

Notes de cours
Statistiques
ACT-2000

Gabriel Crépeault-Cauchon

Dernière mise à jour : 1^{er} mai 2018

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Définitions de propriétés de base	4
1.2	Distribution de \bar{X} pour une population normale	6
1.2.1	Inégalité de Tchebychev	6
1.2.2	Théorème central limite	7
1.3	Loi du Chi-carré ($\chi^2_{(n)}$)	7
1.3.1	Propositions importantes	7
1.3.2	Distribution de $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	8
1.4	Loi de Student	8
1.4.1	Distribution de $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	9
1.5	Loi de Fisher	9
1.5.1	Propriétés de la Fisher	10
1.5.2	Distribution de $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	10
1.6	Statistiques d'ordre	10
1.6.1	Distribution de Y_k	10
1.6.2	Distribution du min-max	11
1.6.3	Distribution de l'amplitude échantillonnale	11
1.6.4	Distribution de la moyenne entre le min-max (<i>midrange</i>)	11
1.6.5	Distribution conjointe de Y_1, \dots, Y_n	11
2	Estimation ponctuelle	13
2.1	Méthodes d'estimation ponctuelle	13
2.1.1	Méthode des moments	13
2.1.2	Méthode du maximum de vraisemblance	15
2.1.3	Méthode Bayésienne	17
2.2	Estimateur non biaisé	17
2.3	Estimateurs de variance minimale	17

2.3.1	Efficacité relative	17
2.3.2	Estimateur non biaisé de variance minimale (MVUE)	18
2.3.3	Borne de Rao-Cramer	18
2.4	Efficacité d'un estimateur	19
2.5	Estimateur consistant	19
2.5.1	Conditions suffisantes pour la consistance	19
2.6	Estimateur exhaustif (suffisant)	20
2.6.1	Théorème de factorisation de Fisher-Neymann	20
3	Estimation par intervalles de confiance	21
3.1	Définitions	21
3.2	Construction d'un intervalle de confiance	22
3.3	IC liés à un échantillon de taille n	22
3.3.1	Moyenne μ d'une distribution $N(\mu, \sigma)$	22
3.3.2	Variance d'une distribution $N(\mu, \sigma^2)$	23
3.3.3	Paramètre p (probabilité) d'une expérience Bernouilli . .	24
3.4	IC liés à 2 échantillons de taille n et m	24
3.4.1	Différence de 2 moyennes de distributions normales . . .	24
3.4.2	Quotient des variances de distributions normales	25
3.4.3	Différence entre 2 probabilité (p_1 et p_2) de succès Bernouilli	26
3.4.4	Taille d'un échantillon	26
3.5	IC Bayésien	26
3.6	Autres intervalles de confiance	27
3.6.1	Moyenne ($\frac{1}{\beta}$) d'une loi Exponentielle	27
3.6.2	Moyenne ($\frac{\alpha}{\beta}$) d'une loi Gamma	27
3.6.3	Paramètre θ d'une fonction $f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{\{0 < x < 1\}}$. .	27
4	Tests d'hypothèses	28
4.1	Exemples de tests	29
4.1.1	Test d'hypothèse à droite	29
4.1.2	Test unilatéral à gauche	32
4.1.3	Test bilatéral	34
4.2	p -value	36
5	Régression linéaire simple	37
5.1	Introduction	37
5.2	Estimation des paramètres	38
5.2.1	Remarques importantes	39

5.2.2	Fonctions Stat-Data de la TI-30XS	42
5.2.3	Fonction R pour estimer les paramètres	43
5.3	Régression passant par l'origine	44
5.4	Caractéristiques et postulats sur ε	44
5.5	Propriétés des estimateurs du modèle	45
5.5.1	Exactitude	45
5.5.2	Précision	47
5.5.3	Remarque sur la Covariance entre les estimateurs	47
5.6	Intervalles de confiance et tests d'hypothèses sur β_0 et β_1	47
5.6.1	Intervalle de confiance pour β_1	49
5.6.2	Intervalle de confiance pour β_0	50
5.7	Tests d'hypothèses <i>Locaux</i> pour les estimateurs	51
5.7.1	Premier test, avec β_0	52
5.7.2	Deuxième test, avec β_1	53
5.7.3	Troisième test, est-ce que β_1 est significativement négatif?	54
5.8	Analyse de la variance	54
5.8.1	Introduction	54
5.8.2	Background 1	55
5.8.3	Background 2 : Degrés de liberté	57
5.8.4	Table ANOVA	58
5.8.5	Test de Fisher pour la validité Globale de la régression	58
5.9	Intervalle de prévision	60
5.9.1	Intervalle de confiance pour la valeur moyenne (type 1)	62
5.9.2	Intervalle de confiance pour la prévision (type 2)	63
5.10	Analyse qualitative des résidus d'un modèle de régression	64
A	Preuves	66
A.1	Démonstrations des distributions	66
A.1.1	Distribution de $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	66
A.2	Estimateur du modèle de Régression linéaire simple	68
A.3	Précision des estimateurs beta	70

Chapitre 1

Introduction

1.1 Définitions de propriétés de base

Statistique

Une statistique est une fonction $T(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ de n variables aléatoire indépendantes et identiquement distribués (*iid*)

Moyenne et variance échantillonnale

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$
$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$



Remarques

1. $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$
2. $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\mu - \bar{X})^2$

Note : les développement de l'item 1 est disponible à la section 5.2.1.

Espérance et moyenne de la variance échantillonnale Par le résultat de la section 1.3.2, on peut déduire la variance de la variance échantillonnale :

$$\begin{aligned} E[S^2] &= \frac{\sigma^2}{n-1} E \left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n-1} (n-1) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Et la variance,

$$\begin{aligned} \text{Var}(S^2) &= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \underbrace{\text{Var} \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right)}_{\chi^2_{(n-1)}} \\ &= \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} \\ &= \frac{2\sigma^4}{(n-1)} \end{aligned}$$

Étendue échantillonnale

Soit $Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. La variable aléatoire $R = Y_n - Y_1$ représente l'étendue échantillonnale

Moments échantillonnnaux

Le k^{e} moment autour de l'origine :

$$M_k = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^k}{n}$$

Le k^{e} moment autour de la moyenne échantillonnale :

$$M'_k = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^k}{n}$$



Remarques

1. $M'_1 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})}{n} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{X}) = 0$
2. $M'_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n-1}{n} S^2$

Espérance et variance des moments

$$E[M_k] = E[X^k]$$

$$Var(M_k) = \frac{Var(X^k)}{n}$$

Loi des grands nombres

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

1.2 Distribution de \bar{X} pour une population normale

Si on sélectionne un échantillon aléatoire d'une population normale avec moyenne μ et variance σ^2 , alors

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Différence de deux échantillons venant de populations normales : si on a une population (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_m) , alors

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m} \right)$$

1.2.1 Inégalité de Tchebychev

$$P(|X - E[X]| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (1.1)$$

1.2.2 Théorème central limite

$$F_{W_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(x)$$

où $W_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ et $Z \sim N(0, 1)$. On commence à considérer n grand lorsque $n \geq 30$.

Remarque Pour un n grand, on dira

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$



ATTENTION

lorsqu'on utilise une population qui a un *support discret*, il faut faire une correction pour la discontinuité dans notre estimation avec la loi normale, afin de s'assurer d'avoir la borne qu'on mesure.

1.3 Loi du Chi-carré ($\chi^2_{(n)}$)

Il faut se rappeler que la loi du Chi-carré est une Gamma avec $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{(1/2)^{n/2} x^{(n/2)-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad x > 0$$

Propriété de la fonction Gamma	
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$	$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Éléments à savoir pour la loi du Chi-carré		
$E[X] = n$	$Var(X) = 2n$	$M_X(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$

1.3.1 Propositions importantes

1. Si $X \sim N(0, 1)$, alors

$$X^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

2. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont n v.a. indépendantes où $X_i \sim N(0, 1)$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_{(n)}^2$$

3. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont n v.a. indépendantes tel que $X_1 \sim \chi_{(m_1)}^2, \dots, X_n \sim \chi_{(m_n)}^2$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{(m_1 + \dots + m_n)}^2$$

4. Si X_1 et X_2 sont des v.a. telle que $X_1 \sim \chi_{(n_1)}^2$ et $X_1 + X_2 \sim \chi_{(n)}^2$, alors

$$X_2 \sim \chi_{(n-n_1)}^2$$

1.3.2 Distribution de $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

Si on a \bar{X} et S^2 qui sont indépendants et qui proviennent d'un échantillon aléatoire de taille n d'une population normale $N(\mu, \sigma^2)$, alors

1. \bar{X} et S^2 sont indépendants (*au niveau des probabilités*)
2. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

1.4 Loi de Student

Définition : Soit X et Y des v.a. indépendantes, avec $X \sim N(0, 1)$ et $Y \sim \chi_{(n)}^2$. Alors, on a la v.a.

$$t_{(n)} = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

Avec la fonction de densité de probabilité

$$f_{t_{(n)}}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Remarque importante : lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{t_{(n)}}(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Voici deux résultats importants à savoir pour faire certaines preuves :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

éléments à savoir pour la loi de Student	
$E[X] = 0$	$Var(X) = \frac{n}{n-2}$

1.4.1 Distribution de $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$

Si on a un échantillon avec une moyenne μ et une variance échantillonnale S^2 ,
Alors

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \quad (1.2)$$

Démonstration. La preuve se trouve à □

1.5 Loi de Fisher

Définition : Soit X et Y des v.a. indépendantes, et on a $X \sim \chi_{(n_1)}^2$ et $Y \sim \chi_{(n_2)}^2$.
Alors,

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F_{n_1, n_2} \quad (1.3)$$

Avec la fonction de densité de probabilité

$$f_{F_{n_1, n_2}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$$

L'espérance et la variance sont

$$E[F_{n_1, n_2}] = \frac{n_2}{n_2 - 2}, \quad n_2 > 2$$

$$Var(X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, \quad n_2 > 4$$

1.5.1 Propriétés de la Fisher

Si on a une distribution Fisher F_{n_1, n_2} , alors

$$\frac{1}{F_{n_1, n_2}} = F_{n_2, n_1}$$

1.5.2 Distribution de $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

Propriété de la Fisher : Soit S_1^2 et S_2^2 , les 2 variances échantionnelles provenant de 2 populations normales de taille n_1 et n_2 . On sait aussi que les variances de population sont σ_1^2 et σ_2^2 . Alors, on a

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

1.6 Statistiques d'ordre

Définition arranger en ordre non-décroissant les éléments d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) dans un ensemble ordonné (Y_1, \dots, Y_n) .

