

CONTRIBUTEURS

ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

aut. Nicholas Langevin

aut. Gabriel Crépeault-Cauchon

aut. Alexandre Turcotte

aut., cre. Alec James van Rassel

src. Ilie-Radu Mitric

Rappels

Approximation Woolhouse

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

Hypothèse DUD

Mortalité

$${}_sq_x = sq_x, \quad s \in (0, 1)$$

Assurance

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{m}}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{(m)} \stackrel{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{m}}$$

Rentes

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_n|\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m){}_n|\ddot{a}_x - \beta(m){}_nE_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

où :

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \quad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Relations

Assurance

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Rente

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1}$$

$${}_n|\ddot{a}_x = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + v \underbrace{\frac{1}{m} \frac{1}{m} p_x}_{\frac{1}{m} E_x} \ddot{a}_{x+\frac{1}{m}, \overline{n-\frac{1}{m}}|}^{(m)}$$

Note rente différée : pas faire l'erreur d'oublier de soustraire les n années sans paiements de la rente :

$${}_n|\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & , K = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Mortalité

Tables

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$$

$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \quad {}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

Sélection à l'âge $[x]$

$$\bar{A}_{[x]+h:\overline{n-h}|}^1 = \int_0^{n-h} e^{-\delta t} {}_tp_{[x]+h} \mu_{[x]+h+t} dt$$

$$= \int_h^n e^{-\delta(s-h)} \frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hp_{[x]}} \mu_{[x]+s} ds$$

1 Calcul de réserve

Notation

${}_hL$: Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h .

- Puisque la perte est évaluée au temps h , on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :

$${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$$

${}_hV$: Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h .

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :

$${}_hV = E[{}_hL]$$

${}_hV^g$: Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$: Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

${}_hV^I$ Réserve initiale au début de l'année h ;

$${}_hV^I = {}_hV + \pi$$

$VPA_{@h}$: La valeur présente au temps h .

$VPA_{@h}$: La valeur présente anticipée au temps h .

$$VPA_{@t} = E[VPA_{@h}]$$

Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$${}_hL = MZ_{x+h} - \pi \ddot{Y}_{x+h}$$

$$\text{Var}({}_hL) = \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 [2A_{x+h} - (A_{x+h})^2]$$

$${}_hV^n = MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h}$$

$$\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$${}_hV^n \stackrel{PEP}{=} M \left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x} \right]$$

$$\stackrel{PEP}{=} M \left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x} \right]$$

Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$${}_hL = b_{K_{x+h}+h+1} v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h} v^i$$

$${}_hV^n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h} v^i {}_j p_{x+h}$$

Note

- > La prestation b est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- > Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps h , il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

Calcul de réserves

Méthodes d'évaluation de la réserve

Prospective	Rétrospective
${}_hV^g = VPA_{@t} \left(\begin{array}{c} \text{prestations futures} \\ \text{à payer} \end{array} \right)$ $+ VPA_{@t} \left(\begin{array}{c} \text{frais futurs} \\ \text{à payer} \end{array} \right)$ $- VPA_{@t} \left(\begin{array}{c} \text{primes futures} \\ \text{à recevoir} \end{array} \right)$	${}_hV^g = \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x}$ $+ \frac{VPA_{@0} \left(\begin{array}{c} \text{primes recues} \\ \text{avant } h \end{array} \right)}{{}_hE_x}$ $- \frac{VPA_{@0} \left(\begin{array}{c} \text{prestations à payer} \\ \text{avant } h \end{array} \right)}{{}_hE_x}$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte n années :

Méthode prospective ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

Méthode rétrospective ${}_hV^n = 0 + \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA_{x:\overline{h}|}^1}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer **avant** h .

Relation : $\{T_x - t | T_x > t\} \stackrel{d}{=} T_{x+t}$ où $\stackrel{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$${}_hV^n = [p_{x+h+1}V^n + q_{x+h}b_{h+1}]v - \pi_h$$

$${}_hV^g = [p_{x+h+1}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})]v - (G_h - e_h)$$

La réserve pour l'année h est composée de :

- > La réserve au temps $h + 1$ si l'assuré survie l'année h et
- > la prestation payable (et frais encourus) à $h + 1$ si l'assuré décède lors de l'année h ,
- > actualisés de $h + 1$ à h ,
- > moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année h .

où

G_h La prime (gross premium) à recevoir à $t = h$;

e_h Les frais liés à la collecte de la prime (per premium expenses);

E_h Les frais liés au paiement de la prestation (settlement expenses).

