

CONTRIBUTEURS

Variables aléatoires

Notions aléatoires

1 Notion d'expérience aléatoire

Cadre dans lequel on observe différentes actions dues au hasard.

Notation

ω Le **résultat** d'une expérience aléatoire, alias *épreuve* ou *issue*.

Ω L'**ensemble des résultats possibles**.

- › Il s'ensuit que $\omega \in \Omega$.
- › Par exemple, pour le lancer d'un dé où l'on désire savoir le résultat $\Omega = \{\text{pile, face}\}$.
- › On dénote par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'**ensemble de toutes les parties** de Ω .

2 Notion d'événement aléatoire

Événement lié à une certaine expérience aléatoire.

Un événement est tout **sous-ensemble** de Ω . Par exemple, pour l'expérience aléatoire de jeter un dé on a que l'ensemble des résultats possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement A « obtenir un nombre pair » s'écrit $A = \{2, 4, 6\}$. De ceci on déduit qu'à toute propriété définie sur Ω , on associe un sous-ensemble de Ω composé de tous les ω qui vérifient la propriété.

Algèbre de Boole des événements

Algèbre de Boole (« boolean algebra ») des événements

La classe \mathcal{E} des événements est l'**algèbre de Boole de parties** de Ω , si elle contient Ω et est stable par intersection, réunion et complémentation.

Note On dit habituellement algèbre plutôt qu'algèbre de Boole.

Opérations logiques

Les opérations logiques que l'on peut effectuer sur les événements sont :

1. Soit les événements $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, alors :
 - › $A \cup B$ est un événement réalisé ssi **au moins un** des deux est réalisé.
 - › $A \cap B$ est un événement réalisé ssi **les deux** sont réalisés simultanément.
2. \emptyset est un événement qui ne peut être réalisé appelé l'**événement impossible**. À chaque expérience, Ω est toujours réalisé et appelé l'**événement certain**.
3. $A \subset \Omega$ est un événement.
 - › Le complément A^c ou \bar{A} est appelé **événement contraire** de A et se réalise si $\omega \notin A$.
4. La **différence de deux événements** A et B est $A \setminus B = A \cap B^c$ se réalise si A est réalisé mais pas B .
5. La **différence symétrique** de A et B est $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ se réalise si l'un des deux événements est réalisé mais pas l'autre.
6. Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'événement A_n représente « **gagner n matches** », alors
 - › $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ représente « **gagner au moins un match** ».
 - › $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ représente « **ne pas gagner de matches** ».
7. Deux événements sont **incompatibles** si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
 - › On peut aussi dire que les parties de Ω représentées par A_1 et A_2 sont disjointes.
 - › Si deux événements sont incompatibles, on a une somme au lieu d'une réunion avec $A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
8. Si les événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment une **partition** de Ω , on dit que ses événements $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment un **système exhaustif** de Ω .
9. La suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :
 - croissante** ssi $A_1 \subset A_2 \subset \dots$
 - décroissante** ssi $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
10. Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements d'un ensemble Ω , on représente que :
 - une infinité de A_n est réalisé** en écrivant que, quel que soit le rang $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des événements de rang supérieur (à k) qui sont réalisés : $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.
 - un nombre fini de A_n est réalisé** en écrivant qu'il existe un rang tel qu'à partir de ce rang, tous les événements réalisés sont les contraires des événements A_n : $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c$.

Limites de suite d'événements

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω . On définit les limites inf et sup d'événements par :

$$A_* = \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$A^* = \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

De plus, si les ensembles A_* et A^* coïncident, alors on écrit $A = A_* = A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Propositions

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω .

i) Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Espaces probabilisables

Power set \mathcal{P}

Le « *power set* » \mathcal{P} est l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble Ω ; il est plus facile de donner un exemple que d'expliquer en mots.

