Contributeurs

ACT-2011 Gestion des risques financiers II

aut. Nicholas Langevin
aut. Gabriel Crépeault-Cauchon
aut., cre. Alec James van Rassel
src. Claire Bilodeau
src. Thomas Landry

1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.

Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. On peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peut couper des patates. Le risque dépend de leur utilisation.

Les produits dérivés apparaissent souvent en raison d'une augmentation du risque du sous-jacent ; ils sont en fait des **outils de gestion du risque**.

Origine

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devises de chaque pays.

Causes de la transformation des marchés :

- Déréglementation ;
- Automatisation des traitements avec l'informatique ;
- Mondialisation.

Exemples de produits dérivés

- Contrat à terme standardisé (« *futures contract* ») ;
- Contrat à terme de gré à gré (« *forward contract* ») ;

  Gré : acceptation, ou consentement ;
- Option d'achat (« *call* ») ;
- Option de vente (« *put* ») ;
- Les « ***swaps*** ».

Exemples de sous-jacent aux produits dérivés

- Indice boursier ;
- Taux d'intérêt ;
- Taux de change ;
- Climat ;
- Prix d'une marchandise.

Utilité

- Gestion des risques (**hedging**) ;

  Par exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole ;

  On dit qu'elle « *hedge* », ou protège sa position, contre le prix du pétrole.
- **Spéculation** ;

  Par exemple, un investisseur croit que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat.
- **Réduction** des **frais** de **transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger ;
- **Arbitrage** réglementaire : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges.

  Par exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote.

Parties prenantes

Utilisateur final participant au contrat du produit dérivé ;
- « *end-user* ».

Teneur de marché "crée" le marché en tant qu'intermédiaire ;
- Il cherche à faire un profit, une "cote", sur la transaction ;
- « *Market-makers* ».

Observateur économique observateurs du marché qui analysent et réglementent les activités des teneurs de marché et utilisateurs.

Ingénierie financière

Création de produits dérivés à partir de d'autres produits.

Implications

- Les teneurs de marchés peuvent **couvrir** leurs positions (« *hedging position* ») ;
- Les teneurs de marchés peuvent **personnaliser** les produits dérivés ;
- L'arbitrage réglementaire est difficile à empêcher puisqu'il existe souvent plusieurs façons pour recréer un produit dérivé.
  - Pour comprendre le concept, $1 + 3 = 4$ tout comme $2 + 2$;
  - Si le numéro 3 est illégal, on peut arriver à 4 d'une autre façon.

Marchés financiers

Transaction gré à gré

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse sur un marché hors cote.

Raisons pour ce type de transaction

- Ce sont souvent de grosses transactions permettant d'économiser sur les frais de transaction ;
- On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs microtransactions et plusieurs types d'actifs.

Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent ;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** » ;
   - C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc. ;
   - Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire nommé la **chambre de compensation** (« *clearing house* ») ;
   - Elle met en relation les acheteurs et vendeurs *(1$^{\text{ère}}$ étape)*, et tient compte des obligations et paiements.
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* » ;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Chambre de compensation « *clearing house* »

- La chambre de compensation règle beaucoup de transactions sur les marchés organisés ;
- Elle est une entité standardisée et réglementée ;
- **Novation** est défini comme un processus de substitution ;
- Dans le cas de produits dérivés, la chambre de compensation, *par novation*, devient le vendeur de tous les acheteurs et l'acheteur de tous les vendeurs ;
- Donc, la chambre de compensation est un intermédiaire pour les acheteurs et vendeurs.

Mesures de taille et d'activité d'un marché

Volume total des transactions : Nombre total de titres transigés pendant une période de temps donnée ;

Valeur marchande : Valeur de tout ce qui pourrait être transigé ;
- nombre d'actions × prix par action ($) ;
- en anglais, le « *market value* » ;
- Dans le cas des produits dérivés, ce n'est pas intéressant

Valeur notionnelle : Valeur du sous-jacent au produit dérivé ;

Position ouverte : Nombre de contrats pour lesquels un des parties a une obligation.
- « *Open interest* ».

Les compagnies recueillent du capital en émettant des actions et obligations selon leurs objectifs.

Obligations Une obligation se compare à un emprunt bancaire et est traitée comme de la dette ;
- Souvent, elles sont émises pour des besoins de liquidité à court terme ou,
- Pour le démarrage d'une entreprise.

Actions Une action correspond à une partie de la compagnie.
- Souvent, une compagnie va faire une offre publique lorsqu'elle cherche, ou nécessite de l'argent pour soit s'élargir, développer de nouveaux produits, etc. ;
- L'avantage en comparaison à une obligation est qu'il n'y a pas de promesse de rembourser les fonds ;
- En revanche, la compagnie est forcée d'échanger une partie de son contrôle.

Il s'ensuit que le **marché des actions** est plus actif (a un volume total de **transactions** plus important) que le **marché des obligations** ; les obligations se transigent moins souvent que les actions. Cependant, la taille des deux marchés (valeur marchande) est similaire.

Rôle des marchés financiers : Partage du risque et diversification des risques. Si un risque est non diversifiable.

Écart acheteur-vendeur « *Bid-Ask Spread* »

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**).

Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$.

Prix

Ask : Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent ;
- Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé ;
- « *ask price* » se traduit au **cours vendeur** représentant l'idée de regarder les prix auxquels se transigent l'actif.

Bid : Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent.
- Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible ;
- « *bid price* » se traduit au **cours acheteur**.

Terminologie des marchés

Ordre au cours du marché : On achète et vend selon les meilleurs prix bid-ask actuels ;
- « *Market order* ».

Ordre à cours limité : Ordre pour une quantité précise dans une tranche spécifiée de prix ;
- « *Limit order* » ;
- On achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$ sinon aucune transaction a lieu.

Ordre de vente stop : Ordre au cours du marché déclenché par l'atteinte d'un certain prix ;
- « *Stop-loss order* » ;
- On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur et le vendre si $Bid \leq k$.

Longue On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent ;

- La position peut également être déterminé selon le produit dérivé ; on se considère en position longue si l'on possède quelque-chose.

Courte On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

- La position peut également être déterminé selon le produit dérivé ; on se considère en position longue si l'on emprunte quelque-chose.

Vente à découvert

Vente à découvert « *(short-sell)* »

La vente d'un actif qu'on ne possède pas. On peut y penser comme l'inverse d'un achat.

Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre ;
2. Vente du titre ;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre ;
4. Remboursement du titre.

Exemple de vente à découvert

- Mon ami James possède 5 actions d'Apple ayant chacune une valeur de 5$;
- Je lui emprunte ses 5 actions et lui promets d'y retourner ;
- Immédiatement, je revends ses actions sur le marché des actions ;
  - Je ne suis pas inquiété, je suis certain que le prix va baisser ;
  - Ce faisant, je suis certain que je serai capable de racheter ses actions plus tard à un prix plus faible.
- Après une certaine période de temps, j'achète 5 actions au nouveau prix et j'y retourne.

Raisons pour une vente à découvert

- **Spéculation** : Un investisseur tire profit d'une baisse de prix ;
- **Financement** : Une vente à découvert est une façon d'emprunter de l'argent ;
- **Couverture** (hedging) : Un investisseur peut éliminer le risque d'une position longue sur une action avec une vente à découvert.

Type de risques

Risque de défaut (de crédit) Risque de ne pas être payé ;

- Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité ;
- « *credit risk* ».

Risque de rareté Risque qu'il soit difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent.

- C'est le risque lié à un actif peu liquide ;
- En raison du faible nombre de transactions, il peut être difficile d'établir des clauses et conditions avec peu de transactions sur lesquelles se baser ;
- Il s'ensuit qu'il y a beaucoup de négociations et de variations dans les prix.

Frais

L'**investisseur** est le *short-seller* et le **prêteur** le *détenteur des actions empruntées* par l'investisseur.

« *short-sale proceeds* » Les recettes de la vente sont conservées comme collatéraux au cas où que l'investisseur ne retourne pas les actions ;

- Soit le prêteur, ou un parti tiers, va conserver les revenus de la vente à découvert jusqu'au retour des actions ;
- À ce moment, elles seront retournées à l'investisseur.

« *a haircut* » Marge de sécurité pour couvrir le risque que le prix des actions augmente trop pour que l'investisseur ait la capacité financière des retourner, le prêteur exige un « dépôt » additionnel ;

- Comme les recettes de la vente, cette marge de sécurité sera retournée au prêteur.

« *Interest* » Il est naturel que le prêteur exige un retour sur la vente à découvert également ;

- Dans le marché des actions, l'intérêt accumulé sur le collatéral est le « *short rebate* » ;
- Dans le marché des obligations, c'est le **taux de mise en pension** (« *repo rebate* ») ;
- Ces taux sont habituellement *plus faibles que* ceux du *marché* et sont fondés sur l'offre et la demande.

« *Dividends* » Il est possible que des dividendes soient payables lors du prêt ;

- Puisque le détenteur de l'action sera celui à qui l'investisseur a vendu les actions, l'investisseur et le prêteur ne vont pas les recevoir ;
- Du point de vue du prêteur, les dividendes sont des paiements en espèce qu'il aurait reçus s'il n'avait pas prêté l'action ;
- Ce faisant, l'investisseur va payer ces dividendes au prêteur s'il y en a ;
- Pour le prêteur ils sont imposables alors que pour l'investisseur ils sont déductibles d'impôts ;
- Ce paiement se nomme le **taux de location** (« *lease rate* ») de l'actif.

2 Introduction aux Forwards et aux options

Terminologie

Prime : Flux financiers à $t = 0$;

- Dans le cas d'options, la prime est le coût $C(K)$;
- Si positif, il s'agit d'un **coût** ;
- Si négatif, il s'agît d'une **compensation**.

Valeur à l'échéance T **:** L'argent que l'on reçoit à l'échéance ;

- « *payoff* » ;
- C'est à dire, les flux de trésorier au temps $t = T$;
- Dans le cas de l'achat d'un actif, on reçoit son prix S_T ; s'il est nul, on ne reçoit rien.

Profit = (valeur à l'échéance) - (valeur accumulée du coût initial)
= VA(flux monétaires) [a]

- Le profit soustrait les flux financiers initiaux accumulés de la valeur à l'échéance ;
- Par exemple, acheter une voiture et la revendre 10 ans plus tard :
  profit =(prix de revente à dans 10 ans)−
  (valeur accumulée du coût d'achat initial
  à 0 au courant des 10 dernières années)
- Dans le cas d'options, on soustrait la valeur accumulée de la prime.

---

r taux (force) d'intérêt sans risque (effectif annuel) ;

T date d'échéance.

[a] Valeur Accumulée au taux sans risque.

Contrats à terme de gré à gré

Contrat à terme (de gré à gré) « *forward contract* »

Contrat selon lequel :

- *deux* partis s'**engagent** d'**échanger**—un à *acheter* et l'autre à *vendre* ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent S ;
- à un *certain* **prix**—prix à terme $F_{0,T}$;
- à un *certain* **endroit** à une *certaine* **date**—date d'échéance, T ;

L'engagement est au départ à $t = 0$ mais aucune transaction y a lieu. Ce faisant, le profit sera égal à la valeur à l'échéance puisqu'il n'a pas de flux financiers à 0 à accumuler. L'achat **ferme** en revanche, implique l'*achat* et la livraison de l'actif au départ à $t = 0$. Donc :

Transaction	Valeur à l'échéance	Profit
Achat ferme	S_T	$S_T - S_0 e^{rT}$
Contrat à terme (achat)	$S_T - F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

Notation de prix

S_t **:** **Valeur** de l'actif sous-jacent à t ;

S_0 **:** **Prix au comptant** ;

- « *(spot price)* » ;
- C'est le paiement pour la livraison immédiate à $t = 0$;
- En d'autres mots, le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui payable dans le cas d'un achat ferme.

$F_{0,T}$ **:** **Prix à terme** payable à T ;

- $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$

$F_{0,0}$ **:** est nul.

La notation $F_{0,T}$ vient de « *future* » ou « *forward* ».

Exemple de bateau

- Je veux acheter un *(quantité)* bateau *(bien)*, mais il est inconvénient pour moi de le recevoir maintenant ;
- En lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente *(engagement)* pour l'acheter ;

- La seule différence entre l'acheter aujourd'hui *(au prix au comptant S_0)* et l'acheter lorsque la neige fond *(au prix à terme $F_{0,T}$)* est l'accumulation d'intérêt;
- Puisqu'on suppose tout les deux d'êtres fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque (r) et le prix payable rendu à l'été (T) sera $F_{0,T} = S_0 \mathrm{e}^{r(T-0)}$;

  Si le taux sans risque est un **taux plutôt** qu'une *force* d'intérêt, on obtient $F_{0,T} = S_0(1+r_f)^T$.

Options

Exercice (levée)

Décision d'*exercer* l'option d'achat ou de vente.

Notation

K : **Prix d'exercice** *(strike price)*;

Types d'exercices

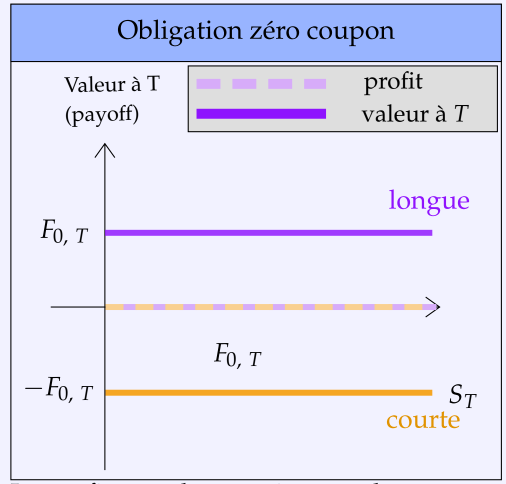
<u>E</u>uropéen : **Au moment** d'<u>e</u>xpiration de l'option T;

<u>A</u>méricain : **N'importe quand** (<u>a</u>ny moment) d'ici T;

<u>B</u>ermudien : À **quelques périodes** (<u>b</u>ounded periods) d'ici T;

En réalité, la *majorité des options sont américaines*.

Obligation zéro coupon



Le profit sera donc toujours nul.

La position

longue Équivaut à un dépôt;

courte Équivaut à un emprunt.

Valeur à l'échéance
$F_{0,T}$
Profit
$F_{0,T} - (F_{0,T} - \mathrm{e}^{-rT})\mathrm{e}^{rT}$

Option d'achat

Contrat qui :

- *permet* **(optionnel)** à son *détenteur* **d'acheter**;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent;
- à un *certain* **prix**—prix d'exercice K;
- à un *certain* **endroit** à, ou d'ici, une *certaine* **date**—date d'échéance, T;

Notation

C_0 **Prix** pour acheter l'option d'achat;

$C(K)$ Notation pour représenter l'option d'achat (« *Call* ») avec un prix d'exercice de K.

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $C(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec C_0.

Option de vente

Contrat qui *permet* à son *détenteur* de **vendre** au lieu d'acheter.

Notation

P_0 **Prix** pour acheter l'option de vente ;

$P(K)$ Notation pour représenter l'option de vente (« ***Put*** ») avec un prix d'exercice de K.

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $P(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec P_0.

Note L'acheteur d'une option de vente a une position **longue** par rapport à l'**option** mais une position **courte** par rapport au **sous-jacent**.

Profit (perte) extrême

Position	Minimum	Maximum
Contrat à terme (longue)	$-F_{0,T}$	$+\infty$
Contrat à terme (courte)	$-\infty$	$+F_{0,T}$
Option d'achat (longue)	$-C_0 e^{rT}$	$+\infty$
Option d'achat (courte)	$-\infty$	$+C_0 e^{rT}$
Option de vente (longue)	$-P_0 e^{rT}$	$K - P_0 e^{rT}$
Option de vente (courte)	$-(K - P_0 e^{rT})$	$+P_0 e^{rT}$

Types de positions :

Position capitalisée Une position est dite "capitalisée" si elle est payée en entier au début (à $t = 0$) ;

- Par exemple, l'achat ferme d'un action aujourd'hui.

Position non capitalisée Une position est dite "non capitalisée" si le paiement en est différé.

- Par exemple, un contrat à terme de gré à gré dont le paiement est différé à l'échéance.

En bref, la différence fondamentale entre l'achat ferme et l'achat différé est le moment du règlement de l'achat.

Règlement en espèce et livraison

En **théorie**, avec un contrat à terme de gré à gré, l'acheteur reçoit l'actif sous-jacent *à la date de livraison* et le vendeur reçoit, à ce même moment, l'argent (*le prix à terme*) en échange.

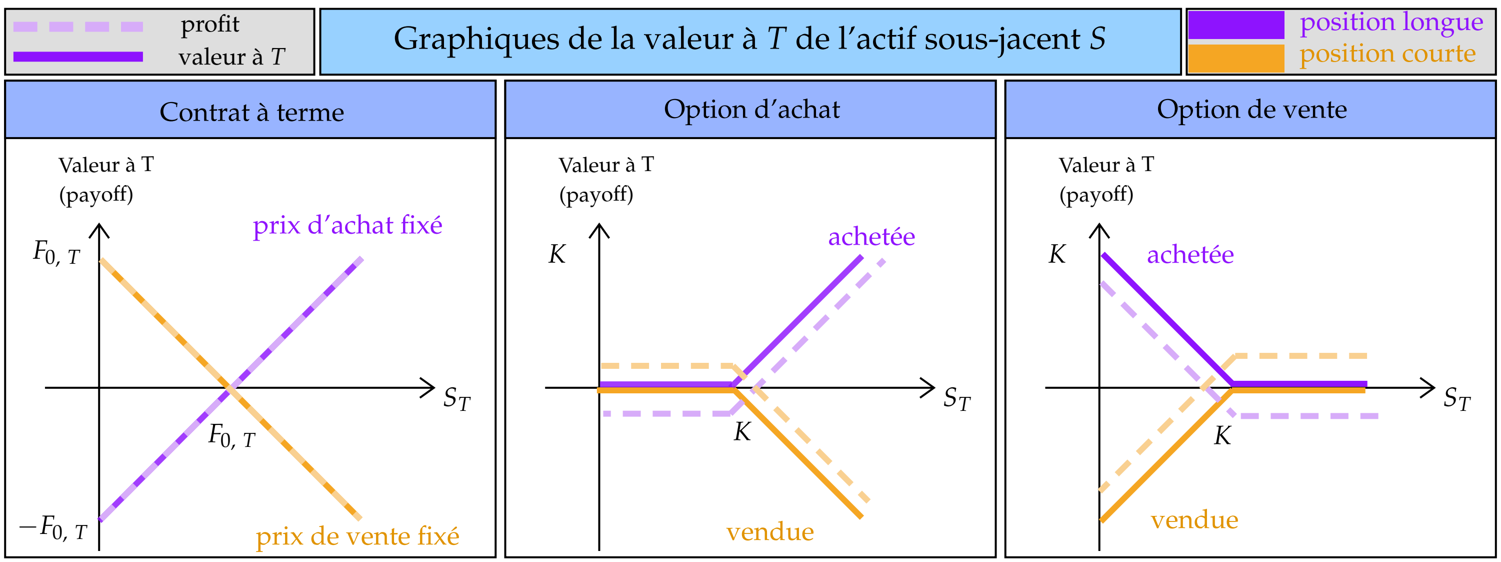
En **pratique**, il arrive que le sous-jacent ne soit jamais transigé. En lieu, le règlement se fait en espèce au parti ayant fait un profit dans la transaction.

