- Comme il y a un seul type de décès, c'est le modèle actif-décédé de vie I ;
- Généralement, on suppose que les décroissances $T_x^{\prime(j)}$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$ sont indépendantes ;
- Avec l'indépendance, on trouve que la distribution de $T_x$ est la même que la première cause de décès $\boxed{T_x \overset{d}{=} \min\left\{T_x^{\prime(1)}, T_x^{\prime(2)}, \ldots, T_x^{\prime(m)}\right\}}$.

${}_tq_x^{\prime(j)}$ : Probabilité de décroissance d'ici $t$ années pour un assuré d'âge $x$ en raison de la $j^e$ cause **en supposant** qu'il est uniquement exposé à la cause $j$ ;

- Puisque c'est le modèle actif-décédé, il s'ensuit que $\boxed{{}_tp_x^{\prime(j)} = 1 - {}_tq_x^{\prime(j)}}$ ;
- $\boxed{{}_tq_x^{\prime(j)} = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)} ds}}$.

On peut relier les 2 modèles :

$$\mu_{x+s}^{(j)} = \mu_{x+s}^{\prime(j)}$$
$${}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)}$$

- La multiplication des ${}_tp_x$ ci-dessus illustre le lien avec la fonction de survie du minimum.

Donc :

$${}_tq_x^{(\tau)} = {}_tq_x^{(1)} + {}_tq_x^{(2)} + \cdots + {}_tq_x^{(m)} \qquad {}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{\prime(1)} \times {}_tp_x^{\prime(2)} \times \cdots \times {}_tp_x^{\prime(m)}$$

Il s'ensuit que $\boxed{{}_tp_x^{(\tau)} \leq {}_tp_x^{\prime(j)}, \forall j = 1, 2, \ldots, m}$ et $\boxed{{}_tq_x^{\prime(j)} \geq {}_tq_x^{(j)}, \forall j = 1, 2, \ldots, m}$.

## Interrelations

### Hypothèses

Dans le cas de décroissances uniques avec $T_x^{\prime(j)}$ :

Pour $x \in \mathbb{Z}^+, t \in [0,1], j = 1, 2, \ldots, m$,

**DUD** $\boxed{{}_sq_x^{\prime(j)} = s \times q_x^{\prime(j)}}$ pour $\boxed{0 \leq s \leq 1}$ ;

**FC** $\mu_{x+s}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$ pour $\boxed{0 \leq s \leq 1}$.

- Si les mortalités $T_x^{\prime(j)}$ suivent des lois DeMoivre, alors DUD est exact ;
- Pour les décroissances $T_x^{(j)}$ on pose l'hypothèse sur ${}_tq_x^{(j)}$ au lieu de ${}_tq_x^{\prime(j)}$.

### Trouver $q_x^{(j)}$ de $q_x^{\prime(j)}$

Sachant $q_x^{\prime(1)}, \ldots, q_x^{\prime(m)}$,

1. Poser une hypothèse (DUD ou FC) sur les décroissances uniques $T_x^{\prime(j)}$ pour trouver ${}_sq_x^{\prime(j)}$ ;
2. Trouver $\mu_{x+s}^{\prime(j)} = \mu_{x+s}^{(j)}$ ;
3. Trouver ${}_sp_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+s}^{(j)}$ ;
4. Trouver ${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$.

#### Sous DUD

Pour $\boxed{0 \leq s \leq 1}$ :

$${}_sq_x^{(j)} = {}_sq_x^{\prime(j)} \int_0^s \left[\prod_{k \neq j, k=1}^{m} \left(1 - t \cdot q_x^{\prime(k)}\right)\right] dt$$

**Cas particuliers pour** $s = 1$ :

- Si $m = 2$, $\boxed{q_x^{(1)} = q_x^{\prime(1)} \left(1 - \frac{q_x^{\prime(2)}}{2}\right)}$ et $\boxed{q_x^{(2)} = q_x^{\prime(2)} \left(1 - \frac{q_x^{\prime(1)}}{2}\right)}$ ;
- Si $m = 3$, $\boxed{q_x^{(1)} = q_x^{\prime(1)} \left[1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{\prime(2)} + q_x^{\prime(3)}\right) + \frac{1}{3}\left(q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right)\right]}$.

