Contributeurs

ACT-2004 Mathématiques actuarielles vie I

aut. Nicholas Langevin
aut. Gabriel Crépeault-Cauchon
aut., cre. Alec James van Rassel
src. Claire Bilodeau

Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

Où les dénominateurs sont à être interprété en REGEX.
Pour exemple, pour la première c'est soit le taux d'escompte pour une une annuité due ou le taux d'intérêt pour une immédiate.

$$a(t) = (1+i)^t = (1-d)^{-t} = e^{\int_0^t \delta_s ds} \qquad v(t) = (1+i)^{-t} = (1-d)^t = e^{-\int_0^t \delta_s ds}$$

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \qquad d = \frac{i}{1+i} \qquad i^R = \frac{i-r}{1+r}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{(i|d)}$$

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - n}{(i|d^{(m)})} \qquad (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

Sommations

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 Survie et mortalité

1.2 Probabilités de survie et de décès

(x) Dénote une personne d'âge x;

μ_x : Force de mortalité pour un individu d'âge x.

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(S_x(x))\Big)$$

Durée de vie future restante T_x

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire continue T_x représente le temps restant avant de décéder.

- **L'âge-au-décès** pour (x) est alors $x + T_x$;
- Pour un nouveau-né avec $(x) = (0)$, on dénote $T_x = T_0 \equiv X$;
- Donc, on ne conditionne par sur l'obtention d'un certain âge et $F_{T_0}(x) \equiv F_X(x)$.

$F_{T_x}(t)$ La probabilité que (x) ne survive pas passé l'âge de $x+t$ ans;
- En anglais, nous l'appelons « *the lifetime distribution from age x* »;
- On dénote $\boxed{F_{T_x}(t) = \Pr(T_x \leq t) = {}_tq_x}$;
- On pose que $\boxed{\Pr(T_x \leq t) \equiv \Pr(T_0 \leq x+t | T_0 > x)}$.

Avec cette hypothèse, on trouve les relations suivantes $\boxed{\text{pour } t \geq 0}$:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &\equiv \Pr(T_x \leq t) \\ &= \Pr(T_0 \leq x+t | T_0 > x) \equiv \Pr(X \leq x+t | X > x) \\ &= \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \equiv \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)} \end{aligned}$$

$S_{T_x}(t)$ La probabilité que (x) survive pour au moins t années, surnommée la **fonction de survie**.
- On dénote $\boxed{S_{T_x}(t) = \Pr(T_x > t) = {}_tp_x}$.

Avec cette notation, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Pr(t < T_x \leq t+u) &= {}_{t|u}q_x \\ &\equiv {}_tp_x\, {}_uq_{x+t} \\ &\equiv {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ {}_{t+y}q_x &= {}_tq_x + {}_tp_x\, {}_yq_{x+t} \end{aligned}$$

Durée de vie entière future restante K_x

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **discrète** K_x représente le nombre d'années restantes avant de décéder.

- On peut penser à K_x comme le nombre d'années entières restantes à vivre pour l'individu d'âge x;
- On a donc que $\boxed{K_x = \lfloor T_x \rfloor}$;
- Il s'ensuit que $\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = \Pr(k \leq T_x < k+1)$;
- On dénote $\boxed{\Pr(K_x = k) = {}_{k|}p_x}$.

Partie de l'année du décès vécue R_x

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **continue** R_x représente la portion de l'année du décès vécue.

- On a donc que $\boxed{R_x = T_x - K_x}$.

Durée de vie entière future restante en m^e d'années $H_x^{(m)}$

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **discrète** $H_x^{(m)}$ représente le nombre de m^e d'années restant avant le décès.

- On a donc que $\boxed{H_x^{(m)} = \lfloor mT_x \rfloor}$.

Fraction de l'année du décès vécue $J_x^{(m)}$

Pour un individu d'âge x, la variable aléatoire **discrète** $J_x^{(m)}$ représente le nombre de m^e d'années vécus lors de l'année du décès.

- On a donc que $\boxed{H_x^{(m)} = \lfloor mR_x \rfloor}$.

Exemple : Soit un décès au temps $T_x = 14.5$, on a :

$$\begin{aligned} K_x &= \lfloor 14.6 \rfloor = 14 \\ R_x &= 14.6 - 14 = 0.6 \\ J_x^{(12)} &= \lfloor 12 \times 0.6 \rfloor = \lfloor 7.2 \rfloor = 7 \\ H_x^{(12)} &= \lfloor 12 \times 14.6 \rfloor = \lfloor 175.2 \rfloor = 175 \end{aligned}$$

En bref :

$$\begin{aligned} T_x &\in \mathbb{R}^+ \\ K_x &\in \{0,1,2,\ldots\} \\ R_x &\in [0,1) \\ H_x^{(m)} &\in \{0,1,2,\ldots\} \\ J_x^{(m)} &\in \{0,1,2,\ldots,m-1\} \end{aligned}$$

Relations

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ln({}_tp_x)\Big) \\ \alpha\mu_{x+s} + h(s) &= ({}_tp_x)^\alpha e^{-\int_0^t h(s)ds} \\ {}_tp_x &= \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right\} \\ &\equiv \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu_s ds\right\} \\ f_{T_x} &= {}_tp_x \mu_{x+t} \end{aligned}$$

1.3 Lois de mortalité

Loi de Moivre

Pas très réaliste car on suppose que la chance de mourir est **uniforme** alors qu'en réalité une personne âgée de 90 ans a de plus grandes chances de mourir qu'un jeune de 30 ans. C'est la seule loi avec un **support fini**.

$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$

$$_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x} \qquad \mu_x = \frac{1}{\omega - x} \qquad _{k|}q_x = \frac{1}{\omega - x}$$

Généralisation :

$$_tp_x = \left(1 - \frac{t}{\omega - x}\right)^{\alpha} \qquad \mu_x = \frac{\alpha}{\omega - x}$$

$$\mathring{e}_x = \frac{\omega - x}{\alpha + 1}$$

Loi Exponentielle

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \qquad _tp_x = e^{-\mu t}$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu) \Rightarrow K_x \sim \text{Géo}(p = 1 - e^{-\mu})$$

Loi de Makeham

$$X \sim \text{Makeham}(A, B, c)$$

A risque d'accident;

Bc^x risque lié au vieillissement.

$$\mu_x = A + Bc^x \qquad _tp_x = \mathrm{e}^{-At - \frac{Bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)}$$

Loi de Gompertz

$$X \sim \text{Makeham}(A = 0, B, c) \Leftrightarrow X \sim \text{Gompertz}(B, c)$$

Loi de Weibull

$$X \sim \text{Weibull}(k, n)$$

$$\mu_x = kx^n \qquad _tp_x = e^{-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]}$$

1.4 Tables de mortalité

Notation

ℓ_0 Nombre d'individus initial dans une cohorte;

ℓ_x Nombre d'individus de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x;

$_nd_x$ Nombre de décès entre l'âge x et $x + n$.

$$\ell x = \sum_{y=x}^{\omega-1} d_y$$

$$_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x} \qquad _tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$$_{t|u}q_x = \frac{_ud_{x+t}}{\ell_x}$$

1.5 Mortalité sélecte et ultime

Notation

$[x]$ Âge à la sélection (*pas une valeur entière*);

r **Période sélecte** de durée r durant laquelle les effets de la sélection sont significatifs après laquelle :

$$q_{[x]+j} = q_{x+j} \forall j = r, r+1, r+2, \ldots$$

$$\ell_{[x]+r+j} = \ell_{[x]r+j}p_{[x]} = \ell_{[x]r}p_{[x]j}p_{x+r}$$

1.6 Hypothèses pour les âges fractionnaires

Si nous avons uniquement de l'information sur la mortalité en temps discret (alias, K_x) on peut estimer la mortalité T_x avec des hypothèse pour les âges fractionnaires.