Ceci revient à ce que l'acheteur paye $F_{0,T}$ au vendeur en échange de S_T ; puis, il va immédiatement revendre l'actif au cours du marché. Les profits sont alors de $S_T - F_{0,T}$ pour l'acheteur et de $F_{0,T} - S_T$ pour le vendeur.

Il n'y a aucun impact sur les profits et le **vendeur peut ne jamais avoir possédé l'actif** sous-jacent. Les contrats « *forward* » permettent donc aux investisseurs de spéculer ou d'atténuer des risques pris dans d'autres transactions, positions et investissements tout en **évitant des frais de transactions**.

Résumé

Autre	Contrat	Position	Rôle	Stratégie	Valeur à T (payoff)	Profit
Contrat à terme		Longue	obligation d'acheter	garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent	$S_T - F_{0,T}$	
		Courte	obligation de vendre	garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent	$-(S_T - F_{0,T})$	
Option	d'achat (call)	Longue	droit d'acheter	achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$\max\{0, S_T - K\}$	$\max\{0, S_T - K\} - C_0 e^{rT}$
		Courte	obligation de vendre	vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$-\max\{0, S_T - K\}$	$-\max\{0, S_T - K\} + C_0 e^{rT}$
	de vente (put)	Longue	droit de vendre	achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$\max\{0, K - S_T\}$	$\max\{0, K - S_T\} - P_0 e^{rT}$
		Courte	obligation d'acheter	vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$-\max\{0, K - S_T\}$	$-\max\{0, K - S_T\} + P_0 e^{rT}$



Degré de parité	« *Moneyness* »	Option d'achat	Option de vente
au cours	« *At-the-money* »	$S_0 = K$	$S_0 = K$
dans le cours	« *In-the-money* »	$S_0 > K$	$S_0 < K$
hors du cours	« *Out-of-the-money* »	$S_0 < K$	$S_0 > K$

3 Stratégie de couverture

Préliminaires

Hypothèses

Pour tout le chapitre, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Taux d'intérêt i constant ;
2. Aucuns frais de transaction ;
3. Aucun risque de défaut ;
4. Aucun versement intermédiaire.

Propriétés des maximums et minimums

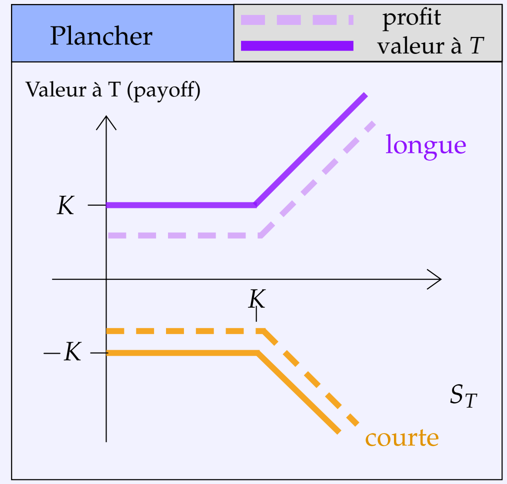
$$\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)$$
$$\min(a, b) + c = \min(a + c, b + c)$$
$$\min(a, b) = -\max(-a, -b)$$
$$\max(a, b) \times c = \max(a \times c, b \times c),\ c > 0$$
$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$$

Une option est dite d'être non-couverte si nous avons aucune position dans l'actif sous-jacent. En revanche, une option est couverte si l'on a une position correspondant à l'obligation de l'option.
Une **option d'achat couverte** est la **vente de l'option d'achat** $-C(K)$ et **l'achat du sous-jacent** $+S_0$.
Une **option de vente couverte** est la **vente de l'option de vente** $-P(K)$ et de **la vente à découvert du sous-jacent**.

Plancher « *floor* »

On achète une option de vente pour garantir un prix minimum de vente et couvrir une position longue dans l'actif sous-jacent. On dit donc avoir une **option de vente de protection** qui sert de *plancher* minimale.

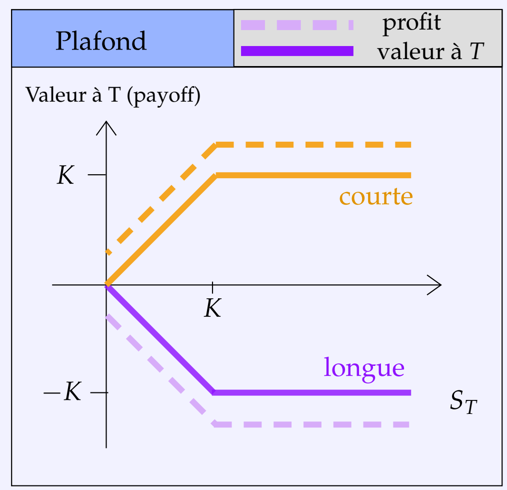
$$\text{Floor} = +S_T + P(K)$$
$$\text{Valeur à l'échéance} = \max(0, K - S_T) + S_T = \max(S_T, K)$$



Plafond « *cap* »

On achète une option d'achat pour garantir un prix maximal d'achat et couvrir une position courte dans l'actif sous-jacent. Ce faisant, on *plafonne* le prix d'achat.

$$\text{Cap} = -S_T + C(K)$$
$$\text{Valeur à l'échéance} = \max(0, S_T - K) - S_T = -\min(S_T, K)$$



Écarts et tunnels

Écart haussier « *Bull Spread* »

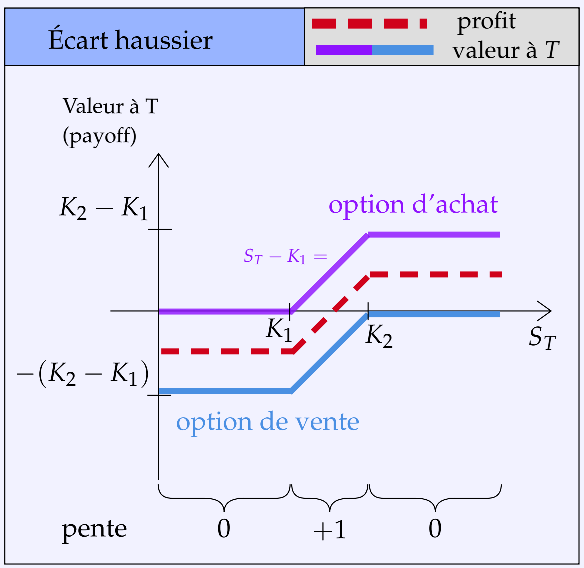
Crée en :

- Achetant une option d'achat $C(K_1)$ et vendant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- Achetant une option de vente $P(K_1)$ et vendant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va augmenter, ***mais***
  - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
  - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
- « *Bull Spread* » provient de l'idée d'être « ***bull**-ish* » et prévoir une augmentation du prix de l'action à un intervalle ;

  On peut également visualiser un taureau avec ses cornes pointues vers le haut prêt à attaquer.



Écart baissier « *Bear Spread* »

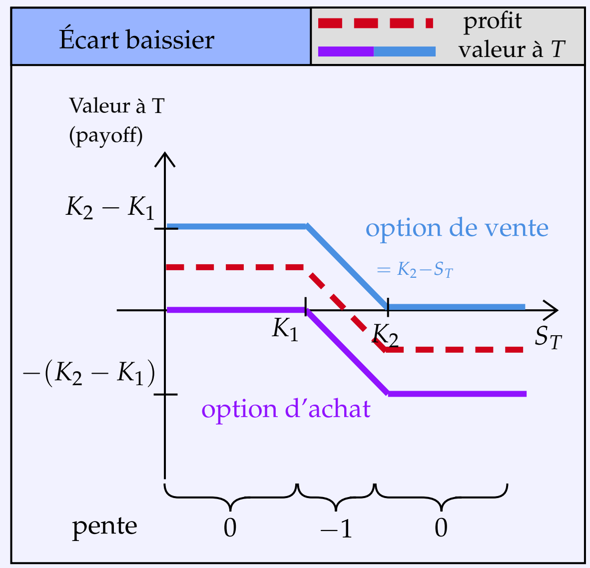
L'inverse d'un écart haussier, il est crée en :

- Vendant une option d'achat $C(K_1)$ et achetant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- Vendant une option de vente $P(K_1)$ et achetant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va baisser, ***mais*** qu'il
  - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
  - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
- « *Bear Spread* » provient de l'idée d'investir avec précaution pour « ***bear**-er* » une et baisse du prix de l'action à un intervalle ;

  On peut également visualiser un ours qui va « strike down » avec ses pattes d'ours en attaque.



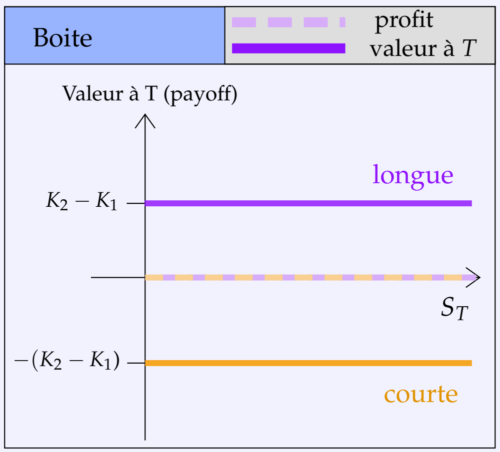
Écart sur ratio d'options « *Ratio Spread* »

Crée en :

- **achetant** m options à un prix d'exercice K_1 et
- puis **vendant** n options à un prix d'exercice K_2 différent où
- $m \neq n$ et $K_1 \neq K_2$.

Boite « *Box Spread* »

- La stratégie consiste à acheter un écart haussier ainsi qu'un écart baissier où l'un utilise des options d'achat et l'autre des options de vente (ayant les mêmes caractéristiques) ;
- Il est utilisé pour emprunter ou prêter de l'argent avec une valeur à l'échéance connue en avance, peu importe la direction prise par la valeur de l'actif sous-jacent ;
- Il est donc équivalent à une obligation zéro-coupons.



Par exemple, on achète (position longue) un écart haussier d'options d'achat et un écart baisser d'options de vente :

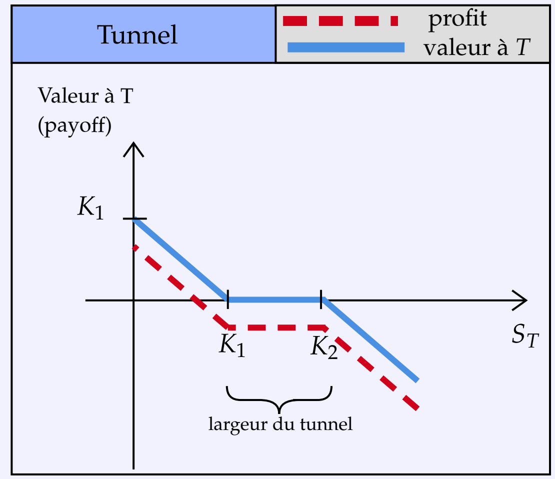
option	$0 \leq S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$K_2 \leq S_T$
$+C(K_1)$	0	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$
$-C(K_2)$	0	0	$-(S_T - K_2)$
$-P(K_1)$	$-(K_1 - S_T)$	0	0
$+P(K_2)$	$K_2 - S_T$	$K_2 - S_T$	0
net	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$

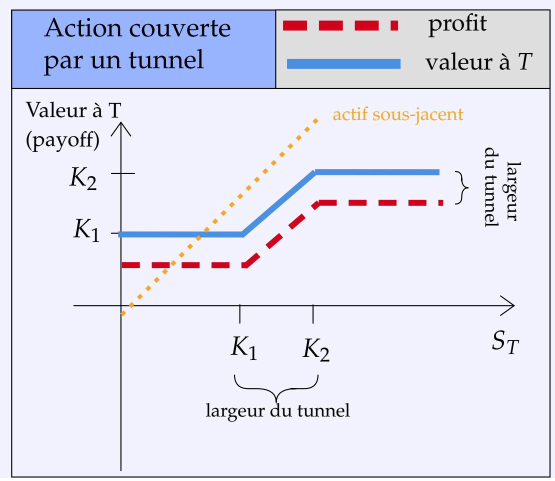
Tunnel « *Collar* » et action couverte par un tunnel « *Collared stock* »

Le tunnel (« *Collar* ») est crée en

- Achetant une option de vente $P(K_1)$ et
- vendant une option d'achat $C(K_2)$ où
- $K_1 < K_2$.

Lorsqu'on achète l'actif (position longue) en plus, nous obtenons une action couverte par un tunnel (« *Collared stock* »).
La largeur du tunnel est $K_2 - K_1$.





$$\text{tunnel} = P(K_1) - C(K_2)$$
$$\text{action couverte par un tunnel} = P(K_1) - C(K_2) + S_T$$

Si l'on achète deux options ayant la même prime, on obtient un tunnel à prime zéro. Par exemple, on vend une option d'achat $C(120) = 5$ et achète une option de vente $-P(120) = -5$ ayant donc un coût initial nul.

Spéculation sur la volatilité

Stellage « *straddle* »

Créé en achetant une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice K.

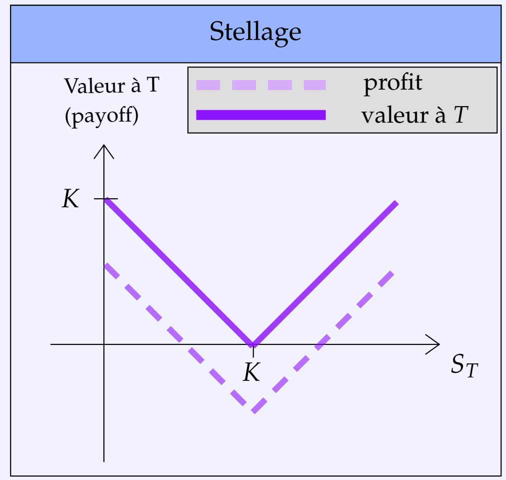
Contexte

- Souvent bâti avec un prix d'exercice au cours du marché (in-the-money) ;
- L'idée est de faire un profit si le prix de l'actif sous-jacent **baisse ou descend** ;
- Son avantage est donc qu'il peut être profitable avec une baisse ou hausse du prix de l'actif sous-jacent ;
- Cependant, puisqu'il faut acheter deux options au cours du marché, le coût est plutôt élevé.

Straddle $= Put(K,T) + Call(K,T)$.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$|S_T - K| \equiv \begin{cases} (K - S_T) + 0 = K - S_T, & S_T \leq K \\ 0 + (S_T - K) = S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$



Stellage élargi « *strangle* »

Créé en

- achetant une option de vente avec un prix d'exercice K_1 et
- achetant une option d'achat avec un prix d'exercice K_2 où
- $K_1 < K_2$.

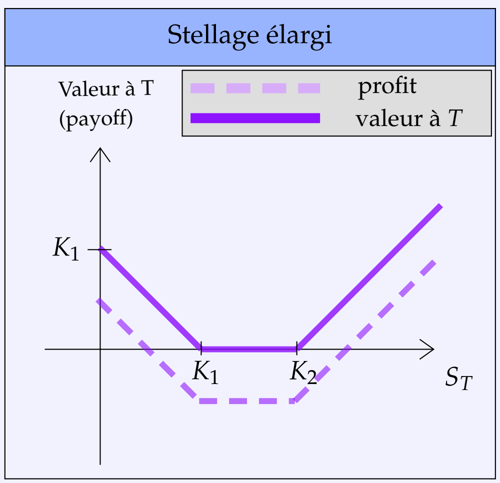
Contexte

- Pour réduire le coût des primes, les options sont à des prix d'exercice hors du cours du marché (out-of-the-money) ;
- Cela réduit la perte maximale, mais augmente la variation nécessaire pour faire un profit.

Strangle $= Put(K_1, T) + Call(K_2, T)$.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$\begin{cases} (K_1 - S_T) + 0 = K_1 - S_T, & S_T \leq K_1 \\ 0 + 0 = 0, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 + (S_T - K_2) = S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$



Écart papillon « *Butterfly Spread (BFS)* »

Créé en

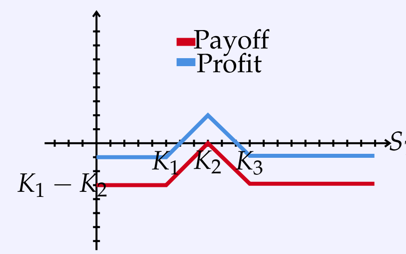
- achetant stellage élargi avec prix d'exercices K_1 et K_3 ;
- vendant un stellage avec un prix d'exercice K_2 ;
- où $K_1 < K_2 < K_3$;
- L'écart papillon est symétrique avec $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$.

BFS $= Put(K_1, T) + Call(K_3, T) - Put(K_2, T) - Call(K_2, T)$.

Notes

- Il existe plusieurs façons de recréer un écart papillon ;
- Par exemple, un écart haussier aux prix d'exercice K_1 et K_2 combiné avec un écart baissier aux prix d'exercice K_2 et K_3.

BFS $= Call(K_1, T) - 2Call(K_2, T) + Call(K_3, T)$.



Écart papillon asymétrique

- La distinction avec un écart papillon symétrique est qu'on achète/vend en différentes proportions des options d'achat ;
- A-BFS $= mCall(K_1, T) - (m + n)Call(K_2, T) + nCall(K_3, T)$;
- L'écart est asymétrique avec $m(K_2 - K_1) = n(K_3 - K_2)$.

Puisque la différence en prix n'est pas symétrique, on fait une "interpolation" de sorte.

