

1 Probabilités conditionnelles

- › Rappel théorème de Bayes :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

- › Distribution conditionnelle :

$$\Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

- › L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$\mathbb{E}[g(X_1) | X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x) \Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2)$$

- › La variance d'une fonction conditionnelle :

$$\text{Var}(g(X_1) | X_2) = \mathbb{E}[g(X_1)^2 | X_2] - \mathbb{E}[g(X_1) | X_2]^2$$

- › L'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1 | X_2]] \\ &= \sum_{x_2=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 | X_2] \Pr(X_2 = x_2) \\ \mathbb{E}[X_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1 | X_2]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 | X_2] f_{X_2}(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

- › La variance conditionnelle :

$$\text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[\text{Var}(X_1 | X_2)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X_1 | X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 | X_2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3] | X_2] \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3] \Pr(X_3 = x_3 | X_2 = x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3] f_{X_3|X_2}(x_3 | x_2) dx_3 \end{aligned}$$

La variance conditionnelle devient

$$\text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[\text{Var}(X_1 | X_2, X_3)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X_1 | X_2, X_3])$$

De plus,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[\text{Cov}(X, Y | Z)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[X | Z], \mathbb{E}[Y | Z])$$

Soit N , le nombre d'essais indépendants jusqu'à avoir un même résultat k fois consécutivement avec m possibilités équiprobables.

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1 - m^k}{1 - m}$$

2 Processus Stochastiques

Définition

Domaine : Valeurs possible du processus à un temps quelconque t .

Exemple : Température est dans un certain intervalle, $\Omega \in [-50, 50]$.

Filtration : Information connue au temps t .

Exemple : Température dépend de la température passée, peu probable qu'il neige s'il faisait 35 hier.

Probabilités : Probabilité des événements possibles.

Exemple : Température possède certaines probabilités, 70% de plus demain, 40% dans 2 jours, etc.

Dénoté par $\{X(t), t \in T\}$. Si l'ensemble est :

fini ou dénombrable : Processus est dit d'être **en temps discret**.

infini ou non-dénombrable : Processus est dit d'être **en temps continu**.

Si l'ensemble des valeurs possibles de $X(t)$ est :

fini ou infini dénombrable : Processus est dit d'avoir un espace d'état **discret**

infini ou non-dénombrable : Processus est dit d'avoir un espace d'état **continu**

Fonctions

Fonction de répartition d'ordre k du processus $\{X(t), t \in T\}$.

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

Fonction de densité d'ordre k du processus $\{X(t), t \in T\}$.

$$f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)$$

Fonction de probabilité de masse d'ordre k du processus $\{X(t), t \in T\}$.

$$p(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \Pr(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_k) = x_k)$$

Moments

Moyenne à l'instant t , alias moment d'ordre t .

$$m_x(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

Auto-covariance en $\{t_1, t_2\}$.

$$\text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \mathbb{E}[X(t_1), X(t_2)] - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

Auto-corrélation en $\{t, t-1\}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\text{auto}}(X(t)) &= \frac{\text{Cov}(X(t), X(t-1))}{\sqrt{\text{V}(X(t))\text{V}(X(t-1))}} \\ &\stackrel{\text{stationnaire}}{=} \frac{\text{Cov}(X(t), X(t-1))}{\text{V}(X(t))} \end{aligned}$$

Propriétés

Les accroissements sont :

Indépendants si les v.a. $X(t_4) - X(t_3)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ sont **indépendants** $\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$.

Stationnaires si les v.a. $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ possèdent la même fonction de répartition $\forall s$.

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + s, \dots, t_n + s)$$

3 Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ij}]_{i \times j}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j | X_k = i)$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$, avec $P^{(n)} = P^n = P \cdot P \cdot P \cdot \dots \cdot P$.

$$\Pr(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) \Pr(X_0 = i)$$

États accessibles et communicants

- > j est accessible de i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- > si i et j sont accessibles réciproquement ($i \leftrightarrow j$), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- > Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle est composée d'une seule classe.

Propriété d'une classe

- ✓ Réflexibilité : $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- ✓ Symétrie : $i \leftrightarrow j$ est équivalent à $j \leftrightarrow i$.
- ✓ Transitivité : si i communique avec j (i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$) et que j communique avec k (i.e. $p_{jk}^{(m)} > 0$), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurrents, transients et absorbants

- > f_{ii} : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i .