Exemple de « *power set* »

Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \{\} \\ \{a\}, \{b\}, \{c\} \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \\ \{a, b, c\} \end{array} \right\}$$

Pour un ensemble de n éléments, il y aura 2^n sous-ensembles possibles. Ceci découle du binaire! Voir [cette page](#) pour plus d'information.

Note En anglais, on appelle la tribu \mathcal{A} composée des « *events* » le « *event space* » et l'ensemble Ω composé des « *outcomes* » le « *sample space* ».

Tribu d'événements

La tribu (ou σ -algèbre) sur un ensemble Ω est un ensemble \mathcal{A} de parties de Ω tel que :

- i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.
- iii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} , alors l'événement $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Espace probabilisable (ou mesurable)

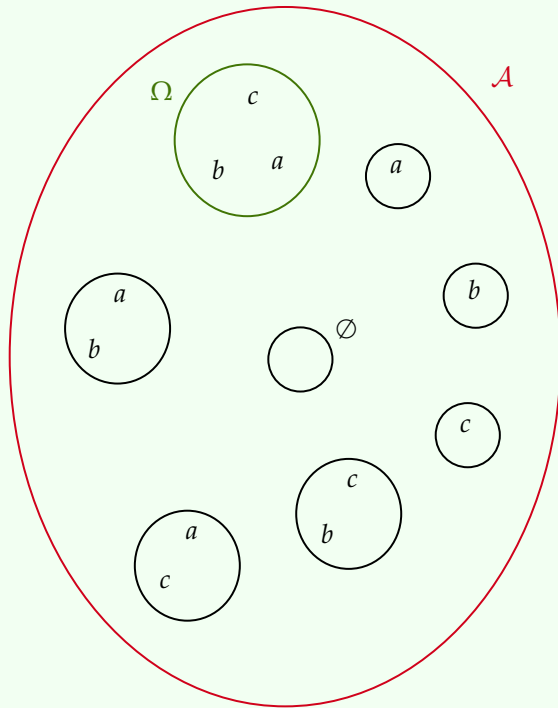
Le couple (Ω, \mathcal{A}) composé d'un ensemble Ω et une tribu \mathcal{A} sur Ω .

Les éléments de Ω sont appelés *éventualités* (« *outcomes* ») et les éléments de \mathcal{A} *événements* (« *events* »).

> En anglais, on dit « *measurable space* ».

Visualisation

Voici une visualisation de ce que représente l'espace mesurable :



On peut donc visualiser les 3 conditions dans la définition de la tribu. L'ensemble Ω est contenu, tous les événements possibles (alias toutes les combinaisons de $\{a, b, c\}$ possibles) sont contenus et tous leurs compléments sont contenus. Finalement, toute union d'événements sera contenue dans la tribu !

c) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite d'événements de \mathcal{A} , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}$.

d) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite d'événements de \mathcal{A} , alors $\liminf A_n \in \mathcal{A}$.

e) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite d'événements de \mathcal{A} , alors $\limsup A_n \in \mathcal{A}$.

Note Voir la page 19 des notes de cours du chapitre 1 pour les preuves.

✓ Propriétés de la tribu

Soit \mathcal{A} une tribu sur Ω . Alors :

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}$.

Variables aléatoires

Variable aléatoire

On définit une **variable aléatoire** comme une *fonction mesurable*. Pour ce faire, on définit 2 espaces mesurables :

1. On pose que le premier est (Ω, \mathcal{A}) .
2. On pose que le deuxième est tout ensemble E et sa tribu $\mathcal{E} : (E, \mathcal{E})$.
 > Habituellement, on pose que $E = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Une fonction mesurable est une fonction qui associe les éléments de Ω aux éléments de E avec quelques propriétés additionnelles. On note qu'en associant les éléments de Ω , la fonction associe les *éventualités* et non les *événements* aux éléments de E .