Pour calcule le nombre d'options à acheter/vendre aux différents prix :

1. On calcule la différence en prix total $K_3 - K_1$;
2. On calcule séparément les différences de prix :

$$K_2 - K_1$$
$$K_3 - K_2$$

Intuition La somme de ces deux différences résulte en l'écart total.

$$(K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) = (K_3 - K_1)$$

3. On :
   - vends $K_3 - K_1$ options au prix d'exercice K_2 ;
   - achète $K_2 - K_1$ options au prix K_3 ;
   - achète $K_3 - K_2$ options au prix K_1.
4. Avec des options d'achat, on obtient :

$$+(K_3 - K_2)C(K_1) - (K_3 - K_1)C(K_2) + (K_2 - K_1)C(K_3)$$

Intuition On peut donc pondérer par la différence totale et obtenir une "interpolation" :

$$+\frac{(K_3 - K_2)}{(K_3 - K_1)}C(K_1) - C(K_2) + \frac{(K_2 - K_1)}{(K_3 - K_1)}C(K_3)$$

C'est d'ici que provient la notation avec λ :

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Pour chaque option avec un prix d'exercice de K_2 vendue, on achète λK_1 et $(1 - \lambda)K_3$.

5 Contrats à terme

4 façons d'acheter une action

Il y a plusieurs façons d'acheter une action et le prix va dépendre du **moment de paiement** et du **moment de la livraison**.

Contrat	Moment de paiement	Moment de la livraison	Paiement
Outright purchase	0	0	S_0
Forward contract	T	T	$F_{0,T}$
Prepaid forward contract	0	T	$F_{0,T}^P$
Fully leveraged purchase	T	0	$S_0 e^{rT}$

Achat pleinement par emprunt « *fully leveraged purchase* » On emprunte de l'argent pour obtenir l'actif immédiatement (à $t = 0$) en différant le paiement (remboursement) au temps T ;

Contrat à terme de gré à gré prépayé « *prepaid forward contract* » On paye immédiatement (à $t = 0$) au prix $F_{0,T}^P$, mais on reçoit quand même l'actif plus tard.

Ce faisant, on s'attend à ce que $F_{0,T} = F_{0,T}^P e^{rT}$.

Notation de prix

$F_{0,T}^P$ **:** est le **prix à terme** d'un contrat à terme de gré à gré **prépayé** ;

$F_{0,T} = F_{0,T}^P e^{rT}$.

La loi du prix unique

Stipule que deux portefeuilles avec les mêmes profits doivent avoir le même prix.
Nous tarifions des contrats à terme de gré à gré *prépayé*s et utilisons ces prix pour dériver les prix des contrats à terme de gré à gré.

Tarification d'un contrat à terme de gré à gré prépayé

Sans dividendes, le prix du contrat à terme de gré à gré prépayé est le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui—S_0.
Si une action a des dividendes, elles seront payables au propriétaire de l'action. Puisque l'acheteur du contrat (position longue) va seulement posséder le contrat au temps T, il ne recevra pas de **dividendes**. Cela va donc faire **baisser la valeur de l'action** et le prix à terme du contrat devra le tenir en compte. Également, on présume que le **droit de vote n'a aucune valeur** pour calculer le prix à terme.

Dans le cas de **dividendes discrets**, il suffit de soustraire la valeur actualisée des dividendes : $F_{0,T}^P = S_0 - PV(div)$. Ces dividendes sont supposés d'être réinvestis dans des obligations zéro coupon.
Un modèle de **dividendes payés continûment** suppose un taux de dividendes continûment composé δ. Une part de l'action au temps initial devient $e^{\delta T}$ parts au temps T. Cependant, nous souhaitons avoir seulement une part au temps T et donc achetons $e^{-\delta T}$ parts au début. Le prix du contrat est donc $F_{0,T}^P = S_0 e^{-\delta T}$.
Dans le cas de dividendes **proportionnels**, on suppose qu'ils sont réinvestis dans le sous-jacent.

En bref :

Dividendes	Prix à terme prépayé	Prix à terme
Sans dividendes	S_0	$S_0 e^{rT}$
Dividendes payés continument	$S_0 e^{-\delta T}$	$S_0 e^{(r-\delta)T}$
Dividendes discrets	$S_0 - PV(div.)$	$S_0 e^{rT} - FV(div.)$

Prime à terme « *forward premium* »

Défini comme le ratio du prix à terme au prix courant de l'actif sous-jacent :

$$\text{Prime à terme} = \frac{F_{0,T}}{S_0}$$

La prime à terme annualisée (« *annualized forward premium* ») est $\frac{1}{T} \ln\left(\frac{F_{0,T}}{S_0}\right)$.

Est-ce de l'arbitrage ?

Flux monétaires	Oui	Non
Au temps 0, est-ce que le flux monétaire net est ≥ 0 ?	X	
Est-ce que tous les flux monétaires nets futurs sont ≥ 0 ?	X	
Est-ce qu'au moins un des flux monétaires nets futurs est > 0 ?	X	

Si la réponse à toutes les questions est oui, alors il y a une opportunité d'arbitrage.
Pour identifier les flux monétaires, on utilise l'approche à deux étapes :

1. Écrire, sous forme d'inégalité, ce qui est observé ;

2. Déplacer tout ce qui est sur le côté inférieur ($<$) au côté supérieur ou égal ($\geq$); Nous avons les signes appropriés pour les transactions.

Position synthétique

Une position synthétique réplique la valeur à l'échéance d'une autre position.

Achat d'action synthétique

On peut synthétiquement répliquer l'achat d'une action en prêtant de l'argent et achetant un contrat à terme de gré à gré.

Transaction	$t=0$	$t=T$
Prêt de $S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{(r-\delta)T} = F_{0,T}$
Achat d'un contrat à terme de gré à gré	0	$S_T - F_{0,T}$
Net	$-S_0 e^{-\delta T}$	S_T

Obligation zéro-coupon synthétique

On peut créer une obligation zéro-coupon synthétique en achetant une action et vendant un contrat à terme de gré à gré.

Transaction	$t=0$	$t=T$
Achat de $e^{-\delta T}$ actions	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un contrat à terme de gré à gré	0	$F_{0,T} - S_T$
Net	0	$F_{0,T} = S_0 e^{(r-\delta)T}$

Le rendement de cette stratégie s'appelle le **taux de mise en pension implicite** (« *implied repo rate* »). Cela signifie le taux implicite dans cette stratégie pour répliquer un rendement équivalent à une obligation zéro-coupon.

Contrat à terme synthétique « *synthetic forward* »

Un contrat à terme synthétique réplique la valeur à l'échéance d'un contrat à terme sans réellement en signer un.
Avec un **vrai** contrat à terme :

- le coût initial est nul et
- la valeur à l'échéance est l'écart entre le prix à terme et la valeur du sous-jacent ($S_T - F_{0,T}$).

Avec un contrat à terme **synthétique** :

- on prévoit l'échange du bien contre un prix quelconque K et
- la valeur à l'échéance est leur écart ($S_T - K$).
- Il s'ensuit que le coût initial ne peut être nul et
- c'est pourquoi on **emprunte de l'argent**, ou de façon équivalente, **vend une obligation zéro-coupons**.

En bref, on **achète l'actif** et **emprunte de l'argent** :

Transaction	Flux au temps 0	Flux au temps T
Acheter un actif	$-S_0$	$+S_t$
Emprunter de l'argent	$+S_0$	$-S_0 e^{rT} = -F_{0,T}$
Net des flux monétaires	0	$S_t - F_{0,T}$

Le montant du prêt n'a pas besoin d'être S_0 puisque le contrat est synthétique. Ce faisant, si le montant emprunté d'un contrat est de S_0 on qu'il est au cours du marché.

Comptant terme « *Cash-and-carry* »

Dans un comptant terme, alias l'achat au comptant - vente à terme, achète une action avec un emprunt et vend un contrat à terme de gré à gré.

La stratégie s'apparente à une obligation zéro coupon financé par une obligation zéro coupon. Il s'ensuit que, sans arbitrage, le profit sera nul.

Transaction	$t=0$	$t=T$
Achat de $e^{-\delta T}$ actions	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un contrat à terme de gré à gré	0	$F_{0,T} - S_T$
Emprunt de $S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{(r-\delta)T}$
Net	0	$F_{0,T} - S_0 e^{(r-\delta)T}$

Sans arbitrage, la dernière ligne s'annule.

L'inverse arrive lorsque le marché offre un contrat à terme de gré à gré sous-évalué.

Contrats de change

Notation de devises

DD Devise domestique (ou de départ);

DÉ Devise étrangère;

i_D taux d'intérêt dans la DD;

$i_{\text{É}}$ taux d'intérêt dans la DÉ;

$F^P_{0,T}$ **:** est le prix d'un contrat de change à terme prépayé en DD;
$$F^P_{0,T} = x_0(1+i_{\text{É}})^{-T}\text{DD}$$

$F_{0,T}$ **:** est le prix d'un contrat de change à terme en DD;
$$F_{0,T} = x_0(1+i_{\text{É}})^{-T}(1+i_{\text{D}})^{T}\text{DD}$$

x_t taux de change au temps t en DD/DÉ

- Par exemple, $x_0 = \frac{2\$}{1€} = \left(2\frac{\$}{€}\right) \equiv \frac{2\text{DD}}{1\text{DÉ}}$

La logique des formules des contrats à terme de gré à gré est :
$$F^P_{0,T}(1\text{DÉ}) = \left(1\text{DÉ}\cdot \mathrm{e}^{-i_{\text{DÉ}}T}\right)\cdot\left(x_0\frac{\text{DD}}{\text{DÉ}}\right) = x_0\cdot \mathrm{e}^{-i_{\text{DÉ}}T}\text{DD}$$

Un actif peut avoir un prix défini dans n'importe quelle devise; on dit qu'il est « *denominated* » dans cette devise.

Contrat de change synthétique

1. Emprunt de $x_0(1+i_{\text{É}})^{-T}$DD au taux i_D ;
2. Convertir les DD en DÉ;
3. Dépôt de $(1+i)^{-T}$DÉ (au taux i) de 0 à T.

La valeur à l'échéance sera $x_t - x_0\left(\frac{1+i_D}{1+i_{\text{É}}}\right)^T$.

Contrat à terme standardisé

Les contrats à terme standardisés sont transigés à la bourse. Ces transactions peuvent avoir lieu soit sur le plancher ou électroniquement.

Contrat à terme standardisé « *future contract* »

Différences des contrats à terme standardisés aux contrats à terme de gré à gré :

1. **Personnalisable**;
   - Les contrats « *forwards* » peuvent être **faits de gré à gré** sur n'importe quel actif avec n'importe quelle clause et/ou condition;

     L'acheteur et le vendeur peuvent choisir n'importe quel prix, montant, date d'échéance ou actif sous-jacent;
   - Les contrats « *futures* » sont **surveillés et contrôlés** par des instances officielles au même titre que la bourse;

     On dit donc qu'ils sont **standardisés**.
2. **Valorisation au prix du marché** « *Marked-to-Market* »;
   - Pour un « *forward* », toutes les échanges d'argent se produisent à l'échéance (le contrat est réglé à l'échéance);
   - Pour un « *future* », les pertes et profits sont réglés tous les jours (processus de valorisation au prix du marché) en espèces.
3. **Risque de défaut**;
   - Pour un « *forward* », le contrat est pleinement exposé au risque de défaut;
   - Pour un « *future* », avec le règlement quotidien des pertes et profits, le risque de défaut est minimisé.
4. **Liquidité** : fait référence à l'aise d'acheter ou de vendre un actif ou, de façon équivalente, de sortir ou entrer de leur position;
   - Pour un « *forward* », il est impossible de sortir d'un contrat et donc ils ne sont pas liquides;
   - Pour un « *future* », puisqu'ils sont transigés sur les marchés boursiers, ils sont liquides.
5. **Limite de prix**;
   - Pour un « *forward* », il n'y a aucune limite de prix sur l'actif sous-jacent et il peut varier sans limites;
   - Pour un « *future* », il y a des limites incluses dans le contrat sur la variation du prix du sous-jacent;

› Par exemple, s'il y a une baisse de 13% au S & P 500, il y a un « *circuit breaker* » qui arrête temporairement l'échange.

Puisque le règlement des contrats à terme standardisé est quotidien alors que le règlement des contrats à terme de gré à gré s'effectue à l'échéance, le prix à terme est différent.

Marges initiales et de maintien « *initial and maintenance margins* »

Compte Afin de contrer le risque de défaut, l'acheteur et le vendeur doivent déposer de l'argent dans un compte (« a *margin account* ») accumulant de l'intérêt ;

Marge initiale Le dépôt initial est nommé la marge initiale (« *inital margin* ») ;

Marge de maintien Les pertes et profits sont soustraits du compte et donc un niveau minimal est requis—la marge de maintien (« *maintenance margin* ») ;

Appel de marge Si le montant dans le compte descend en dessous de la marge de maintien, nous recevons un appel de marge (« *margin call* ») qu'il faut y ajouter des fonds pour ramener la balance à la **marge initiale**.

Exemple

On suppose l'achat d'une action se transigeant au prix de 950$ aujourd'hui (S_0) ayant 250 parts sous-jacentes. La force d'intérêt (δ) est de 6%, la marge initiale égale à 80% de la valeur notionnelle et la marge de maintien 10% de la marge initiale.

Ce faisant, la **balance de la marge** *dans une semaine* sera :

$$\overbrace{\underbrace{250}_{\substack{\text{nombre}\\\text{sous-jacent}}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{950}_{\text{prix inital}} \times \underbrace{0.10}_{\substack{\text{taux de}\\\text{marge initale}}} \times \underbrace{e^{0.06(1/52)}}_{\substack{\text{accumulé sur}\\\text{une semaine}}}}^{\text{marge de maintien}}$$

$$+ \overbrace{\underbrace{250}_{\substack{\text{nombre}\\\text{sous-jacent}}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{(F_{1/52,T} - 950)}_{\substack{\text{profit par action}\\\text{dans une semaine}}}}^{\text{gains (pertes)}}$$

Note Le S & P 500 a 250 parts sous-jacentes.

9 Parité et autres liens entre les options

Équation de parité des options vente-achat

$$C_{\text{Eur}}(K,T) - P_{\text{Eur}}(K,T) = F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}$$

En anglais c'est le « ***Put-Call Parity Equation*** ». Cette équation vaut pour les options européennes seulement puisque les américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment.

Positions synthétiques

Avec l'équation de parité, on peut créer des options, actions ou obligations zéro-coupon synthétiques.

Option d'achat

$$-C(S,K) = \underbrace{-P(S,K)}_{\substack{\text{achat d'une option}\\\text{de vente équivalente}}} \underbrace{-F^P_{0,T}(S)}_{\substack{\text{achat d'une part}\\\text{de l'action}}} \underbrace{+Ke^{-rT}}_{\substack{\text{emprunt de } Ke^{-rT}\\\text{au taux sans risque}}}$$

Option de vente

$$-P(S,K) = \underbrace{-C(S,K)}_{\substack{\text{achat d'une option}\\\text{d'achat équivalente}}} \underbrace{+F^P_{0,T}(S)}_{\substack{\text{vente d'une part}\\\text{de l'action}}} \underbrace{-Ke^{-rT}}_{\substack{\text{pret de } Ke^{-rT}\\\text{au taux sans risque}}}$$

Action

$$-S_0 = \underbrace{+e^{\delta T}P(S.K)}_{\substack{\text{vente de } e^{\delta T}\\\text{options de vente}}} \underbrace{-e^{\delta T}C(S,K)}_{\substack{\text{achat de } e^{\delta T}\\\text{options d'achat}}} \underbrace{-Ke^{-(r-\delta)T}}_{\substack{\text{pret de } Ke^{-(r-\delta)T}\\\text{au taux sans risque}}}$$

Bon du Trésor (« *Treasury Bill (T-Bill)* »)

$$-Ke^{-rT} = \underbrace{+C(S;K)}_{\substack{\text{vente d'une}\\\text{option d'achat}}} \underbrace{-P(S;K)}_{\substack{\text{achat d'une}\\\text{option de vente}}} \underbrace{-S_0e^{-\delta T}}_{\substack{\text{achat de } e^{-\delta T}\\\text{parts de l'action}}}$$

Parité des options

Parité des options sur devises

$C(x_0,K,T)$ Option d'achat qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance T;

$P(x_0,K,T)$ Option de vente qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance T.

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(x_0,K,T) - P(x_0,K,T) = x_0(1+i_{\text{É}})^{-T} - K(1+i_D)^{-T}$$

Parité des options sur obligation

B_0 Prix aujourd'hui ($t=0$) d'une obligation avec coupons;

$F^P_{0,T}(B)$ Prix d'un contrat à terme standardisé prépayé sur une obligation avec coupons.

$F^P_{0,T}(B) = B_t - PV(\text{coupons})$

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(B_0,K,T) - P(B_0,K,T) = F^P_{0,T}(B) - F^P_{0,T}(K)$$

Parité généralisée et option d'échange

On peut généraliser toute option comme étant l'option d'échanger des actifs—l'*actif sous-jacent* et l'*actif d'exercice*—que l'on nomme des **options d'échange**.

Les options d'achat et de vente sont donc des options d'échange avec de l'argent comme actif d'exercice. On généralise d'abord la notation au-delà du concept d'achat et de vente pour un certain prix :

Notation

$C(S,K)$ **:** Permet au détenteur de l'option d'achat de recevoir S en échange de K;

$P(S,K)$ **:** Permet au détenteur de l'option de vente de recevoir K en échange de S.

On peut penser à cette notation comme $C(\text{Receive}, \text{Give up})$ et $P(\text{Receive}, \text{Give up})$. Dans les deux cas, la valeur à l'échéance est $\max(0; \text{Receive} - \text{Give up})$.

Notation Claire

S_t **:** Prix à t de l'actif sous-jacent—le titre A;

Q_t **:** Prix à t du prix d'exercice—le titre B;

$C_{\textbf{euro}}(S_t, Q_t, T-t)$ **:** Permet, à T, d'achat le titre A au prix du titre B ;
$P_{\textbf{euro}}(S_t, Q_t, T-t)$ **:** Permet, à T, de vendre le titre A au prix du titre B.

Équation de parité des options d'échange

$$C_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T-t) - P_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T-t) = F^P_{t,T}(S) - F^P_{t,T}(Q)$$

Options sur devise

$$C^{DD}(x_0, K, T) = K \cdot P^{DD}\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{K}; T\right) = x_0 K \cdot P^{\text{DÉ}}\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{K}; T\right)$$

Note Si le prix d'exercice est dans la même devise que le prix de l'option.