Distribution uniforme des décès (DUD)

- En anglais, « *Uniform Distribution of Deaths (UDD)* »;
- Les décès sont répartis uniformément sur l'année;
- Une mortalité qui suit la loi de De Moivre implique une DUD, mais une DUD n'implique pas une mortalité qui suit la loi de De Moivre.

L'hypothèse d'une DUD est en fait l'interpolation linéaire, $\boxed{\forall t \in [0,1]}$:

$$S_X(x + t) = (1 - t) \times S_X(x) + t \times S_X(x + 1)$$

On peut généraliser l'interpolation pour un intervalle c de plus d'un an, $\boxed{\forall t \in [0, c]}$:

$$S_X(x + t) = \frac{(c - t)}{c} \times S_X(x) + \frac{t}{c} \times S_X(x + 1)$$

- Par exemple, si la mortalité est disponible en groupes d'âges quinquennaux, on pose $c = 5$.

On trouve les formules types où habituellement $c = 1$:

$$_tq_x = \left(\frac{t}{c}\right) {_cq_x}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{c} {_cq_x}}{1 - \frac{t}{c} {_cq_x}}$$

$$_yq_{x+t} = \frac{\left(\frac{y}{c}\right) {_cq_x}}{1 - \left(\frac{t}{c}\right) {_cq_x}}$$

sous condition que $t \in [0, c]$, $x \in \{0, c, 2c, \ldots\}$, et $y \in [0, c - t]$.

- La force de mortalité à la même formule que la fonction de survie sous **DUD** car la *force de mortalité est appliquée uniformément*.

Force constante de mortalité (FC)

- En anglais, « *Constant Force of Mortality* »;
- On peut visualiser la force de mortalité comme étant une fonction en escalier—elle peut uniquement changer aux années entières;
- La force de mortalité est donc dite d'être "constante localement sur chaque année d'âge".

L'hypothèse d'une FC est en fait l'interpolation exponentielle, $\boxed{\forall t \in [0,1]}$:

$$S_X(x+t) = (S_x(x))^{1-t} + (S_x(x+1))^t$$

On peut généraliser l'interpolation pour un intervalle c de plus d'un an, $\boxed{\forall t \in [0,c]}$:

$$S_X(x+t) = (S_x(x))^{\frac{(c-t)}{c}} + (S_x(x+c))^{\frac{t}{c}}$$

On trouve les formules types où habituellement $c = 1$:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{c}\ln({}_cp_x)$$

$${}_yq_{x+t} = 1 - ({}_cp_x)^{\frac{y}{c}}$$

sous condition que $t \in [0,c]$, $x \in \{0,c,2c,\ldots\}$, et $y \in [0,c-t]$.

Notes sur les durées de vies

Sous l'hypothèse de **DUD**, on pose que la mortalité au courant d'une année est uniforme ; la probabilité de décéder est la même peu importe le moment de l'année. Puisque R_x est la mortalité au courant de l'année, il s'ensuit qu'elle est indépendante de K_x ; alias, $\boxed{K_x \overset{DUD}{\perp} R_x}$.

Sous l'hypothèse de la **force constante**, on peut penser à la force de mortalité comme une fonction en forme d'escalier. Elle peut uniquement changer aux années entières. Alors, K_x et R_x seront uniquement indépendantes si la probabilité de décès est la même peu importe l'âge atteint (par exemple, si la mortalité suit une loi géométrique). Dans ce cas rare, on dit que $\boxed{\text{si } p_{x+k} = p_x,\ \forall k \in \{0,1,\ldots\}}$ alors $\boxed{K_x \overset{FC}{\perp} R_x}$.

1.7 Caractéristiques individuelles

1.7.1 Cas continu (T_x)

Dans le cas où l'on connaît la fonction de densité ou répartition, on peut obtenir l'information "complète" (alias, continu) sur la mortalité d'un assuré d'âge x.

Notation

$\mathring{e}_x$ Espérance de vie complète pour un individu d'âge x ;
- En anglais, « *complete-expectation-of-life* » ;
- On dit "complète" puisqu'on intègre sur la durée de vie future continue ("complète") T_x de l'assuré.

$m(x)$ La durée médiane de vie future pour un individu d'âge x.
- En anglais, « *median future lifetime* » ;
- $m(x)$ représente alors dans combien de temps la population âgée de x aujourd'hui aura diminue de moitié.

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x = \text{E}[T_x] &= \int_0^{\omega-x} t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\
&= \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt \qquad \text{si } \lim_{t\to\infty} t\,{}_tp_x = 0 \\
\text{Var}(T_x) &= \int_0^{\omega-x} t^2\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\
&= \int_0^{\omega-x} 2t\,{}_tp_x dt - (\mathring{e}_x)^2 \qquad \text{si } \lim_{t\to\infty} t\,{}_tp_x = 0
\end{aligned}$$

Médiane : Pour trouver la médiane $m(x)$, on l'isole de l'égalité suivante :

$$\Pr(T_x \leq m(x)) = {}_{m(x)}q_x = \frac{1}{2}$$

Mode : Le moment t où la population âgée de x aujourd'hui (ℓ_x) connaissent le plus de décès.
On cherche donc le moment t qui va maximiser $f_{T_x}(t) \equiv {}_tp_x\mu_{x+t}$, alias $\boxed{\arg\max_t {}_tp_x\mu_{x+t}}$.

Donc, on pose la dérivée égale à 0 :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{T_x}(t) = 0$$

Mais, il faut tenir en compte :

1. Les *bornes* pour s'assurer que le t en fait parti ;
2. Que le résultat est un *maximum*.

1.7.2 Cas discret (K_x)

En pratique, il est rare d'avoir une fonction qui décrit la mortalité en temps continu. Ce qui est plutôt disponible est la mortalité à des intervalles de temps sous forme d'une table ; les "caractéristiques" disponibles sont celles de K_x.

Notation

e_x Espérance de vie abrégée pour un individu d'âge x.
- En anglais, « *curtate-expectation-of-life* » ;
- On dit "abrégé" puisqu'on somme aux années entières la mortalité K_x de l'assuré.

$$\begin{aligned}
e_x = \text{E}[K_x] &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\ {}_{k|}q_x \\
&= \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \qquad \text{si } \lim_{k\to\infty}(k+1)_{k+1}p_x = 0 \\
\text{Var}(K_x) &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left\{k^2\ {}_{k|}q_x\right\} - (e_x)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \{(2k-1)\ {}_kp_x\} - (e_x)^2 \qquad \text{si } \lim_{k\to\infty}(k+1)^2{}_{k+1}p_x = 0
\end{aligned}$$

Médiane : Isoler $m(x)$ des égalités suivantes :

$$Pr[K_x < m(x)] < \frac{1}{2} \qquad Pr[K_x \leq m(x)] \geq \frac{1}{2}$$

Mode :

$$\arg\max_k \Pr[K_x = k]$$

Hypothèses fractionnaires

Liens entre les fonctions pour K_x et T_x :

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \text{E}[T_x] = E[K_x] + E[R_x] \\
&\overset{DUD}{=} e_x + \frac{1}{2} \\
\text{Var}(T_x) &= V(K_x + R_x) \overset{\perp}{=} V(K_x) + V(R_x) \\
&\overset{DUD}{=} V(K_x) + \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

1.7.3 Variables censurées

L'espérance de vie future **d'ici** n années d'un assuré d'âge x (*entre les âges x et $x+n$*).

Espérance de vie **complète** temporaire n années .

