Notes de cours
Complément de mathématiques
ACT-1003
Automne 2017

Gabriel Crépeault-Cauchon

Dernière mise à jour : 15 mars 2018

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les fonctions d'une variable

Définition 1.1

Une fonction f d'un ensemble de départ D vers un ensemble d'arrivée F est une correspondance qui assigne à chaque élément x de D exactement un élément y de F.

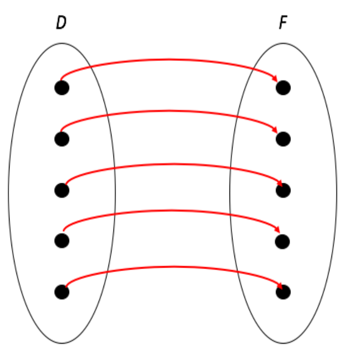


FIGURE 1.1 –

L'ensemble D est le domaine de définition de la fonction : $D = Dom(f)$. L'image de $f, Ima(f)$, est le sous-ensemble de F constitué de toutes les valeurs possibles de $f(x)$ lorsque x est dans D.

exemple 1.1

Soit $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{4+x}$. Trouver :

1. $Dom(f)$
   $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | 4 + x > 0\} = [-4, \infty[$

2. $f(5)$
   $f(5) = \sqrt{4+(5)} = \sqrt(9) = 3$
3. $Ima(f)$
   $Ima(f) = [0, \infty[$ (la racine doit avoir une valeur d'au moins 0, sinon $\nexists$.

1.1 Surjectivité et injectivité

Définition 1.2

Une fonction est surjective si et seulement si chaque élément de son ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

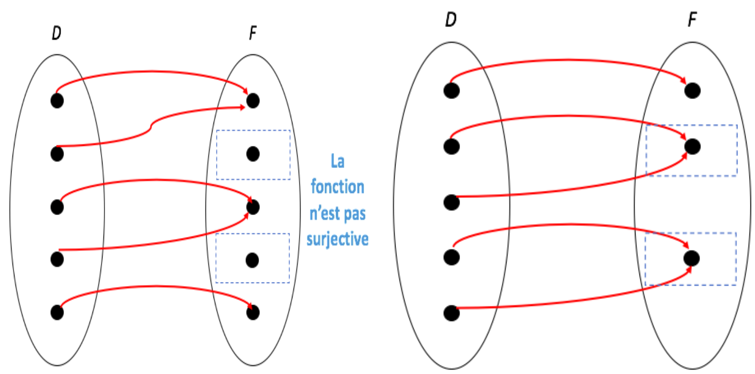


FIGURE 1.2 – fonction surjective et injective

Une fonction est injective si et seulement si chaque élément de son ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ

Une fonction est bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire que chaque élément de son ensemble d'arrivée a exactement un antécédent dans l'ensemble de départ ("one-to-one function"). **Note : la fonction représentée dans la figure 1.1 est bijective.**

Exemple 1.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas surjective.

Réponse :
Soit $y = -1 \in \mathbb{R}$, alors $\nexists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$.

Exemple 1.3

Soit $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $f(x) = x^2$. Montrer que g est surjective. Est-ce que g est injective ?

Réponse :

<u>est-ce que g est surjective ?</u>

$\forall\ y \in [0, \infty[$, on doit trouver un x tel que
$g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$.
Alors, $\exists\ x = \sqrt{y}$ (ou $x = -\sqrt{y}$) tel que $g(x) = y$. Donc g est surjective.

<u>est-ce que g est injective ?</u>
$\forall\ x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ on a $g(x_1) \neq g(x_2)$?
Non !
Pour $x_1 = 2, x_2 = -2$,
on a $g(x_1) = 4, g(x_2) = 4$
Alors, on peut conclure que g n'est pas injective.

1.2 Fonction polynomiale

Définition 1.3

Soit une fonction polynomiale de degré k :

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$$

où les coefficients $a_o, ..., a_k$ sont des nombres réels.

On appelle racines d'une fonction polynomiale f toutes valeurs de x pour lesquels $f(x) = 0$.

Remarque

Si les coefficients $a_0, ..., a_k$ sont entiers, les racines rationnelles (dans le cas où elles existent) se trouvent dans l'ensemble :

$$\frac{\pm \text{ Facteurs positifs de } a_0}{\pm \text{ Facteurs positifs de } a_k}$$

Remarque

Les racines d'une fonction polynomiale de degré 2 sont données par :

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.1}$$

exemple

$f_1(x) = x^2 - 5x + 4$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = x_1 = 4 \text{ et } x_2 = 1$$

Note : le numéro aurait aussi pu être fait par factorisation :

$$\pm \left\{ \frac{\text{facteurs de 4}}{\text{facteurs de 1}} \right\} \Leftrightarrow \pm \left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{1} \right\}$$

Donc, si on commence avec $x_1 = 1$...

$$x^2 - 5x + 4$$
$$x^2 - x - 4x + 4$$
$$x(x-1) - 4(x-1)$$
$$(x-4)(x-1)$$
$$\boxed{x_1 = 4} \text{ et } \boxed{x_2 = 1}$$

Exemple 1.4

Soit

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$$

Identifier les racines réelles de f.

$$x \in \left\{ \frac{\text{facteurs de 6}}{\text{facteurs de 1}} \right\} \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{1} \right\}$$

Si on commence par $x = 1$...

$$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$$
$$x^4 - x^3 + 6x^3 - 6x^2 + 11x^2 - 11x - 6x - 6$$
$$x^3(x-1) + 6x^2(x-1) + 11x(x-1) + 6(x-1)$$
$$(x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$$

par la suite, on refait le même principe avec un autre facteur (multiple)

$$(x-1)(x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6), \text{si on essaie avec } \boxed{x+1}$$
$$(x-1)(x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)$$
$$(x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6)$$
$$(x-1)(x+1)(x - 2 + 2x + 3x + 6)$$
$$(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$$
$$\text{Donc, } \boxed{x = 1} \text{ et } \boxed{x = -1} \text{ et } \boxed{x = -2} \text{ et } \boxed{x = -3}$$

Exemple 1.5

Soit

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 10x + 3$$

Identifier les racines réelles de f.

$$x \in \left\{ \frac{\text{facteurs de } 3}{\text{facteurs de } 2} \right\} \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{si on commence avec } x = 1...$$
$$f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 10(1) + 3 = -2,5 \neq 0$$
$$\text{il faut que le facteur choisi soit une racine de l'expression, foit } f(x) = 0.$$
$$\text{avec } x = 3, \text{ ça fonctionne : } 2x^3 - 3x^2 - 10x + 3$$
$$2x^3 - 6x^2 + 3x^2 - 9x - x + 3$$
$$2x^3(x^3) + 3x(x-3) - 1(x-3)$$
$$(x-3)(2x^2 + 3x - 1)$$
$$\text{on se retrouve avec un polynôme de degré 2... suffit d'appliquer l'équation 1.1}$$
$$\frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$
$$\text{Alors,}$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -1,780776406$$
$$x_3 = 0,280776406$$

1.3 Fonction exponentielle

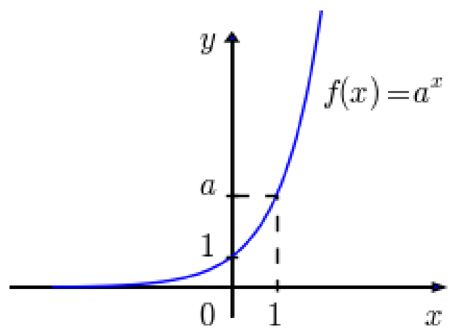
1.3.1 Définition 1.4

$f(x) = a^x$ où $a > 0$.

1.3.2 Propriétés

$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n fois)	$a^0 = 1$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
$(ab)^x = a^x \cdot b^x$	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = a^{\frac{1}{nm}}$	

1.3.3 La courbe



1.4 Fonction logarithmique

1.4.1 Définition 1.5

$f(x) = log_a(x)$ où $a > 0$ tel que $a \neq 1$.

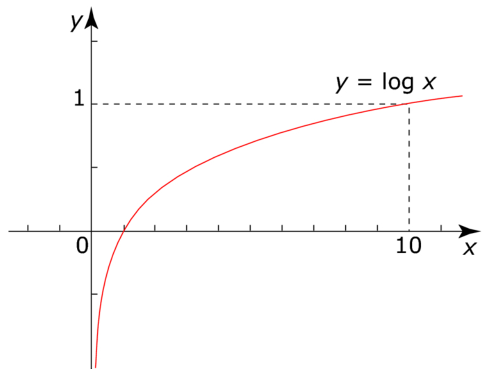
Remarque

La fonction logarithmique est la fonction réciproque (inverse) de la fonction exponentielle

1.4.2 Propriétés

$y = log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$	
$log_a(a^x) = x$	$a^{log_a(x)} = x$
$log_a(1) = 0$	$log_a(a) = 1$
$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$	
$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$	
$log_a(x^r) = r \cdot log_a(x)$	
$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$	$log_a(\frac{1}{x}) = -log_a(x)$

1.4.3 La courbe



1.5 Fonction inverse

Définition 1.6

Soit une fonction *bijective* $f : A \to B$
Sa fonction inverse est définie par $f^{-1} : B \to A$,
tel que

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A \text{ et } f(f^{-1}(x)) = y, \forall y \in B$$

Remarque

$f^{-1}(x)$ n'est pas égale à $\frac{1}{f(x)}$

Exemple 1.6

Trouver les inverses des fonctions :
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}}$$

<u>Pour vérifier :</u>

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$$

Ou encore :

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

b) $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $g(x) = x^2$

Remarque : f (qui va de $[0, \infty[$) est surjective, **mais n'est pas injective**. Il existe en effet 2 éléments dans x qui nous permettent d'avoir le même résultat en y. Mais puisque g est bornée à $[0, \infty[$, on peut trouver sa fonction inverse.

$$g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = +\sqrt{y} \Leftrightarrow \boxed{g^{-1}(y) = +\sqrt{y}}$$

<u>Pour vérifier :</u>

$$g(g^{-1}(y)) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

Ou encore :

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

c) $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = log_3(x)$

$$h(x) = y \Leftrightarrow log_3(x) = y \Leftrightarrow 3^y = x \Leftrightarrow \boxed{h^{-1}(y) = 3^y}$$

Pour vérifier :

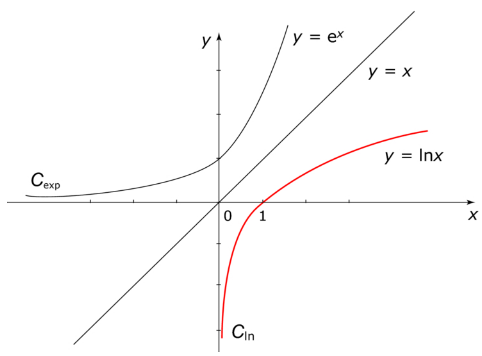
$$h(h^{-1}(y)) = h(3^y) = log_3(3^y) = y \cdot log_3(3) = y$$

Ou encore :

$$h^{-1}(h(x)) = 3^{(h(x))} = 3^{log_3(x)} = 3$$

Remarque 1.7

Les graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.



1.6 La limite

Exemple 1.7

Soit

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

Alors, $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, c'est-à-dire que f n'est pas définie au point 2. Cependant, on a :

$f(1,999) = 1,3320003,$ $f(1,9999) = 1,33320000,$
$f(1,99999) = 1,33332000,$ $f(1,999999) = 1,33333200,$
$f(2,001) = 1,33466700,$ $f(2,0001) = 1,33346667,$
$f(2,00001) = 1,33334667,$ $f(2,000001) = 1,33333467,$
Il apparaît que plus x **est proche de 2, plus s** $f(x)$ **est proche de** $\frac{4}{3}$**.**

De façon générale :

- Quand x s'approche d'un nombre a, est-ce que les valeurs de $f(x)$ s'approchent d'un certain nombre L ?
- Est-il possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en choisissant x suffisament proche de a ?
- Si les deux réponses sont affirmatives, on dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

1.6.1 Définition des limites formelles

Définition 1.8

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}, a$ un point limite de D et L un nombre réel. On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1.2}$$

si et seulement si
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

Définition 1.9

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}, a$ un point limite de D et L un nombre réel. On dit que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \tag{1.3}$$

si et seulement si
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

Définition 1.10

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}, a$ un point limite de D et L un nombre réel. On dit que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \tag{1.4}$$

si et seulement si
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D, 0 < |a - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

Proposition 1.11

On a
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \tag{1.5}$$

1.6.2 Exemple 1.8

Utiliser la définition d'une limite (avecϵ et δ) pour démontrer les résultats suivants :

a)
$$\lim_{x \to 2}(2x+3) = 7$$

Posons nos variables (selon la définition) : $a = 2, L = 7, f(x) = 2x + 3$
Par la suite, posons la définition que l'on connaît :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \text{trouver } \delta > 0 \text{ tel que } |x-2| < \delta \Leftrightarrow |2x+3| < \epsilon$$

Alors,

$$|f(x) - L| = |2x - 3 - 7|$$
$$= |2x - 4| = 2|x - 2|$$
Par définition, on peut dire que :
$$2|x-2| < \epsilon$$
Et par définition, δ est équivalent à $|x - 2|$. Donc :
$$2\delta < \epsilon \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{\epsilon}{2}}$$
Il faut maintenant démontrer que ce qu'on vient de faire est *legit* :
$$\text{Alors,} \forall \epsilon > 0, \exists\ \delta = \frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{tel que si } |x-2| < \delta \Leftrightarrow |(2x-3) - 7| = 2|x-2| \leq (2)(\delta) \Rightarrow \text{ car } |x-2| < \delta$$

$$\text{exemple } \epsilon = 0,01 \Leftrightarrow \delta = 0,005$$
$$\text{Si } x \in (1,995; 2,005) \Leftrightarrow 2x + 3 \in (6,99; 7,01)$$

b)

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - x) = 6$$

Posons nos variables (selon la définition) : $a = 3, L = 6, f(x) = x^2 - x$
Par la suite, posons la définition que l'on connaît :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \text{trouver } \delta > 0 \text{ tel que } |x-3| < \delta \Leftrightarrow |x^2 - x| < \epsilon$$

Alors,

$$|f(x) - L| = |x^2 - x - 6|$$
$$= |x^2 - 3x + 2x - 6|$$
$$= |(x(x-3) + 2(x-3)|$$
$$= |x+2| \cdot |x-3|$$

Par définition, on sait que :

$$|x+2| \cdot |x-3| \leq |x+2| \cdot (\delta) \Rightarrow \text{car } |x-3| < \delta$$

il faut se débarasser de l'expression $|x+2|$. Mais puisque c'est une valeur absolue, il faut trouver les bornes, toujours en se servant de notre définition :

$$|x-3| < \delta$$
$$-\delta < x - 3 < \delta$$
$$3 - \delta < x\delta + 3$$
$$\boxed{\text{si } \delta \leq 1} \Rightarrow 3 - 1 < x < 1 + 3$$
$$2 < x < 4$$

à partir d'ici, on modifie l'expression pour arriver à la forme de notre valeur absolue qui nous bloque

$$2 + 2 < x + 2 < 4 + 2$$
$$4 < x + 2 < 6$$

les 2 bornes sont positives, donc on peut poser une valeur absolue

$$4 < |x+2| < 6$$

Alors, si on revient à notre définition initiale :

$$|x+2| \cdot |x-3| \leq |x+2| \cdot (\delta) \leq 6\delta$$

On sait aussi par définition que :

$$|x+2| \cdot |x-3| = \epsilon, \text{ donc}$$
$$6\delta = \epsilon \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{\epsilon}{6}}$$

Il ne reste qu'à démontrer par définition que c'est *legit*.

$$\text{Alors,} \forall \epsilon > 0, \exists\ \delta = \frac{\epsilon}{6}$$
$$\text{tel que si } |x-3| < \delta \Leftrightarrow |x+2| \cdot |x-3| \leq (6)(\delta) < (6)(\frac{\epsilon}{6}) = \epsilon$$

1.6.3 Exemple 1.9

Utiliser la définition d'une limite (avec δ *et* ϵ) pour démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x \to -2} \frac{2}{\sqrt{x^2-6x}} = \frac{1}{2}$$

Petit rappel de la définition 1.8 :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \forall\ x \in D, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

La première étape consiste donc à poser cette définition.

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \text{trouver } \delta > 0 \text{ tel que } |x+2| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2}{\sqrt{x^2-6x}} \right| < \epsilon$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| &= \left| \frac{2}{\sqrt{x^2-6x}} \right| \\
&= \left| \frac{(2)(2) - (1)\sqrt{x^2-6x}}{2\sqrt{x^2-6x}} \right| \\
&= \left| \frac{4-\sqrt{x^2-6x}}{2\sqrt{x^2-6x}} \cdot \left(\frac{4+\sqrt{x^2-6x}}{4+\sqrt{x^2-6x}} \right) \right| \text{(pour qu'on puisse factoriser)} \\
&= \left| \frac{16-x^2+6x}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} \right| \\
&= \frac{|16-x^2+6x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} \Rightarrow \text{(la valeur absolue au dénominateur n'est pas nécessaire)} \\
&= \frac{|x+2| \cdot |8-x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} \Rightarrow \text{(Factorisation du polynôme de degré 2)} \\
&< \frac{(\delta) \cdot |8-x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} \Rightarrow \text{car} |x+2| < \delta
\end{aligned} \tag{1.6}$$

À cette étape, on veut réussir à trouver des valeurs à nos x pour pouvoir ensuite isoler le δ. Mais puisque nos x sont soit dans une valeur absolue, soit dans une racine, il faudra trouver les bornes des expressions ci-dessus.

Trouver les bornes de $|8-x|$:

On sait que :

$$|x+2| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x+2 < \delta$$
$$-d-2 < x < \delta - 2$$
$$\delta + 2 > -x > \delta + 2$$
$$\delta + 10 > -x + 8 > \delta + 10$$
$$\boxed{\text{si } \delta \leq 1} \Rightarrow 11 > -x + 8 > 9$$
$$9 < 8 - x < 11$$

$\Rightarrow$ (Puisque qu'on a deux bornes positives, on a le droit d'insérer une valeur absolue)

$$9 < |8-x| < 11$$

Trouver les bornes de $\sqrt{x^2-6x}$:

On peut décomposer le radical de la façon suivante : $\sqrt{x^2-6x} = \sqrt{(x)(x-6)} = \sqrt{(-x)(6-x)}$.

Il faut trouver les bornes (inférieures et supérieures) des deux parties de l'équation.

Trouver les bornes de x :

$$-\delta - 2 < x < \delta - 2$$
$$\delta + 2 > -x > \delta + 2$$
$$\boxed{\text{si } \delta \leq 1} \Rightarrow 3 > x- > 1$$

(les bornes sont positives, donc on peut poser la valeur absolue)

$$1 < |x| < 3$$

Trouver les bornes de $(6-x)$:

$$-\delta - 2 < x < \delta - 2$$
$$-\delta - 8 < x - 6 < \delta - 8$$
$$\delta + 8 > -x + 6 > /\delta + 8$$
$$\boxed{\text{si } \delta \leq 1} \Rightarrow 9 > 6 - x > 7$$
$$7 < |6-x| < 9$$

Avec les bornes inférieures et supérieures de chacune des parties du radical, on peut trouver les bornes du radical.

$$\sqrt{(1)(7)} < \sqrt{(-x)(6-x)} < \sqrt{(3)(9)}$$
$$\sqrt{7} < \sqrt{(-x)(6-x)} < \sqrt{27}$$

(On envoie le radical au dénominateur, comme dans l'expression (1))

$$\frac{1}{\sqrt{7}} > \frac{1}{\sqrt{(-x)(6-x)}} > \frac{1}{\sqrt{27}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{27}} < \frac{1}{\sqrt{(-x)(6-x)}} < \frac{1}{\sqrt{7}}$$

Maintenant qu'on a les valeurs de nos bornes pour chaque terme de l'expression (1), on peut isoler notre δ par remplacement :

$$\frac{|x+2| \cdot |8-x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} < \frac{(\delta) \cdot |8-x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})}$$
$$< \frac{(\delta) \cdot 11}{2\sqrt{7}(4+\sqrt{7})}$$

On sait aussi, par définition, que :

$$\frac{|x+2| \cdot |8-x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} < \epsilon$$

Alors, on peut poser cette égalité :

$$\frac{11\delta}{2\sqrt{7}(4+\sqrt{7})} = \epsilon$$

Donc, en isolant le δ on obtient :

$$\delta = \frac{\epsilon(2\sqrt{7} \cdot (4+\sqrt{7})}{11}$$

Mais on sait aussi que si $\delta \leq 1$, alors :

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon(2\sqrt{7} \cdot (4+\sqrt{7})}{11}\right)$$

Rendu là, la démonstration est pratiquement terminé. Il reste qu'à démontrer que la définition initiale est validée :

$$\text{Alors, } \forall \epsilon > 0, \exists\ \delta = \min\left(1, \frac{\epsilon(2\sqrt{7}\cdot(4+\sqrt{7})}{11}\right)$$
$$\text{tel que si } |x+2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2}{\sqrt{x^2-6x}} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$
$$\text{Donc,}$$
$$\left|\frac{2}{\sqrt{x^2-6x}} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x+2|\cdot|8-x|}{2\sqrt{x^2-6x}(4+\sqrt{x^2-6x})} < \frac{\delta\cdot 11}{2\sqrt{7}(4+\sqrt{7})}$$
$$\text{si on remplace } \delta \text{ par son équivalent :}$$
$$< \frac{\epsilon(2\sqrt{7}\cdot(4+\sqrt{7})}{11}\cdot\frac{11}{2\sqrt{7}(4+\sqrt{7})}$$
$$< \epsilon$$

Pour plus d'exemples, on peut consulter l'annexe A.2 (solutions des dépannages).

Exemple 1.10

Utiliser la définition d'une limite (avec ϵ et δ) pour démontrer que le résultat suivant est faux :

Démonstration.

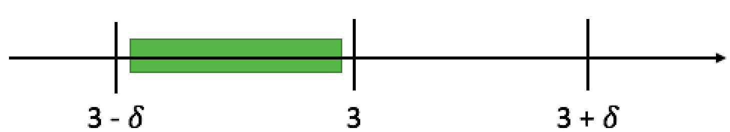
$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{x-3}\right) = 1$$

2 méthodes de résolution ont été vues en classe :

1$^{\text{ère}}$ méthode pas compris ? :

$$\text{Soit } \epsilon = 1. \forall\delta > 0 \Leftrightarrow |x-3| < \delta$$
$$3-\delta < x-3 < 3+\delta$$

Soit $x \in (a-\delta, \delta)$.



$$\Rightarrow x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0$$
$$\Rightarrow \frac{3}{x-3} < 0$$

Mais,

$$\begin{gathered}
|f(x) - L| < \epsilon \\
L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \\
1 - 1 < f(x) < 1 + 1 \\
\boxed{0 < f(x) < 2}
\end{gathered}$$

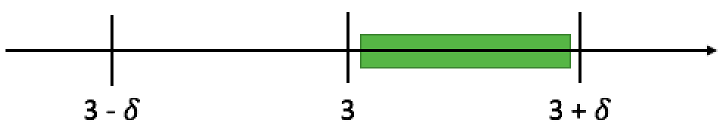
Par conséquent,

$$\frac{3}{x-3} < 0 \notin (0,2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{x-3}\right) \neq 1$$

2^{e} méthode :
Par définition,

$$\text{Soit } \epsilon = 1. \forall\ \delta > 0 \Leftrightarrow |x-3| < \delta$$

Soit $x \in (3, 3 + \min\{0,001, \delta\})$ [1].



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x - 3 < 0,001 \\
&\Rightarrow \frac{1}{x-3} > 1000 \\
&\Rightarrow \boxed{\tfrac{3}{x-3} > 3000}
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{gathered}
|f(x) - L| < \epsilon \\
L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \\
1 - 1 < f(x) < 1 + 1 \\
\boxed{0 < f(x) < 2}
\end{gathered}$$

1. 0,001 est une valeur arbitraire, sachant que δ est généralement petit.

Par conséquent,

$$\frac{3}{x-3} > 3000 \notin (0,2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{x-3}\right) \neq 1$$

$\square$

Note

La définition

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \Leftrightarrow f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$$

est équivalent à

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |x-a| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Définition 1.12

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}, a$ un point limite de D. On dit que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \tag{1.7}$$

si et seulement si

$$\forall\ N > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \forall\ x \in D, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

Définition 1.13

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}, \infty$ un point limite de D et a un nombre réel. On dit que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \tag{1.8}$$

si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Définition 1.14

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}, \infty$ un point limite de D. On dit que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \tag{1.9}$$

si et seulement si

$$\forall N > 0\ \exists\ M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, x > M \Rightarrow f(x) > N$$

Exemple relié à la définition 1.12

Prouver que

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x^3)^2} = \infty$$

Démonstration. Objectif :

$$\forall\ N > 0,\ \text{trouver } \delta > 0 \text{ tel que } |x - a| < \delta \Leftrightarrow f(x) > N$$

Alors,

$$\begin{gathered} |x-3| < \delta \\ -\delta < x - 3 < \delta \\ 0\,\text{[2]} < (x-3)^2 < \delta^2 \\ \boxed{\tfrac{1}{(x-3)^2} > \tfrac{1}{\delta^2}} \end{gathered}$$

On sait que $f(x) > N$, alors,

$$\frac{1}{(x-3)^2} = N \Leftrightarrow \boxed{\delta = 1/\sqrt{N}}$$

Par conséquent, la définition initiale est respectée :

$$\forall\ N > 0, \exists\ \delta = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ tel que } |x-3| < \delta \Leftrightarrow f(x) > N$$

□

Exemple 1.11

Utiliser la définition d'une limite pour démontrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x} = 1$$

Démonstration. Objectif :

$$\text{Si } \forall\ \epsilon > 0,\ \text{trouver } M > 0 \text{ tel que } \forall\ x > M \Leftrightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

Si $x > M$, on doit avoir :

2. Considérant que δ est très petit, le carré donnera forcément 0.

$$\left|\frac{x+3}{x}-1\right|<\epsilon$$
$$\left|\frac{x+3-x}{x}\right|<\epsilon$$
$$\left|\frac{3}{x}\right|<\epsilon$$

Aussi,

$$x>M$$
$$|x|>M$$
$$\frac{1}{|x|}<\frac{1}{M}$$
$$\frac{3}{|x|}<\frac{3}{M}$$

Donc, par équivalence :

$$\frac{3}{M}=\epsilon$$
$$\Rightarrow \boxed{M=3/\epsilon}$$

Ainsi, notre définition initiale est validée :

$$\forall\ \epsilon>0, \exists\ M=\frac{3}{\epsilon}\ \text{tel que}\ \forall\ x>M \Leftrightarrow \left|\frac{x+3}{x}-1\right|<\epsilon$$

□

Exemple 1.12

Prouver que la limite suivante n'existe pas :

$$\lim_{x\to 0}\begin{cases} x^2 & \text{pour } x\leq 0 \\ x-1 & \text{pour } x>0 \end{cases}$$

n'a pas été fait en classe. À compléter.

1.6.4 Propriétés des limites

$$\lim_{x \to a} c = c \tag{1.10}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \tag{1.11}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \tag{1.12}$$

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot L \tag{1.13}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)] \cdot [\lim_{x \to a} g(x)] \tag{1.14}$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \tag{1.15}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \tag{1.16}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty \text{ pour } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ pour } n \text{ impair} \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \tag{1.18}$$

$$\lim_{x \to c} b^x = c \tag{1.19}$$

$$\lim_{x \to \infty} b^x = \begin{cases} 0 & 0 < b < 1 \\ \infty & b > 1 \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = \begin{cases} \infty & 0 < b < 1 \\ 0 & b > 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

$$\lim_{x \to c} \log_b(x) = \begin{cases} \log_b(c) & c > 0 \\ \nexists & c \leq 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_b(x) = \begin{cases} \infty & b > 1 \\ -\infty & 0 < b < 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b(x) = \begin{cases} -\infty & b > 1 \\ \infty & 0 < b < 1 \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n \tag{1.25}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\frac{1}{n}} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\frac{1}{n}}, \quad L > 0, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est impair.} \tag{1.26}$$

Théorème 1 (*théorème du sandwich*)

$$\begin{gathered}\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \\ \text{et } h \text{ une fonction satisfaisant} \\ f(x) < h(x) < g(x), \forall x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\} \\ \text{Alors,} \\ \lim_{x\to a} h(x) = L\end{gathered} \tag{1.27}$$

Théorème 2

Si F est continue en b et $\lim_{x\to a} g(x) = b$, alors,

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b) \tag{1.28}$$

Théorème 3 - Règle de l'Hôpital

Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

Et que

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe,}$$

Alors,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.29}$$

Évaluation de formes indéterminées

Il arrive qu'on aboutisse à une forme indéterminée de limite :

$$\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot 0, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$$

Dans ces cas, siles thérorèmes ci-haut ne fonctionnent pas, il faut utiliser des approches plus classiques, tel que :

- Factorisation ;
- mise au même dénominateur ;
- multiplication par un conjugé ;
- prendre le log ou l'exponentielle.