Exemple on a $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (10, 1, 34, 2)$. En statistique ordonnée, on aura $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (1, 2, 10, 34)$.

****Important**** : pour une statistique ordonnée,

$$Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

1.6.1 Distribution de Y_k

La fonction de répartition est représentée par

$$F_{Y_k}(y) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{j} (F(y))^j (1 - F(y))^{n-j}$$

La fonction de densité de probabilité :

$$f_{Y_k}(y) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(y) (F(y))^{k-1} (1 - F(y))^{n-k}$$

1.6.2 Distribution du min-max

$$P(Y_1 \leq x, Y_n \leq y) = P(Y_n \leq y) - P(Y_1 > x, Y_n \leq y)$$

Dans le même sens

$$F_{Y_1, Y_n}(x, y) = F(y)^n - (F(y) - F(x))^n$$

La fonction de densité de probabilité est donc

$$f_{Y_1, Y_n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{n-2}, \quad \text{si } x \leq y$$

1.6.3 Distribution de l'amplitude échantillonnale

Si on a $R = Y_n - Y_1$, qui représente l'amplitude échantillonnale, alors

$$\begin{aligned} P(R \leq r) &= P(Y_n - Y_1 \leq r) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{x+r} f_{Y_1, Y_n}(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Alors,

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x+r)[F(x+r) - F(x)]^{n-2} dx \quad (1.4)$$

1.6.4 Distribution de la moyenne entre le min-max (*midrange*)

On a $M = \frac{Y_1 + Y_n}{2}$, on peut trouver la fonction de répartition et la fonction de densité de cette distribution :

$$\begin{aligned} P(M \leq m) &= P(Y_n \leq -Y_1 + 2m) \\ &= \int_{-\infty}^n \int_m^{-x+2m} f_{Y_1, Y_n}(x, y) dy dx \end{aligned}$$

1.6.5 Distribution conjointe de Y_1, \dots, Y_n

$$F_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^n F_X(y_i) \quad (1.5)$$

Les fonctions de densité (continu) et masse (discret) conjointes sont donc

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^n f_X(y_i) \quad (1.6)$$

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) = n! \prod_{i=1}^n P(X = y_i) \quad (1.7)$$

Chapitre 2

Estimation ponctuelle

Disons qu'on prend un échantillon (X_1, \dots, X_n) d'une population avec une distribution $F_X(x)$ avec un paramètre θ ou même un vecteur de paramètre $(\theta_1, \dots, \theta_n)$. On peut estimer les paramètres avec $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$, une statistique. C'est alors ce qu'on appelle un estimateur ponctuel du paramètre ou du vecteur de paramètre.

Les principaux problèmes de l'estimation ponctuelle sont :

- › Estimer la moyenne d'une population
- › Estimer la variance d'une population
- › probabilité de succès p d'une expérience de Bernouilli
- › Estimer la différence entre les moyennes de deux populations
- › Estimer la différence de probabilité de 2 succès Bernouilli
- › Estimer le quotient des variances de deux populations

2.1 Méthodes d'estimation ponctuelle

2.1.1 Méthode des moments

On connaît le k^e moment centré à zéro,

$$M_k = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^k}{n} \quad (2.1)$$

Celui centré à la moyenne échantillonnale

$$M'_k = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^k}{n} \quad (2.2)$$

Ainsi que le moment conjoint échantillonnal

$$M_{k,m} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^k Y_i^m}{n} \quad (2.3)$$

La méthode consiste à sortir (selon ce qui nous permettra d'isoler les paramètres dans les moments) les différents moments de la loi de l'échantillon, et isoler les paramètres estimés.



Exemple

On a un échantillon aléatoire de taille n d'une distribution $Gamma(\alpha, \lambda)$.
On doit estimer les paramètres α et λ par la méthode des moments :

1. On connaît nos moments :

$$\mu = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

2. Alors, on est capable d'isoler nos paramètres dans ces équations :

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \bar{X}$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\bar{X}}$$

On remplace le λ dans l'équation de la variance :

$$\frac{\alpha}{\lambda^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\frac{\bar{X}^2}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

On remplace notre $\hat{\alpha}$ dans l'équation de l'espérance pour trouver

notre 2^e paramètre :

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{\frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\bar{X}} \\ &= \frac{n\bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\end{aligned}$$

2.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Nous avons encore un échantillon (X_1, \dots, X_n) de taille n d'une population donnée avec une fonction de densité de probabilité $f(x; \theta)$ ou $P(X = x, \theta)$ si c'est discret. La fonction de vraisemblance est définie par :

$$L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (2.4)$$

ou (dans le contexte discret)

$$L(\theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, \theta) \quad (2.5)$$

Notation On peut parfois voir l'estimateur pour le maximum de vraisemblance noté $\hat{\theta}_{MLE}$

Méthode L'estimateur $\hat{\theta}$ de vraisemblance de θ sera la valeur qui maximisera la fonction $L(\theta)$, c'est-à-dire la valeur qui pose la première dérivée égale à zéro. Si nécessaire, on peut aussi poser $\ln L(\theta)$ pour nous aider à isoler notre paramètre.



l'exemple 3, page 15 chapitre 2

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon aléatoire d'une distributin $N(\mu, \sigma^2)$. Trouver les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres μ et σ^2 (Soit $\hat{\mu}_{MLE}$ et $\hat{\sigma}_{MLE}^2$).

On commence par poser $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x; \theta)$:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Pour se débarrasser du e , on peut poser $\ln(L(\mu, \sigma^2))$:

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma$$

Par la suite, on calcule la dérivée (par rapport au paramètre que l'on cherche) pour pouvoir l'égaliser à 0 et trouver la valeur qui maximise $L(\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2 \cdot \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \\ 0 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \hat{\mu}_{MLE} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ &= \bar{X} \end{aligned}$$

Même principe pour $\hat{\sigma}_{MLE}^2$:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} =$$

À FINALISER PLUS TARD

Remarque importante l'estimateur a 2 propriétés importante à savoir :

- **propriété d'invariance** : si $\hat{\theta}$ est un estimateur du maximum de vraisemblance, alors $h(\hat{\theta})$ sera un estimateur du maximum de vraisemblance de $h(\theta)$.
- **L'unicité n'est pas** une propriété de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Ça veut dire qu'il peut y avoir plusieurs solutions pour

2.1.3 Méthode Bayésienne

On a un échantillon (X_1, \dots, X_n) d'une population qui a une fonction de répartition $F_X(x, \theta)$ et le paramètre θ suit une distribution $F_\Theta(\theta)$ à priori.

Méthode On pourra trouver notre paramètre estimé $\hat{\theta}$ ainsi :

$$\hat{\theta} = E[\Theta | X_1, \dots, X_n] \quad (2.6)$$

Rappel de ACT-1002 Les probabilités conditionnelles et le théorème de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

2.2 Estimateur non biaisé

Un estimateur $\hat{\theta}$ est non-biaisé si

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (2.7)$$

2.3 Estimateurs de variance minimale

2.3.1 Efficacité relative

Si on a 2 estimateurs non biaisés $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. On définit l'efficacité relative de $\hat{\theta}_1$ par rapport à $\hat{\theta}_2$ avec

$$e(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{Var(\hat{\theta}_2)}{Var(\hat{\theta}_1)} \quad (2.8)$$

Interprétation : si $e(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) < 1$, alors $\hat{\theta}_1$ est relativement plus efficace que $\hat{\theta}_2$.

2.3.2 Estimateur non biaisé de variance minimale (MVUE)

Si on a un échantillon (X_1, \dots, X_n) et Ω représente l'ensemble des estimateurs non biaisés de θ , alors θ^* est un MVUE¹ si

$$Var(\theta^*) \leq Var(\hat{\theta}), \quad \forall \hat{\theta} \in \Omega$$

2.3.3 Borne de Rao-Cramer

Si un échantillon respecte toutes les conditions de régularité suivantes :

- $\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \quad \exists \forall x$
- La dérivée de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int \dots \int \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_1, \dots, dx_n = \int \dots \int \frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_1, \dots, dx_n$$

ou en considérant la statistique $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \int \dots \int T(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_1, \dots, dx_n \\ &= \int \dots \int T(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_1, \dots, dx_n \end{aligned}$$

•

$$0 < E \left[\left(\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Omega$$

Alors,

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE \left[\left(\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \quad (2.9)$$

Il faut noter qu'il existe une variante lorsqu'on a une fonction $g(\theta)$:

$$Var(\hat{g}(\theta)) \geq \frac{(g(\theta))^2}{nE \left[\left(\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \quad (2.10)$$

1. MVUE : Minimum-variance unbiased estimator

2.4 Efficacité d'un estimateur

L'efficacité d'un estimateur est étroitement liée avec la borne de Rao-Cramer. Un estimateur sera dit efficace si $e(\hat{\theta}) = 1$ dans le calcul suivant :

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1}{n \text{Var}(\hat{\theta}) E \left[\left(\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \quad (2.11)$$



Remarque

Si $\hat{\theta}$ est efficace, alors cet estimateur est MVUE. Toutefois, si $\hat{\theta}$ est MVUE, il ne sera pas nécessairement efficace.



Identité importante

$$E \left[\left(\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X; \theta) \right] \quad (2.12)$$

2.5 Estimateur consistant

Soit $\hat{\theta}_n$ est un estimateur de θ sur un échantillon n . $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant seulement (et seulement si) il converge en probabilité vers θ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$

2.5.1 Conditions suffisantes pour la consistance

On peut dire de $\hat{\theta}_n$ que c'est un estimateur consistant de θ si

1. $E[\hat{\theta}] = \theta$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$

2.6 Estimateur exhaustif (suffisant)

Définition $\hat{\theta}$ sera un estimateur exhaustif si la fonction de densité conditionnelle $f_X(x_1, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \hat{\theta}$ est indépendante de θ .

Vérification Lorsqu'on développe la forme $f_X(x_1, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \hat{\theta}$, on ne doit pas avoir de θ dans la réponse finale, sans quoi l'estimateur est considéré non-exhaustif.

Interprétation Lorsque l'estimateur choisi $\hat{\theta}$ est exhaustif, on sait que l'échantillon sélectionné ne nous donne pas plus d'information sur le paramètre (du moins, pas plus que le fait déjà $\hat{\theta}$).