Avec la réserve pour l'année $h + 1$ isolée :

$${}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h + 1$ isolé :

$$\underbrace{(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g$$

Note Si on a une assurance mixte dont la prestation est fonction de la réserve (e.g., $b_k = 1000 + {}_kV$), on commence de la fin puisqu'on sait que ${}_nV = M$.

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$${}_{h+s}V^g \approx ({}_hV^g + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V^g)(s), s \in (0,1)$$

Profit de l'assureur

Notation

N_h : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps h .

${}_{h+1}V^E$: Réserve totale pour l'année $h + 1$ du portefeuille selon l'intérêt (i), la mortalité (q_{x+h}) et les frais (e_h et E_h) **espérés** (Expected) pour l'année h .

${}_{h+1}V^A$: Réserve totale pour l'année $h + 1$ du portefeuille selon l'intérêt (i'), la mortalité (q'_{x+h}) et les frais (e'_h et E'_h) **réellement** (Actually) encourus lors de l'année h .

Le profit de l'assureur pour l'année h sera donc ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$.

Si uniquement _____ change(nt), alors le profit sur _____ pour l'année h est :

les frais $N_h [(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}]$.

l'intérêt $N_h ({}_hV^g + (G_h - e_h)) (i' - i)$.

la mortalité $(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g) (N_h q_{x+h} - N_h q'_{x+h})$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- > Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h ({}_hV^g + (G_h - e'_h)) (i' - i)$.
- > Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h [(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}]$.

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_tV$.

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tV^g = \delta_t {}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t}$$

- > Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps t .
- > Le montant est fixe et payé au début de l'année t .
- > Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à t .

on peut approximer ${}_hV^g$ avec la Méthode d'Euler :

$${}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h [(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}}$$

Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$$\begin{aligned} {}_hV^e &= DAC_h = VPA_{@t}(\text{frais}) - VPA_{@t}(\text{primes pour les frais futurs}) \\ &\equiv {}_hV^g - {}_hV^n \end{aligned}$$

> « expense reserve » ou « Deferred Acquisition Costs ».

› Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.

› Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^S = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

P^S : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute G).

P^n : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette P).

P^e : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^S - P^n$$

FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

π_0^{FTP} Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} = \underset{\text{vie entière}}{\underset{\text{contrat}}{bvq_{[x]}}}$$

π_h^{FTP} Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \dots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} = \underset{\text{vie entière}}{\underset{\text{contrat}}{b \frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}}}$$

- › Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition;
- › Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contrat;
- › Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple;
- › Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première;
- › **Note** : Lorsqu'on calcule la réserve FTP ${}_hV^{FTP}$ on n'a pas besoin de calculer π_0^{FTP} , on y va directement avec π_h^{FTP} .

2 Modèles à plusieurs états

${}_k Q_t^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état i au temps t à l'état j au temps $t+k$.

› De façon équivalente, ${}_k p_{x+t}^{ij}$.

M_t État au temps t parmi les $\{1, 2, \dots, r\}$ ou $\{0, 1, \dots, r\}$ états.

› De façon équivalente, $M(t)$.

› Le processus M_t est une "Chaîne de Markov" ssi $\forall t = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} Q_t^{(i,j)} &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, \dots, M_0) \\ &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i) \end{aligned}$$

Q_t Matrice des probabilités de transition.

› Les transitions sont en fin d'année.

› Si la matrice :

dépend du temps alors M_t est une chaîne de Markov **non-homogène**.

ne dépend pas du temps alors M_t est une chaîne de Markov **homogène**.

Également, dans ce cas-ci, on dénote Q_t par Q puisque $Q_t^{ij} = Q^{ij} \forall t \geq 0$

${}_k Q_t$ Matrice de k -étapes des probabilités de transition.

$${}_{m+n} Q_t^{(i,j)} = \sum_{k=1}^r {}_m Q_t^{(i,k)} {}_n Q_{t+m}^{(k,j)}$$

En temps continu

On généralise la notation utilisée auparavant (le *modèle actif-décédé*) pour des modèles à plusieurs états.

Notation et hypothèses

$Y_x(t)$ Processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$ de l'état dont les transitions peuvent se produire à n'importe quel moment $t \geq 0$ et donc pas seulement en fin d'année;

› De façon équivalente, $Y(x+t)$;

› $Y_x(t) = i$ pour un assuré d'âge (x) dans l'état i au temps t (ou, de façon équivalente, à l'âge $x+t$).

