

CONTRIBUTEURS

ACT-2009 Processus Stochastiques

aut. Nicholas Langevin

aut. Gabriel Crépeault-Cauchon

ctb. Alec James van Rassel

src. Thomas Landry

1 Probabilités conditionnelles

- › Rappel théorème de Bayes :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

- › Distribution conditionnelle :

$$\Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

- › L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$E[g(X_1) | X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x) \Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2)$$

- › La variance d'une fonction conditionnelle :

$$\text{Var}(g(X_1) | X_2) = E[g(X_1)^2 | X_2] - E[g(X_1) | X_2]^2$$

- › L'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[E[X_1 | X_2]] \\ &= \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1 | X_2] \Pr(X_2 = x_2) \\ E[X_1] &= E[E[X_1 | X_2]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1 | X_2] f_{X_2}(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

- › La variance conditionnelle :

$$\text{Var}(X_1) = E[\text{Var}(X_1 | X_2)] + \text{Var}(E[X_1 | X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$\begin{aligned} E[X_1 | X_2] &= E[E[X_1 | X_2, X_3] | X_2] \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} E[X_1 | X_2, X_3] \Pr(X_3 = x_3 | X_2 = x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1 | X_2, X_3] f_{X_3|X_2}(x_3 | x_2) dx_3 \end{aligned}$$

La variance conditionnelle devient

$$\text{Var}(X_1) = E[\text{Var}(X_1 | X_2, X_3)] + \text{Var}(E[X_1 | X_2, X_3])$$

De plus,

$$\text{Cov}(X, Y) = E[\text{Cov}(X, Y | Z)] + \text{Cov}(E[X | Z], E[Y | Z])$$

Soit N , le nombre d'essais indépendants jusqu'à avoir un même résultat k fois consécutivement avec m possibilités équiprobables.

$$E[N] = \frac{1 - m^k}{1 - m}$$

2 Processus Stochastiques

Définition

Domaine : Valeurs possible du processus à un temps quelconque t .

Exemple : Température est dans un certain intervalle, $\Omega \in [-50, 50]$.

Filtration : Information connue au temps t .

Exemple : Température dépend de la température passée, peu probable qu'il neige s'il faisait 35 hier.

Probabilités : Probabilité des événements possibles.

Exemple : Température possède certaines probabilités, 70% de plus demain, 40% dans 2 jours, etc.

Dénoté par $\{X(t), t \in T\}$. Si l'ensemble est :

fini ou dénombrable : Processus est dit d'être **en temps discret**.

infini ou non-dénombrable : Processus est dit d'être **en temps continu**.

Si l'ensemble des valeurs possibles de $X(t)$ est :

fini ou infini dénombrable : Processus est dit d'avoir un espace d'état **discret**

infini ou non-dénombrable : Processus est dit d'avoir un espace d'état **continu**

Fonctions

Fonction de répartition d'ordre k du processus $\{X(t), t \in T\}$.

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

Fonction de densité d'ordre k du processus $\{X(t), t \in T\}$.

$$f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)$$

Fonction de probabilité de masse d'ordre k du processus $\{X(t), t \in T\}$.

$$p(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \Pr(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_k) = x_k)$$

Moments

Moyenne à l'instant t , alias moment d'ordre t .

$$m_x(t) = E[X(t)]$$

Auto-covariance en $\{t_1, t_2\}$.

$$\text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1), X(t_2)] - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

Auto-corrélation en $\{t, t-1\}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\text{auto}}(X(t)) &= \frac{\text{Cov}(X(t), X(t-1))}{\sqrt{V(X(t))V(X(t-1))}} \\ &\stackrel{\text{stationnaire}}{=} \frac{\text{Cov}(X(t), X(t-1))}{V(X(t))} \end{aligned}$$

Propriétés

Les accroissements sont :

Indépendants si les v.a. $X(t_4) - X(t_3)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ sont **indépendants** $\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$.

Stationnaires si les v.a. $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ possèdent la même fonction de répartition $\forall s$.

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + s, \dots, t_n + s)$$

3 Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ij}]_{i \times j}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j | X_k = i)$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$, avec $P^{(n)} = P^n = P \cdot P \cdot P \cdot \dots \cdot P$.

$$\Pr(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) \Pr(X_0 = i)$$

États accessibles et communicants

- > j est accessible de i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- > si i et j sont accessibles réciproquement ($i \leftrightarrow j$), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- > Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle est composée d'une seule classe.