2.6.1 Théorème de factorisation de Fisher-Neymann

Soit un échantillon aléatoire (X_1, \dots, X_n) avec une fonction de densité $f(x; \cdot)$. Alors $\hat{\theta}$ est un estimateur exhaustif de θ si (et seulement si) il existe des fonctions g et h tel que

$$\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h(x_1, \dots, x_n) \quad (2.13)$$

Où h ne dépend pas de θ .

Chapitre 3

Estimation par intervalles de confiance

Dans ce chapitre, au lieu d'estimer un paramètre de façon *ponctuel* (i.e. trouver une valeur précise à $\hat{\theta}$), on va plutôt bâtir un intervalle de confiance centré à μ pour s'assurer qu'un paramètre est entre 2 bornes (avec un certain % de confiance).

Objectif L'un des objectifs que l'on veut est de bâtir un intervalle de confiance dont l'étendue est minimale (i.e. la plus petite distance possible entre $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$)

3.1 Définitions

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon aléatoire d'une population avec une fonction de probabilité $f(x; \theta)$ et $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ les bornes inférieure et supérieure de l'estimation de θ . Alors,

Bilatéral $]\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2[$ est un intervalle de confiance *bilatéral* du paramètre θ avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, si

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

Unilatéral à droite $]\hat{\theta}_1, \infty[$ est un intervalle de confiance *unilatéral à droite* du paramètre θ avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, si

$$P(\theta > \hat{\theta}_1) = 1 - \alpha$$

Unilatéral à gauche $]-\infty, \hat{\theta}_2[$ est un intervalle de confiance *unilatéral à gauche* du paramètre θ avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, si

$$P(\theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

3.2 Construction d'un intervalle de confiance

Méthode

1. On cherche une fonction $h(X_1, \dots, X_n, \theta)$ dont l'expression dépendra de θ et l'échantillon, mais dont la distribution ne dépendra pas de θ . Cette fonction est appelée **quantité pivot**.
2. On pose l'égalité suivante :

$$P(a < h(X_1, \dots, X_n, \theta) < b) = 1 - \alpha$$

où a et b sont des constantes.

3. On va trouver notre intervalle de confiance en isolant θ de $h(X_1, \dots, X_n, \theta)$, tel que

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

Certaines constructions d'intervalles de confiance reviennent souvent. La prochaine section discute de ces cas plus *généraux*.

3.3 IC liés à un échantillon de taille n

3.3.1 Moyenne μ d'une distribution $N(\mu, \sigma)$

Si σ^2 est connue

Il y a un seul élément qui provient de l'échantillon, c'est-à-dire \bar{X} :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (3.1)$$



Construction de l'intervalle de confiance

Alors, on a qu'à isoler la quantité dans l'intervalle :

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Par conséquent, l'intervalle de confiance pour la moyenne μ est

$$\left] \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

Le principe est le même pour tous les autres intervalles de confiance.

Remarque Pour un n grand, on peut utiliser cet intervalle pour d'autres loi que la normale.

Si σ^2 est inconnue

Lorsque la variance n'est pas connue, on va utiliser la loi Student $t_{(n-1)}$ et la quantité pivot suivante :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \quad (3.2)$$

3.3.2 Variance d'une distribution $N(\mu, \sigma^2)$

Si μ est connue

Lorsqu'ils sont disponibles, on va toujours prendre les paramètres de la population avant les valeurs échantionnales. Dans le cas ici, on a la moyenne μ :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{(n)}^2 \quad (3.3)$$

Si μ est inconnue

Si on n'a pas accès à la moyenne μ , on doit passer par une autre quantité pivot :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad (3.4)$$



Pourquoi $(n-1)$?

Lorsqu'on utilise la variance échantillonnale, il faut faire une correction à $n-1$.

3.3.3 Paramètre p (probabilité) d'une expérience Bernoulli

On sait que p représente en fait la moyenne d'une Expérience de Bernoulli. La quantité pivot utilisée pour bâtir l'intervalle de confiance est donc identique à celle en 3.1 :

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1) \quad (3.5)$$

3.4 IC liés à 2 échantillons de taille n et m

Pour la construction des intervalles de confiance dans cette section, on considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) avec moyenne μ_X et variance σ_X^2 ainsi qu'un 2^e échantillon (Y_1, \dots, Y_m) avec moyenne μ_Y et variance σ_Y^2 . Il est aussi essentiel que les 2 échantillons soient indépendants.

3.4.1 Différence de 2 moyennes de distributions normales

Si σ_X^2 et σ_Y^2 sont connus

$(\bar{X} - \bar{Y})$ (la différence de moyenne) suit une loi normale avec moyenne $(\mu_X - \mu_Y)$ et variance $\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$. Alors,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1) \quad (3.6)$$

1. attention, on ne fait pas référence ici aux statistiques d'ordre !

Si σ_X^2 et σ_Y^2 sont inconnus

On va utiliser sensiblement la même quantité pivot qu'à la section 3.3.1 lorsque les σ sont inconnus, mais cette fois en tenant compte qu'il y a 2 échantillons. On doit donc avoir une mesure qui tient compte des 2 variances échantillonnales, soit S_p^2 :

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{S_X^2}{n-1} + \frac{S_Y^2}{m-1} \\ &= \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{n+m-2} \end{aligned}$$

Alors, la quantité pivot est

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{(n+m-2)} \quad (3.7)$$

3.4.2 Quotient des variances de distributions normales

Si μ_X et μ_Y sont connus

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 / n}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{Y_i - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 / m} \sim F_{n,m} \quad (3.8)$$



Exemple : on cherche le quotient $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$

On sait que

$$\begin{aligned} P \left(F_{n,m;1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 / n}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{Y_i - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 / m} < F_{n,m;\frac{\alpha}{2}} \right) &= 1 - \alpha \\ P \left(\frac{m}{n F_{n,m;\frac{\alpha}{2}}} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} < \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} < \frac{m}{n F_{n,m;1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_Y)^2} \right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Si μ_X et μ_Y sont inconnus

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1, m-1} \quad (3.9)$$

3.4.3 Différence entre 2 probabilité (p_1 et p_2) de succès Bernouilli

La quantité pivot est identique à la quantité 3.6 ,mais appliquée à une expérience ce Bernouilli :

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}}} \sim N(0, 1) \quad (3.10)$$

3.4.4 Taille d'une échantillon

Évidemment, de la même façon qu'on isole le paramètre pour construire un intervalle de confiance, on peut nous demander la taille n d'échantillon nécessaire pour obtenir un certain niveau de confiance pour un paramètre inconnu.

3.5 IC Bayésien

On cherche à bâtir un intervalle de confiance pour l'estimateur $\hat{\theta}_{\text{BAYES}}$ qui se situera entre $\hat{\theta}_1$ (borne inférieure) et $\hat{\theta}_2$ (borne supérieure)

Méthode

1. On veut trouver la densité de

$$\begin{aligned} f_{\Theta|X_1, \dots, X_n}(\theta|x_1, \dots, x_n) &= \frac{f_{X_1, \dots, X_n|\Theta}(x_1, \dots, x_n|\theta)}{f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)} \\ &= \frac{f_{X_1, \dots, X_n|\Theta}(x_1, \dots, x_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_n|\Theta}(x_1, \dots, x_n|\theta)} \end{aligned}$$

2. On pourra alors trouver une *quantité pivot* à utiliser pour trouver l'IC

3. On isole l'équation suivante pour trouver l'IC de Bayes :

$$P(\hat{\theta}_1 < \text{Quantité pivot} < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

3.6 Autres intervalles de confiance

3.6.1 Moyenne ($\frac{1}{\beta}$) d'une loi Exponentielle

$$\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\beta} \sim \chi_{(2n)}^2 \quad (3.11)$$

3.6.2 Moyenne ($\frac{\alpha}{\beta}$) d'une loi Gamma

Sachant que α est connu :

$$2\beta \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{(2\alpha n)}^2 \quad (3.12)$$

3.6.3 Paramètre θ d'une fonction $f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{\{0 < x < 1\}}$

Soit la fonction

$$f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{\{0 < x < 1\}}$$

La fonction pivot à savoir est

$$\prod_{i=1}^n F_X(X_i; \theta) = \prod_{i=1}^n X_i^\theta \quad (3.13)$$

Avec

$$P\left(a < \prod_{i=1}^n X_i^\theta < b\right) = 1 - \alpha$$

où a et b sont des bornes (il existe plusieurs possibilités). On recherche un intervalle de confiance d'étendue minimale par analyse numérique.

Chapitre 4

Tests d'hypothèses

Introduction Jusqu'à présent, on a vu de multiples façons de procéder pour estimer les paramètres. Or, une branche importante des statistiques est **l'inférence statistique** dans laquelle on trouve la production de *tests d'hypothèses*. Essentiellement, l'idée est d'utiliser l'information de *l'échantillon aléatoire* pour **vérifier si on doit accepter ou rejeter une hypothèse** à propos du comportement d'une v.a. dans la population.

Définition : Test d'hypothèse



procédure qui utilise l'information contenue dans un échantillon aléatoire pour décider si une hypothèse H_0 (hypothèse nulle, par défaut) sur la population doit être acceptée ou rejetée au profit de H_1 (hypothèse de rejet)^a.

^a. H_1 est souvent l'évènement complément de H_0 .

Idée de la méthode

1. Poser les hypothèses H_0 et H_1 .
2. Assumer H_0 vraie et calculer une *mesure de distance* à l'aide de l'échantillon aléatoire.
3. Conclusion :
 - Rejeter H_0 (donc accepter H_1) si la *distance* calculée à l'étape 2 est trop grande.
 - Accepter H_0 (donc rejeter H_1) si la *distance* est acceptable.

4.1 Exemples de tests

4.1.1 Test d'hypothèse à droite



Exemple 1

Une maladie est connue pour tuer 34% des personnes qui en sont atteintes. Un nouveau médicament a été testé sur un échantillon aléatoire de $n = 400$ malades et on a observé un taux de décès de 29% dont 116 décès sur 400 malades. Est-ce que ce médicament est efficace ?

On sait que $X_i \sim \text{Bern}(\theta)$ avec $\hat{\theta} = 29\%$.

On pose les hypothèses

H_0 le médicament n'est pas efficace, i.e. $\theta_{POP} = 34\%$

H_1 le médicament est efficace, i.e. $\theta_{POP} < 34\%$

On cherche la *statistique de distance* en supposant que l'hypothèse H_0 est vraie :

Selon les propriétés des estimateurs au maximum de vraisemblance,

$$\begin{aligned}\bar{X} = \hat{\theta}_{MLE} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}) \\ &= \hat{\theta}_{MLE} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H_0} N(\mu_X = 0,34, \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{0,34(1-0,34)}{400} = 0,000561)\end{aligned}$$

Afin de tester H_0 contre H_1 , on doit déterminer un niveau de confiance $(100 \times (1 - \alpha)\%)^a$ qui déterminera la *zone du possible*.