${}_k p_{x+t}^{ij}$ Probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps t soit dans l'état j (où j peut être égale à i) au temps $t+k$.

$${}_k p_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(t) = j | Y_x = i)$$

${}_k \bar{p}_{x+t}^{ii}$ Probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps t reste dans l'état i continuellement jusqu'au temps $t+k$.

$${}_k \bar{p}_{x+t}^{ii} = \Pr(Y_x(s) = i, \underbrace{\forall s \in [0, t]}_{\text{sans sortir et revenir}} | Y_x = i)$$

› Il s'ensuit que ${}_k p_{x+t}^{ij} \geq {}_k \bar{p}_{x+t}^{ij}$ car :

$${}_k p_{x+t}^{ij} = {}_k \bar{p}_{x+t}^{ij} + \Pr(Y_x(t) = i, \text{après avoir sorti et revenu} | Y_x = i)$$

μ_x^{ij} **Force de transition** de l'état i à l'état j ($i \neq j$) pour un assuré d'âge (x) .

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{{}_h p_x^{ij}}{h}, i \neq j$$

› On trouve que **pour $i \neq j$** :

$${}_h p_x^{ij} = h \mu_x^{ij} + o(h) \quad \Rightarrow \quad {}_h p_x^{ij} \approx h \mu_x^{ij},$$

où $h > 0$ est très petit.

Hypothèses du modèle à plusieurs états

1. Le processus stochastique Y_t est une chaîne de Markov.

$$\Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i, Y_u, 0 \leq u < 1) = \Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i)$$

2. Pour tout intervalle de longueur h ,
2, ou plus, transitions

$$\Pr \left(\begin{array}{c} \text{pendant une période de longueur } h \end{array} \right) = o(h)$$

Note Une fonction $g \in o(h)$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.

3. Pour tous les états i et j , et tout âge $x \geq 0$, ${}_t p_x^{ij}$ est différentiable par rapport à t .

➤ Cette hypothèse veille au bon déroulement mathématique en assurant :

- L'existence de la limite dans la définition de μ_x^{ij} ;
- Que la probabilité d'une transition dans un intervalle de longueur h tend vers 0 lorsque h tends vers 0.

Remarques

1. ${}_h p_x^{ii} = {}_h p_x^{\bar{i}\bar{i}} + o(h)$ où $o(h)$ est la probabilité de sortir et revenir de l'hypothèse 2.

2.

$$\begin{aligned} {}_h p_x^{ij} &\geq {}_h p_x^{\bar{i}\bar{i}} = 1 - \sum_{j=0, j \neq i}^n {}_h p_x^{ij} + o(h) \\ &\equiv 1 - h \sum_{j=0, j \neq i}^n \mu_x^{ij} + o(h) \end{aligned}$$

Formules

Nous pouvons exprimer toutes les probabilités en fonction des forces de transitions.

Approche directe :

$${}_t p_x^{\bar{i}\bar{i}} = \exp \left\{ - \int_0^t \sum_{j=0, j \neq i}^n \mu_{x+s}^{ij} ds \right\}$$

Transition d'un état au prochain pour un **modèle d'invalidité permanente** :

$${}_u p_x^{01} = \int_{t=0}^u ({}_t p_x^{\bar{0}\bar{0}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t} p_x^{\bar{1}\bar{1}}) dt \approx \int_{t=0}^u ({}_t p_x^{\bar{0}\bar{0}})({}_{u-t} p_x^{\bar{1}\bar{1}})({}_t \mu_{x+t}^{01})$$

Transition d'un état à un état supérieur :

$$\begin{aligned} {}_u p_x^{02} &= \int_{t=0}^u \left\{ ({}_t p_x^{\bar{0}\bar{0}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t} p_x^{12}) \right\} + \left\{ ({}_t p_x^{\bar{0}\bar{0}})(\mu_{x+t}^{02})({}_{u-t} p_x^{\bar{2}\bar{2}}) \right\} dt \\ &= 1 - {}_u p_x^{\bar{0}\bar{0}} - {}_u p_x^{01} \end{aligned}$$

Approximations

Pour les modèles où il est possible de sortir et de revenir à un état.

Kolmogorov's Forward Equations

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{ij} = \sum_{k=0, k \neq j}^n \left({}_t p_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} - {}_t p_x^{ij} \mu_{x+t}^{jk} \right)$$

Avec la **notation** $\mu_x^{ii} = - \sum_{k=0, k \neq i}^n \mu_x^{ik}$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{ij} = \sum_{k=0}^n {}_t p_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj}$$

où μ_x n'est plus une force de transition mais **représente plutôt une notation** pour simplifier l'expression.