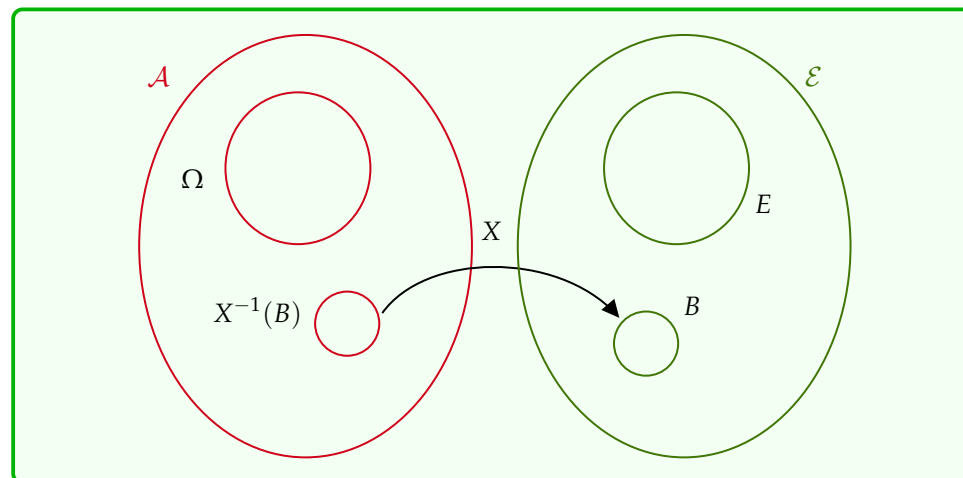
On désire avoir une correspondance entre les événements réalisés de \mathcal{A} et l'ensemble transformé d'événements \mathcal{E} . Pour ce faire, on impose que la variable aléatoire (alias, la fonction mesurable) $X : \Omega \rightarrow E$ est définie telle que l'image réciproque $X^{-1}(B)$ sur Ω de tout ensemble $B \in \mathcal{E}$ sur E :

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{E}.$$

Donc, une **variable aléatoire réelle** est toute application à valeurs réelles $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, \forall intervalle B de \mathbb{R} , $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ soit un événement de la tribu \mathcal{A} .

Visualisation

On peut visualiser que l'événement B , où $B \in \mathcal{E}$, a un réciproque $X^{-1}(B)$ où $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.



En posant $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on obtient la *tribu borélienne*.

Tribu borélienne

La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la plus petite tribu de \mathbb{R} qui contient tous ses intervalles. Les éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sont appelés les *boréliens* de \mathbb{R} .

Pour une v.a. réelle X , $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ on a $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Bref, $(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. On dit que la tribu $X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sur Ω est la *tribu des événements engendrés par X* .

Probabilités

Mesure

Pour un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) , une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ s'appelle une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) si :

1. Elle attribue une masse de zéro à l'ensemble vide : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Elle est « *countably additive* » : $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{A}$.

Mesure de probabilité

Pour un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) , on appelle **probabilité** sur (Ω, \mathcal{A}) toute application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- i) $P(\Omega) = 1$.
- ii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n).$$

La mesure de probabilité est donc une mesure qui est **restreint** sur $[0, 1]$.

Espace probabilisé

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) s'appelle un **espace probabilisé** et est composé de :

Ω Le « *sample space* ».

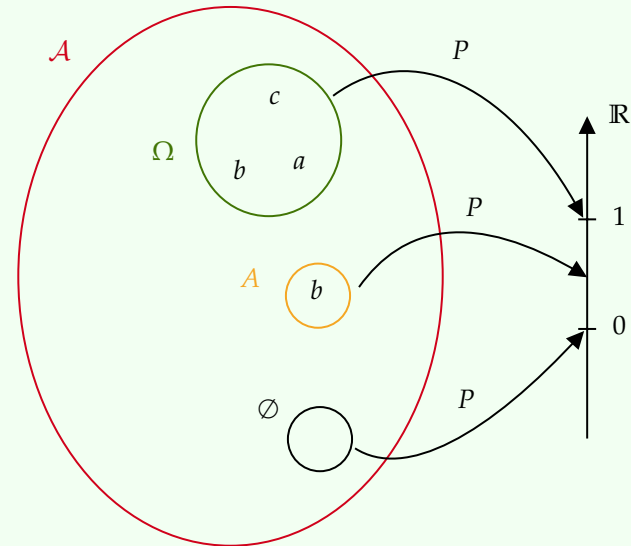
\mathcal{A} Le « *event space* ».