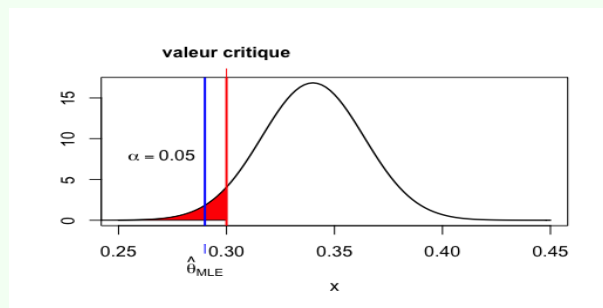
Alors, avec c la valeur critique qui détermine si H_0 est vraie,

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\hat{\theta}_{MLE} < c | \Theta = \theta_{H_0}) \\
&= P\left(\frac{\hat{\theta}_{MLE} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} < \frac{c - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \middle| \Theta = 34\% \right) \\
&= \Phi\left(\frac{c - 0,34}{\sqrt{0,000561}}\right) \\
\Phi^{-1}(\alpha) &= \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{c - 0,34}{\sqrt{0,000561}}\right)\right) \\
\Phi^{-1}(\alpha) &= \frac{c - 0,34}{\sqrt{0,000561}} \\
c &= 0,34 + \sqrt{0,000561}\Phi^{-1}(\alpha)
\end{aligned}$$

Si on pose $\alpha = 5\%$,

$$\begin{aligned}
c &= 0,34 + \Phi^{-1}(0,05)\sqrt{0,000561} \\
&= 0,34 + (-1,645)\sqrt{0,000561} \\
&= 0,30
\end{aligned}$$

Interprétation : Si H_0 est vraie, alors la plus petite valeur possible pour $\hat{\theta}_{MLE}$ est 30% (c'est un test unilatéral à gauche).



Conclusion Puisque $\hat{\theta}_{MLE} = 29\% < c = 30\%$, il est peu probable au niveau de confiance 95% d'observer $\hat{\theta} = 29\%$ si H_0 est vraie. Donc, on rejette H_0 (on accepte H_1) au niveau de confiance 95% et on conclut que le médicament est efficace.

a. Souvent, α est appelé le *seuil du test* : ça représente la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie. Il faut choisir une petite valeur pour α , typiquement 1%, 5%, rarement plus que 10%



Exemple 2

Voici les résultats de 2 groupes qui ont passé le même examen :

X	63	49	86	74	56	85	93	32
Y	92	41	62	76	63	66		

On suppose que les notes sont distribués selon des lois normales, i.e. $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. On veut savoir si les variances sont égales entre les 2 groupes

On pose les hypothèses :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

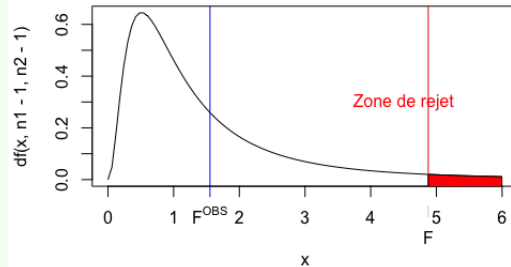
On va donc trouver la valeur critique en supposant que H_0 est vraie. Pour se faire, il faut qu'on utilise une quantité pivot pertinente pour faire des tests de quotient de variance :

$$F \stackrel{H_0}{=} \frac{n_1 S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 S_2^2 / (n_2 - 1)} \sim F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$$

$$F^{OBS} = \dots$$

$$= 1,553$$

Alors,



On accepte H_0 au niveau de confiance $1 - \alpha = 0.95$ et on conclut que les variances des 2 populations sont les mêmes.

4.1.2 Test unilatéral à gauche



Exemple 3

On reprend les mêmes données que l'exemple 2 précédent :

X	63	49	86	74	56	85	93	32
Y	92	41	62	76	63	66		

On suppose que les notes sont distribués selon des lois normales, i.e. $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. On veut savoir si la moyenne du groupe 1 (la population) est égale à 60 à partir de l'échantillon qu'on a.

On pose les hypothèses

$$H_0 : \mu_1 = 60$$

$$H_1 : \mu_1 > 60$$

On cherche une valeur critique Si H_0 est vraie, alors

$$X_i \stackrel{H_0}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$\bar{X} \stackrel{H_0}{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim}} N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right) \quad (\text{Lemme de Neymann Pearson})$$

Ensuite, on connaît la quantité pivot de la loi normale,

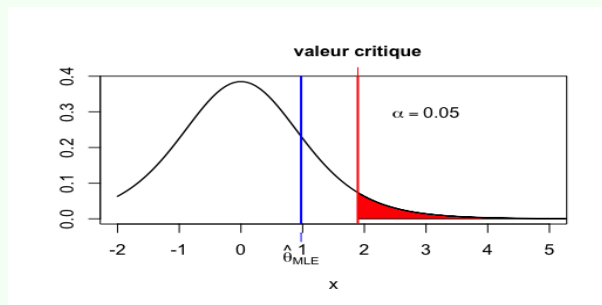
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n_1}} \sim N(0, 1)$$

Toutefois, puisqu'on ne connaît pas σ_1^2 , il faut passer par une autre quantité. Soit la v.a. Y , où

$$Y = \frac{nS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$$

Et la v.a. T , où

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n_1-1}}} \\ &= \frac{Z}{\frac{1}{\sqrt{n_1-1}}} \sqrt{\frac{1}{Y}} \\ &= \frac{\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n_1}}}{\frac{1}{\sqrt{n_1-1}}} \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1} S_1} \\ &= \frac{\bar{X} - \mu_1 (\sigma_1/\sqrt{n_1})}{(\sigma_1/\sqrt{n_1}) S_1 / \sqrt{n_1-1}} \\ &= \frac{\bar{X} - \mu_1}{S_1 / \sqrt{n_1-1}} \sim t_{(n_1-1)} \end{aligned}$$



Alors, Si la valeur observée de T est supérieure à $t_{1-\alpha}(n_1 - 1)$, alors \bar{X} est *trop grand* pour que H_0 soit vraie. Puisqu'il est très peu probable d'observer

T dans la zone de rejet si H_0 est vraie, alors on rejette H_0 au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ si

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_1}{S_1 / \sqrt{n_1 - 1}} > t_{1-\alpha}(n_1 - 1)$$

Dans notre cas :

$\bar{X} = \sum_{i=1}^8 \frac{x_i}{8} = 67,25$	$\mu_1 = 60$
$S_1 = 386,9375$	$t_{1-0,05}(8-1) = 14,067$

Et on peut calculer T :

$$T = \frac{67,25 - 60}{386,9375 / \sqrt{8-1}} = 0,975$$

Conclusion Puisque $T \leq t_{1-0,05}(7)$, on accepte H_0 , soit que $\mu_1 = 60$ avec un niveau de confiance $(1 - \alpha) = 0,95$.

4.1.3 Test bilatéral



Exemple 4

On conserve le même contexte qu'aux exemples 2 et 3 (section 4.1.2), sauf qu'on cherche à vérifier que les 2 groupes sont équivalents (i.e. la différence de moyenne est égale à 0).

Hypothèses

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \longleftrightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

On sait que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (prouvé à l'exemple 2 de la section 4.1.1). Sachant cette égalité, on peut utiliser une statistique T basé sur la distribution de

différence de moyenne :

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

$$T \stackrel{H_0}{=} \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - 0}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

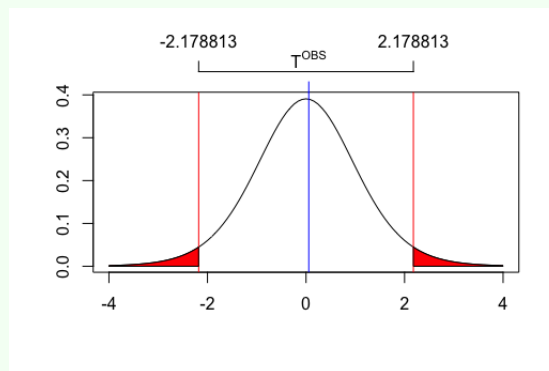
$$T^{OBS} = 0,056$$

Ici, puisque c'est un test bilatéral (on veut que notre valeur ne soit pas plus grande ou plus petite qu'un certain niveau), on doit trouver nos 2 valeurs critiques (inférieures et supérieures) avec $\alpha = 5\%$:

$$t_{\alpha/2}(8 + 6 - 2) = -2,179$$

$$t_{1-\alpha/2}(8 + 6 - 2) = 2,179$$

Alors,




Conclusion On ne peut pas rejeter H_0 , car la valeur T^{OBS} est dans la zone probable. On conclut qu'il est possible d'observer $T = 0,056$ sous H_0 vraie. En combinant les résultats de cet exemple et de l'exemple 2, on peut conclure que les 2 groupes sont **statistiquement équivalents** dans la population.

4.2 *p-value*

Note donnée au dépannage En actuariat, on fait surtout des tests d'hypothèses quand on fait de la modélisation. Les logiciels sortent la *p-value*.

La probabilité d'observer des valeurs aussi ou plus extrêmes que la valeur observée dans l'échantillon, sachant que H_0 est vraie.

Si la valeur p d'une statistique de test est $< \alpha$, alors H_0 peut être rejetée.

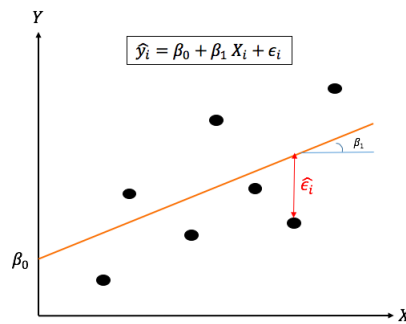
 Niveau de <i>p-value</i> souhaité	
inférieure à 0,001	Excellent (***)
inférieure à 0,05	Suffisant (**)
inférieure à 0,1	peu (*)

En pratique, on calcule la *p-value*, et ensuite on décide si c'est suffisant pour nous.

Chapitre 5

Régression linéaire simple

5.1 Introduction



La régression linéaire sert à bâtir des modèles de prévision probabiliste. De façon générale, on a

Y variable dépendante (réponse ou *output*)

X_1, \dots, X_n Variable(s) indépendante(s)¹ ou explicative(s) (*input*)

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ paramètres du modèle de régression à estimer

Modèle de régression linéaire simple

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad (5.1)$$

1. les variables sont indépendantes par rapport à Y , mais ne sont pas nécessairement indépendantes entre-elles.