On peut récrire l'expression en forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} {}_t P_x &= {}_t P_x P_{x+t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} {}_t p_x^{00} & {}_t p_x^{01} & \cdots & {}_t p_x^{0n} \\ {}_t p_x^{10} & {}_t p_x^{11} & \cdots & {}_t p_x^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_t p_x^{n0} & {}_t p_x^{n1} & \cdots & {}_t p_x^{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}_t p_x^{00} & {}_t p_x^{01} & \cdots & {}_t p_x^{0n} \\ {}_t p_x^{10} & {}_t p_x^{11} & \cdots & {}_t p_x^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_t p_x^{n0} & {}_t p_x^{n1} & \cdots & {}_t p_x^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{x+t}^{00} & \mu_{x+t}^{01} & \cdots & \mu_{x+t}^{0n} \\ \mu_{x+t}^{10} & \mu_{x+t}^{11} & \cdots & \mu_{x+t}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x+t}^{n0} & \mu_{x+t}^{n1} & \cdots & \mu_{x+t}^{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Méthode d'Euler

Pour $h > 0$ très petit, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{ij} \approx \frac{({}_{t+h} p_x^{ij} - {}_t p_x^{ij})}{h}$$

avec la condition initiale $\forall i \neq j :$

$${}_0 p_x^{ii} = 1 \quad \text{et} \quad {}_0 p_x^{ij} = 0$$

Paielements

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ii}$ La VPA d'une rente temporaire payant 1\$ à une vie dans l'état i seulement lorsqu'elle est dans l'état i .

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ii} = \int_0^n v^t {}_t p_x^{ii} dt$$

On a aussi plus généralement :

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ij} = \int_0^n v^t {}_t p_x^{ij} dt$$

$$\bar{A}_x^{ij} = \int_0^\infty \sum_{k \neq j} v^t {}_t p_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} dt$$

Modèle à plusieurs décroissances

- › en anglais, « *Multiple Decrement Model* » ;
- › Précédemment, il y avait résiliation du contrat uniquement en raison d'un décès ;
- › Cependant, on généralise pour évaluer les primes et réserves de contrats dont les prestations diffèrent en fonction des causes de décroissances ;
- › Ces modèles sont en fait des cas particuliers des chaînes de Markov.

T_x Temps de décroissance de x (alias, la *durée de vie* résiduelle de x) ;

J Cause de la décroissance ;

- › Variable aléatoire discrète avec $J \in \{1, 2, \dots, m\}$ où m est le nombre de causes possibles de décroissance.

${}_t q_x^{(j)}$ Probabilité de décroissance d'ici t années pour un assuré d'âge x en raison de la j^{e} cause ;

$${}_t p_x^{0j} = {}_t q_x^{(j)} = \Pr(T_x \leq t, J = j)$$

- › Il s'ensuit de l'équation que ${}_t q_x^{(j)}$ est une distribution conjointe de T_x et J .

${}_t q_x^{(\tau)}$ Probabilité de décroissance d'ici t années pour un assuré d'âge x peu importe la cause ;

$${}_t q_x^{(\tau)} = \Pr(T_x \leq t)$$

$$= \sum_{j=1}^m \Pr(T_x \leq t, J = j) = \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(j)}$$

- › En parallèle, ${}_t p_x^{(\tau)}$ est la probabilité de survivre pendant t années à toutes les causes de décroissance ;

- › Cependant, ${}_t p_x^{(j)}$ **n'existe pas** et ${}_t p_x^{(j)} \neq 1 - {}_t q_x^{(j)}$.

Fonctions de densité

$$f_{T_x, J}(t, j) = ({}_t p_x^{(\tau)}) (\mu_{x+t}^{(j)})$$

$$f_J(j) = \int_0^\infty f_{T_x, J}(t, j) dt = {}_\infty q_x^{(j)}$$

$$E[T_x] = \int_0^\infty {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$f_{J|T_x}(J|t) = \frac{f_{T_x, J}(t, j)}{f_{T_x}(t)} \equiv \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}$$

Force de décroissance totale

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_{x+t}^{(j)}$$

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^m f_{T_x, J}(t, j) = ({}_t p_x^{(\tau)}) (\mu_{x+t}^{(\tau)})$$

$${}_t q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(j)}$$

De plus :

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds}$$

Force de décroissance de la j^{e} cause

$\mu_{x+t}^{(j)}$ Force de décroissance de la j^{e} cause pour un assuré d'âge x .