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \text{E}[T_x \wedge n] \\
&= \int_0^n t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt + n\ {}_np_x \\
&= \int_0^n {}_tp_x dt, \qquad 0 \leq x < \omega, \\
&\qquad 0 \leq n \leq \omega - x
\end{aligned}$$

Espérance de vie **abrégée** temporaire n années.

$$\begin{aligned} e_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}\left[K_x \wedge n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k_{k|}q_x + n\ {}_np_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x, \qquad 0 \leq x < \omega - 1 \\ & \qquad n \in \{0, 1, \ldots, \omega - x - 1\} \end{aligned}$$

1.7.4 Variables tronquées

L'espérance de vie future **conditionnelle** au **décès** dans les n prochaines années d'un assuré d'âge x (*entre les âges x et $x+n$*).

$$\mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq n\right] = \frac{\mathring{e}_{x:\overline{n}|} - n\ {}_np_x}{{}_nq_x}$$

$$\mathrm{E}\left[K_x | K_x \leq n\right] = \frac{e_{x:\overline{n+1}|} - (n+1)\ {}_{n+1}p_x}{{}_{n+1}q_x}$$

$$\mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq 1\right] = a(x) = \frac{e_{x:\overline{1}|} - p_x}{q_x}$$

Lien entre espérance tronquée et censurée.

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{x:\overline{n}|} &= \mathrm{E}\left[T_x | T_x \leq n\right] {}_nq_x + n\ {}_np_x \\ &= \mathrm{E}\left[K_x | K_x \leq n\right] {}_{n+1}q_x + (n+1)\ {}_{n+1}p_x \\ &\stackrel{\perp}{=} e_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_nq_x}{2} \end{aligned}$$

1.7.5 Formules de récurrence

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \mathring{e}_{x:\overline{m}|} + {}_mp_x \mathring{e}_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$e_{x:\overline{n}|} = e_{x:\overline{m}|} + {}_mp_x e_{x+m:\overline{n-m}|}, \qquad 0 \leq m \leq n \leq \omega - x$$

$$m, n, (\omega - x) \in \mathbb{W})$$

$$\begin{aligned} e_{x+n} &= p_{x+n}(1 + e_{x+n+1}) \\ &= e_{x+n:\overline{1}|} + p_{x+n} e_{x+n+1} \end{aligned}$$

1.8 Caractéristiques de groupe

$T^{(j)}$: v.a. de la jème vie, $j \in \{1, \ldots, \ell_a\}$

$$\mathscr{L}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{T^{(j)} > x-a\}}$$

$$ {}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{\ell_a} I_{\{x-a < T_a^{(j)} \leq x-a+n\}}$$

$\mathscr{L}_x$: v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x.

$$\mathrm{E}\left[\mathscr{L}_x\right] = \ell_x$$

$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_xp_0)$$

${}_n\mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$$\mathrm{E}\left[{}_n\mathcal{D}_x\right] = {}_nd_x$$

$${}_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_0, {}_{x|n}q_0)$$

$${}_n\mathcal{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}_{x+n}$$

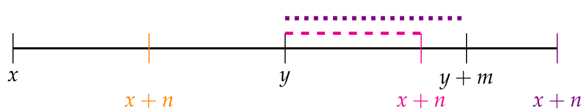
On peut ensuite généraliser $\forall\ x \geq a$

$$\mathscr{L}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a}p_a)$$

$${}_n\mathcal{D}_x \sim \mathrm{Bin}(\ell_a, {}_{x-a|n}q_a)$$

Avec les sommations on trouve :

$$\mathrm{Cov}({}_n\mathcal{D}_x, {}_m\mathcal{D}_y) = \begin{cases} -{}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & x+n \leq y \\ {}_{y-a|x+n-y}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y < x+n \leq y+m \\ {}_{y-a|m}q_a - {}_{x-a|n}q_a \cdot {}_{y-a|m}q_a, & y+m \leq x+n \end{cases}$$



Raccourci : $\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}\left[A \cap B\right] - \frac{\mathrm{E}[A]\mathrm{E}[B]}{\ell_a}$

2 Contrats d'assurance-vie

2.1 Notation et introduction

Fonctions

$a(T)$: Facteur d'accumulation.

$v(T)$: Facteur d'actualisation.

$$v(t) = \frac{1}{a(t)}$$

Z : v.a. de la valeur actualisée du montant payé selon les termes du contrat.

$$Z = z_t = b(T)v(f(T))$$

$b(T)$: Prestation prévue en fonction de T.

$f(T)$: Montant du paiement en fonction de T.
De plus, puisque $f(T)$ n'a pas d'importance lorsque $b(T) = 0$, on défini son domaine pour simplifier des interprétations plus tard.

$$f(t) \geq T$$

A : Pour simplifier la notation, on dénote la **prime unique nette *(PUN)*** par :

$$\text{E}[Z] = A_x = \int_0^{\omega-x} z_t\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Le nom vient du fait qu'elle n'est payée qu'une seule fois *(unique)* et qu'elle ne couvre que le coût des prestations *(nette)*.

Prestations

Prestation de base

$b\,A_x$ Si quelque chose est payable c'est b.

$b(IA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès à la **fin** de la *première année* de couverture.

$b(DA)_x$ Paye b lorsqu'il y a décès au **début** de la *dernière année* de couverture.

Force, ou multiple j de la, d'intérêt δ
$0 \leq \delta < 1$ et $j \in \mathbb{Z}_+$

${}^{\delta}A_x$ Évaluation avec **force** d'intérêt δ *(constante)*.

${}^{j}A_x$ Évaluation avec ***j* fois force** d'intérêt δ *(pas nécessairement constante)*.

Période différée

${}_{m|}A_x$ Couverture débutant dans n années.
Donc si décède avant les m années, il n'y a pas de paiements.

Fréquence de variation
variation m fois par année

$$(I^{(m)}A)_x \text{ et } (D^{(m)}A)_x$$

*(dé)*croissance continue

$$(\bar{I}A)_x \text{ et } (\bar{D}A)_x$$

Type de variation de la prestation

A_x Constant

$(IA)x$ Croissant arithmétiquement

$(DA)x$ Décroissant arithmétiquement

Durée temporaire de la variation

$(I_{\overline{n|}}A)_x$ Augmentation uniquement lors des n premières années de couverture.

Moment de paiement de la prestation de décès

$\bar{A}_x$ Au moment du décès.

$A_x^{(m)}$ À la fin du 1/m année du décès.
Pour exemple, si $m = 12$ alors c'est payable à la fin du mois de décès.

Couverture temporaire n années

$A^{1}_{x:\overline{n|}}$ Cas de décès.

$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$ Cas de survie.

$A_{x:\overline{n|}}$ Les deux cas.

A_x En tout temps.

Principes de calcul de la prime pour un seul contrat

Principes pour calculer la prime *(unique)* à payer pour un contrat d'assurance :

1. $\text{E}[Z]$ **principe d'équivalence**
2. $\text{E}[Z] + k\sigma_Z$
3. ξ **quantile de** Z.

Interprétations pour un seul contrat

1. En moyenne l'assureur ne fait ni gains ni pertes
2. Lorsqu'il y a plusieurs contrats, le principe est équivalent au troisième mais lorsqu'il n'y en a qu'un seul alors il ne tient pas.
3. Plus petite prime π telle que $Pr(Z \geq \pi) = p$

Principes de calcul pour un portefeuille de plusieurs contrats

Généralement, on suppose les n différents contrats Z_j d'être identique et les vies à être indépendantes *(i.i.d.)*.

$$S = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

1. Par le **principe d'équivalence**, $\text{E}[Z] = \pi$.
3. **Principe du quantile** $Pr(S \leq n\pi) \geq p$, où p est la **probabilité de solvabilité**.

Cependant, si les contrats ne sont ***pas identique***, la **prime varie** selon le contrat.