**Sous FC**

Pour $\boxed{0 \leq s \leq 1}$ :

$$_{s}q_x^{(j)} = \frac{\ln(p_x'^{(j)})}{\ln(p_x^{(\tau)})} {}_{s}q_x^{(\tau)}$$

### Trouver $_{t}q_x'^{(j)}$ de $_{t}q_x^{(j)}$

Sachant $_{t}q_x^{(1)}, \ldots, {}_{t}q_x^{(m)}$,

1. Poser une hypothèse (DUD ou FC) sur les décroissances ($T_x^{(j)}$) pour trouver $_{t}q_x^{(j)}$ ;
2. Trouver $\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\frac{\partial_t q_x^{(j)}}{\partial t}}{_{t}p_x^{(\tau)}} = \mu_{x+t}'^{(j)}$ ;
3. Trouver $_{t}p_x'^{(j)} = e^{\int_0^t \mu_{x+s}'^{(j)} ds}$.

**Sous DUD**

Pour $\boxed{0 \leq s \leq 1}$ :

$$_{s}q_x'^{(j)} = 1 - \left(1 - s \times q_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}$$

$$_{s}p_x'^{(j)} = \left({}_{s}p_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}$$

**Sous FC**

Pour $\boxed{0 \leq s \leq 1}$ :

$$_{s}p_x'^{(j)} = \left({}_{s}p_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}$$

**Note** Si la mortalité a lieu à un moment fixe, on multiplie les espérance du nombre de personnes en vie. Par exemple, si on donne $q_x'^{(1)} = 0.01$ pour les décès et $q_x'^{(2)} = 0.05$ pour les retraits en stipulant que les décès $T_x'^{(1)}$ sont DUD alors que les retraits ont lieu uniquement en fin d'année. Pour trouver $q_x'^{(2)}$ on trouve l'espérance de la probabilité de retrait = $p_x'^{(1)} q_x'^{(2)}$. (voir pages 13 à 14 des notes de cours du chapitre 9 pour un exemple).

## 3 Contrats d'assurance et de rente sur plusieurs têtes

**Notation**

**$T_x$ et $T_y$** Durée de vie future pour les individus d'âges $(x)$ et $(y)$ ;

- Nous étudions le cas le plus simple où $T_x \perp T_y$.

**$f_{T_x,T_y}$ et $F_{T_x,T_y}$** Fonction de densité (répartition) du couple $(x, y)$ ;

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = \Pr(T_x \leq t, T_y \leq s) = \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{s} f_{T_x,T_y}(u,v)dvdu$$
$$\overset{T_x \perp T_y}{=} \Pr(T_x \leq t)\Pr(T_y \leq s) = F_{T_x}(t)F_{T_y}(s)$$

**${}_t q^{\;1}_{xy}$** On mets le chiffre sur la personne qui meurt et le chiffre représente l'ordre ; dans ce cas-ci, $(x)$ meurt avant $(y)$ et avant le temps $t$.

Souvent, les contrats d'assurance (ou de rente) d'un couple $(x, y)$ sont définis selon ces deux statuts :

1. Statut conjoint (ou premier décès).
2. Statut dernier survivant (ou dernier décès).

**Statut conjoint**

- Dénoté $xy$, $(xy)$ ou $x : y$ ;
- Demeure actif tant que $(x)$ *et* $(y)$ sont en vie et donc cesse au premier décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$T_{xy} = \min\{T_x, T_y\}$$

De plus :

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy} &= S_{T_{xy}}(t) = \Pr(\min\{T_x, T_y\} > t) \\ &= \Pr(T_x > t, T_y > t) = S_{T_x,T_y}(t,t) \\ {}_tq_{xy} &= 1 - {}_tp_{xy} = \Pr(T_x \leq t \cup T_y \leq t) \end{aligned}$$

**Statut dernier survivant**

- Dénoté $\overline{xy}$, $(\overline{xy})$ ou $\overline{x : y}$.

$$T_{\overline{xy}} = \max\{T_x, T_y\}$$

De plus :

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{xy}} &= F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \Pr(\max\{T_x, T_y\} \leq t) \\ &= \Pr(T_x \leq t, T_y \leq t) = F_{T_x,T_y}(t,t) \\ {}_tp_{\overline{xy}} &= 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = \Pr(T_x > t \cup T_y > t) \end{aligned}$$

### Relations entre probabilités

$$\begin{aligned} {}_tq_{xy} &= \Pr(T_x \leq t \cup T_y \leq t) = \Pr(T_x \leq t) + \Pr(T_y \leq t) - \Pr(T_x \leq t, T_y \leq t) \\ &= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{\overline{xy}} \\ &\overset{\perp}{=} {}_tq_x\,{}_tp_y + {}_tp_x\,{}_tq_y \\ {}_tp_{\overline{xy}} &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \end{aligned}$$