> **État récurrent**

$$f_{ii} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

État transient

$$f_{ii} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

- > Si l'état i est récurrent et que $i \leftrightarrow j$, alors j est récurrent aussi.
- > $f_{ii}^{(n)}$: probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- > Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini **n'a que des états récurrents**.
- > **État absorbant** : j est un état absorbant si $p_{jj} = 1$. De plus, Si j est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^m p_{ik} f_{kj}$$

Probabilité limites

- > **État périodique** : si l'état a une période d , alors il sera possible de revenir à cet état après n étapes, qui est un multiple de d . i.e.

$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$
- > si $d(i) = 1$, alors l'état i est **apériodique**.
- > La périodicité est une propriété de classe : si $i \leftrightarrow j$, alors $d(i) = d(j)$.

- › Le temps de retour moyen pour l'état i est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

avec $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$

- › **État récurrent positif** : si, à partir de l'état i , le temps de retour moyen μ_{ii} à l'état i est fini, alors l'état i est récurrent positif.
- › **État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- › Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques, alors

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$$

$$(2) \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$$(3) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

- › On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos π_i .

Système Bonus Malus

$s_i(k)$: Le prochain état d'un assuré dans l'état i ayant eu k accidents.

a_k : Probabilité qu'un assuré ait k accidents.

4 Processus de Poisson

Soit $N(t)$ le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle t .

Définitions

Définition 1

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

- (1) $N(0) = 0$
- (2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3$, les accroissements $(N(t_3) - N(t_2))$ et $(N(t_2) - N(t_1))$ sont stochastiquement indépendants.
- (3) $\forall t, (N(s+t) - N(s)) \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Alors,

$$\Pr(N(s+t) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Définition 2

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

- (1) $N(0) = 0$
- (2) a des accroissements indépendants et stationnaires
- (3) $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- (4) $\Pr(N(h) \geq 2) = o(h)$

Avec $o(h)$ une fonction où $f(h) = o(h)$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalentes.

Rappels sur la loi de Poisson

La fonction génératrice des moments de $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ est

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{-\lambda(e^t - 1)}$$

Temps séparant 2 évènements successifs

- › Soit T_i le temps entre le $(i-1)^{\text{e}}$ et le i^{e} évènement.
- › Alors, $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$.
- › Soit S_n le moment où se produit le i^{e} évènement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- › On peut facilement prouver que $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
- › Si $N(t) \geq n$, alors nécessairement $S_n \leq t$.

Processus de Poisson avec évènements de type I et II

- › Soit un Processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ où il peut y avoir un évènement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q .
- › Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$
Avec $N_1(t)$ et $N_2(t)$ qui sont stochastiquement indépendants.
- › $N_i(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_i t)$, où p_i est la probabilité que l'évènement de type i se produise.

Distribution conditionnelle des temps d'occurrence

- › Pour un processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, la distribution conditionnelle des temps d'occurrence S_1, \dots, S_n sachant que $N(t) = n$ est définie par

$$f_{S_1, \dots, S_n | N(t)}(s_1, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n}$$

pour $0 < s_1 < \dots < s_n$.

› La distribution de $S_1, \dots, S_n | N(t) = n$ a la même distribution que les statistiques d'ordre :

$$U_{(1)}, \dots, U_{(n)} \sim U(0, t)$$

Processus de Poisson non-homogène

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;
- (3) $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;
- (4) $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(s))}$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$. On a alors que

$$N(t+s) - N(s) \sim \text{Pois}(m(t+s) - m(s))$$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurrence du n^{e} évènement, alors

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. iid indépendantes de $N(t)$.

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que $\Pr(Y_i = \alpha_j) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépendantes telles que $N_j(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_j t)$.

Lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t E[Y], \lambda t E[Y^2])$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1 \lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition

Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t) | \Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

De plus, on a $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ et $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$. Aussi, la transformée de Laplace pour $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ est

$$\mathcal{L}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^\alpha$$

Remarques importantes

- (1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps);
- (2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants;
- (3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors¹

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

- (4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[\Lambda]$$

$$\text{Var}(N(t)) = t\mathbb{E}[\Lambda] + t^2\text{Var}(\Lambda)$$

- (5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$\begin{aligned} F_{\Lambda|N(t)}(x|n) &= \frac{\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\Pr(N(t) = n | \Lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Pr(N(t) = n | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda} \end{aligned}$$

- (6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_{\Lambda}\left(\frac{x}{n}\right) \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

5 Processus de renouvellement

Définitions générales

- ▷ T_n : intervalle de temps entre le $(n - 1)^{\text{e}}$ et le n^{e} renouvellement;
- ▷ $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurrence du n^{e} renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus²;
- ▷ $\mu = \mathbb{E}[T_i]$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr(N(t) = n) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

1. Être capable de faire cette démonstration pour l'examen
2. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.