Propriété d'une classe

- ✓ Réflexibilité : $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- ✓ Symétrie : $i \leftrightarrow j$ est équivalent à $j \leftrightarrow i$.
- ✓ Transitivité : si i communique avec j (i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$) et que j communique avec k (i.e. $p_{jk}^{(m)} > 0$), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurrents, transients et absorbants

- > f_{ii} : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i .

État récurrent

$$f_{ii} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

État transient

$$f_{ii} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

- > Si l'état i est récurrent et que $i \leftrightarrow j$, alors j est récurrent aussi.
- > $f_{ii}^{(n)}$: probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- > Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini **n'a que des états récurrents**.
- > **État absorbant** : j est un état absorbant si $p_{jj} = 1$. De plus, Si j est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^m p_{ik} f_{kj}$$

Probabilité limites

- > **État périodique** : si l'état a une période d , alors il sera possible de revenir à cet état après n étapes, qui est un multiple de d . i.e.

$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$
- > si $d(i) = 1$, alors l'état i est **apériodique**.
- > La périodicité est une propriété de classe : si $i \leftrightarrow j$, alors $d(i) = d(j)$.

- › Le temps de retour moyen pour l'état i est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

avec $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$

- › **État récurrent positif** : si, à partir de l'état i , le temps de retour moyen μ_{ii} à l'état i est fini, alors l'état i est récurrent positif.
- › **État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- › Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques, alors

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$$

$$(2) \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$$(3) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

- › On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos π_i .

Système Bonus Malus

$s_i(k)$: Le prochain état d'un assuré dans l'état i ayant eu k accidents.

a_k : Probabilité qu'un assuré ait k accidents.

4 Processus de Poisson

Soit $N(t)$ le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle t .

Définitions

Définition 1

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

- (1) $N(0) = 0$
- (2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3$, les accroissements $(N(t_3) - N(t_2))$ et $(N(t_2) - N(t_1))$ sont stochastiquement indépendants.
- (3) $\forall t, (N(s+t) - N(s)) \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Alors,

$$\Pr(N(s+t) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Définition 2

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

- (1) $N(0) = 0$
- (2) a des accroissements indépendants et stationnaires
- (3) $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- (4) $\Pr(N(h) \geq 2) = o(h)$

Avec $o(h)$ une fonction où $f(h) = o(h)$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalentes.

Rappels sur la loi de Poisson

La fonction génératrice des moments de $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ est

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{-\lambda(e^t - 1)}$$

Temps séparant 2 évènements successifs

- › Soit T_i le temps entre le $(i-1)^{\text{e}}$ et le i^{e} évènement.
- › Alors, $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$.
- › Soit S_n le moment où se produit le i^{e} évènement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- › On peut facilement prouver que $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
- › Si $N(t) \geq n$, alors nécessairement $S_n \leq t$.

Évènements de 2 processus différents

Probabilité que n évènements d'un processus se produisent avant m évènements d'un autre. Il y a plusieurs interprétations possible.

Rendu au $n + m - 1^{\text{e}}$ évènement au total, il y en a au moins n qui proviennent du 1er type.

$$\Pr(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}$$

Rendu au n^{e} évènement du 1er type, j'en ai au plus $m-1$ du 2ème type.

$$\Pr(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k$$

Processus de Poisson avec évènements de type I et II

- Soit un Processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ où il peut y avoir un évènement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q .
- Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$
Avec $N_1(t)$ et $N_2(t)$ qui sont stochastiquement indépendants.
- $N_i(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_i t)$, où p_i est la probabilité que l'évènement de type i se produise.

Distribution conditionnelle des temps d'occurrence

- Pour un processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, la distribution conditionnelle des temps d'occurrence S_1, \dots, S_n sachant que $N(t) = n$ est définie par

$$f_{S_1, \dots, S_n | N(t)}(s_1, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n}$$
pour $0 < s_1 < \dots < s_n$.
- La distribution de $S_1, \dots, S_n | N(t) = n$ a la même distribution que les statistiques d'ordre :

$$U_{(1)}, \dots, U_{(n)} \sim U(0, t)$$

Processus de Poisson non-homogène

On a que les accroissements ne sont plus stationnaires, les évènements sont plus susceptibles d'arriver à certains moments que d'autres.