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x, J}(s, j) ds = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$$

Incorporation de K_x

$${}_k | q_x^{(j)} = \Pr(k \leq T_x < k+1, J = j)$$

$$= \int_k^{k+1} f_{T_x, J}(t, j) dt \equiv \int_0^{k+1} f_{T_x, J}(t, j) dt - \int_0^k f_{T_x, J}(t, j) dt$$

$$= {}_{k+1} | q_x^{(j)} - {}_k | q_x^{(j)}$$

Aussi

$${}_k | q_x^{(j)} = \int_k^{k+1} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt = {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}$$

Note Développer cette expression s'il y a un manque d'information sur des ℓx ; voir l'exercice 2.10 du cours 8 pour un exemple.

Loi marginale :

$$\begin{aligned} {}_k|q_x^{(\tau)} &= \Pr(K_x = k) = \sum_{j=1}^m \Pr(K_x = k, J = j) = \sum_{j=1}^m {}_k|q_x^{(j)} \\ &\equiv {}_{k+1}q_x^{(\tau)} - {}_kq_x^{(\tau)} = {}_kp_x^{(\tau)} - {}_{k+1}p_x^{(\tau)} \\ &\equiv {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)} \end{aligned}$$

Tables de mortalité

${}_rd_x$ Nombre de décès d'une cohorte de ℓx personnes entre les temps 0 et r (alias, entre les âges x et $x+r$);

${}_rd_x^{(j)}$ Nombre de décès d'une cohorte de ℓx personnes entre les temps 0 et r en cause la décroissance j .

Note Pour des paiements selon l'état, voir l'exercice 2.12 à la fin du cours 8.

Si $\mu_{x+t}^{(1)}, \dots, \mu_{x+t}^{(m)}$ sont des constantes $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(m)}$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} &= \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(1)} + \dots + \mu_{x+t}^{(m)}} = k = \text{constante} \\ \Rightarrow {}_tq_x^{(j)} &= k {}_tq_x^{(\tau)} \end{aligned}$$

Modèles à décroissance unique associés

$T_x^{(j)}$ Temps de décroissance de x (alias, la *durée de vie* résiduelle de x) en supposant qu'il est uniquement exposé à la cause j ;

- > C'est une durée de vie théorique, mais utile;
- > Comme il y a un seul type de décès, c'est le modèle actif-décédé de vie I;
- > Généralement, on suppose que les décroissances $T_x^{(j)}$ pour $j = 1, 2, \dots, m$ sont indépendantes;
- > Avec l'indépendance, on trouve que la distribution de T_x est la même que la première cause de décès $T_x \stackrel{d}{=} \min \{T_x^{(1)}, T_x^{(2)}, \dots, T_x^{(m)}\}$.

${}_tq_x^{(j)}$: Probabilité de décroissance d'ici t années pour un assuré d'âge x en raison de la j cause en supposant qu'il est uniquement exposé à la cause j ;

- > Puisque c'est le modèle actif-décédé, il s'ensuit que ${}_tp_x^{(j)} = 1 - {}_tq_x^{(j)}$.

On peut relier les 2 modèles :

$$\begin{aligned} \mu_{x+s}^{(j)} &= \mu_{x+s}^{(j)} \\ {}_tp_x^{(\tau)} &= \prod_{j=1}^m {}_tp_x^{(j)} \end{aligned}$$

- > La multiplication des ${}_tp_x$ ci-dessus illustre le lien avec la fonction de survie du minimum.

Donc :

$${}_tq_x^{(\tau)} = {}_tq_x^{(1)} + {}_tq_x^{(2)} + \dots + {}_tq_x^{(m)} \quad {}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{(1)} \times {}_tp_x^{(2)} \times \dots \times {}_tp_x^{(m)}$$

Il s'ensuit que ${}_tp_x^{(\tau)} \leq {}_tp_x^{(j)}, \forall j = 1, 2, \dots, m$ et ${}_tq_x^{(j)} \geq {}_tq_x^{(j)}, \forall j = 1, 2, \dots, m$.

Interrelations

Hypothèses

Pour $x \in \mathbb{Z}^+, t \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, m$,

DUD ${}_tq_x^{(j)} = t \times q_x^{(j)}$;

FC $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$.

- > Si les mortalités $T_x^{(j)}$ suivent des lois DeMoivre, alors DUD est exact.

Trouver $q_x^{(j)}$ de $q_x'^{(j)}$ Sachant $q_x'^{(1)}, \dots, q_x'^{(m)}$,

1. Poser une hypothèse (DUD ou FC) sur les décroissances uniques $T_x'^{(j)}$ pour trouver ${}_s q_x'^{(j)}$;
2. Trouver $\mu_{x+s}'^{(j)} = \mu_{x+s}^{(j)}$;
3. Trouver ${}_s p_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_{x+s}^{(j)}$;
4. Trouver ${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds$.

