# Contributeurs

**ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II**

**aut.** Nicholas Langevin
**aut.** Gabriel Crépeault-Cauchon
**aut.** Alexandre Turcotte
**aut., cre.** Alec James van Rassel
**src.** Ilie-Radu Mitric

# Rappels

## Approximation Woolhouse

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

## Hypothèse DUD

### Assurance

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

$$A^{(m)}_{x::\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

### Rentes

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_nE_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

où :

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

## Relations

### Assurance

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$$

### Rente

$$\begin{aligned} {}_{n|}\ddot{a}_x &= {}_nE_x\ddot{a}_{x+n} \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \underbrace{v^{\frac{1}{m}}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x}_{{}_{\frac{1}{m}}E_x}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{m}:\overline{n-\frac{1}{m}}|}$$

## Mortalité

### Tables

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$$

$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \qquad {}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_tp_x = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}$$

### Sélection à l'âge $[x]$

$$\begin{aligned} \bar{A}^{\,1}_{[x]+h:\overline{n-h}|} &= \int_0^{n-h} \mathrm{e}^{-\delta t}\,{}_tp_{[x]+h}\mu_{[x]+h+t}dt \\ &= \int_h^n \mathrm{e}^{-\delta(s-h)}\frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hp_{[x]}}\mu_{[x]+s}ds \end{aligned}$$

$${}_sq_x = sq_x,\ s \in (0,1)$$

# 1 Calcul de réserve

## Notation

${}_hL$ : Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge $(x)$ au temps $h$.

- Puisque la perte est évaluée au temps $h$, on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :
  ${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$

${}_hV$ : Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge $(x)$ au temps $h$.

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :
  ${}_hV = \text{E}[{}_hL]$

${}_hV^g$ : Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$ : Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

${}_hV^I$ Réserve initiale au début de l'année $h$ ;
${}_hV^I = {}_hV + \pi$

$VP_{@h}$ : La valeur présente au temps $h$.

$VPA_{@h}$ : La valeur présente anticipée au temps $h$.
$VPA_{@t} = \text{E}[VP_{@h}]$

### Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$$
\begin{aligned}
{}_hL &= MZ_{x+h} - \pi \ddot{Y}_{x+h} \\
\text{Var}({}_hL) &= \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+h} - (A_{x+h})^2\right] \\
{}_hV^n &= MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h} \\
&\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}
\end{aligned}
$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$$
\begin{aligned}
{}_hV^n &\overset{PEP}{=} M\left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right] \\
&\overset{PEP}{=} M\left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right]
\end{aligned}
$$

### Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$$
{}_hL = b_{K_{x+h}+h+1} v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h} v^i
$$

$$
{}_hV^n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1} v^{j+1} {}_jp_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h} v^i {}_jp_{x+h}
$$

**Note**

- La prestation $b$ est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps $h$, il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

## Calcul de réserves

### Méthodes d'évaluation de la réserve

**Prospective**

$$
\begin{aligned}
{}_hV^g = {} & VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{prestations futures} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
& + VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{frais futurs} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
& - VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{primes futures} \\ \text{à recevoir}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**Rétrospective**

$$
{}_hV^g = \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x} + \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{primes recues} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x} - \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{prestations à payer} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x}
$$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte $n$ années :

**Méthode prospective** ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

**Méthode rétrospective** ${}_hV^n = 0 + \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA^{\ 1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer avant $h$.

**Relation :** $\{T_x - t | T_x > t\} \overset{d}{=} T_{x+t}$ où $\overset{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

### Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$$ {}_{h}V^{n} = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^{n} + q_{x+h}b_{h+1}\right] v - \pi_{h} $$
$$ {}_{h}V^{g} = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^{n} + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})\right] v - (G_{h} - e_{h}) $$

La réserve pour l'année $h$ est composée de :

- La réserve au temps $h+1$ si l'assuré survie l'année $h$ et
- la prestation payable (et frais encourus) à $h+1$ si l'assuré décède lors de l'année $h$,
- actualisés de $h+1$ à $h$,
- moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année $h$.

où

$G_h$ La prime (*gross premium*) à recevoir à $t = h$;

$e_h$ Les frais reliés à la collecte de la prime (*per premium expenses*);

$E_h$ Les frais reliés au paiement de la prestation (*settlement expenses*).