Comparaison de différentes options

Considérations différents types d'options

La première considération est que la valeur à l'échéance d'une option ne sera jamais négative puisqu'un investisseur « rationnel » n'exercerait simplement pas l'option. L'émetteur de l'option va donc toujours demander une **prime positive** pour accepter ce risque de perte.

Donc les options américaines et européennes vont toujours avoir une **valeur d'au moins 0$** :

$C(S,K,T) \geq 0$ $\qquad$ $P(S,K,T) \geq 0$

Une option européenne peut uniquement être exercée à l'échéance alors qu'une option américaine peut être exercée à n'importe quel moment d'ici l'échéance. Il s'ensuit qu'une **option américaine vaut au moins autant qu'une option européenne** :

$C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq C_{\text{euro}}(S,K,T)$ $\qquad$ $P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq P_{\text{euro}}(S,K,T)$

Bornes inférieures

Option européenne Avec l'équation de parité des options vente-achat et que le coût ne peut pas être négatif, on obtient :

$$\begin{aligned}
C_{\text{euro}}(S,K,T) &= F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT} + P_{\text{euro}}(S,K,T) \\
&\geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right) \\
P_{\text{euro}}(S,K,T) &= F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT} + C_{\text{euro}}(S,K,T) \\
&\geq \max\left(Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\right)
\end{aligned}$$

Option américaine Une option américaine aura une valeur d'au moins l'option européenne. Également, puisqu'une option américaine peut être exercée à tout moment, sa valeur doit être au moins la valeur d'un exercice immédiat.

En bref

Bornes inférieures options

$$C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq C_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$
$$P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq P_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\right)$$

et

$C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq S - K$ $\qquad$ $P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq K - S$

Bornes supérieures

Option américaine

Option d'achat À son exercice, l'option permet d'obtenir l'actif sous-jacent. Si cette option coûtait plus que le prix du sous-jacent, on a simplement à l'acheter au lieu d'une option.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option d'achat américaine est le prix au comptant (« *spot price* ») :

$$S \geq C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq C_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(F_{0,T}^{P}(S) - Ke^{-rT};0\right)$$

Option de vente La valeur à l'échéance maximale d'une option de vente est le prix d'exercice K ; lorsque la valeur de l'action est nulle on a $\max(K-0;0) = K$. Si le prix était supérieur à K, le vendeur n'aurait qu'à vendre son action directement sur le marché.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option de vente américaine est le prix d'exercice :

$$K \geq P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq P_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^{P}(S);0\right)$$

Option européenne

Option d'achat La valeur à l'échéance sera au plus $\max(S_T - 0;0) = S_T$. Le prix aujourd'hui pour avoir S_T à T correspond à un contrat à terme de gré à gré prépayé $F_{0,T}^{P}(S)$.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option d'achat américaine est ce contrat à terme de gré à gré prépayé :

$$F_{0,T}^{P}(S) \geq C_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(F_{0,T}^{P}(S) - Ke^{-rT};0\right)$$

Option de vente La distinction avec la valeur maximale d'une option européenne est qu'elle est seulement reçue à T.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option de vente européenne est le prix d'exercice actualisé à 0 :

$$Ke^{-rT} \geq P_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^{P}(S);0\right)$$

Exercice hâtif des options américaines

Notions d'intérêt et d'escompte

La valeur actualisée de l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice K est $PV(\text{intérêt sur le prix d'exercice}) = K(1-e^{-rT})$.

La valeur actualisée des dividendes correspond à l'écart entre le prix de l'action aujourd'hui S_0 et le prix à terme prépayé $F_{0,T}^{P}$; $PV_{0,T}(\text{divs}) = S_0 - F_{0,T}^{P}(S)$.

Dans le cas continu, $PV(\text{dividendes}) = S_0(1-e^{-\delta T})$ et le cas discret $PV(\text{dividendes}) = \sum_{i=1}^{n} \text{div}_i e^{-rt_i}$.

Options d'achat américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la **réception des dividendes**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est **l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice** K et la protection, ou *assurance*, **contre le risque d'une baisse du prix de l'action**. Une protection contre ce risque de baisse correspond donc à une **option de vente**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K) - PV(\text{assurance})$;

   $PV(\text{assurance})$ sera donc égal au coût de l'option de vente équivalente.
2. Il n'est **jamais rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une option d'achat américaine **sans dividendes** ;

   Il s'ensuit qu'une **option d'achat américaine** sur une action **sans dividendes** a le **même prix** qu'une **option d'achat européenne** équivalente.
3. Il est ***possiblement* rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K)$.

Options de vente américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la réception de prix d'exercice K et **l'intérêt qu'on peut accumuler avec**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est de **continuer à recevoir des dividendes**. Également, la protection contre le risque de **ne *pas* vendre l'action à un prix plus élevé**. Une protection contre ce risque d'une hausse de prix correspond donc à une **option d'achat**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes}) + PV(\text{assurance})$;
   $PV(\text{assurance})$ sera donc égal au coût de l'option d'achat équivalente.
2. Il est ***possiblement* rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes})$;
3. Il s'ensuit qu'il est ***possiblement* rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une **option d'achat** américaine **sans dividendes**.

Effet du prix d'exercice

Trois arguments sur comment différents prix d'exercices font varier les prix d'options. Ces arguments, ou *propositions* expliquent le lien :

- La première proposition relie le prix d'option au prix d'exercice ;
- La deuxième proposition relie la différence des prix d'options à la différence des prix d'exercices ;
- La troisième proposition relie le taux de variation du prix de l'option selon le prix d'exercice.

Proposition 1 : Lien entre les prix d'options et d'exercice

Option d'achat Une $\uparrow K$ mène à $\downarrow$valeur à l'échéance ainsi que $\downarrow C(K)$;
$$C(K_1) \geq C(K_2) \geq C(K_3)$$
Option de vente Une $\uparrow K$ mène à $\uparrow$valeur à l'échéance ainsi que $\uparrow P(K)$;
$$P(K_1) \leq P(K_2) \leq P(K_3)$$

Proposition 2 : Lien entre la différence des prix d'options et d'exercice

- Une option d'achat profite d'une hausse de prix ;
- Si le prix d'exercice baisse de, par exemple, 10$, alors la valeur à l'échéance maximale possible augmente de 10$;
- Ce faisant le plus que je serai prêt à payer pour potentiellement avoir 10$ de plus *est* 10$ de plus.

Option d'achat
$$C_{\text{amer}}(K_1) - C_{\text{amer}}(K_2) \leq K_2 - K_1$$
$$C_{\text{euro}}(K_1) - C_{\text{euro}}(K_2) \leq (K_2 - K_1)e^{-rT}$$
Option de vente
$$P_{\text{amer}}(K_2) - P_{\text{amer}}(K_1) \leq K_2 - K_1$$
$$P_{\text{euro}}(K_2) - P_{\text{euro}}(K_1) \leq (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

Si la différence en prix d'option était supérieure à la différence en prix d'exercice il y a arbitrage ; on peut n'avoir aucun risque de perte. Pour comprendre ceci, voir le graphique d'un écart-baissier et imaginer la ligne pointillée rouge uniquement au-dessus de l'axe des x.

Proposition 3 : Lien entre le taux de variation des prix d'option et d'exercice

- Le prix d'une option d'achat décroît plus lentement lorsque le prix d'exercice augmente ;

- Le prix d'une option de vente croît plus rapidement lorsque le prix d'exercice augmente.

Option d'achat

$$\frac{C(K_1) - C(K_2)}{K_2 - K_1} \geq \frac{C(K_2) - C(K_3)}{K_3 - K_2}$$

Option de vente

$$\frac{P(K_2) - P(K_1)}{K_2 - K_1} \leq \frac{P(K_3) - P(K_2)}{K_3 - K_2}$$

10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Modèle binomial d'évaluation des options le prix de l'actif sous-jacent au début d'une période devient un de deux prix possibles à la fin de la période.

- en anglais c'est le « *Binomial Option Pricing Model* ».

Notation de prix

u facteur de hausse « *"up" factor* » ;

d facteur de baisse « *"down" factor* » ;

S_u prix de l'action s'il y a une hausse ;
$S_u = S_0 u$

S_d prix de l'action s'il y a une baisse ;
$S_d = S_0 d$

h durée de chaque période ;

Δ nombre de parts d'actions à acheter ;

B montant à prêter au taux sans risque ;

V_u valeur à la node supérieure « *value at upper node* » ;

V_d valeur à la node inférieur « *value at lower node* » ;

V_0 valeur du portefeuille au temps 0 alias **le prix**.

Portefeuille réplicatif « *Replicating Portfolio* »

Créer un portefeuille réplicatif

1. Acheter $\Delta = \mathrm{e}^{-\delta h}\left(\frac{V_u - V_d}{S_0(u-d)}\right)$ parts de l'action ;
2. Prêter $B = \mathrm{e}^{-rh}\left[V_d\left(\frac{u}{u-d}\right) - V_u\left(\frac{d}{u-d}\right)\right]$ au taux sans risque ;

La valeur initiale du portefeuille réplicatif est donc $V_0 = \Delta S_0 + B$.

Selon les signes on observe :

	$+$	$-$
Δ	achète des parts de l'action	vend des parts de l'action
B	prête de l'argent	emprunte de l'argent

Également, pour répliquer les options, les combinaisons sont :

	Option d'achat	Option de vente
Δ	$+$	$-$
B	$-$	$+$

Évaluation neutre au risque

- Présume que $\mathrm{E}[\text{rendement}] = r_f$;
- La technique pondère les possibilités de valeur à l'échéance des options avec des probabilités neutre au risque puis les actualise au taux sans risque ;
- En raison de la simplicité des calculs, les options sont souvent tarifiées avec l'évaluation neutre au risque ;
- Le prix est en fait identique à celui obtenu avec l'approche du portefeuille réplicatif.

Notation

p^* la probabilité neutre au risque d'une hausse de l'actif.

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

Le prix est donc :

$$V_0 = \mathrm{e}^{-rh}\left[p^* V_u + (1-p^*)V_d\right]$$

On déduit que $0 < p^* < 1$ ce qui mène à l'équation suivante :

$$d < \mathrm{e}^{(r-\delta)h} < u$$

Sinon, il y a arbitrage.

Construction d'un arbre binomial

Méthode générale Arbitrairement sélectionner des valeurs de u et d pour l'arbre binomial crée ;

Arbre binomial standard Sélectionner des valeurs de u et d selon des prix à terme résultant en un arbre binomial standard.

Arbre binomial standard

L'intuition est de multiplier le prix à terme de l'action par un facteur variant selon la volatilité.

Notation

σ la volatilité annuelle du rendement de l'action composée continûment ;

L'écart type de la volatilité sur une période de durée h est donc $\sigma\sqrt{h}$.

Le prix à terme est donc multiplié par $e^{\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix avec une hausse $S_u = F_{t,t+h}e^{\sigma\sqrt{h}}$ et $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix $S_d = F_{t,t+h}e^{-\sigma\sqrt{h}}$ avec une baisse.

On isole :

$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \qquad d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

Également, pour ce cas spécial, p^* se simplifie à $p^* = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$

Arbres binomiaux à plusieurs périodes

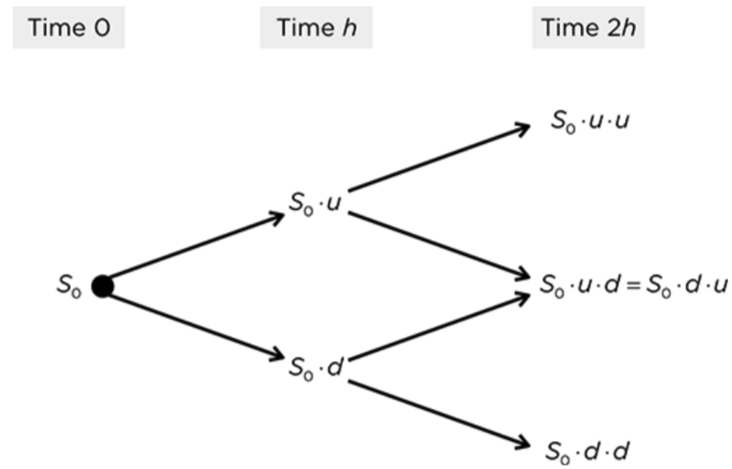
Notation

n nombre de périodes ;

h durée de chacune des périodes ;

$$h = \frac{T}{n}$$

La généralisation des méthodes précédente pour les arbres binomiaux à plusieurs périodes se résume à multiplier les facteurs u et d.
Par example :



Lorsque les facteurs u et d sont fixes, l'arbre se recombine et $S_0 \cdot u \cdot d = S_0 \cdot d \cdot u$.

Évaluation neutre au risque

Il y a 2 approches :

Nœud par nœud On calcule la valeur de l'option à chaque nœud récursivement avec l'évaluation neutre au risque jusqu'à arriver au prix ;

Approche directe Pour les **options européennes** dont l'**exercice hâtif n'est pas possible**.

Approche directe

1. Calculer la valeur à l'échéance ;
2. La pondérer par la probabilité neutre au risque de l'atteindre ;
3. L'actualiser au taux sans risque.

- La probabilité d'atteindre un nœud terminal est calculée avec une distribution binomiale ;
- Pour n périodes, k est le nombre de hausses u pour atteindre le nœud ;
- La probabilité est :

$$\Pr(\text{atteindre un nœud ayant } k \text{ hausses}) = \binom{n}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{n-k}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Pour un nœud u

$$V_u = e^{-rh}\left[p^* V_{uu} + (1-p^*)V_{ud}\right]$$

Portefeuille réplicatif

Δ et B ne restent pas constants et donc il faut prendre l'approche nœud par nœud. Ce faisant, il est ***beaucoup*** plus compliqué et long de trouver le prix avec cette approche.

Pour un nœud u

$$\begin{aligned}
\Delta_u &= e^{-\delta h}\left(\frac{V_{uu}-V_{ud}}{S_u(u-d)}\right)\\
B_u &= e^{-rh}\left[V_{ud}\left(\frac{u}{u-d}\right) - V_{uu}\left(\frac{d}{u-d}\right)\right]\\
V_u &= \Delta_u S_u + B_u
\end{aligned}$$

Tarification d'options américaines

La distinction avec les options américaines est la possibilité d'un exercice hâtif.

Valeur espérée actualisée (VEA) valeur (« *payoff* ») pour un maintien de l'option ;

- « *Pull-back value* » car on se retire (« *pull-back* ») d'exercer l'option immédiatement.

Valeur si levée (VSL) valeur (« *payoff* ») pour un exercice hâtif.

- « *Immediate exercice value* ».

Pour un nœud u

$$\begin{aligned}
VSL &= \begin{cases}\max(0, S_u - K), & \text{option d'achat}\\ \max(0, K - S_u), & \text{option de vente}\end{cases}\\
VEA &= e^{-rh}\left[p^* V_{uu} + (1-p^*)V_{ud}\right]\\
V_u &= \max(VEA, VSL)
\end{aligned}$$

Processus de tarification

1. À partir du nœud le plus à droite de l'arbre décider à chaque nœud de l'arbre si l'exercice hâtif est optimal ;
   - Si $VSL > VEA$ alors il y a un exercice hâtif sinon on maintient l'option au moins une période de plus ;
   - Donc valeur au nœud $= \max\left(\begin{array}{cc}\text{valeur pour un} & \text{valeur pour un}\\ \text{maintien de l'option,} & \text{exercice immédiat}\end{array}\right)$.
2. Répéter jusqu'au nœud initial.

Tarification d'options sur un contrat à terme standardisé

Pas sur l'examen partiel hiver 2020.

Notation

T_F temps d'expiration du contrat à terme standardisé ;

T temps d'expiration d'une option ;

$$T \leq T_F$$

F_{t,T_F} Prix à terme au temps t pour un contrat à terme standardisé expirant au temps T_F.

$$F_{t,T_F} = S_t e^{(r-\delta)(T_F - t)}$$

u_F **et** d_F Facteurs de hausse et de baisse pour un arbre de contrats à terme standardisés ;

$$u_F = u\mathrm{e}^{-(r-\delta)h} = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d_F = d\mathrm{e}^{-(r-\delta)h} = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{h}}$$

L'équation pour un arbre de contrats à terme standardisés suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{(r-\delta)h} - d}{u-d} \quad\Rightarrow\quad p^* = \frac{\mathrm{e}^{(r-r)h} - d_F}{u_F - d_F} = \frac{1-d_F}{u_F-d_F}$$

$$u = \mathrm{e}^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad u = \mathrm{e}^{(r-r)h+\sigma\sqrt{h}} = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = \mathrm{e}^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad d = \mathrm{e}^{(r-r)h-\sigma\sqrt{h}} = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{h}}$$

$$\Delta = \mathrm{e}^{-\delta h}\left(\frac{V_u - V_d}{S(u-d)}\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta = \frac{V_u - V_d}{F(u_F - d_F)}$$

$$B = \mathrm{e}^{-rh}\left[V_d\frac{u}{u-d} - V_u\frac{d}{u-d}\right] \quad\Rightarrow\quad B = \mathrm{e}^{-rh}[p^*V_u + (1-p^*)V_d]$$

$$V_u = \Delta(Fu_F - F) + B\mathrm{e}^{rh} \qquad V_d = \Delta(Fd_F - F) + B\mathrm{e}^{rh}$$

Tarification d'options sur devises

Notation

$r_{\mathbf{DD}}$ taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché domestique ;

$r_{\mathbf{DÉ}}$ taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché étranger.