Sous DUD

$$q_x^{(j)} = q_x'^{(j)} \int_0^t \left[\prod_{k \neq j, k=1}^m (1 - t \cdot q_x'^{(k)}) \right] dt$$

Cas particuliers pour $t = 1$:

- > Si $m = 2$, $q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{q_x'^{(2)}}{2} \right)$ et $q_x^{(2)} = q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{q_x'^{(1)}}{2} \right)$;
- > Si $m = 3$, $q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} \left[1 - \frac{1}{2} (q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}) + \frac{1}{3} (q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}) \right]$.

Sous FC

$${}_t q_x^{(j)} = \frac{\ln(p_x'^{(j)})}{\ln(p_x^{(\tau)})} {}_t q_x^{(\tau)}$$

$$2. \text{ Trouver } \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\partial {}_t q_x^{(j)}}{\partial t^{(\tau)}} = \mu_{x+t}^{(j)} ;$$

$$3. \text{ Trouver } {}_t p_x'^{(j)} = e^{\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)} ds}.$$

Sous DUD

$${}_t q_x'^{(j)} = 1 - \left(1 - t \times q_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(j)} / q_x^{(\tau)}}$$

$${}_t p_x'^{(j)} = \left({}_t p_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(j)} / q_x^{(\tau)}}$$

Sous FC

$${}_t p_x'^{(j)} = \left({}_t p_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(j)} / q_x^{(\tau)}}$$

Trouver ${}_t q_x'^{(j)}$ de ${}_t q_x^{(j)}$ Sachant ${}_t q_x^{(1)}, \dots, {}_t q_x^{(m)}$,

1. Poser une hypothèse (DUD ou FC) sur les décroissances ($T_x^{(j)}$) pour trouver ${}_t q_x^{(j)}$;

3 Contrats d'assurance et de rente sur plusieurs têtes

Notation

T_x et T_y Durée de vie future pour les individus d'âges (x) et (y) ;

› Nous étudions le cas le plus simple où $T_x \perp T_y$.

f_{T_x, T_y} et F_{T_x, T_y} Fonction de densité (répartition) du couple (x, y) ;

$$F_{T_x, T_y}(t, s) = \Pr(T_x \leq t, T_y \leq s) = \int_{u=0}^t \int_{v=0}^s f_{T_x, T_y}(u, v) dv du$$

$$\stackrel{T_x \perp T_y}{=} \Pr(T_x \leq t) \Pr(T_y \leq s) = F_{T_x}(t) F_{T_y}(s)$$

${}_t q_{xy}$ On mets le chiffre sur la personne qui meurt et le chiffre représente l'ordre; dans ce cas-ci, (x) meurt avant (y) avant le temps t .

Souvent, les contrats d'assurance (ou de rente) d'un couple (x, y) sont définis selon ces deux statuts :

1. Statut conjoint (ou premier décès).
2. Statut dernier survivant (ou dernier décès).

≡ Statut conjoint

› Dénuté xy , (xy) ou $x : y$;

› Demeure actif tant que (x) et (y) sont en vie et donc cesse au premier décès parmi (x) et (y) .

$$T_{xy} = \min\{T_x, T_y\}$$

De plus :

$${}_t p_{xy} = S_{T_{xy}}(t) = \Pr(\min\{T_x, T_y\} > t)$$

$$= \Pr(T_x > t, T_y > t) = S_{T_x, T_y}(t, t)$$

$${}_t q_{xy} = 1 - {}_t p_{xy} = \Pr(T_x \leq t \cup T_y \leq t)$$

≡ Statut dernier survivant

› Dénuté \overline{xy} , (\overline{xy}) ou $\overline{x : y}$.

$$T_{\overline{xy}} = \max\{T_x, T_y\}$$

De plus :

$${}_t q_{\overline{xy}} = F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \Pr(\max\{T_x, T_y\} \leq t)$$

$$= \Pr(T_x \leq t, T_y \leq t) = F_{T_x, T_y}(t, t)$$

$${}_t p_{\overline{xy}} = 1 - {}_t q_{\overline{xy}} = \Pr(T_x > t \cup T_y > t)$$