1. Pour chaque type de contrat le **principe d'équivalence** ne change pas, $\text{E}[Z] = \pi$.
3. Pour le **Principe du quantile** on veut maintenant une **surcharge égale** pour tous les contrats et donc le plus petite h telle que $Pr(S \leq h) \geq p$.

h : Prime collective sous le principe du quantile.

Doit trouver la surcharge θ qui, lorsque appliqué à chacune des espérances individuelles, donnera la prime collective au total.

θ : **Surchage**

$$\pi = (1+\theta)\text{E}[Z]$$
$$h = (1+\theta)\text{E}[S]$$

Surprime

$$\theta\text{E}[Z]$$

Puisque par défaut les Z_j sont *(iid)* on applique **l'approximation normale** avec $S \sim N(\text{E}[S] = n\text{E}[Z], V(S) = nV(Z))$.
$\Phi^{-1}(p) = z_{1-p}$

$$z_{1-p} \leq \frac{\sqrt{n}(\pi - \text{E}[Z])}{\sigma_Z}$$

$$\pi \geq \text{E}[Z] + z_{1-p}\left(\frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}\right) = \pi_p \qquad \pi\$ = \frac{\lceil 100\pi_p \rceil}{100}$$

$$n \geq \left(\frac{z_{1-p}\sigma_Z}{\pi - \text{E}[Z]}\right)^2 = n_p$$

Donc avec h on résoud $h = (1+\theta)\text{E}[Z]$ et applique la surprime à tous les assurés.

Règle des moments

$$\text{E}\left[Z^j\right] @\delta_t = \text{E}\left[b \times Z'^j\right] @\delta_t$$
$$= b^j \times \text{E}\left[Z'\right] @j \times \delta_t$$

Où $Z = bZ'$, donc Z' est la v.a. équivalente avec une prestation unitaire.
À noter que la règle est **seulement applicable** aux **prestations nivelées** et donc n'est pas applicable aux prestations variants arithmétiquement.

2.2 Payable au moment du décès

Le *montant* et *moment du paiement* ne dépendent que du **temps écoulé depuis l'émission de la police**.
De plus, toutes nos fonctions sont définies en fonction de la v.a. de la durée de vie future de l'assuré T.

Assurance à prestation nivelée

Assurance-vie entière Est en vigueur tant que l'assuré est en vie et verse une prestation au moment de son décès.

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega - x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Assurance-vie temporaire Si l'assuré décède dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Capital différé de n années Si l'assuré ***ne décède pas*** dans les n années suivant l'émission du contrat, paye une prestation de survie.
À noter qu'il est aussi connu comme le **facteur d'actualisation actuariel**.

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \Leftrightarrow A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_np_x = {}_mE_x$$

Assurance mixte Si l'assuré ***ne décède pas*** dans les n annés suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès. S'il est toujours en vie, paye une prestation de survie.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_np_x \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\end{aligned}$$

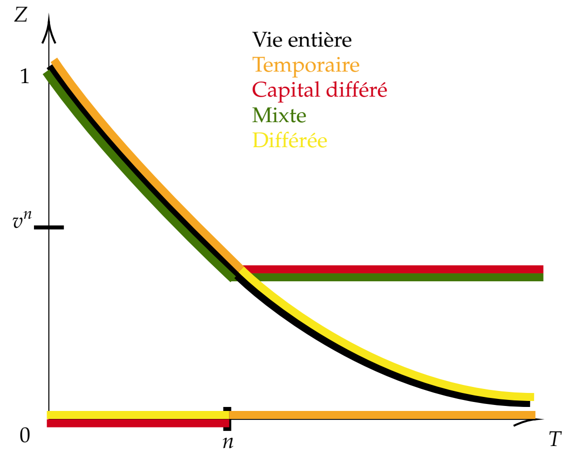
Assurance différée de m années Si l'assuré décède **après** les m année suivant l'émission du contrat, paye une prestation de décès.

$$\begin{aligned}{}_{m|}\bar{A}_x &= \int_m^{\omega - x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= v^m {}_mp_x \int_0^{\omega - x - m} v^s {}_sp_{x+m}\, \mu_{(x+m)+s}\, ds \\ &= v^m {}_mp_x \bar{A}_{x+m} = {}_mE_x \bar{A}_{x+m}\end{aligned}$$

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$${}_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|}$$

Comparaison des différents contrats

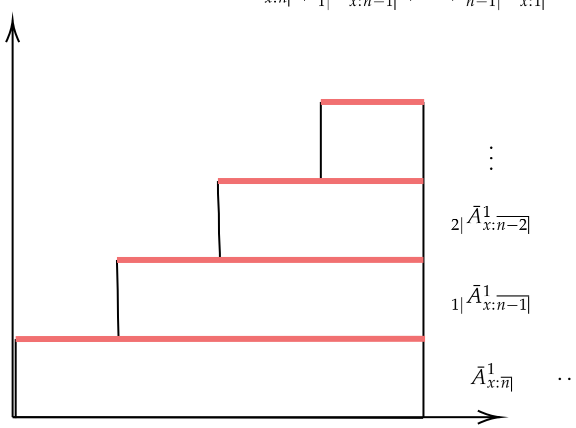


Assurance à prestation variant arithmétiquement

Assurance Vie temporaire croissante

Le capital **croit annuellement**.
La prestation est de 1 $ dans la première année, 2 $ dans la deuxième, etc. jusqu'à n $ dans la $n^{\text{ème}}$ année.

$$\begin{aligned}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{1|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-1}|} + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}\end{aligned}$$



Le capital **croît *(annuellement)* pendant r années**.

$$(I_{\overline{r}|}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{r-1} {}_{k|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-k}|}$$

Le capital **croît m fois par année**.
Paye une prestation de 1/m $ dans le premier 1/m d'année, 2/m $ dans le deuxième, etc.

$$(I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \frac{(\lfloor t \times m \rfloor + 1)}{m} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital est **différé de r années**.

$${}_{r|}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = v^r {}_rp_x (I\bar{A})^1_{x+r:\overline{n}|}$$

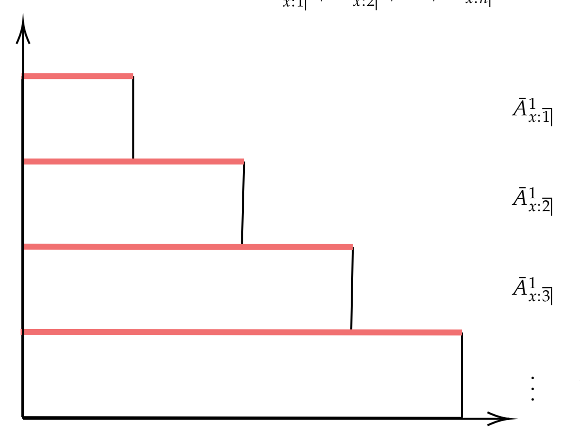
Le capital **croît continûment**.
Paye une prestation de t au moment du décès, tant qu'il se produise dans les n premières années.

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^n {}_{s|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-s}|} ds\end{aligned}$$

Assurance Vie temporaire décroissante

Le capital **décroit chaque année** et donc la prestation doit nécessairement être une temporaire.
Paye n $ au début de la première année, n-1 $ au début de la deuxième, etc. jusqu'à 1 $ au début de la dernière année.
On peut le voir de l'autre sens, la prestation du début de la dernière année est de 1 $, 2 $ au début de l'avant dernière année, etc.

$$\begin{aligned}(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{\omega - x} (n - \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + \bar{A}^1_{x:\overline{2}|} + \ldots + \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\end{aligned}$$



Le capital **décroît m fois par année**.
Paye une prestation de n $ dans le premier 1/m d'année, n - 1/m $ dans le deuxième, etc. jusqu'à 1/m $ durant le dernier 1/m d'année.

$$(D^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \left(n - \frac{1}{m} \times \lfloor mt \rfloor\right) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Le capital est **différé de r années**.

$${}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{k}|}$$

Le capital **décroît continûment**.
Prévoit une prestation de n $ pour un décès immédiat, par la suite la prestation décroît linéairement jusqu'à 0 $ au bout de n années.

$$\begin{aligned}(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (n-t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^n \bar{A}^{1}_{x:\overline{s}|} ds\end{aligned}$$

Assurance mixte

L'assurance peut être mixte peut importe qu'elle soit croissante ou décroissante.