Avec la réserve pour l'année $h+1$ isolée :

$$ {}_{h+1}V^{g} = \frac{({}_{h}V^{g} + G_{h} - e_{h})(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}} $$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h+1$ isolé :

$$ \underbrace{\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^{g}\right)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_{h}V^{g} + G_{h} - e_{h})(1+i) - {}_{h+1}V^{g} $$

**Note** Si on a une assurance mixte dont la prestation est fonction de la réserve (e.g., $b_k = 1000 + {}_{k}V$), on commence de la fin puisqu'on sait que ${}_{n}V = M$.

### Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$$ {}_{h+s}V^{g} \approx \left({}_{h}V^{g} + G_{h} - e_{h}\right)(1-s) + \left({}_{h+1}V^{g}\right)(s),\; s \in (0,1) $$

## Profit de l'assureur

**Notation**

$N_h$ : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps $h$.

${}_{h+1}V^{E}$ : Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt ($i$), la mortalité ($q_{x+h}$) et les frais ($e_h$ et $E_h$) **espérés** (**E**xpected) pour l'année $h$.

${}_{h+1}V^{A}$ : Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt ($i'$), la mortalité ($q'_{x+h}$) et les frais ($e'_h$ et $E'_h$) **réellement** (**A**ctually) encourus lors de l'année $h$.

Le profit de l'assureur pour l'année $h$ sera donc ${}_{h+1}V^{A} - {}_{h+1}V^{E}$.

Si uniquement ______ change(nt), alors le profit sur ______ pour l'année $h$ est :

**les frais** $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

**l'intérêt** $N_h\left({}_{h}V^{g} + (G_h - e_h)\right)(i' - i)$.

**la mortalité** $\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^{g}\right)\left(N_h q_{x+h} - N_h q'_{x+h}\right)$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h\left({}_{h}V^{g} + (G_h - e'_h)\right)(i' - i)$.
- Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

## Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_{t}V$.

$$ \frac{\partial}{\partial t}{}_{t}V^{g} = \delta_{t}\,{}_{t}V^{g} + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_{t}V^{g})\mu_{[x]+t} $$

- Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps $t$.
- Le montant est fixe et payé au début de l'année $t$.
- Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à $t$.

on peut approximer ${}_{h}V^{g}$ avec la Méthode d'Euler :

$$ {}_{h}V^{g} = \frac{{}_{t+h}V^{g} - h\left[(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}\right]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}} $$

## Frais d'acquisition reportés

${}_{h}V^{e}$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$$ {}_{h}V^{e} = DAC_h = VPA_{@t}\,(\text{frais}) - VPA_{@t}\,(\text{primes pour les frais futurs}) $$
$$ \equiv {}_{h}V^{g} - {}_{h}V^{n} $$

- « *expense reserve* » ou « *Deferred Acquisition Costs* ».

- Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.
- Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^g = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

$P^g$ : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute $G$).

$P^n$ : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette $P$).

$P^e$ : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^g - P^n$$

## FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

$\pi_0^{FTP}$ Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} bvq_{[x]}$$

$\pi_h^{FTP}$ Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \ldots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} b\frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition.
- Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contra.
- Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple.
- Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première.

## 2 Modèles à plusieurs états

${}_kQ_t^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état $i$ au temps $t$ à l'état $j$ au temps $t+k$.

- De façon équivalente, ${}_kp_{x+t}^{ij}$.

$M_t$ État au temps $t$ parmi les $\{1,2,\ldots,r\}$ ou $\{0,1,\ldots,r\}$ états.

- De façon équivalente, $M(t)$.
- Le processus $M_t$ est une "Chaine de Markov" ssi $\forall t = 0,1,2,\ldots$ :
$$Q_t^{(i,j)} = \Pr(M_{t+1} = j|M_t = i, M_{t-1},\ldots,M_0) \quad = \Pr(M_{t+1} = j|M_t = i)$$

$\boldsymbol{Q}_t$ Matrice des probabilités de transition.