1.6.5 Calcul de limites

Exemple 1.13

1)

$$\lim_{x \to 4} (1-7x)^{\frac{1}{3}}$$

Réponse :

$$\lim_{x \to 4} (1-7x)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow \left(\lim_{x \to 4} (1-7x)\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow (-27)^{\frac{1}{3}} = 3$$

2)

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 4x + 1)$$

Réponse :

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 4x + 1)$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} (x^3) - \lim_{x \to 2} (3x^2) + \lim_{x \to 2} (4x) + \lim_{x \to 2} (1)$$
$$\Rightarrow (2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) + 1 = 5$$

3)

$$\lim_{x \to \infty} 3^x$$

Réponse :

$$\lim_{x \to \infty} 3^x$$
$$= 3^{\infty} \quad (b > 1)$$
$$= \infty$$

4)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Réponse :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} \quad (0 < b < 1)$$
$$\Rightarrow 0$$

5)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Réponse :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} \quad (b>1)$$
$$= \infty$$

6)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\log_2 x^3 + 2^x + 3x^2 + 9x + 1\right)$$

Réponse :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\log_2 x^3 + 2^x + 3x^2 + 9x + 1\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(\log_2 x^3) + \lim_{x\to 0^+} 2^x + \lim_{x\to 0^+} 3x^2 + \lim_{x\to 0^+} 9x + \lim_{x\to 0^+} 1$$
$$= -\infty + 1 + 0 + 1 + 1 = -\infty$$

7)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2 - 9x + 1}{4x^2 + 2}\right)$$

Réponse :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2 - 9x + 1}{4x^2 + 2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3 - (9/x) + (10/x^2)}{4 + (2/x^2)}\right) = \left(\frac{3 - (9/\infty) + (10/\infty)}{4 + (2/\infty)}\right) = \frac{3}{4}$$

8)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^4 + 9x^2 + 10x}{0,01x^5}\right)$$

Réponse :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^4 + 9x^2 + 10x}{0,01x^5}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(3/x) + (9/x^3) + (10/x^4)}{0,01}\right) = \frac{0}{0,01} = 0$$

9)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$$
$$\text{on sait que } -1 < \sin x < 1$$
$$\text{Alors, } \frac{-1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$$
$$\text{On peut donc appliquer le théorème 1}$$
$$\text{puisque } \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to\infty}$$
$$\frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Exemple 1.14

Évaluer les limites suivantes :

a)

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-3x-10}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-3x-10}$$
$$= \frac{0}{0}$$
$$\text{(on doit résoudre par factorisation)}$$
$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x+5}{x+2} = \frac{10}{7}$$

b)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-25}{x^2-3x-10}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-25}{x^2-3x-10} = \frac{-\infty}{-\infty}$$
$$\text{(on doit résoudre par factorisation)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+5}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x+2}\right)$$
$$= 1 + 0 = 1$$

c)

$$\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{2(x-16)}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{2(x-16)} = \frac{0}{0}$$

(on doit résoudre en ajoutant un conjugé)

$$\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{2(x-16)} \cdot \left(\frac{4+\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 16} \frac{(16-x)}{2(x-16)(4+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{(-2)(4+\sqrt{x})} = -\frac{1}{16}$$

(mais on aurait aussi pu résoudre en factorisant...)

$$\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{2(x-16)} = \lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 16} \frac{1}{(-2)(\sqrt{x}+4)} = -\frac{1}{16}$$

d)

$$\lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$$

Réponse :

e)

$$\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$$

Réponse :

Tout d'abord, on sait que,

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

Alors,

$$\lim_{x\to(-1)_+} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to(-1)_+} \frac{x+1}{x+1} = \lim_{x\to(-1)_+} 1 = 1$$

Mais,

$$\lim_{x\to(-1)_-} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to(-1)_-} \frac{-(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)_+} (-1) = -1 \neq 1$$

Donc, la limite $\nexists$.

f)

$$\lim_{x\to ???} \frac{4x^4+2x^2+3}{3x^3+5x^2+1}$$

Réponse :

g)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

Réponse :

h)

$$\lim_{x\to 3}\frac{1-x}{x-3}$$

Réponse :

i)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-3x}\right)$$

Réponse :

j)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

Réponse :

1.7 Continuité

Définition 1.15

Une fonction f est continue à un point a si et seulement si

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \neq \pm\infty \tag{1.30}$$

la fonction doit donc :

— être définie

— sa limite doit exister

— la limite en un point doit être égale à l'évaluation de la fonction en ce point.

Exemple 1.15

Est-ce que la fonction f_1 est continue ?

$$f_1(x) = x+2$$

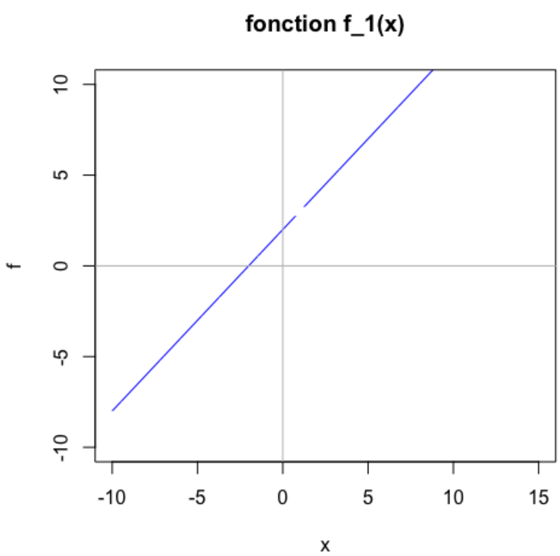
$$\lim_{x\to a} x+2 = a+2 = f(a), \forall\ a \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.16

Est-ce que la fonction suivante est continue ?

$$f_2(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-1} = x + 2(\text{ seulement pour } x \neq 1)$$

Le $Dom(f_2) = \mathbb{R} \backslash 1$.
Donc f_2 n'est pas définie en 1, elle n'est pas continue.



Exemple 1.17

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{pour } x \neq 1 \\ 2 & \text{pour } x = 1 \end{cases}$$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
n'est pas continue en $a = 1$, car $\lim_{x \to 1} f_3(x) \neq f_3(1)$.

$$\lim_{x \to 1} f_3(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 \neq f_3(1) = 2$$

Exemple 1.18

$$f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{pour } x \neq 1 \\ 3 & \text{pour } x = 1 \end{cases}$$

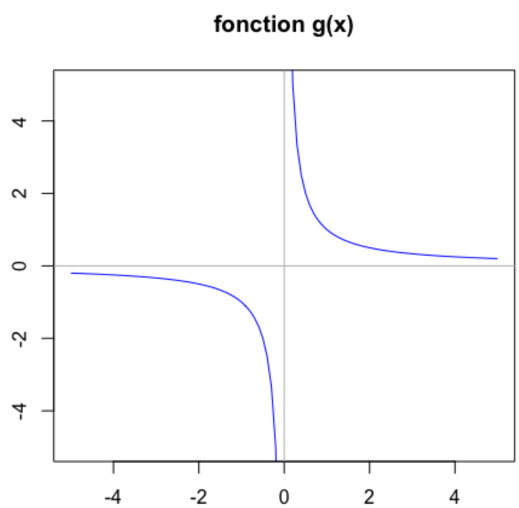
f_4 est continue partout, incluant le point $a = 1$, car

$$\exists \lim_{x \to 1} f_4(x) = f_4(1)$$

Exemple 1.19

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction g n'est pas continue à $a = 0$, car $f(0)$ n'est pas définie et même $\lim_{x \to 0} g(x)$ n'existe pas. On dit que g a une discontinuité essentielle à 0.



Exemple 1.20

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \leq 1 \\ x+1 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

A une discontinuité car

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim_{x \to 1^+},$$

Ce qu'on appelle une discontinuité de saut.

Autre exemple fait en classe

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \geq 0 \\ x & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Vérifiez si la fonction g ci-dessus est continue :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to o^+}(x^2) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}(x) = 0$$
$$\text{et } g(0) = 0^2 = 0$$

Sachant que g est définie $\forall\ x$, g est donc continue !

Proposition 1.16

Si f et g sont des fonctions continues en a, alors les fonctions suivantes sont aussi continues en a :

$f+g$	$f-g$
cf	$f\circ g$
fg	$\frac{f}{g}$

Exemple 1.21

$$h(x) = |x^3 + 2x - 1|$$

La fonction h est continue car

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x^3 + 2x - 1$$

Sont continues $\forall\ x$, alors $h(x) = f(g(x))$ est continue.

Théorème 1.17

(Théorèmes des valeurs intermédiaires)
Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et si w est un nombre quelconque situé entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un nombre c situé dans $[a, b]$ tel que $f(c) = w$.

Exemple 1.22

Montrer que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ a au moins une racine entre 1 et 2.

Démonstration.

$$f(1) = (1)^5 + 2(1)^4 - 6(1)^3 + 2(1) - 3 = -4 < 0$$
$$f(2) = (2)^5 + 2(2)^4 - 6(2)^3 + 2(2) - 3 = 17 > 0$$

Donc,

$$\text{Pour } w = 0 \exists\ c \in (1,2) \text{ tel que } f(c) = w = 0$$

□

Corollaire 1.18

Si f est continue et n'a pas de racines sur un intervalle, alors f est soit strictement positive, soit strictement négative sur cet intervalle.

1.8 La dérivée

Rappelons que la pente de PQ, avec $P(a, f(a))$ et $Q(a+h, f(a+h))$ est

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 1.9

La pente m_a de la tangente au graphique de f en $P(a, f(a))$ est

$$m_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

Pourvu que cette limite existe.

Supposons qu'un point P se déplace sur une droite et que sa position au temps t soit donnée pas $s(t)$. La vitesse moyenne de P entre les moments a et $a+h$ est

$$v_{moy} = \frac{\text{variation d'espace parcouru}}{\text{variation de temps}} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Définition 1.20

La vitesse (instantannée) de P au moment a est données par

$$v_a = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h},$$

Pourvu que cette limite existe.

La définition par défaut de la dérivée est :

Définition 1.21

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.31}$$

Notation : $\frac{d}{dx}f(x)$ ou $\frac{df}{dx}(x)$.

Définition 1.22

Note : on peut calculer la dérivée à droite et à gauche, comme les limites !

à droite...

$$\lim_{h \to o^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

à gauche...

$$\lim_{h \to o^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Un exemple...

$$f(x) = |x-2|$$

Trouvez $f'(2^+)$ et $f'(2^-)$

On sait que :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f'(2^+) &= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{2+h-2-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{h\to 0^-} \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \tfrac{2-2-h-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \tfrac{-h}{h} \\ &= -1 \end{aligned} \right.$$

Exemple 1.23

Pour $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$, déterminer

a) $f'(x)$;

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 12(x+h) + \cancel{8} - 3x^2 + 12x - \cancel{8}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(\cancel{x}+h-\cancel{x})(x-h+x) - 12(\cancel{x}+h-\cancel{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h(2x+h) - 12h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}[3(2x+h)-12]}{\cancel{h}} = 3(2x) - 12 = \boxed{\text{6x -12}}$$

b) $f'(2)$ et $f'(4)$;

$$f'(2) = 6(-2) - 12 = -24$$
$$f'(4) = 6(4) - 12 = 12$$

c) le point du graphique de f en lequel la tangente est horizontale.
La traduction serait : trouver la valeur de x pour laquelle $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0$$
$$6x - 12 = 0$$
$$\boxed{x \Rightarrow 2}$$

Remarque 1.23

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad n = 1, 2, ... \forall x$$
$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad n = -1, -2, ... \forall x \neq 0$$

Alors,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Démonstration.

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)^n - x^n}{h}$$
Remarque...
$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$
Alors,
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x} + \cancel{h} - \cancel{x})\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}(x) + ... + (x+h)(x)^{n-2} + x^{n-1}\right)}{\cancel{h}}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}(x) + ... + (x+h)(x)^{n-2} + x^{n-1}\right)$$
$$= x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-2}x^2 + ... + x^{n-1}$$
$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} + x^{n-1}}_{\text{n fois}} = nx^{n-1}$$

□

1.8.1 Règles de dérivation

$$
\begin{aligned}
c' &= 0 \\
(u^n)' &= nu^{n-1} \\
(e^u)' &= e^u u' \\
(a^u)' &= a^u \ln(a) u' \\
(\ln(u))' &= \frac{1}{u} u' \\
(\log_a(u))' &= \frac{1}{\ln(a) u} u' \\
(\sin(u))' &= \cos(u) u' \\
(\cos(u))' &= -\sin(u) u' \\
(\tan(u))' &= \sec^2(u) u' \\
(\cot(u))' &= -\csc^2(u) u' \\
(\sec(u))' &= \sec(u)\tan(u) u' \\
(\csc(u))' &= -\csc(u)\cot(u) u' \\
(\arcsin(u))' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' \\
(\arccos(u))' &= \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} u' \\
(\arctan(u))' &= \frac{1}{1+u^2} u'
\end{aligned}
$$

Définition 1.24

La “dérivée seconde” d'une fonction f, notée f'' ou $\frac{d}{dx^2}f(x)$ est la dérivée de f', si f' a elle-même une dérivée.

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Même principe pour la dérivée 3^{e}, 4^{e}, ..., n^{e}. :

$$f^(n)(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

Exemple 1.24

Trouvez les dérivées des fonctions suivantes :

a)

$$f_1(x) = 5x^4$$

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3 \\
f_1''(x) &= 20(x^3)' = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2 \\
f_1'''(x) &= 60(x^2)' = 60 \cdot 2x = 120x \\
f_1^{(4)}(x) &= 120(x)' = 120 \\
f_1^{(5)}(x) &= 0 \\
f_1^{(n)}(x) &= 0 \quad \text{si } n \geq 5
\end{aligned}$$

b)

$$f_2(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f_2'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

c)

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

Si on remplace l'expression x^2+1 par $g(x)$, alors,

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^2 + 1 \Leftrightarrow g'(x) = 2x \\
f_3'(x) &= \frac{1}{3} \cdot (g(x))^{\frac{1}{3}-1} \cdot g'(x) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \\
&= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}
\end{aligned}$$

d)

$$f_4(x) = 5(x^2+1)^4$$

Si on remplace l'expression x^2+1 par $g(x)$, alors,

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^2 + 1 \Leftrightarrow g'(x) = 2x \\
f_4'(x) &= 5 \cdot 4 \cdot (g(x))^3 \cdot g'(x) \\
&= 40x(x^2+1)^3
\end{aligned}$$

e)

$$f_5(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Trouver $\lim_{x\to 0} f_5(x)$ en utilisant la règle de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée}$$

Règle de l'Hôpital...

$$\lim_{x\to 0} \frac{a(x)}{b(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a'(x)}{b'(x)}$$

donc,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

f)

$$f_6(x) = x^2 \ln x$$

Par définition,

$$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)'\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$$

Alors,

$$f_6'(x) = 2x\ln x + \frac{1}{x}x^2 = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

g)

$$f_7(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+1}$$

Par définition,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Alors,

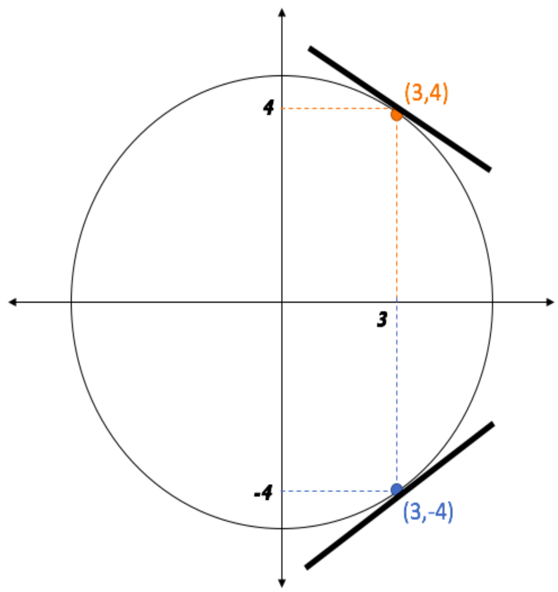
$$f_7'(x) = \frac{e^{3x}\cdot 3(x^2+1) - e^{3x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{3x}(3x^2-2x+3)}{(x^2+1)^2}$$

h)

$$f_8(x) = \log_2(x^3+1)$$

$$f_8'(x) = \frac{1}{(x^3+1)\ln 2}\cdot(x^3+1)' = \frac{3x^2}{(x^3+1)\ln 2}$$

1.8.2 Dérivation implicite



/

Exemple 1.26

Soit l'équation d'un cercle de rayon 5 centré sur (0,0), défini par :

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Trouver la pente au points suivants, en utilisant soit les équations explicites, soit les équations implicites :

En utilisant les équations explicites

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2} = \begin{cases} y_1 = \sqrt{25 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases}$$

avec y_1, on trouve la pente (dérivée) au point (3,4) et avec y_2, on trouve la pente au point (3,-4).

a) au point (3,4) ;

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= \frac{1}{2}(25-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(25-x^2)' \\
&= \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \\
y_1'(3) &= \frac{3}{\sqrt{25-(3)^2}} = -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

b) (3,-4) ;

$$
\begin{aligned}
y_2 &= -\sqrt{25-x^2} \\
y_2'(x) &= -\frac{1}{2}(25-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(25-x^2)' \\
&= \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \\
y_2'(3) &= \frac{3}{\sqrt{25-3^2}} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

En utilisant les équations implicites Dans cette section, important de ne pas oublier que y(x) est une fonction de x, donc on peut le dérivée par rapport à x :

$$y = y(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(y(x))^2 = 2y(x)\cdot y'(x)$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
y^2 + x^2 &= 25 \\
\frac{d}{dx}(y^2+x^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\
2y(x)y'(x) + 2x &= 0 \\
\frac{\cancel{2}(y(x)\cdot y'(x)+x)}{\cancel{2}} &= \frac{0}{2} \\
y(x)\cdot y'(x) + x = 0 \Leftrightarrow y'(x) &= \frac{-x}{y}
\end{aligned}
$$

C'est plus rapide pour évaluer

a) le point à (3,4) ;

$$y'_{(x=3,y=4)} = \frac{-3}{4}$$

b) la point à (3,-4) ;

$$y'_{(x=3,y=-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Exemple 1.27

Quelle est la pente de la tangente au graphique de

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

Au point $P(1, -2)$?

$$\begin{aligned}
y^4 + 3y - 4x^3 &= 5x + 1 \\
\frac{d}{dx}(y^4 + 3y - 4x^3) &= \frac{d}{dx}(5x + 1) \\
4y(x)^3 \cdot y'(x) + 3 \cdot y'(x) - 12x^2 &= 5 \\
y'(x)\left(4y^3 + 3\right) &= 12x^2 + 5 \\
y'(x) &= \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3} \\
y'_{(x=1, y=-2)} &= \frac{12(1)^2 + 5}{4(-2)^3 + 3} = -\frac{17}{29}
\end{aligned}$$

1.8.3 Dérivation Logarithmique

Exemple 1.28

Trouvez la dérivée de

$$f(x) = (x - 1)^{(x+1)}$$

on n'a pas de formules toute préparée pour ce cas là... on utilise la dérivée logarithmique.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - 1)^{(x+1)} \\
\ln f(x) &= \ln\left((x - 1)^{(x+1)}\right) \\
\frac{d}{dx}&\left(\ln f(x) = (x + 1)\ln(x - 1)\right) \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln(x - 1) + \frac{x + 1}{x - 1} \\
f'(x) &= f(x)\left(\ln(x - 1) + \frac{x + 1}{x - 1}\right) \\
f'(x) &= (x - 1)^{(x+1)}\left(\ln(x - 1) + \frac{x + 1}{x - 1}\right)
\end{aligned}$$

1.8.4 Applications de la dérivée

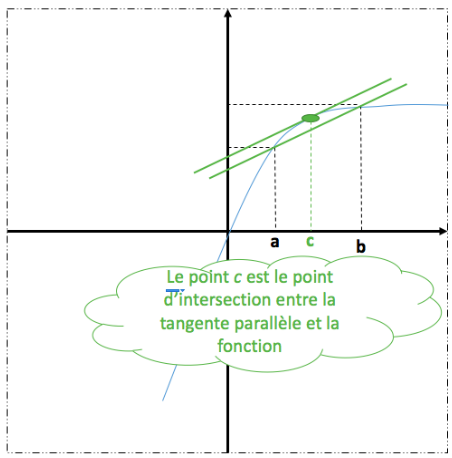
Théorème 1.25

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b), alors il existe un nombre $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Soit aussi

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Corollaire 1.26

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé [a,b] et dérivable sur l'intervalle ouvert (a,b) :

(1) - si $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

(2) - si $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

(3) - si $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$, alors f est non-décroissante sur $[a, b]$.

(4) - si $f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$, alors f est non-croissante sur $[a, b]$.

Exemple 1.29

Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$, tracer le graphique du graphique à l'aide de la dérivée.

On peut exprimer $f(x)$ de façon à déterminer les racines :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 5x - 5 \\ &= x^2(x+1) - 5(x+1) \\ &= (x^2-5)(x+1) \\ &= (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x+1) \end{aligned}$$

Si on trouve la dérivée et les zéros de la dérivée, on trouvera les point d'inflexion, soit les points où la fonction n'est ni-croissante, ni décroissante :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_i = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Si on évalue la dérivée aux valeurs des racines, on déterminera la pente de la courbe à cet endroit, ce qui nous permettra de faire une esquisse du graphique :

$$f'(\sqrt{5}) = 3(\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5}) - 5 = 2\sqrt{5} + 10 \Rightarrow \text{pente positive}$$

$$f'(-\sqrt{5}) = 3(-\sqrt{5})^2 + 2(-\sqrt{5}) - 5 = -2\sqrt{5} + 10 \Rightarrow \text{pente positive}$$

$$f'(-1) = 3(1)^2 - 2(1) - 5 = -4 \Rightarrow \text{pente négative}$$

Finalement, en évaluant la fonction aux racines de la dérivée, on obtient l'emplacement exact des ńplateauxż, là où la fonction est nulle :

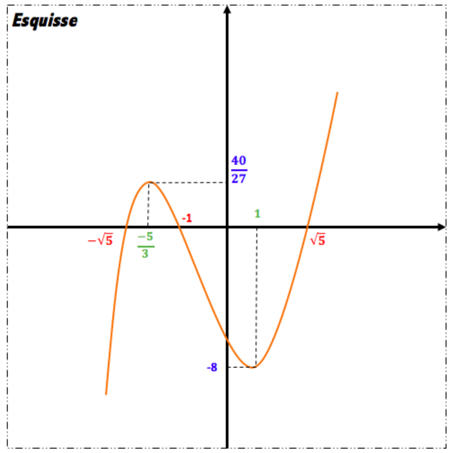
$$f(\frac{-5}{3}) = (\frac{-5}{3})^3 + (\frac{-5}{3})^2 - 5(\frac{-5}{3}) - 5 = \frac{40}{27}$$

$$f(1) = (1)^2 + (1)^2 - 5(1) - 5 = -8$$

Donc,

x	$-\sqrt{5}$	$-\frac{5}{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{40}{27}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$

L'esquisse qu'on obtient :



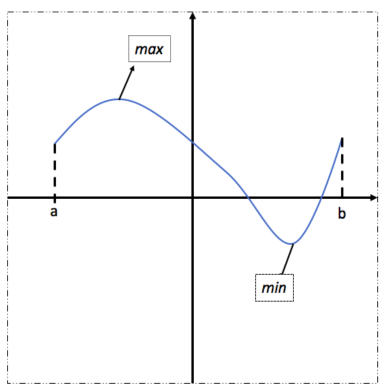
Définition 1.27

Soit f une fonction définie sur un ensemble de nombres réels D et soit c un point de D.

1. $f(c)$ est le *maximum* de f sur D si $f(x) \leq f(c), \forall\, x \in D$.
2. $f(c)$ est le *minimum* de f sur D si $f(x) \geq f(c), \forall\, x \in D$.

Théorème 1.28

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f admet *au moins* un minimum et un maximum sur $[a, b]$.



Attention ! Si $]a, b[$ n'est pas un intervalle fermé, ça ne s'applique par toujours. Exemple une fonction $g(x) = \ln x$, ça tend vers l'infini, donc si l'intervalle n'est pas fermée, on ne trouve pas de minimum (on trouve $inf g(x) = -\infty$).

Définition 1.29

Soit f une fonction définie sur un ensemble de nombres réels D et soit c un point de D.

1. $f(c)$ est le *maximum local* de f s'il existe un (petit) intervalle ouvert (α, β) tel que $c \in (\alpha, \beta)$ et $f(x) \leq f(c), \forall\, x \in (\alpha, \beta)$.
2. $f(c)$ est le *minimum local* de f s'il existe un (petit) intervalle ouvert (α, β) tel que $c \in (\alpha, \beta)$ et $f(x) \geq f(c), \forall\, x \in (\alpha, \beta)$.

Point critique

Un *point critique* est un nombre c du domaine où $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$.

Une fonction f admet un extremum (minimum ou maximum) local en un point c d'un intervalle ouvert seulement si $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$.

1.8.5 Trouver les *extremum* sur $[a, b]$ d'une fonction

1. Chercher tous les *points critiques* de f sur l'intervalle ouvert (a, b) ;
2. Calculer la valeur de f pour chaque points critiques ;
3. Calculer les valeurs de f aux extrémités, soit $f(a)$ et $f(b)$;
4. *maximum* : plus grande valeur calculée jusqu'à maintenant et
   minimum : plus petite valeur calculée jusqu'à maintenant.

Exemple 1.31

Soit
$$f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$$
Chercher le maximum et le minimum de f sur chacun des intervalles suivants :

a) sur $[-1, \frac{1}{2}]$

1. trouver les *points critiques*
   (a) trouver $f'(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{2/3}(x^2 - 8) \\
f'(x) &= \frac{8}{3}x^{5/3} - \frac{2}{3}8x^{-1/3} \\
&= \frac{8}{3}x^{-1/3}(x^2 - 2) \\
&= \frac{8}{3}\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}$$

À noter que la factorisation supplémentaire nous a permis d'obtenir nos racines de la fonction.

(b) trouver les points où $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

(c) trouver les points où $f'(x) \nexists$

$$f'(x) \nexists \in \{0\}$$

2. Calculer la valeur de f pour chaque points critiques

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^{2/3}((\sqrt{2})^2 - 8) && = -6\sqrt[3]{2} \\ f(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^{2/3}((-\sqrt{2})^2 - 8) && = -6\sqrt[3]{2} \\ f(0) &= (0)^{2/3}((0)^2 - 8) && = 0 \end{aligned}$$

3. Calculer les valeurs de f aux extrémités de l'intervalle

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^{2/3}((-1)^2 - 8) && = -7 \\ f(\frac{1}{2}) &= (\frac{1}{2})^{2/3}((\frac{1}{2})^2 - 8) && = -4,8822 \end{aligned}$$

4. Trouver $\max f$ et $\min f$
   Ces derniers correspondent respectivement à la plus grande et la plus petite valeur trouvées dans les étapes précédentes, soit $\max f = 0$ et $\min f = -7$

b) sur $[-1, 3]$

x	-1		0		$\sqrt{2}$		3
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	-	0	$+$	
$f(x)$	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-6\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{9}$

c) sur $[-3, -2]$

x	-3		-2
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$\sqrt[3]{9}$	$\searrow$	$-4\sqrt[3]{4}$

Donc,

$$\max f = f(-3) = \sqrt[3]{9}$$
$$\min f = f(-2) = -4\sqrt[3]{4}$$

1.8.6 Trouver les *extremum locaux* sur $[a, b]$ d'une fonction

Test 1 : avec la première dérivée

Soit c un point critique de f, fonction continue en c et dérivable sur un intervalle ouvert I contenant c, sauf peut-être en c lui-même.

— Si $f'(c)$ passe du positif au négatif en c, alors $f(c)$ est un maximum local de f.

— Si $f'(c)$ passe du négatif au positif en c, alors $f(c)$ est un minimum local de f.

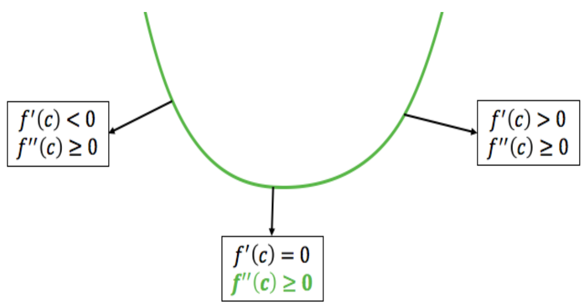
— Si $f'(c) > 0$ ou $f'(c) < 0$ pour tout x dans I sauf en c, alors $f(c)$ n'est pas un extremum de f.