Dans le cas où $T \sim \text{Erlang}(m, \lambda)$, alors

$$\Pr(N(t) = n) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*(n)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait l'équation de renouvellement, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x) f_T(x) dx$$

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\begin{aligned} \hat{m}(s) &= \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s)\hat{f}_T(s) \\ &= \frac{\hat{f}(s)}{s(1-\hat{f}(s))} \end{aligned}$$

Théorèmes limites

- (1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus,

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}[T]}$$

avec une probabilité presque certaine.

- (2) Théorème élémentaire du renouvellement : avec $t \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}[T]}$$

- (3) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $N(t)$ est asymptotiquement normale, telle que

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{\mathbb{E}[T]}, \frac{t\text{Var}(T)}{\mathbb{E}[T]^3}\right)$$

Équation de renouvellement

De façon générale, si on a une équation intégrale d'une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x) dF_T(x)$$

Alors, la seule solution est

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x) dm(x)$$

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \bar{F}_T(t) + \int_0^x \bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

et

$$E[S_{N(t)}] = tF_T(t) - \int_0^t (t-y)\bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

De plus, selon l'équation de Wald³,

$$E[S_{N(t)+1}] = E[T](m(t) + 1)$$

Key renewal theorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \frac{1}{E[T]} \int_0^\infty h(x) dx$$

Processus de renouvellement avec délai

- Soit $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ des temps entre des renouvellements succesifs qui sont *iid* tel que $F_{T_n}(t) = F_{T_2}(t)$ pour $n \geq 2$ et $F_{T_1}(t) \neq F_{T_2}(t)$. Alors $\{N_d(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de renouvellement avec délai.

- La distribution de $N_d(t)$ est

$$\Pr(N_d(t) = n) = F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t) - F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n)}(t)$$

- la fonction de renouvellement $m_d(t)$ est donc

$$m_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t)$$

- De plus, $m_d(t)$ satisfait aussi l'équation de renouvellement, telle que

$$m_d(t) = F_{T_1}(t) + \int_0^t m_o(t-x) f_{T_1}(x) dx$$

où $m_o(t)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire qui débute à T_2 .

3. l'équation de Wald se base sur le concept que $S_n = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$, très semblable au modèle fréquence-sévérité.

Processus de renouvellement *stationnaire*

- Un processus de renouvellement $\{N_e(t); t \geq 0\}$ est dit stationnaire si

$$F_{T_1} = F_e(t) = \frac{\int_0^t \bar{F}_{T_2}(x) dx}{E[T_2]}$$

- La fonction de renouvellement $m_e(t)$ est définie par

$$m_e(t) = E[N_e(t)] = \frac{t}{E[T_2]}$$

- La distribution de $N_e(t)$ est définie par

$$\Pr(N_e(t+h) - N_e(t) = n) = \Pr(N_e(h) = n)$$

Car les accroissements sont stationnaires.

Processus de renouvellement alterné

- Soit la suite $\{(T_n, T'_n); n \in \mathbb{N}\}$ des vecteurs *iid* où les composantes (T_n, T'_n) peuvent être dépendantes. T_n représente un intervalle de temps dans lequel le processus (de renouvellement) est *on* et T'_n un intervalle de temps où le processus est *off*.

- On peut donc définir 2 processus (*on* et *off*) :

- $\{N_1(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *avec délai* généré par la suite des temps $\{T_1, T'_1 + T_{n+1}; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2+T'_1}^{*(n-1)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)}(t) * F_{T'_1}^{*(n-1)}(t) \end{aligned}$$

- $\{N_2(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *ordinaire* généré par la suite des temps $\{T_n + T'_n; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$m_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1+T'_1}^{*(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)} * F_{T'_1}^{*(n)}(t)$$

- Proposition 1 :** Supposons que T_n est indépendant de T'_n , $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $p_i(t)$ la probabilité que le processus de renouvellement alterné soit dans l'état i au temps t , $i = 1, 2$. Alors,

$$p_1(t) = m_2(t) - m_1(t) + 1 = 1 - p_2(t)$$

- Proposition 2 :** Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition 1, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{E[T_1]}{E[T_1] + E[T'_1]} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t)$$

Application : somme de renouvellements avec réclamations escomptées

- › On considère le processus des réclamations escomptées à $t = 0$, soit $\{Z(t); t \geq 0\}$, défini par

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta S_k} X_k$$

où

- $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de renouvellement ordinaire;
 - S_k est le moment où se produit la k^{e} réclamation;
 - La suite $\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de v.a. iid et indépendantes de $N(t)$ représentant les montants de réclamations;
 - δ est la force d'intérêt appliquée pour actualiser les réclamations.
- › Dans un processus de renouvellement ordinaire, on a, pour $k = 1, 2, \dots, n$,

$$f_{S_k|N(t)}(x|n) = f_{S_k}(x) \frac{\Pr(N(t-x) = n-k)}{\Pr(N(t) = n)}$$

- › On peut calculer le premier moment du processus des réclamations escomptées $\{Z(t); t \geq 0\}$:

$$E[Z(t)] = E[X] \int_0^t e^{-\delta x} dm(x)$$

où $m(t)$ est la fonction de renouvellement du processus de renouvellement $\{N(t); t \geq 0\}$.