L'assurance ***croissante*** mixte n années, paierait n$ en cas de survie *(peu importe la fréquence de la croissance)*.

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|} = (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + n\,{}_nE_x$$

L'assurance ***décroissante*** mixte n années, paierait 1/m$ en cas de survie si la prestation **décroît m fois par année**.

L'assurance ***décroissante*** mixte n années, paierait 1$ en cas de survie si la prestation **décroît à chaque année** *(alias, $m = 1$)*.

L'assurance ***décroissante*** mixte n années aurait une prestation de survie nulle si la prestation **décroît continûment**. Donc, en théorie une assurance décroissant continûment peut être mixte mais pas en pratique.

Comme pour les assurances à prestations constantes, une mixte est la combinaison d'une temporaire *(avec la même (dé)croissance)* et d'un capital différé.

$${}_{r|}(D\bar{A})_{x:\overline{n}|} = {}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n+r}|}^{\;\;\;1}$$

Assurance Vie entière croissante

Le capital **croît chaque année**.
La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.
Donc, 1 $ la première, 2 $ la deuxième, etc. jusqu'à $\omega - x$$ la dernière.

$$\begin{aligned}(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots\end{aligned}$$

Le capital **croît continûment**.
La formule est équivalente à remplacer n par $\omega - x$ dans les formules de l'assurance vie temporaire n années.

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_{s|}\bar{A}_x ds\end{aligned}$$

Le capital **croit *(annuellement)* pendant n années**.
Comme une vie entière sauf que la capital cesse de croître après n années et paye n$ pour la suite.

$$\begin{aligned}(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x &= (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + n\,{}_{n|}\bar{A}_x \\ &= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}_x\end{aligned}$$

Relations

$$(I_{\overline{r}|}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{r}|} + r\,{}_{r|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n-r}|}$$

$${}_{r|}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = v^r {}_rp_x (I\bar{A})^{1}_{x+r:\overline{n}|}$$

$${}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = v^r {}_rp_x (D\bar{A})^{1}_{x+r:\overline{n}|}$$

$$(D^{(m)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + (I^{(m)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(n + \frac{1}{(m)}\right) \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

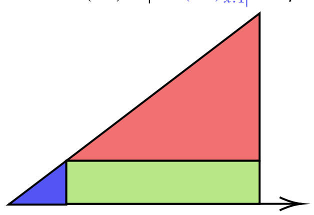
$${}_{r|}(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{r|}(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = n\,{}_{r|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n-1}|} + (I_{\overline{n}|}\bar{A})^{1}_{x} = n\,\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{r|}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n-1}|} + {}_{r|}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = n\,{}_{r|}A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

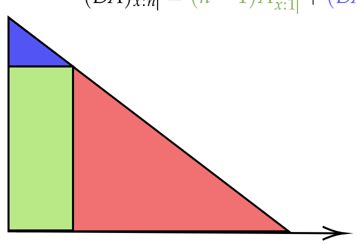
Relations croissance

$$(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|} + v p_x \left[\bar{A}^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|} + (\bar{I}\bar{A})^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|}\right]$$

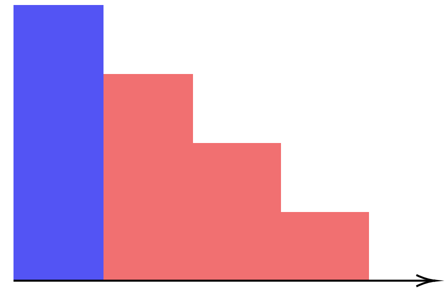


Relations décroissance

$$(\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = (n-1)\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} + (\bar{D}\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|} + v p_x (\bar{D}\bar{A})^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|}$$



$$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = n\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} + v p_x (D\bar{A})^{\;1}_{x+1:\overline{n-1}|}$$



Assurance à prestation variant exponentiellement

La prestation de référence est celle payable en cas de décès immédiat. La prestation est ***indexée*** continûment à force τ ; généralement, $\tau < \delta$ et peut même être négatif.
Exemple pour une assurance temporaire n année différée de r années ${}_{r|}\bar{A}^{1\text{ind}}_{x:\overline{n}|}$.

$$Z = {}^{\delta-\tau}_{r|}\bar{Z}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T < r \\ e^{-(\delta-\tau)T} & r < T < r+n \\ 0 & T > n+r \end{cases}$$

Évolution du fonds

Fonds initialement constitué des primes reçues pour n contrats.

$$F_0 = n\pi$$

Augmente *(croit)* avec le taux de rendement réalisé sur les placements.

Diminue *(décroît)* chaque fois qu'une prestation est payable.

F_t : valeur du fonds à t *(après le paiement de prestations payables au temps t s'il y a lieu)*.

Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ les **moments de décès** *(en ordre croissant)*.
Soit δ_s, $s > 0$ la force d'intérêt réalisée à s.
Tant que des prestations de décès sont payables :

$$F_{t_j^-} = F_{t_{j-1}^+}\, e^{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \delta_s ds}$$

$$F_{t_j^+} = F_{t_j^-} - b(t_j)$$

Si le contrat se termine à r

sans prestation de survie.

$$F_r = F_{t_k^+}\, e^{\int_{t_k}^{r} \delta_s ds}$$

$$\text{où } t_k = \max\{t_j | t_j < r\}$$

avec prestation de survie

$$F_r = F_{t_k^+}\, e^{\int_{t_k}^{r} \delta_s ds} - b^{\star}(r)(n-k)$$

$$\text{où } t_k = \max\{t_j | t_j < r\}$$

$$\text{et } b^{\star}(r) = \text{prestation de survie}$$

2.3 Payable à la fin de l'année du décès

La prestation peut seulement changer aux anniversaires de la police (alias aux âges entiers).
L'information est souvent disponible sous format de table et donc les seuls calculs possible sont ceux des contrats payable à la fin de l'année du décès.
De façon générale, l'âge à l'émission, la durée de couverture et la période différée sont entiers $x, n, r \in \mathbb{Z}$.

Principe général

Valeur actualisée : z_{k+1}
Prestation : b_{k+1}
Facteur d'actualisation : v_{k+1}

$f(T) = [T+1]$

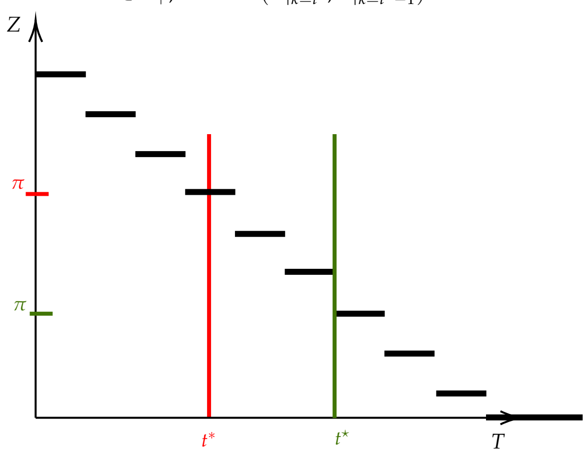
$\forall K \in \mathbb{Z}_+$ alias $(0, 1, 2, \dots)$

$$Z = z_{K+1} = b_{K+1} v_{K+1}$$

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} z_{k+1\ k|}q_x$$

Principe du quantile : si on atteint entre 2 marches, on choisit toujours ***la plus basse***.

$$\text{si } t^* \notin \mathbb{Z}_+, \pi = Z|_{k=[t^*]}$$
$$\text{si } t^* \in \mathbb{Z}_+, \pi = \min(Z|_{k=t^*}, Z|_{k=t^*-1})$$



au moins	$\geq$
au plus	$\leq$
moins de	$<$
plus de	$>$

Assurance à prestation nivelée

La règle des moments s'applique.