On peut borner ${}_tp_{\overline{xy}}$, $\boxed{\max\{{}_tp_x, {}_tp_y\} \leq {}_tp_{\overline{xy}} \leq \min\{{}_tp_x + {}_tp_y, 1\}}$

### Relations entre variables aléatoires

En gros, $(xy)$ plus $(\overline{xy})$ est égale à la somme de $(x)$ et $(y)$ avec ces 3 relations principales :

$$\begin{aligned} T_{xy} \times T_{\overline{xy}} &= T_x \times T_y \\ T_{xy} + T_{\overline{xy}} &= T_x + T_y \\ a^{T_{xy}} + a^{T_{\overline{xy}}} &= a^{T_x} + a^{T_y} \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} {}_tq_{xy} + {}_tq_{\overline{xy}} &= {}_tq_x + {}_tq_y \\ \mathring{e}_{xy} + \mathring{e}_{\overline{xy}} &= \mathring{e}_x + \mathring{e}_y \\ \bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} &= \bar{A}_x + \bar{A}_y \\ \bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} &= \bar{a}_x + \bar{a}_y \end{aligned}$$

## D'autres notations

$$\Pr\left(\begin{array}{l}\text{(x) et (y) sont en vie au}\\ \text{temps u, mais qu'au moins}\\ \text{l'un décède au cours des } t\\ \text{prochaines années}\end{array}\right) = \Pr(u < T_{xy} \leq u+t) = {}_{u|t}q_{xy}$$

$$\Pr\left(\begin{array}{l}\text{(x) meurt avant le temps } t\\ \text{et avant } (y)\end{array}\right) = \Pr(T_x \leq t, T_x < T_y) = {}_tq^1_{xy}$$

$$= \int_0^t ({}_sp^{00}_{xy})(\mu^{02}_{x+s:y+s})ds$$

$$\overset{T_x \perp T_y}{=} \int_0^t \underbrace{({}_sp_x)({}_sp_y)}_{\substack{(x) \text{ et } (y)\\ \text{survivent}}} \underbrace{\mu_{x+s}}_{(x) \text{ meurt}} ds$$

$$\Pr\left(\begin{array}{l}\text{(x) meurt avant le temps } t\\ \text{et après le décès de } (y)\end{array}\right) = \Pr(T_x \leq t, T_y < T_x) = {}_tq^2_{xy}$$

$$= \int_0^t ({}_sp^{01}_{xy})(\mu^{13}_{x+s})ds$$

$$\overset{T_x \perp T_y}{=} \int_0^t \underbrace{({}_sp_x)\mu_{x+s}}_{\substack{(x) \text{ survie jusqu'à}\\ s \text{ puis décède}}} \underbrace{({}_sq_y)}_{\substack{(y) \text{ décède}\\ \text{avant } s}} ds$$

$$\Pr\left(\text{(x) meurt avant (y)}\right) = \Pr(T_x < T_y) = {}_\infty q^1_{xy}$$

## Relations

$$\underbrace{{}_tq^1_{xy}}_{\substack{\text{probabilité que } (x)\\ \text{décède en premier}\\ \text{d'ici } t \text{ années}}} + \underbrace{{}_tq^2_{xy}}_{\substack{\text{probabilité que } (x)\\ \text{décède en deuxième}\\ \text{d'ici } t \text{ années}}} = \underbrace{{}_tq_x}_{\substack{\text{la probabilité que}\\ (x) \text{ décède}\\ \text{d'ici } t \text{ années}}}$$

$$\underbrace{{}_tq^1_{xy}}_{\substack{\text{probabilité que } (x)\\ \text{décède en premier}\\ \text{d'ici } t \text{ années}}} + \underbrace{{}_tq_{x\overset{1}{y}}}_{\substack{\text{probabilité que } (y)\\ \text{décède en premier}\\ \text{d'ici } t \text{ années}}} = \underbrace{{}_tq_{xy}}_{\substack{\text{la probabilité que}\\ \text{un parmis } (x) \text{ et } (y)\\ \text{décède d'ici } t \text{ années}}}$$

$${}_tq^2_{xy} + {}_tq_{x\overset{2}{y}} = {}_tq_{\overline{xy}}$$

## Force de mortalité

$$\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T_{xy}}(t)}{S_{T_{xy}}(t)}$$

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{S_{T_{\overline{xy}}}(t)} = \frac{f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}}$$