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

- $N(0) = 0$;
- $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;
- $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;
- $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(t))}$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$. On a alors que

$$N(t+s) - N(t) \sim \text{Pois}(m(t+s) - m(t))$$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurrence du n^{e} évènement, alors

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. iid indépendantes de $N(t)$.

De plus :

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1]$$

$$\text{Var}[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2]$$

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que

$\Pr(Y_i = \alpha_j) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépendantes telles que $N_j(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_j t)$.

Lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t E[Y], \lambda t E[Y^2])$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1 \lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition



Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t)|\Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

De plus, on a $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ et $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$. Aussi, la transformée de Laplace pour $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ est

$$\mathcal{L}_X(s) = E[e^{-sX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^\alpha$$

Remarques importantes

- (1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps);
- (2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants;

- (3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

- (4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$E[N(t)] = tE[\Lambda]$$

$$\text{Var}(N(t)) = tE[\Lambda] + t^2\text{Var}(\Lambda)$$

- (5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$F_{\Lambda|N(t)}(x|n) = \frac{\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)}$$

$$= \frac{\Pr(N(t) = n | \Lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Pr(N(t) = n | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda}$$

- (6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_{\Lambda}\left(\frac{x}{n}\right) \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

1. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.

5 Processus de renouvellement

Un processus de renouvellement est un processus de comptage t.q. le temps entre le $(n - 1)$ et $n^{\text{ème}}$ événement a une distribution F indépendamment du moment où le $(n - 1)^{\text{ème}}$ événement arrive. Donc, puisque c'est la même distribution F pour tous les événements, lorsqu'un événement se produit on dit qu'un **renouvellement** s'est produit.

On peut donc voir qu'avec les processus de Poisson on se concentre plus sur le dénombrement alors qu'avec les processus de renouvellement ce sont le temps entre événements qui est d'intérêt.

Définitions générales

- › T_n : intervalle de temps entre le $(n - 1)^{\text{e}}$ et le n^{e} renouvellement;
- › $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurrence du n^{e} renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus¹;
- › $F(0) = \Pr(T = 0) < 1$ pour éviter que le processus reste pris à 0;
- › $\mu = E[T_n] > 0$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements où $n \geq 1$;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr(N(t) = n) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

Dans le cas où $T \sim \text{Erlang}(m, \lambda)$, alors

$$\Pr(N(t) = n) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{N(t)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait l'équation de renouvellement, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x) f_T(x) dx$$

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\begin{aligned}\hat{m}(s) &= \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s)\hat{f}_T(s) \\ &= \frac{\hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s))}\end{aligned}$$

Théorèmes limites

- (1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus,

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{E[T]}$$

avec une probabilité *presque certaine*.

- (2) *Théorème élémentaire du renouvellement* : avec $t \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{E[T]}$$

- (3) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $N(t)$ est asymptotiquement normale, telle que

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{E[T]}, \frac{t \text{Var}(T)}{E[T]^3}\right)$$

Équation de renouvellement

De façon générale, si on a une équation intégrale d'une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x) dF_T(x)$$

Alors, la seule solution est

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x) dm(x)$$

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \bar{F}_T(t) + \int_0^x \bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

et

$$E[S_{N(t)}] = tF_T(t) - \int_0^t (t-y)\bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

De plus, selon l'équation de Wald²,

$$E[S_{N(t)+1}] = E[T](m(t) + 1)$$

2. l'équation de Wald se base sur le concept que $S_n = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$, très semblable au modèle fréquence-sévérité.

Variables

Âge : $A(t) = t - S_{N(t)}$, temps à t depuis le dernier renouvellement.

Temps de vie résiduel : $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$, temps à t jusqu'au prochain renouvellement.

Temps de vie total : $V(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = A(t) + Y(t)$

Key renewal theorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \frac{1}{E[T]} \int_0^\infty h(x) dx$$

Processus de renouvellement avec délai

- Soit $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ des temps entre des renouvellements succesifs qui sont *iid* tel que $F_{T_n}(t) = F_{T_2}(t)$ pour $n \geq 2$ et $F_{T_1}(t) \neq F_{T_2}(t)$. Alors $\{N_d(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de renouvellement avec délai.

