Contributeurs

ACT-2004 Mathématiques actuarielles vie I

aut. Nicholas Langevin
aut. Gabriel Crépeault-Cauchon
aut., cre. Alec James van Rassel
src., pfr. Claire Bilodeau

Rappels de mathématiques financières

Note Les éléments en couleur sont à être interprétés en REGEX.

- Par exemple, pour $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$, soit le dénominateur est le taux d'escompte pour une annuité de début de période (« *due* ») ou le taux d'intérêt pour une annuité de fin de période (« *immediate* »).

Facteurs d'actualisation

$$a(t) = (1+i)^t = (1-d)^{-t} = e^{\int_0^t \delta_s ds} \qquad v(t) = (1+i)^{-t} = (1-d)^t = e^{-\int_0^t \delta_s ds}$$

Taux d'intérêt

Terminologie

Taux d'intérêt effectif *annuel* $i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

Taux d'intérêt nominal *annuel* $i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m} - 1\right)$

Taux d'escompte nominal *annuel* $d^{(m)} = m\left(1 - (1-d)^{1/m}\right)$

Conversions entre différents taux

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i^R = \frac{i-r}{1+r}$$

Rentes

Constantes

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{(i|d)}$$

Variant arithmétiquement

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

Continues

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|i} - n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{\delta} \qquad (\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

Variant géométriquement

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i}\right]^n}{i-r}(1+i) \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}(1+i)$$

Sommations

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Domaines

Domaines

$\mathbb{R}$: Nombres réels, $x \in (-\infty, \infty)$.

$\mathbb{Z}$: Nombres entiers, positifs et négatifs, $x \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N}$: Nombres naturels, alias les nombres entiers positifs, $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

- On les dénote aussi par Z^+.

$\mathbb{Q}$: Nombres rationnels, alias les nombres pouvant être écrits sous forme de fraction.

- Par exemple, 1.25%, -0.4775, $3.\overline{153}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$.

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: Nombres irrationnels.

- Par exemple, π, e, $\sqrt{3}$.

1 Survie et mortalité

1.2 Probabilités de survie et de décès

(x) Dénote une personne d'âge x ;

μ_x : Force de mortalité pour un individu d'âge x.

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(S_x(x))\Big)$$

Définitions des variables aléatoires de durée de vie

Durée de vie future restante T_x

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire continue T_x représente le temps restant avant de décéder.

- **L'âge-au-décès** pour (x) est alors $x + T_x$;
- Pour un nouveau-né avec $(x) = (0)$, on dénote $T_x = T_0 \equiv X$;
- Donc, on ne conditionne par sur l'obtention d'un certain âge et $F_{T_0}(x) \equiv F_X(x)$.

$F_{T_x}(t)$ La probabilité que (x) ne survive pas passé l'âge de $x + t$ ans ;

- En anglais, nous l'appelons « *the lifetime distribution from age x* » ;
- On dénote $\boxed{F_{T_x}(t) = \Pr(T_x \leq t) = {}_tq_x}$;
- On pose que $\boxed{\Pr(T_x \leq t) \equiv \Pr(T_0 \leq x + t | T_0 > x)}$.

Avec cette hypothèse, on trouve les relations suivantes $\boxed{\text{pour } t \geq 0}$:

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &\equiv \Pr(T_x \leq t) \\
&= \Pr(T_0 \leq x + t | T_0 > x) \equiv \Pr(X \leq x + t | X > x) \\
&= \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \equiv \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}
\end{aligned}$$

$S_{T_x}(t)$ La probabilité que (x) survive pour au moins t années, surnommée la **fonction de survie**.

- On dénote $\boxed{S_{T_x}(t) = \Pr(T_x > t) = {}_tp_x}$.

Avec cette notation, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Pr(t < T_x \leq t + u) &= {}_{t|u}q_x \\
&\equiv {}_tp_x \, {}_uq_{x+t} \\
&\equiv {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\
{}_{t+y}q_x &= {}_tq_x + {}_tp_x \, {}_yq_{x+t}
\end{aligned}$$

Durée de vie entière future restante K_x

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **discrète** K_x représente le nombre d'années restantes avant de décéder.

- On peut penser à K_x comme le nombre d'années entières restantes à vivre pour l'individu d'âge x ;
- On a donc que $\boxed{K_x = \lfloor T_x \rfloor}$;
- Il s'ensuit que $\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = \Pr(k \leq T_x < k + 1)$;
- On dénote $\boxed{\Pr(K_x = k) = {}_{k|}q_x}$.

Partie de l'année du décès vécue R_x

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **continue** R_x représente la portion de l'année du décès vécue.

- On a donc que $\boxed{R_x = T_x - K_x}$.

Durée de vie entière future restante exprimée en m-èmes d'année $H_x^{(m)}$

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **discrète** $H_x^{(m)}$ représente le nombre de m^{e} d'années restant avant le décès.

- On a donc que $\boxed{H_x^{(m)} = \lfloor mT_x \rfloor}$.

Fraction de l'année du décès vécue $J_x^{(m)}$

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **discrète** $J_x^{(m)}$ représente le nombre de m^{e} d'années vécus lors de l'année du décès.

- On a donc que $\boxed{H_x^{(m)} = \lfloor mR_x \rfloor}$.

Exemple : Soit un décès au temps $T_x = 14.5$, on a :

$$\begin{aligned}
K_x &= \lfloor 14.6 \rfloor = 14 \\
R_x &= 14.6 - 14 = 0.6 \\
J_x^{(12)} &= \lfloor 12 \times 0.6 \rfloor = \lfloor 7.2 \rfloor = 7 \\
H_x^{(12)} &= \lfloor 12 \times 14.6 \rfloor = \lfloor 175.2 \rfloor = 175
\end{aligned}$$

En bref :

$$\begin{aligned}
T_x &\in \mathbb{R}^+ \\
K_x &\in \{0, 1, 2, \ldots\} \\
R_x &\in [0, 1) \\
H_x^{(m)} &\in \{0, 1, 2, \ldots\} \\
J_x^{(m)} &\in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}
\end{aligned}$$

Relations

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ln({}_tp_x)\Big)$$

$$\mu'_{x+s} = \alpha\mu_{x+s} + h(s) \;\Rightarrow\; {}_tp'_x = ({}_tp_x)^{\alpha} e^{-\int_0^t h(s)ds}$$

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right\} \\
&\equiv \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu_s ds\right\} \\
f_{T_x}(t) &= {}_tp_x\mu_{x+t}
\end{aligned}$$

1.3 Lois de mortalité

Loi de De Moivre

Contexte

Pas très réaliste, car on suppose que la chance de mourir est **uniforme** alors qu'en réalité une personne âgée de 90 ans a de plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans.

C'est la seule loi classique avec un **support fini**.

$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$

$$_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x} \qquad \mu_x = \frac{1}{\omega - x} \qquad _{k|}q_x = \frac{1}{\omega - x}$$

Généralisation :

$$_tp_x = \left(1 - \frac{t}{\omega - x}\right)^\alpha \qquad \mu_x = \frac{\alpha}{\omega - x}$$

$$\mathring{e}_x = \frac{\omega - x}{\alpha + 1}$$

Loi Exponentielle

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \qquad _tp_x = e^{-\mu t}$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A, B, c)$$

A risque d'accident ;

Bc^x risque lié au vieillissement.

$$\mu_x = A + Bc^x \qquad _tp_x = \text{e}^{-At - \frac{Bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)}$$

Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B, c)$$

Loi de Weibull

$$X \sim \text{Weibull}(k, n)$$

$$\mu_x = kx^n \qquad _tp_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]}$$

1.4 Tables de mortalité

Notation

ℓ_0 Nombre d'individus initial dans une cohorte ;

ℓ_x Nombre d'individus de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x ;

$_nd_x$ Nombre de décès entre les âges x et $x + n$.

$$\ell x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$

$$_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x} \qquad _tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$$_{t|u}q_x = \frac{_ud_{x+t}}{\ell_x}$$

1.5 Mortalité sélecte et ultime

Notation

$[x]$ Âge à la sélection *(pas une valeur entière)* ;

r **Période sélecte** de durée r durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \ldots$$

$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]+r\,j}p_{[x]} = \ell_{[x]\,r}p_{[x]\,j}p_{x+r}$$

1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Contexte

Si nous avons uniquement de l'information sur la mortalité en temps discret (alias, K_x) on peut estimer la mortalité T_x avec des hypothèse pour les âges fractionnaires.