P La **mesure de probabilité**.

> En anglais, on dit « *probability space* ».

Visualisation

Voici une visualisation de ce que représente l'application P :



On peut donc visualiser les 2 conditions dans la définition de l'espace probabilisé. La probabilité d'observer l'ensemble Ω est de 1 car il contient tous les événements possibles. La probabilité d'un événement sera contenue entre 0 et 1 ce qui veut dire que la probabilité de quelques événements *disjoints* correspond à la somme des probabilités.

On complète la notion précédente sur l'espace borélien avec $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ où P_X est appelée loi de probabilité de X . On définit $P_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$.

✓ Propriétés des probabilités

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Alors :

- $P(\emptyset) = 0$.
- Si A et B sont des événements disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Si A et B sont des événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont des événements tels que $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ et $P(A) \leq P(B)$.
- $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements quelconques, alors $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow \emptyset$, alors $P(A_n) \downarrow 0$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow A$, alors $P(A_n) \downarrow P(A)$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \uparrow A$, alors $P(A_n) \uparrow P(A)$.

Lemmes de Borel-Cantelli

📖 Lemme de Borel-Cantelli (1ère partie)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements telle que : $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, alors

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

Probabilité conditionnelle

📄 Formule de Bayes (2 événements)

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , A et B deux événements de \mathcal{A} tels que $\Pr(A) \neq 0$, $\Pr(A^c) \neq 0$ et $\Pr(B) \neq 0$. Alors :

$$\Pr(A \setminus B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B|A) \Pr(A) + \Pr(B|A^c) \Pr(A^c)}$$

📄 Théorème des probabilités totales

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition de Ω telle que $\forall i, \Pr(A_i) \neq 0$. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$, $\Pr(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \Pr(B|A_i) \Pr(A_i)$.

📄 Formule de Bayes (n événements)

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et $(A_i)_{i=1,2,\dots,n}$ une partition **finie** de Ω telle que $\forall i, \Pr(A_i) \neq 0$. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$ tel que $\Pr(B) \neq 0$,

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(B|A_i) \Pr(A_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(B|A_j) \Pr(A_j)}$$

Indépendance

Indépendance (2 événements)

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , A et B deux événements de \mathcal{A} . Alors A et B sont indépendants pour la probabilité P **si et seulement si** $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$.

Il est important de bien saisir que la notion d'indépendance n'est pas intrinsèque aux événements, mais *dépend* de la probabilité P choisie sur (Ω, \mathcal{A}) . Deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité, mais être dépendants pour une autre.

Propriétés (2 événements)

- 1 A^C et B sont indépendants.
- 2 A et B^C sont indépendants.
- 3 A^C et B^C sont indépendants.

Indépendance (n événements)

Soient (A_1, \dots, A_n) un n -uplet d'événements. On dit qu'ils sont **indépendants**, ou *mutuellement indépendants*, **si et seulement si** $\forall k = 1, \dots, n$, si \forall sous-ensemble $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ de k événements choisis parmi les (A_1, \dots, A_n) , on a $\Pr(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \Pr(A_{i_1}) \times \dots \times \Pr(A_{i_k})$.

Indépendance (suite d'événements)

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , et une suite d'événements indépendants $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de \mathcal{A} . Alors on a $\Pr\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \Pr(A_n)$.

Lemme de Borel-Cantelli (2ème partie)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, et une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendants de \mathcal{A} telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) = \infty$, alors $\Pr(\limsup_n A_n) = 1$.