Définition 1.30

Soit f dérivable en sur un intervalle ouvert I. On dit que :

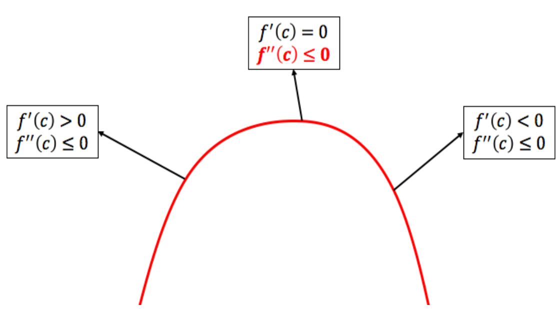
— f est *convexe* sur I si f' est strictement croissante sur I, soit

$$f'' \geq 0, \forall\, x \in I$$



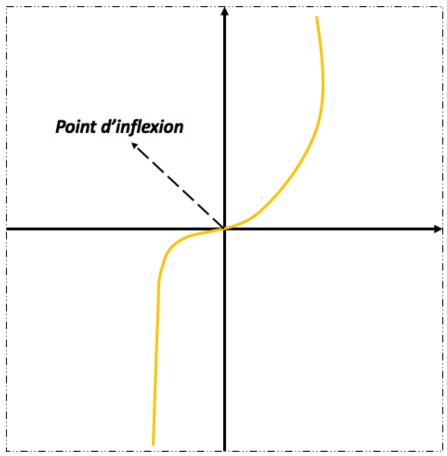
— f est *concave* sur I si f' est strictement décroissante sur I, soit

$$f'' \leq 0, \forall\, x \in I$$



Définition 1.31

Soit une fonction f continue au point c. On dit que le point du graphique $(c, f(c))$ est un *point d'inflexion* si la concavité se change au point c (exemple f est convexe sur (a, c) et concave sur (c, b)).



Test 2 : avec la deuxième dérivée

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert contenant c tel que $f'(c) = 0$.

— Si $f''(c) < 0$, alors $f(c)$ est un *maximum local* de f.

— Si $f''(c) > 0$, alors $f(c)$ est un *minimum local* de f.

Exemple 1.32

Soit
$$f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$$
Chercher les maximum et les minimum locaux de f.

C'est la même fonction que lors de l'Exemple 1.31.

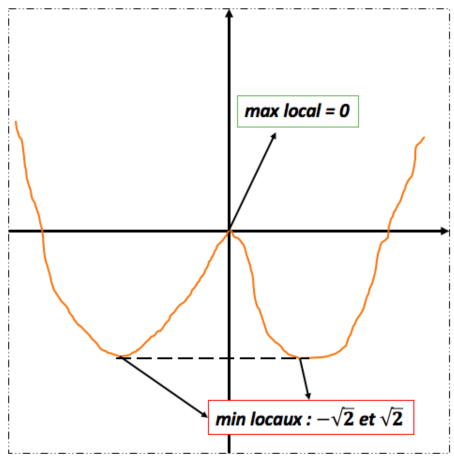
$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \left(\frac{8}{3}x^{5/3} - \frac{16}{3}x^{-1/3}\right)' \\ &= \frac{8}{9}\frac{5x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

Si on se créé un tableau global :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$	-	-	0	$+$	$\nexists$	-	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$-6\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-6\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$

Donc, il a un max local à 0 et 2 min locaux à $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Et le graphique ressemble à ça :



1.9 Intégrales

1.9.1 Intégrales indéfinies

Définition 1.32

Une fonction F est une *primitive* (ou une intégrale indéfinie) de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x), \forall\ x \in I$.

Exemple 1.33

Soit $F_1(x) = x^3$. $F(x)$ est la *primitive* de f.

$$F_1'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$$

Par contre, $F_2(x) = 5 + x^3$, et

$$F_2'(x) = (5 + x^3)' = 0 + 3x^2 = f(x)$$

ça explique le théorème suivant...

Théorème 1.33

Si F_1 et F_2 sont deux *primitives* de f sur un intervalle I, alors il existe une constante C tel que

$$F_2(x) = F_1(x) + C \tag{1.32}$$

Lien entre $F(x)$ et $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.33}$$

1.9.2 Règles d'intégration (table de primitives)

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq = -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$
$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$
$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$
$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$
$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Intégration par partie

$$\int udv = uv - \int vdu$$

u : expression qui se dérive facilement
v : expression qui est plus facile à intégrer ou plus difficile à dériver

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(f_1(x)\cdot f_2(x))' &= f_1'(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x)\\
f_1'(x)\cdot f_2(x) &= (f_1(x)\cdot f_2(x))' - f_1(x)\cdot f_2'(x)
\end{aligned}
$$

Si on ajoute l'intégrale de chaque côté de l'équation...

$$
\begin{aligned}
\int (f_1'(x)\cdot f_2(x))dx &= \cancel{\int}\cancel{(}f_1(x)\cdot f_2(x)\cancel{)'}dx - \int (f_1(x)\cdot f_2'(x))dx\\
\int (f_1'(x)\cdot f_2(x))dx &= f_1(x)\cdot f_2(x) - \int (f_1(x)\cdot f_2'(x))dx
\end{aligned}
$$

□

Quelques exemples d'intégrales indéfinies....

1. Trouver $F(x)$ si $f(x) = 5x^3 + 2\cos x$.

$$\int (5x^3 + 2\cos x)dx$$

$$
\begin{aligned}
\int (5x^3 + 2\cos x)dx &= 5\int x^3 dx + 2\int \cos x dx\\
&= \frac{5x^4}{4} + C_1 + 2\sin x + C_2\\
&= \frac{5x^4}{4} + 2\sin x + C
\end{aligned}
$$

2. Trouver $F(t)$ si $f(t) = \frac{8t^6 - 6t^2\sqrt{t} + 1}{t^3}$.

$$\int \frac{8t^6 - 6t^2\sqrt{t} + 1}{t^3}dt$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{8t^6 - 6t^2\sqrt{t} + 1}{t^3}dt &= \int \left(8t^3 - 6t^{1/2} + t^{-3}\right)dt\\
&= \frac{8t^4}{4} - \frac{6t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{-2}}{-2} + C\\
&= 2t^4 - 4t\sqrt{t} - \frac{1}{2t^2} + C
\end{aligned}
$$

3. La fonction de densité de X est $f(x) = 0,01e^{-0,01x}$. Trouver la fonction de répartition $F(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) \int f(x)dx \qquad\qquad &= \int 0,01e^{-0,01x}dx \\ &= 0,01 \int e^{-0,01x}dx \\ &= -\int -0,01e^{-0,01x}dx \end{aligned}$$

On peut déterminer que $\left(e^{-0,01x}\right)' = -0,01e^{-0,01x}$. Alors,

$$\begin{aligned} &= -\int \left(e^{-0,01x}\right)' dx \\ &= -e^{-0,01x} + C \end{aligned}$$

Il faut ensuite trouver la valeur de la constante C :

$$\begin{aligned} F(\infty) = 1 &\Leftrightarrow -e^{-0,01x} + C = 1 \\ &\Leftrightarrow -e^{-\infty} + C = 1 \\ &\Leftrightarrow 0 + C = 1 \\ &\Leftrightarrow C = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-0,01x}}$$

4. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = 6x^2 + x - 5$ qui satisfait $y(0) = 2$.

$$\begin{aligned} y(x) &= \int y'(x)dx \\ &= \int (6x^2 + x - 5)dx \\ &= \frac{6x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + C \\ &= 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C \\ \mathrm{y}(0) &= 2(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2 - 5(0) + C \\ 2 &= C \end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{y(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2}$$

5. Trouver $y(x)$ qui satisfait $y(0) = 3$ et $y'(0) = 4$, si $y''(x) = 5\cos x + 2\sin x$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int y''(x)dx \\ &= \int (5\cos x + 2\sin x)dx \\ &= 5\sin x - 2\cos x + C_1 \end{aligned}$$

On peut trouver $y(x)$ en calculant l'intégrale de $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int y'(x)dx \\ &= \int (5\sin x - 2\cos x + C_1)dx \\ &= -5\cos x - 2\sin x + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Il faut trouver C_1 et c_2 en posant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 4$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= \underbrace{5\sin 0}_{0} - \underbrace{2\cos 0}_{1} + C_1 \\ 4 &= 0 - 2 + C_1 \\ \mathbf{C_1} &= 6 \\ y(0) &= \underbrace{5\cos 0}_{1} - \underbrace{2\sin 0}_{0} + C_1(0) + C_2 \\ 3 &= 5 + C_2 \\ \mathbf{C_2} &= 8 \end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{y(x) = -5\cos x - 2\sin x + 6x + 8}$$

6. Résoudre l'intégrale $\int x^3 \ln x dx$ avec la technique d'Intégration par partie.

$$\begin{aligned}
\int x^3 \ln x dx &= \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C
\end{aligned}$$

Note : on peut procéder de la même façon à chaque fois que l'on a la forme $\int (polynomiale) \ln x dx$.

7. Résoudre l'intégrale $\int x^2 e^{-2x} dx$ avec la technique d'Intégration par partie.

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-2x} dx &= \int x^2 \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx \\
&= x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} \underbrace{- \int (\cancel{2}x) \frac{e^{-2x}}{-\cancel{2}} dx}_{\text{terme positif}} \\
&= \frac{-1}{2} x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx
\end{aligned}$$

À ce stade, il faut refaire une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2} x^2 e^{-2x} + \int x \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx \\
&= \frac{-1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{x e^{-2x}}{-2} - \int (1) \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
&= \frac{-1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{x e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2x}}{-2} + C \\
&= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C
\end{aligned}$$

8. Résoudre l'intégrale $\int(2x^3+1)^7x^2dx$ en utilisant le changement de variable

$$\int(2x^3+1)^7x^2dx \Rightarrow \underbrace{\boxed{u=2x^3+1}, \boxed{du=6xdx}, \boxed{x^2=\frac{1}{6}du}}_{\text{changement de variable}}$$

$$= \int u^7\frac{1}{6}du$$

$$= \frac{u^8}{8}\frac{1}{6}+C$$

$$= \frac{(2x^3+1)^8}{48}+C$$

9. Résoudre l'intégrale $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ en utilisant le changement de variable.

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \underbrace{\boxed{u=\sqrt{x}}, \boxed{du=\frac{1}{2\sqrt{x}}}, \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}=2du}}_{\text{changement de variable}}$$

$$= \int 2\cos u du$$

$$= 2\sin u + C$$

$$= 2\sin\sqrt{x}+C$$

1.9.3 Sommes remarquables

$$\sum_{k=1}^{n} k^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

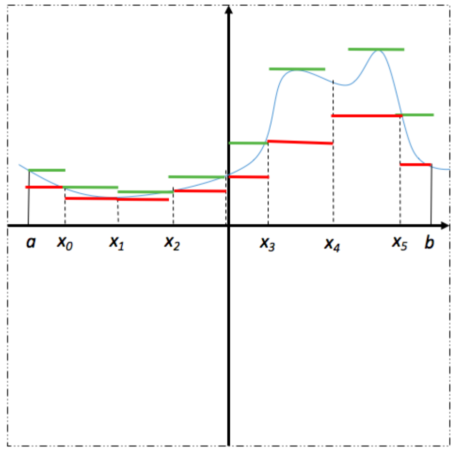
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

1.9.4 L'intégrale définie



On étudie l'aire de la région sous le graphique de f depuis a jusqu'à b.

Si on considère la partition régulière (intervalle égaux pour $[a, b]$), définie comme suit :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$
$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, ..., x_k = a + k\Delta x, ...x_n = b$$
$$\text{pour } k = 1, 2, ..., n, \quad u_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ et } v_k \in [x_{k-1}, x_k]$$
$$\text{tel que}$$
$$f(u_k) = \min_{t\in[x_{k-1},x_k]} f(t) \quad f(v_k) = \max_{t\in[x_{k-1},x_k]} f(t)$$

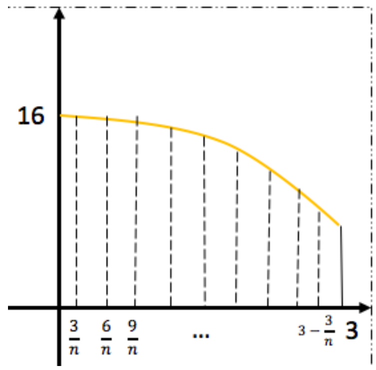
Considérons, pour la région de a à b :

$$\text{Aire du polygone inscrit} \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x \to \text{Somme de Riemann inférieure}$$
$$\text{Aire du polygone circonscrit} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x \to \text{Somme de Riemann supérieure}$$

Exemple 1.40

Soit $f(x) = 16 - x^2$ et $D = [0, 3]$.

Partitionner l'intervalle $[0, 3]$ dans n sous-intervalles égales,calculer les limites pour $n \to \infty$ et calculer A_n et B_n à la région sous la courbe de



f est décroissante sur $[0, 3]$, donc

$$\min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_k) \text{ et } \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_{k-1})$$

Calcul de l'aire du polygone inscrit :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[16 - \left(\frac{3k}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(16 - \frac{9k^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} 16 - \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{9k^2}{n^2} \\
&= \left(\frac{3}{\cancel{n}}\right)16\cancel{n} - \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 48 - \left(\frac{27}{n^{\cancel{3}2}}\right)\left(\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= 48 - \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} 48 - \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} = 48 - 9 = 37
\end{aligned}$$

Calcul de l'aire du polygone cisconscrit :

$$
\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[16 - \left((k-1)\frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} 16 - (k-1)^2\frac{9}{n^2} \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} 16 - \frac{3}{n}\left(\frac{9}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(k-1)^2}_{l=(k-1)} \\
&= 48 - \frac{27}{n^3}\left(\sum_{l=0}^{n-1} l^2\right) \\
&= 48 - \frac{27}{n^3}\left(0^2 + \sum_{l=1}^{n-1} l^2\right) \qquad \rightarrow \text{on connaît une formule pour ça} \\
&= 48 - \frac{27}{n^{\cancel{3}2}}\left(\frac{(n-1)(\cancel{n-1+1})(2(n-1)+1)}{6}\right) \\
&= 48 - \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} 48 - \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2} = 48 - 9 = 37
\end{aligned}
$$

Par théorème du sandwich, on peut conclure que,

$$
\begin{aligned}
A_n \leq & \text{ l'aire sous la courbe} && \leq B_n \forall\ n \\
37 \leq & \text{ l'aire sous la courbe} && \leq 37
\end{aligned}
$$

L'aire sous la courbe est donc égale à 37.

Généralisation Pour $k = 1, 2, ..., n$, soit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ choisi de façon arbitraire (n'importe où entre les 2). On définit la somme de Reimann comme :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$$

On observe que ($\forall\ n$)

$$A_n \leq I_n \leq B_n$$

et en appliquant le théorème du Sandwich, on arrive à

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \text{aire sous la courbe}$$

Définition 1.34

On définit une **somme de Riemann** I_n de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ comme

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{1.34}$$

où $a = x_0 < x_1 < ...x_{n-1} < x_n = b$ est une partition de l'intervalle $[a, b]$ et $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pour chaque $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Remarque 1.35

Pour une fonction f il existe une infinité de sommes de Reimann, parce qu'il existe une infinité de partitions $\{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ et une infinité de points ξ_k dans l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

Somme de Riemann...	si...
inférieure	$\xi_k, k \geq 1 \| f(\xi_k) = \min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$
supérieure	$\xi_k, k \geq 1 \| f(\xi_k) = \max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$
à gauche	$\xi_k = x_{k-1}, k \geq 1$
à droite	$\xi_k = x_k, k \geq 1$

Définition 1.36

Une fonction f est **intégrable au sens Riemann** sur un intervalle $[a, b]$ s'il existe L tel que

$$\lim_{||d||\to 0} \sum_{k=1} n f(\xi_k)\Delta x_k = L \tag{1.35}$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $\max\{\Delta x_k, k \in \{1, 2, ..., n\}\}$, pour toutes partitions de l'intervalle et pour tous points $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

On dit que L est l'intégrale de f au sens de Riemann de a à b. On appelle L aussi par *l'intégrale définie* de f depuis a jusqu'à b, et elle est notée par

$$\int_a^b f(x)dx$$

1.9.5 Propriétés de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Si f, g sont intégrables et $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{1.36}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{1.37}$$

Théorème fondamental du calcul :

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a xf(t)dt\right] = f(x)$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Substitution :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Intégration par partie :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(g) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

équivalent à

$$\int_a^b uvdx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Théorème de *Leibnitz* :

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)dt = f(b(x),x)b'(x) - f(a(x),x)a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(t,x)dt$$

Exemple 1.41 - concret en probabilité

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \int_a^b f(x)dx \\ P(a < X < a + \Delta x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} P[x_{k-1} < X \leq x_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} P[x_{k-1} < X \leq x_{k-1} + \Delta x] \end{aligned}$$

Soit X avec $f(x) = 0,05e^{-0,05x}, x \geq 0$

1. Trouver $P(1 \leq X \leq 1,01)$

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 1,01) &= \int_1^{1,01} 0,05e^{-0,05x} \\ &= \cancel{0,05}\frac{e^{-0,05x}}{-\cancel{0,05}}\bigg|_1^{1,01} \\ &= -e^{-0,05x}\bigg|_1^{1,01} \\ &= -e^{-0,05(1,01)} + e^{-0,05(1)} \\ &= 0,000475496 \end{aligned}$$

2. Avec l'estimation $\approx f(x)\Delta x$
   On choisit une valeur arbitraire pour Δx qui est très petite...

$$\begin{aligned} f(x)\Delta x &= f(1)(0,01) \\ &= 0,05e^{-0,05(1)}(0,01) \\ &= 0,000475615 \end{aligned}$$

Théorème 1.37

Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $f(x) \geq 0 \forall\ x \in [a, b]$, alors l'aire A de la région sous le graphique de f depuis a jusqu'à b vaut

$$A = \int_a^b f(x)dx \tag{1.38}$$

Théorème 1.38

Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Remarque 1.39

L'intégrale définie d'une fonction discontinue n'existe pas toujours (parfois oui, parfois non).

Exemple 1.42

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$, trouver $\int_0^x f(x)dx = F(x) - F(0)$.

$$\begin{aligned}\int_0^x f(x)dx &= \int_0^x (x^2 + 2x)dx \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 - x\Big|_0^x \\ &= \frac{(x)^2}{3} + (x)^2 - (x) - \frac{(0)^3}{3} - (0)^2 + (0) \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 - x\end{aligned}$$

Alors, $\int_0^x f(x)dx$ est une primitive de f.

Exemple 1.43

Soit $Y \sim U(0, 3)$ avec

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & y \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[\end{cases}$$

Trouver $F(y) = \int_0^y f(t)dt$

Cas 1 : $0 < y < 3$

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_0^y f(t)dt \\
&= \int_0^y \frac{1}{3}dt \\
&= \frac{t}{3}\bigg|_0^y \\
&= \frac{y}{3}
\end{aligned}$$

Cas 2 : $y > 3$

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_0^3 f(t)dt + \int_3^y f(t)dt \\
&= \int_0^3 \frac{1}{3}dt + \int_3^y 0dt \\
&= \frac{t}{3}\bigg|_0^3 + 0 \\
&= \frac{3}{3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alors,

$$F(y) = \begin{cases} \frac{y}{3}, & 0 \leq y \leq 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

Exemple 1.44 - changement de variable

Évaluer $\int_o^3 \sqrt{y+1}dy$.
On va procéder par changement de variable :

$$\begin{aligned}
z &= y + 1 \qquad & y = 0 \rightarrow \quad & z = 1 \\
dz &= dy \qquad & y = 3 \rightarrow \quad & z = 4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_o^3 \sqrt{y+1}dy &= \int_1^4 z^{1/2}dz \\
&= \left.\frac{z^{3/2}}{3/2}\right|_1^4 \\
&= \frac{(4)^{3/2}-(1)^{3/2}}{3/2} \\
&= \frac{4\sqrt{4}-1}{3/2} \\
&= \frac{8\sqrt{4}-2}{3} \\
&= \frac{16}{3}-\frac{2}{3} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

Exemple - avec changement de variable

Évaluer $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3dt$.

$$
\begin{aligned}
u &= 1+t^4 & t=0 &\rightarrow & u=1 \\
du &= 4t^3du & t=1 &\rightarrow & u=2 \\
t^3dt &= \frac{du}{4}
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^3(1+t^4)^3dt &= \int_1^2 \frac{u^3}{4}du \\
&= \frac{1}{4}\left(\left.\frac{u^4}{4}\right|_1^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{(2)^4-(1)^4}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{4} \\
&= \frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

Exemple - intégration par partie

Évaluer $\int_1^3(2x^2+1)\ln(x+1)dx$

Tout d'abord, on fais un changement de variable :

$$\begin{aligned} t &= x+1 \qquad & x = 1 \rightarrow \quad t = 2 \\ dt &= dx & x = 3 \rightarrow \quad t = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 (2x^2+1)\ln(x+1)dx &= \int_2^4 2\left[(t-1)^2+1\right]\ln t dt \\ &= \int_2^4 \underbrace{(2t^2-4t+3)}_{\text{polynomiale}} \underbrace{\ln t}_{\text{logarithme}} \quad dt \end{aligned}$$

À ce stade, on fait un intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= \ln t \qquad & dv = 2t^2-4t+3 \\ du &= \frac{1}{t}dt & v = \frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 3t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 (2t^2-4t+3)\ln t dt &= (\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 3t)\ln t\Big|_2^4 - \int_2^4 (\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 3t)\frac{1}{t}dt \\ &= (\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 3t)\ln t\Big|_2^4 - \int_2^4 \frac{2t^2}{3} - 2t + 3dt \\ &= \left(\frac{2(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 3(4)\right)\ln(4) - \left(\frac{2(2)^3}{3} - 2(2)^2 + 3(2)\right)\ln(2) \\ &\quad - \left[\left(\frac{2(4)^2}{3} - 2(4) + 3\right) - \left(\frac{2(2)^2}{3} - 2(2) + 3\right)\right] \\ &= \frac{68}{3}\ln 4 - \frac{10}{3}\ln 2 - \left(\frac{128}{9} - 16 + 12\right) + \left(\frac{16}{9} - 4 + 6\right) \\ &= \frac{126}{3}\ln 2 - \frac{67}{9} \end{aligned}$$

1.9.6 Théorème de *Leibnitz*

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)dt = f(b(x),x)\cdot b'(x) - f(a(x),x)\cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx}f(t,x)dt \tag{1.39}$$

En réalité, on fait toujours le théorème de Leibnitz sans s'en rendre compte : si une de nos bornes est une constante, sa dérivée sera égale à 0, et le terme $f(b(x),x)\cdot b'(x)$ sera nul.

Exemple 1.47

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^4 \sin(x+2y)dy \\
&= 0 - 0 + \int_1^4 \frac{d}{dx}[\sin(x+2y)]dy \\
&= \int_1^4 \cos(x+2y)dy \\
&= \left.\frac{\sin(x+2y)}{2}\right|_{y=1}^4 \\
&= \frac{\sin(x+8)-\sin(x+2)}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 1.48

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\pi} \sin(x+2y)dy &= 0 - \sin(x+2x^2)(x^2)' + \int_{x^2}^{\pi} \frac{d}{dx}[\sin(x+2y)]dy \\
&= 0 - 2x(\sin(x+2x^2)) + \int_{x^2}^{\pi} \cos(x+2y)dy \\
&= -2x\sin(x+2x^2) + \left.\frac{\sin(x+2y)}{2}\right|_{y=x^2}^{\pi} \\
&= -2x\sin(x+2x^2) + \frac{\sin(x+2\pi)}{2} \\
&= (-2x+\frac{1}{2})\sin(x+2x^2) + \frac{\sin(x)}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 1.49

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{3x^4} \sin(x+2y)dy \\
&= \sin(x+2(3x^4))(3x^4)' - \sin(x+2x^2)(x^2)' \\
&+ \int_{x^2}^{3x^4} \frac{d}{dx}[\sin(x+2y)] \\
&= \sin(x+6x^4)(12x^3) - \sin(x+2x^2)(2x) + \int_{x^2}^{3x^4} \cos(x+2y)dy \\
&= 12x^3\sin(x+6x^4) - 2x\sin(x+2x^2) + \left.\frac{\sin(x+2y)}{2}\right|_{y=x^2}^{3x^4} \\
&= 12x^3\sin(x+6x^4) - 2x\sin(x+2x^2) \\
&+ \frac{1}{2}\sin(x+6x^4) - \frac{1}{2}\sin(x+2x^2)
\end{aligned}
$$

1.9.7 L'intégrale de Stiltjes

Définition 1.43

Soit une fonction g réelle bornée dérivable sur la suite d'intervalles $(D_i)_{i\leq k}$ et discontinue aux points $(x_j)_{j\leq k}$. Soit f une fonction réelle. On définit *l'intégrale de Stiltjes* de f par rapport à g, sur l'ensemble $A = D_i \cup \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, notée

$$\int_A f(x)dg(x) = \sum_{j=1}^{k}\int_{D_i} f(x)g'(x)dx + \sum_{i=1}^{m} f(x_i)[g(x_i) - g(x_i^-)] \qquad (1.40)$$

Note : l'intégrale de Stiltjes est une généralisation de l'intégrale de Riemann, qui tient compte des discontinuités présentes dans la fonction. Utiliser l'intégrale de Stiltjes revient alors à utiliser l'intégrale de Riemann !

Exemple 1.50

Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)d(g(x)) \quad \text{où } f(x) = x^2+1$$

avec les valeurs suivantes :

1. $g(x) = x$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx &= \frac{x^3}{3}+x\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}+1 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

2. $g(x) = x^3$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x^2+1)d(x^3) &= \int_{-1}^{1}(x^2+1)(x^3)'dx \\
&= \int_{-1}^{1}(x^2+1)(3x^2)dx \\
&= \int_{-1}^{1}3x^4+3x^2dx \\
&= \frac{3x^5}{5}+\frac{3x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{3(1)^5}{5}+(1)^3\right)-\left(\frac{3(-1)^5}{5}+(-1)^3\right) \\
&= \frac{3}{5}+1-(\frac{-3}{5}-1) \\
&= \frac{16}{5}
\end{aligned}
$$

3. $g(x) = |x|$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x^2+1)d(|x|) & \int_{-1}^{0}(x^2+1)d(-x)+\int_{0}^{1}(x^2+1)d(x) \\
&= \int_{-1}^{0}(x^2+1)(-1)dx+\int_{0}^{1}(x^2+1)dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{x=-1}^{0}+\frac{x^3}{3}+x\Big|_{x=0}^{1} \\
&= 0+\left(\frac{-1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{3}+1\right)-0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Exemple 1.51

Évaluer $\int_A x^2 d(g(x))$ sachant que

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & 2 \leq x \leq 3 \\ x^3 & x \geq 3 \end{cases}$$

et

1. $A = (0,3)$

$$\begin{aligned}
\int_{(0,3)} x^2 d(g(x)) &= \int_{(0,1)} x^2 d(g(x)) + \int_{(1,2)} x^2 d(g(x)) + \int_{(2,3)} x^2 d(g(x)) \\
&+ \underbrace{2^2[g(2) - g(2^-)]}_{\text{discontinuité au point } x=2} \\
&= \int_0^1 x^2 g(1) + \int_1^2 x^2 d(x) + \int_2^3 x^2 d(x^2) + 4[4-2] \\
&= \cancel{\int_0^1 x^2 (1)' dx} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \int_2^3 x^2 (2x) dx + 4(2) \\
&= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left.\frac{2x^4}{4}\right|_2^3 + 8 \\
&= \frac{7}{3} + \left(\frac{2(3)^4}{4} - \frac{2(2)^4}{4}\right) + 8 \\
&= \frac{7}{3} + 2\left(\frac{81-16}{4}\right) + 8 \\
&= \frac{7}{3} + \frac{65}{2} + 8
\end{aligned}$$

2. $A = [0,3)$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,3)} x^2 d(g(x)) &= \int_{(0,1)} x^2 d(g(x)) + \int_{(1,2)} x^2 d(g(x)) + \int_{(2,3)} x^2 d(g(x)) \\
&+ \underbrace{2^2[g(2) - g(2^-)]}_{\text{discontinuité au point } x=2} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

même réponse qu'au numéro 1 !

3. $A = [0,3]$

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,3]} x^2 d(g(x)) &= \int_{(0,1)} x^2 d(g(x)) + \int_{(1,2)} x^2 d(g(x)) + \int_{(2,3)} x^2 d(g(x)) \\
&\underbrace{+2^2[g(2) - g(2^-)] + 3^2[g(3) - g(3^-)]}_{\text{2 discontinuités}} \\
&= ...(\text{calculs similaires qu'au numéro 1}) \\
&= \frac{7}{3} + \frac{65}{2} + 8 + 3^2[g(3) - g(3^-)] \\
&= \frac{257}{6} + 9(27 - 9) \\
&= \frac{257}{6} + 162 \\
&= \frac{1229}{6}
\end{aligned}
$$

1.9.8 intégrales impropres à bornes infinies

Définition 1.44

Si f est continue sur $[a, \infty)$, alors

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \tag{1.41}$$

À condition que cette limite existe.

Si f est continue sur $(-\infty, a]$, alors

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx \tag{1.42}$$

À condition que cette limite existe.

Si f est continue sur tout $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \tag{1.43}$$

Quel que soit a et à condition que les deux intégrales impropres du membre de droite soient convergentes.

Exemple 1.53

Évaluer $\int_1^\infty x^{-1,001} dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-1,001}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-1,001}dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-0,001}}{-0,001}\right]_{x=1}^t\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{0,001}+\frac{t^{-0,001}}{-0,001}\\ &= \lim_{t/to\infty}\frac{\frac{1}{t^{0,001}}-1}{-0,001}\\ &= \frac{0-1}{-0,001}\\ &= 1000\end{aligned}$$

1.9.9 l'intégrale de fonctions discontinues

Définition 1.45

Si f est continue sur $[a,b]$ et discontinue en b, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx \tag{1.44}$$

À condition que l'un ou l'autres des limites existent.