Distribution uniforme des décès (DUD)

Contexte

Les décès sont répartis uniformément sur l'année. Bien que cela est semblable à la loi de De Moivre il y a une distinction à faire : une mortalité qui suit la loi de De Moivre implique une DUD, mais une DUD n'implique pas une mortalité qui suit la loi de De Moivre.

En anglais, « *Uniform Distribution of Deaths (UDD)* ».

L'hypothèse d'une DUD est en fait l'interpolation linéaire, $\boxed{\forall t \in [0,1]}$:

$$S_X(x+t) = (1-t) \times S_X(x) + t \times S_X(x+1)$$

On peut généraliser l'interpolation pour un intervalle c de plus d'un an, $\boxed{\forall t \in [0,c]}$:

$$S_X(x+t) = \frac{(c-t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x+c)$$

- Par exemple, si la mortalité est disponible en groupes d'âges quinquennaux, on pose $c = 5$.

On trouve les formules types où habituellement $c = 1$:

$$_tq_x = \left(\frac{t}{c}\right) {_cq_x}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c}\,{_cq_x}}{1-\frac{t}{c}\,{_cq_x}}$$

$$_yq_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right) {_cq_x}}{1-\left(\frac{t}{c}\right) {_cq_x}}$$

sous condition que $t \in [0,c]$, $x \in \{0, c, 2c, \ldots\}$, et $y \in [0, c-t]$.

Force constante de mortalité (FC)

Contexte

La force de mortalité est dite d'être « constante localement sur chaque année d'âge ». On peut la visualiser comme une fonction en escalier qui peut uniquement changer aux années entières.

En anglais, « *Constant Force of Mortality* ».

L'hypothèse d'une FC est en fait l'interpolation exponentielle, $\boxed{\forall t \in [0,1]}$:

$$S_X(x+t) = (S_x(x))^{1-t} \times (S_x(x+1))^t$$

On peut généraliser l'interpolation pour un intervalle c de plus d'un an, $\boxed{\forall t \in [0,c]}$:

$$S_X(x+t) = (S_x(x))^{\frac{(c-t)}{c}} \times (S_x(x+c))^{\frac{t}{c}}$$

On trouve les formules types où habituellement $c = 1$:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c}\ln({_cp_x})$$

$$_yq_{x+t} = 1 - ({_cp_x})^{\frac{y}{c}}$$

sous condition que $t \in [0,c]$, $x \in \{0, c, 2c, \ldots\}$, et $y \in [0, c-t]$.

Notes sur les durées de vies

Sous l'hypothèse de la **DUD**, on pose que la mortalité au courant d'une année est uniforme et donc, peu importe le moment de l'année, la probabilité de décéder est la même. Puisque R_x (où $R_X = T_X - K_X$) est la mortalité l'année en cours, il s'ensuit qu'elle est indépendante de la "dernière année entièrement complétée" K_x. Donc, $\boxed{K_x \overset{DUD}{\perp} R_x}$.

Sous l'hypothèse de la **force constante**, on peut penser à la force de mortalité comme une fonction en escalier. Ceci implique qu'elle peut uniquement changer de valeur *aux années entières*. Alors, K_x et R_x seront uniquement indépendantes si la probabilité de décès est la même peu importe l'âge atteint (par exemple, si la mortalité suit une loi géométrique). Dans ce cas <u>rare</u>, on dit que si $\boxed{p_{x+k} = p_x \ \forall k \in \{0,1,...\}}$ alors $\boxed{K_x \overset{FC}{\perp} R_x}$.

1.7 Caractéristiques individuelles

1.7.1 Cas continu (T_x)

Contexte

Dans le cas où l'on connaît la fonction de densité ou répartition, on peut obtenir l'information "complète" (alias, continu) sur la mortalité d'un assuré d'âge x.

Notation

$\mathring{e}_x$ Espérance de vie complète pour un individu d'âge x ;
- En anglais, « *complete-expectation-of-life* » ;
- On dit "complète" puisqu'on intègre sur la durée de vie future continue ("complète") T_x de l'assuré.

$m(x)$ La durée médiane de vie future pour un individu d'âge x.
- En anglais, « *median future lifetime* » ;
- $m(x)$ représente alors dans combien de temps la population âgée de x aujourd'hui aura diminue de moitié.

Espérance de vie <u>complète</u> pour un individu d'âge x

$$\mathring{e}_x = \mathrm{E}[T_x] = \int_0^{\omega-x} {_tp_x}\mu_{x+t}dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} {_tp_x}dt \qquad \text{si } \lim_{t\to\infty} t\,{_tp_x} = 0$$

Variance

$$\mathrm{Var}(T_x) = \int_0^{\omega-x} t^2{_tp_x}\mu_{x+t}dt - (\mathring{e}_x)^2$$

$$= \int_0^{\omega-x} 2t\,{_tp_x}dt - (\mathring{e}_x)^2 \qquad \text{si } \lim_{t\to\infty} t\,{_tp_x} = 0$$

Médiane

Pour trouver la médiane $m(x)$, on l'isole de l'égalité suivante :

$$\Pr(T_x \leq m(x)) = {_{m(x)}q_x} = \frac{1}{2}$$

Mode

Le moment t où la population âgée de x aujourd'hui (ℓ_x) connait le plus de décès.
On cherche donc le moment t qui va maximiser $f_{T_x}(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$, alias $\boxed{\arg\max_t {}_tp_x\mu_{x+t}}$.

Donc, on pose la dérivée égale à 0 :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

Mais, il faut vérifier :

1. les *bornes* pour s'assurer que le t en fait parti ;
2. que le résultat est un *maximum*.

1.7.2 Cas discret (K_x)

Contexte

En pratique, il est rare d'avoir une fonction qui décrit la mortalité en temps continu. Ce qui est plutôt disponible est la mortalité à des intervalles de temps sous forme d'une table—les « caractéristiques » disponibles sont celles de K_x.

Notation

e_x Espérance de vie abrégée pour un individu d'âge x.
- En anglais, « *curtate-expectation-of-life* » ;
- On dit "abrégé" puisqu'on somme aux années entières la mortalité K_x de l'assuré.

Espérance de vie abrégée pour un individu d'âge x

$$e_x = \mathrm{E}\left[K_x\right] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k \; {}_{k|}q_x$$

puis, si $\lim_{k\to\infty} (k+1)\,{}_{k+1}p_x = 0$,

$$= \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x$$

Variance

$$\mathrm{Var}(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left\{k^2 \; {}_{k|}q_x\right\} - (e_x)^2$$

puis, si $\lim_{k\to\infty} (k+1)^2\,{}_{k+1}p_x = 0$,

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left\{(2k-1)\;{}_kp_x\right\} - (e_x)^2$$

Médiane

Isoler $m(x)$ des égalités suivantes :

$\Pr\left(K_x < m(x)\right) < \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\Pr\left(K_x \leq m(x)\right) \geq \frac{1}{2}$

Mode

$$\arg\max_k \Pr[K_x = k]$$

Hypothèses fractionnaires

Liens entre les fonctions pour K_x et T_x :

$$\mathring{e}_x = \mathrm{E}\left[T_x\right] = E[K_x] + E[R_x] \overset{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(T_x) = V(K_x + R_x) \overset{\perp}{=} V(K_x) + V(R_x) \overset{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12}$$

1.7.3 Variables censurées

Contexte

Lorsque les données sont disponible jusqu'à une certain date dans le future, ont dit qu'elles sont « **censurées** ».