- La distribution de $N_d(t)$ est

$$\Pr(N_d(t) = n) = F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t) - F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n)}(t)$$

- la fonction de renouvellement $m_d(t)$ est donc

$$m_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t)$$

- De plus, $m_d(t)$ satisfait aussi l'équation de renouvellement, telle que

$$m_d(t) = F_{T_1}(t) + \int_0^t m_o(t-x) f_{T_1}(x) dx$$

où $m_o(t)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire qui débute à T_2 .

Processus de renouvellement *stationnaire*

- Un processus de renouvellement $\{N_e(t); t \geq 0\}$ est dit stationnaire si

$$F_{T_1} = F_e(t) = \frac{\int_0^t \bar{F}_{T_2}(x) dx}{E[T_2]}$$

- La fonction de renouvellement $m_e(t)$ est définie par

$$m_e(t) = E[N_e(t)] = \frac{t}{E[T_2]}$$

- La distribution de $N_e(t)$ est définie par

$$\Pr(N_e(t+h) - N_e(t) = n) = \Pr(N_e(h) = n)$$

Car les accroissements sont stationnaires.

Processus de renouvellement alterné

- › Soit la suite $\{(T_n, T'_n); n \in \mathbb{N}\}$ des vecteurs *iid* où les composantes (T_n, T'_n) peuvent être dépendantes. T_n représente un intervalle de temps dans lequel le processus (de renouvellement) est *on* et T'_n un intervalle de temps où le processus est *off*.

- › On peut donc définir 2 processus (*on* et *off*) :

- $\{N_1(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *avec délai* généré par la suite des temps $\{T_1, T'_n + T_{n+1}; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2+T'_1}^{*(n-1)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)}(t) * F_{T'_1}^{*(n-1)}(t) \end{aligned}$$

- $\{N_2(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *ordinaire* généré par la suite des temps $\{T_n + T'_n; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$m_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1+T'_1}^{*(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)} * F_{T'_1}^{*(n)}(t)$$

- › **Proposition 1 :** Supposons que T_n est indépendant de T'_n , $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $p_i(t)$ la probabilité que le processus de renouvellement alterné soit dans l'état i au temps t , $i = 1, 2$. Alors,

$$p_1(t) = m_2(t) - m_1(t) + 1 = 1 - p_2(t)$$

- › **Proposition 2 :** Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition 1, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{E[T_1]}{E[T_1] + E[T'_1]} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t)$$

Application : somme de renouvellements avec réclamations escomptées

- › On considère le processus des réclamations escomptées à $t = 0$, soit $\{Z(t); t \geq 0\}$, défini par

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta S_k} X_k$$

où

- $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de renouvellement ordinaire;
- S_k est le moment où se produit la k^e réclamation;
- La suite $\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de v.a. *iid* et indépendantes de $N(t)$ représentant les montants de réclamations;
- δ est la force d'intérêt appliquée pour actualiser les réclamations.
- › Dans un processus de renouvellement ordinaire, on a, pour $k = 1, 2, \dots, n$,

$$f_{S_k|N(t)}(x|n) = f_{S_k}(x) \frac{\Pr(N(t-x) = n-k)}{\Pr(N(t) = n)}$$

- › On peut calculer le premier moment du processus des réclamations escomptées $\{Z(t); t \geq 0\}$:

$$E[Z(t)] = E[X] \int_0^t e^{-\delta x} dm(x)$$

où $m(t)$ est la fonction de renouvellement du processus de renouvellement $\{N(t); t \geq 0\}$.

Renewal Reward Processes

Soit :

- › $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de renouvellement avec
- › X_n le temps inter-arrivées.

On suppose qu'à chaque renouvellement, nous recevons une

- › R_n *reward* que nous supposons être *iid*;

Cependant, il est possible, voir probable, que la *reward* R_n dépend de la longueur de l'intervalle X_n .

Tout comme

- › pour X_n on définit $S_{N(t)} = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$,

- › on définit le total earned reward à, ou avant, le temps t $R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$.