L'équation pour un arbre standard suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{(r-\delta)h} - d}{u-d} \quad\Rightarrow\quad p^* = \frac{\mathrm{e}^{(r_{\text{DD}}-r_{\text{DÉ}})h} - d}{u-d}$$

$$u = \mathrm{e}^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad u = \mathrm{e}^{(r_{\text{DD}}-r_{\text{DÉ}})h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = \mathrm{e}^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \quad\Rightarrow\quad d = \mathrm{e}^{(r_{\text{DD}}-r_{\text{DÉ}})h-\sigma\sqrt{h}}$$

Rendements composés continûment

- La fonction **logarithmique** calcule des rendements composés continûment à partir des prix.

$$r_{t,t+h} = \log\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)$$

- La fonction **exponentielle** calcul des prix à partir des rendements composés continûment.

$$S_{t+h} = S_t\mathrm{e}^{r_{t,t+h}}$$

- Les rendements composés continûment sont **additifs**.

$$r_{t,t+nh} = \sum_{i=1}^{n} r_{t+(i-1)h,t+ih}$$

Volatilité

Notation

R variable aléatoire de la force du rendement (sous base annuelle) ;

Hypothèse Les rendements composés continûment sur des périodes disjointes, mais de même longueur h, sont i.i.d. ;

$r_{t,t+h}$ le **rendement composé continûment entre** t **et** $t+h$.

$$r_{t,t+h} = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)$$

On suppose n rendements, sur une période de h années, composés continûment $r_{t,t+h}, r_{t+h,t+2h}, \ldots, r_{t+(n-1)h,t+nh}$.
On peut estimer la volatilité historique avec :

$$s_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{t+(i-1)h,t+ih} - \bar{r})^2}{n-1}}, \qquad \text{où} \qquad \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{t+(i-1)h,t+ih}}{n}$$

Donc s_h estime σ_h et $\bar{r}_h$ estime μ_h où :

$$\sigma_h = \sqrt{\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)\right)} = \sqrt{\text{Var}(R_{t,t+h})}$$

$$\mu_h = \text{E}[R_{t,t+h}]$$

Pour changer d'une base annuelle (le défaut de h) à une base quelconque, on divise par h puisqu'il faut additionner $\frac{1}{h}$ rendements.
Par exemple, sous base mensuelle $h = \frac{1}{12}$ on a $\sigma = s_{1/12}\sqrt{12}$ ou sous base hebdomadaire $h = \frac{1}{52}$ on a $\sigma = s_{1/52}\sqrt{52}$.

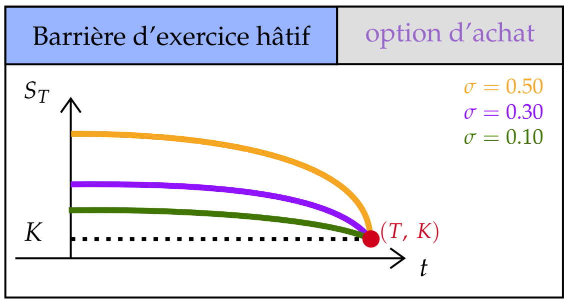
11 Modèle binomial d'évaluation des options : sujets sélectionnés

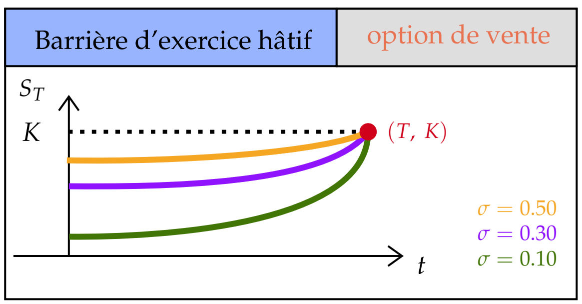
Compréhension de l'exercice hâtif

Avec un exercice hâtif, le détenteur d'une option d'achat :

1. Reçoit l'action et donc les dividendes futurs.
   - Donc, on souhaite que δ augmente.
2. Paie le prix d'exercice avant expiration et donc subit des coûts d'intérêt.
   - Donc, on ne souhaite pas que r augmente.
3. Perd l'assurance implicite à l'option.
   - Donc, on ne souhaite pas que σ augmente.

Le plus la volatilité σ est élevée, le plus élevé (faible) le prix de l'action auquel on va exercer l'option d'achat (de vente) :





Si la valeur de l'assurance est nulle ($\boxed{\sigma = 0}$) et que $\boxed{T \to \infty}$, on lève l'option d'achat si $\boxed{\delta S_T > rK}$; c'est-à-dire, si la valeur des dividendes est supérieure à l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice.

Pour une option de vente, c'est l'inverse.

Compréhension de l'évaluation neutre au risque

Notation

- r force d'intérêt sans risque ;
- δ force de dividendes ;
- α force d'intérêt (rendement) sur le sous-jacent ;
- p la vraie probabilité d'une hausse de l'actif sous-jacent ;
$$p = \frac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u - d}$$
  - on ne peut pas actualiser la valeur espérée de l'option avec α ni avec r ;
  - L'option est risquée ce qui élimine r ;
  - Le niveau de risque de l'option diffère de celui du sous-jacent.
- γ Force d'intérêt auquel on actualise la valeur espérée de l'option.

Le prix est donc $\boxed{V_0 = e^{-\gamma h}(pV_u + (1-p)V_d)}$.

Pour un portefeuille réplicatif, $e^{\gamma h} = \left(\frac{\Delta S}{\Delta S + B}\right) e^{\alpha h} + \left(\frac{B}{\Delta S + B}\right) e^{rh}$

Types de comportement envers le risque

Aversion au risque Souhaite maximiser le rendement espéré $E[R]$ tout en *minimisant* le risque σ_R^2.

Indifférence au risque Souhaite maximiser le rendement espéré $E[R]$ et est *indifférent* au risque σ_R^2.

- On dit que l'investisseur est ***neutre* au risque**.

Exemple Soit 2 investissements : 1 000$ assuré ou 2 000$ avec une probabilité de 50% et 0$ avec une probabilité de 50%.
Un investisseur avec une *aversion* au risque préfère la première option, car elle est moins risquée.
Un investisseur avec une *indifférence* au risque est indifférent à la première ou la deuxième option, car le rendement espéré des deux options est égal.

Donc une évaluation neutre au risque suppose que les investisseurs sont indifférents au risque *même s'ils ne le sont pas en réalité*.

L'arbre binomial et la lognormalité

Modèle de marche aléatoire

Notation

Y_i Variable aléatoire du i^e résultat ;
- Si on lançait une pièce de monnaie, on aurait que $Y = -1$ si la pièce tombe sur pile et $Y = 1$ si elle tombe sur face ;
- Également, $\Pr(Y = 1) = \Pr(Y = -1) = \frac{1}{2}$;
- $E[Y_n^2] = 1$ et $E[Y_n] = 0$;

Z_n Total cumulatif après n lancers.
- $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$;
- La magnitude $|Z_n|$ augmente avec n ;
- $E[Z_n^2] = n$ et $E[Z_n] = 0$.

Interprétation :
- Dans un marché efficient, le prix devrait refléter toute l'information disponible.
- Ainsi, par définition la nouvelle information est une surprise.
- Le modèle de marche aléatoire pose que cette nouvelle information devrait résulter équiprobablement en une hausse ou une baisse du prix ;
- Après un certain temps, le prix d'une action dépend de l'effet cumulé de toutes les surprises.

Problèmes avec la modélisation du prix de l'action

Plusieurs problèmes nous empêchent d'utiliser une marche aléatoire :
1. Le prix de l'action **peut devenir négatif** s'il y a suffisamment de mouvements vers le bas.
   - Ceci est impossible à cause de la responsabilité limitée des actionnaires *(concept de GRF 1)*.
2. La magnitude d'un mouvement ($|Y_i|$) est fixé à 1 mais devrait dépendre de :
   i) la **longueur** de la période h (alias, la *fréquence* des mouvements), et
   ii) le **prix actuel** S_t de l'action sous-jacent.
   - Il n'est pas réaliste d'avoir le prix d'une action monter ou baisser de 60$ en une journée.
3. Le **rendement** sur l'action devrait, en moyenne, **être positif**.

Le modèle binomial est une variante du modèle de marche aléatoire qui résout ces problèmes ; il suppose que les rendements composés continûment sont une **marche aléatoire avec dérive**.

Modèle binomial

Selon le modèle binomial, $\boxed{S_{t+h} \in S_t e^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}}$.

Le rendement $\boxed{r_{t,t+h}} = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) \boxed{\in (r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$ a donc 2 composantes :
1. Une partie ***certaine*** $\boxed{(r-\delta)h}$,
   - Cette partie constitue *la dérive*.
2. Une partie ***incertaine*** $\boxed{\pm\sigma\sqrt{h}}$.

On peut récrire le modèle binomiale comme :
$$r_{t+(i-1)h,t+ih} = (r-\delta)h + Y_i\sigma\sqrt{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$r_{0,nh} \equiv r_{0,T} = (r-\delta)T + Z_n\sigma\sqrt{h}$$
Cette formulation du modèle règle donc les problèmes :

Problèmes

1. Le **prix** de l'action **ne peut pas être négatif**.
2. La magnitude de la variation du prix dépend de la longueur de la période de temps h.
   - Des **mouvements** du prix de l'action **plus fréquents** diminuent h et par conséquence la partie certaine du rendement $(r-\delta)h$.
3. Le nouveau prix dépend du (est *proportionnel* au) prix initial.
4. On peut garantir un **prix positif**.
   - Ceci, car il y a une composante certaine et que l'on choisit la probabilité d'une augmentation du prix.

Lognormalité

L'arbre binomial est une approximation de la distribution lognormale.
- La somme de variables aléatoires binomiales est approximativement normalement distribuée ;
- Lorsque l'on traverse un arbre binomial, on somme implicitement les composantes du rendement ;

- Alors, lorsque le nombre de périodes $\boxed{n \to \infty}$, $\boxed{r_{t,t+h} \approx \mathcal{N}\big((r-\delta)h, \sigma^2 h\big)}$;
- Il s'ensuit que le prix $S_{t+T} = \boxed{S_{t+nh} \approx \text{LN}}$ lorsque $\boxed{n \to \infty}$.

On trouve alors que la probabilité d'atteindre le $(i+1)^{\text{e}}$ nœud (à partir du haut) est :

$$\Pr(S_T = S_0 u^{n-i} d^i) = \binom{n}{i} (p^*)^{n-i} (1-p^*)^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

w

Note Voir le chapitre 18 : La loi lognormale pour plus de détails sur l'application de la loi lognormale pour le prix d'actions.

Arbres binomiaux alternatifs

Il y existe d'autres façons de construire un arbre binomial qui mènent à des mouvements de u et d différents :

Méthode	**Mouvement** (u et d)	**Notes**
Arbre à terme	$\mathrm{e}^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$	$u > \mathrm{e}^{(r-\delta)h} > d$
Arbre de Cox-Ross-Rubenstein	$\mathrm{e}^{\pm\sigma\sqrt{h}}$	$ud = 1$
Arbre lognormal	$\mathrm{e}^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h \pm \sigma\sqrt{h}}$	$p^* \approx \frac{1}{2}$

Note Il est possible qu'avec un arbre de Cox-Ross-Rubenstein $\mathrm{e}^{(r-\delta)h} > u$ si h est gros et σ petit.

- Malgré que toutes les différentes méthodes mènent à des prix différents lorsque n est fini, elles tendent vers le même prix lorsque $n \to \infty$;
- De plus, malgré que les mouvements u et d sont différents, le ratio des facteurs $\frac{u}{d}$ est le même :

$$\frac{u}{d} = \mathrm{e}^{2\sigma\sqrt{h}}$$

- Alors, peu importe la méthode utilisée pour construire l'arbre, la distance proportionnelle entre u et d mesure la volatilité.

Est-ce un modèle réaliste ?

Un modèle basé sur la distribution lognormale implique quelques hypothèses douteuses sur les prix qui, en pratique, ne sont pas vérifiées.

Hypothèses douteuses d'une distribution normale

a) Volatilité σ constante.
   - En réalité, la volatilité change dans le temps.

b) Pas de grandes variations spontanées.
   - En réalité, il y a parfois des chocs soudains des prix de titres boursiers.

c) Indépendance entre les rendements composés continûment.
   - En réalité, les rendements sont positivement corrélés à court et moyen terme mais négativement corrélés à long terme.

Le modèle n'est donc pas parfait, mais sert plutôt de bon point de départ.

12 La formule de Black-Scholes

Formule de Black-Scholes généralisée

Hypothèses de la formule de Black-Scholes

Sur la distribution de l'action sous-jacente

a) Les rendements (composés continûment) sur l'action ont une distribution normale et sont indépendants à travers le temps.
b) La volatilité σ des rendements (composés continûment) est connue et constante.
c) Les dividendes δ futurs sont connus.

Sur l'environnement économique

a) Le taux (force r) sans risque est connu et constant.
b) Il n'y a pas d'impôt ni de frais de transactions.
c) Il n'y a pas de frais de vente à découvert.
d) Les investisseurs peuvent emprunter au taux sans risque.

Lorsque le nombre de périodes n d'un arbre binomial augmente, le prix de l'option tend vers la valeur donnée par la formule de Black-Scholes.

Formule de Black-Scholes généralisée

Équations généralisées :

$$d_1 = \left(\frac{\ln \frac{F^P(S)}{F^P(K)} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \qquad d_2 = \left(\frac{\ln \frac{F^P(S)}{F^P(K)} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \equiv d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Prix d'options **européennes** selon la formule de Black-Scholes :

$$C(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = F^P_{0,T}(S)N(d_1) - F^P_{0,T}(K)N(d_2)$$
$$P(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = F^P_{0,T}(K)N(-d_2) - F^P_{0,T}(S)N(-d_1)$$

Notes

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}(\ln F^P_{t,T}(S))}{t}} \equiv \sqrt{\frac{\text{Var}(\ln F_{t,T}(S))}{t}} \equiv \sqrt{\frac{\text{Var}(\ln S_t)}{t}}, \forall 0 < t \leq T$$

$\ln S_t$ **Volatilité de l'action** ou, de façon équivalente, volatilité du rendement sur l'action composé continûment.

Options sur d'autres sous-jacents

Avec la formule généralisée, on peut appliquer la formule de Black-Scholes à d'autres sous-jacents.
Dans un tel cas, il y a quelques considérations à prendre pour une option sur :

Actions avec dividendes discrets proportionnels On trouve le nombre n de fois que le dividende sera versé entre 0 et l'échéance de T de l'option.

$$F^P_{0,T}(S) = S_0(1 - txdiv)^n$$

Contrat à terme standardisé Il peut arriver que la date d'échéance—T—de l'option ne soit pas la même que la date d'échéance—T'—du contrat à terme standardisé sur un actif quelconque Q.
Dans un tel cas, il faut que $T' \geq T$ et qu'on actualise le prix à terme $F_{0,T'}(Q)$ à partir de T (et non T').

$$F^P_{0,T}(F) = F_{0,T'}(Q)e^{-rT} \qquad F^P_{0,T}(K) = Ke^{-rT}$$

Devises Les prix à terme prépayés doivent être dans la même devise que l'option.

$$C(S_0 = x_0, K, \sigma, r = r_{\text{DD}}, T, \delta = r_{\text{DÉ}}) = x_0 e^{-r_{\text{DÉ}}T}N(d_1) - Ke^{r_{\text{DD}}T}N(d_2)$$

Diagrammes du profit avant échéance

Nous avons précédemment tracé des diagrammes de profit de valeur à l'échéance pour les options **à l'expiration**. Nous allons maintenant étendre ceci pour tracer les diagrammes **avant expiration**.

- L'idée est la même qu'auparavant mais on remplace la valeur à l'échéance par la valeur de revente de l'option
- Pour tracer les diagrammes, on fait varier les prix en maintenant fixe les dates.

Nous illustrons ceci avec 2 stratégies :

Achat et revente d'une option d'achat

Crée en :

- Achetant l'option d'achat au temps t_1 ;
- Vendant l'option d'achat au temps t_2 avant l'échéance ($t_2 < T$).

Valeur à t_2

$$= \text{Prix de revente}$$
$$= C(S_{t_2}, K, \sigma, r, T, \delta)$$

Profit à t_2

$$= \text{Prix de revente} - \text{Prix d'achat à } t_1 \text{ accumulé à } t_2$$
$$= C(S_{t_2}, K, \sigma, r, T, \delta) - C(S_{t_1}, K, \sigma, r, T, \delta)e^{r(t_2-t_1)}$$

Écart horizontal

Crée en :

- Vendant une option venant à échéance à t_1 ;
- Achetant une option identique sauf pour la date d'échéance de t_2.

Coût initial Pour des options d'achat on obtient :

$$= C(S, K, \sigma, r, T_2, \delta) - C(S, K, \sigma, r, T_1, \delta)$$

Notes

- Permet de spéculer sur la volatilité de l'action ;
- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va rester fixe ;
- L'écart est d'ailleurs bâtit afin d'avoir un thêta positif et implique la dissolution du portefeuille avant ou à la première des deux échéances ;
- en anglais « *calendar spread* ».

Volatilité implicite

Volatilité implicite La valeur σ tel que la formule de Black-Scholes reproduit le prix de l'option observé sur le marché.

- La volatilité tel quel n'est pas observable et son estimation est problématique ;
- La volatilité *historique* (vue au chapitre 10) n'est pas adéquate car elle ne prévoit pas le futur ;
- On peut en lieu isoler la volatilité *implicite* $\hat{\sigma}$ avec le prix observé de l'action et la formule de Black-Scholes.
  Elle représente donc l'appréciation de la volatilité faite par le marché ;
- Malgré que la volatilité est supposée constante dans la formule, en réalité elle varie selon le prix d'exercice K et la date d'échéance T ;
- On peut l'utiliser pour évaluer une option qui n'existe pas encore ;
- Également, on peut valider ou invalider le modèle de Black-Scholes ;
- Finalement, on peut comparer des options par leur volatilité implicite au lieu de leurs prix.

Les Grecs de l'option

Les grecs servent à mesurer l'exposition au risque en considérant un paramètre de la formule de Black-Scholes à la fois.

- Par défaut, on calcule les grecs en supposant l'achat (et non la vente) d'une option.

Grec	Définition	Mesure le changement de la valeur (V)
Δ	$\frac{\partial V}{\partial S_0}$	de l'option par une augmentation (de 1\$) du prix de l'action.
Γ	$\frac{\partial \Delta}{\partial S_0} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}$	du Delta par une augmentation (de 1\$) du prix de l'action.
$\theta/365$	$\frac{\partial V}{\partial t}$	de l'option par une baisse (d'un jour) de la date d'échéance.
Vega	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	de l'option par une augmentation (de 1%) de la volatilité.
$\rho/100$	$\frac{\partial V}{\partial r}$	de l'option par une augmentation (de 1%) du taux sans risque.
$\psi/100$	$\frac{\partial V}{\partial \delta}$	de l'option par une augmentation (de 1%) de la force de dividende.

Termes financiers

point de pourcentage 1%.

point de base 0.01%.

Grecs

Delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du prix de l'action.