Si $T_x \perp T_y$,

$$\mu^{01}_{x+t:y+t} = \mu^{23}_{y+t} = \mu_{y+t}$$

$$\mu^{02}_{x+t:y+t} = \mu^{13}_{x+t} = \mu_{x+t}$$

$$\mu^{03}_{x+t:y+t} = 0$$

Puis (voir la preuve à la page 15 des notes de cours du chapitre 11)

$$\underbrace{{}_sp_{xy}}_{\Pr(\text{deux sont en vie à } s)} = \underbrace{{}_sp_x\,{}_sp_y}_{\Pr(\text{chacun est vivant à } s)}$$

$$\underbrace{{}_sq_{\overline{xy}}}_{\Pr(\text{deux sont décédés rendu à } s)} = \underbrace{{}_sq_x\,{}_sq_y}_{\Pr(\text{chacun est décédé rendu à } s)}$$

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

## Relations

$$\begin{aligned}
{}_{k|}q_{xy} &= {}_{k+1}q_{xy} - {}_kq_{xy}\\
&= {}_kp_{xy} - {}_{k+1}p_{xy}\\
&= ({}_kp_{xy})(q_{x+k:y+k}) \because {}_{m+n}p_{xy} = ({}_mp_{xy})({}_np_{x+m:y+m})\\
{}_{k|}q_{\overline{xy}} &= {}_{k+1}q_{\overline{xy}} - {}_kq_{\overline{xy}}\\
&= {}_kp_{\overline{xy}} - {}_{k+1}p_{\overline{xy}}\\
&\neq ({}_kp_{\overline{xy}})(q_{\overline{x+k:y+k}}) \because {}_{m+n}p_{\overline{xy}} \neq ({}_mp_{\overline{xy}})({}_np_{\overline{x+m:y+m}})
\end{aligned}$$

## Approximation de Woolhouse

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} \approx \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_{xy})$$

## Contingent Insurance

### Continue

**Notation**

$\bar{A}^{1}_{xy}$ Prime unique nette d'un contrat d'assurance vie entière continue versant 1\$ au décès de $(x)$ s'il advient avant celui de $(y)$.

$\bar{A}^{\ 2}_{xy}$ Prime unique nette d'un contrat d'assurance vie entière continue versant 1\$ au décès de $(y)$ s'il advient après celui de $(x)$.

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \mathrm{E}\left[v^{T_x} \times \mathbf{1}_{\{T_x<T_y\}}\right] = \int_0^\infty v^t ({}_tp_x)({}_tp_y)(\mu_{x+t})dt$$
$$\bar{A}^{\ 2}_{xy} = \mathrm{E}\left[v^{T_y} \times \mathbf{1}_{\{T_x<T_y\}}\right] = \int_0^\infty v^s ({}_sq_x)({}_sp_y)(\mu_{y+s})ds$$

#### Contrat de rente continue vie entière émis à $(x,y)$

La rente de 1\$ est versée jusqu'au premier décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_{xy}dt$$

La rente de 1\$ est versée jusqu'au deuxième décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_{\overline{xy}}dt$$

#### Contrat d'assurance continue vie entière émis au statut $(x,y)$

La prestation de décès de 1\$ est versée au moment du deuxième décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{x+t:y+t}}dt$$

#### Contrat d'assurance continue temporaire $n$ années émis au statut $(x,y)$

La prestation de décès de 1\$ est versée au moment du premier décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n|}} = \int_0^n \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)dt$$

La prestation de décès de 1\$ est versée au moment du deuxième décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\bar{A}^{\ 1}_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \int_0^n \mathrm{e}^{-\delta t}\, {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)dt$$

### Relations

$$\bar{A}_{xy} = \bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}^{\ 1}_{xy}$$
$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}^{2}_{xy} + \bar{A}^{\ 2}_{xy}$$
$$\bar{A}_{x} = \bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}^{\ 2}_{xy}$$

### Discret

$$A^{1}_{xy} = \mathrm{E}\left[v^{K_x+1} \times \mathbf{1}_{\{T_x<T_y\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}({}_kp_{xy})(q^{\ \ 1}_{x+k:y+k})$$

#### Contrat d'assurance discret vie entière émis au statut $(x,y)$

La prestation de décès de 1\$ est versée à la fin de l'année du premier décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \underbrace{\Pr(K(xy)=k)}_{{}_{k|}q_{xy}}$$

La prestation de décès de 1\$ est versée à la fin de l'année du deuxième décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \underbrace{\Pr(K(\overline{xy})=k)}_{{}_{k|}q_{\overline{xy}}}$$

#### Contrat de rente discret vie entière émis à $(x,y)$

La rente de 1\$ est versée jusqu'au premier décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_{xy}$$

La rente de 1$ est versée jusqu'au deuxième décès parmi $(x)$ et $(y)$.