Mesures de performances du modèle On cherche à trouver une mesure pour calculer la distance globale entre les points (observations) et la droite de régression estimée. 3 mesures sont analysées :

- (1) On peut calculer l'erreur totale (ET), soit

$$ET = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

Cette méthode n'est pas robuste, car les erreurs négatives viennent compenser pour les erreurs positives.

- (2) L'erreur absolue (EA), soit

$$EA = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|$$

Cette méthode est très robuste. Mais la méthode est très complexe mathématiquement. En effet, pour trouver la valeur des paramètres qui minimisent cette erreur absolue, il faut dériver la valeur absolue...

- (3) Erreur quadratique² (EQ), soit

$$EQ = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

Cette méthode est très robuste, est simple mathématiquement, et converge généralement vers la meilleure droite. Toutefois, l'erreur quadratique est fortement affectée par des valeurs extrêmes. À moins d'avis contraire, c'est l'erreur quadratique qui sera utilisée pour le reste de ce chapitre.

5.2 Estimation des paramètres

On va estimer β_0 et β_1 par $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$, soit les paramètres qui vont minimiser la fonction d'erreur quadratique (i.e. les paramètres qui vont nous donner la meilleure courbe de régression). Un peu comme la méthode du MLE (section 2.1.2), on va dériver la fonction à minimiser par rapport à chacun des paramètres pour obtenir une forme générale.

2. Cette erreur est parfois appelée *Sum of squared errors*.

Quelques formules On peut démontrer³ que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \quad (5.2)$$

et

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (5.3)$$

5.2.1 Remarques importantes

(1) On note $\hat{\varepsilon}_i$ le *résidu* généré par le modèle estimé. Par définition,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &= Y_i - \hat{Y}_i \\ &= Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i \end{aligned}$$

(2) Le *Centre de gravité* (i.e. le point (\bar{X}, \bar{Y}) se trouve toujours dans la droite de régression⁴.

Démonstration. On part de l'équation (5.3),

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \bar{Y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} \end{aligned}$$

Alors, nécessairement le point (\bar{X}, \bar{Y}) est dans la droite de régression. \square

(3) Une notation spéciale est parfois utilisée pour représenter le numérateur et le dénominateur de l'estimateur de β_1 :

3. les preuves pour les estimateurs $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_1$ se trouvent en Annexe A.2.

4. Ce résultat est fondamental et est utilisé dans plusieurs autres preuves de régression.

(3.1) Pour le dénominateur⁵, on note

$$\begin{aligned}
 S_{XX} &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} n + n\bar{X}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2
 \end{aligned}$$

(3.2) Pour le numérateur, on note

$$\begin{aligned}
 S_{YX} &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i Y_i - \textcolor{red}{X_i} \bar{Y} - \textcolor{red}{Y_i} \bar{X} + \bar{Y} \bar{X}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i Y_i - \textcolor{red}{n\bar{X}\bar{Y}} - \textcolor{red}{n\bar{Y}\bar{X}} + \bar{Y} \bar{X}) \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \cancel{n\bar{X}\bar{Y}} - \cancel{n\bar{Y}\bar{X}} + \bar{Y} \bar{X} \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}
 \end{aligned}$$

(4) La somme des résidus de tout modèle de régression linéaire (simple) est **nulle**.

5. On peut aussi avoir $S_{YY} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \dots = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (Y_i - ((\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_1 X_i)) \quad , \text{ Selon l'équation (5.3)} \\
 &= \sum_{i=1}^n Y_i - n\bar{Y} + n\bar{X}\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \\
 &= \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n Y_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□



Exemple numérique de p.12 des notes de cours

On a les données suivantes :

i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
1	2	2	4	4
2	3	5	9	15
3	6	3	36	18
4	9	6	81	56
5	12	5	144	60
Totaux	32	21	274	151

On peut calculer $\hat{\beta}_1$:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2} \\ &= \frac{151 - 5 \times \frac{32}{5} \times \frac{21}{5}}{274 - 5 \times \left(\frac{32}{5}\right)^2} \\ &\approx 0,2399\end{aligned}$$

Ainsi que $\hat{\beta}_0$:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ &= 4.2 - 0,2399 \times 4 \\ &= 2,6647\end{aligned}$$

Notre modèle est donc

$$\hat{Y}_i = 2,6647 + 0,2399X_i + \varepsilon_i$$

Vérifier les prévisions

i	X_i	Y_i	$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$	$\hat{\varepsilon} = Y_i - \hat{Y}_i$
1	2	2	3,1145	-1,1445
2	3	5	3,3844	1,6156
3	6	3	4,1041	-1,1041
4	9	6	4,8238	1,1762
5	12	5	5,5435	-0,5435
				$\approx 0,0003$

5.2.2 Fonctions Stat-Data de la TI-30XS

La calculatrice **TI-30XS Multiview** permet d'estimer les paramètres $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ en entrant les données dans la calculatrice où la touche **data**, et en demandant les calculs avec **2nd** + **data** (la fonctionnalité *stat*). En sélectionnant 2-Var Stats,

on obtient les valeurs suivantes :

n le nombre de couples d'observations qu'on a

\bar{x} moyenne des X_i .

S_x Variance échantillonnale de x , soit

$$S_x = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

σ_x écart-type échantillonnale de x

S_y Variance échantillonnale de y , soit

$$S_y = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n - 1}$$

σ_y écart-type échantillonnale de y

$\sum x$ La somme de tous les X_i

$\sum x^2$ La somme de tous les X_i au carré

$\sum y$ La somme de tous les Y_i

$\sum y^2$ La somme de tous les Y_i au carré

$\sum xy$ La somme de tous les produits $X_i Y_i$

a l'estimateur $\hat{\beta}_1$.

b l'estimateur $\hat{\beta}_0$.

5.2.3 Fonction R pour estimer les paramètres

Il existe des fonctions internes dans R pour estimer les paramètres $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$:

</> `reg(x~y)` : pour faire un modèle de régression linéaire afin de prédire x en fonction de y . L'idéal est de stocker le résultat de la régression dans un objet R, disons `reg`.

</> `summary(reg)` : nous donne un résumé de la régression. On peut appeler particulièrement chacun de ces éléments à l'aide de l'indicateur de R avec `reg$coefficients` (pour obtenir les coefficients du modèle, par exemple).

</> `fitted(reg)` : nous renvoie les valeurs prédites, selon le modèle.

</> `residuals(reg)` Nous renvoie les résidus de chaque prédictions selon le modèle bâti.

5.3 Régression passant par l'origine

Dans certaines situations, il est possible que l'on souhaite forcer la droite de régression à passer par le point $(0,0)$. Par exemple,

Y : La consommation d'une voiture en litre d'essence

X : le nombre de kilomètres parcourus par cette voiture.

Dans ce cas, $x = 0 \leftarrow y = 0$, et le modèle sera

$$Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$$

Estimation de $\hat{\beta}$

$$\begin{aligned} EQ(\beta) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta X_i)^2 \end{aligned}$$

Comme pour l'estimation de β_1 et β_2 , on va dériver l'erreur quadratique par β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial EQ(\hat{\beta})}{\partial \beta} &= 0 \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \end{aligned}$$

5.4 Caractéristiques et postulats sur ε

Caractéristiques du terme d'erreur ε

- (1) Capture les effets des autres variables X non-incluses dans le modèle.
- (2) Capture aussi le fait que la plupart des phénomènes ne se résument généralement par une simple droite.

FIGURE 5.1 – Résumé des 2 propriétés des estimateurs $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
Exactitude	$E[\hat{\beta}_0] = \beta_0$	$E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$
Précision	$Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}$	$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}}$

4 grands postulats

1. Par définition,

$$E[\varepsilon_i] = 0$$

2. Par hypothèse ⁶,

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

3. Par hypothèse,

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad , i \neq j$$

4. Par hypothèse,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

5.5 Propriétés des estimateurs du modèle

5.5.1 Exactitude

$\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont des estimateurs exacts (sans biais)

6. Hypothèse qu'on fera tomber (dans certains cas) dans le cours de Modèles linéaires.

Démonstration. On commence par démontrer pour $\hat{\beta}_1$:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\beta}_1] &= E_Y \left[\frac{S_{XY}}{S_{XX}} \right] \\
 &= E_Y \left[\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{S_{XX}} \right] \\
 &= \frac{1}{S_{XX}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) E[Y_i - \bar{Y}] \\
 &= \frac{1}{S_{XX}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) E[Y_i] - \textcolor{red}{E}[\bar{Y}]
 \end{aligned}$$

et par la remarque (2) de la section 5.2.1 ainsi que la définition de Y_i ,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{S_{XX}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) (E_Y[\beta_0 + \beta_1 X_i + \underbrace{\varepsilon_i}_0] - (\textcolor{red}{\beta_0} + \textcolor{red}{\beta_1} \bar{X})) \\
 &= \frac{1}{S_{XX}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) (\beta_0 + \beta_1 X_i - (\beta_0 + \beta_1 \bar{X})) \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}{S_{XX}} \beta_1 (X_i - \bar{X}) \\
 &= \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{S_{XX}} \\
 &= \beta_1 \frac{\cancel{S_{XX}}}{\cancel{S_{XX}}} \\
 &= \beta_1
 \end{aligned}$$

Sachant que $\hat{\beta}_1$ est exact, la démonstration pour $\hat{\beta}_0$ est simplifiée :

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\beta}_0] &= E_Y[\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}] \\
 &= \textcolor{red}{E}[\bar{Y}] - \bar{X} E[\hat{\beta}_1] \\
 &\text{par la remarque (2) de la section 5.2.1,} \\
 &= \beta_0 + \cancel{\beta_1 \bar{X}} - \bar{X} \cancel{\beta_1} \\
 &= \beta_0
 \end{aligned}$$

□

5.5.2 Précision

On peut démontrer⁷ que

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{XX}} \quad (5.4)$$

et

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}} \quad (5.5)$$

Conclusion pour l'analyse *locale* du modèle Une grande variance de $\hat{\beta}_0$ et/ou $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ implique une *mauvaise* précision. Il est difficile de dire en *absolu* si la variance est grande ou petite. On aura besoin de la théorie sur les test d'hypothèses (voir la section 5.6) pour déterminer si ces variances sont grandes ou petites.