Par exemple, soit une étude sur le nombre d'années nécessaires pour obtenir un diplôme universitaire. Les données relatives aux étudiants qui commencent leur cursus scolaire après le début de l'étude, mais qui n'ont pas encore terminé leur programme avant la fin de l'étude, sont **censurées**. Nous avons de l'information partielle sans toutefois avoir l'information complète.

En assurance vie, on applique ce concept dans le but de calculer l'espérance de vie future *d'ici n* années pour un assuré d'âge x.

Notation

$\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$ Espérance de vie **complète** temporaire n années

$e_{x:\overline{n}|}$ Espérance de vie **abrégée** temporaire n années.

Espérance de vie complète temporaire n années

$$\begin{aligned}\mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}\left[T_x \wedge n\right] \\ &= \int_0^n t\,{}_tp_x \mu_{x+t} dt + n\,{}_np_x\end{aligned}$$

Dans le cas où l'assuré est d'âge $x \in [0, \omega)$ et que l'on calcule l'espérance d'ici $n \in [0, \omega - x]$ années, $\boxed{\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x dt}$.

Espérance de vie abrégée temporaire n années

$$\begin{aligned}e_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}\left[K_x \wedge n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\,{}_{k|}q_x + n\,{}_np_x\end{aligned}$$

Dans le cas où l'assuré est d'âge $x \in \{0, 1, \ldots, \omega - 1\}$ et que l'on calcule l'espérance d'ici $n \in \{0, 1, \ldots, \omega - x - 1\}$ années, $\boxed{e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n {}_kp_x}$.

1.7.4 Variables tronquées

Contexte

Lorsque les données sont disponible jusqu'à une certain date dans le future, ont dit qu'elles sont « **censurées** ».

Par exemple, soit une étude sur le nombre d'années nécessaires pour obtenir un diplôme universitaire. Les données relatives aux nombre d'années déjà investis par les étudiants qui ont déjà commencé leur cursus scolaire *avant* le début de l'étude sont disponibles, mais les données sur les étudiants qui ont commencé en même temps qu'eux mais qui ont quitté l'école avant le début de l'étude sont **tronquées** vers la gauche. Nous avons de l'information partielle sans toutefois avoir l'information complète.

En assurance vie, on applique ce concept, sauf que l'on tronque les données vers la droite. On cherche à calculer l'espérance de vie future *conditionnelle* à ce que le décès arrive dans les n prochaines années pour un assuré d'âge x. Donc, on ***ignore*** les personnes d'âge x qui ne vont pas décéder au cours des n prochaines années.

Notation

$\mathrm{E}[T_x|T_x \leq n]$ Espérance de vie **complète** conditionnelle à ce que le décès ait lieu au cours des n prochaines années.

$\mathrm{E}[K_x|K_x \leq n]$ Espérance de vie **abrégée** conditionnelle à ce que le décès ait lieu au cours des n prochaines années.

Espérance de vie complète conditionnelle n années

$$\mathrm{E}[T_x|T_x \leq n] = \frac{\mathring{e}_{x:\overline{n}|} - n\,{}_np_x}{{}_nq_x}$$

Espérance de vie abrégée conditionnelle n années

$$\mathrm{E}[K_x|K_x < n] = \frac{e_{x:\overline{n}|} - n\,{}_np_x}{{}_nq_x}$$

Espérance de vie complète conditionnelle 1 année

On définit l'espérance $a(x)$ pour un décès au cours de la prochaine année :

$$a(x) = \mathrm{E}[T_x|T_x \leq 1] = \frac{\mathring{e}_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E}\left[T_x|T_x \leq n\right] {}_nq_x + n\,{}_np_x$$

$$e_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E}\left[K_x|K_x < n\right] {}_nq_x + n\,{}_np_x$$

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} \overset{\text{DUD}}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_nq_x}{2}$$

1.7.5 Formules de récurrence

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \mathring{e}_{x:\overline{m}|} + {}_mp_x \mathring{e}_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$e_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{m}|} + {}_mp_x e_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$\begin{aligned}e_{x+n} &= p_{x+n}(1 + e_{x+n+1}) \\ &= e_{x+n:\overline{1}|} + p_{x+n} e_{x+n+1}\end{aligned}$$

1.8 Caractéristiques de groupe

$T_a^{(j)}$ v.a. de la jème vie, $j \in \{1, \dots, \ell_a\}$.

Définitions des variables aléatoires du nombre de décès et de survivants

Pour tout $x \geq a$, où $\boxed{\text{souvent } a = 0}$,

Variable aléatoire du nombre de survivants jusqu'à l'âge x $\mathscr{L}_x$

$$\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T_a^{(j)} > x-a\}} \sim \text{Bin}(\ell_a, {}_{x-a}p_a)$$

- Il s'ensuit que $\text{E}[\mathscr{L}_x] = \ell_x$.

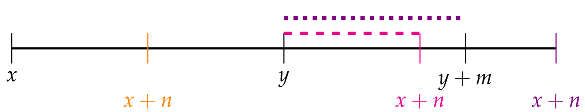
Variable aléatoire du nombre de décédés entre les âges x et $x+n$ ${}_n\mathcal{D}_x$

$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}} \sim \text{Bin}(\ell_a, {}_{x-a|n}q_a)$$

- Il s'ensuit que $\text{E}[{}_n\mathcal{D}_x] = {}_nd_x$.
- Également, ${}_n\mathcal{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}_{x+n}$.

Avec les sommations on trouve :

$$\text{Cov}({}_n\mathcal{D}_x, {}_m\mathcal{D}_y) = \begin{cases} -{}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a \cdot \ell_a, & x+n \leq y \\ {}_{y-a|x+n-y}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a \cdot \ell_a, & y < x+n \leq y+m \\ {}_{y-a|m}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a \cdot \ell_a, & y+m < x+n \end{cases}$$



Raccourci : $\text{Cov}(\text{A}, \text{B}) = \text{E}[A \cap B] - \frac{\text{E}[A]\text{E}[B]}{\ell a}$

2 Contrats d'assurance-vie

2.1 Notation et introduction

Fonctions

$a(T)$ Facteur d'accumulation.

$v(T)$ Facteur d'actualisation.

$$v(t) = \frac{1}{a(t)}$$

Z **:** v.a. de la valeur actualisée du montant payé selon les termes du contrat.
$Z = z_t = b(T)v(f(T))$

$b(T)$ Prestation prévue en fonction de T.

$f(T)$ Moment du paiement en fonction de T.

› De plus, puisque $f(T)$ n'a pas d'importance lorsque $b(T) = 0$, on le définit comme $f(t) \geq T$ afin de simplifier des interprétations plus tard.

PUN Pour simplifier la notation, on dénote la **prime unique nette *(PUN)*** par :

$$PUN = \mathrm{E}[Z] = \int_0^{\omega-x} z_t \, {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

› Le nom vient du fait qu'elle n'est payée qu'une seule fois *(unique)* et qu'elle ne couvre que le coût des prestations *(nette)*.

Notation

A_x

Prestation de base

$b\,A_x$ Si quelque chose est payable c'est b.

$b(IA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.

$b(DA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Force, ou multiple j de la force, d'intérêt δ
$0 \leq \delta < 1$ et $j \in \mathbb{Z}_+$

${}^{\delta}A_x$ Évaluation avec **force** d'intérêt δ *(constante)*.