Expressions du Delta pour les options	Domaine
$\Delta_C = \mathrm{e}^{-\delta T} N(d_1)$	$0 \leq \Delta_C \leq 1$
$\Delta_P = -\mathrm{e}^{-\delta T} N(-d_1)$	$-1 \leq \Delta_P \leq 0$

Notes

- Le Delta Δ_C (Δ_P) peut être interprété comme le nombre d'actions à acheter (vendre) pour répliquer une option d'achat (de vente) ;
- Une option d'achat devient de plus en plus profitable lorsque le prix de l'action sous-jacente augmente.
  Alors, Δ_C se rapproche de 0 lorsque l'option est hors du cours ($S_T < K$) et de 1 lorsqu'elle est dans le cours ($S_T > K$).
  Cependant, le Δ_C ne sera jamais négatif, car l'option d'achat a un seuil minimal de 0 pour sa valeur à l'échéance.
  De même, Δ_P ne sera jamais positif ;
- Dans les deux cas, le Δ augmente avec le prix de l'action ;
- Mathématiquement, le domaine est restreint puisque $0 \leq N(x) \leq 1, \forall x$ et $0 \leq e^{-\delta T} \leq 1$.

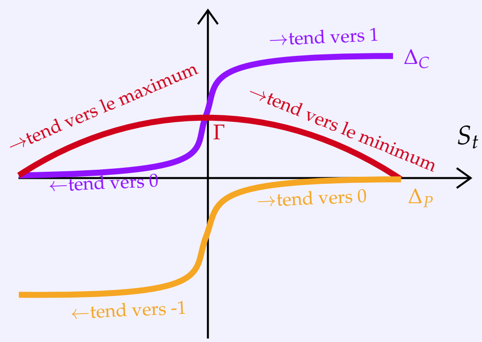
Gamma $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}$

Mesure la variation du Delta de l'option correspondante à une augmentation du prix de l'action.

Expressions du Gamma pour les options	Domaine
$\Gamma_C = \Gamma_P = \dfrac{\mathrm{e}^{-\delta T} N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$	$\Gamma_P = \Gamma_C > 0$

Notes

- Le Γ mesure le *taux* de variation du Δ.
  Puisque le Δ augmente toujours, le Γ est toujours positif ;
- Le Γ est maximisé au cours du marché, car c'est où le Δ connaît le plus de variation.



Theta $\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à l'écoulement du temps.

Note Selon si on dérive par rapport au point de départ t ou à l'échéance T on a que $\boxed{\theta = \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial T}}$

Expressions du Theta pour les options

$$\theta_C = \left(Kr\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2) - S_0\delta\mathrm{e}^{-\delta(T-t)}N(d_1)\right) + \frac{K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

$$\theta_P = \left(S_0\delta\mathrm{e}^{-\delta(T-t)}N(-d_1) - Kr\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(-d_2)\right) + \frac{K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

Notes

- Pour obtenir la variation en valeur par jour—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 365 : $\boxed{\frac{\theta}{365}}$;
- La valeur d'une option décroît avec le temps.
  θ estime de combien, ceteris paribus, la valeur décroît par jour ;
- Ce faisant, θ est habituellement **négatif**.
  Il est *possible* qu'il soit négatif pour une option profondément dans le cours du marché ayant un taux de dividende très élevé ;
- **T**heta pour **t**emps.

Vega alias Lambda $\Lambda = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation de la volatilité de l'action.

Expression du Vega pour les options	Domaine
$\Lambda_C = \Lambda_P = S_0\mathrm{e}^{-\delta T}N'(d_1)\sqrt{T}$	$\Lambda_P = \Lambda_C > 0$

Notes

- Pour obtenir la variation en pourcentage—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\boxed{\frac{\Lambda}{100}}$;
- Une augmentation de la volatilité mène toujours à une augmentation des prix d'options.
  Il s'ensuit que le Vega sera toujours positif et augmente avec la volatilité ;
- **V**ega pour **v**olatilité.

Rho $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du taux sans risque.

Expression du Rho pour les options	Domaine
$\rho_C = TKe^{-rT}N(d_2)$	$\rho_C > 0$
$\rho_P = -TKe^{-rT}N(-d_2)$	$\rho_P < 0$

Notes

- Pour obtenir la variation en pourcentage—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\boxed{\frac{\rho}{100}}$;
- Une augmentation du taux sans risque r fait baisser la valeur actualisée du prix d'exercice Ke^{-rT}.
  Selon la formule de Black-Scholes, baisser Ke^{-rT} fait **augmenter** la valeur d'une option d'achat mais **baisser** celle d'une option de vente.
  Donc, $\rho_C > 0$ et $\rho_P < 0$;
- **R**ho pour taux sans **r**isque.

Psi $\psi = \frac{\partial V}{\partial \delta}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du taux de dividendes.

Expression du Psi pour les options	Domaine
$\psi_C = -TSe^{-\delta T}N(d_1)$	$\psi_C < 0$
$\psi_P = TSe^{-\delta T}N(-d_1)$	$\psi_P > 0$

Notes

- Pour obtenir la variation en pourcentage—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\boxed{\frac{\psi}{100}}$;
- Une augmentation du taux de dividendes δ fait baisser la valeur actualisée du prix de l'action $Se^{-\delta T}$.
  Selon la formule de Black-Scholes, baisser $Se^{-\delta T}$ fait **baisser** la valeur d'une option d'achat mais **augmenter** celle d'une option de vente.
  Donc, $\psi_C < 0$ et $\psi_P > 0$.

Portefeuille

Le grec d'un portefeuille composé de N options sur une même action, avec n_i options de chaque type, est simplement la somme des grecques :

$$\text{Grec}_{\text{ptf.}} = \sum_{i=1}^{N} n_i \text{Grec}_i$$

Élasticité

Élasticité $\Omega = \frac{\Delta S_0}{V}$

Mesure le pourcentage de variation du prix de l'option correspondante au pourcentage d'augmentation du prix de l'action.

Élasticité

$$\Omega_{\text{option}} = \frac{\text{\% variation du prix de l'option}}{\text{\% variation du prix de l'action}} = \frac{(V_t - V_0)/V_0}{(S_t - S_0)/S_0}$$
$$= \Delta \cdot \frac{S_0}{V_0} = \frac{\Delta S_0}{V}$$

Bornes

$\Omega_C \geq 1$ $\Omega_P \leq 0$

Notes

- Pour obtenir la variation par augmentation de 1% du prix de l'action—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\boxed{\frac{\Omega}{100}}$;
- Le Δ peut être vu comme le risque *absolu* d'une action :
$$\Delta = \frac{\text{variation du prix de l'option}}{\text{variation du prix de l'action}}$$
L'élasticité évalue plutôt le risque *relatif* au montant.

Volatilité

Puisqu'un actif sans risque n'a aucune volatilité, la volatilité de l'option (σ_{option}) va seulement dépendre de celle de l'action (σ_{action}).
On ne fait que pondérer par la valeur absolue de l'élasticité de l'option (Ω_{option}) :
$\boxed{\sigma_{\text{option}} = |\Omega_{\text{option}}| \sigma_{\text{action}}}$.

- La valeur absolue assure une volatilité positive.

Rendement sur l'option γ

Pour un portefeuille réplicatif on a que $V = \Delta S + B$.
Avec ceci on trouve :

% investit dans l'action sous-jacente % action $= \frac{\Delta S}{V} = \Omega$.

% investit dans l'actif sans risque % actif $= \frac{B}{V} = 1 - \Omega$.

γ Rendement espéré instantané sur l'option.

- On pondère les rendements sur l'action et l'actif :
$$\gamma = (\text{\% action})\alpha + (\text{\% actif})r$$
$$= \Omega\alpha + (1 - \Omega)r$$
- Ceci est l'équivalent continu de $e^{\gamma h} = \frac{\delta S}{\delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\delta S + B} e^{rh}$.

Prime de risque

Une **prime de risque** est l'excès du rendement espéré d'un actif au taux sans risque.

Prime de risque sur l'action $\alpha - r$

Prime de risque sur l'option $\gamma - r$

- Avec la définition du rendement γ espéré instantané sur l'option on trouve : $\boxed{\gamma - r \equiv \Omega(\alpha - r)}$;
- Dans le modèle d'évaluation des actifs financiers, $\boxed{\alpha - r = \beta_{\text{action}}(\mu_m - r)}$ alias $\beta_{\text{option}} = \beta_{\text{action}} \Omega_{\text{option}}$;
- Si $\alpha > r$ alors $\gamma_C \geq \alpha$ et $\gamma_P \leq r$.

Ratio de Sharpe ϕ

Le **ratio de Sharpe** d'un actif est le ratio de sa prime de risque à sa volatilité.

Ratio de Sharpe de l'action
$$\phi_{\text{action}} = \frac{\alpha - r}{\sigma_{\text{action}}}$$

Ratio de Sharpe de l'option
$$\phi_{\text{option}} = \frac{\gamma - r}{\sigma_{\text{option}}} \equiv \frac{\Omega(\alpha - r)}{|\Omega| \sigma_{\text{action}}}$$

Puisque Ω est positif pour les options d'achat et négatif pour les options de vente :

$\phi_C = \phi_{\text{action}}$ $\phi_P = -\phi_{\text{action}}$

Portefeuille

L'élasticité d'un portefeuille composé de N options avec n_i de chaque type est la moyenne pondérée de l'élasticité de chaque type d'option.
Donc, avec ω_i% du portefeuille investi dans l'option i, on a :

$$\Omega_{\text{ptf.}} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Omega_i, \text{ où } \omega_i = n_i \times \frac{V_i}{V_{\text{ptf.}}}$$

On peut également le calculer avec les paramètres du portefeuille $\Omega_{\text{ptf.}} = \frac{\Delta_{\text{ptf.}} S}{V_{\text{ptf.}}}$.

Approximation

- On peut approximer la variation du prix de l'option avec les grecques ;
- Le Delta *varie avec le prix* :
  - Le Delta *sous-estime* l'*augmentation* du prix de l'option d'achat quand le prix de l'action augmente et *surestime* la *diminution* ;
  - Alors, le Delta est seulement valide comme approximation du prix pour des très petites variations
- En considérant le Gamma, l'approximation devient valide pour des plus grandes variations ;
- Cependant, la meilleure approximation se fait en incluant Theta pour considérer *l'effet du temps*.

Approximation Delta-Gamma-Theta

$$C(S_t + \varepsilon) \approx C(S_t) + \Delta_t \varepsilon + \frac{1}{2} \Gamma_t \varepsilon^2 + \theta_t h$$

Notes

- ε est la variation du prix.
- h et θ doivent être dans la même unité de temps.
- θ diminue l'approximation, car il est habituellement négatif.

13 Tenue de marché et couverture en delta neutre

Opérations pour compte propre

Opérations effectuées par une institution financière pour son propre compte afin de suivre une stratégie d'investissement.

- En anglais « *proprietary trading* » ;
- On distingue les opérations pour compte propre de la tenue de marché :
  - Les clients et opérateurs pour compte propre profitent des mouvements des marchés ;
  - Les teneurs de marché profitent des frais de transactions ;
  - Ils offrent l'immédiateté et se tiennent prêt à acheter et à vendre des produits dérivés selon les ordres des clients ou investisseurs.

Couverture en delta neutre

Une position couverte en delta neutre a un $\Delta = 0$ et permet aux teneurs de marché de se protéger contre le risque d'une chute du prix de l'action.

Contexte

- Les teneurs de marchés ne souhaitent pas profiter du marché mais plutôt des transactions ;
- La couverture en delta neutre est une donc façon de minimiser le risque de leurs positions ;
- Cette couverture est couramment utilisée en pratique.

Pour avoir une couverture en delta neutre, les teneurs de marché calculent le Δ de l'option puis prennent la position inverse dans le sous-jacent pour compenser.

- Le delta d'une action est de 1 car $\Delta_{\text{action}} = \frac{\partial S}{\partial S} = 1$.
- La couverture comporte des coûts et requiert du capital ;
- De plus, l'idée importante à retenir est qu'une position couverte **devrait avoir un rendement égal au taux sans risque**.

Exemple Un teneur de marché vend 100 options d'achat à un $\Delta_C = 0.55$ et souhaite avoir une couverture en delta neutre. Alors, il achète $100 \times \Delta_C = 55$ actions. L'investissement net est de $+100 \times C(K) - 55 \times S_0$. S'il souhaite avoir un flux monétaire initial de zéro, il va emprunter (ou prêter si c'est positif) ce montant au taux sans risque.

Profit sur 2 jours d'un portefeuille couvert en delta neutre

Composantes du portefeuille

1. Achat ou vente d'options.
2. Achat ou vente d'actions.
3. Emprunt ou prêt d'argent.

Composantes du profit

1. Profit sur les options.
2. Profit sur les actions.
3. Profit sur l'obligation.

- Par exemple, le profit sur les options le lendemain serait $100 \times (C_0 e^{r(\frac{1}{365})} - C_{1/365})$;
- Si le teneur de marché veut recouvrir sa position le lendemain, il achète (ou vend) $100 \times (C_{1/365} - C_0)$.

Selon la structure de Black-Scholes, le teneur de marché demeure rentable après un période de temps h pour $\boxed{S \pm S\sigma\sqrt{h}}$.

Pour un teneur de marché qui vend une option et couvre sa position en delta neutre, il a :

1. Une position courte sur l'option ;
2. Une position longue sur Δ_t actions ;
3. Une position sur une obligation zéro-coupon sans risque.

Son profit de t à $t+h$ est la somme des variations des composantes $\boxed{[+V_t e^{rh} - V_{t+h}] + [-\Delta_t S_t e^{rh} + \Delta_t S_{t+h}]}$.

Note sur les autres grecs Si un teneur de marché souhaite couvrir avec de multiples grecs, il suffit de poser les grecs du portefeuille égaux à 0. Cependant, puisque tous les grecques autre que le Δ d'une action sont 0, on nécessite une deuxième option. Par exemple pour l'achat de 100 options d'achat de type 1, on achète y options d'achat de type 2 et x actions pour obtenir un portefeuille couvert en delta et gamma neutre :

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{ptf.}} &= -100\Delta_{C^I} + (x)\Delta_{\text{action}} + (y)\Delta_{C^{II}} \\ &= -100\Delta_{C^I} + (x)(1) + (y)\Delta_{C^{II}} \\ \Gamma_{\text{ptf.}} &= -100\Gamma_{C^I} + (x)(0) + (y)\Gamma_{C^{II}}\end{aligned}$$

Note sur θ Thêta mesure la *variation du prix* à l'écoulement *du temps* et n'a pas lié au risque de l'action. Il en résulte que le delta et le gamma d'un dépôt sans risque sont nuls, mais pas le thêta. Pour un dépôt de 1$, la valeur accumulée t années plus tard est e^{rt}. Le thêta de ce dépôt est $\theta_{\text{sans risque}} = \frac{\partial re^{rt}}{\partial t} = re^{rt}$.

Autofinançant

Portefeuille dont la couverture, même si elle existe un rééquilibrage, entraîne uniquement des flux monétaires intermédiaires nuls est dit autofinançant.

Analyse de Black-Scholes

Équation de Black-Scholes :

$$rS_t\frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} = rC_t$$

- Valide pour les options d'achat et de vente ;
- L'équation suppose aucun dividendes et que les paramètres r et σ sont constants ;
- Elle est valide pour les options d'achat et de vente américaines à tout instant où il n'est pas optimal d'exercer l'option avant l'échéance ;
- En théorie, le rééquilibrage devrait se faire en continu ;
- En pratique, les frais de transactions sont trop élevés et c'est plutôt lorsque le delta change ;
- Augmenter la fréquence du rééquilibrage (pour ramener le delta à zéro) :
  - Réduit la variabilité du rendement ;
  - Permet de tirer avantage de la diversification temporelle ;
  - N'affecte pas la moyenne du rendement sur une période donnée.

$R_{h,i}$ Le rendement de la période i avec une durée h entre les ajustements, en supposant que la position d'une option d'achat achetée est delta-neutre au départ ;

$$R_{h,i} = \frac{1}{2}S^2\sigma^2\Gamma(x_i^2 - 1)h$$

x_i Nombre d'écarts-types dont le prix de l'action se déplace dans la période.

$$\text{Var}(R_{h,i}) = \frac{1}{2}(S^2\sigma^2\Gamma h)^2$$

14 Options exotiques : I

Options asiatiques

Options asiatiques

La valeur à l'échéance dépend du prix moyen du sous-jacent sur une certaine période de temps.

- On les surnomme aussi des *options sur moyenne* ;
- Contrairement aux options classiques, les options asiatiques dépendent de la trajectoire que le prix a suivi.

Options sur la moyenne

Il y a huit versions de base des options sur moyenne :
- Option d'achat ou de vente ;
- Moyenne arithmétique $A(S)$ ou géométrique $G(S)$ où $\boxed{G(S) \leq A(S)}$;

$$A(S) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} S_t \qquad G(S) = \left(\prod_{t=1}^{N} S_t\right)^{1/n}$$

- Moyenne du sous-jacent ou du prix d'exercice.

Pour des options ordinaires :

$$\text{valeur à l'échéance d'une option d'achat} = \max[0, S_T - K]$$

$$\text{valeur à l'échéance d'une option de vente} = \max[0, K - S_T]$$

Option asiatique sur le prix moyen

On remplace S_t par le prix moyen $\bar{S}$ pour la valeur à l'échéance des options :

$$\text{valeur à l'échéance d'une option d'achat} = \max[0, \bar{S} - K]$$

$$\text{valeur à l'échéance d'une option de vente} = \max[0, K - \bar{S}]$$

Option asiatique sur le prix d'exercice moyen

On remplace K par le prix moyen $\bar{S}$ pour la valeur à l'échéance des options :

$$\text{valeur à l'échéance d'une option d'achat} = \max[0, S_T - \bar{S}]$$

$$\text{valeur à l'échéance d'une option de vente} = \max[0, \bar{S} - S_T]$$

Note : Deux erreurs fréquentes sont d'inclure le prix initiale dans la moyenne et ne pas calculer V_{ud} *et* V_{du} lorsqu'on utilise la moyenne géométrique.

Points importants

1. La valeur d'une option asiatique sur le prix moyen est inférieure ou égale à la valeur d'une option européenne équivalente.
   - Le plus faible la volatilité d'une action, le moins il est probable qu'elle ait une valeur à l'échéance positive ;
   - Le prix moyen d'une action $\bar{S}$ est moins volatile que le prix final de l'action S_t ;
   - Il s'ensuit que l'option asiatique a une valeur à l'échéance plus faible.
2. La valeur d'une option asiatique sur le prix moyen baisse lorsque la fréquence d'échantillonnage N augmente.
   - De façon semblable, augmenter N diminue la moyenne et donc la valeur à l'échéance de l'option asiatique.
3. La valeur d'une option asiatique sur le prix d'exercice moyen augmente lorsque la fréquence d'échantillonnage N augmente.
   - Puisque l'on soustrait le prix moyen de l'action $\bar{S}$, il s'ensuit que l'écart avec le prix à l'échéance S_t augmente.