5.5.3 Remarque sur la Covariance entre les estimateurs

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= \text{Cov}(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}, \hat{\beta}_1) \\ &= \underbrace{\text{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)}_{=0} - \bar{X} \underbrace{\text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_1)}_{\text{Var}(\hat{\beta}_1)} \\ &= -\bar{X} \text{Var}(\hat{\beta}_1) \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{-\bar{X} \sigma^2}{S_{XX}} \quad (5.6)$$

5.6 Intervalles de confiance et tests d'hypothèses sur β_0 et β_1

Contexte Dans ce cas-ci, nous utiliserons les intervalles de confiance et test d'hypothèses pour l'analyse locale de la qualité du modèle de régression obtenu. En d'autres mots, ces outils vont nous servir pour déterminer si $\text{Var}(\hat{\beta}_0)$ et/ou $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ est *grande* ou *petite* en vue de quantifier le niveau de **précision** du modèle.

7. Les démonstrations se trouvent à l'annexe A.3.

Remarques importantes

- Jusqu'à maintenant, nous n'avons fait aucune hypothèse quant à la distribution des ε_i .
- Par contre, pour obtenir des intervalles de confiance et/ou tests d'hypothèses, il sera nécessaire de greffer une loi à ε_i .

On peut résumer les 4 postulats de ε avec

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Conséquences de l'hypothèse de normalité des ε_i

(1)

$$(Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2) \quad i = 1, \dots, n$$

Attention ! les v.a. sont indépendantes, mais **pas identiquement distribués**.

(2)

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XY}}\right)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\right)$$

(3)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{EQ}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i))^2}{n-2} \end{aligned}$$

est un estimateur sans biais de σ^2 . On utilise $n-2$ au dénominateur, car on a 2 paramètres à estimer.

(4) On peut aussi montrer que

$$\left(\frac{EQ}{\sigma^2}\right) \sim \chi^2(n-2)$$

5.6.1 Intervalle de confiance pour β_1

Puisque, selon la conséquence (2), on a que

$$\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\sigma^2/S_{XX}}} \right) \sim N(0, 1) \quad (5.7)$$

Parce que σ^2 est généralement inconnu, et qu'on doit par conséquent l'estimer par $\hat{\sigma}^2 = \frac{EQ}{n-2}$, on aura que⁸

$$t = \left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{XX}}} \right) \sim t(n-2) \quad (5.8)$$

Et on a l'intervalle de confiance (à $1 - \alpha$). On a donc qu'à isoler β_1 dans l'intervalle de confiance :

$$\begin{aligned} \Pr(T \in [-t_{\alpha/2}(n-2), t_{\alpha/2}(n-2)]) &= 1 - \alpha \\ \Pr\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{XX}}} \in [-t_{\alpha/2}(n-2), t_{\alpha/2}(n-2)]\right) &= 1 - \alpha \\ \Pr\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \in \left[-\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2), \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2)\right]\right) &= 1 - \alpha \\ \Pr\left(\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2), \hat{\beta}_1 + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2)\right]\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Conclusion Un intervalle de confiance au niveau $(1 - \alpha)$ pour β_1 est :

$$\left[\hat{\beta}_1 - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2), \hat{\beta}_1 + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2) \right] \quad (5.9)$$

Ou encore (autre façon de l'exprimer) :

$$\hat{\beta}_1 \pm \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}t_{\alpha/2}(n-2)$$

8. En pratique, il est maintenant facile d'avoir plus de 30 observations, la loi student et normale se confondent.

5.6.2 Intervalle de confiance pour β_0

De manière complètement similaire à l'intervalle de confiance pour β_1 , on trouve l'intervalle de confiance pour β_0 à partir de (2) :

$$\left(\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}}}} \right) \sim N(0, 1)$$

Puisqu'on estime $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{EQ}{n-2}$, on a

$$\left(\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}} \right) \sim t(n-2) \quad (5.10)$$

Alors, on a

$$\Pr \left(\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 \pm \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \hat{\sigma}^2}{S_{XX}}} t_{\alpha/2}(n-2) \right] \right) = 1 - \alpha$$

Donc, un IC au niveau $(1 - \alpha)$ pour β_0 est :

$$\left[\hat{\beta}_0 \pm \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \hat{\sigma}^2}{S_{XX}}} t_{\alpha/2}(n-2) \right]$$

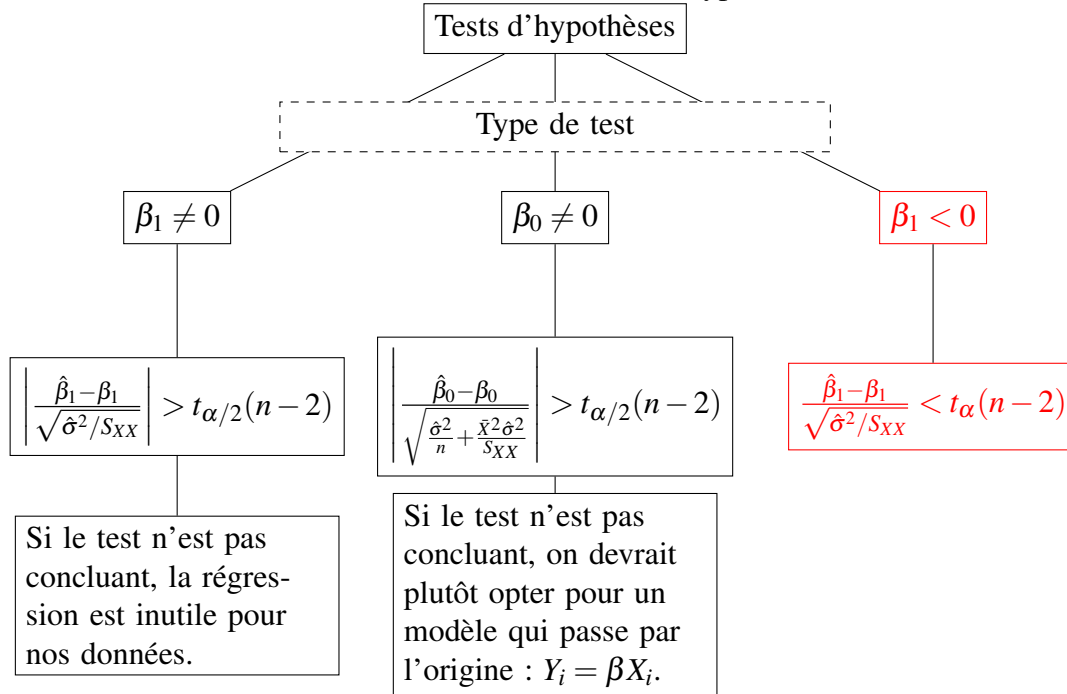


Exemple 1 : (avancé, ne sera pas testé)

On a $n = 14$ observations. On a estimé $\hat{\beta}_0 = 68.494$ et $\hat{\beta}_1 = 0.468$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}) &= \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{\beta}_0) & \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \text{Var}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 66.8511 & -1.2544 \\ -1.2544 & 0.0237 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

FIGURE 5.2 – Résumé des 3 tests d'hypothèses



Avec un intervalle de confiance à 95%,

$$\beta_0 \in [50.67, 86.318]$$

$$\beta_1 \in [0.1324, 0.8036]$$

On peut dire qu'à 95% de niveau de confiance, on peut dire qu'il est pertinent d'utiliser la régression, car l'intervalle de β_1 ne contient pas zéro (i.e. X influe sur le comportement de Y).

5.7 Tests d'hypothèses *Locaux* pour les estimateurs

Souvent, on souhaite utiliser les tests d'hypothèse en régression linéaire simple pour répondre à 2 questions principales :

1. Est-ce que β_0 est significativement différent de 0 ?⁹
2. Est-ce que β_1 est significativement différent de 0 ?¹⁰
3. Est-ce que β_1 est significativement négatif ?

La figure 5.7 résume bien les tests à effectuer pour chacun des cas, ainsi que la conclusion à avoir.

5.7.1 Premier test, avec β_0

$H_0 : \beta_0 = \beta_0^*$, où β_0^* est une constante

$H_1 : \beta_0 \neq \beta_0^*$

On utilise la statistique t , où

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0^*}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}}$$

Qui est une *distance* standardisée entre $\hat{\beta}_0$ et β_0^* .

On rejette H_0 au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ si

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-2)$$



Exemple 2

On reprend le modèle utilisé dans l'exemple 1. On pose

$H_0 : \beta_0 = 0$

$H_1 : \beta_0 \neq 0$

9. Si le résultat du test est non, on va plutôt utiliser une régression qui passe par l'origine, c'est-à-dire $Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ (tel que vu à la section 5.3).

10. Si le résultat du test est non, considérer le modèle $Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$, i.e. on utilise l'estimation vu en première partie (chapitre 2). Ça signifie aussi que X n'a pas d'effet sur Y .

On utilise la statistique de student, car on ne connaît pas σ^2 :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hat{\beta}_0 - \beta^*}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}^2 \bar{X}^2}{S_{XX}}}} \\ &= \frac{68,494 - 0}{\sqrt{66,8511}} \\ &= 8,38 \end{aligned}$$

Or, on a $t_{0,05/2}(14 - 2) = 2,18$. Alors, puisque $T > 2,18$, on rejette H_0 au niveau de confiance 95%.

5.7.2 Deuxième test, avec β_1

$H_0 : \beta_1 = \beta_1^*$, où β_1^* est une constante

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^*$

On utilise la statistique t , où

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{YX}}}$$

Qui est une *distance* standardisée entre $\hat{\beta}_1$ et β_1^* .

On rejette H_0 au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ si

$$|t| > t_{\alpha/2}(n - 2)$$



Exemple 3

On part des données de l'exemple 1. On veut tester si β_1 est significativement différent de 0.

$H_0 : \beta_1 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$

On a

$$T = \frac{-0,468 - 0}{\sqrt{0,0237}} = -3,040$$

Puisque $|T| = 3,040 > t_{0,05/2}(14 - 2) = 2,18$, on rejette H_0 au niveau de confiance 95% en faveur de H_1 . La régression est utile dans ce cas.

5.7.3 Troisième test, est-ce que β_1 est significativement négatif?



Exemple 4

On veut valider si β_1 est significativement négatif, encore une fois avec les données de l'exemple 1.

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 < 0$$

On calcule notre statistique (de la même façon qu'à l'exemple 2 et 3 :

$$T = \frac{-0,468 - 0}{\sqrt{0,0237}} = -3,040$$

Or, avec $T \sim t(12)$, on a

$$-t_{0,05/2}(14 - 2) = -1,78$$

Alors, puisque $T = -3,040 < t_{0,05/2}(14 - 2) = -1,78$, on rejette H_0 au niveau de confiance 95%, en faveur de $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

5.8 Analyse de la variance

5.8.1 Introduction

Autres appellations :

- › Analyse globale de l'ajustement de la droite aux données
- › ANOVA

Définition C'est un tableau d'analyse de la variance qui permet d'évaluer (quantifier) globalement si la droite de régression est près des observations.