Soit une fonction continue qui présente un point de discontinuité à $c\in(a,b)$, mais qui est continue ailleurs en $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{1.45}$$

à condition que les 2 intégrales impropres du membre de droite soient convergentes.

Exemple 1.55

Évaluer $\int_0^1 \ln x dx$.

La fonction n'est pas définie en $x = 0 \Leftrightarrow \ln(0) \nexists$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln x dx \\
&= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x' \ln x dx \\
&= \lim_{t \to 0^+} \left[x \ln x \Big|_{x=t}^{1} - \int_t^1 x \left(\frac{1}{x} \right) dx \right] \\
&= \lim_{t \to 0^+} [0 - t \ln t - 1 + t] \\
&= \lim_{t = 0^+} \\
&= 0 - 1 + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Exemple 1.56

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x^{-2/3} dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}} dx \\
&= \int_{-1}^0 x^{-2/3} dx + \int_0^1 x^{-2/3} dx \\
&= \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx + \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 x^{-2/3} dx \\
&= \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{x^{1/3}}{-1/3} \right]_{-1}^t + \lim_{s \to 0^+} \left[\frac{x^{1/3}}{1/3} \right]_t^1 \\
&= \lim_{t \to 0^-} (3t^{1/3} - 3(-1)^{1/3}) + \lim_{s \to 0^+} (3(1)^{1/3} - 3x^{1/3}) \\
&= 3(0)^{1/3} - 3(-1) + 3(1) - 3(0)^{1/3} \\
&= -3 + 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.10 Suites

Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers positifs. On utilise la notation a_n à la place de $f(n)$.

Exemple 1.57

$$(a_n)_{n\geq 1}, \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

Exemple 1.58

$$(a_n)_{n\geq 1}, \quad a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k, k \geq 1$$

Définition 1.46

L est la limite de la suite (a_n) (ou la suite converge vers L), qui se note

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{si } \forall\, \epsilon > 0, \exists\ N > 0 \text{ tel que } |a_n - L| < \epsilon \Leftrightarrow n > N \tag{1.46}$$

Quand un tel nombre L n'existe pas, on dit que la série n'a pas de limite ou elle *diverge*.

Remarque 1.47

La notation

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \tag{1.47}$$

signifie que, quel que soit $P > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n > P$ quand $n > N$.

Remarque 1.48

Soit une suite (a_n) et une fonction f tel que $f(n) = a_n$ et f définie pour tout $x \geq 1$.

1. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = L$
2. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Exemple 1.59

Déterminer si les suites suivantes convergent ou divergent :

1. $a_n = 1 + \frac{1+n^2}{n}$ $a_n = f(x)$ où
   $f(x) = 1 + \frac{1+x^2}{x}, x \geq 1$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} 1+\frac{1+x^2}{x} &= \lim_{x\to\infty} 1+\frac{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}{x} \\
&= 1+\infty \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, la série diverge.

2. $b_n = (-1)^n$
   $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ n'existe pas, ça diverge. Il faut par contre le prouver. Si on assume que $\exists\ L \Big| \lim_{n\to\infty} a_n = L$

   1[er] cas : Soit $\epsilon = \frac{L}{2}$ et $L > 0$.
   Mais

$$\begin{aligned}
|a_n - L| < \epsilon &\Leftrightarrow |(-1)^n - L| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow -\epsilon < (-1)^n - L < \epsilon \\
\boxed{\text{si } \epsilon = \tfrac{L}{2}} &\Leftrightarrow \frac{-L}{2} < (-1)^n - L < \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} < (-1)^n < \frac{3L}{2} \qquad\qquad \forall\ n > N
\end{aligned}$$

   Pas vrai ! Car pour $n = 2N+1 \Rightarrow (-1)^n = -1 < 0$

3. $c_n = \frac{5n}{e^{2n}}$

   Soit $f(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{e^{2x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(5x)'}{(e^{2x})'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2e^{2x}} \\
&= \frac{5}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Alors, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. La suite converge.

Remarque 1.49

On peut démontrer que[3]

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad |r| < 1 \\ \infty & \text{pour} \quad |r| > 1 \\ 1 & \text{pour} \quad r = 1 \\ \nexists & \text{pour} \quad r = -1 \end{cases}$$

Remarque 1.50

Si $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont des suites telles que

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

Pour tout $n \geq N$ où N est fixé, et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Corollaire

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème 1.52

Toute suite monotone et bornée est convergente (voir numéro 4 du dépannage du 6 novembre).

1.11 Séries

Une *série* est une expression de la forme

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Qu'on peut aussi représenter par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- Chaque a_j est un terme de la série
- a_n est le n^e terme de la série S.

3. Pas besoin de savoir les démontrer, mais il faut savoir le résultat !

— (S_n) est la suite de sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$(S_n) = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{1.48}$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &... \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{aligned}$$

Remarque 1.54

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \quad \text{où } S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1.49}$$

Définition 1.55

Une série est convergente si sa suite de sommes partielles (S_n) converge (à un nombre S). On dit que cette limite S est la *somme de la série.*

La série est divergente si sa suite de sommes partielles (S_n) n'est pas convergente.

1.11.1 Séries particulières

Il n'est pas important de savoir les prouver, mais il faut connaîtres les résultats des séries particulières ci-dessous :

Série géométrique	$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$
Série de Riemann	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
Série alternée	$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j b_j$
Série entières	$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-a)^k$
Série de Taylor	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n$
Série de MacLaurin	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n$
Série harmonique	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Exemple 1.60

Évaluer la limite des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&= \lim n\to\infty\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

b) $\sum(-1)^n$ diverge

c) $\sum \frac{1}{n}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+...\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\\
&= 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\\
&= 1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\\
&= \infty\boxed{\text{donc ça diverge}}
\end{aligned}
$$

Théorème 1.56

✓ Si une série $\sum a_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

✓ Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, alors la série est divergente

✓ Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, d'autres investigations sont nécessaires (on ne peut pas conclure !).

Exemple 1.62

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

a) $\sum \frac{n}{2n+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{alors la série diverge}}\end{aligned}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{peut être convergent}}\end{aligned}$$

Pour b), d'autres investigations sont nécessaires pour conclure.

Remarque 1.57

si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries convergentes de sommes A et B respectivement, alors

$$\sum (a_n + b_n) = A + B \tag{1.50}$$

$$\sum (a_n - b_n) = A - B \tag{1.51}$$

$$\sum ca_n = cA \tag{1.52}$$

où c est une constante

Remarque 1.58

Si $\sum a_n$ est convergente et $\sum b_n$ n'est pas convergente, alors $\sum(a_n + b_n)$ est divergente

Remarque 1.59

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries divergentes, d'autres investigations sont nécessaires pour déterminer si la série $\sum(a_n+b_n)$ est convergente ou divergente...

Exemple 1.63

Démontrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{5}{n(n+1)} + \frac{4}{5^{n-1}} \right]$$

On procède par étapes :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} &= 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 5 \left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + ... + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\
&= 5 \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= lim_{n \to \infty} 5 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 5(1-0) \\
&= 5
\end{aligned}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + ... \\
&= 4 \left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... \right] \\
&= 4 \left[1 + \left(\frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^3 + ... \right] \\
&= 4 \left(\frac{1}{1 - 1/5} \right) \\
&= 4 \frac{5}{4} \\
&= 5
\end{aligned}$$

3. Donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{5}{n(n+1)} + \frac{4}{5^{n-1}} \right] = 5 + 5 = 10$$

Exemple 1.64

Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{5^n} \right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{5^n}\right) &= \infty + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-1/5}\right)\\
&= \infty + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)\\
&= \infty + \frac{1}{4}\\
&= \infty \Rightarrow \boxed{\text{la série diverge}}
\end{aligned}$$

1.11.2 Séries à termes positifs (et tests de convergence)

$$a_n \geq 0 \quad ,\forall\ n$$

Il existes plusieurs tests de convergence pour ce type de série :

Test de l'intégrale

Si $a_n = f(n)$ oz f est positive, continue et strictement décroissante, alors la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si $\int_1^\infty f(x)dx$ est convergente.

Premier test de comparaison

Ce test ressemble beaucoup au théorème du sandwich :
Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ tel que $0 \leq a_n \leq b_n$

si...	alors...
$\sum b_n$ converge	$\sum a_n$ converge
$\sum a_n$ diverge	$\sum b_n$ diverge

Deuxième test de comparaison

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ tel que $a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0 \quad ,\forall\ n.$

$$\text{si } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \quad ,\text{où } c \in (0,\infty)$$

Alors les deux séries convergent ou divergent en même temps, c'est à dire :

$$\sum a_n \sim \sum b_n$$

Test d'Alembert

Soit $\sum a_n$ tel que $\sum a_n \geq 0 \quad , \forall\ n$ et supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

si...	alors...
$L < 1$	$\sum a_n$ converge
$L > 1$	$\sum a_n$ diverge
$L = 1$	il faut appliquer un autre test

Test de Cauchy

Soit $\sum a_n$ tel que $\sum a_n \geq 0 \quad , \forall\ n$ et supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

si...	alors...
$L < 1$	$\sum a_n$ converge
$L > 1$	$\sum a_n$ diverge
$L = 1$	il faut appliquer un autre test

Série absolument convergente

Une série $\sum a_n$ est *absolument convergente* si la série suivante est convergente :

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + ...$$

Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente.

Exemple - Test de l'intégrale

Vérifier si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ est convergente.

Soit $a_n = \frac{1}{n^P} = f(n) = f(x) = \frac{1}{x^P}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{n^P} &= \int_1^{\infty} x^{-P} \\
&= \frac{x^{1-P}}{1-P}\bigg|_{x=1}^{\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-P}}{1-P} \\
&= \frac{1}{1-P}
\end{aligned}$$

Cas 1 :

$$P > 1 \Rightarrow 1 - P < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} t^{1-P} = 0$$

alors,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P} = -\frac{1}{1-P} = \frac{1}{P-1} < \infty$$

Donc,

$$\text{pour } \sum \frac{1}{n^P} \begin{cases} \text{si } P > 1 & \text{converge} \\ \text{si } 0 < P < 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

Exemple 1.65

Trouver si les série suivantes sont convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$

Commençons par poser $b_n = \frac{1}{5^n}$. $a_n < b_n$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n\end{aligned}$$

Par test de Cauchy,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{1}{5}\right)^{\cancel{n}}} = \frac{1}{5} < 1$$

Alors b_n converge. Et parce que $a_n < b_n$, on peut dire que a_n est aussi convergente.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$

Posons $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Il y a 2 méthodes pour résoudre ce problème :

1) avec le deuxième test de comparaison

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{n}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}(3)}{\cancel{\sqrt{n}}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})} \\ &= \frac{3}{1-0} \\ &= 3 \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n\end{aligned}$$

Vérifions si b_n est convergent :

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$$

b_n est divergent avec $P = 1/2$. Alors, a_n est nécessairement divergent aussi.

2) avec le premier test de comparaison

$$\sum \frac{3}{\sqrt{n}-1} > \sum \frac{3}{\sqrt{n}} = \infty$$

b_n est divergent et $b_n < a_n$, alors a_n est aussi divergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

On va résoudre avec le test d'Alembert :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{\cancel{n}+1}(n!)}{\cancel{3^n}(n+1)\cancel{!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} \\
&= 0 < 1 \quad \boxed{\sum a_n \text{ converge}}
\end{aligned}$$

d) $\sum \frac{n^n}{n!}$

On peut résoudre aussi par Test d'Alembert :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n!)}(n+1)^{n+\cancel{1}}}{\cancel{(n+1)!}n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= e \approx 2,71828 > 1
\end{aligned}$$

Alors, $\sum \frac{n^n}{n!}$ est divergent

Remarques importantes

Certaines identités reviennent souvent et sont à savoir :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1.53}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \tag{1.54}$$

Exemple 1.67

Étudier la convergence de la série suivantes :

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

On va essayer de résoudre avec le concept de série absolument convergente :

$$\begin{aligned}\sum |a_n| &= \sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \\ &= \sum \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\text{convergent}}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum |a_n|$ est convergent. Et puisque la série est absolument convergente, a_n est convergente.

Exemple 1.68

Trouver x tel que la série suivante est convergente :

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n)!}{x^n(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| \\ &= 0 \quad ,\forall\ x \Rightarrow \boxed{\text{alors la série converge}}\end{aligned}$$

1.11.3 Séries entières

Soit x une variable. Une *série entière en* x est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dans laquelle a_n est un nombre réel pour chaque n.

1.11.4 Série de Taylor et MacLaurin

Série de Taylor

Soit une fonction f qui admet des dérivées de tous ordre en $x = a$. La *série de Taylor* de f qui converge vers $f(x)$ est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.55}$$

pour les valeurs où la série est convergente (sur un intervalle de rayon r : $x \in (a-r, a+r)$).

Série de MacLaurin

Soit une fonction f qui admet des dérivées de tous ordre en $x = 0$. La *série de MacLaurin* de f qui converge vers $f(x)$ est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1.56}$$

pour les valeurs où la série est convergente (sur un intervalle de rayon r : $x \in (-r, r)$).

Polynôme de Taylor

Le *polynôme de Taylor de degré* k est donné par

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.57}$$

Ça permet de faire des estimations de série de Taylor.
Exemple 1.70 Soit

$$f(x) = e^x$$

a) Trouver la série de MacLaurin de $f(x)$

Un bon point de départ est de trouver les différentes dérivées qu'on va avoir besoin pour calculer la somme :

$f(x) = e^x$	$f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = e^0 = 1$
$f''(x) = e^x$	$f''(0) = e^0 = 1$
$f'''(x) = e^x$	$f'''(0) = e^0 = 1$
$f^{(4)}(x) = e^x$	$f^{(4)}(0) = e^0 = 1$
$f^{(k)}(x) = e^x$	$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + ... + \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + ... \\
&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{k!}x^k + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Et cette série est convergente, on l'a déjà prouver par Test d'Alembert dans un exemple 1.68 (1.11.2).

b) Trouver la série de Taylor de $f(x)$ au point $a = 1$

Comme au numéro a), c'est une bonne idée de calculer nos dérivées et les évaluer avant de commencer :

$f(x) = e^x$	$f(1) = e^1 = e$
$f'(x) = e^x$	$f'(1) = e^1 = e$
$f''(x) = e^x$	$f''(1) = e^1 = e$
$f'''(x) = e^x$	$f'''(1) = e^1 = e$
$f^{(4)}(x) = e^x$	$f^{(4)}(1) = e^1 = e$
$f^{(k)}(x) = e^x$	$f^{(k)}(1) = e^1 = e$

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + ... \\
&= e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + ... \\
&= e \underbrace{\left[1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!}\right]}_{\text{converge}}
\end{aligned}$$

c) Approximer le nombre $e^{1/2}$ (c'est-à-dire $f(1/2)$) en utilisant un polynôme de Taylor de degré 4 centré en $a = 0$.

$$
\begin{aligned}
e^x &\approx T_4(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \\
e^{1/2} &\approx 1 + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} \\
&\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} \\
&\approx 1,6484375
\end{aligned}
$$

Remarque Un estimé avec le polynôme de Taylor sera toujours plus petit que la valeur exacte ($e = 1,64872113$ avec 7 décimales), car on omet des termes dans la somme pour estimer.

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 Intégration double

2.1.1 Intégration double sur un rectangle

Définition 2.1

L'intégrale double d'une fonction f continue sur un rectangle $\mathbb{D} = \{(x, y), \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ est

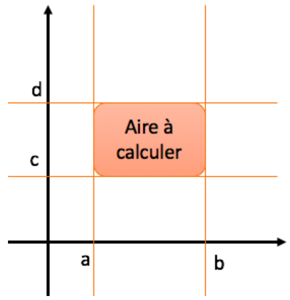
$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) d(x, y) = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{i,j} \eta_{i,j}) \Delta x \Delta y \tag{2.1}$$

si cette limite existe, avec $(\xi_{i,j} \eta_{i,j}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \Delta x = \frac{b-1}{m}$ et $\Delta y = \frac{d-c}{n}$.

Mais on va plus utiliser en pratique le théorème de *Fubini* :

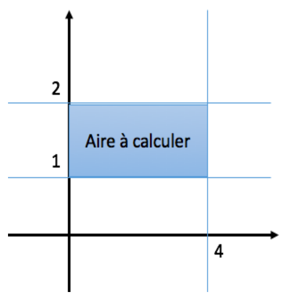
$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dy \tag{2.2}$$

Graphiquement,



Exemple 2.1

Calculer l'aire du rectangle $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4, 1 < y < 2\}$ pour la fonction $f(x, y) = 3x^2 - 4y^3$.



Alors,

$$\begin{aligned}
\iint_A (3x^2 + 4y^3) d(x, y) &= \int_1^2 \int_0^4 3x^2 - 4y^3 dx dy \\
&= \int_1^2 \left[x^3 - 4y^3\right]_0^4 dy \\
&= \int_1^2 (4^3 - 0^3) - 4y^3(4 - 0) dy \\
&= \int_1^2 (64 - 16y^3) dy \qquad = 64y - 4y^4 \Big|_{y=1}^{2} \\
&= 64(2 - 1) - 4(2^4 - 1^4) \\
&= 64 - 4(15) \\
&= 4
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi interchanger les bornes, en intégrant d'abord par y, puis par x.

Exemple 2.2

$$\iint_A \frac{y}{x} d(x,y) \quad \text{où } A = [1,e] \times [1,2]$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e \int_1^2 \frac{y}{x} dydx &= \int_1^e \frac{1}{x} \int_1^2 ydydx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x} \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \int_1^e \frac{3}{2x} dx \\
&= \frac{3}{2} \ln x \Big|_{x=1}^{e} \\
&= \frac{3}{2} \ln(e) - \underbrace{\frac{3}{2} \ln(0)}_{=0} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2.1.2 Intégrale double sur une région régulière selon un axe

Lorsque le domaine n'est pas nécessairement un rectangle. Il arrive parfois qu'une des variables dépend du comportement de l'autre. La définition est vraiment compliqué, Radu a fait un exemple en classe pour comprendre facilement :

Théorème 2.4

L'intégrale double d'une fonction f continue sur une région
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ est

$$\iint_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

Et si la région est $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \phi(y) \leq y \leq \psi(y)\}$:

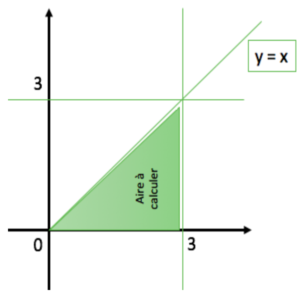
$$\iint_B f(x,y)d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right) dy$$

Exemple 2.3

Soit

$$\iint_B x^2 y \ d(x,y) \quad \text{avec } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$$

Graphiquement,



Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_o^x x^2 y \ dydx \int_0^3 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^x dx \\ &= \int_0^3 \frac{x^4}{2} dx \\ &= \frac{x^5}{10}\Big|_0^3 \\ &= \frac{(3^5 - 0^5)}{10} \\ &= \frac{243}{10}\end{aligned}$$

2.1.3 Changer l'ordre d'intégration sur une région

Si A est un rectangle, on peut utiliser le *théorème de Fubini* pour changer l'ordre d'intégration. Voici quelques exemples [1].

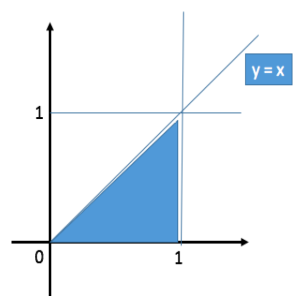
Exemple 2.4

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \int_y^1 ye^{x^3} dxdy = \iint_R ye^{x^3} d(x,y)$$

où $R = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$

Lorsqu'on a un problème avec un changement d'ordre d'intégration, il est fortement suggéré de se faire un graphique des bornes (pour savoir on intègre sur quelle région et faciliter la conversion des bornes).



Donc $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

1. Les exemples de cette section ne sont souvent pas développés au complet, faute de temps dans le cours

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^1 dydx &= \int_0^1 \int_0^x ye^{x^3} dydx \\
&= \int_0^1 e^{x^3} \int_0^x ydydx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx \\
u = x^3 \quad & du = 3x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^u}{3} du \\
&= \frac{1}{6}(e - e^0) \\
&= \frac{e-1}{6}
\end{aligned}
$$

Exemple 2.5

Soit R la région du plan délémitée par les graphiques de $y = x^2$ et $y = 2x$. Calculer l'intégrale suivante :

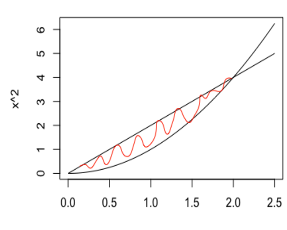
$$\iint_R f(x, y) d(x, y)$$

en écrivant la région R comme une région :

a) de type $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

b) de type $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$

En construisant notre graphique, on peut tout de suite identifier les points d'intersection :



$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2x \\
x &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Donc, si on intègre en y d'abord :

$$x^2 \leq y \leq 2x$$
$$0 \leq x \leq 2$$

Si on intègre en x d'abord :

$$0 \leq y \leq 4$$
$$\frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

a)

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx$$

b)

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

Exemple 2.6

Soit R la région du plan délémitée par les graphiques suivants :

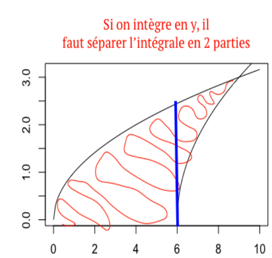
$$y = \sqrt{x} \quad y = \sqrt{3x - 18} \quad y = 0$$

En supposant que f soit une certaine fonction continue sur R, exprimer $\iint_R f(x,y)d(x,y)$ sous forme d'intégrale itérées sous la région de type

a) de type A

b) de type B (comme définie à l'exemple précédent).

Débutons par notre graphique des bornes d'intégration :



$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{3x-18}\\ x &= 3x-18\\ 2x &= 18\\ x &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \sqrt{3x-18} &\Leftrightarrow x = \frac{y^2+18}{3}\\ y = \sqrt{x} &\Leftrightarrow x = y^2\end{aligned}$$

Donc,

a) type A, en débutant l'intégration par y.

$$\int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$$

b) type B, en débutant l'intégration par x.

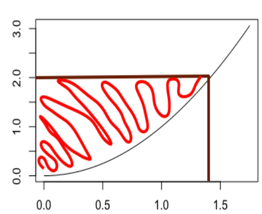
$$\int_0^3 \int_{y^2} \frac{y^2}{3} + 6f(x,y)dxdy$$

Exemple 2.7

Inverser l'ordre d'intégration des intégrales suivantes sans les résoudre [2].

a)

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$



On peut trouver facilement que $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ Donc,

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} f(x,y)dydx$$

2. Pour avoir les réponses aux numéros b) et c), consulter le dépannage du 27 novembre 2017 (A.9)

b)

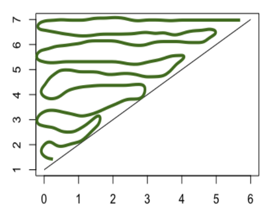
$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dxdy$$

c)

$$\int_1^{e^2} \int_{\ln(y)}^{2} f(x,y)dxdy$$

Exemple 2.8

Si $f(x,y)$ est la fonction de densité conjointe de (X,Y), trouver la probabilité $Pr[Y > X+1]$



On peut ré-écrire la probabilité comme :

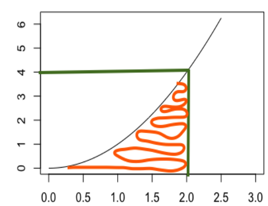
$$\begin{aligned} Pr[Y > X+1] &= \iint I_{\{Y>X+1\}} \cdot f_{X,Y}(x,y)d(x,y) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{x+1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d(x,y) \\ &\text{ou encore} \\ &= \int_1^{\infty} \int_0^{y-1} f_{X,Y}(x,y)d(x,y) \end{aligned}$$

Exemple 2.9

Résoudre l'intégrale suivante :

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} y\cos(x^5)dxdy = \int_0^4 y \int_{\sqrt{y}}^{2} \cos(x^5)dxdy$$

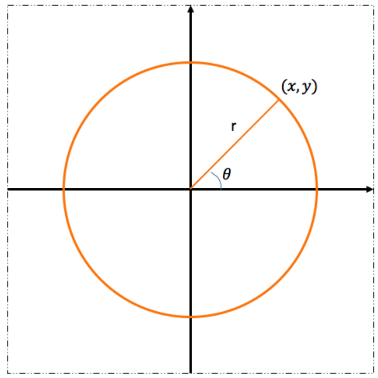
à partir d'ici, on doit changer l'ordre d'intégration (on ne peut rien faire de plus)



Si on commence à intégrer en x, alors $\sqrt{y} \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 4$.

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)dxdy &= \int_0^4 y\int_{\sqrt{y}}^2 \cos(x^5)dxdy \\
&= \int_0^2 \cos(x^5)\int_0^{x^5} ydydx \\
&= \int_0^2 \cos(x^5)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^2 \cos(x^5)\frac{x^4}{2}dx \\
&\text{substitution} \quad u = x^5 \quad du = 5x^4dx \\
&x = 2 \Rightarrow u = \cos(32) \quad x = 0 \Rightarrow u = 1 \\
&= \frac{1}{10}\int_1^{\cos(32)} \cos u du \\
&= \frac{1}{10}\left[\sin u\right]_1^{\cos 32} \\
&= \frac{\sin(32)}{10}
\end{aligned}$$

2.1.4 Intégrale doubles en coordonnées polaires



$$x = r\cos\theta \tag{2.3}$$

$$y = r\sin\theta \tag{2.4}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{2.5}$$

Et par *pythagore*,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.6}$$

De plus,

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \tag{2.7}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.8}$$

Soit R une région délimitée par deux rayons qui font des angles positifs α et β avec l'axe polaire et par les graphiques des deux équations polaires $r = g_1(\theta)$ et $r = g_2(\theta)$ où il est supposé que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Si f est continue, on a

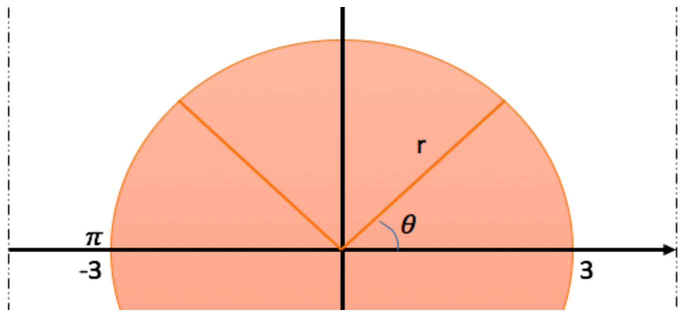
$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) \times r\ dr\ d\theta \tag{2.9}$$

Exemple 2.10

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-3}^{3} \int_0 \sqrt{9 - x^2}(x^2 + y^2)^{3/2} dydx$$

On sait que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $x^2 + y^2 = r^2$.



Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\int_{0}\sqrt{9-x^2}(x^2+y^2)^{3/2}dydx &= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3}(r^2)^{3/2}\cdot rdrd\theta \\
&= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3} r^4 drd\theta \\
&= \int 0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\frac{3^5}{5}d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\frac{243}{5}d\theta \\
&= \frac{243\pi}{5}
\end{aligned}$$

2.1.5 Changement de variable

Définition 2.6

Si $x = f(u,v)$ et $y = g(u,v)$, le *Jacobien* de x et y par rapport à u et v, noté $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, est

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{2.10}$$

Proposition 2.7

Pour une application bijective $T : S \to R$ donnée par $(x = x(u,v), y = y(u,v))$ où les dérivées partielles sont connues sur Set le jacobien $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ et ne change pas le signe du S, on a

$$\iint\limits_R F(x,y)dxdy = \iint\limits_S F(x(u,v),y(u,v))\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\ dv \tag{2.11}$$

Exemple 2.12

Soit F la transformation de coordonnées du plan xy en plan des uv déterminée par $u = x + 2y$ et $v = x - 2y$. Trouver la transformée inverse de F.

$$T(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$$
$$T^{-1}(u, v) = ?$$

1. On veut exprimer notre x et y en terme de u et v.

$$\begin{aligned} u + v = 2x \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ 2y = x - v \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) - \frac{1}{2}v \\ &= \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}v \\ &= \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v \end{aligned}$$

Alors,

$$x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$
$$y = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v$$

2. calculer les dérivées nécessaires pour le Jacobien.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{4} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{4}$$

3. Calculer le Jacobien (déterminant)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} \\
&= \frac{-1}{8} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{-1}{4}
\end{aligned}$$

Cas particulier des coordonnées polaires

On explique l'origine du r dans la formule des coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta & \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta \\
\frac{\partial x}{\partial r} &= \sin\theta & \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r\cos\theta
\end{aligned}$$

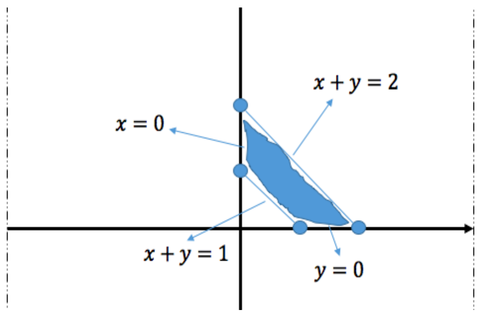
À partir d'ici, on peut calculer le Jacobien :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) \\
&= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\
&= r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} \\
&= r
\end{aligned}$$

Exemple 2.13

Calculer l'intégrale suivante, où R est la région trapézoïdale du plan des xy sommets $(0,1),(0,2),(2,0),(1,0)$.

$$\iint\limits_R e^{\frac{(y-x)}{(y+x)}}\,dx\;dy$$



1. Exprimer x et y en terme de u et v Soit $\left|\begin{array}{l} u = y - x \\ v = y + x \end{array}\right.$

$$u + v = y \cancel{-x} + y + \cancel{x} = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$
$$x = v - y = v - \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$

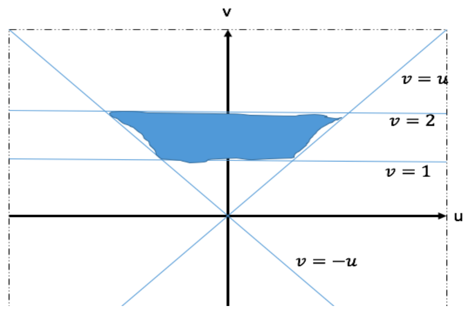
2. Calculer les dérivées et trouver le Jacobien

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Convertir le domaine, selon les bornes identifiée (avec le graphique)

$$x = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}u + \frac{1}{2}v = 0 \Leftrightarrow v = u$$
$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 0 \Leftrightarrow v = -u$$
$$x + y = 1 \Leftrightarrow v = 1$$
$$v + y = 2 \Leftrightarrow v = 2$$

À ce stade, si refaisait un nouveau graphique en terme de u et v, ça ressemblerait à ça :



$$\iint\limits_R e^{\frac{(y-x)}{(y+x)}} dx\ dy = \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \frac{1}{2} du dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\int_{-v}^{v} \frac{d}{du} \left(ve^{u/v} \right)' du \right] dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ve^{u/v} \right]_{-v}^{v} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 v(e^1 - e^{-1}) dv$$
$$= \frac{e - e^{-1}}{2} \int_1^2 v dv$$
$$= \frac{e - e^{-1}}{2} \left[\frac{v^2}{2} \right]_1^2$$
$$= \frac{e - e^{-1}}{2} \left(\frac{2^2 - 1^2}{2} \right)$$
$$= \frac{3}{4}(e - e^{-1})$$

2.2 Intégrale triple

Définition 2.8

L'intégrale triple d'une fonction f continue sur $\mathbb{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$ est

$$\iiint\limits_{\mathbb{D}} f(x, y, z)\ d(x, y, z) = \lim_{m,n,o} \to \infty \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{o} f(\xi_{i,j,k}, \eta_{i,j,k}, \zeta_{i,j,k}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

si cette limite existe, où $(\xi_{i,j,k}, \eta_{i,j,k}, \zeta_{i,j,k}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, $\Delta z = \frac{s-r}{o}$. Ce sont donc les mêmes généralisations que pour l'intégrale double, mais avec 3 variables.

Exemple 2.15

Calculer l'intégrale triple suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_1^3 (6x^2z + 5xy^2) dz dx dy &= \int_0^1 \int_{-1}^2 \left[\frac{6x^2z^2}{2} + 5xy^2z\right]_1^3 dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^2 3x^2(3^2 - 1^2) + 5xy^2(3-1) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^2 24x^2 + 10xy^2 dx dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{24x^3}{3} + \frac{10x^2y^2}{2}\right]_{-1}^2 dy \\
&= \int_0^1 8(2^3 - 1^3) + 5y^2(4-1) dy \\
&= \int_0^1 72 + 15y^2 dy \\
&= 72y + \frac{15y^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= 72(1-0) + 5(1^3 - 0^3) \\
&= 77
\end{aligned}$$

Exemple 2.16

Calculer l'intégrale triple suivante :

$$\int_0^1 \int_{x+1}^{2x} \int_z^{x+z} x \; dy \; dz \; dx$$

2.3 Limite des fonctions de plusieurs variables

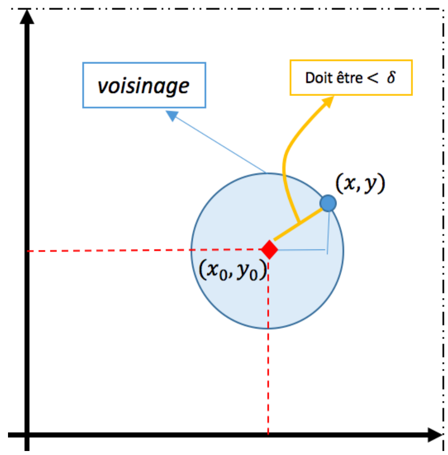
2.3.1 Limite des fonctions de deux variables

Définition 2.9

Soit un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On définit un voisinage de distance δ du point (x_0, y_0) comme étant

$$V_\delta(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\} \tag{2.12}$$

On peut représenter le tout graphiquement :



Définition 2.10

Soit $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie partout dans D qui contient un voisinage du point(x_0, y_0), excluant peut-être le point (x_0, y_0) lui-même. Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$\text{Si } \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \tag{2.13}$$

Pour faire la preuve, on peut toujours utiliser la définition, mais souvent c'est pas nécessaire.

Lorsqu'on est dans les $\mathbb{R}$ (fonction d'une seule variable), il suffit de prouver que la limite à gauche égale celle à droite.

Mais avec des fonctions à 2 variables ($\mathbb{R}^2$), la limite doit être égale à L peu importe le chemin utilisé pour approcher le point limite. Ce n'est pas facile !

Il est plus simple de prouver la non-existence, en trouvant 2 chemins pour lesquels la fonction ne tend pas vers la même valeur.

Exemple 2.17

Calculer les limites suivantes :

i)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7) &= 2^3 - 4(2)(-3)^2 + 5(-3) - 7 \\ &= -86\end{aligned}$$

ii)

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{(-1)^2-(2)^2}{(-1)^2+(2)^2}$$
$$= -\frac{3}{5}$$

Exemple 2.18

Montrer que les limites suivantes n'existent pas :

1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Soit le chemin $y = mx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)}$$

$$\boxed{\text{si } m=1} \to y = x \quad \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\boxed{\text{si } m=2} \to y = 2x \quad \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -\frac{3}{5}$$

2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

Soit le chemin $y = mx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(mx))}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2(1+m^2)}$$
$$= \frac{m}{1+m^2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx^2)}{mx^2} \qquad \boxed{\text{Règle Hôpital}}$$
$$= \frac{m}{1+m^2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(mx^2)\cdot \cancel{2m}}{\cancel{2m}\cdot x} \qquad \boxed{\text{Règle Hôpital}}$$
$$= \frac{m}{1+m^2} \lim_{x\to 0} \frac{-2m\sin(mx^2)}{1}$$
$$= \frac{m}{1+m^2}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \nexists$ car peu importe la valeur de m, on n'arrive pas au même L.

Exemple 2.19

Calculer
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$$
Dans ce problème, le ln fait peur. Il suffit de calculer la limite de l'expression à l'intérieur du logarithme seulement pour débuter...

Soit $y = mx$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - x^2(mx)^2 + 3(mx)^2}{x^2+(mx)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - m^2x^4 + 3m^2x^2}{x^2+m^2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(3 - m^2x^2 + 3m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} \\
&= \frac{3-3m^2}{1+m^2} = 3
\end{aligned}$$

À ce stade, on peut conclure qu'il est possible que la limite existe. **Et si celle limite existe**, L doit être égal à 3.

Pour nous aider, on peut ré-écrire notre expression comme

$$\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2} = \frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 3 - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

On va pouvoir prouver que $L = 3$ via la théorème du sandwich. Ainsi,

$$3 - {\color{red}?} \leq 3 - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq 3$$

On cherche le terme ${\color{red}?}$ qui satisfait l'équation (donc qui doit converger à 0).

$$3 - ? \leq 3 - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq ?$$

Pour trouver le terme manquant, on sait que

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \\
&\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \quad \forall\ a, b
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{(x^2+y^2)^2}{2} &\geq x^2y^2 \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &\leq \frac{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}{x^2+y^2} &= \frac{(x^2+y^2)}{2}\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le Théorème du sandwich,

$$\begin{aligned}3-\frac{(x^2+y^2)}{2} &\leq 3-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &\leq 3 \\ \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(3-\frac{x^2y^2}{2}\right)}_{3-0=3} &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(3-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) &\leq 3\end{aligned}$$

On peut donc affirmer que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(3-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right) &= 3 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right) &= \ln 3\end{aligned}$$

2.4 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Définition 2.11

Une fonction f de deux variables est continue au point (x_0, y_0) si les trois conditions suivantes sont respectées :

- ➩ f est définie au point (x_0, y_0)
- ➩ la limite suivante doit exister :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

- ➩ Et

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Remarque 2.12

On peut généraliser pour les fonctions de n variables, avec $n \geq 3$.

Exemple 2.20

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9y^2}{x - 3y}, & \text{si } x \neq 3y \\ g(x), & \text{si } x = 3y \end{cases}$

On doit trouver $g(x)$ tel que $f(x,y)$ est continue.

pour $\boxed{x \neq 3y}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 9y^2}{x - 3y} = \frac{(x+3y)\cancel{(x-3y)}}{\cancel{x-3y}} = (x+3y) \to \text{continue pour } x \neq 3y$$

pour $\boxed{x = 3y}$, $f(x,y) = g(x)$. Pour que la fonction soit continue, la condition ci-dessous doit être respectée :

$$\lim_{(x-3y)\to 0} \frac{x^2 - 9y^2}{x - 3y} = g(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x-3y)\to 0} \frac{x^2 - 9y^2}{x - 3y} &= \lim_{(x-3y)\to 0} \frac{(x+3y)(x-3y)}{x-3y} \\ &= \lim_{y \to \frac{x}{3}} x + 3y \\ &= x + x \\ g(x) &= 2x \end{aligned}$$

Définition 2.13

Soit $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

a) On définit l'accroissement partielle de f par rapport à x et par rapport à y comme

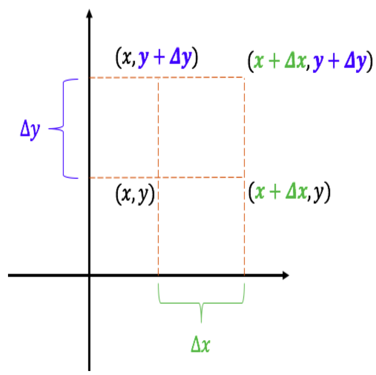
$$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x,y) \tag{2.14}$$

$$\Delta_x f = f(x, y + \Delta y) - f(x,y) \tag{2.15}$$

b) On définit l'accroissement totale de f comme étant

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \tag{2.16}$$

Visuellement,



Définition 2.14

Pour une fonction $f(x, y)$, les *dérivées partielles* sont définies par :

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{2.17}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{2.18}$$

Il existe une autre notation pour $f_x(x, y)$: $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$; $f'_x(x, y)$.

définition 2.15

On définit les dérivées partielles de deuxième ordre comme :

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{2.19}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.20}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{2.21}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.22}$$

Exemple 2.22

Calculer les dérivées partielles secondes de f, définie par :

$$f(x, y) = x^3 y^2 - x^2 y + 3x$$

Solution :

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3y^2x^2 - 2xy + 3 \\
f_y(x,y) &= 2yx^3 - x^2 \\
f_{xx}(x,y) &= f_x(f_x(x,y)) = 6xy^2 - 2y \\
f_{yy}(x,y) &= f_y(f_y(x,y)) = 2x^3 \\
f_{xy}(x,y) &= f_x(f_y(x,y)) = f_y(f_x(x,y)) = 6x^2y - 2x
\end{aligned}$$

Théorème 2.16

Si f_{xy} et f_{yx} existent et sont continues en (a,b), alors

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) \tag{2.23}$$

Remarque 2.17

C'est similaire pour des fonctions de 3 variables ou plus. Voici un exemple pour une fonction g de trois variables :

$$g_{xy}(a,b,c) = g_{yx}(a,b,c), g_{xz}(a,b,c) = g_{zx}(a,b,c), g_{yz}(a,b,c) = g_{zy}(a,b,c)$$

Définition 2.18

Soit $w = f(x,y)$ et soit Δx et Δy les accroissements respectifs de x et y.

1. Les *différentielles* dx et dy des variables indépendantes x et y sont

$$dx = \Delta x \text{ et } dy = \Delta y \tag{2.24}$$

2. La *différentielle (totale)* dw de la variable dépendante w est

$$dw = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy \tag{2.25}$$

Remarque 2.19

Si Δx et Δy sont petits, on a que $\Delta f \approx df$.

Définition 2.20

Soit $w = f(x,y)$. La fonction f est dérivable en (x_0, y_0) si Δf peut s'écrire sous la forme

$$\Delta f = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{2.26}$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des fonctions de Δx et Δy tel que $\epsilon_1 \to 0$ et $\epsilon_2 \to 0$ lorsque $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Théorème 2.21

Soit une fonction de deux variables f. Si f_x et f_y sont continues sur une région rectangulaire D, alors f est différentiable sur D.

Théorème 2.22

Soit une fonction de deux variables f est dérivable en (x_0, y_0), alors elle est continue en (x_0, y_0).

Théorème 2.23

Similaire pour des fonctions de 3 variables et plus : par exemple, pour une fonction g de 3 variables, si $w = g(x, y, z)$, on a :

$$dw = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz \tag{2.27}$$

Exemple 2.23

Pour $w = 3x^2 - xy$:

1. chercher dw et calculer l'approximation de la variation de w lorsque (x, y) passe de (1,2) à (1.01, 1.98).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= 6x - y \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= -x \\
dx &= 1,01 - 1 = 0,01 \\
dy &= 1,98 - 2 = -0,02 \\
dw &= \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)dy \\
&= (6x - y)(0,01) + x(0,02) \\
\Delta w &\approx (6(1) - 2)(0,01) + 0,02(1) \approx 0,06
\end{aligned}$$

2. Quelle est l'erreur commise vis-à-vis de l'exacte variation de Δw ?
   Vraie valeur de Δw :

$$\Delta w = w(1.01, 1.98) - w(1, 2) = [3(1,01)^2 - (1,01)(1,98)] - [3(1)^2 - (1)(2)] = 0,0605$$

Exemple 2.24

La résistance R produite par deux résistances de respectivement R_1 et R_2 ohms montées en parralèle peut se calculer à l'aide de l'équation suivante :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

a) Montrer que $dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$.

Démonstration. On peut ré-écrire R de la façon suivante :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

On sait que $dR = \frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1, R_2)dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1, R_2)dR_2$

Avec la règle du quotient, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial R_1} &= \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2(1)}{(R_1 + R_2)^2} \\
&= \frac{R_1 R_2 + R_2^2 - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \\
&= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \\
&= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2
\end{aligned}$$

Aussi, on peut trouver que

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow \frac{R}{R_1} = \frac{\cancel{R_1} R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\cancel{R_1}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial R_1} &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{R}{R_1}\right)^2
\end{aligned}$$

pour $\frac{\partial R}{\partial R_2}$, c'est la même idée :

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

Par conséquent,

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$$

$\square$

b) Vous souhaitez monter un circuit en parralèle avec des résistances $R_1 = 100$ ohms et $R_2 = 400$ ohms. Toutefois, il subsiste toujours une certaine variation dans la fabrication des résistances et les résistances reçues n'auront probablement pas ces valeurs exactes. La valeur de R sera-t-elle plus sensible à la variation de R_1 ou de R_2 ?

$$\begin{aligned} R_1 = 100 < R_2 = 400 &\Leftrightarrow \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 > \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc, dR sera plus sensible à la variation de R_1.

c) Dans un autre circuit, vous planifiez faire passer R_1 de 20 à 20,1 ohms et R_2 de 25 à 24,9 ohms. Utiliser la différentielle totale pour déterminer par environ quel pourcentage R va varier.

$$\boxed{\begin{array}{ll} R_1 : 20 & \rightarrow 20,1 \\ R_2 : 25 & \rightarrow 24,9 \end{array}}$$

On est capable de trouver les variables de l'équation suivante, afin de trouver la variation de R :

$$\Delta R \approx dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{(20)(25)}{20+25} = \frac{100}{9} \\ dR_1 &= 20,1 - 20 = 0,01 \\ dR_2 &= 24,9 - 25 = -0,01 \\ \Delta R &= \left(\frac{100/9}{20}\right)^2 (0,1) + \left(\frac{100/9}{25}\right)^2 (-0,1) \\ &= 0,0111 \text{ ohms} \end{aligned}$$

Mais la question nous demande en %, alors

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% &= \left(\frac{0,0111}{100/9}\right)(100)\% \\ &= 0,1\% \end{aligned}$$

R va varier de 0,1%.

2.5 Dérivation en chaîne

Théorème 2.24

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $z = f(x(t), y(t))$, où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a alors

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2.28}$$

Théorème 2.25

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $z = f(x(u,v), y(u,v))$, où $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On a alors

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{2.30}$$

Remarque 2.26

On peut généraliser pour plus de 2 variables.

Exemple 2.26

Trouver $\frac{\partial w}{\partial p}$ et $\frac{\partial w}{\partial q}$ si $w = r^3 + s^2$ avec $\begin{cases} r = pq^2 \\ s = p^2 \sin q \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dp} &= \frac{dw}{dr}\frac{dr}{dp} + \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dp} \\
&= (3r^2)(q^2) + (25)(2p \sin q) \\
&= 3(pq)^2 \cdot q^2 + 2p^2 \sin^2 q \cdot 2p \sin q \\
&= 3p^2q^4 + 4p^3 \sin^3 q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dq} &= \frac{dw}{dr}\frac{dr}{dq} + \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dq} \\
&= (3r^2)(2pq) + (2s)(p^2 \cos q) \\
&= (3p^4q^4)(2pq) + (2p^2 \sin q)(p^2 \cos q) \\
&= 6p^3q^5 + 2p^4 \sin q \cos q
\end{aligned}$$

Remarque 2.27

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de deux variables définies tel que $f(x, y) = 0$. Alors, si f_x et f_y sont continues, à tout point où $f_y \neq 0$ on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \tag{2.31}$$

Exemple 2.27

Trouver $\frac{dy}{dx}(3, 5)$ en utilisant le résultat de la remarque 2.27, sachant l'Équation du cercle $x^2 + (y-1)^2 = 25$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + (y-1)^2 - 25 \\ f_x(x, y) &= 2x \\ f_y(x, y) &= 2(y-1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x}{2(y-1)} = -\frac{x}{y-1} = \frac{x}{1-y}$$

2.5.1 Série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x, y) = &\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x'} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y'} \right]^j f(x', y') \right\}_{x'=a, y'=b} \\ &= f(a, b) + [f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)] \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2] \\ &+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}(a, b)(x-a)^3 + 3f_{xxy}(a, b)(x-a)^2(y-b) + 3f_{xyy}(a, b)(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(a, b)(y-b)^3] \\ &+ ... \end{aligned}$$

Exemple sur les série de Taylor Trouver une approximation de $f(x, y) = e^x \cos y$ près du point $(0, 0)$.

Si on calcule nos dérivées,

$f(0, 0) = e^0 \cos(0) = 1$	
$f_x(x, y) = e^x \cos y$	$f_x(0, 0) = 1$
$f_y(x, y) = -e^x \sin y$	$f_y(0, 0) = 0$
$f_{xx}(x, y) = e^x \cos y$	$f_{xx}(0, 0) = 1$
$f_{yy}(x, y) = -e^x \cos y$	$f_{yy}(0, 0) = -1$
$f_{xy}(x, y) = -e^x \sin y$	$f_{xy}(0, 0) = 0$

Alors,

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(0,0) &+ \Big[f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)\Big] \\
&+ \frac{1}{2!}\Big[f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) + f_{yy}(y-0)^2\Big] \\
&= 1 + [1(x) + o(y)] + \frac{1}{2!}[1(x^2) + 2(0)(xy) + (-1)y^2] \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}$$

Donc,

$$e^x \cos y \approx 1 + x - \frac{x^2 + y^2}{2}$$

pour (x, y) près de (0,0).

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires

Définition 3.1

Une équation différentielle est une équation avec une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées.

L'ordre degré maximal de dérivation dans l'équation

degré puissance de la fonction de l'équation

Exemple 3.1

Voici quelques exemple d'équations différentielles :

a) $y'(x) = 2x$ est une équation différentielle d'ordre 1

b) $y''(x) + 3x^2y'(x) = e^x y + x^2 - 1$ est une équation différentielle d'ordre 2 et degré 2.

c) $\frac{d^4y}{dx^4} - xy^2\frac{d^3y}{dx^3} + x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 4.

d) $x'''(t) + (t^2+1)x'(t) = x(t) + e^t$ est une équation différentielle d'ordre 3.

Exemple 3.2

Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + C$ où C est une constante arbitraire. Comme $f'(x) = 6x - 5$, la fonction est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = 6x - 5$$

Parce que si on substitue à y, on vérifie l'équation.

On dit que $y(x) = 3x^2 - 5x + C$ est la solution générale de l'équation parce que toutes les solutions sont de cette forme.

On peut toutefois avoir une solution particulière en spécifiant une valeur de C. Par exemple, $y_1(x) = 3x^2 - 5x - 2$ est une solution particulière de notre équation ($C = -2$).

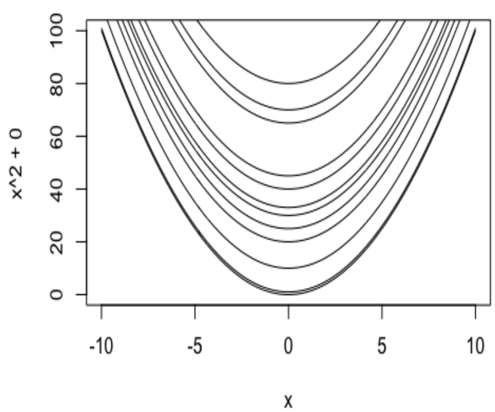
Parfois, ce sont les Conditions initiales qui isolent une solution particulière de l'ensemble de toutes les solutions possibles.

Exemple 3.3

Étant donné l'équation différentielle $y'(x) = 2x$,

a) Déterminer la solution générale et en donner une représentation graphique ;

$$\int y'(x)dx = \int 2xdx$$
$$y(x) = x^2 + C$$



b) Déterminer la solution particulière qui satisfait la condition $y = 2$ quand $x = 0$ (qu'on note $y(0) = 3$). Si

$$y(0) = 3$$
$$0^2 + C = 3$$
$$C = 3$$

Donc $y(x) = x^2 + 3$

Exemple 3.4

Montrer que la fonction suivante

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$$

(où c_1 et c_2 sont des nombres réels quelconques) est une solution de l'équation différentielle

$$y'' - 25y = 0$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= 5c_1 e^{5x} - 5c_2 e^{-5x} \\ y''(x) &= 25c_1 e^{5x} + 25c_2 e^{-5x} \\ &= 25(c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}) \\ &= 25y \end{aligned}$$

Donc,

$$y''(x) - 25y = 25y - 25y = 0$$

Exemple 3.5

Montrer que $x^2 + x^2y - 2y^3 = C$ est une solution de l'équation $(x^2 - 6y^2)y' + 3x^2 + 2xy = 0 \quad , y = y(x)$.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2y - 2y^3 &= C \\ \frac{d}{dx}(x^2 + x^2y - 2y^3) &= \frac{d}{dx}(C) \\ 3x^2 + 2x \cdot y(x) + x^3 \cdot y'(x) - 6y^2(x) \cdot y'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 2xy + y'(x^2 - 6y^2) &= 0 \end{aligned}$$

3.1 Équation différentielles d'ordre premier

3.1.1 Équations différentielles *séparables*

Définition 3.2

Une équation d'ordre premier *séparable* se définie comme :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \quad \text{où} \quad h(y)dy = g(x)dx$$

Pour trouver la solution,

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Exemple 3.6

a) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y^4e^{2x} + y' = 0 \qquad y = y(x)$$

$$\begin{aligned}
y^4e^{2x} + y' &= 0 \\
y' &= -y^4e^{2x} \\
\frac{y'}{y^4} &= e^{2x} \qquad \text{si } y \neq 0 \\
\int y^{-4}(x)y'(x)dx &= \int e^{2x}dx \\
\frac{y^{-3}}{-3} + c_1 &= -\frac{e^{2x}}{2} + c_2 \Big| \text{on peut multiplier par 3} \\
-y^{-3} + 3c_1 &= \frac{-3e^{2x}}{2} + 3c_2 \\
y^{-3} &= \frac{3}{2}e^{2x} - \underbrace{3(c_2 - c_1)}_{C=3(c_2-c_1)} \\
y^{-3} &= \frac{3}{2}e^{2x} - C \\
y(x) &= \left(\frac{3}{2}e^{2x} - C\right)^{1/3} \\
y(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}e^{2x} - C}}
\end{aligned}$$

b) Si $y(0) = 1$, trouver $y(x)$.

$$\begin{aligned} x = 0 \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}e^0 - C}} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} - C}} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{3}{2} - C \\ \Rightarrow C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}}}$$

Exemple 3.7

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + y^2) + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Ce numéro sera fait dans le dépannage du 11 décembre 2017 (A.11).

3.1.2 Équations différentielles *linéaire* du premier ordre

Définition 3.3

Lorsque notre équation prend la forme

$$y' + p(x)y = q(x)$$

,où p et q sont des fonctions continues, on va toujours résoudre de la même manière, c'est à dire multiplier chaque terme de l'équation par $e^{\int p(d)dx}$ chaque membre de l'équation.

Exemple

$$y'(x) = 3x^2y + x^2 \Leftrightarrow y'(x) - 3x^2y(x) = x^2$$

C'est une équation différentielle linéaire, on va donc multiplier par $e^{\int p(x)dx}$, soit

$$e^{\int -3x^2dx} = e^{-x^3}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\underbrace{y'(x) \cdot e^{-x^3} - 3x^2 \cdot e^{-x^3} \cdot y(x)}_{\text{dérivée d'un produit}} &= x^2 e^{-x^3} \\
\left(y(x) \cdot e^{-x^3}\right)' &= x^2 e^{-x^3} \\
y(x) \cdot e^{-x^3} &= \int x^2 e^{-x^3} dx \\
\text{changement variable} \quad u = x^3 \quad du = 3x^2 dx \\
&= \frac{1}{3} \int e^{-u} du \\
y(x) \cdot e^{-x^3} &= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C \Big| \times e^{x^3} \\
y(x) = -\frac{1}{3} + ce^{x^3}
\end{aligned}
$$

Cas général pour résoudre ...

$$
y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int p(x) e^{\int p(x)dx} dx \right) \tag{3.1}
$$

Exemple 3.8

$$
(3y - 5x)dx + dy = 0
$$

Premièrement, on va chercher à revenir vers la forme de l'équation différentielle linéaire que l'on connaît :

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + 3y - 5x &= 0 \\
y' + 3y &= 5x \qquad \text{on multiplie par } e^{\int 3dx} = e^{3x} \\
y'(x) \cdot e^{3x} + 3y(x) \cdot e^{3x} &= 5x \cdot e^{3x} \\
\frac{d}{dx}\left(y(x) \cdot e^{3x}\right) &= 5x \cdot e^{3x} \\
y(x) \cdot e^{3x} &= \int 5xe^{3x}dx \qquad \text{intégration par partie} \\
u = 5x \quad du &= 5dx \\
dv = e^{3x}dx \quad v &= \frac{e^{3x}}{3} \\
&= \frac{5}{3}xe^{3x} - \int \frac{3}{5}e^{3x}dx \\
&= \frac{5}{3}xe^{3x} - \frac{5}{9}e^{3x} + C \\
y(x) &= \frac{5}{3}x - \frac{5}{9} + ce^{-3x}
\end{aligned}
$$

3.1.3 Équations différentielles Bernouilli

Les équations différentielles de Bernouilli se présentent sous la forme

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$$

où p et q sont des fonctions continues.

Pour résoudre ces équations, on procède toujours de la même façon :

1. Multiplication des 2 membres par $(1-n)y^{-n}$
2. Effectuer la substitution $z = y^{1-n}$ pour passer à une équation différentielle linéaire.

$$
\begin{aligned}
y' + p(x)y &= q(x)y^n \Big| \text{multiplication par } y^{-n} \\
y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} &= q(x) \\
(1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{1-n} &= (1-n)q(x) \\
\text{soit } z = y^{1-n}&(x), \\
z'(x) + \underbrace{p(x)(1-n)z(x)}_{\tilde{p}(x)} &= \underbrace{(1-n)q(x)}_{\tilde{q}(x)}
\end{aligned}
$$

Exemple 3.9 Résoudre l'équation suivante :

$$y' + 2y = y^3 e^x$$

$$\begin{aligned}
y' + 2y &= y^3 e^x \Big| \cdot (-2) y^{-3} \\
-2y^{-3}y' - 4y^{-2} &= -2e^x \\
\frac{d}{dx}(y^{-2}) - 4y^{-2} &= -2e^x \\
\text{soit } z = y^{-2} & \\
z' - 4z &= -2e^x \Big| \cdot e^{-4x} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Définition 3.5

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{3.2}$$

où M et N sont homogènes de degré n, c'est-à-dire,

$$M(ax,ay) = a^n M(x,y) \quad N(ax,ay) = a^n N(x,y), \quad \forall\ a > 0$$

La solution est donc de substituer $\frac{y(x)}{x} = u \Leftrightarrow y = ux$.