Options à barrière

Options à barrière

Une option qui peut **désactiver ou activer** si le prix de l'actif sous-jacent atteint une **barrière** précise alors que l'option est en vigueur.

- Les options à barrière dépendent de la trajectoire que le prix a suivi.

Types d'options à barrière

Il y a trois types d'options à barrière :

Options à barrière activante

S'active si la barrière est atteinte.

Si la barrière est :

Dessous le prix initial de l'action, c'est une option dite « *down-and-in* » : le prix doit baisser pour atteindre la barrière ;

Dessus le prix initial de l'action, c'est une option dite « *up-and-in* » : le prix doit augmenter pour atteindre la barrière.

- En anglais, « *Knock-in option* » car l'option est « *knocked-in* si la barrière est atteinte » ;
- Si l'option est activée alors la valeur à l'échéance est identique à une option européenne ordinaire sinon elle est nulle.

Options à barrière désactivante

Se désactive si la barrière est atteinte.

Si la barrière est :

Dessous le prix initial de l'action, c'est une option dite « *down-and-out* » ;

Dessus le prix initial de l'action, c'est une option dite « *up-and-out* ».

- En anglais, « *Knock-out option* » car l'option est « *knocked-out* si la barrière est atteinte » ;
- Si l'option est désactivée alors la valeur à l'échéance est nulle sinon il est identique à une option européenne ordinaire.

Options à barrière avec remise

Paye un montant fixe si la barrière est atteinte.

Si la barrière est :

Dessous le prix initial de l'action, on l'appelle un « *down rebate* » ;

Dessus le prix initial de l'action, on l'appelle un « *up rebate* ».

- En anglais, « *Rebate option* » ;
- Si le paiement se fait uniquement à l'échéance, c'est une remise différée (« *deferred rebate* »).

Parité

Pour des options à barrière désactivante et activante, autrement équivalentes, on a :

$$\begin{aligned} \text{option à barrière activante} + \text{option à barrière désactivante} &= \text{option régulière} \\ \Rightarrow \text{option à barrière} &\leq \text{option régulière} \end{aligned}$$

- Donc l'option régulière ne dépend pas de la barrière ce qui peut être utile pour certaines questions.

Cas particuliers

Dans le cas où $S_0 \leq$ barrière $\leq K$, l'option d'achat « *up-and-in* » est équivalente à l'option d'achat ordinaire.

- Dans les deux cas, le prix doit monter passé la barrière pour obtenir une valeur à l'échéance positive ;
- Par l'équation de parité, on déduit que l'option d'achat « *up-and-out* » a une valeur nulle.

Le même cas se produit où $K \leq$ barrière $\leq S_0$ pour une option de vente « *down-and-in* ».

Options sur option

Options sur option

Option qui permet à son détenteur **d'acheter ou de vendre une autre option** au prix d'exercice précisé.

- On les surnomme aussi des *options composées* ;
- En anglais, « *compound option* » ;
- Ils ont deux prix d'exercice et deux dates d'échéance (pour l'option composée et l'option sous-jacente).

Types d'options sur options

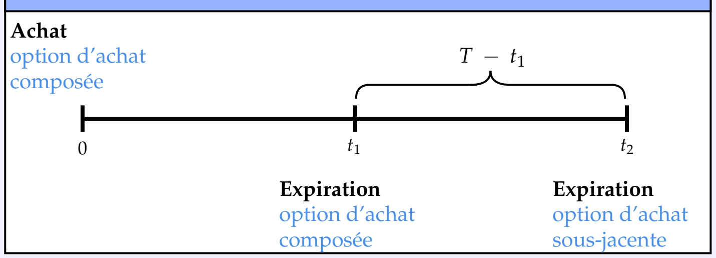
Pour calculer la valeur à l'échéance dans les deux cas, on compare le prix d'exercice x à la valeur de l'option sous-jacente à l'échéance dans $T - t_1$ temps. On peut donc voir s'il est profitable d'acheter l'option sous-jacente maintenant à t_1.

Option d'achat composée

Permet au détenteur d'acheter une autre option au prix d'exercice.
L'option peut être soit un « *call on call* » ou un « *call on put* ».

On achète une option d'achat composée au temps 0 à un prix d'exercice de x expirant à t_1.
L'option sous-jacente a un prix d'exercice de K et expire à T.

Déroulement d'une option d'achat composée



La valeur à l'échéance de l'option *sous-jacente* à t_1 est dénotée $\boxed{V[S_{t_1}, K, \underbrace{T - t_1}_{\text{temps restant avant échéance}}]}$.

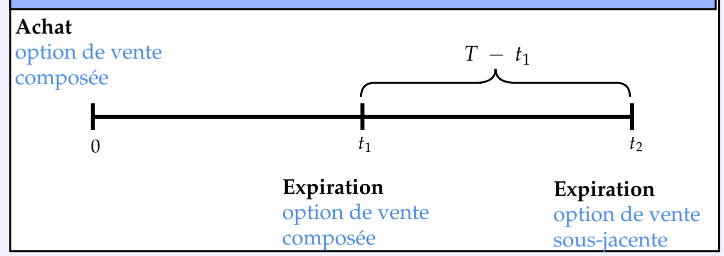
La valeur à l'échéance de l'option d'achat *composée* à t_1 est $\boxed{\max(0, \underbrace{V[S_{t_1}, K, T - t_1]}_{S_T \text{ pour des options classiques}} - x)}$.

Option de vente composée

Permet au détenteur de vendre une autre option au prix d'exercice.
L'option peut être soit un « *put on call* » ou un « *put on put* ».

On achète une option de vente composée au temps 0 à un prix d'exercice de x expirant à t_1.
L'option sous-jacente a un prix d'exercice de K et expire à T.

Déroulement d'une option de vente composée



La valeur à l'échéance de l'option de vente *composée* à t_1 est $\boxed{\max(0, x - V[S_{t_1}, K, T - t_1])}$.

Parité

On généralise l'équation de parité des options vente-achat :

$$\begin{aligned} \text{CallonStock} - \text{PutonStock} &= F^P(S) - Ke^{-rT} \\ \Rightarrow \text{CallonCall} - \text{PutonCall} &= C_{\text{eur}} - xe^{-rt_1} \\ \text{CallonPut} - \text{PutonPut} &= P_{\text{eur}} - xe^{-rt_1} \end{aligned}$$

Options avec écart

Options avec écart

Contrairement au options classiques qui ont un seul prix pour déterminer le moment d'exercice et la valeur à l'échéance, les options avec écart ont un prix pour chacune des fonctions créant alors un *écart*.

Notation

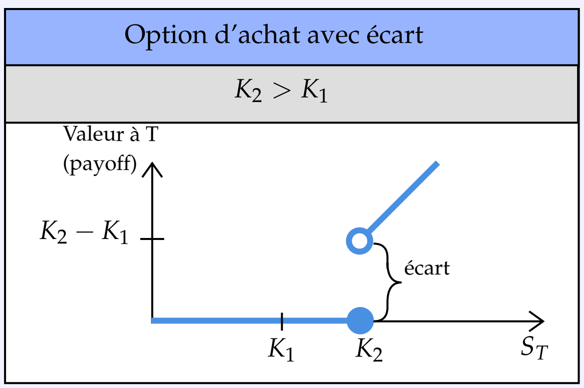
K_1 Prix *d'exercice* utilisé pour calculer la valeur à l'échéance ;

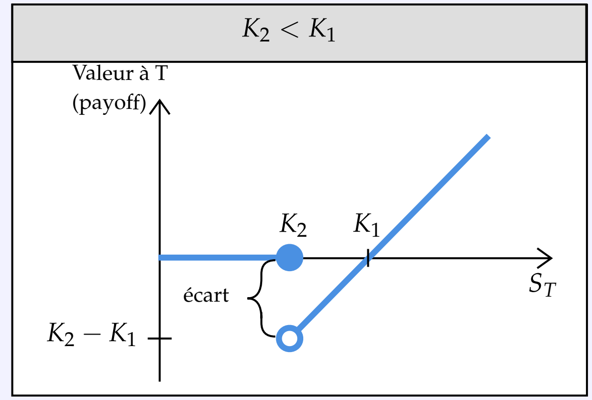
K_2 Prix *déclencheur* utilisé pour décider s'il y a exercice ou pas.

› En anglais, « *gap option* ».

Option d'achat avec écart

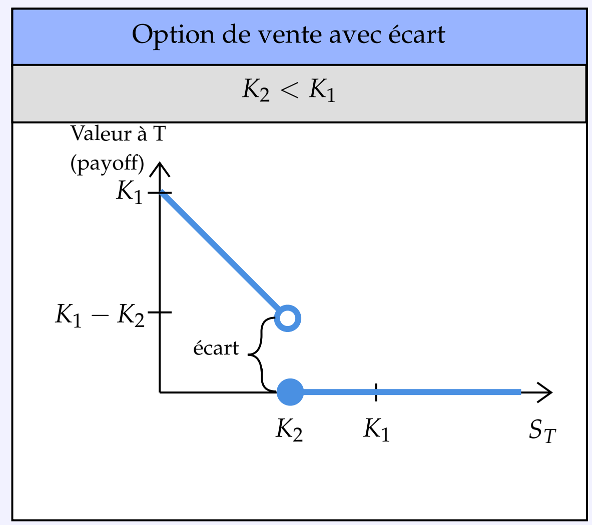
$$\text{Valeur à l'échéance} = \begin{cases} 0, & S_T \leq K_2 \\ S_T - K_1, & S_T > K_2 \end{cases}$$

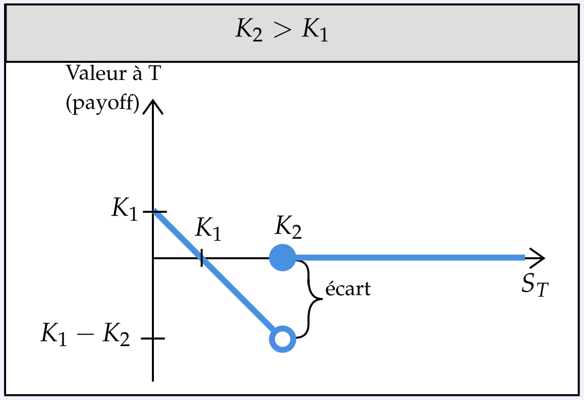




Option de vente avec écart

$$\text{Valeur à l'échéance} = \begin{cases} K_1 - S_T, & S_T < K_2 \\ 0, & S_T \geq K_2 \end{cases}$$





- Il est possible d'avoir une valeur à l'échéance *négative* si le prix déclencheur K_2 est inférieur au prix d'exercice K_1 pour une option d'achat (ou si $K_1 < K_2$ pour une option de vente) ;
- Cependant, même si la valeur à l'échéance est négative, l'exercice est obligatoire lorsque le prix déclencheur est atteint ;
- Cela dit, il est en revanche possible d'avoir une **prime négative**.

Formule de Black-Scholes

On substitue le K dans l'équation principale pour le prix d'exercice K_1 et le K dans l'équation de d_1 pour le prix déclencheur K_2.

$$\text{GapCall} = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K_1 e^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{GapPut} = K_1 e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-\delta T} N(-d_1)$$

où $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Pour se rappeler quel K remplacer :

- Le prix d'exercice K_1 détermine le montant de la valeur à l'échéance et est donc associé avec Ke^{-rT} dans l'équation principale ;
- Le prix déclencheur K_2 détermine si l'exercice a lieu et est donc associé avec le calcul d'une probabilité $N(d_2)$.

Relation avec les options classiques

$$\text{GapCall} \pm K_2 e^{-rT} N(d_2) = C_{\text{eur}}(K_2) + (K_2 - K_1) e^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{GapPut} \pm K_2 e^{-rT} N(-d_2) = P_{\text{eur}}(K_2) + (K_1 - K_2) e^{-rT} N(-d_2)$$

Parité

$$\text{GapCall} - \text{GapPut} = S_0 e^{-\delta T} - K_1 e^{-rT}$$

Options d'échange

Options d'échange

Permet au détenteur d'échanger un actif pour un autre.

- En anglais, « *exchange option* ».

Formule de Black-Scholes

Formule en format simple et selon la notation de Claire où l'on achète k du titre Q par unité du titre S

$$\begin{aligned} C(A,B) &= F^P(A)N(d_1) - F^P(A)N(d_2) \\ &= S_0 e^{-\delta_S T} N(d_1) - kQ_0 e^{-\delta_Q T} N(d_2) \\ P(A,B) &= F^P(B)N(-d_2) - F^P(A)N(-d_1) \\ &= kQ_0 e^{-\delta_Q T} N(d_1) - S_0 e^{-\delta_S T} N(d_2) \end{aligned}$$

où $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F^P(A)}{F^P(B)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ et $\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B}}$.

18 La loi lognormale

Notation

$N(d)$ Représente $Pr(Z \leq d)$.

La distribution normale

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)}$;
- La loi normale est symétrique donc $\boxed{N(-d) = 1 - N(d)}$, $\boxed{\forall d \in \mathbb{R}}$ et $\boxed{\Pr(-d \leq Z \leq d) = 2N(d) - 1}$, $\boxed{\forall d \in \mathbb{R}_+}$;
- $\boxed{aX_1 + bX_2 \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)}$;
- La FGM est $M_X(t) = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

La distribution lognormale

Lorsque $Y = \mathrm{e}^X$ alors $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

- Les deux premiers moments sont obtenus de la FGM de la distribution normale et ne sont ***pas*** les paramètres :
  $$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{e}^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \qquad \mathrm{Var}(Y) = (\mathrm{E}[Y])^2 \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$
- $\boxed{F_Y(y) = N\left(\frac{\ln(y) - \mu}{\sigma}\right)}$, $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+}$.

La distribution lognormale a 2 propriétés intéressantes :

1. Elle est asymétrique à droite et donc ***non-négative*** puisque $\mathrm{e}^X \geq 0$:
   $$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^X] \geq \mathrm{e}^{\mathrm{E}[X]} = \mathrm{e}^{\mathrm{E}[\ln(Y)]}$$
   - Alors supposer que le prix d'une action suit une distribution lognormale suppose qu'il ne peut pas être négatif (une hypothèse réaliste).
2. Le ***produit*** (et non la somme) de deux variables aléatoires lognormales est une variable aléatoire.
   - $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}$
   - $\mathrm{e}^{X_1} \times \mathrm{e}^{X_2} \sim LN$

Un modèle lognormale des prix de l'action

Introduction

Notation

$R(0,t)$ Rendement composé continûment entre 0 et t sur un titre donné ;

- Par définition, $\boxed{R(0,T) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)}$;
- On suppose que $R_{0,t}$ suit une loi normale et donc il s'ensuit que S_t suit une loi lognormale.

- Avec les propriétés des exposants, on trouve que $S_{t_2} = S_{t_1}\mathrm{e}^{R(t_1,t_2)} = S_{t_0}\mathrm{e}^{R(t_0,t_1)+R(t_1,t_2)}$;
- Avec la propriété de la loi normale, on trouve que $\boxed{R(0,T) = \sum_{i=1}^{n} R\left((i-1)h, ih\right)}$ où les rendements sont (i.i.d.) pour $i = 1, 2, \ldots, n$;
- Avec $R\left((i-1)h, ih\right) \sim \mathcal{N}(\mu_h, \sigma_h^2)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $R(0,T) \sim \mathcal{N}(n\mu_h, n\sigma_h^2)$. C'est-à-dire que la moyenne et la variance des rendements sont *proportionnels au temps* ;
- Sous base annuelle, $\mu = \frac{\mu_h}{h}$ et $\sigma = \frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}$ donc $\boxed{R(0,T) \sim \mathcal{N}(\mu_h T, \sigma_h^2 T)}$.

De façon générale, on suppose que le temps t est mesuré en années, que la moyenne α et la volatilité (variance) σ^2 sont sous base annuelle puis que le taux de dividendes sur l'action δ est sous base annuelle aussi.

Modèle

On cherche $\mathrm{E}[S_t] = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)t}$

Distribution

On pose que le gain en capital composé continûment de 0 à t $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ est normalement distribué :

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

On écrit donc :
$$S_t = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$$

Moyenne variance et covariance

Avec cette distribution, on obtient :

$$\mathrm{E}[S_t] = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)t}$$

$$\Rightarrow \ln \mathrm{E}\left[\frac{S_t}{S_0}\right] = (\alpha-\delta)t$$

- Il est désirable que l'espérance ne dépend pas de la volatilité σ ;
- En fait, on soustrait $\frac{1}{2}\sigma^2$ dans le paramètre μ afin qu'il s'annule dans le calcul de l'espérance de la loi lognormale ;
- La quantité $\alpha-\delta$ est le taux d'appréciation de l'action composé continûment.

$$\mathrm{Var}(S_t) = (\mathrm{E}[S_t])^2 \left(\mathrm{e}^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

$$Cov(S_t, S_t) = \mathrm{E}\left[\frac{S_t}{S_t}\right] \cdot \mathrm{Var}(S_t) = \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)(T-t)}\mathrm{Var}(S_t)$$

Trouver le p-ème percentile de S_t

1. Trouver le percentile correspondant z_α de la loi normale standard Z.
2. Insérer le percentile correspondant de Z dans l'équation pour S_t.

La médiane :

- La médiane $\boxed{\mathrm{E}[S_t]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}}$ est inférieure à la moyenne ;
- Alors, une action distribuée selon la loi lognormale aura des rendements inférieurs à la moyenne plus que la moité du temps ;
- Il s'ensuit qu'augmenter σ ne va pas impacter la moyenne mais va faire *baisser la médiane*.

Déplacement d'un écart type :

En posant $Z_i = \pm 1$, on trouve qu'un déplacement d'un écart type de $S_{(i-1)h}$ est $S_{ih} = S_{(i-1)h}\mathrm{e}^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h \pm \sigma\sqrt{h}}$

Calculs de probabilités lognormales

On pose :

$$\hat{d}_1 = \left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (\alpha-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \qquad \hat{d}_2 = \left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Trouver une probabilité pour S_t

$$\Pr(S_t \leq K) = N(-\hat{d}_2) \qquad \Pr(S_t > K) = N(\hat{d}_2)$$

$$\Pr{}^*(S_t \leq K) = N(-d_2) \qquad \Pr{}^*(S_t > K) = N(d_2)$$

Trouver un intervalle de prévision de S_t de niveau $1-\alpha$

1. Trouver le percentile correspondant de la loi normale standard Z $\boxed{z_{\alpha/2} = N^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$.
2. Insérer le percentile correspondant dans l'équation pour $\boxed{S_t \in S_0\mathrm{e}^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t \pm z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{t}}}$.