Assurance-vie entière

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x$$

Assurance-vie temporaire

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x$$

$${}_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{m-n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x$$

Assurance mixte

$${}_{r|}A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{r+n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x + v^{r+n}{}_{n}p_x$$

Assurance différée de m années

$$\begin{aligned}
{}_{m|}A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m}{}_{(k+m)|}q_x \\
&= v^m{}_{m}p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1}{}_{k}p_{x+m}\,q_{x+m+k} \\
&= {}_{m}E_x\,A_{x+m}
\end{aligned}$$

Liens

$$A_x = vq_x + vp_x\,A_{x+1} \qquad A_{w-1} = v$$
$$A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + v^n{}_{n}p_x\,A_{x+n}$$
$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x\,A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} \qquad A_{x+n-1:\overline{1}|}^{\;\;1} = vq_{x+n-1}$$
$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{r}|} + v^r{}_{r}p_x\,A^{1}_{x+r:\overline{n-r}|}$$
$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^r{}_{r}p_x\,A_{x+r:\overline{n-r}|}^{\;\;1}$$

Assurance à prestation variant arithmétiquement

Puisque la prestation est payable à la fin de l'année du décès, le changement ne se fera qu'une fois par année. Donc, la (dé)croissance est par défaut annuelle.

$$\mathrm{E}\left[{}_{r|}(I_{\overline{m}|}Z)^{1}_{x:\overline{n}|}\right] = \sum_{k=r}^{r+m-1} (k+1-r)v^{k+1}{}_{k|}q_x + \sum_{k=r+m}^{r+n-1} mv^{k+1}{}_{k|}q_x + (0|mv^{r+n}{}_{r+n}p_x)$$

$$\mathrm{E}\left[{}_{r|}(DZ)^{1}_{x:\overline{n}|}\right] = \sum_{k=r}^{r+n-1} (n+r-k)v^{k+1}{}_{k|}q_x + (0|v^{r+n}{}_{r+n}p_x)$$

Relations de récurrence

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} + (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = (n+1)\,A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}A)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{m-1} {}_{j+r|}A^{1}_{x:\overline{n-j}|}$$

$${}_{r|}(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{k}|} + v^{r+n}{}_{r+n}p_x$$

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}A)^{1}_{x:\overline{n}|} = v^r{}_{r}p_x\left\{(IA)^{1}_{x+r:\overline{s}|} + v^r{}_{s}p_{x+r}\left[(I_{\overline{m-s}|}A)^{1}_{x+r+s:\overline{n-s}|} + s\,A^{1}_{x+r+s:\overline{n-s}|}\right]\right\}$$

$${}_{r|}(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = v^r{}_{r}p_x\left\{(DA)^{1}_{x:\overline{m}|} + (n-m)\,A^{1}_{x:\overline{m}|} + v^m{}_{m}p_{x+r}(DA)^{1}_{x+r+s:\overline{n-s}|}\right\}$$

Assurance à prestation variant exponentiellement

Suppose que la prestation payable en cas de décès $= b$ et qu'elle est ensuite indexée au taux d'inflation.

Différée r années temporaire n années

$$\mathrm{E}\left[{}_{r|}Z^{1}_{x:\overline{n}|}\right] = \sum_{k=r}^{r+n-1} b(1+\inf)^{k-r}v^{k+1}{}_{k|}q_x + (0|b(1+\inf)^{n-1}v^{r+n}{}_{r+n}p_x)$$

Évolution du fonds

F_0 Valeur du fonds initial avec l'achat par ℓ_x personnes.
ℓ_x Nombre de personnes ayant initialement acheté au fonds.
$F_0 = \ell_x \pi$
$F_k^{(\text{att}|\text{obs})}$ Valeur du fonds (attendu | observée) à la **fin** de la $k^{\text{ème}}$ année.
r_k Taux de rendement réalisé lors de la $k^{\text{ème}}$
i Taux de rendement espéré de la prime.
$d_{x+k-1}^{(\text{att}|\text{obs})}$ Nombre de décès (attendus | observés) lors de la $k^{\text{ème}}$ année.

$$F_o^{\text{obs}} = F_o^{\text{att}} = \ell_x \pi$$

Tant qu'il y a couverture :

En cas de décès

$$F_{k+1}^{\text{att}} = F_k^{\text{att}}(1+i) - b_{k+1}^{\text{décès}}\, d_{x+k}^{\text{att}}$$
$$F_{k+1}^{\text{obs}} = F_k^{\text{obs}}(1+r_{k+1}) - b_{k+1}^{\text{décès}}\, d_{x+k}^{\text{obs}}$$

En cas de prestation de survie à n

$$F_n^{\text{att}} = F_{n-1}^{\text{att}}(1+i) - b_n^{\text{décès}}\, d_{x+n-1}^{\text{att}} - b_n^{\text{survie}}\, \ell_{x+n}^{\text{att}}$$
$$F_n^{\text{obs}} = F_{n-1}^{\text{obs}}(1+r_n) - b_n^{\text{décès}}\, d_{x+n-1}^{\text{obs}} - b_n^{\text{survie}}\, \ell_{x+n}^{\text{obs}}$$

2.4 Payable à la fin du 1/m d'année du décès

$$K = 0, 1, \ldots, \omega - x - 1$$
$$J = 0, 1, \ldots, m-1$$
$$H_x^{(m)} = [mT_x]$$

Où h est une réalisation de $H_x^{(m)}$.
Par exemple, dans une année où $m = 4$ entre $K = 10$ et $K = 11$, $H_x^{(4)} \in \{40, 41, 42, 43\}$.

$$Z = b_{K+\frac{J+1}{m}}\, v_{K+\frac{J+1}{m}}$$

$$\Pr(K = k, J = j) = {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \overset{DeMoivre}{=} \frac{1}{m(\omega - x)} \overset{Exponentielle}{=} e^{-\mu(k+\frac{1}{m})}(1 - e^{-\mu(\frac{1}{m})})$$

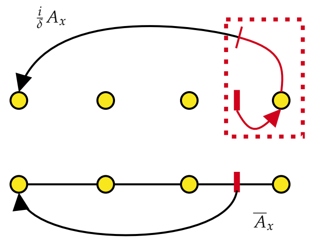
$${}_{r|}A^{1\,(m)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{h=rm}^{m(r+n)-1} v^{\frac{k+1}{m}}\, {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + (0|v^{r+n}\, {}_{r+n}p_x)$$

2.5 Relations entre payable au moment et celles payables à la fin de l'année du décès

Si :

1. La force d'intérêt est constante.
   $v_t = v^t$
2. Il y a seulement une prestation de décès.
3. Le plus souvent que la prestation peut varier est aux anniversaires de police ; alias, elle est constant sur une période.
   $b_t = b_{\lfloor t \rfloor + 1}$

$$\bar{A}_x \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A_x \qquad A_x^{(m)} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$



Généralisation

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Cas de croissance

$$(\bar{I}\bar{A})_x \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right]$$

$$(I^{(m)}A)_x^{(m)} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d^{(m)}}\right) A_x\right]$$

Généralisation avec multiple de la force d'intérêt

$${}^j\bar{A}_x \overset{DUD}{=} \frac{e^{j\delta} - 1}{j\delta}\, {}^jA_x \qquad {}^jA_x{}^{(m)} \overset{DUD}{=} \frac{e^{j\delta} - 1}{m(e^{\frac{j\delta}{m}} - 1)}\, {}^jA_x$$

Approximations

$$\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x \qquad A_x^{(m)} \approx (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} A_x$$

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} (DA)^1_{x:\overline{n}|} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n}|} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

$$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \left[(DA)^1_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2} A^1_{x:\overline{n}|}\right]$$

$$(I^{(m)}_{\overline{n}|}\bar{A})_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \left[(I_{\overline{n}|}A)_x - \frac{m-1}{2m} A^1_{x:\overline{n}|}\right]$$

3 Contrats de rente

On note que pour les contrats de rente, chaque paiement est conditionnel à la survie du rentier jusqu'au moment du paiement *(à moins de se trouver dans une période garantie)*.