${}^{j}A_x$ Évaluation avec ***j* fois force** d'intérêt δ *(pas nécessairement constante)*.

Période différée

${}_{m|}A_x$ Couverture débutant dans m années.

– ***Donc*** si décède avant les m années, il n'y a pas de paiement.

Fréquence de variation
variation m fois par année
$(I^{(m)}A)_x$ et $(D^{(m)}A)_x$
*(dé)*croissance continue
$(\bar{I}A)_x$ et $(\bar{D}A)_x$
Type de variation de la prestation

A_x Constant

$(IA)x$ Croissant arithmétiquement

$(DA)x$ Décroissant arithmétiquement

Durée temporaire de la variation
$(I_{\overline{n|}}A)_x$ Augmentation uniquement lors des n premières années de couverture.

Moment de paiement de la prestation de décès

$\bar{A}_x$ Au moment du décès.

$A_x^{(m)}$ À la fin du 1/m d'année du décès.

– *Par exemple*, si $m = 12$ alors c'est payable à la fin du mois de décès.

Couverture temporaire n années

$A^1_{x:\overline{n|}}$ Cas de décès.

$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}$ Cas de survie.

$A_{x:\overline{n|}}$ Les deux cas.

A_x En tout temps.

Principes de calcul de la prime pour un seul contrat

Principes pour calculer la prime *(unique)* à payer pour un contrat d'assurance :

1. $\mathrm{E}[Z]$ **principe d'équivalence**
2. $\mathrm{E}[Z] + k\sigma_Z$
3. ξ **quantile de** Z.

Interprétations pour un seul contrat

1. En moyenne l'assureur ne fait ni gains ni pertes
2. Lorsqu'il y a plusieurs contrats, le principe est équivalent au troisième mais lorsqu'il n'y en a qu'un seul alors il ne tient pas.
3. Plus petite prime π telle que $\boxed{Pr(Z \leq \pi) \geq p}$.

Principes de calcul pour un portefeuille de plusieurs contrats

Généralement, on suppose les n différents contrats Z_j identiques et les vies indépendantes *(i.i.d.)*.

$$S = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

1. Par le **principe d'équivalence**, $\mathrm{E}[Z] = \pi$.
3. **Principe du quantile** $Pr(S \leq n\pi) \geq p$, où p est la **probabilité de solvabilité**.

Cependant, si les contrats ne sont ***pas identiques***, la **prime varie** selon le contrat.

1. Pour chaque type de contrat le **principe d'équivalence** ne change pas, $\mathrm{E}[Z] = \pi$.
3. Pour le **Principe du quantile** on veut maintenant une **surcharge égale** pour tous les contrats et donc le plus petite h telle que $Pr(S \leq h) \geq p$.

h : Prime collective sous le principe du quantile.

Doit trouver la surcharge θ qui, lorsque appliquée à chacune des espérances individuelles, donnera la prime collective au total.

θ : **Surchage**.
$\pi = (1+\theta)\mathrm{E}[Z]$
$h = (1+\theta)\mathrm{E}[S]$

$\theta\mathrm{E}[Z]$: **Surprime**.

Puisque par défaut les Z_j sont *(iid)*, on applique **l'approximation normale** avec $S \sim N(\mathrm{E}[S] = n\mathrm{E}[Z], V(S) = nV(Z))$.
$\Phi^{-1}(p) = z_{1-p}$

$$z_{1-p} \leq \frac{\sqrt{n}(\pi - \mathrm{E}[Z])}{\sigma_Z}$$

$$\pi \geq \mathrm{E}[Z] + z_{1-p}\left(\frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}\right) = \pi_p \qquad \pi\$ = \frac{\lceil 100\pi_p \rceil}{100}$$

$$n \geq \left(\frac{z_{1-p}\sigma_Z}{\pi - \mathrm{E}[Z]}\right)^2 = n_p$$

Donc avec h on résoud $h = (1+\theta)\mathrm{E}[S]$ et applique la surprime à tous les assurés.

Règle des moments

$$\mathrm{E}\left[Z^j\right] @\delta_t = \mathrm{E}\left[b^j \times Z'^j\right] @\delta_t$$
$$= b^j \times \mathrm{E}\left[Z'\right] @j \times \delta_t$$

Où $Z = bZ'$, donc Z' est la v.a. équivalente avec une prestation unitaire.
À noter que la règle est **seulement applicable** aux **prestations nivelées** et donc n'est pas applicable aux prestations variant arithmétiquement.

2.2 Payable au moment du décès

Contexte

Les *montants* et *moments du paiement* ne dépendent que du **temps écoulé depuis l'émission de la police**.
Également, toutes les fonctions sont définies en fonction de la v.a. de la durée de vie future de l'assuré T.

Assurance à prestation nivelée

Assurance-vie entière $\bar{Z}_x$

Est en vigueur tant que l'assuré est en vie et verse une prestation au moment de son décès.

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Assurance-vie temporaire $\bar{Z}^1_{x:\overline{n}|}$

Si l'assuré décède dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Capital différé de n années ${}_nE_x$

Si l'assuré ***ne décède pas*** dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de survie. Pour ce cas particulier, $\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \Longleftrightarrow A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ et on dénote donc le capital différé par ${}_nE_x$.

$${}_nE_x = v^n {}_np_x$$

› Alias, le **facteur d'actualisation actuariel**.

Assurance mixte $\bar{Z}_{x:\overline{n}|}$

Si l'assuré ***décède*** dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès. S'il est toujours en vie, paye une prestation de survie.

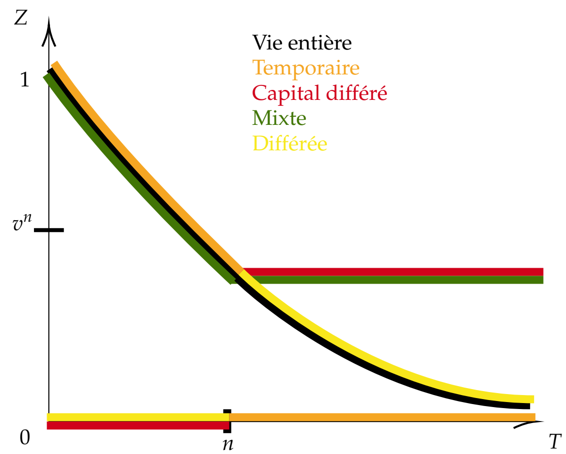
$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_np_x \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\end{aligned}$$

Assurance différée de m années ${}_{m|}\bar{Z}_x$

Si l'assuré décède **après** les m années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$$\begin{aligned}{}_{m|}\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= v^m {}_mp_x \int_0^{\omega-x-m} v^s {}_sp_{x+m}\, \mu_{x+m+s}\, ds \\ &= v^m {}_mp_x \bar{A}_{x+m} = {}_mE_x \bar{A}_{x+m}\end{aligned}$$

Comparaison des différents contrats



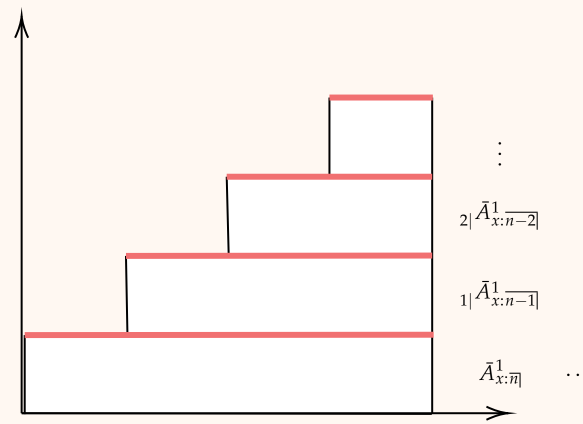
Assurance à prestation variant arithmétiquement