6 Mouvement Brownien

Définitions

Définition générale



Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un mouvement Brownien avec paramètre de variance σ^2 si

- (1) $X(0) = 0$;
- (2) $\{X(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires;
- (3) $\forall t > 0, X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Note : on appelle aussi σ le paramètre de volatilité ou coefficient de diffusion. Un mouvement Brownien est dit *standard* si $\sigma = 1$.

Proposition 1

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, on a

$$f_{X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1}))^{\frac{1}{2}}}$$

3cm

Proposition 2

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < s < t$, $X(s)|X(t)$ obéit à une loi normale, tel que

$$E[X(s)|X(t) = x] = \frac{s}{t}x$$

$$\text{Var}(X(s)|X(t) = x) = \frac{s}{t}(t - s)$$

Temps d'atteinte d'une barrière

- › Soit T_a le le premier moment où le mouvement Brownien standard atteint le niveau a . Alors,

$$\Pr(T_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- › On peut trouver la distribution de la valeur maximale que peut prendre $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, telle que

$$\Pr\left(\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Variations sur le mouvement Brownien

Mouvement Brownien avec dérive

Un mouvement Brownien avec dérive (*drifted*) a exactement la même définition qu'un mouvement Brownien standard, à l'exception que

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

où μ est le paramètre de dérive.

Note : on a donc que $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Mouvement Brownien géométrique

Définition

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien brownien avec dérive μ et volatilité σ . Alors, le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ défini par

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est dit être un mouvement Brownien géométrique.

Proposition : Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien géométrique avec dérive μ et volatilité σ . Alors,

$$E[X(t)|X(u)] = X(s)e^{(t-s)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}$$

pour $0 \leq u \leq s \leq t$.

Pont Brownien

Processus Gaussien

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus Gaussien si, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $X(t_1), \dots, X(t_n)$ a une distribution normale multivariée.

Définition alternative d'un mouvement Brownien standard

Un processus $\{X(t); t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard ssi

- (1) $\{X(t); t \geq 0\}$ est un processus Gaussien;
- (2) $\forall t > 0$, $E[X(t)] = 0$, avec $X(0) = 0$;
- (3) $\forall 0 \leq s \leq t$, on a $\text{Cov}(X(s), X(t)) = s$.

Définition d'un pont Brownien

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. Alors, le processus conditionnel $\{X(t); 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0\}$ est dit être un *pont* Brownien. De plus, on a

$$E[X(t)|X(1) = 0] = 0$$

Et, pour $s < t < 1$,

$$\text{Cov}(X(s), X(t) | X(1) = 0) = s(1 - t).$$

Une autre condition pour déterminer si le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ est un point Brownien est de vérifier que l'équation suivante est respectée :

$$Z(t) = X(t) - tX(1)$$

Mouvement Brownien intégré

Définition de l'Intégrale d'Îto

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard et une fonction f est une dérivée continue. Alors, nous définissons l'intégrale stochastique d'Îto comme

$$\int_a^b f(t) dX(t) = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b X(t) df(t)$$

Définition du mouvement Brownien intégré

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard, alors le processus Soit $\{Z(t); t \geq 0\}$ défini par (en utilisant l'intégrale d'Îto)

$$Z(t) = \int_0^t X(s) ds = tX(t) - \int_0^t v \cdot dX(v)$$

Proposition 2

L'espérance et la variance de $\int_a^b f(t) dX(t)$ sont respectivement

$$E \left[\int_a^b f(t) dX(t) \right] = 0$$

$$\text{Var} \left(\int_a^b f(t) dX(t) \right) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

Proposition 3

La mouvement Brownien intégré (tout comme le mouvement Brownien standard) obéit à une loi Normale. En combinant avec les hypothèses de la proposition 2, on a

$$\int_a^b f(t) dX(t) \sim \mathcal{N} \left(0, \int_a^b f(t)^2 dt \right)$$

et

$$\int_a^b X(t) df(t) \sim \mathcal{N} \left(0, a(f(b) - f(a))^2 + \int_a^b (f(b) - f(t))^2 dt \right)$$