Relations entre probabilités

$${}_t q_{xy} = \Pr(T_x \leq t \cup T_y \leq t) = \Pr(T_x \leq t) + \Pr(T_y \leq t) - \Pr(T_x \leq t, T_y \leq t)$$

$$= {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{xy}}$$

$${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy}$$

Relations entre variables aléatoires

En gros, (xy) plus (\overline{xy}) est égale à la somme de (x) et (y) avec ces 3 relations principales :

$$T_{xy} \times T_{\overline{xy}} = T_x \times T_y$$

$$T_{xy} + T_{\overline{xy}} = T_x + T_y$$

$$a^{T_{xy}} + a^{T_{\overline{xy}}} = a^{T_x} + a^{T_y}$$

Puis :

$${}_t q_{xy} + {}_t q_{\overline{xy}} = {}_t q_x + {}_t q_y$$

$$\ell_{xy} + \ell_{\overline{xy}} = \ell_x + \ell_y$$

$$\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$

$$\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$

D'autres notations

$$\Pr \left(\begin{array}{l} (x) \text{ et } (y) \text{ sont en vie au} \\ \text{temps } u, \text{ mais qu'au moins} \\ \text{l'un décède au cours des } t \\ \text{prochaines années} \end{array} \right) = \Pr(u < T_{xy} \leq u+t) = {}_u|tq_{xy}$$

$$\begin{aligned} \Pr \left(\begin{array}{l} (x) \text{ meurt avant le temps } t \\ \text{et avant } (y) \end{array} \right) &= \Pr(T_x \leq t, T_x < T_y) = {}_tq_{xy}^1 \\ &= \int_0^t ({}_sp_{xy}^{00})(\mu_{x+s:y+s}^{02})ds \\ &= \int_0^{T_x \perp T_y} \underbrace{({}_sp_x)}_{(x) \text{ et } (y) \text{ survivent}} \underbrace{({}_sp_y)}_{(x) \text{ meurt}} \underbrace{\mu_{x+s}}_{(x) \text{ meurt}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr \left(\begin{array}{l} (x) \text{ meurt avant le temps } t \\ \text{et après le décès de } (y) \end{array} \right) &= \Pr(T_x \leq t, T_y < T_x) = {}_tq_{xy}^2 \\ &= \int_0^t ({}_sp_{xy}^{01})(\mu_{x+s}^{13})ds \\ &= \int_0^{T_x \perp T_y} \underbrace{({}_sp_x)}_{(x) \text{ survie jusqu'à}} \underbrace{\mu_{x+s}}_{s \text{ puis décède}} \underbrace{({}_sq_y)}_{(y) \text{ décède avant } s} ds \end{aligned}$$

$$\Pr((x) \text{ meurt avant } (y)) = \Pr(T_x < T_y) = {}_\infty q_{xy}^1$$

Relations

$$\begin{array}{lll} \underbrace{{}_tq_{xy}^1}_{\text{probabilité que } (x) \text{ décède en premier d'ici } t \text{ années}} & + & \underbrace{{}_tq_{xy}^2}_{\text{probabilité que } (x) \text{ décède en deuxième d'ici } t \text{ années}} = \underbrace{{}_tq_x}_{\text{la probabilité que } (x) \text{ décède d'ici } t \text{ années}} \\ \underbrace{{}_tq_{xy}^1}_{\text{probabilité que } (x) \text{ décède en premier d'ici } t \text{ années}} & + & \underbrace{{}_tq_{xy}^1}_{\text{probabilité que } (y) \text{ décède en premier d'ici } t \text{ années}} = \underbrace{{}_tq_{xy}}_{\text{la probabilité que un parmi } (x) \text{ et } (y) \text{ décède d'ici } t \text{ années}} \end{array}$$

Force de mortalité

$$\begin{aligned} \mu_{xy}(t) &= \frac{f_{T_{xy}}(t)}{S_{T_{xy}}(t)} \\ \mu_{\overline{xy}}(t) &= \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{S_{T_{\overline{xy}}}(t)} = \frac{f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}} \end{aligned}$$

Si $T_x \perp T_y$,

$$\mu_{x+t:y+t}^{01} = \mu_{y+t}^{23} = \mu_{y+t}$$

$$\mu_{x+t:y+t}^{02} = \mu_{x+t}^{13} = \mu_{x+t}$$

$$\mu_{x+t:y+t}^{03} = 0$$

Puis (voir la preuve à la page 15 des notes de cours du chapitre 11)

$${}_sp_{xy} = {}_sp_x {}_sp_y$$

$${}_sq_{\overline{xy}} = {}_sq_x {}_sq_y$$

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

Contrats d'assurance et de rente

Contrat de rente continue vie entière émis à (x, y)

La rente de 1\$ est versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_{xy} dt$$

La rente de 1\$ est versée jusqu'au deuxième décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_{\overline{xy}} dt$$

Contrat d'assurance continue vie entière émis au statut (x, y)

La prestation de décès de 1\$ est versée au moment du deuxième décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_{\overline{xy}} \mu_{x+t:y+t} dt$$

Contrat d'assurance continue temporaire n années émis au statut (x, y)