Assurance vie temporaire croissante

La prestation croît annuellement

La prestation est de 1 \$ dans la première année, 2 \$ dans la deuxième, etc. jusqu'à n \$ dans la $n^{\text{ème}}$ année.

$$\begin{aligned}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{1|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-1}|} + \cdots + {}_{n-1|}\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}\end{aligned}$$



La prestation croît annuellement pendant r années

$$(I_{\overline{r}|}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{r-1} {}_{k|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-k}|}$$

La prestation croît m fois par année

Paye une prestation de 1/m \$ dans le premier 1/m d'année, 2/m \$ dans le deuxième, etc.

$$(I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \frac{(\lfloor t \times m \rfloor + 1)}{m} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

L'assurance est différée de r années

$${}_{r|}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = v^r {}_rp_x (I\bar{A})^1_{x+r:\overline{n}|}$$

La prestation croît **continûment**

Paye une prestation de t au moment du décès, tant qu'il se produise dans les n premières années.

$$(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^n {}_{s|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-s|}} ds$$

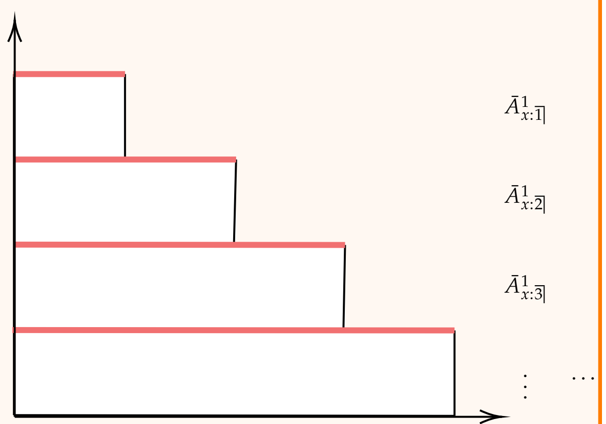
Assurance vie temporaire décroissante

La prestation décroît **annuellement**

La prestation **décroît chaque année** et, puisqu'elle ne peut pas être négative, l'assurance sera nécessairement temporaire.

Paye n\$ au début de la première année, $n-1$\$ au début de la deuxième, etc. jusqu'à 1\$ au début de la dernière année. Cependant, on peut le voir de l'autre sens, la prestation du début de la dernière année est de 1\$, 2\$ au début de l'avant-dernière année, etc.

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n (n - \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}^1_{x:\overline{1|}} + \bar{A}^1_{x:\overline{2|}} + \cdots + \bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$$



La prestation décroît m **fois par année**

Paye une prestation de n \$ dans le premier 1/m d'année, n - 1/m \$ dans le deuxième, etc. jusqu'à 1/m \$ durant le dernier 1/m d'année.

$$(D^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \left(n - \frac{1}{m} \times \lfloor mt \rfloor\right) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

L'assurance **est différée de** r **années**

$${}_{r|}(D\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} {}_{r|}\bar{A}^1_{x:\overline{k|}}$$

La prestation décroît **continûment**

Prévoit une prestation de n \$ pour un décès immédiat, par la suite la prestation décroît linéairement jusqu'à 0 \$ au bout de n années.

$$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n (n-t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^n \bar{A}^1_{x:\overline{s|}} ds$$

Assurance mixte L'assurance peut être mixte peu importe qu'elle soit croissante ou décroissante.

1. L'assurance ***croissante*** mixte n années, paierait n\$ en cas de survie *(peu importe la fréquence de la croissance)*. $(I\bar{A})_{x:\overline{n|}} = (I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} + n_nE_x$
2. L'assurance ***décroissante*** mixte n années paierait 1/m\$ en cas de survie si la prestation **décroît** m **fois par année**.
3. L'assurance ***décroissante*** mixte n années paierait 1\$ en cas de survie si la prestation **décroît annuellement**.
4. L'assurance ***décroissante*** mixte n années aurait une prestation de survie nulle si la prestation **décroît continûment**.
   - Donc, bien qu'en théorie une assurance décroissante continûment peut être mixte, en pratique ce n'est pas le cas.

Comme pour les assurances à prestations constantes, une mixte est la combinaison d'une temporaire *(avec la même (dé)croissance)* et d'un capital différé.

$${}_{r|}(D\bar{A})_{x:\overline{n|}} = {}_{r|}(D\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n+r|}}^{\ \ \ 1}$$

Assurance vie entière croissante

La prestation croît **annuellement**

La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.
Donc, 1 \$ la première, 2 \$ la deuxième, etc. jusqu'à $\omega - x$\$ la dernière.

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots$$

La prestation croît **continûment**

La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {}_{s|}\bar{A}_x ds$$

La prestation croît **annuellement** pendant n années

Comme une vie entière sauf que la prestation cesse de croître après n années et l'assurance paye n\$ pour la suite.

$$(I_{\overline{n|}}\bar{A})_x = (I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} + n_{n|}\bar{A}_x = \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}_x$$

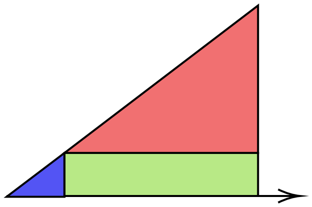
Relations

$$(I_{\overline{r|}}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = (I\bar{A})^1_{x:\overline{r|}} + r_{r|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-r|}}$$
$${}_{r|}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = v^r {}_rp_x (I\bar{A})^1_{x+r:\overline{n|}}$$
$${}_{r|}(D\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = v^r {}_rp_x (D\bar{A})^1_{x+r:\overline{n|}}$$

$$(D^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} + (I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = \left(n + \frac{1}{(m)}\right) \bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$$
$${}_{r|}(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} + {}_{r|}(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = n_{r|}\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$$
$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n-1|}} + (I_{\overline{n|}}\bar{A})^1_x = n\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$$
$${}_{r|}(D\bar{A})^1_{x:\overline{n-1|}} + {}_{r|}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = n_{r|}A^1_{x:\overline{n|}}$$

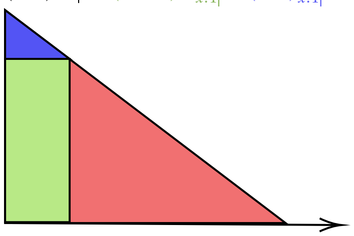
Relations croissance

$$(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} = (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{1|}} + v p_x \left[\bar{A}^1_{x+1:\overline{n-1|}} + (\bar{I}\bar{A})^1_{x+1:\overline{n-1|}}\right]$$

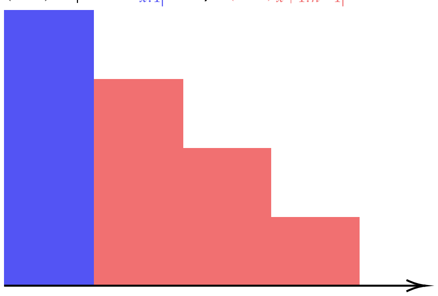


Relations décroissance

$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = (n-1)\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + (\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{1}|} + v\, p_x (\bar{D}\bar{A})^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|}$



$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = n\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + v\, p_x (D\bar{A})^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|}$



Assurance à prestation variant exponentiellement

La prestation de référence est celle payable en cas de décès immédiat. La prestation est ***indexée*** continûment à force τ ; généralement, $\tau < \delta$ et peut même être négatif.