Espérance conditionnelle du prix de l'action

$$\mathrm{E}[S_t|S_t \leq K] = \frac{\mathrm{E}\left[S_t \times \mathbf{1}_{\{S_t \leq K\}}\right]}{\Pr(S_t \leq K)} = S_0\mathrm{e}^{(\alpha-\delta)t}\frac{N(-\hat{d}_1)}{N(-\hat{d}_2)}$$

$$\mathrm{E}[S_t|S_t > K] = \frac{\mathrm{E}\left[S_t \times \mathbf{1}_{\{S_t > K\}}\right]}{\Pr(S_t > K)} = S_0\mathrm{e}^{(\alpha-\delta)t}\frac{N(\hat{d}_1)}{N(\hat{d}_2)}$$

$$\mathrm{E}^*[S_t|S_t \leq K] = S_0\mathrm{e}^{(r-\delta)t}\frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} \qquad \mathrm{E}^*[S_t|S_t > K] = S_0\mathrm{e}^{(r-\delta)t}\frac{N(d_1)}{N(d_2)}$$

Formule de Black-Scholes pour le prix d'options européennes

Avec ces espérances, on trouve maintenant :

$$\begin{aligned} C(K) &= \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}^*[\text{valeur à l'échéance de l'option d'achat}] \\ &= S_0\mathrm{e}^{-\delta T}N(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}N(d_2) \\ P(K) &= \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}^*[\text{valeur à l'échéance de l'option de vente}] \\ &= K\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) - S_0\mathrm{e}^{-\delta T}N(-d_1) \end{aligned}$$

Énoncés équivalents

- Le modèle de Black-Scholes s'applique.
- Le prix de l'action suit un modèle lognormale.
- $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(m = \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, v^2 = \sigma^2 t\right)$.
- $S_t = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}Z}$.

Estimation des paramètres (le rendement et la volatilité) de la loi lognormale

Soit $n+1$ prix observés $S_0, S_1, \ldots, S_n$ à un intervalle régulier de longueur h.

Estimation des paramètres de la distribution lognormale

1. Calculer le rendement composé continûment, non annualisé, pour chacune des i périodes :
$$r_i = \ln\left(\frac{S_{ih}}{S_{(i-1)}}\right), \forall i = 1, 2, \ldots, n$$
2. Calculer la moyenne de l'échantillon des rendements.
$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} \underset{\substack{\text{propriété} \\ \text{des log.}}}{\equiv} \frac{\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)}{n}$$
3. Estimer l'écart-type des rendements.
$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1}}$$
4. Mettre l'estimation de la volatilité sous base annuelle.
$$\hat{\sigma} = \frac{s_r}{\sqrt{h}}$$
5. Mettre l'estimation du rendement espéré sous base annuelle.
$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)\right] = \left(\hat{\alpha} - \delta - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)h = \bar{r}$$
$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{\bar{r}}{h} + \delta + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$

Risque d'investissement

Note Chapitre 10.1 des notes de Coaching Actuaries pour IFM. Pas dans le cadre du cours de GRF II.

Variance Mesure de risque symétrique qui prend en compte les rendements au-dessus et en dessous de la moyenne ;

Semi-variance Écart-type moyen en dessous de la moyenne.

- En anglais, « *semi-variance* » ;
- $\boxed{\sigma_{SV}^2 = \mathrm{E}\left[\min(0, R - \mathrm{E}[R])^2\right]}$;
- Le « *downside semi-variance* » est la racine σ_{SV} de la semi-variance.

Value-at-Risk (VaR) $100\alpha^e$ pourcentile ;

Tail Value-at-Risk (VaR)
- Alias, « *expected shortfall* » ou « *conditional tail expectation* » ;
- Si X représente les gains, on s'intéresse à l'extrémité inférieure de la distribution des gains et $\boxed{TVaR_\alpha(X) = \mathrm{E}[X|X \leq \alpha] = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{VaR_\alpha} x f_X(x)dx}$;
- Si X représente les pertes, on s'intéresse à l'extrémité supérieure de la distribution des gains et $\boxed{TVaR_\alpha(X) = \mathrm{E}[X|X > \alpha] = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha}^{\infty} x f_X(x)dx}$;

Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque ρ est dite "**cohérente**" si elle rencontre ces 4 caractéristiques :

1. Invariance à la translation si pour un $\boxed{\text{scalaire } c > 0}$, la mesure de risque $\boxed{\rho(X + c) = \rho(X) + c}$;
   - Ajouter un montant positif à un risque ajoute un montant équivalent à la mesure de risque.
2. Homogénéité positive si pour un $\boxed{\text{scalaire } c > 0}$, la mesure de risque $\boxed{\rho(cX) = c\rho(X)}$;
   - Multiplier le risque X par un montant positif c ajuste la mesure de risque ρ proportionnellement.
3. Sous-additivité si la mesure de risque $\boxed{\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)}$;
   - Combiner des risques mène à des bénéfices de mutualisation tant qu'ils ne sont pas parfaitement corrélés.
4. Monotonicité si pour $\boxed{X \leq Y}$, la mesure de risque $\boxed{\rho(X) \leq \rho(Y)}$.
   - Si un risque X est moins risqué qu'un autre risque Y, les mesures de risques doivent également suivent l'ordre.

Analyse du risque d'un projet

Note Chapitre 10.2 des notes de Coaching Actuaries pour IFM. Pas dans le cadre du cours de GRF II.

On souhaite toujours maximiser la valeur actualisée nette (VAN) d'un projet avec $\boxed{VAN = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i_t)^t}}$.

Pour ce faire, on doit estimer les flux monétaires futurs ainsi que le coût du capital. Nous voyons 4 façons d'évaluer l'impact de cette incertitude et d'identifier les principaux facteurs sous-jacents à la VAN d'un projet.

Analyse de rentabilité (« *break-even analysis* »)

Lorsque la valeur actualisée nette (VAN) est nulle, un projet devient rentable.
Une analyse de rentabilité calcule la valeur de chaque paramètre tel que la VAN du projet est nulle.
Notamment, on isole le « *internal rate of return (IRR)* » :

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1 + IRR)^t} = 0$$

On peut aussi isoler la seuil de rentabilité pour le nombre d'unités à vendre, le prix par unité, le coût par unité de marchandise, etc.

Analyse de sensibilité (« *sensitivity analysis* »)

Une analyse de sensibilité évalue la sensibilité de la VAN à chacune des variables en les faisant varier une à la fois. Ceci permet d'identifier les variables les plus importantes selon leurs effets sur la VAN.

On débute par calculer la VAN d'un scénario de référence. Puis, on calcule la VAN en variant une des variables par un pourcentage fixe.

Analyse de scénarios (« *scenario analysis* »)

L'analyse de scénarios est semblable à l'analyse de sensibilité sauf que l'on fait varier plusieurs variables à la fois. Le plus la VAN varie selon les différents scénarios, plus le risque du projet est élevé.

Simulation Monte-Carlo

On estime la distribution de probabilité d'une quantité d'intérêt (e.g., la VAN).
Les étapes générales sont :

1. Construire le modèle d'intérêt ;

2. Simuler des nombres aléatoires d'une distribution supposée pour chacune des variables ;
3. Déterminer la valeur de la quantité d'intérêt avec les variables calculées précédemment ;
4. Répéter les 2 étapes précédentes un grand nombre de fois ;
5. Calculer des mesures d'intérêt (moyenne, variance, etc.) puis tracer les valeurs simulées comme une distribution de probabilité.

19 Évaluation par la méthode de Monte Carlo

Lorsque la valeur à l'échéance dépend de la trajectoire du prix, le modèle binomiale devient trop compliqué et nous utilisons plutôt la méthode de Monte Carlo ; on simule des prix pour estimer le prix (alias la valeur espérée actualisée) de l'option. La méthode de Monte Carlo utilise la distribution neutre au risque et le taux sans risque.

Calcul du prix de l'option comme une valeur espérée actualisée

Notation

E_0^* Espérance calculée à $t = 0$ en utilisant la distribution neutre au risque ;

$V(S_T, T)$ Valeur à l'échéance d'une option dont la valeur du sous-jacent à T est S_T ;

$V(S_0, 0)$ Prix de l'option ;

- On calcul le prix de l'option avec une évaluation neutre au risque et donc on pose que le rendement est égale au taux sans risque.
$$V(S_0, 0) = \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}_0^*[V(S_T, T)]$$

Évaluation avec des probabilités neutres au risque

Pour évaluer une option avec la méthode binomiale, on calcule la valeur à l'échéance à chacun des nœuds sur n périodes puis on pondère par la probabilité d'y arriver et actualise :

$$C = \mathrm{e}^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(p^*)^{n-i}(1-p^*)^i \max(0; S_0u^{n-i}d^i - K)$$
$$P = \mathrm{e}^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(p^*)^{n-i}(1-p^*)^i \max(0; K - S_0u^{n-i}d^i)$$

Évaluation des vraies probabilités

On remplace p^* par p cependant, au lieu d'appliquer e^{-rT} à tous, il faut utiliser un différent rendement pour chaque trajectoire.

Génération de nombres aléatoires

On simule des chiffres u provenant d'une distribution uniforme $U(a, b)$. Lorsque la distribution est $U(0, 1)$, on peut interpréter les chiffres u comme des quantiles et obtenir des valeurs $F^{-1}(u)$ pour une distribution (Méthode de l'inverse).

Simulation de prix lognormaux

On rappel que $\boxed{S_T = S_0\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\}.}$ Pour simuler des prix lognormaux S_T on insère des valeurs aléatoire de $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ dans la formule.

Simulation d'une séquence de prix d'action

Si la valeur à l'échéance d'une option dépend de celle du sous-jacent à différents moments dans le temps, il faut simuler des trajectoires pour trouver le prix.

Soit une option venant à échéance à T dont la valeur dépend de celle du sous-jacent à n moments (également espacés entre 0 et T).

$$S_h = S_0\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_1\right\}$$
$$S_{jh} = S_{(j-1)h}\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_j\right\}, \quad \boxed{j = 2, 3, \ldots, n}$$

Donc, $\boxed{S_{nh} = S_T = S_0\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sqrt{T}\sigma\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}Z_j\right\}}$ où $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1).}$

Évaluation par la méthode de Monte Carlo

Notation

$S_T(i)$ Prix du sous-jacent à T généré aléatoirement avec la distribution neutre au risque ;

- On pose que le prix du sous-jacent suit une distribution neutre au risque en posant $\alpha = r$.

$V(S_T(i), T)$ Valeur à l'échéance de l'option selon la simulation i, $V(S_T(i), T) = \max(0; S_T(i) - K)$.

On trouve que selon la méthode de Monte Carlo, $V(S_0, 0) = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V(S_T(i), T)$.

Évaluation par la méthode de Monte Carlo d'une option d'achat européenne

L'estimation du prix de l'option est donc :

$$\overline{C} = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max(0; S_T(i) - K)$$

Notation

σ_C Écart-type de C basé sur une seule simulation ;

- On peut l'estimer par $s_c = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left\{C(S_T(i)) - \overline{C}\right\}^2}$.

$\sigma_{\overline{C}}$ Écart-type de C basé sur N simulations, $\sigma_{\overline{C}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_C$.

Option sur moyenne (« *asian* ») arithmétique

On estime le prix tel que illustré à la section 19.3 puis on trouve que l'estimé du prix de l'option est $\overline{AC} = \mathrm{e}^{-rT} \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max\left(0; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{jh}(i) - K\right)$.

Évaluation par la méthode efficace de Monte Carlo

La méthode décrite jusqu'ici est la méthode simple (alias, naïve) de Monte Carlo. Il existe des méthodes pour améliorer la précision, et donc réduire la variance de l'estimé.

Variable de contrôle

L'idée de la variable de contrôle est d'estimer l'erreur à chaque itération avec le prix d'une option reliée dont le prix peut être calculé par la formule. On peut ensuite appliquer cette erreur pour améliorer la précision du prix Monte Carlo.

Notation

$A(i)$ **et** $G(i)$ Prix de l'option avec moyenne arithmétique et géométrique calculé avec la i^{e} trajectoire simulée ;

$\overline{A}$ **et** $\overline{G}$ Estimé du prix de l'option ;

G Vrai prix de l'option utilisant la moyenne géométrique selon la formule connue ;

- On peut donc obtenir l'erreur $G - \overline{G}$.

A^* Estimé ajusté du prix de l'option utilisant la moyenne arithmétique.
$A^* = \overline{A} + \beta(G - \overline{G})$

- On trouve que $\mathrm{Var}(A^*) = \mathrm{Var}(A)(1-\rho^2)$ où $\rho = \mathrm{Corr}(\overline{A}, \overline{G})$;
- On trouve que $\hat{\beta} = \frac{\mathrm{Cov}(\overline{A}, \overline{G})}{\mathrm{Var}(\overline{G})}$.

Autres méthodes

Variable antithétique

L'idée est que pour chaque simulation, il y a une simulation opposée qui est tout aussi probable.

Une série de nombre aléatoires suivant une loi normale est tout aussi probable que la même série avec des signes contraires.

- Si on prend U, on peut aussi prendre $1 - U$;
- Si on prend Z, on peut aussi prendre $-Z$.

Par exemple, on génère 50 valeurs de U puis 50 valeurs de $1 - U$ pour faire 100 simulations.

Théoriquement, il y a un gain possible vu que les deux simulations sont négativement corrélées. En pratique, le gain est modeste.

Échantillonnage stratifié

Au lieu de simuler des nombres $u \sim U(0,1)$, on simule des nombres u sur des sous-intervalles de $[0,1]$.

Par exemple, pour faire 100 simulations on simule un nombre uniforme par centile. On simule un nombre uniforme $u \sim U(0, 0.01)$, puis un nombre $u \sim U(0.01, 0.02)$, etc jusqu'à $u \sim U(0.99, 1)$.

- On peut faire plus ou moins de sous-intervalles égaux et répéter la procédure ;
- L'idée est d'éviter la sous-représentation ou la sur-représentation de certaines portions.

Échantillonnage préférentiel

C'est un raffinement de l'échantillonnage stratifié qui concentre la génération de nombres dans le sous-intervalle le plus critique. Donc, on ne génère plus la même quantité de nombres aléatoires pour tous les sous-intervalles.

Suites à discrépance faible

Elles sont obtenues de façon déterministe et visent à bien couvrir l'ensemble d'une distribution. Elles ont un intérêt particulier pour des problèmes de grande dimension.

23 Options exotiques : II

Options tout ou rien

Options tout ou rien

Paient un montant (1$ par défaut) ou une action (1 unité par défaut) si une condition est remplie mais rien sinon.

Si la condition de paiement est :

$S_T > K$ c'est une option **d'achat** tout ou rien.

$S_T < K$ c'est une option **de vente** tout ou rien.

- Le cours se limite aux options tout ou rien dont la condition de paiement ne dépend que de la valeur de l'action à l'échéance ;
- En réalité, on peut avoir des *options tout ou rien à barrière* dont le paiement dépend de l'atteinte ou non d'un certain prix pendant que l'option est en vigueur ;
- Alias, options binaires.

Types d'options tout ou rien

Options comptant ou rien

La valeur à l'échéance est de 1$ si la condition est satisfaite.

$$
\begin{aligned}
CC(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times 1 \times \boldsymbol{I}_{\{S_t > K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\Pr(S_T > K) \\
&= \mathrm{e}^{-rT} N(d_2) \\
CP(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times 1 \times \boldsymbol{I}_{\{S_t < K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\Pr(S_T < K) \\
&= \mathrm{e}^{-rT} N(-d_2)
\end{aligned}
$$

Options actif ou rien

La valeur à l'échéance est de S_T si la condition est satisfaite.

$$
\begin{aligned}
AC(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t > K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}^*[S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t > K\}}] \\
&= \mathrm{e}^{-rT} S_0 \mathrm{e}^{(r-\delta)T} N(d_1) \\
&= S_0 \mathrm{e}^{-\delta T} N(d_1) \\
AP(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t < K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}^*[S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t < K\}}] \\
&= \mathrm{e}^{-rT} S_0 \mathrm{e}^{(r-\delta)T} N(-d_1) \\
&= S_0 \mathrm{e}^{-\delta T} N(-d_1)
\end{aligned}
$$

- Une option d'achat classique correspond donc à acheter une option d'achat actif ou rien et vendre K options comptant ou rien ;
- Une option d'achat avec écart équivaut à acheter une option d'achat actif ou rien et vendre K_1 options d'achat comptant ou rien.

Option rétroviseur

Option rétroviseur

La valeur à l'échéance dépend du prix de l'action maximal ou minimal atteint lorsque l'option était en vigueur.

Il y a 4 version de l'option rétroviseur :

Type	Valeur à l'échéance
Standard Lookback Call	$S_T - \min(S)$
Standard Lookback Put	$\max(S) - S_T$
Extrema Lookback Call	$\max(\max(S) - K, 0)$
Extrema Lookback Put	$\max(K - \min(S), 0) - S_T$

Notes :

- La valeur à l'échéance d'une option rétroviseur standard est non-négative puisque $\min(S) \leq S_T$ et $\max(S) \geq S_T$;
- Une option rétroviseur standard n'a pas de "prix d'exercice", plutôt on le défini comme la valeur de l'action sous-jacente qui maximise la valeur à l'échéance.
  Pour une option d'achat, c'est le minimum $\min(S)$ et une option de vente le maximum $\max(S)$;
- Puisque ces derniers sont inconnus jusqu'à l'échéance de l'option, on surnomme aussi une option rétroviseur standard une option rétroviseur avec un prix d'exercice **flottant** ;
- De façon semblable, une option rétroviseur extrême se surnomme une option rétroviseur avec un prix d'exercice **fixe**.

- En anglais, « *lookback option* » ;
- La tarification des options rétroviseurs avec la formule de Black-Scholes est compliquée, on peut plutôt utiliser soit les principes actuariels de base ou le modèle binomial selon le contexte.

Options qui ne sont pas dans le cadre du cours, mais qui font partie de l'examen IFM

Options « *forward start* »

Fourni au détenteur une option à un temps futur déterminé. À l'échéance de l'option « *forward start* », le détenteur reçoit une option dont le prix d'exercice dépend du prix de l'action à ce moment.

Options « *chooser* »

Permet au détenteur de choisir à un moment futur déterminé si l'option sera une option d'achat ou de vente européenne.