Double force

$$^{2}i = 2i + i^2 \qquad\qquad ^{2}d = 2d - d^2$$

3.2 Rentes continues

Rentes nivelées

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\bar{Y}_x = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1-\bar{Z}_x}{\delta}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \int_0^{\omega-x} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x dt \\ &= \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\,(Y) = \frac{^{2}\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_x - {}^{2}\bar{a}_x\right) - \bar{a}_x^2$$

Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$\bar{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1-\bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{n} \bar{a}_{\overline{t}|}\; {}_tp_x\; \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\; {}_np_x \\ &= \int_0^{n} v^t\, {}_tp_x dt \\ &= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\,(\bar{Y}_{x:\overline{n}|}) = \frac{^{2}\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^{2}\bar{a}_{x:\overline{n}|}\right) - \bar{a}_{x:\overline{n}|}^2$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$${}_{m|}\bar{Y}_x = \begin{cases} 0 & T_x \leq m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x - m}|} & T_x > m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{x:\overline{m}|}^{\;1} - {}_{m|}\bar{Z}_x}{\delta}$$

$$\begin{aligned}{}_{m|}\bar{a}_x &= \int_m^{\omega-x} \bar{a}_{\overline{t-m}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= {}_mE_x \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}\end{aligned}$$

On note que ${}_{m|}\bar{Y}_x = \bar{Y}_x - \bar{Y}_{x:\overline{m}|}$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}Y_x$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_nq_x + \int_n^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x\end{aligned}$$

Valeur actuarielle accumulée

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$$

Rentes variant arithmétiquement

Rentes variant annuellement Limitons à les exprimer comme une somme de rentes dont le taux de paiement est constant.

Croissante

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_{\min(T,r)}^{\min(T,r+n)} \min(m, [u+1-r]) \mathrm{e}^{-\delta u} du$$

$$\mathrm{E}[{}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|}] = \sum_{k=0}^{m-1} {}_{r+k|}\bar{a}_{x:\overline{n-k}|}$$

Décroissante

$${}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_{\min(T,r)}^{\min(T,r+n)} \min(m, [u+1-r]) \mathrm{e}^{-\delta u} du$$

$$\mathrm{E}[{}_{r|}(I_{\overline{m}|}\bar{a})_{x:\overline{n}|}] = \sum_{k=0}^{m-1} {}_{r+k|}\bar{a}_{x:\overline{n-k}|}$$

Rentes variant continûment **Croissante**

Décroissante

Rentes variant exponentiellement

$${}_{m|}\bar{Y}_{x:\overline{n}|}^{\text{indexée}} = \begin{cases} 0, & T \leq m \\ \mathrm{e}^{-\tau m}\mathrm{e}^{-(\delta-\tau)m}\, \bar{a}_{\overline{T-m}|\delta-\tau}, & m < T \leq m+n \\ \mathrm{e}^{-\tau m}\mathrm{e}^{-(\delta-\tau)m}\, \bar{a}_{\overline{n}|\delta-\tau}, & T > m+n \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[{}_{m|}\bar{Y}_{x:\overline{n}|}^{\text{indexée}}] = \mathrm{e}^{-\tau m} \cdot {}^{\delta-\tau}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

3.3 Rentes discrètes

Rentes nivelées

Rente viagère Pour $K = 0, 1, 2, \ldots$ on obtient :

Début de période	Fin de période
$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1}{d}\left[1 - Z_x\right]$	$Y_x = a_{\overline{K}|} = \frac{1}{i}\left[1-(1+i)Z_x\right]$
$\mathrm{E}[\ddot{Y}_x] = \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\; {}_kp_x\; q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k\; {}_kp_x$	$\mathrm{E}[Y_x] = a_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} a_k\; {}_kp_x\; q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} v^k\; {}_kp_x$

On note que :

Variance rente

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{1}{d^2}\left(^{2}A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^2\right) = \mathrm{Var}(Y_x) \\ &= \frac{2}{d}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}^{2}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right) + {}^{2}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2\end{aligned}$$

Relation entre début et fin de période :

$$Y_x = a_{\overline{K}|} \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - 1 = \ddot{Y}_x - 1$$

$$\Rightarrow a_x = \ddot{a}_x - 1$$

Relation de récurrence :

$$\begin{aligned}a_x &= vp_x + vp_x a_{x+1} \\ &= vp_x \ddot{a}_{x+1}\end{aligned} \qquad\qquad \ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x a_{x+n}$$

Rente temporaire n années Pour une temporaire on ajoute une limite jusqu'où sommer :

on obtient :

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & , K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période	Fin de période
$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left[1 - Z_{x:\overline{n}|}\right]$	$Y_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{i}\left[1-(1+i)Z_{x:\overline{n+1}|}\right]$
$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\; {}_kp_x\; q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x$	$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|}\; {}_kp_x\; q_{x+k} + a_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \sum_{k=1}^{n} v^k\, {}_kp_x$

Et :

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad\qquad a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x$$

Rente garantie n années On obtient :

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|} & , K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période — Fin de période

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_n q_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_k p_x\, q_{x+k} \qquad a_{\overline{x:\overline{n}|}} = a_{\overline{n}|}\,{}_n q_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} a_{\overline{k}|}\,{}_k p_x\, q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k\,{}_k p_x \qquad = \sum_{k=1}^{n} v^k + \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k\,{}_k p_x$$

De plus :

$$\mathrm{E}[\ddot{Y}^2_{x:\overline{n}|}] = \frac{2}{d}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right) + {}^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x$$

Rente différée n années on obtient :

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & , K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période — Fin de période

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \frac{1}{d}\left[Z^{\;1}_{x:\overline{n}|} - {}_{n|}Z_x\right] \qquad {}_{n|}Y_x = \frac{1}{d}\left[Z^{\;1}_{x:\overline{n+1}|} - {}_{n+1|}Z_x\right]$$

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^n \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|}\,{}_k p_x\, q_{x+k} \qquad {}_{n|}a_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^n a_{\overline{k-n}|}\,{}_k p_x\, q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k\,{}_k p_x \qquad = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k\,{}_k p_x$$

De plus :

$${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$= v p_x\,{}_{n-1|}\ddot{a}_{x+1}$$

$${}_{n|}a_x = {}_{n+1|}\ddot{a}_x = {}_{n|}\ddot{a}_x - {}_nE_x$$

Valeur actuarielle accumulée On obtient :

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}$$

Rentes à paiement variant arithmétiquement

Rente viagère croissante

$$\ddot{Y} = (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|}, K = 0, 1, 2, \ldots$$

Début de période — Fin de période

$$\mathrm{E}[\ddot{Y}] = (I\ddot{a})_x \qquad \mathrm{E}[\ddot{Y}] = (Ia)_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|}\,{}_{k|}q_x \qquad = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (Ia)_{\overline{K}|}\,{}_{k|}q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)v^k\,{}_k p_x \qquad = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k v^k\,{}_k p_x$$