Par exemple, pour une assurance temporaire n années différée de r années ${}_{r|}\bar{Z}^{1\text{ind}}_{x:\overline{n}|}$.

$$Z = {}^{\delta-\tau}_{\;\;r|}\bar{Z}^1_{x:\overline{n}|}$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T < r \\ e^{-(\delta-\tau)T} & r < T < r+n \\ 0 & T > n+r \end{cases}$$

Évolution du fonds

F_0 Fonds initialement constitué des primes reçues pour n contrats. $F_0 = n\pi$

Augmente *(croît)* avec le taux de rendement réalisé sur les placements.

Diminue *(décroît)* chaque fois qu'une prestation est payable.

- On dénote la valeur du fonds à t *(après le paiement de prestations payables au temps t s'il y a lieu)* par F_t.

Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ les **moments de décès** *(en ordre croissant)*.
Soit δ_s, $s > 0$ la force d'intérêt réalisée à s.
Tant que des prestations de décès sont payables :

$$F_{t_j^-} = F_{t_{j-1}^+}\, e^{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \delta_s ds}$$

$$F_{t_j^+} = F_{t_j^-} - b(t_j)$$

Si le contrat se termine à r

sans prestation de survie.

$$F_r = F_{t_k^+}\, e^{\int_{t_k}^{r} \delta_s ds}$$

où $t_k = \max\{t_j | t_j < r\}$

avec prestation de survie

$$F_r = F_{t_k^+}\, e^{\int_{t_k}^{r} \delta_s ds} - b^\star(r)(n-k)$$

où $t_k = \max\{t_j | t_j < r\}$

et $b^\star(r) =$ prestation de survie

2.3 Payable à la fin de l'année du décès

Contexte

La prestation peut seulement changer aux anniversaires de la police (alias aux âges entiers). L'information est souvent disponible sous format de table et donc les seuls calculs possibles sont ceux des contrats payables à la fin de l'année du décès.

De façon générale, l'âge à l'émission, la durée de couverture et la période différée sont entiers ($x, n, r \in \mathbb{Z}$).

Principe général

Valeur actualisée : z_{k+1}
Prestation : b_{k+1}
Facteur d'actualisation : v_{k+1}

$f(T) = \lfloor T+1 \rfloor$

$\forall K \in \mathbb{Z}^+$

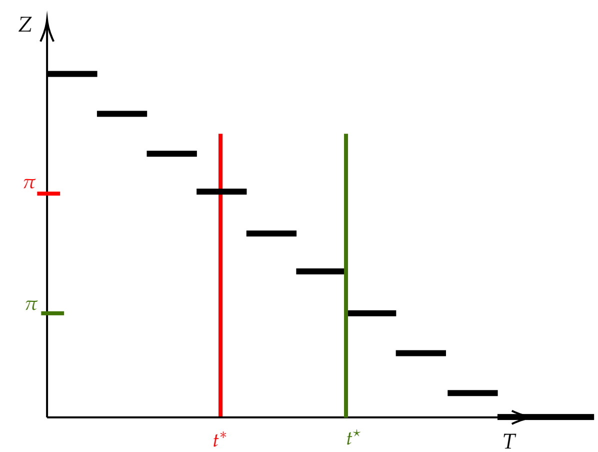
$$Z = z_{K+1} = b_{K+1} v_{K+1}$$

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} z_{k+1\; k|}q_x$$

Principe du quantile

Si on atterrit entre 2 marches, on choisit toujours ***la plus basse***.

si	π
$t^* \notin Z^+$	$Z\|_{K=\lfloor t^* \rfloor}$
$t^* \in Z^+$	$\min(Z\|_{K=t^*}, Z\|_{K=t^*-1})$



Interprétation des signes d'égalité

au moins	$\geq$
au plus	$\leq$
moins de	$<$
plus de	$>$

Assurance à prestation nivelée

Note : La règle des moments s'applique.

Assurance-vie entière Z_x

Est en vigueur tant que l'assuré est en vie et verse une prestation à la fin moment de l'année de son décès.

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x$$

Assurance-vie temporaire $Z^{1}_{x:\overline{n}|}$

Si l'assuré décède dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$${}_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0+m}^{m+n-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x$$

Assurance mixte ${}_{r|}Z_{x:\overline{n}|}$

Si l'assuré ***décède*** dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès. S'il est toujours en vie, paye une prestation de survie.

$${}_{r|}A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=r}^{r+n-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x + v^{r+n}\,{}_{n+r}p_x$$

Assurance différée de m années ${}_{m|}Z_x$

Si l'assuré décède **après** les m années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$$\begin{aligned}
{}_{m|}A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m}\,{}_{k+m|}q_x \\
&= v^{m}\,{}_{m}p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1}\,{}_{k}p_{x+m}\,q_{x+m+k} \\
&= {}_{m}E_x\,A_{x+m}
\end{aligned}$$

Liens

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1} \qquad A_{w-1} = v$$

$$A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + v^{n}\,{}_{n}p_x A_{x+n}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} \qquad A^{1}_{x+n-1:\overline{1}|} = vq_{x+n-1}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{r}|} + v^{r}\,{}_{r}p_x A^{1}_{x+r:\overline{n-r}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^{r}\,{}_{r}p_x A_{x+r:\overline{n-r}|}^{\;\;1}$$

Assurance à prestation variant arithmétiquement

Contexte

Puisque la prestation est payable à la fin de l'année du décès, le changement ne se fera qu'une fois par année. Donc, la (dé)croissance est par défaut **annuelle**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[{}_{r|}(I_{\overline{m}|}Z)^{1}_{x:\overline{n}|}\right] &= \sum_{k=r}^{r+m-1} (k+1-r)v^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&+ \sum_{k=r+m}^{r+n-1} mv^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&+ (0|mv^{r+n}\,{}_{r+n}p_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[{}_{r|}(DZ)^{1}_{x:\overline{n}|}\right] &= \sum_{k=r}^{r+n-1} (n+r-k)v^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&+ (0|v^{r+n}\,{}_{r+n}p_x)
\end{aligned}$$

Relations de récurrence

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} + (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = (n+1)A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}A)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{m-1} {}_{j+r|}A^{1}_{x:\overline{n-j}|}$$

$${}_{r|}(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{k}|}$$

$$\begin{aligned}
{}_{r|}(I_{\overline{m}|}A)^{1}_{x:\overline{n}|} = v^{r}\,{}_{r}p_x \Big\{ &(IA)^{1}_{x+r:\overline{s}|} \\
&+ v^{s}\,{}_{s}p_{x+r}\left[(I_{\overline{m-s}|}A)^{1}_{x+r+s:\overline{n-s}|} + s\,A^{1}_{x+r+s:\overline{n-s}|}\right]\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{r|}(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = v^{r}\,{}_{r}p_x \Big\{ &(DA)^{1}_{x:\overline{m}|} + (n-m)A^{1}_{x:\overline{m}|} \\
&+ v^{m}\,{}_{m}p_{x+r}(DA)^{1}_{x+r+m:\overline{n-m}|}\Big\}
\end{aligned}$$

Assurance à prestation variant exponentiellement

On pose que la première prestation payable en cas de décès $= b$ et que les prestations suivantes sont indexées au taux d'inflation.
Par exemple, pour une assurance temporaire n années différée de r années ${}_{r|}Z^{1\mathrm{ind}}_{x:\overline{n}|}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[{}_{r|}Z^{1\mathrm{ind}}_{x:\overline{n}|}\right] &= \sum_{k=r}^{r+n-1} b(1+\mathrm{inf})^{k-r} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&+ (0|b(1+\mathrm{inf})^{n-1} v^{r+n}\,{}_{r+n}p_x)
\end{aligned}$$

Évolution du fonds

F_0 Valeur du fonds initial avec l'achat par ℓ_x personnes.