De plus on pose $E[R] = E[R_n]$ et $E[X] = E[X_n]$.

On obtient alors que

Définition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]} = \frac{E[\text{reward during a cycle}]}{E[\text{length of a cycle}]}$$

6 Mouvement Brownien

Définitions

Définition générale

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un mouvement Brownien *avec paramètre de variance* σ^2 si

- (1) $X(0) = 0$;
- (2) $\{X(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires;
- (3) $\forall t > 0, X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Note : on appelle aussi σ le *paramètre de volatilité* ou *coefficient de diffusion*. Un mouvement Brownien est dit *standard* si $\sigma = 1$.

Proposition 1

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, on a

$$f_{X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1}))^{\frac{1}{2}}}$$

Proposition 2

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < s < t$, $X(s)|X(t)$ obéit à une loi normale, tel que

$$E[X(s)|X(t) = x] = \frac{s}{t}x$$

$$\text{Var}(X(s)|X(t) = x) = \frac{s}{t}(t - s)$$

Temps d'atteinte d'une barrière

- Soit T_a le le premier moment où le mouvement Brownien standard atteint le niveau a . Alors,

$$\Pr(T_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- On peut trouver la distribution de la valeur maximale que peut prendre $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, telle que

$$\Pr\left(\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Variations sur le mouvement Brownien

Mouvement Brownien avec dérive

Un mouvement Brownien avec dérive (*drifted*) a exactement la même définition qu'un mouvement Brownien standard, à l'exception que

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

où μ est le paramètre de dérive.

Note : on a donc que $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Mouvement Brownien géométrique

Définition

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien brownien avec dérive μ et volatilité σ . Alors, le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ défini par

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est dit être un mouvement Brownien géométrique.

Proposition : Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien géométrique avec dérive μ et volatilité σ . Alors,

$$E[X(t)|X(u)] = X(s)e^{(t-s)\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

pour $0 \leq u \leq s \leq t$.

Pont Brownien

Processus Gaussien

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus Gaussien si, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $X(t_1), \dots, X(t_n)$ a une distribution normale multivariée.

Définition alternative d'un mouvement Brownien standard

Un processus $\{X(t); t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard ssi

- $\{X(t); t \geq 0\}$ est un processus Gaussien ;
- $\forall t > 0$, $E[X(t)] = 0$, avec $X(0) = 0$;
- $\forall 0 \leq s \leq t$, on a $\text{Cov}(X(s), X(t)) = s$.

Définition d'un pont Brownien

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. Alors, le processus conditionnel $\{X(t); 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0\}$ est dit être un *pont* Brownien. De plus, on a

$$E[X(t)|X(1) = 0] = 0$$

Et, pour $s < t < 1$,

$$\text{Cov}(X(s), X(t)|X(1) = 0) = s(1 - t).$$

Une autre condition pour déterminer si le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ est un point Brownien est de vérifier que l'équation suivante est respectée :

$$Z(t) = X(t) - tX(1)$$

Mouvement Brownien intégré

Définition de l'Intégrale d'Îto

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard et une fonction f est une dérivée continue. Alors, nous définissons l'intégrale stochastique d'Îto comme

$$\int_a^b f(t) dX(t) = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b X(t) df(t)$$

Définition du mouvement Brownien intégré

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard, alors le processus Soit $\{Z(t); t \geq 0\}$ défini par (en utilisant l'intégrale d'Îto)

$$Z(t) = \int_0^t X(s) ds = tX(t) - \int_0^t v \cdot dX(v)$$

Proposition 2

L'espérance et la variance de $\int_a^b f(t) dX(t)$ sont respectivement

$$E \left[\int_a^b f(t) dX(t) \right] = 0$$

$$\text{Var} \left(\int_a^b f(t) dX(t) \right) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

Proposition 3

La mouvement Brownien intégré (tout comme le mouvement Brownien standard) obéit à une loi Normale. En combinant avec les hypothèses de la proposition 2, on a

$$\int_a^b f(t) dX(t) \sim \mathcal{N} \left(0, \int_a^b f(t)^2 dt \right)$$

et

$$\int_a^b X(t) df(t) \sim \mathcal{N} \left(0, a(f(b) - f(a))^2 + \int_a^b (f(b) - f(t))^2 dt \right)$$