Idée

- I) sans la régression (avant la relâche), Y est vu comme une v.a. avec un certain niveau de *volatilité*, exprimée par $Var(Y) = \hat{\sigma}^2$.
- II) Avec la régression (après la relâche), on suppose qu'une partie de $Var(Y)$ est *expliquée* par $Var(X)$.
- III) Utilité de la régression : pourcentage de $Var(Y)$ *expliquée* par $Var(X)$.

5.8.2 Background 1

Somme de carrés

La variance totale dans les Y est proportionnelle à la somme de carrés suivante :

SST : Sum of squares total

$$SST = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (5.11)$$

On peut décomposer la variance totale en 2 parties :

$$Y_i - \bar{Y} = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

On a donc une partie **Résidu, inexpliquée** et une partie **expliquée par X** . Par conséquent,

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n ((\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i)] \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}_{SSR} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}_{SSE} + \underbrace{2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i)}_{\star} \end{aligned}$$

On peut démontrer que $\star = 0$:

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\star &= 2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}))(Y_i - \bar{Y}) + \bar{Y} - \hat{Y}_i \\
&= 2 \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)) \\
&= 2 \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})((Y_i - \bar{Y}) - \hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})) \\
&= 2 \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) - 2 \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
&= 2 \hat{\beta}_1 S_{XY} - 2 \hat{\beta}_1^2 S_{XX} \\
&= 2 \hat{\beta}_1 (S_{XY} - \hat{\beta}_1 S_{XX}) \\
&= 2 \hat{\beta}_1 \left(S_{XY} - \frac{S_{XY}}{S_{XX}} S_{XX} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Conclusion On peut décomposer la variance totale dans les Y (SST) en 2 composantes, soient SSR et SSE, i.e.

$$SST = SSR + SSE \quad (5.12)$$

SSR *Sum of squares for the regression* : la variance dans le Y expliquée par la régression.

SSE *Sum of squared errors* : la variance dans les Y non-expliquée par la régression.

Coefficient de détermination

Définition R^2 : Pourcentage de la volatilité dans les Y expliquée par la volatilité dans les X .

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad (5.13)$$

Avec l'équation (5.12), on peut développer le coefficient d'une autre façon :

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{SST - SSE}{SST} \\ &= 1 - \frac{SSE}{SST} \end{aligned}$$

Remarques

- › $R^2 \in [0, 1]$
- › Si $R^2 \rightarrow 100\%$, alors le modèle de régression est utile.
- › À l'inverse, si $R^2 \rightarrow 0\%$, alors le modèle de régression est inutile.

5.8.3 Background 2 : Degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté d'une *Sum of squares* est :

- 1) Le nombre de composantes indépendantes dans la *Sum of squares* (SS)
- 2) Le nombre de fonctions des (Y_1, \dots, Y_n) qu'il faut connaître pour obtenir la somme.
- 3) Pour SST et SSE seulement,

$$\# \text{ degré liberté} = \# \text{ de termes dans SS} - \# \text{ de paramètres estimés}$$

- 4) Au même titre que $SST = SSR + SSE$, on peut montrer que

$$\text{d.l.}(SST) = \text{d.l.}(SSR) + \text{d.l.}(SSE)$$

Dans notre cas,

$$SST = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\text{d.l.}(SST) = n - 1$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

$$\text{d.l.}(SSE) = n - 2$$

$$\text{d.l.}(SSR) = \text{d.l.}(SST) - \text{d.l.}(SSE)$$

$$= (n - 1) - (n - 2)$$

$$= 1$$

5.8.4 Table ANOVA

Un exemple de Table ANOVA

Source de la variance	SS	degré de liberté	MS	Ratio F de Fisher
Régression (<i>model</i>)	SSR	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
<i>Error, Residuals</i>	SSE	n-2	$MSE = \frac{SSE}{n-2} = \hat{\sigma}^2$	
Total	SST	n-1		

Dans R, avec la fonction `anova(reg)`, où `reg` est l'objet dans lequel on a enregistré notre modèle de régression :

```
Analysis of Variance Table

Response: x
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
y       1  25.515    25.515   1.7522 0.2774
Residuals  3  43.685    14.562
```

5.8.5 Test de Fisher pour la validité Globale de la régression

On sait, par les tests de Student sur β_1 que la régression est utile lorsque β_1 est significativement différente de 0.

Or, on peut aussi utiliser la table ANOVA (et son F) pour effectuer ce test.

Le test

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Sous H_0 vraie, la statistique F peut se calculer comme

$$\begin{aligned} F &= \frac{MSR}{MSE} \\ &= \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} \end{aligned}$$

et $F \sim F(1, n-2)$.

Ainsi, on rejettera H_0 au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ si

$$F_{ANOVA} \geq F_{\alpha}(1, n-2)$$

Remarque En régression linéaire simple seulement (pas vrai en régression multiple), ce test F est équivalent au test t pour $\beta_1 = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{MSR}{MSE} \\
 &= \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} \\
 &= \frac{SSR}{\hat{\sigma}^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\hat{\sigma}^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}))^2}{\hat{\sigma}^2} \\
 &= \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\hat{\sigma}^2} \\
 &= \frac{\hat{\beta}_1}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \\
 &= \frac{(\hat{\beta}_1 - 0)^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{S_{XX}}}\right)^2} \\
 &= \left(\frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}}\right)^2
 \end{aligned}$$

□

5.9 Intervalle de prévision

On peut utiliser la droite de régression pour faire 2 types de prévision pour y^* étant donné x^* :

Type 1 Prévision pour la valeur moyenne (ou encore pour la droite) :

$$\begin{aligned}
 E[Y^*] &= E[\beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon^*] \\
 &= \beta_0 + \beta_1 X^*
 \end{aligned}$$

Type 2 Prédiction pour la vraie valeur (ou encore pour les points) :

$$Y^* = \beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon^*$$

Remarques

1. Dans les 2 types, la valeur de la prédiction correspond au point sur la droite sur la droite estimée :

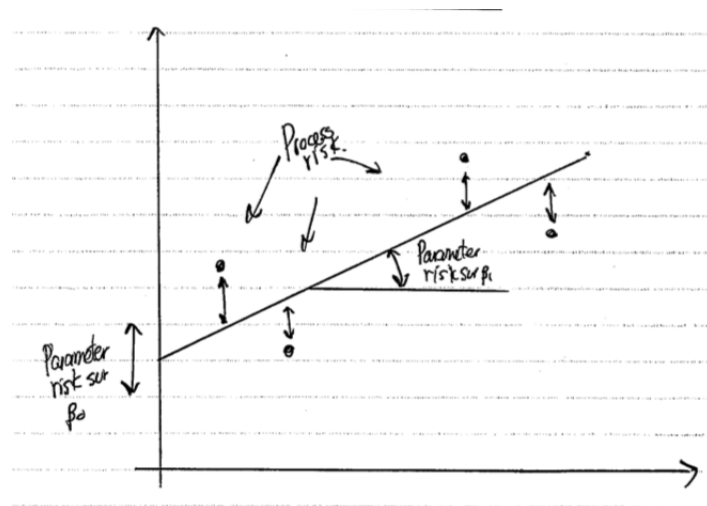
$$\begin{aligned} E[Y^*] &= \hat{Y}^* \\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^* \end{aligned}$$

2. Ces prévisions sont sans biais (au besoin, voir section 2.2) :

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*] &= E_Y[\hat{\beta}_0] + X^* E_Y[\hat{\beta}_1] \\ &= \beta_0 + \beta_1 X^* \end{aligned}$$

3. Il y a 2 sources d'erreur (d'incertitude) dans les prévisions en régression :
 - *Parameter risk* : l'incertitude sur les estimateurs ($Var(\hat{\beta}_0)$ et $Var(\hat{\beta}_1)$).
 - *Process risk* : Fluctuations aléatoires autour de la droite causés par $Var(\varepsilon^*)$.

Graphiquement



5.9.1 Intervalle de confiance pour la valeur moyenne (type 1)

Sous l'hypothèse de normalité des ε_i , on a que

$$(E[\hat{Y}^*] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \sim N(\beta_0 + \beta_1 X^*, \text{Var}(\hat{\beta}_0) + \hat{\beta}_1 X^*)$$

Par conséquent,

$$\frac{(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^*)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)}} \sim N(0, 1)$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) &= \text{Var}_Y(\bar{Y} - \bar{Y} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \\ &= \text{Var}_Y(\bar{Y} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \\ &= \text{Var}_Y(\bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X^* - \bar{X})) \\ &= \text{Var}(\bar{Y}) + (X^* - \bar{X})^2 \text{Var}(\hat{\beta}_1) + 2(X^* - \bar{X}) \text{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\sigma^2}{S_{XX}} \end{aligned}$$

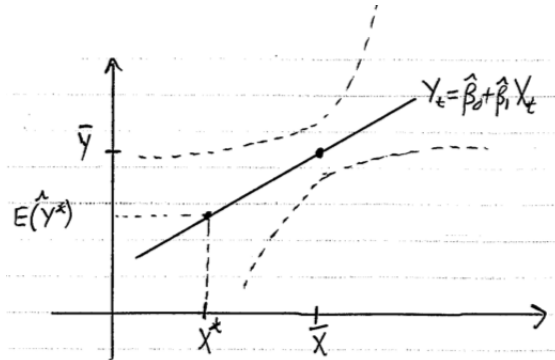
Ainsi,

$$\frac{(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^*)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\sigma^2}{S_{XX}}}} \sim t(n-2)$$

Donc, l'intervalle de confiance au niveau $(1 - \alpha)$ pour la valeur moyenne (la droite) est

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^* \pm t_{\alpha/2}(n-2) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}} \quad (5.14)$$

Graphiquement,



Remarques

1. Plus X^* s'éloigne de \bar{X} , plus l'intervalle de confiance de la droite est large.
2. Les limites de l'intervalle de confiance sont des hyperboles centrées en \bar{X} .
3. Cet intervalle de confiance ne tient compte que du *parameter risk*.