3.2 Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur (avec coefficients constants)

3.2.1 Équation linéaire homogène

Une équation différentielle linéaire est homogène si $g(x) = 0$ dans la forme suivante :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$$

Remarque : si on est capable de trouver un x où $g(x) \neq 0$, alors l'équation est non-homogène.

Équation linéaire homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.3}$$

Définition 3.10

L'équation caractéristique de l'équation différentielle 3.3 est l'équation algébrique suivante :

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{3.4}$$

Théorème 3.11

Soit m_1 et m_2 les solutions de l'équation caractéristiques 3.4. Pour ré-écrire la solution sous forme de fonction, ça dépend du cas qu'on a :

- Cas 1 : Si $m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R}$, alors la solution générale de l'équation différentielle est :
$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$
- Cas 2 : $m_1 = m_2 \in \mathbb{R}$, alors la solution générale de l'équation différentielle est :
$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$
- Cas 3 : $m_1, m_2 \notin \mathbb{R}$, $m_1 = \alpha + i\beta$. Alors, la solution générale de l'équation différentielle est :
$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Avec c_1 et c_2 qui sont des constantes arbitraires.

Exemple 3.13 Résoudre les différentes équations ci-dessous :

a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$

b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$

c) $y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) = 0$

a)

$$\begin{aligned} x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) &= 0 \\ m^2 - 4m + 3 &= 0 \\ (m-3)(m-1) &= 0 \\ \boxed{m = 1}&\boxed{m = 3} \end{aligned}$$

Alors,

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

b)

$$\begin{aligned} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) &= 0 \\ m^2 - 4y + 4 &= 0 \\ (m-2)^2 &= 0 \quad \text{deux solutions identiques} \end{aligned}$$

Alors,

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}$$

c)

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) &= 0 \\ m^2 - 4m + 8 &= 0 \end{aligned}$$

On doit utiliser le discriminant :

$$\begin{aligned} m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \underbrace{\sqrt{-16}}_{i}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 4i}{2} \\ \boxed{m_1 = 2 + 2i}&\boxed{m_2 = 2 - 2i} \end{aligned}$$

Alors,

$$y(t) = c_1(e^{2t} \cos 2t) + c_2(e^{2t} \sin 2t)$$

Exemple

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

On commence par transformer en une équation caractéristique :

$$\begin{aligned} m^3 - 5m^2 + tm - 3 &= 0 \\ m^2(m-1) - 4m(m-1) + 3(m-1) &= 0 \\ (m-1)(m^2 - 4m + 3) &= 0 \\ (m-1)^2(m-3) &= 0 \end{aligned}$$

Alors,

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^x + c_2e^{3x}$$

Car il y a une solution double ($m = 1$) et la solution $m = 3$.

Exemple avec plusieurs constantes

Radu a rajouté dans les notes un exemple avec plusieurs solutions possibles... voici ce que ça donne :

Si l'équation caractéristique (factorisée) est :

$$(m-5)^3(m+2)[m-(5+4i)]^2[m-(5-4i)]^2$$

Alors la solution est :

$$y(x) = c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}+c_3x^2e^{5x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{5x}\cos(4x)+c_6e^{5x}\sin(4x)+c_7xe^{5x}\cos(4x)+c_8xe^{5x}\sin(4x)$$

3.2.2 Équation linéaires non-homogènes

Objectif : trouver $\tilde{y}_{\text{Non-homogène}}$

On peut toujours suivre les mêmes étapes pour résoudre ce type d'équation :

1. Trouver la solution générale de l'équation homogène
2. Trouver une solution particulière ($\tilde{y}$) de l'équation non-homogène
3. Trouver les constantes c_k en utilisant les conditions initiales.

Cas particuliers :

a) Si $g(x) = P_n(x)$, soit une polynomiale de degré n.

   On va chercher $\tilde{y}(x) = Q_n(x)$, une autre fonction polynomiale.

   Exemple : Si $g(x) = x^3$, $\quad \tilde{y}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1(x) + a_0$.

b) Si $g(x) = e^{\beta x}P_n(x)$, on cherche $\tilde{y}(x) = e^{\beta x}Q_n(x)$.

   Exemple : Si $g(x) = e^{2x}$, $\quad \tilde{y}(x) = ce^{2x}$.

   Mais si $g(x) = e^{2x}P_n(x)$, $\quad \tilde{y}(x) = (a_2x^2 + b_2x + c_3)e^{2x}$.

c) Si $g(x) = P_n(x)\cos(\gamma x)$ ou $P_n(x)\sin(\gamma x)$,

   On cherche $\tilde{y}(x) = Q_n(x)\cos(\gamma x) + R_n(x)\sin(\gamma x)$, où Q_n et R_n sont d'autres polynomiales.

   Note : le numéro 5 du dépannage 11 (A.11) est un très bon exemple (et très long aussi).

Chapitre 4

Transformée de Laplace

4.1 Définitions générales de la transformée

Définition 4.1

Soit une fonction f définie pour $t \geq 0$. La *transformée de Laplace* de $f(t)$, notée $\hat{f}(s)$ ou $\mathcal{L}_f(s)$ est la fonction

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}_f(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0 \tag{4.1}$$

Exemple 4.1

a) Trouver la transformée de Laplace de $f(t) = t$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right)' \cdot t dt \\
&= \frac{e^{-st}}{-s} \bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} (1) dt \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-s(0)}(0)}{-s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\
&= -\frac{1}{s} \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{st}} - 0 + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{s e^{st}} - \frac{1}{s^2} (e^{-/infty} - e^0) \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

b) Est-ce que la transformée de Laplace de $f(t) = e^{t^2}$ existe ?

Définition 4.2

Une fonction est *d'ordre exponentielle* α s'il existe $M > 0$ et $t_0 > 0$ tel que $\forall\ y > t_0$, on a

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

Définition 4.3

Une fonction f est *continue par morceaux* sur l'intervalle $[a, b]$ si cet intervalle peut être divisé dans un nombre fini d'intervalles et sur lesquels la fonction f est continue et a des limites finies à gauche et à droite.

Théorème 4.4

Si f est continue par morceaux sur chaque intervalle fini $[0, N]$ et d'ordre exponentielle α, pour un tel α, alors la transformée de Laplace de f, $\hat{f}(s)$ existe $\forall\ s > \alpha$.

Exemple 4.2

a) $f(x) = x^2$ est une fonction d'odre $\sqrt{2}$, par exemple

b) $f(x) = e^{x^3}$ n'est pas d'ordre exponentielle.

4.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Linéarité

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c_1 f_1 + c_2 f_2}(s) &= \int_0^\infty (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))dt \\
&= \int \left[c_1 e^{-st} f_1(t) + c_2 e^{-st} f_2(t)\right] dt \\
&= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt \\
&= c_1 \mathcal{L}_{f_1}(s) + c_2 \mathcal{L}_{f_2}(s)
\end{aligned}$$

Première propriété de translation

Soit une constante a et la fonction

$$g(t) = e^{at} f(t)$$

Alors,

$$\mathcal{L}_g(s) = \mathcal{L}_f(s - a) \tag{4.2}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{e^{at}f(t)}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \\
&= \mathcal{L}_f(s-a)
\end{aligned}$$

□

1^er^ exemple

$$\begin{aligned}
g(t) &= e^{-3t} \cdot t \\
\mathcal{L}_{g(t)} &= \mathcal{L}_f(s+3) \\
&= \frac{1}{(s+3)^2}
\end{aligned}$$

2^e^ exemple

$$\begin{aligned}
h(t) &= e^{5t}t \\
\mathcal{L}_{h(t)}(s) &= \mathcal{L}_f(s-a) \\
&= \frac{1}{(s-5)^2}
\end{aligned}$$

Deuxième propriété de translation

Soit

$$g(t) = f(t-a) \text{ pour } t > a \text{ et } g(t) = 0 \text{ pour } t < a$$

Alors,

$$\mathcal{L}_g(s) = e^{-as}\mathcal{L}_f(s) \tag{4.3}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g(s) &= \int_{t=0}^{a} e^{-st}(0)dt + \underbrace{\int_{t=a}^{\infty} e^{-st} f(t-a)dt}_{t-a=x} \\
&= 0 + \int_{x=0}^{\infty} e^{-s(x+a)} f(x)dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} e^{-sa} f(x)dx \\
&= e^{-sa} \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx \\
&= e^{-sa} \mathcal{L}_f(s)
\end{aligned}$$

□

Propriété de changement d'échelle

Soit $g(t) = f(at)$, alors

$$\mathcal{L}_g(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}_f\left(\frac{s}{a}\right) \tag{4.4}$$

Transformée de Laplace de dérivées

Si f,f' sont continues sur $[0,\infty)$ et f est d'ordre exponentielle, alors

$$\mathcal{L}_{f'}(s) = s\mathcal{L}_f(s) - f(0) \tag{4.5}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f'}(s) &= \int_{0}^{\infty} e^{-5t} f'(t)dt \quad \text{(intégration par partie)} \\
&= e^{-5t} f(t)\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(e^{-5t}\right) \cdot f(t)dt \\
&= 0 - e^{0} f(0) - \int_{0}^{\infty} (-5) e^{-5t} f(t)dt \\
&= f \int_{0}^{\infty} e^{-5t} f(t)dt - f(0) \\
&= 5\mathcal{L}_f(s) - f(0)
\end{aligned}$$

□

Si $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sont continues sur $[0,\infty)$ et d'ordre exponentielle et $f^{(n)}$ est continue sur $[0,\infty)$, alors

$$\mathcal{L}_{f^{(n)}}(s) = s^n\mathcal{L}_f(s) = s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{4.6}$$

Transformée de Laplace d'intégrale

Si

$$g(t) = \int_{u=0}^{t} f(u)du$$

Alors,

$$\mathcal{L}_g(s) = \frac{\mathcal{L}_f(s)}{s} \tag{4.7}$$

Multiplication par t^n

Soit $g(t) = t^n f(t)$, Alors,

$$\mathcal{L}_g(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\{\mathcal{L}_f(s)\} \tag{4.8}$$

Division par t

Soit f tel qu'il existe $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, Alors

$$\mathcal{L}_g(s) = \int_{s}^{\infty} \mathcal{L}_f(u)du \tag{4.9}$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}_f(s) = 0 \tag{4.10}$$

Valeur initiale et finale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}_f(s) \tag{4.11}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{L}_f(s) \tag{4.12}$$

La transformée inverse

Si $F(s) = \mathcal{L}_f(s)$, alors $f(t)$ est la transformée inverse de $F(s)$, notée $\mathcal{L}_F^{-1}$:

$$f(t) = \mathcal{L}_F^{-1}(t) \tag{4.13}$$

La convolution

La convolution de f et g est donnée par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du \tag{4.14}$$

Et voici quelques propriétés intéressantes de la convolution :

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ c(f * g) &= cf * g = f * cg \\ f * (g * h) &= (f * g) * h \\ f * (g + h) &= f * g + f * h \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la convolution

$$\mathcal{L}_{f*g}(s) = (\mathcal{L}_f(s))(\mathcal{L}_g(s)) \tag{4.15}$$

Remarque 4.18 Si f_X et f_Y sont les fonctions de densités de X et Y, alors $f_X * f_Y$ est la fonction de densité de $X + Y$.

Définition 4.19 soit $g(t)$ une fonction définie pour $t > 0$. La *transformée de Laplace-Stiltjes* de f est notée $\mathcal{LS}_g(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dg(t)$.

Remarque 4.20 Alors, si F est une primitive de f, on obtient

$$\mathcal{LS}_F(s) = \mathcal{L}_f(s) \tag{4.16}$$

4.3 Table des transformée de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$\mathcal{L}_f(s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

4.4 Exemples

Radu a fait quelques exemples à la fin du cours pour mettre en application les différentes propriétés.

4.4.1 Exemple avec la définition

1. $f(t) = \cos(3t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-5t} \cos 3t dt \\
&= \int_0^\infty e^{-5t} \left(\frac{\sin 3t}{3}\right)' dt \\
&= e^{-5t} \frac{\sin 3t}{3}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-5t}(-s)\frac{\sin 3t}{3} dt \\
&= 0 - \underbrace{\frac{e^0 \sin(0)}{3}}_{=0} + \frac{5}{3}\int_0^\infty e^{-5t} \sin 3t dt \\
&= \frac{5}{3}\int_0^\infty e^{-5t} \left(\frac{-\cos 3t}{3}\right)' dt \\
&= \frac{-se^{-st}\cos 3t}{3}\Big|_0^\infty - \frac{s}{3}\int_0^\infty (-s)e^{-st}\left(\frac{-\cos 3t}{3}\right) dt \\
&= 0 + \frac{se^{-0}\cos(0)}{9} - \frac{s^2}{9}\int_0^\infty e^{-5t}\cos 3t dt \\
\mathcal{L}_f(s) &= \frac{s}{9} - \frac{s^2}{9}\mathcal{L}_f(s) \\
\frac{s^2}{9}\mathcal{L}_f(s) + \mathcal{L}_f(s) &= \frac{s}{9} \\
(\frac{s^2}{9} + 1)\mathcal{L}_f(s) &= \frac{s}{9} \\
\mathcal{L}_f(s) &= \frac{\frac{s}{9}}{\frac{9+s^2}{9}} \\
\mathcal{L}_f(s) &= \frac{s}{s^2+9}
\end{aligned}$$

2. $f(t) = \begin{cases} 1-t & ,0<t<1 \\ 0 & ,t>1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^1 e^{-5t}(1-t)dt + \cancel{\int_1^\infty e^{-5t}(0)dt} \\ &= \int_0^1 e^{-5t}(1-t)dt \\ &= \ldots \quad \text{(Radu n'a pas fait le développement en classe)} \\ &= \frac{s-1+e^{-5}}{s^2} \end{aligned}$$

4.4.2 Exemple avec les propriétés

Les propriétés seront données à l'examen, et on pourra avoir des problèmes semblables à ceux ci-dessous :

1. $f(t) = 6e^{-3t} - t^2 + 2t - 8$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(s) &= 6\mathcal{L}_{e^{-3t}}(s) - \mathcal{L}_{t^2}(s) + 2\mathcal{L}_t(s) - 8\mathcal{L}_1(s) \\ &= \frac{6}{s+3} - \frac{2!}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} \end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s-1)^4}\right)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s-1)^4}\right) &= 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^4}\right) \\ &= \cancel{6\frac{1}{3!}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3!}{(s)^{3-1}}\right) \\ &= t^3 \end{aligned}$$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+9}\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+9}\right) &= 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)\\ &= \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+(3)^2}\right)\\ &= \frac{4}{3}\sin(3t)\end{aligned}$$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2+4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\end{aligned}$$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s^2+34s+53}{(s+3)^2(s+1)}\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s^2+34s+53}{(s+3)^2(s+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+3)^2}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s+1}+\frac{-1}{s+3}+\frac{2}{(s+3)^2}\right)\\ &= 6e^{-t}-e^{3t}+2te^{-3t}\end{aligned}$$

Annexe A

Dépannages

A.1 Dépannage 1 - le 11 septembre 2017

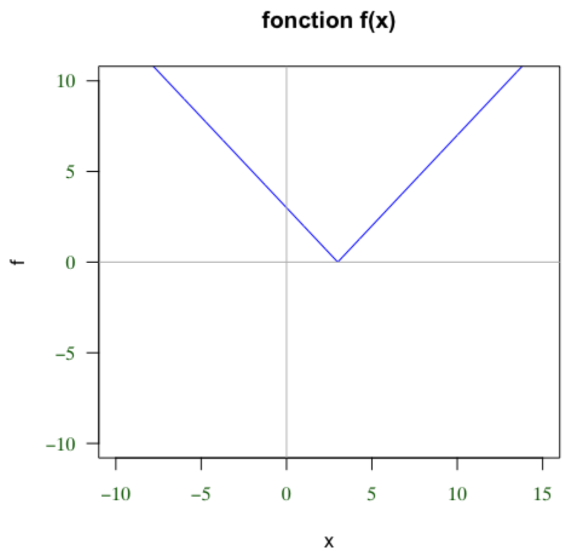
A.1.1 Question 1

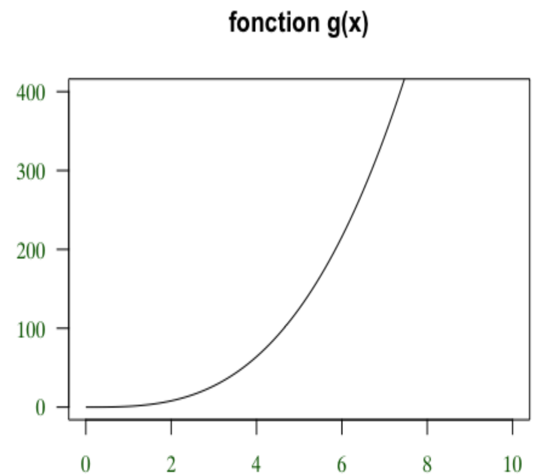
Soit les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x - 3|$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^3$$

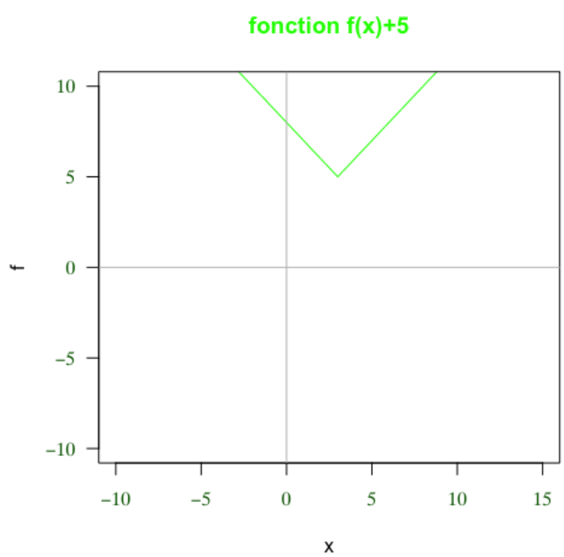
a) Trouver $Ima(f)$ et $Ima(g)$.
$Ima(f) = [0, \infty[$
$Ima(g) =]-\infty, \infty[$

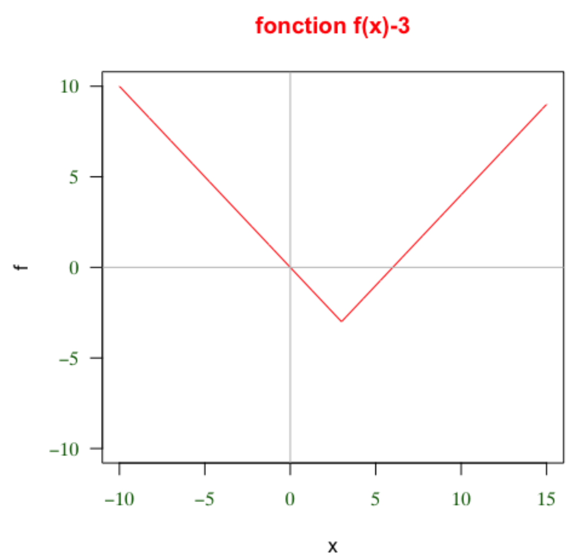
b) Tracer les courbes de f et g.





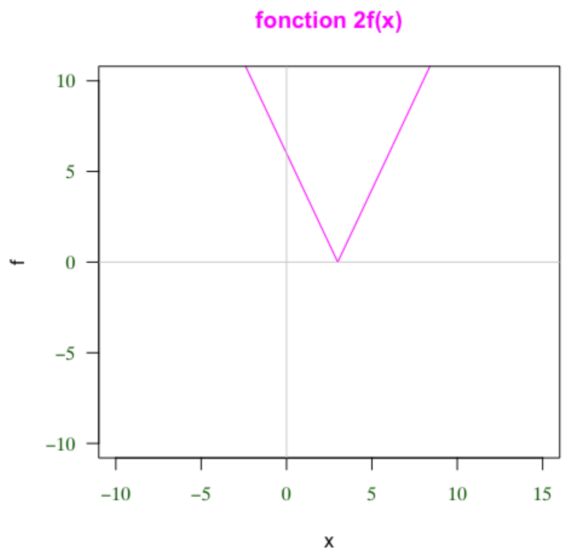
c) Tracer les courbes de $f(x) + 5$ et $f(x) - 3$.

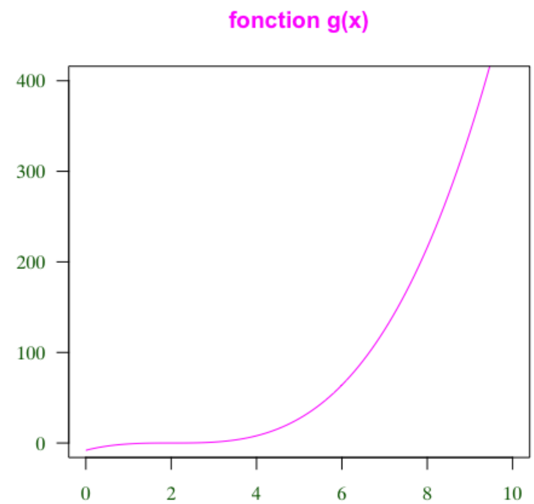




On constate donc une translation verticale de f respectivement de +5 et -3.

d) Tracer les courbes de $2f(x)$ (qu'on renomme $h_1(x)$) et de $g(x-2)$.





On constate donc un allongement vertical de la courbe de f et une translation horizontale de 2 unités vers la droite pour g.

e) Est-ce que f ou g sont injective, surjective ou bijective ?

f n'est pas injective car il existe plus d'un antécédent dans l'ensemble de départ.

Contre-exemple

$f(2) = 1$

$f(4) = 1$

Il y a plus d'un antécédent dans l'ensemble de départ pour un même élément de l'ensemble d'arrivée.

f n'est pas surjective car il existe au moins un élément réel relié à aucun antécédent.

Contre-exemple

$f(x) = -1 \nexists$ (il n'existe aucun x tel que $|x-3| = -1$)

f n'est définitivement pas bijective car elle n'est ni injective, ni surjective.

g est injective.

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x)_1 = g(x_2)$

$$
\begin{aligned}
g(x_1) = g(x_2) &\Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow g$ est injective : une fonction est injective si $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$.

g **est surjective.** Soit $y \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un x tel que $x^3 = y$?
Oui : $\sqrt[3]{y} = x$. Alors,
$x^3 = y$

$\Rightarrow$ **donc la fonction g est bijective car elle est à la fois injective et bijective.**

f) Calculer $f(5)$ et $f(1)$.

$$
\begin{gathered}
f(5) = |5-3| = |2| = 2 \\
f(1) = |1-3| = |-2| = 2
\end{gathered}
$$

g) Calculer $g(2)$

$$g(2) = (2)^3 = 8$$

h) Calculer $g(f(2))$ et $f(g(2))$

$$
\begin{aligned}
g(f(2)) &= g(|(2)-3|) \\
&= g(1) \\
&= (1)^3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(g(2)) &= f(2^3) \\
&= f(8) \\
&= |8-3| \\
&= 5
\end{aligned}
$$

i) Trouver une expression pour $f(g(x))$ et $g(f(x))$

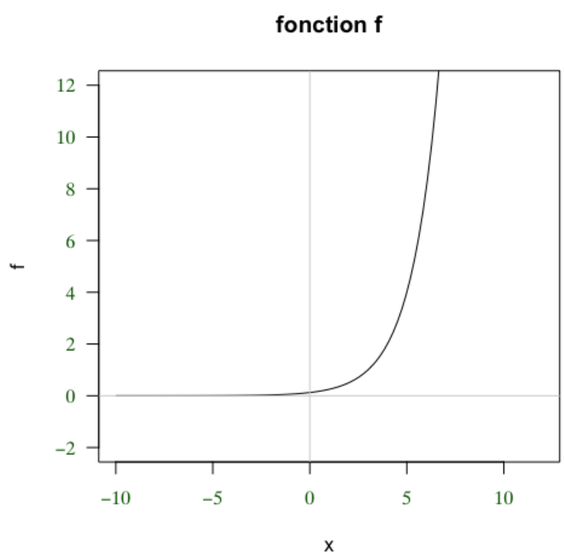
$$f(g(x)) = f(x^3) = |x^3 - 3|$$
$$g(f(x)) = g(|x-3|) = (|x-3|)^3 = |x-3|^3$$

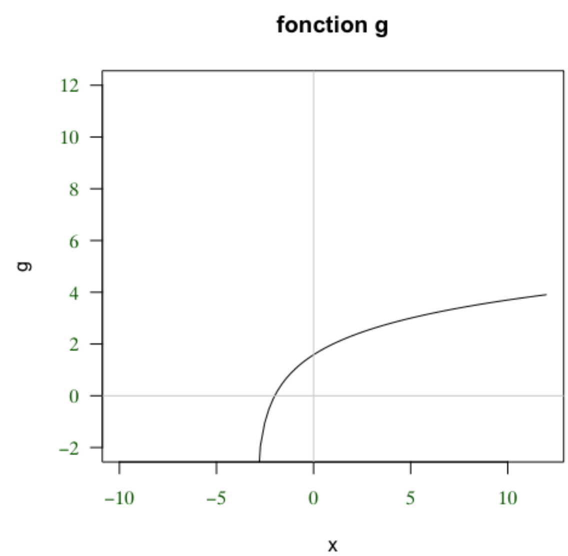
A.1.2 Question 2

Soit les fonctions réelles f et g définies telles que :
$f(x) = 2^{x-3}$ et $g(x) = \log_2(x+3)$

a) Donner le domaine et l'image des fonctions f et g
$Domf :]-\infty, +\infty[$ $\quad Imaf :]0, +\infty[$
$Domg :]-3, +\infty[$ $\quad Imag :]-\infty, +\infty[$

b) Tracer la courbe de f et g





c) Donner l'ensemble A pour lequel :

i) $f > 16$

$$
\begin{gathered}
f(x) > 16 \\
2^{x-3} > 16 \\
\log_2 2^{x-3} > \log_2 16 \\
x - 3 > 4 \\
x > 7
\end{gathered}
$$

Donc,

$$A =]7, +\infty[$$

ii) $g > 16$

$$
\begin{gathered}
g(x) > 16 \\
\log_2 x + 3 > 16 \\
2^{\log_2 x+3} > 2^{16} \\
x + 3 > 2^{16} \\
x > 2^{16} - 3
\end{gathered}
$$

Donc,

$$A =]2^{16} - 3, +\infty[$$

A.2 Dépannage 2 - le 18 septembre 2017

1. Démontrez les limites suivantes :

a)

$$\lim_{x \to 4} (3x - 5) = 7$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$. Démontrer que $\exists\ \delta > 0$ tel que $\forall x \in D, 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |3x - 5 - 7| < \epsilon$

Alors,

$$|3x - 5 - 7| = |3x - 12| = |(3)(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = \epsilon\delta = \frac{\epsilon}{3}$$

Par conséquent,

$$\delta = \frac{\epsilon}{3}$$

Alors,

$$\forall x \in D, 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |3x - 5 - 7| < \epsilon$$

$\square$

b)

$$\lim_{x \to 3} (x^2) = 9$$

Démonstration.

$$\text{Soit } \epsilon > 0. \text{ Démontrer que } \exists\ \delta > 0 \text{ tel que}$$
$$\forall x \in D, 0 < |x - 3| < \delta \Leftrightarrow |x^2 - 9| < \epsilon.$$
$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| = |x - 3| \cdot |x + 3| < |x + 3| \cdot \delta$$

Supposons que $\delta \leq 1$.

$$|x - 3| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - 3 < \delta$$
$$-1+3 < x-3 < 1+3$$
$$2 < x < 4$$
$$2+3 < x+3 < 4+3$$
$$5 < x + 3 < 7$$
$$|x + 3| < 7$$

Par conséquent,

$$|x^2 - 9| < \delta |x+3| < 7\delta$$
$$\text{Soit } \delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}.$$

$\boxed{\text{Pourquoi ? ? } \textit{(juste une explication, ne fais pas partie de la preuve)}}$

$$\begin{aligned} \text{Si } \delta = 1 \Rightarrow |x^2 - 9| < 7\delta = 7(1) = 7 \text{ et } 1 < \frac{\epsilon}{7} \\ \Rightarrow |x^2 - 9| < 7 \text{ et } 7 < \epsilon \\ \text{Donc, } \Rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon \end{aligned}$$

Alors,

$$\forall x \in D, 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon$$

$\square$

c)
$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{5}$$

Démonstration.