De plus :

$$(Ia)_x = (I\ddot{a})_x - \ddot{a}_x$$

Rente temporaire n années croissante on obtient :

$$\ddot{Y} = \begin{cases} (I\ddot{a})_{\overline{K+1}|} & , K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ (I\ddot{a})_{\overline{n}|} & , K = n, n+1 \end{cases}$$

Début de période — Fin de période

$$\mathrm{E}[\ddot{Y}] = (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} \qquad \mathrm{E}[\ddot{Y}] = (Ia)_{x:\overline{n}|}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (I\ddot{a})_{\overline{k}|}\,{}_{k|}q_x + (I\ddot{a})_{\overline{n}|}\,{}_n p_x \qquad = \sum_{k=0}^{n-1} (Ia)_{\overline{k}|}\,{}_{k|}q_x + (Ia)_{\overline{n}|}\,{}_n p_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k\,{}_k p_x \qquad = \sum_{k=0}^{n-1} k v^k\,{}_k p_x$$

Relations

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} + {}_nE_x$$

le dernier paiement est omis
et donc on l'actualise les n années
avec la probabilité des survire

1er paiement

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x\left[(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|} + \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}\right]$$

actualiser l'année de moins — survire l'année de plus

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

Rentes variant exponentiellement

$${}_{m|}\ddot{Y}^{inf}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{\min(K,m+n-1)} (1+inf)^{k-m} v^k, K = 0, 1, 2 \ldots$$

3.4 Rentes payables m fois l'an

Rente viagère on obtient :

$$\ddot{Y}^{(m)}_x = \sum_{h=0}^{mK+J^{(m)}} \frac{1}{m} v^{\frac{h}{m}}$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J^{(m)}+1}{m}}|}$$

$$= \frac{1}{d^{(m)}}\left[1 - v^{K+\frac{J^{(m)}+1}{m}}\right]$$

$$= \frac{1}{d^{(m)}}\left(1 - Z^{(m)}_x\right) \qquad K = 0, 1, 2, \ldots$$

$$J^{(m)} = 0, 1, \ldots, m-1$$

avec $Y^{(m)}_x = \ddot{Y}^{(m)}_x - \frac{1}{m}$.

De plus :

$$\ddot{Y}^{(m)}_x = \ddot{a}^{(m)}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=0}^{m(\omega-x)-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\,{}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{k+\frac{j}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}}p_x$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=0}^{m(\omega-x)-1} \frac{1}{m} v^{\frac{h}{m}}\,{}_{\frac{h}{m}}p_x$$

et :

$$\mathrm{Var}(\ddot{Y}^{(m)}_x) = \frac{2}{d^{(m)}}\left(\ddot{a}^{(m)}_x - {}^2\ddot{a}^{(m)}_x\right) + {}^2\ddot{a}^{(m)}_x - \left(\ddot{a}^{(m)}_x\right)^2$$

Hypothèse DUD

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_nE_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Hypothèse traditionnelle

Le seul changement de DUD sont les formules pour le $\alpha(m)$ et $\beta(m)$, le reste de l'équation reste pareille.
La différence est que l'hypothèse traditionnelle suppose la linéarité du **facteur d'actualisation actuarielle** ${}_nE_x$ au lieu de uniquement supposer la linéarité de la *mortalité* ${}_tp_x$.
Pour $x = 0, 1, 2, \ldots$ et $0 \leq t \leq 1$

$${}_tE_x = (1-t) + t\,{}_1E_x$$

Et donc, pour le cas d'une rente viagère, on trouve :

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} {}_{k+\frac{j}{m}}E_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{1}{m} {}_kE_x \times \sum_{j=0}^{m-1} {}_{\frac{j}{m}}E_{x+k} \\
&= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}
\end{aligned}$$

Où les nouveaux paramètres sont :

$$\alpha(m) = 1 \qquad \beta(m) = \frac{m-1}{2m}$$

Une équation utile pour les rentes de fin de période est

$$\begin{aligned}
\gamma(m) &= \alpha(m) - \beta(m) - \frac{1}{m} \\
&\overset{DUD}{=} \frac{d^{(m)} - d}{i^{(m)} d^{(m)}} \\
&\overset{Trad.}{=} \frac{m-1}{2m}
\end{aligned}$$

Il suffit de remplacer $-\beta(m)$ par $+\gamma(m)$ pour obtenir les formules des rentes en fin de période.

Approximation de Woolhouse

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

Autres rentes payables m fois l'an

4 Primes nivelées

4.6 Retour de primes

- Certains contrats vont prévoir un remboursement des cotisations (accumulées au taux j) en cas du décès du détenteur de police pendant la période différée.
  La logique est que, par exemple, le détenteur peut se sentir lésé s'il paye ses cotisations pendant une période différée et décède avant de recevoir de primes ; c'est actuariellement juste, mais ça semble être injuste.
- Soit la v.a. *(de la valeur actualisée)* du retour de primes W :
  $$W = \begin{cases} v_i^{K+1}\ddot{s}_{\overline{K+1}|j} & K = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & K = n, n+1, \ldots \end{cases}$$
  où $j < i$. Si $j = i$, alors la première ligne se simplifie à $\ddot{a}_{\overline{K+1}|j}$ et si $j = 0$ alors elle se simplifie à $(K+1)v_i^{K+1}$.
- Aussi, on trouve que
  $$\mathrm{E}[W] = \sum_{k=0}^{n-1} v_i^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k+1}|j}\,{}_{k|}q_x = \frac{1+j}{j}\left(A^1_{x:\overline{n}|i^*} - A^1_{x:\overline{n}|}\right)$$
  où $i^* = \frac{i-j}{1+j}$
- La variable aléatoire de perte à l'émission devient :
  $$L(\pi) = Z - \pi Y + \pi W$$
  Sous le principe d'équivalence, on obtient :
  $$\pi = \frac{\mathrm{E}[Z]}{\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[W]}$$

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étale sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. On défini L comme étant $L = Z - Y$ ***mais*** ces derniers n'ont pas nécessairement la même signification qu'avant :

- Z : La v.a. qui sous-tend le contrat d'assurance ***OU*** de rente acheté par l'individu.
- Y : La v.a. qui sous-tend l'engament de l'assuré à verser des primes.

On définit la prime nette nivelée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de
$$\begin{aligned} \mathrm{E}[L] &= 0 \\ \mathrm{E}[Z] - \mathrm{E}[Y] &= 0 \\ \mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}[Y] \end{aligned}$$

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de
$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$
Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_{t^*}p_x$ pour solutionner π^{PPMP}.

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de
$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha$$
$$\Pr(L_1 + ... + L_n < n\lambda) \geq \alpha$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,
$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(L_1 + ... + L_n)}} < \frac{n\lambda - \mathrm{E}[L_1 + ... + L_n]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$
Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,
$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$
Par le TCL,
$$\Phi\left(\frac{n\lambda - n\mathrm{E}[L]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où $Z \sim N(0,1)$ et Φ la fonction de répartition de Z. Le défi se trouve dans le calcul de $\mathrm{Var}(L)$, où
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(Z - Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(Z, Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\left(\mathrm{E}[ZY] - \mathrm{E}[Z]\,\mathrm{E}[Y]\right) \end{aligned}$$

4.5 Primes brutes

- Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G, qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.
- Alors, on a
  $$L = Z + D - Y$$
  avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π.
- Il y a 3 types de dépenses :
  - I) Dépenses initiales ;
    - À l'émission du contrat ;
    - Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M) ;
    - Coût des employés qui saisissent les informations dans le système ;
    - Impression et envoi par courrier de la police.
    - ...
  - II) Dépenses de renouvellement ;
    - Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).
  - III) Dépenses de fin de contrat.
    - Saisie informatique et frais de fermeture de dossier ;
    - Émission du chèque de prestations ;
    - Enquête (dans certains cas).