ℓ_x Nombre de personnes ayant initialement acheté au fonds.
$F_0 = \ell_x \pi$

$F_k^{(\text{att}|\text{obs})}$ Valeur du fonds (attendue | observée) à la **fin** de la $k^{\text{ème}}$ année.

r_k Taux de rendement réalisé lors de la $k^{\text{ème}}$

i Taux de rendement espéré de la prime.

$d_{x+k-1}^{(\text{att}|\text{obs})}$ Nombre de décès (attendus | observés) lors de la $k^{\text{ème}}$ année.

$F_o^{\text{obs}} = F_o^{\text{att}} = \ell_x \pi$
Tant qu'il y a couverture :

En cas de décès

$$F_{k+1}^{\text{att}} = F_k^{\text{att}}(1+i) - b_{k+1}^{\text{décès}}\ d_{x+k}^{\text{att}}$$
$$F_{k+1}^{\text{obs}} = F_k^{\text{obs}}(1+r_{k+1}) - b_{k+1}^{\text{décès}}\ d_{x+k}^{\text{obs}}$$

En cas de prestation de survie à n

$$F_n^{\text{att}} = F_{n-1}^{\text{att}}(1+i) - b_n^{\text{décès}}\ d_{x+n-1}^{\text{att}} - b_n^{\text{survie}}\ \ell_{x+n}^{\text{att}}$$
$$F_n^{\text{obs}} = F_{n-1}^{\text{obs}}(1+r_n) - b_n^{\text{décès}}\ d_{x+n-1}^{\text{obs}} - b_n^{\text{survie}}\ \ell_{x+n}^{\text{obs}}$$

2.4 Payable à la fin du 1/m d'année du décès

On dénote une réalisation de $H_x^{(m)}$ par h. Par exemple, pour $m = 4$ dans une année entre $K = 10$ et $K = 11$, $H_x^{(4)} \in \{40, 41, 42, 43\}$.

$$Z = b_{K+\frac{J+1}{m}} v_{K+\frac{J+1}{m}}$$

$$\begin{aligned}\Pr(K = k, J = j) &= {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &\overset{DeMoivre}{=} \frac{1}{m(\omega - x)} \\ &\overset{Exponentielle}{=} e^{-\mu(k+\frac{j}{m})}(1 - e^{-\mu(\frac{1}{m})})\end{aligned}$$

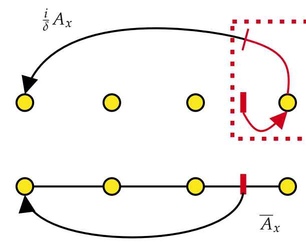
$${}_{r|}A_{x:\overline{n}|}^{1\,(m)} = \sum_{h=rm}^{m(r+n)-1} v^{\frac{h+1}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + (0|v^{r+n}\ {}_{r+n}p_x)$$

2.5 Relations entre assurances payables au moment du décès et celles payables à la fin de l'année du décès

Si :

1. La force d'intérêt est constante.
   $v_t = v^t$
2. Il y a seulement une prestation de décès.
3. Le plus souvent que la prestation peut varier est aux anniversaires de police ; alias, elle est constante sur une année.
   $b_t = b_{\lfloor t \rfloor + 1}$

$$\bar{A}_x \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_x \qquad A_x^{(m)} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$



Généralisation

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^{1} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Cas de croissance

$$(\bar{I}\bar{A})_x \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right]$$

$$(I^{(m)}A)_x^{(m)} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d^{(m)}}\right) A_x\right]$$

Généralisation avec multiple de la force d'intérêt

$${}^{j}\bar{A}_x \overset{DUD}{=} \frac{e^{j\delta} - 1}{j\delta}\ {}^{j}A_x \qquad {}^{j}A_x{}^{(m)} \overset{DUD}{=} \frac{e^{j\delta} - 1}{m(e^{\frac{j\delta}{m}} - 1)}\ {}^{j}A_x$$

Approximations

$$\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x \qquad A_x^{(m)} \approx (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} A_x$$

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^{1} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} (DA)_{x:\overline{n}|}^{1} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n}|} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^{1} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}}\left[(DA)_{x:\overline{n}|}^{1} - \frac{1}{2} A_{x:\overline{n}|}^{1}\right]$$

$$(I_{\overline{n}|}^{(m)}\bar{A})_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}}\left[(I_{\overline{n}|}A)_x - \frac{m-1}{2m} A_{x:\overline{n}|}^{1}\right]$$

3 Contrats de rente

Contexte

Chaque paiement des contrats de rente sont conditionnels à la survie du rentier jusqu'au moment du paiement *(à moins de se trouver dans une période garantie)*.

Double force

$^{2}i = 2i + i^2$ $\qquad$ $^{2}d = 2d - d^2$

3.2 Rentes continues

Rentes nivelées

Rente viagère $\overline{Y}_x$

On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_x &= \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \overline{Z}_x}{\delta} \\
\bar{a}_x &= \int_0^{\omega - x} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} v^t\, {}_t p_x dt \\
&= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\,(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x) - \bar{a}_x^2$$

Rente temporaire n années $\overline{Y}_{x:\overline{n}|}$

Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$\overline{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|}, & T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \overline{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\; {}_t p_x\; \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\; {}_n p_x \\
&= \int_0^n v^t\, {}_t p_x dt \\
&= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\,(\overline{Y}_{x:\overline{n}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}) - \bar{a}_{x:\overline{n}|}^2$$

Rente viagère différée m années ${}_{m|}\overline{Y}_x$

C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$${}_{m|}\overline{Y}_x = \begin{cases} 0 & T_x \leq m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x - m}|} & T_x > m \end{cases} = \frac{\overline{Z}_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} - {}_{m|}\overline{Z}_x}{\delta}$$

$$\begin{aligned}
{}_{m|}\bar{a}_x &= \int_m^{\omega - x} \bar{a}_{\overline{t-m}|}\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= {}_m E_x \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}
\end{aligned}$$

On note que ${}_{m|}\overline{Y}_x = \overline{Y}_x - \overline{Y}_{x:\overline{m}|}$

Rente garantie (certaine) n années

Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & T_x \geq n \end{cases} = \overline{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}Y_x$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n q_x + \int_n^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x
\end{aligned}$$

Valeur actuarielle accumulée $\bar{s}_{x:\overline{n}|}$

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_n E_x}$$

Rentes variant arithmétiquement

Rentes variant annuellement Limitons à les exprimer comme une somme de rentes dont le taux de paiement est constant.

Croissante

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_{\min(T, r)}^{\min(T, r+n)} \min(m, [u + 1 - r])\mathrm{e}^{-\delta u} du$$

$$\mathrm{E}[{}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|}] = \sum_{k=0}^{m-1} {}_{r+k|}\bar{a}_{x:\overline{n-k}|}$$

Décroissante

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_{\min(T, r)}^{\min(T, r+n)} \min(m, [u + 1 - r])\mathrm{e}^{-\delta u} du$$

$$\mathrm{E}[{}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|}] = \sum_{k=0}^{m-1} {}_{r+k|}\bar{a}_{x:\overline{n-k}|}$$

Rentes variant exponentiellement

$${}_{m|}\bar{Y}_{x:\overline{n}|}^{\text{indexée}} = \begin{cases} 0, & T \leq m \\ \mathrm{e}^{-\tau m}\mathrm{e}^{-(\delta - \tau)m}\bar{a}_{\overline{T-m}|\delta - \tau}, & m < T \leq m + n \\ \mathrm{e}^{-\tau m}\mathrm{e}^{-(\delta - \tau)m}\bar{a}_{\overline{n}|\delta - \tau}, & T > m + n \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[{}_{m|}\bar{Y}_{x:\overline{n}|}^{\text{indexée}}] = \mathrm{e}^{-\tau m} \cdot {}^{\delta - \tau}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