La prestation de décès de 1\$ est versée au moment du premier décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) dt$$

La prestation de décès de 1\$ est versée au moment du deuxième décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} \mu_{\overline{xy}}(t) dt$$

Relations

$$\begin{aligned} {}_k|q_{xy} &= {}_{k+1}q_{xy} - {}_kq_{xy} \\ &= {}_k p_{xy} - {}_{k+1} p_{xy} \\ &= ({}_k p_{xy})(q_{x+k:y+k}) \because {}_{m+n} p_{xy} = ({}_m p_{xy})({}_n p_{x+m:y+m}) \\ {}_k|q_{\overline{xy}} &= {}_{k+1}q_{\overline{xy}} - {}_kq_{\overline{xy}} \\ &= {}_k p_{\overline{xy}} - {}_{k+1} p_{\overline{xy}} \\ &\neq ({}_k p_{\overline{xy}})(q_{\overline{x+k:y+k}}) \because {}_{m+n} p_{\overline{xy}} \neq ({}_m p_{\overline{xy}})({}_n p_{\overline{x+m:y+m}}) \end{aligned}$$

Contrat d'assurance discret vie entière émis au statut (x, y)

La prestation de décès de 1\$ est versée à la fin de l'année du premier décès parmi (x) et (y) .

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \underbrace{\Pr(K(xy) = k)}_{{}_k|q_{xy}}$$

La prestation de décès de 1\$ est versée à la fin de l'année du deuxième décès parmi (x) et (y) .

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \underbrace{\Pr(K(\overline{xy}) = k)}_{{}_k|q_{\overline{xy}}}$$

Contrat de rente discret vie entière émis à (x, y)

La rente de 1\$ est versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{xy}$$

La rente de 1\$ est versée jusqu'au deuxième décès parmi (x) et (y) .

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{\overline{xy}}$$

Contingent Insurance

Discret

Notation

\bar{A}_{xy}^1 Prime unique nette d'un contrat d'assurance vie entière continue versant 1\$ au décès de (x) s'il advient avant celui de (y) .

\bar{A}_{xy}^2 Prime unique nette d'un contrat d'assurance vie entière continue versant 1\$ au décès de (y) s'il advient après celui de (x) .

$$\bar{A}_{xy}^1 = E \left[v^{T_x} \times \mathbf{1}_{\{T_x < T_y\}} \right] = \int_0^\infty v^t ({}_t p_x) ({}_t p_y) (\mu_{x+t}) dt$$

$$\bar{A}_{xy}^2 = E \left[v^{T_y} \times \mathbf{1}_{\{T_x < T_y\}} \right] = \int_0^\infty v^s ({}_s q_x) ({}_s p_y) (\mu_{y+s}) ds$$

Relations

$$\bar{A}_{xy} = \bar{A}_{xy}^1 + \bar{A}_{xy}^2$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_{xy}^2 + \bar{A}_{xy}^1$$

$$\bar{A}_x = \bar{A}_{xy}^1 + \bar{A}_{xy}^2$$

Continue

$$A_{xy}^1 = E \left[v^{K_x+1} \times \mathbf{1}_{\{T_x < T_y\}} \right] = \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} ({}_k p_{xy}) (q_{x+k:y+k}^1)$$

Reversionary Annuity (pension de réversion)

Historique

Produit originalement créé dans le temps que les hommes travaillent et les femmes restaient à la maison. C'était une assurance contre le risque que le mari décède et que la femme ne se retrouve avec aucune source de revenus. Le produit fournissait donc une rente afin que la femme puisse continuer de survivre sans le salaire de son mari.

Notation

$\bar{a}_{x|y}$ Valeur actualisée d'une *pension de réversion* dont la rente est versée à un taux continu de 1\$ au statut (y) à compter de la déchéance du statut (x) .

$$\bar{a}_{x|y} = \int_0^\infty v^s ({}_s p_{x:y}) (\mu_{x+s}) \bar{a}_{y+s} ds$$

$$= \int_0^\infty v^s ({}_s p_y) ({}_s q_x) ds$$

$$= \bar{a}_y - \bar{a}_x$$

$$a_{x|y} = \sum_{k=1}^\infty v^k {}_k p_y ({}_k q_x)$$

$$= a_y - a_{xy} \equiv \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

Une annuité ayant une pension de 1\$ payable à (y) à compter du décès de (x) s'il survient avant n :

$$\bar{a}_{x|y:\overline{n}|} = \int_0^n v^s ({}_s p_x) (\mu_{x+s}) ({}_s p_y) \bar{a}_{y+s} ds$$