Soit $\epsilon < 0$. Démontrer que $\exists\ \delta > 0$ tel que $\forall\ x \in D, 0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\right| < \epsilon$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{5-x}{5x}\right| = \left|\frac{x-5}{5x}\right| < \frac{\delta}{5|x|}$$

Soit $\delta \leq 1$. Alors,

$$\begin{gathered} |x-5| < \delta \Rightarrow -\delta < x - 5 < \delta \\ -1 < x - 5 < 1 \\ 4 < x < 6 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{x} > \frac{1}{6} \\ \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{x} > \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{|x|} > \frac{1}{4} \end{gathered}$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\right| < \frac{\delta}{5|x|} < \frac{\delta}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\delta}{20}$$
$$\text{Fixons } \delta = \min\{1, 20\epsilon\}.$$

Pour se valider,

$$\delta = \min\{1, 20\epsilon\}$$
$$\text{Si } \delta = 1,$$
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\right| < \frac{\delta}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow$$

Alors,

$$\forall x \in D, 0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\right| < \epsilon$$

$\square$

d)

$$\lim_{x\to 12}(\sqrt{2x+1}) = 5$$

Démonstration.

Soit$\epsilon > 0$.Démonter que $\exists\delta > 0$ tel que $\forall x \in D, 0 < |x-12| < \delta \Rightarrow |\sqrt{2x+1}-5| < \epsilon$.

$$\begin{aligned}|\sqrt{2x+1}-5| &= \left|(\sqrt{2x+1}-5)\cdot\frac{(\sqrt{2x+1}+5)}{(\sqrt{2x+1}+5)}\right| \\ &= \left|\frac{2x+1-25}{\sqrt{2x+1}+5}\right| \\ &= \frac{|2x-24|}{\sqrt{2x+1}+5} \\ &= \frac{2|x-12|}{\sqrt{2x+1}+5} < \frac{2\delta}{\sqrt{2x+1}+5}\end{aligned}$$

Soit $\delta \leq 1$. Alors,

$$
\begin{gathered}
|x-12| < \delta \Rightarrow -\delta < x-12 < \delta \\
-1 < x-12 < 1 \\
11 < x < 13 \\
22 < 2x < 26 \\
23 < 2x+1 < 27 \\
\sqrt{23} < \sqrt{2x+1} < \sqrt{27} \\
\sqrt{23}+5 < \sqrt{2x+1}+5 < \sqrt{27}+5 \\
\frac{1}{\sqrt{23}+5} > \frac{1}{\sqrt{2x+1}+5} > \frac{1}{\sqrt{27}+5} \\
\frac{1}{\sqrt{27}+5} < \frac{1}{\sqrt{2x+1}+5} < \frac{1}{\sqrt{23}+5} \\
\frac{2}{\sqrt{27}+5} < \frac{2}{\sqrt{2x+1}+5} < \frac{2}{\sqrt{23}+5}
\end{gathered}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{gathered}
|\sqrt{2x+1}-5| < \frac{2\delta}{\sqrt{2x+1}+5} < \frac{2}{\sqrt{23}+5} \\
\text{Soit } \delta = \min\left\{1, \frac{\sqrt{23}+5}{2}\epsilon\right\}
\end{gathered}
$$

Alors,

$$
\forall x \in D, 0 < |x-12| < \delta \Rightarrow |\sqrt{2x+1}-5| < \epsilon
$$

$\square$

A.3 Dépannage 3 - le 25 septembre 2017

1)

$$\lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}}{x-5}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}}{x-5} = \text{ forme } \frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{\frac{3-x+2}{3(x-2)}}{x-5}$$
$$\lim_{x\to 5} \frac{\frac{5-x}{3(x-2)}}{x-5}$$
$$\lim_{x\to 5} \frac{(5-x)}{3(x-2)} \cdot \frac{1}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{5-x}{3(x-2)(-1)(5-x)}$$
$$\lim_{x\to 5} \frac{-1}{3(x-2)} = \frac{-1}{3(5-2)} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$$

Réponse :

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \text{forme indéterminée } \infty - \infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\infty} = \boxed{0}$$

3)

$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{1-x^3}{x-3} \right)$$

Réponse :

$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{1-x^3}{x-3} \right) = \frac{-26}{0^-}$$
$$= \boxed{+\infty}$$

4)
$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3x}) = \infty - \infty$$

Réponse :

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3x}) = \text{forme indéterminée } -\infty+\infty$$

Si on essaie avec le conjugué...

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3x})\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2+3x})}{(x-\sqrt{x^2+3x})}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+3x)}{x-\sqrt{x^2+3x}} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

On a encore une forme indéterminée... donc on peut essayer par factorisation :

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x-\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x-(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x+x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{-3}{1+\sqrt{1+0}} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

5)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}=\text{forme indéterminée }\frac{-\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^{\frac{1}{5}}}{1+x^{\frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{5}}(\frac{1}{x^{-4/5}}-1)}{x^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{x^{-3/4}}+1)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/20}}\cdot\frac{(\frac{1}{x^{-4/5}}-1)}{(\frac{1}{x^{-3/4}}+1)}$$

$$=\frac{1}{\infty}\cdot\left(\frac{0-1}{0+1}\right)=\frac{-1}{\infty}=\boxed{0}$$

6)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2e^{5x}}{e^{3x}+2-e^{5x}}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2e^{5x}}{e^{3x}+2-e^{5x}}=\text{forme indéterminée }\frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}(e^{-5x}-2)}{e^{5x}(e^{-2x}+2e^{-5x}-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-5x}-2}{e^{-2x}+2e^{-5x}-1}$$

$$=\frac{0-2}{0+2(0)-1}=\frac{-2}{-1}=\boxed{2}$$

7)

$$\lim_{x\to\infty}f(x),\,où\begin{cases}\dfrac{\frac{7}{x-2}-\frac{2}{x-3}}{x^3-125} & \text{,si x<5}\\ \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{7x^2-35x} & \text{,si x>5}\end{cases}$$

Réponse :

On commence à calculer la limite *à gauche* :

$$\lim_{x\to5^-}f(x)=\lim_{x\to5^-}\frac{\frac{7}{x-2}-\frac{2}{x-3}}{x^3-125}=\text{forme indéterminée }\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to5^-}\frac{\frac{7(x-3)-2(x+2)}{(x+2)(x-3)}}{x^3-125}=\lim_{x\to5^-}\frac{\frac{5x-25}{(x+2)(x-3)}}{(x-5)(x^2+5x+25)}$$

$$=\lim_{x\to5^-}\frac{5x-25}{(x+2)(x-3)}\cdot\frac{1}{(x-5)(x^2+5x+25)}$$

$$=\lim_{x\to5^-}\frac{5}{(x+2)(x-3)(x^2+5x+25)}$$

$$=\frac{5}{7(2)(75)}=\frac{1}{210}$$

On valide si la limite *à droite* nous donne le même résultat :

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{\sqrt{x+4}-3}{7x^2-35x} = \text{forme indéterminée } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 5^+} \frac{\sqrt{x+4}-3}{7x^2-35x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}$$

$$= \lim_{x\to 5^+} \frac{x+4-9}{(7x^2-35x)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{7x(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 5^+} \frac{1}{7x(\sqrt{x+4}+3)}$$

$$= \frac{1}{35(3+3)} = \frac{1}{210}$$

Donc, par la théorème du Sandwich, on peut dire que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{\tfrac{1}{210}}$$

Formule importante pour factoriser rapidement une différence de cube :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

8)

$$\lim_{x\to \ln 2} \frac{e^{2x}-6e^x+8}{e^{4x}+e^{3x}-5e^{2x}+e^x-6}$$

Réponse :

$$\lim_{x\to \ln 2} \frac{e^{2x}-6e^x+8}{e^{4x}+e^{3x}-5e^{2x}+e^x-6} = \text{forme indéterminée } \frac{0}{0}$$

Soit $y = e^x$,

$$\lim_{y\to 2} \frac{y^2-6y+8}{y^4+y^3-5y^2+y-6}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{(y-4)(y-2)}{(y-2)(y^3+3y^2+y+3)} \Rightarrow \text{(trouvé par division polynomiale)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{y-4}{y^3+3y^2+y+3}$$

$$= \frac{2-4}{(2)^3+3(2)^2+(2)+3}$$

$$= \boxed{\tfrac{-2}{25}}$$

9) Trouver a et b tel que $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $\lim_{x\to 2} f(x)$ existent, où

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}x + b & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Réponse :
On vérifie tout d'abord l'existence des limites *à gauche* et *à droite* :

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{a}{2}x + b\right) = \frac{a}{2} + b$$

et

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{a}{2}x + b\right) = \frac{a}{2} + b$$

Pour que $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, il faut que

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b &= a + b + c \\ \Rightarrow \frac{a}{2} &= a + c \\ \Rightarrow 0 &= \frac{a}{2} + c \\ \rightarrow \boxed{c = \tfrac{a}{2}} &\text{ ou } \boxed{a = 2c} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 2^-} ax^2 + bx + c = 4ab + 2b + c$$
$$\text{et}$$
$$\lim_{x \to 2^+} ax^2 + bx + c = 4ab + 2b + c$$

Pour que Pour que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, il faut que

$$\begin{gathered} 4ac + 2b + c = a + b \\ 3a + b + c = 0 \\ 3(-2c) + c + c = 0 \\ -6c + b + c = 0 \\ b - 5c = 0 \Rightarrow \boxed{b = 5c} \end{gathered}$$

<u>Réponses finales :</u>

$$\begin{gathered} a = -2c \\ b = 5c \\ \text{où } c \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

10)

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x|^2 - 1}{|x| - 1}$$

Réponse :

11)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Réponse :

12)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 3} - x \right)$$

Réponse :

A.4 Dépannage 4 - le 2 octobre 2017

A.4.1 Question 1

Calculer les dérivées à droite et à gauche afin de démontrer que f n'est pas dérivable :

$$f(x) = |x - 5|$$

On sait que :

$$f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 5 \\ -1 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Ainsi, $f'(5^-) = -1$ et $f'(5^+) = 1$. Puisque $f'(5^-) \neq f'(5^+)$, la fonction n'est pa dérivable.

Note sur la notation : $f'(5^-) = \lim_{x \to 5^-} f'(x)$

A.4.2 Question 2

Soit la fonction f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Trouver b tel que f est dérivable.

Réponse : pour que la fonction soit dérivable à $x = 0$, il faut que $f'(0^-) = f'(0^+)$.

Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc,

$$f'(0^-) = 2$$
$$f'(0^+) = 2(0) + b$$
$$\text{si } f'(0^-) = f'(0^+)$$
$$\text{alors } \boxed{\text{b} = 2}$$

A.4.3 Question 3

Calculez la dérivée

a)

$$g(t) = \frac{\sqrt[3]{t^2}}{3t-5}$$

on peut utiliser la règle du quotient :

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\frac{2}{3}t^{\frac{-1}{3}}(3t-5) - 3t^{\frac{2}{3}}}{(3t-5)^2} \\
&= \frac{2t^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}t^{\frac{-1}{3}} - 3t^{\frac{2}{3}}}{(3t-5)^2} \\
&= \frac{t^{2/3} - \frac{10}{3}t^{-1/3}}{(3t-5)^2} \\
&= \frac{\frac{-1}{3}t^{-1/3}(3t+10)}{(3t+5)} \\
&= -\frac{3t+10}{3\sqrt[3]{t}(3t-5)^2}
\end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = (1+x+x^2+x^3)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-1)(1+x+x^2+x^3)^{-2}\left((1+x+x^2+x^3)^{-1}\right)' \\
&= \frac{-1}{(1+x+x^2+x^3)^2} \cdot (1+2x+3x^2) \\
&= -\frac{1+2x+3x^2}{(1+x+x^2+x^3)^2}
\end{aligned}$$

c)

$$h(x) = \frac{x^3-3x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Première méthode : **règle du quotient**

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(2x-3)x^{2/3} - \frac{2}{3}x^{-1/3}(x^2-3x)}{x^{4/3}} \\
&= \frac{2x^{5/3} - 3x^{2/3} - \frac{2}{3}x^{5/3} + 2x^{2/3}}{x^{4/3}} \\
&= \frac{4x^{5/3} - x^{2/3}}{x^{4/3}} \\
&= \frac{\frac{4}{3}x^{5/3}}{x^{4/3}} - \frac{x^{2/3}}{x^{4/3}} \\
&= \frac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2/3}
\end{aligned}
$$

Deuxième méthode : **règle du produit**

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= (2x-3)x^{-2/3} + (x^2-3x)(-\frac{2}{3})x^{-5/3} \\
&= 2x^{1/3} - 3x^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{1/3} + 2x^{-2/3} \\
&= \frac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2/3}
\end{aligned}
$$

Dernière alternative : **simplification algébrique**

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^3-3x}{\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \frac{x^2-3x}{x^{2/3}} \\
&= \frac{x^2}{x^{2/3}} - \frac{3x}{x^{2/3}} \\
&= x^{4/3} - 3x^{1/3} \\
&= \frac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2/3}
\end{aligned}
$$

A.4.4 Question 4

En quels points de la courbe $y = x^{3/2} - x^{1/2}$ la tangente est-elle parallèle à la droite $y - x = 3$?

On peut dire que $y - x = 3 \Leftrightarrow y = x + 3$. La pente de cette courbe est 1.

trouver la pente de la tangente parallèle $\Rightarrow$ trouver la dérivée.

Alors,

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} \\
1 &= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3x-1}{2\sqrt{x}} \\
3x - 1 &= 2\sqrt{x} \\
3x - 2\sqrt{x} - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Soit $s = \sqrt{x}$.

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-1)}}{2(3)} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} \\
&= \frac{2 \pm 4}{6} \\
s_1 &= \frac{2+4}{6} = 1 \\
s_2 &= \frac{2-4}{6} = \cancel{\frac{-1}{3}}
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
1 &= \sqrt{x} \\
1^2 &= x \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Réponse : $(1, 0)$.

A.4.5 Question 5

Calculez la dérivée des fonctions composés suivantes
a)

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3(1 + x + x^2 + x^3)^{-4}(1 + 2x + 3x^2) \\ &= \frac{-3(1 + 2x + 3x^2)}{(1 + x + x^2 + x^3)^4} \end{aligned}$$

b)

$$g(x) = \cos(5x^3)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(5x^3)(15x^2) \\ &= -15x^2 \sin(5x^3) \end{aligned}$$

c)

$$h(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 6})^4$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3 \cdot (7 + \frac{1}{2}(x^2 + 6)^{-1/2} \cdot 2x) \\ &= 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3 \left(7 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6}}\right) \end{aligned}$$

A.4.6 Question 6

Calculez la pente de la tangente en P à la courbe d'équation donnée (dérivée d'une fonction implicite).

Important Avant de commencer nos calculs, important de vérifier que le point demandé appartient à la courbe !

a)

$$\begin{aligned} y^2 - 4x^2 &= 5 & P(-1,3) \\ (3)^2 - 4(-1)^2 &= 5 \\ 5 &= 5 & \text{OK} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 4x^2\right) = \frac{d}{dx}(5)$$

il ne faut pas oublier que $y = y(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4x^2) &= 0 \\ 2y \cdot y' - 8x &= 0 \\ 2y \cdot y' &= 8x \\ y' &= \frac{4x}{y} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dx}\right|_{(-1,3)} &= \frac{4(-1)}{3} \\ &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3y^4 + 4x - x^2 \sin y - 4 &= 0 \\ \frac{d}{dx}(3y^4 + 4x - x^2 \sin y - 4) &= \frac{d}{dx}(0) \\ 12y^3y' + 4 - 2x \sin y - x^2 \cos y \cdot y' &= 0 \\ y'(12y^3 - x^2 \cos y) &= 2x \sin y - 4 \\ y' &= \frac{2x \sin y - 4}{12y^3 - x^2 \cos y} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dx}\right|_{(-1,3)} &= \frac{2(1)\sin 0 - 4}{12(0)^3 - 1^2 \cos 0} \\ &= \frac{0-4}{0-1} \\ &= \frac{-4}{-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

A.4.7 Question 7

Soit $f(x) = x^{1/3}(8-x)$. Déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante.

1) Trouver le domaine
$Dom(f) = \mathbb{R}$

2) Trouver la dérivée

$$\begin{aligned} f(x) &= 8x^{1/3} - x^{4/3} \\ f'(x) &= \frac{8}{3}x^{-1/3} - \frac{4}{3}x^{1/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(2-x) \\ &= \frac{4(2-x)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

3) Trouver les points critiques...

Lorsque $f'x() = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{4(2-x)}{3x^{2/3}} &= 0 \\ 4(2-x) &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Lorsque $f'(x) \nexists$

$$\begin{aligned} 3x^{2/3} &= 0 \\ x^{2/3} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Il y a donc 2 points critiques !

il nous reste à se faire un tableau pour connaître les intervalles de croissance :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

A.5 Dépannage 5 - le 16 octobre 2017

1. Trouver une primitive pour chaque fonction. Vérifier la réponse en dérivant.

   (a)

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

   On sépare l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx \\
&= \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx \\
&= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\
&= \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C \\
&= \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

   (b)

$$\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$$

   On simplifie les termes du numérateur avec ceux du dénominateur :

$$\begin{aligned}
\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt &= \int \frac{t^{3/2} + t^{1/2}}{t^2} dt \\
&= \int t^{-1/2} + t^{-3/2} dt \\
&= \frac{t^{1/2}}{1/2} + \frac{t^{-1/2}}{-1/2} + C \\
&= 2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C
\end{aligned}$$

   (c)

$$\int (x^2 + 4x)e^{-x} dx$$

   On utilise l'intégration par partie : $\int u dv = uv - \int v du$

$$\begin{aligned} u &= x^2+4x & dv &= e^{-x}dx \\ du &= 2x+4dx & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

En appliquant la formule :

$$\int (x^2+4x)e^{-x}dx = -(x^2+4x)e^{-x} + \int (e^{-x}(2x+4)dx$$

On doit encore faire une intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= 2x+4 & dv &= e^{-x}dx \\ du &= 2dx & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2+4x)e^{-x}dx &= -(x^2+4x)e^{-x} + \int (e^{-x}(2x+4)dx \\ &= -(x^2+4x)e^{-x} - (2x+4)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx \\ &= -(x^2+4x)e^{-x} - (2x+4)e^{-x} + 2(-e^{-x}) + C \\ &= -e^{-x}(x^2+4x+2x+4+2) + C \\ &= e^{-x}(x^2+6x+6) + C \end{aligned}$$

(d)

$$\int (x^2+2x+1)\ln x dx$$

Lorsqu'on a un $\ln x$, on doit utiliser l'intégration par partie pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^2+2x+1dx \\ du &= \frac{1}{x}dx & v &= \frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2+2x+1)\ln x dx &= (\frac{x^3}{3}+\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}+x)\ln x - \int (\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x)\frac{1}{x}dx \\ &= (\frac{x^3}{3}+x^2+x)\ln x - \int (\frac{x^2}{3}+x+1)dx \\ &= (\frac{x^3}{3}+x^2+x)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} - x + C \end{aligned}$$

(e)

$$\int t^2 \cos t dt$$

On fait un changement de variable :

$$\begin{aligned} u &= t^2 & dv &= \cos t dt \\ du &= 2t dt & v &= \sin t \end{aligned}$$

$$\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt$$

On obtient une expression plus simple, mais il faut encore faire uen intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \sin t dt \\ du &= 1 dt & v &= -\cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int t^2 \cos t dt &= t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \\ &= t^2 \sin t - 2 \left[-t \cos t + \int \cos t dt \right] \\ &= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \int \cos t dt \\ &= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C \end{aligned}$$

(f) f

$$\int e^y \sin y dy$$

On doit faire un intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= e^y & dv &= \sin y dy \\ du &= e^y dy & v &= -\cos y \end{aligned}$$

$$\int e^y \sin y dy = -e^y \cos y + \int e^y \cos y dy$$

Il faut encore faire une intégration par partie :

$$\begin{aligned} u &= e^y & dv &= \cos y dy \\ du &= e^y dy & v &= \sin y \end{aligned}$$

On peut réessayer de refaire une intégration par partie, mais on va tourner en rond.... mais on peut substituer l'intégrale initiale par I !

$$\begin{aligned} \int e^y \sin y dy &= -e^y \cos y + \int e^y \cos y dy \\ &= -e^y \cos y + e^y \sin y - \int e^y \sin y dy \end{aligned}$$

Posons $I = \int e^y \sin y dy$:

$$\begin{aligned} I &= -e^y \cos y + e^y \sin y - I \\ 2I &= -e^y \cos y + e^y \sin y + K \\ I &= \frac{1}{2}(-e^y \cos y + e^y) + C \quad (\text{où } C = \frac{K}{2}) \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}e^y(\sin y - \cos y) + C$$

(g)

$$\int e^{\sqrt{3s+9}} ds$$

Est-ce que l'intégration par partie fonctionnerait ? Non. On peut faire un changement de variable :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{3x+9} \\ du &= \frac{1}{2}(3x+9)^{-1/2}(3)ds \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+9}}ds \\ &= \frac{3}{2u}ds \\ ds &= \frac{2u}{3}du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{3s+9}}ds &= \int e^u(\frac{2u}{3}du \\ &= \frac{2}{3}\int ue^u du\end{aligned}$$

On fais une intégration par partie :

$$\begin{aligned} f &= u & dg &= e^u du \\ df &= (1)du & g &= e^u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int ue^u du &= \frac{2}{3}[ue^u - \int e^u du] \\ &= \frac{2}{3}[ue^u - e^u] + C \\ &= \frac{2}{3}ue^u - \frac{2}{3}e^u + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3s+9}e^{\sqrt{3x+9}} - \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}} + C\end{aligned}$$

(h)

$$\int \sin(\ln x)dx$$

Changement de variable :

$$\begin{aligned} u &= \ln x \Leftrightarrow x = e^u \\ du &= \frac{1}{x} \\ dx &= xdu \\ &= e^u du \end{aligned}$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \int \sin ue^u du$$

C'est exactement la même chose qu'on a fais au numéro f :

$$\begin{aligned}
\int \sin u e^u du &= \int e^u \sin u du \\
&= \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + C \\
&= \frac{1}{2} e^{\ln x} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C \\
&= \frac{1}{2} x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C
\end{aligned}$$

2. Évaluer les sommes suivantes

(a)

$$\sum_{k=1}^{7} (-2)^k$$

En classe, on a vu la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{7} (-2)^k &= \sum_{k=0}^{7} (-2)^k - (-2)^0 \\
&= \frac{1 - (-2)^{7+1}}{1 - (-2)} - 1 \\
&= \frac{1 - 256}{3} - 1 \\
&= \frac{-255}{3} - 1 \\
&= -86
\end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 5)$$

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2-5)=\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}5$$

En classe, on a appris la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6}(k^2-5)&=\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}5\\
&=\frac{\cancel{6}(7)(13)}{\cancel{6}}-30\\
&=91-30\\
&=61
\end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{k=18}^{71}k(k-1)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=18}^{71}k(k-1)&=\sum_{k=18}^{71}k^2+k\\
&=\sum_{k=18}^{71}k^2-\sum_{k=18}^{71}k\\
&=\left(\sum_{k=1}^{71}k^2-\sum_{k=1}^{17}k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{71}k-\sum_{k=1}^{17}k\right)\\
&=\frac{71(72)(143)}{6}-\frac{17(18)(35)}{6}-\left(\frac{71(72)}{2}-\frac{17(18)}{2}\right)\\
&=117\ 648
\end{aligned}$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n} + 2n)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n} + 2n) &= (\frac{1}{n} + 2n)\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (\frac{1}{n} + 2n)n \\ &= 1 + 2n^2\end{aligned}$$

A.6 Dépannage 6 - le 23 octobre 2017

1. Pour les fonctions suivantes, trouver une formule pour la somme de Riemann obtenue en divisant l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux et utiliser la borne de droite pour chaque ξ_k. Prendre ensuite la limite des sommes lorsque $n \to \infty$ afin de calculer l'aire sous la courbe sur $[a, b]$.

   (a)

   $$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{sur l'intervalle } [0, 3]$$

   i. trouver Δx

   $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

   ii. Le k$^{\text{e}}$ rectangle a comme base l'intervalle réel $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ..., n$

   iii. La borne de droite : x_k.
   1$^{\text{er}}$ rectangle : $[x_0, x_1] = [0, 0 + \frac{3}{n}]$
   2$^{\text{e}}$ rectangle : $[x_1, x_2] = [0 + \frac{3}{n}, 0 + 2\frac{3}{n}]$
   Donc, la hauteur du k$^{\text{ième}}$ rectangle est

   $$\begin{aligned} f(x_k) = f(0 + k\left(\frac{3}{n}\right)) \\ &= f(\frac{3k}{n}) \\ &= (\frac{3k}{n})^2 + 1 \\ &= \frac{9k^2}{n} + 1 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x &= \sum_{k=1}^{n}(\frac{9k^2}{n^2}+1)(\frac{3}{n}) \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9k^2}{n^2}+1\right) \\
&= \frac{3}{n}\left[\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2+n\right] \\
&= \frac{3}{n}\left[\frac{9}{n^{\cancel{2}}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right)+n\right] \\
&= \frac{3}{n}\left[\frac{9(n+1)(2n+1)}{6n}+n\right] \\
&= \frac{3}{n}\left[\frac{9(n+1)(2n+1)+6n^2}{6n}\right] \\
&= \frac{3}{n}\left[\frac{24n^2+27n+9}{6n}\right] \\
&= \frac{24n^2+27n+9}{2n^2}
\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x^2+1)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{24n^2+27n+9}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{24n^2}{2n^2}+\frac{27n}{2n^2}+\frac{9}{2n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(12+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right) \\
&= 12+0+0 \\
&= 12
\end{aligned}$$

v. Vérification

$$\int_0^3 (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^3$$
$$= \frac{3^3}{3} + 3 - 0$$
$$= 9 + 3 - 0$$
$$= 12$$

2. (a) Utiliser la méthode de substitution pour résoudre

$$\int_{-2}^{2} \frac{3x}{(1+x^2)^4} dx$$

$$u = 1 + x^2$$
$$du = 2xdx$$
$$\frac{du}{2} = xdx$$

Alors,

$$\int_{-2}^{2} \frac{3x}{(1+x^2)^4} dx = \int_5^5 \frac{3(du/2)}{u^4} = \frac{3}{2} \underbrace{\int_5^5 \frac{du}{u^4}}_{=0}$$
$$= 0$$

(b) Démontrer que pour toutes fonctions,

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}\text{tel que}$$
$$f(-x) = -f(x) \quad \text{on a}$$
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Démonstration.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^a f(x)dx}_{I_2}$$

Considérons premièrement I_1. Soit $u = -x \Rightarrow du = -dx$. Alors,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-a}^{0} f(x)dx \\
&= \int_{a}^{0} f(-u)(-du) \\
&= -\int_{a}^{0} f(-u)du \\
&= \int_{a}^{0} f(-u)du \\
I_1 &= \int_{0}^{a} -f(u)du \quad \text{(par hypothèse)} \\
&= -\int_{0}^{a} f(u)du \\
&= -I_2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= I_1 + I_2 \\
&= -I_2 + I_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

(c) Démontrer que pour toutes fonctions
$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = f(x)$, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Démonstration.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)dx}_{I_2}$$

Considérons premièrement I_1,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-a}^{0} f(x)dx \\
&= \int_{a}^{0} f(-u)(-du) \\
&= -\int_{a}^{0} f(-u)du \\
&= \int_{0}^{a} f(-u)du \\
I_1 &= \int_{0}^{a} f(u)du \quad \text{(par hypothèse)} \\
&= I_2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= I_1 + I_2 \\
&= I_2 + I_2 \\
&= 2I_2 \\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)dx
\end{aligned}$$

$\square$

3. Évaluer les intégrales définies suivantes.

(a)

$$\int_{1}^{e^6} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}) \ln x dx$$

(b)

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

On doit utiliser la substitution :

$$u = x^2 + 1 \qquad du = 2xdx$$
$$xdx = \frac{du}{2}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_1^4 \frac{4(du/2)}{\sqrt{u}} \\ &= 2\int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2\int_1^4 u^{-1/2} du \\ &= 2\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 \\ &= 4(\sqrt{4}-\sqrt{1}) \\ &= 4(2-1) \\ &= 4\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (3\sin^6 x - 1)(5\cos x) dx$$

Changement de variable :

$$u = \sin x \qquad du = \cos x dx$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (3\sin^6 x - 1)(5\cos x)dx &= \int_0^{-1} (3u^6 - 1)(5du) \\
&= 5\int_0^{-1} (3u^6 - 1)du \\
&= 5\int_{-1}^{0} (1 - 3u^6)du \quad \text{(facultatif, pour mettre des bornes logiques)} \\
&= 5\left[u - \frac{3}{7}u^7\right]_{-1}^{0} \\
&= 5(0 - 0 - (-1 - \frac{3}{7}(-1)^7)) \\
&= 5(0 + 1 + \frac{3}{7}(-1)) \\
&= 5(1 - \frac{3}{7}) \\
&= \frac{20}{7}
\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

Intégration par partie :

$$\begin{aligned}
u &= \ln(x^2+1) & dv &= dx \\
du &= \frac{2x}{x^2+1} & v &= x
\end{aligned}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(x^2+1)dx &= x\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx \\
&= x\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\
&= x\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{7x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\
&= x\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\
&= x\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - 2[x - \arctan(x)]_0^1 \\
&= \ln 2 - 0 - 2[1 - \arctan(1) - (0 - \arctan(0))] \\
&= \ln 2 - 2\left[1 - \frac{\pi}{4} - 0 + 0\right] \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

4. Trouver $g'(x)$ où

   (a)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^x \sqrt{t^6+3}dt \\
g'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^6+3}dt\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)dt\right] \quad , \text{où } f(t) = \sqrt{t^6+3} \\
&= \frac{d}{dx}\left[F(t)\Big|_0^x\right] \quad , \text{où } F'(t) = f(t) \\
&= \frac{d}{dx}[F(x) - F(0)] \\
&= \underbrace{\frac{d}{dx}F(x)}_{f(x)} - \underbrace{\frac{d}{dx}F(0)}_{\text{dérivée d'une constante=0}} \\
&= f(x) - 0 \\
&= \sqrt{x^6+3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_{\sqrt{x}} 0 \sin(y^2) dy \\
g'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^{0} f(y)dy\right] \quad ,\text{où } f(y) = \sin(y^2)dy \\
&= \frac{d}{dx}\left[F(y)\Big|_{\sqrt{x}}^{0}\right] \quad , \text{où } F'(y) = f(y) \\
&= \frac{d}{dx}\left[F(0) - F(\sqrt{x})\right] \\
&= \frac{d}{dx}F(0) - \frac{d}{dx}F(\sqrt{x}) \\
&= 0 - F'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \\
&= \frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

A.7 Dépannage 7 - le 6 novembre 2017

1. Évaluer l'intégrale impropre de type *Riemann* suivante.