5.9.2 Intervalle de confiance pour la prévision (type 2)

$$\frac{\hat{Y}^* - Y^*}{\sqrt{\text{Var}(\hat{Y}^* - Y^*)}} \sim N(0, 1)$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{Y}^* - Y^*) &= \text{Var}_Y((\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon^*)) \\ &= \text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) + \text{Var}(\beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon^*) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\sigma^2}{S_{XX}} + \text{Var}(\varepsilon^*) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\sigma^2}{S_{XX}} + \sigma^2 \end{aligned}$$

Alors, notre quantité pivot devient

$$\frac{\hat{Y}^* - Y^*}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\sigma^2}{S_{XX}} + \sigma^2}} \sim t(n-2)$$

Donc, un intervalle de confiance au niveau $(1 - \alpha)$ pour Y^* est

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\alpha/2}(n-2) \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{n} + (X^* - \bar{X})^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}} \quad (5.15)$$

5.10 Analyse qualitative des résidus d'un modèle de régression

Cette analyse permet, entre autres, de valider les 4 postulats de la régression.

- (1) $E[\varepsilon^*] = 0$
- (2) $Var(\varepsilon^*) = \sigma^2$
- (3) $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- (4) $\varepsilon_i \sim N$ et sont iid.

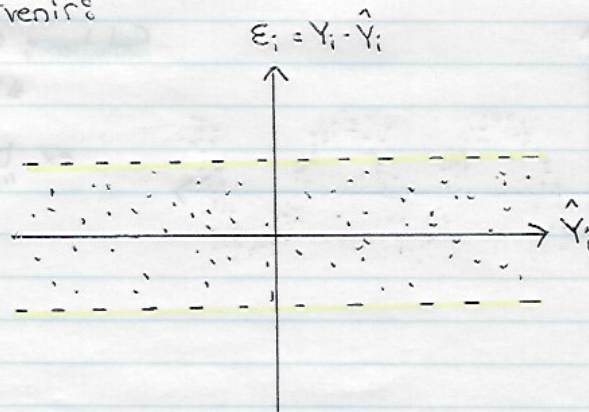
Cette analyse est importante à faire, car parfois même si les indicateurs numériques nous indiquent un bon modèle, on peut parfois avoir certains problèmes (qu'on constatera seulement de façon graphique). Voici 3 éléments à surveiller :

Analyse qualitative ACT - 2000

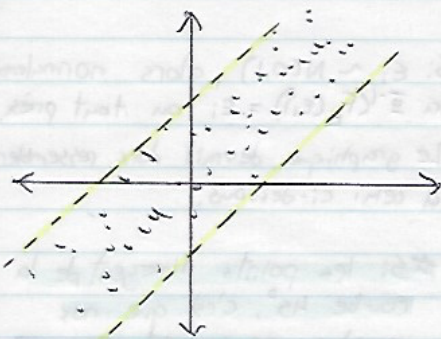
3 problèmes peuvent survenir :

Situation idéale :

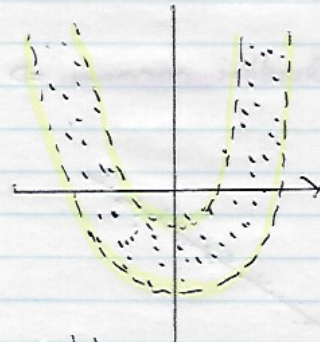
- résidus uniformément distribués
- Variance constante
- les résidus ne sont pas corrélés.



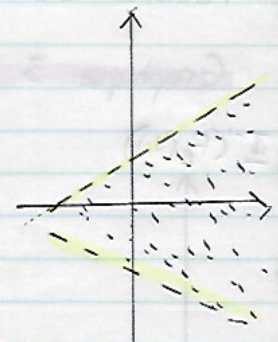
Problème #1 : les résidus ne sont pas autour de l'axe des x.



Solution : il manque probablement un terme linéaire



Solution : il manque probablement un terme quadratique.

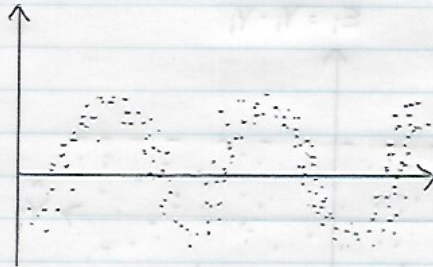


Solution : on ne peut pas garder l'hypothèse que $\text{var}(E_i) = \sigma^2$
(variance n'est pas constant)

- Utiliser la régression multiple pour inclure d'autres variables.
- Transformer la variable X dans modèle de régression linéaire.

On devrait se tourner vers le modèle linéaire généralisé (GLM).

Problème 2 : Les résidus sont corrélés entre eux.

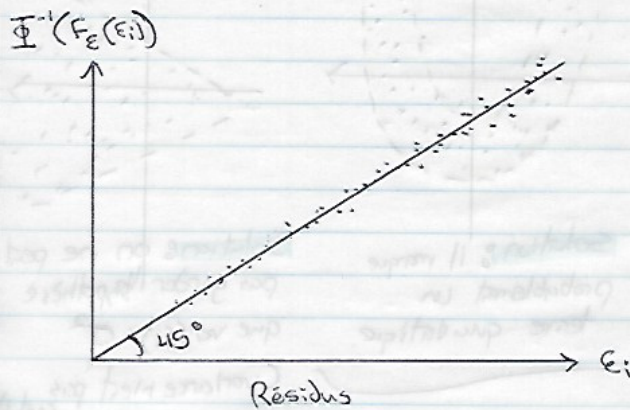


Solution : Séries chronologiques, car l'hyp. #3 tombe ($\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, i \neq j$)

ex. Utiliser un modèle avec "random effect" (modèle mixte)

Graphique 3 : Quantiles normaux \Rightarrow Si $\epsilon_i \sim N(0,1)$, alors normaliseront la $\Phi^{-1}(F_{\epsilon}(\epsilon_i)) = \epsilon_i$ ou tout près.

Le graphique devrait donc ressembler à celui ci-dessous.



* Si les points divergent de la courbe 45° , c'est que nos résidus ne suivent pas une loi Norm.

Annexe A

Preuves

A.1 Démonstrations des distributions

A.1.1 Distribution de $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Démonstration. On sait que ¹

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

et

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$$

Alors,

1. pour la preuve qui suit, S correspond à la variance échantillonnale représentée avec $n-1$.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \\
&= \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma}{\sigma} \\
&= \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{N(0,1)} \frac{\sigma}{S} \\
&= Z \frac{\sigma}{S}, \text{ où } Z \text{ suit une loi } N(0, 1) \\
&= \frac{Z}{S/\sigma} \\
&= \frac{Z}{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} \frac{S}{\sigma}} \\
&= \frac{Z}{\frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \\
&= \frac{Z}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{n-1}}}} \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\chi^2_{(n-1)}} \\
&= \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}} \\
T &\sim t_{(n-1)}
\end{aligned}$$

□

A.2 Estimateur du modèle de Régression linéaire simple

En partant de la fonction d'erreur quadratique

$$EQ = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

Et sachant la formule du modèle de régression linéaire

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

On peut trouver que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Et

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Démonstration. Avec la méthode des moindres carré, on veut trouver les paramètres β_0 et β_1 qui vont minimiser la fonction d'erreur quadratique, i.e

$$\begin{aligned} EQ(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i))^2 \end{aligned}$$

Pour trouver chacun des 2 paramètres, on va dériver par rapport au paramètre, puis poser la dérivée égale à zéro pour finalement résoudre les 2 équations, 2 inconnus.

Si on commence par $\hat{\beta}_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_0} EQ(\beta_0, \beta_1) &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i))^2 \right] \\
0 &= 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) \cdot (-1) \\
&= \sum_{i=1}^n Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \\
n\hat{\beta}_0 &= \sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \\
\hat{\beta}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i}{n} \\
&= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}
\end{aligned}$$

On peut descendre la même preuve pour $\hat{\beta}_1$ (un peu plus longue) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_1} EQ(\beta_0, \beta_1) &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i))^2 \right] \\
0 &= 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) \cdot (-X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (Y_i X_i - \hat{\beta}_0 X_i - \hat{\beta}_1 X_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^n (Y_i X_i) - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (Y_i X_i) - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n Y_i X_i - n\bar{Y}\bar{X} + \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \\
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}
\end{aligned}$$

□

A.3 Précision des estimateurs beta

À la section 5.5.2, on précise que

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}$$

et

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}}$$

Démonstration. On commence par démontrer pour $\hat{\beta}_1$:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_Y(\hat{\beta}_1) &= \text{Var}_Y \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S_{XX}} \right) \\
 &= \text{Var}_Y \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i - \bar{Y} \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}_{=0}}{S_{XX}} \right) \\
 &= \text{Var}_Y \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{S_{XX}} \right) \\
 &= \text{Var}_Y \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \cdot (\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i)}{S_{XX}} \right) \\
 &= \frac{1}{S_{XX}^2} \text{Var}_Y \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(\beta_0 + \beta_1 X_i) + \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\varepsilon_i \right)
 \end{aligned}$$

La partie de gauche à l'intérieur de la variance est une constante.

On applique les propriétés de la variance :

$$= \frac{1}{S_{XX}^2} \text{Var}_Y \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\varepsilon_i \right)$$

Par l'hypothèse d'indépendance (postulat 3, section 5.4), on a

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{S_{XX}^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}_Y((X_i - \bar{X})\varepsilon_i) \\
 &= \frac{1}{S_{XX}^2} \sum_{i=1}^n \cancel{(X_i - \bar{X})^2} \text{Var}_Y(\varepsilon_i) \\
 &= \frac{\text{Var}(\varepsilon_i)}{S_{XX}}
 \end{aligned}$$

par le postulat 2,

$$= \frac{\sigma^2}{S_{XX}}$$

Pour ce qui est de la preuve de $\hat{\beta}_0$, la preuve peut être très longue, mais il y a

moyen de prendre un raccourci (via la propriété (2) de la section 5.2.1) pour se débarrasser facilement de la covariance dans la preuve ci-dessous :

$$\begin{aligned}
Var_Y(\hat{\beta}_0) &= Var_Y(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
&= Var_Y(\bar{Y}) + Var_Y(\hat{\beta}_1 \bar{X}) - 2Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
&= Var_Y\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}\right) + \bar{X}^2 Var_Y(\hat{\beta}_1) - 2\bar{X} \underbrace{Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)}_{=0} \\
&= \frac{1}{n^2} Var_Y\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i}_{\text{Constantes}}\right) + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}} \\
&= \frac{n Var(\varepsilon_i)}{n^2} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}} \quad (\text{Par hypothèse d'indépendance de } \varepsilon) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{X}^2 \sigma^2}{S_{XX}}
\end{aligned}$$

□