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_{\overline{xy}}$$

## Reversionary Annuity (pension de réversion)

**Historique**

Produit originalement créé dans le temps que les hommes travaillent et les femmes restaient à la maison. C'était une assurance contre le risque que le mari décède et que la femme ne se retrouve avec aucune source de revenus. Le produit fournissait donc une rente afin que la femme puisse continuer de survivre sans le salaire de son mari.

**Notation**

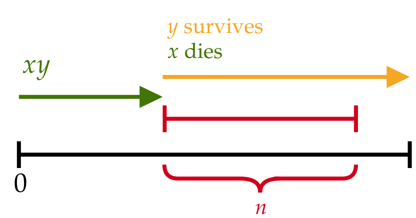
$\bar{a}_{x|y}$ Valeur actualisée d'une *pension de réversion* dont la rente est versée à un taux continue de 1$ au statut $(y)$ à compter de la déchéance du statut $(x)$.

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x|y} &= \int_0^{\infty} v^s ({}_sp_{x:y})(\mu_{x+s})\bar{a}_{y+s} ds \\
&= \int_0^{\infty} v^s ({}_sp_y)({}_sq_x) ds \\
&= \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{x|y} &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kp_y ({}_kq_x) \\
&= a_y - a_{xy} \equiv \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}
\end{aligned}$$

Une annuité ayant une pension de 1$ payable à $(y)$ à compter du décès de $(x)$ s'il survient avant $n$ :

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x|y:\overline{n}|} &= \int_0^{n} v^s ({}_sp_x)(\mu_{x+s})({}_sp_y)\bar{a}_{y+s} ds \\
&= \bar{a}_{x|y} - v^n {}_np_x {}_np_y \bar{a}_{x+n|y+n}
\end{aligned}$$



# Annexe A : Preuves

## Preuve de la fonction de densité du couple $(x, y)$

$$
\begin{aligned}
f_{T_{x,y}}(t) &= \frac{\partial F_{T_{x,y}}(t)}{\partial t} \equiv -\frac{\partial S_{T_{x,y}}(t)}{\partial t} \\
&= \left(-\frac{\partial\, {}_tp_x}{\partial t}\right) {}_tp_y + \left(-\frac{\partial\, {}_tp_y}{\partial t}\right) {}_tp_x \\
&= \left(-\frac{\partial\, {}_tp_x}{\partial t}\right) \times \left(\frac{{}_tp_x}{{}_tp_x}\right) {}_tp_y + \left(-\frac{\partial\, {}_tp_y}{\partial t}\right) \times \left(\frac{{}_tp_y}{{}_tp_y}\right) {}_tp_x \\
&= \left(\frac{-\frac{\partial\, {}_tp_x}{\partial t}}{{}_tp_x}\right) \times {}_tp_x\, {}_tp_y + \left(\frac{-\frac{\partial\, {}_tp_y}{\partial t}}{{}_tp_y}\right) \times {}_tp_x\, {}_tp_y \\
&= \mu_{x+t} \times {}_tp_x\, {}_tp_y + \mu_{y+t} \times {}_tp_x\, {}_tp_y \\
&\overset{T_x \perp T_y}{=} \mu_{x+t} \times {}_tp_{xy} + \mu_{y+t} \times {}_tp_{xy} \\
&= {}_tp_{xy}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})
\end{aligned}
$$

## Preuve de la covariance pour deux vies indépendantes $(x)$ et $(y)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(v^{T_{\overline{xy}}}, v^{T_{xy}}) &= \mathrm{E}[v^{T_{\overline{xy}}} v^{T_{xy}}] - \mathrm{E}[v^{T_{\overline{xy}}}]\mathrm{E}[v^{T_{xy}}] \\
&= \mathrm{E}[v^{T_{\overline{xy}} + T_{xy}}] - \bar{A}_{\overline{xy}} \bar{A}_{xy} \\
&= \mathrm{E}[v^{T_x + T_y}] - \bar{A}_{\overline{xy}} \bar{A}_{xy} \\
&\overset{T_x \perp T_y}{=} \mathrm{E}[v^{T_x}]\mathrm{E}[v^{T_y}] - \bar{A}_{\overline{xy}} \bar{A}_{xy} \\
&= \bar{A}_x \bar{A}_y - (\bar{A}_{\overline{xy}}) \bar{A}_{xy} \\
&= \bar{A}_x \bar{A}_y - (\bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}) \bar{A}_{xy} \\
&= \bar{A}_x(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}) - \bar{A}_{xy}(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}) \\
&= (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})
\end{aligned}
$$