3.3 Rentes discrètes

Rentes nivelées

Rente viagère Y_x

Pour $K = 0, 1, 2, \dots$ on obtient :
$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$

Début de période

$$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1}{d}[1 - Z_x]$$

$$E[\ddot{Y}_x] = \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k\, {}_kp_x$$

Fin de période

$$Y_x = a_{\overline{K}|} = \frac{1}{i}[1 - (1+i)Z_x]$$

$$E[Y_x] = a_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} a_k\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} v^k\, {}_kp_x$$

On note que :

Variance rente

$$\mathrm{Var}(\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{d^2}({}^2A_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}) = \mathrm{Var}(Y_x)$$
$$= \frac{2}{d}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) + {}^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2$$

Relation entre début et fin de période :
$Y_x = a_{\overline{K}|} \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - 1 = \ddot{Y}_x - 1$

$\Rightarrow a_x = \ddot{a}_x - 1$

Relation de récurrence : $a_x = vp_x + vp_x a_{x+1} = vp_x\ddot{a}_{x+1}$

$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x\, a_{x+n}$

Rente temporaire n années $Y_{x:\overline{n}|}$

Pour une rente temporaire, on ajoute une limite jusqu'où sommer, et on obtient :

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & ,K = 0,1,\dots,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & ,K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}[1 - Z_{x:\overline{n}|}]$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x$$

Fin de période

$$Y_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{i}\left[1 - (1+i)Z_{x:\overline{n+1}|}\right]$$
$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + a_{\overline{n}|}\, {}_np_x = \sum_{k=1}^{n} v^k\, {}_kp_x$$

Et :

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x$$

Rente garantie n années $Y_{\overline{x:\overline{n}|}}$

On obtient :

$$\ddot{Y}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|} & ,K = 0,1,\dots,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & ,K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k\, {}_kp_x$$

Fin de période

$$a_{\overline{x:\overline{n}|}} = a_{\overline{n}|}\, {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} a_{\overline{k}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=1}^{n} v^k + \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k\, {}_kp_x$$

De plus :

$$E[\ddot{Y}^2_{\overline{x:\overline{n}|}}] = \frac{2}{d}\left(\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - {}^2\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}\right) + {}^2\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$$
$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x$$

Rente différée n années ${}_{n|}Y_x$

On obtient :

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & ,K = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & ,K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \frac{1}{d}\left[Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - {}_{n|}Z_x\right]$$
$${}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^n\ddot{a}_{\overline{k+1-n}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k\, {}_kp_x$$

Fin de période

$${}_{n|}Y_x = \frac{1}{d}\left[Z_{x:\overset{1}{\overline{n+1}|}} - {}_{n+1|}Z_x\right]$$
$${}_{n|}a_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^n a_{\overline{k-n}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k\, {}_kp_x$$

De plus :

$${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = vp_x\, {}_{n-1|}\ddot{a}_{x+1}$$
$${}_{n|}a_x = {}_{n+1|}\ddot{a}_x = {}_{n|}\ddot{a}_x - {}_nE_x$$

Valeur actuarielle accumulée $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$

On obtient :

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$$

Rentes à paiement variant arithmétiquement

Rente viagère croissante

On obtient :
$\ddot{Y} = (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|}, K = 0,1,2,\ldots$

Début de période

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\ddot{Y}] &= (I\ddot{a})_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|\,k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)v^k{}_kp_x\end{aligned}$$

Fin de période

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\ddot{Y}] &= (Ia)_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (Ia)_{\overline{K}|\,k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} kv^k{}_kp_x\end{aligned}$$

De plus :
$(Ia)_x = (I\ddot{a})_x - \ddot{a}_x$

Rente temporaire n années croissante

On obtient :

$$\ddot{Y} = \begin{cases}(I\ddot{a})_{\overline{K+1}|} & ,K = 0,1,\ldots,n-1 \\ (I\ddot{a})_{\overline{n}|} & ,K = n, n+1\end{cases}$$

Début de période

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\ddot{Y}] &= (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (I\ddot{a})_{\overline{k}|\,k|}q_x + (I\ddot{a})_{\overline{n}|\,n}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k{}_kp_x\end{aligned}$$

Fin de période

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\ddot{Y}] &= (Ia)_{x:\overline{n}|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (Ia)_{\overline{k}|\,k|}q_x + (Ia)_{\overline{n}|\,n}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} kv^k{}_kp_x\end{aligned}$$

Relations

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} + {}_nE_x$

le dernier paiement est omis
et donc on l'actualise les n années
avec la probabilité des survire

1er paiement

$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x[(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|} + \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}]$

actualiser l'année de moins

survire l'année de plus

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$

Rentes variant exponentiellement

$${}_{m|}\ddot{Y}^{inf}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{\min(K,m+n-1)} (1+inf)^{k-m}v^k, K = 0,1,2\ldots$$

3.4 Rentes payables m fois l'an

Rente viagère on obtient :

$$\begin{aligned}\ddot{Y}_x^{(m)} &= \sum_{h=0}^{mK+J^{(m)}} \frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}} \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J^{(m)}+1}{m}}|} \\ &= \frac{1}{d^{(m)}}\left[1 - v^{K+\frac{J^{(m)}+1}{m}}\right] \\ &= \frac{1}{d^{(m)}}\left(1 - Z_x^{(m)}\right) \qquad K = 0,1,2,\ldots \\ & \qquad J^{(m)} = 0,1,\ldots,m-1\end{aligned}$$

avec $Y_x^{(m)} = \ddot{Y}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$.
De plus :

$$\begin{aligned}\ddot{Y}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}\ {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=0}^{m(\omega-x)-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}v^{k+\frac{j}{m}}\ {}_{k+\frac{j}{m}}p_x \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=0}^{m(\omega-x)-1} \frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\end{aligned}$$

et :

$$\mathrm{Var}(\ddot{Y}_x^{(m)}) = \frac{2}{d^{(m)}}(\ddot{a}_x^{(m)} - {}^2\ddot{a}_x^{(m)}) + {}^2\ddot{a}_x^{(m)} - (\ddot{a}_x^{(m)})^2$$

Hypothèse DUD

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x) \\ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_nE_x \\ \ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)\end{aligned}$$

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Hypothèse traditionnelle

Le seul changement de DUD sont les formules pour le $\alpha(m)$ et $\beta(m)$, le reste de l'équation reste pareille.
La différence est que l'hypothèse traditionnelle suppose la linéarité du **facteur d'actualisation actuarielle** ${}_nE_x$ au lieu de uniquement supposer la linéarité de la *mortalité* ${}_tp_x$.
Pour $x = 0,1,2,\ldots$ et $0 \leq t \leq 1$

$${}_tE_x = (1-t) + t_1E_x$$

Et donc, pour le cas d'une rente viagère, on trouve :

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\,{}_{k+\frac{j}{m}}E_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\frac{1}{m}\,{}_kE_x \times \sum_{j=0}^{m-1}{}_{\frac{j}{m}}E_{x+k} \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\end{aligned}$$

Où les nouveaux paramètres sont :

$$\alpha(m) = 1 \qquad \beta(m) = \frac{m-1}{2m}$$

Une équation utile pour les rentes de fin de période est

$$\begin{aligned}\gamma(m) &= \alpha(m) - \beta(m) - \frac{1}{m} \\ &\overset{DUD}{=} \frac{d^{(m)} - d}{i^{(m)}d^{(m)}} \\ &\overset{Trad.}{=} \frac{m-1}{2m}\end{aligned}$$

Il suffit de remplacer $-\beta(m)$ par $+\gamma(m)$ pour obtenir les formules des rentes en fin de période.

Approximation de Woolhouse

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n})) \\ \mu_x &\approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)\end{aligned}$$