- Les transitions sont en fin d'année.
- Si la matrice :

**dépend du temps** alors $M_t$ est une chaîne de Markov **non-homogène**.

**ne dépend pas du temps** alors $M_t$ est une chaîne de Markov **homogène**.

Également, dans ce cas-ci, on dénote $\boldsymbol{Q}_t$ par $\boldsymbol{Q}$ puisque $Q_t^{ij} = Q^{ij}\,\forall t \geq 0$

${}_k\boldsymbol{Q}_t$ Matrice de $k$-étapes des probabilités de transition.

$${}_{m+n}Q_t^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{r} {}_mQ_t^{(i,k)}\,{}_nQ_{t+m}^{(k,j)}$$

### En temps continu

${}_kp_{x+t}^{ij}$ probabilité qu'un individu d'âge $x$ dans l'état $i$ au temps $x+t$ soit dans l'état $j$ (où $j$ peut être égale à $i$) au temps $x+t+k$.
$${}_kp_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(t) = j|Y_x = i)$$

${}_kp_{x+t}^{\overline{ij}}$ probabilité qu'un individu d'âge $x$ dans l'état $i$ au temps $x+t$ reste dans dans l'état $i$ continument jusqu'au temps $x+t+k$.
$${}_kp_{x+t}^{\overline{ij}} = \Pr(Y_x(s) = i, \quad \underbrace{\forall s \in [0,t]}_{\text{sans sortir et revenir}} \quad |Y_x = i)$$

$Y_x(t)$ Processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$ de l'état dont les transitions peuvent se produire à n'importe quel moment $t \geq 0$ et donc pas seulement en fin d'année.

- De façon équivalente, $Y(x+t)$.
- $Y_x(t) = i$ si l'assuré d'âge $(x)$ est à l'état $i$ au temps $t$ (ou, à l'âge $x+t$).

Il s'ensuit que ${}_kp_{x+t}^{ij} \geq {}_kp_{x+t}^{\overline{ij}}$ car :
$${}_kp_{x+t}^{ij} = {}_kp_{x+t}^{\overline{ij}} + \Pr(Y_x(t) = i, \text{après avoir sorti et revenu}|Y_x = i)$$

Donc, pour le modèle actif (0) décédé (1), on substitut ${}_tp_x$ pour ${}_tp_x^{\overline{00}}$ (ou ${}_tp_x^{00}$ puisque décéder est un état absorbant) et ${}_tq_x$ pour ${}_tp_x^{01}$ avec la nouvelle notation.

**Hypothèses**

1. Le processus stochastique $Y_t$ est une chaîne de Markov.
$$\Pr(Y_{t+s} = j|Y_t = i, Y_u, 0 \leq u < 1) = \Pr(Y_{t+s} = j|Y_t = i)$$
2. Pour toute intervalle de longueur $h$,
$$\Pr\left(\begin{array}{c}\text{2, ou plus, transitions}\\ \text{pendant une période de longueur } h\end{array}\right) = o(h)$$
   - Une fonction $g \in o(h)$ si $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.
3. Pour tous les états $i$ et $j$ et toute âge $x \geq 0$, ${}_tp_x^{ij}$ est différentiable par rapport à $t$.

$\mu_x^{ij}$ **Force de transition** de l'état $i$ à l'état $j$ pour un assuré d'âge $(x)$.
$$\mu_x^{ij} = \lim_{h\to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h},\ i \neq j$$

- Il s'ensuit que ${}_hp_x^{ij} = h\mu_x^{ij} + o(h)$.
  Donc, ${}_hp_x^{ij} \approx h\mu_x^{ij}, i \neq j$ pour $h > 0$ très petit.
- Pour le modèle actif (0) décédé (1), $\mu_x^{01}$ est la force de mortalité $\mu_x$.

**Remarques**

1. ${}_hp_x^{ii} = {}_hp_x^{\overline{ii}} + o(h)$ où $o(h)$ est la probabilité de sortir et revenir de l'hypothèse 2.
2. $${}_hp_x^{ij} \geq {}_hp_x^{\overline{ii}} \quad = 1 - \sum_{j\neq i, j=0}^{n} {}_hp_x^{ij} + o(h) \quad = 1 - h\sum_{j\neq i, j=0}^{n} \mu_x^{ij} + o(h)$$