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$$

il y a une discontinuité à $x = 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{2} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{t \to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{t} + \lim_{s \to 0^+} \frac{-1}{x}\Big|_{s}^{2} \\
&= \underbrace{\lim_{t \to 0^-} \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{-1} \right)}_{1} + \underbrace{\lim_{s \to 0^+} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{5} \right)}_{2}
\end{aligned}$$

On est mieux de calculer les limits séparément :

$$\boxed{1} \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{-1} \right) = \frac{-1}{0^-} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

On sait que l'intégrale ne convergera pas, mais on va calculer la deuxième limite pout faire une démarche complète :

$$\boxed{2} \lim_{s \to 0^+} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{2} = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$$

Donc,

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx = +\infty + \infty = \infty$$

L'intégrale impropre en question diverge vers $+\infty$.

2. Évaluer les intégrales impropres suivantes
   (a)
   (b)
   (c)
3. Calculer l'intégrale de Stiltjes (contexte probabilité) Si $X \sim Exp(1)$

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Soit

$$Y = (X-3)_+ = \begin{cases} 0 & \text{pour } X \leq 3 \\ X-3 & \text{pour } X > 3 \end{cases}$$

Y est donc une valeur aléatoire mixte.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-(3+y)} & \text{pour } y \geq 0 \\ 0 & \text{pour } y < 0 \end{cases}$$

Il y a une discontinuité à $y = 0$.

Trouver $E[e^{ty}]$

En pratique, ce type de numéro est un exemple de calcul des pertes lorsqu'il y a une franchise (sera vu plus en détail en Mathématiques IARD1).

On suppose que $0 < t < 1$

$$\begin{aligned}
E[e^{ty}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} dF_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ty} F'_Y dy + \int_{0}^{\infty} e^{ty} F'_Y dy + e^{t(0)}[F_Y(0) - F_Y(0^-)] \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{0} e^{ty}(0)' dy} + \int_{0}^{\infty} e^{ty}(1-e^{-(3+y)})' dy + 1[1-e^{-3}-0] \\
&= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{ty} e{-}(3+y) dy + 1 - e^{-3} \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{ty-3-y} dy + 1 - e^{-3} \\
&= e^{-3} \int_{0}^{\infty} e^{(t-1)y} dy + 1 - e^{-3} \\
&= e^{-3} \left[\frac{1}{t-1} \underbrace{e^{(t-1)y}}_{0<t<1} \right]_0^{\infty} + 1 - e^{-3} \\
&= e^{-3} \left(0 - \frac{1}{t-1} \right) + 1 - e^{-3} \\
&= 1 + e^{-3} \left(\frac{1}{1-t} + 1 \right) \\
&= 1 + e^{-3} \left(\frac{1-(1-t)}{1-t} \right) \\
&= 1 + e^{-3} \left(\frac{t}{1-t} \right)
\end{aligned}$$

4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

   Démonstration. Définition suite bornée : Une suite est bornée s'il existe des nombres réels m et M tels que $m \leq a_n \leq M \forall\ n$.

   Définition suite convergente : Une suite est convergente si $\forall\ \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - L| < \epsilon\ \forall\ n > N$.

   Hypothèse : la suite est convergente.

   À montrer : la suite en question est également bornée.

   Preuve : Soit $\epsilon = 1$ (choix arbitraire, tant que $\epsilon > 0$).

   Puisque la suite a_n est convergente, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - L| < 1$ lorsque $n > N_1$.

   En d'autres mots, les termes $a_{N_1+1}, a_{N_1+2}, a_{N_3+1}, ...$ sont tous situés entre $L-1$ et $L+1$.

   Qu'en est-il est termes $a_1, a_2, a_3, ..., a_{N_1}$?
   Définissons
$$\begin{cases} m = \min\{a_1, a_2, ...a_{N_1}, L-1\} \\ \text{et} \\ M = \max\{a_1, a_2, ...a_{N_1}, L+1\} \end{cases}$$

   Ainsi, $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq a_n \leq M \forall\ n \geq 1$. Par conséquent, (a_n) est bornée ! □

5. Dire si les suites suivantes sont bornées :
   (a) $a_n = n(-1)^n$

$$\begin{aligned} a_n &= n(-1)^n \\ |a_n| &= |n||(-1)|^n \\ &= |n| \\ &= n \end{aligned}$$

   On constate que lorsque $n \to \infty, |a_n| \to \infty$. Il est donc impossible de trouver une borne supérieure. **Ainsi,** (a_n) **n'est pas bornée**

   (b) $b_n = \frac{(-3)^n}{4^n} + \frac{1}{n}$ Pour vérifier si cette suite est bornée, on a seulement qu'à vérifier si la suite est convergente !

On calcule donc la limite pour vérifier la convergence :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-3)^n}{4^n}+\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{4^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n+0\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme (b_n) est convergente, on peut dire que (b_n) est aussi bornée.

6. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=5$$

$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}\neq\lim_{n\to\infty}(3+5)}$

Démonstration. Premièrement, il est important de noter que $0\leq 3^n\leq 5^n, \forall\, n\geq 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}5^n &\leq 3^n+5^n \leq 5^n+5^n\\ \underbrace{\sqrt[n]{5^n}}_{5} \leq \sqrt[n]{3^n+5^n} &\leq \underbrace{\sqrt[n]{5^n+5^n}}_{\sqrt[n]{2(5^n)}=2^{1/n}\cdot 5}\\ 5\leq \sqrt[n]{3^n+5^n} &\leq 2^{1/n}\cdot 5\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} 5 &= 5\\ \lim_{n\to\infty} 2^{1/n}\cdot 5 &= 5\lim_{n\to\infty}2^{1/n}\\ &= 5\cdot 2^0\\ &= 5(1)\\ &= 5\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème du sandwich,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=5$$

□

7. Déterminer le comportement des séries suivantes en calculant la valeur des sommes partielles.

   (a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

   On peut développer les premiers termes...

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} = \frac{1}{1+0} = 1$$
$$S_1 = S_0 + \frac{1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = 1+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}$$
$$S_2 = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

   On observe intuitivement que $S_K = \sqrt{K+1}$.

   Ainsi, on peut supposer que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &= S_\infty \\ &= \lim_{K\to\infty} S_K \\ &= \lim_{K\to\infty} \sqrt{K+1} \\ &= \infty\end{aligned}$$

On peut appuyer cette intuition mathématiquement !

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
&= \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
&= \lim_{K\to\infty} [\cancel{\sqrt{1}} - \sqrt{0} + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{1}} + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}} + ... + \sqrt{K+1} - \cancel{\sqrt{k}}] \\
&= \lim_{K\to\infty} (\sqrt{K+1}-\sqrt{0}) \\
&= \lim_{K\to\infty} \sqrt{K+1} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

A.8 Dépannage 8 - le 13 novembre 2017

1. Étudier la convergence de la série (Est-ce que la série converge ou diverge ?)

   (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{n^2+2n+7}}\right)$$

La série suivante est similaire (comparable) à la série suivante : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n^2}}$. Plus la somme augmente, plus le n^2 devient considérable et on peut ignorer le $2n+7$. Donc,

$$\frac{5}{\sqrt{n^2+2n+7}} \approx \frac{5}{\sqrt{n^2}}$$

Avec un grand n.

À titre de preuve,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{\sqrt{n^2+2n+7}}}{\frac{5}{\sqrt{n^2}}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{5}}{\sqrt{n^2+2n+7}}\times\frac{n}{\cancel{5}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n+7}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2})}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Selon le deuxième test de comparaison, les deux séries convergent ou divergent en même temps.

Or, puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n} = 5\sum_{n=1}^{\infty} = 5(\infty) = \infty$. Et par ricochet, **la série qui nous intéresse diverge également.**

   (b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n^2+4}}{6n^2-n-1}\right)$$

   (c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^5}$$

(d)

$$\sum \frac{2^n}{n^2}$$

(e)

$$\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

On utilise simplement le Test de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \\
&\text{si on utilise la règle de l'Hôpital :} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Puisque $L < 1$, la série est convergente.

2. Quel est l'intervalle de convergence de la série ?

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} x^n$$

Pour trouver l'intervalle de convergenve avec des séries entières, on utilise une forme particulière du Test d'Alembert avec la valeur absolue :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{\cancel{n}+1}}{(n+1)^2+4} \times \frac{n^2+4}{\cancel{x^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x(n^2+4)}{n^2+2n+5}\right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{n=2+2n+5} \\
&= ... \\
&= |x|(1) \\
&= |x|
\end{aligned}$$

La série converge (absolument) lorsque $|x| < 1 \Leftrightarrow (-1 < x < 1)$.
La série diverge lorsque $|x| > 1 \Leftrightarrow (x > 1 \text{ ou } x < 1)$.

Qu'en est-il lorsque $|x| = 1? \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$

Pour $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 4}$$

Utilisons le critère des séries alternées ! (pas dans les notes de cours)

i. Est-ce que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?

ii. Est-ce que $b_{n+1} \leq b_n \forall\ n$?

i.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &\geq n^2 && \forall\ n \geq 0 \\
(n+1)^2 + 4 &\geq n^2 + 4 \\
\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2+4}}_{b_{n+1}} &\leq \underbrace{\frac{1}{n^2+4}}_{b_n}
\end{aligned}$$

Donc, la série converge par le test des séries alternées !

pour $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 4}$$

La série est comparable à la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+4}}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+4} \times \frac{n^2}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par la deuxième test de comparaison, les deux séries convergent ou divergent en même temps. Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $P = 2 > 1$), alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} x^n$ converge également.

Rép : I.C (intervalle de convergence) : $[-1, 1]$

(b)

$$\sum \frac{10^n}{n!}(x-3)^n$$

3. Trouver la série de MacLaurin pour
   (a) $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f_2(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.
   (b) $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = \sin x^3$.

$f_3(x) = \sin(x)$	$f(0) = \sin(0) = 0$
$f_3'(x) = \cos(x)$	$f_3'(0) = \cos(0) = 1$
$f_3''(x) = -\sin(x)$	$f_3''(0) = -\sin(0) = 0$
$f_3^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f_3^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$
$f_3^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f_3^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$

$$\begin{aligned} f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ... \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^3)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{6k+3}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

   (c) Approximer $\sin(0,25)$ en utilisant un polynôme de Taylor (centré à $a = 0$) de degré 5.

On utilise le résultat trouvé en b) pour créer le polynôme

$$\begin{aligned} \sin(0,25) &\approx T_5(0,25) \\ &= 0,25 - \frac{0,25^3}{6} + \frac{0,25^5}{120} \\ &= 0,247403971 \end{aligned}$$

On peut vérifier avec la calculatrice $\Rightarrow \sin(0,25) = 0,247403959$.

4. Calculer les intégrales doubles suivantes :

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x+6x^2y)dydx &= \int_1^4 \left[2xy + 6x^2\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^4 \left[2xy+3x^2y^2\right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^4 (4x+1x^2+2x-3x^2)dx \\ &= \int_1^4 (9x^2+6x)dx \\ &= 3x^3+3x^2\Big|_1^4 \\ &= 3(64)+3(16)-3(1)^3-3(1)^2 \\ &= 234\end{aligned}$$

(b)

$$\int_1^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3+4y)dydx$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos y - y\cos x)dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[x\sin y - \frac{y^2}{2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (x\sin\frac{\pi}{2} - \frac{(\pi/2)^2}{2}\cos x - x\sin 0 + \frac{0^2}{2}\cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (x - \frac{\pi^2}{8}\cos x)dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{(\pi/6)^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{72} - \frac{\pi^2}{8}(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\pi^2}{72} - \frac{\pi^2}{16} \\ &= \frac{-7\pi^2}{144}\end{aligned}$$

(d)

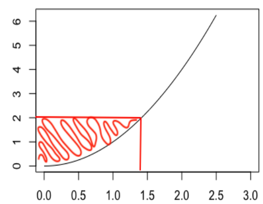
$$\int_1^2 \int_{x^3}^{x} e^{\frac{y}{x}}\, dydx$$

A.9 Dépannage 9 - le 27 novembre 2017

1. Exemple 2.7 des notes de cours : inverser l'ordre d'intégration des intégrales suivantes sans les résoudre.

   a)

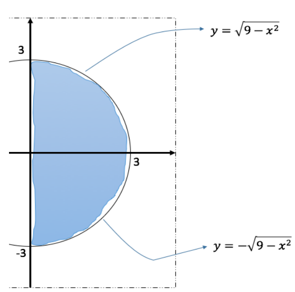
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$



$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} f(x,y)dydx$$

   b)

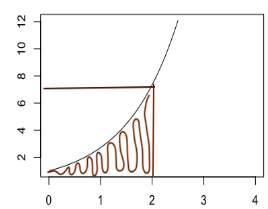
$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dydx$$



$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dydx = \int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dxdy$$

c)

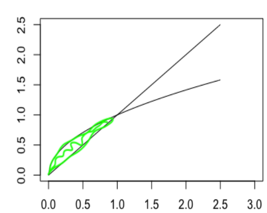
$$\int_1^{e^2} \int_{\ln(y)}^2 f(x,y)dxdy$$



$$\int_1^{e^2} \int_{\ln(y)}^2 f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)dydx$$

2. Exemple 2.9 b) des notes de cours

$$\int_0^1 \int_y^{y^2} x^2 ydxdy$$



$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2} x^2 y dx dy &= \int_0^1 y \int_y^{y^2} x^2 dx dy \\
&= \int_0^1 y \left[\frac{x^3}{3}\right]_y^{y^2} dy \\
&= \int_0^1 y \left(\frac{y^6}{3} - \frac{y^3}{3}\right) dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (y^7 - y^4) dy \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{y^8}{8} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{-1}{40}
\end{aligned}
$$

3. Soit la fonction de densité bivariée suivante

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{64}(x+y), \quad 0 < x < 4, \quad 0 < y < 4$$

   a) Démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

      Si X et Y sont indépendants, alors $E[XY] = E[X] \cdot EY$. Donc,

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^4 \int_0^4 xy f_{X,Y}(x,y) dxdy \\
&= \int_0^4 \int_0^4 xy \frac{1}{64}(x+y) dxdy \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 \int_0^4 x^2 y + xy^2 dxdy \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 \left[\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^4 dy \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 \frac{64y}{3} + 8y^2 dy \\
&= \frac{1}{64} \left[\frac{64y^2}{6} + \frac{8y^3}{3} \right]_0^4 \\
&= \frac{1}{64} \left(\frac{512}{3} + \frac{512}{3} \right) \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^4 \int_0^4 x \cdot f_{X,Y}(x,y) dxdy \\
&= \int_0^4 \int_0^4 x \left(\frac{1}{64}(x+y) \right) dxdy \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 \int_0^4 x^2 + yx dxdy \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{2} \right]_0^4 dy \\
&= \frac{1}{64} \int_0^4 \frac{4^3}{3} + \frac{16y}{2} dy \\
&= \frac{1}{64} \left[\frac{64y}{3} + \frac{8y^2}{2} \right]_0^4 \\
&= \frac{1}{64} \left(\frac{256}{3} + 64 \right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Puisque $f_X(x) = f_Y(y) \forall\ x \in \mathbb{R}$, on peut dire que

$$E[Y] = ... = E[X] = \frac{7}{3}$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[XY] \underbrace{=}_{?} E[X] \cdot E[Y] \\ \frac{16}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \\ \frac{16}{3} \neq \frac{49}{9} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que X et Y ne sont pas indépendants.

Solution proposée au dépannage : Démontrer que le produit des fonctions marginales ne donnent pas la fonction conjointe.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^4 f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dy \\ &= \frac{1}{64}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^4 \\ &= \frac{1}{64}(4x+8) \\ &= \frac{x+2}{16}, \quad 0 < x < 4 \end{aligned}$$

En d'autres mots,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{16}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dx \\ &= ... \\ &= \frac{y+2}{16} \end{aligned}$$

En d'autres mots,

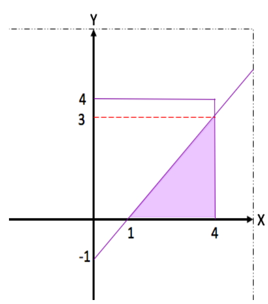
$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{y+2}{16}, & 0 < y < 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Étant donné que $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, on peut alors conclure que X et Y ne sont pas indépendantes (X et Y sont dépendantes).

b) Calculer $Cov(X,Y)$.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \\ &= \frac{16}{3} - \frac{49}{9} \\ &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

c) Calculer $P(X > Y + 1)$.



$$
\begin{aligned}
P(X > Y+1) &= P(Y < X-1)\\
&= \int_1^4 \int_0^{x-1} f_{X,Y}(x,y)dydx\\
&= \frac{1}{64}\int_1^4 \int_0^{x-1} x+ydydx\\
&= \frac{1}{64}\int_1^4 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{(x-1)} dx\\
&= \frac{1}{64}\int_1^4 x(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}dx\\
&= \frac{1}{64}\int_1^4 x^2-x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x}{2}+\frac{1}{2}dx\\
&= \frac{1}{64}\int_1^4 \frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}dx\\
&= \frac{1}{64}\left[\frac{3x^3}{6}-x^2+\frac{1}{2}x\right]_1^4 dx\\
&= \frac{1}{64}\left(\frac{3(4^3-1^3)}{6}-(4^2-1^2)+\frac{1}{2}(4-1)\right)\\
&= \frac{1}{64}(18-0)\\
&= \frac{9}{32}
\end{aligned}
$$

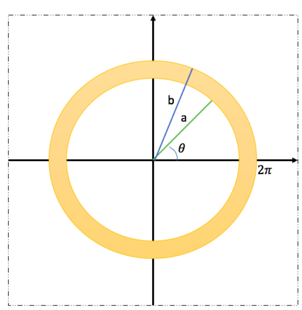
4. Calculer

   i)

$$\iint\limits_R \frac{x^2}{x^2+y^2}d(x,y)$$

   où R est l'anneau bornée par

$$x^2+y^2=a^2, \quad x^2+y^2=b^2, \quad \text{et } 0<a<b$$



$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)d(x,y) &= \int_0^{\pi}\int_a^b \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\cos{-2\theta}+r^2\sin^2\theta}\cdot rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_a^b rcos^2\theta drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} cos^2\theta \int_a^b rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} cos-2\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^b d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} cos-2\theta \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{b^2-a^2}{2}\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta
\end{aligned}$$

Rappel trigonométrique :

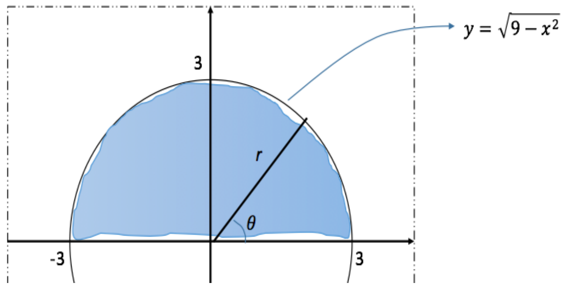
$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta) \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) \\
&= 2\cos^2\theta - 1 \\
&= \frac{\cos(2\theta)+1}{2}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{b^2-a^2}{2}\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta &= \frac{b^2-a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\theta))d\theta \\
&= \frac{b^2-a^2}{4}\left[\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{b^2-a^2}{4}\left(2\pi+\frac{\sin(4\pi)}{2}\right) \\
&= \frac{(b^2-a^2)\pi}{2}
\end{aligned}$$

ii)

$$\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$$



on sait que $r^2 = x^2 + y^2$

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3} f(r,\theta)\times rdrd\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3} e^{-r^2} rdrd\theta$$

substitution : $u = r^2 \quad du = 2rdr \quad \dfrac{du}{2} = rdr$

$r = 3 \Rightarrow u = 9$

$r = 0 \Rightarrow u = 0$

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{9} \frac{e^{-u}}{2} dud\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left[\frac{e^{-u}}{2}\right]_{0}^{9} d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{e^{-9}}{-2} + \frac{e^{0}}{2} d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{e^{-9}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 1 - e^{-9} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1 - e^{-9}\theta\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{(1 - e^{-9})\pi}{2}$$

5. Calculer l'intégrale triple suivante

$$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^2}\int_{0}^{x+y} 2x^2y\ dz\ dy\ dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^2}\int_{0}^{x+y} 2x^2y\ dz\ dy\ dx &= 2\int_{-1}^{2} x^2 \int_{1}^{x^2} y \int_{0}^{x+y} 1\ dz\ dy\ dx \\
&= 2\int_{-1}^{2} x^2 \int_{1}^{x^2} y(x+y)dy\ dx \\
&= 2\int_{-1}^{2} x^2 \left[\frac{y^2x}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{1}^{x^2} dx \\
&= 2\int_{-1}^{2} x^2 \left(\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) dx \\
&= 2\int_{-1}^{2} \frac{x^7}{2}+\frac{x^8}{3}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{3} dx \\
&= 2\left[\frac{x^8}{16}+\frac{x^9}{27}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{9}\right]_{-1}^{2} \\
&= 2\left(\frac{866}{27}-\frac{5}{432}\right) \\
&= \frac{513}{8}
\end{aligned}$$

A.10 Dépannage 10 - le 4 décembre 2017

1. Calculer les limites (si elles existent)

   a)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy} &= \frac{0-2}{3+(0)(0)} \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

   b)

   c)

   d)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{y^2-4y+3}{x^2y(y-3)} &= \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée} \\ &= \lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{\cancel{(y-3)}(y-1)}{x^2y\cancel{(y-3)}} \\ &= \lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{y-1}{x^2z} \\ &= \frac{3-1}{2^2(1)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée}$$

Soit $\boxed{y = mx}$ (à recopier du cahier d'exercice plus tard...)

Méthode Akira : avec les coordonnées polaires.
$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0,\theta\in[0,2\pi)} \frac{r\cos\theta(r^2\sin^2\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} \quad ,\theta\in[0,2\pi) \\ &= \cos\theta\sin^2\theta\left(\lim_{r\to 0} r\right) \\ &= \cos\theta\sin^2\theta(0)\end{aligned}$$

Il faut prouver que ça va toujours donner 0 dans notre domaine borné :

Démonstration.

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \forall\ \theta \in [0, 2\pi) \\ 0 \leq \sin^2\theta \leq 1 \quad \forall\ \theta \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

$$-1 \leq \cos\theta \sin^2\theta \leq 1$$

On ne peut pas avoir des valeurs en dehors de $(-1, 1)$. $\cos\theta \sin^2\theta$ est une fonction bornée $\forall\ \theta[0, 2\pi)$. □

Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

2. Examiner la continuité des fonctions suivantes

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Premièrement, nous constatons que $f(x,y)$ est continue $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$ puisque $x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.

Nous allons analyser le comportement de la fonction au point $(0,0)$.

$\boxed{1}$ $f(0,0)$ existe ? $\Rightarrow$ Oui

$$f(0,0) = 1$$

$\boxed{2}$ Est-ce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{forme indéterminée}$$

Prenons le chemin $\boxed{y = mx}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - (mx)^2}{x^2 + 2(mx)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - m^2x^2}{x^2 + 2m^2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(2 - m^2)}{\cancel{x^2}(1 + 2m^2)} \\
&= \frac{2 - m^2}{1 + 2m^2}
\end{aligned}$$

Puisque ce résultat dépend de m, la valeur de la limite va varier selon la droite empruntée pour approcher l'origine.

Par conséquent, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \nexists$.

La fonction est continue partout, sauf à l'origine. Elle est donc discontinue à $(0, 0)$.

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x,y)}{x-y} & , x \neq y \\ \hfill 1 & , x = y \end{cases}$

3. Calculer les dérivées suivantes pour la fonction suivante :

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right)$$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}$ On peut simplifier la fonction pour faciliter la dérivée :

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right) &= \ln(\sqrt{x^2+y^2}-x) - \ln(\sqrt{x^2+y^2}+x) \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x - 1}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x + 1}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\
&= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cancel{(x-\sqrt{x^2+y^2})}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}-x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cancel{(x+\sqrt{x^2+y^2})}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}+x}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}
$$

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2y)}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2y)}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\
&= \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right] \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x-\sqrt{x^2+y^2}+x}{x^2+y^2-x^2}\right] \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{2x}{y^2}\right] \\
&= \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(2x(x^2+y^2)^{-1/2}) \\
&= \frac{1}{y}\left[2(x^2+y^2)^{-1/2} + 2x((\frac{-1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2}(2x)\right] \\
&= \frac{1}{y}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2}}\right] \\
&= \frac{1}{y}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[1-\frac{x^2}{x^2+y^2}\right] \\
&= \frac{2}{y\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{y^2}{x^2+y^2}\right] \\
&= \frac{2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

4.

a) Autour du point (1,0), la fonction $f(x,y) = x^2(y+1)$ est-elle plus sensible à la variation de x ou de y ?

On trouve la réponse à l'aide des dérivées partielles :

$$\frac{df}{dx} = 2x(y+1) \qquad \rightarrow \left.\frac{df}{dx}\right|_{(1,0)} = 2(1)(0+1) \qquad = 2$$
$$\frac{df}{dy} = x^2 \qquad \rightarrow \left.\frac{df}{dy}\right|_{(1,0)} = 1^2 \qquad = 1$$

Étant donné que la valeur absolue de la dérivée évaluée à (1,0) de x est plus grande, la fonction sera plus sensible à une variation de x.

b) Quel est le ratio de $\frac{dx}{dy}$ rendrait df égal à 0 au point (1,0) ?

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy \\ \left.df\right|_{(1,0)} &= \left.\frac{df}{dx}\right|_{(1,0)} dx + \left.\frac{df}{dy}\right|_{(1,0)} dy \\ 0 &= 2dx + 1dy \\ 2dx + dy &= 0 \\ \frac{dx}{dy} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. Calculer les dérivées partielles en chaîne.

a) $w = \sqrt{u^2+v^2+z^2}$, où $\begin{cases} u = 3e^t \sin(s) \\ v = 3e^t \cos(s) \\ z = 4e^t \end{cases}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{du} &= \frac{1}{2}(u^2+v^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2u \\
&= \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \\
\frac{dw}{dv} &= \frac{1}{2}(u^2+v^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2v \\
&= \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \\
\frac{dw}{dz} &= \frac{1}{2}(u^2+v^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2z \\
&= \frac{z}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= 3e^t \sin(s) \\
\frac{dv}{dt} &= 3e^t \cos(s) \\
\frac{dz}{dt} &= 4e^t
\end{aligned}$$

Si on remet tout ensemble...

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \cdot 3e^t \sin(s) + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \cdot 3e^t \cos(s) \\
&+ \frac{z}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \cdot 4e^t \\
&= \frac{u^2+v^2+z^2}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}} \\
&= \sqrt{u^2+v^2+z^2} \\
&= \sqrt{9e^{2t}\sin^2(s) + 9e^{2t}\cos^2(s) + 16e^{2t}} \\
&= \sqrt{9e^{2t} + 16e^{2t}} \\
&= \sqrt{25e^{2t}} \\
&= 5e^t
\end{aligned}$$

A.11 Dépannage 11 - le 11 décembre 2017

Dépannage sur les équations différentielles. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les informations données :

1. $$(1+y^2)+(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0$$

   C'est un exemple d'équation différentielle séparable. On veut donc envoyer les y et les x du même côté :

$$\begin{aligned}(1+y^2)+(1+x^2)\frac{dy}{dx}&=0\\ (1+x^2)\frac{dy}{dx}&=-(1+y^2)\\ \frac{dy}{1+y^2}&=\frac{-dy}{1+x^2}\\ \int\frac{dy}{1+y^2}&=\int\frac{dx}{1+x^2}\\ \arctan(y)&=-\arctan(x)+C\end{aligned}$$

il nous manque à isoler y :

$$y=\tan\left(C-\arctan(x)\right)$$

   Pour simplifier encore plus la réponse, on peut utiliser le résultat suivant :

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B} \tag{A.1}$$

   Alors,

$$\begin{aligned}y&=\tan\left(C-\arctan(x)\right)\\ &=\frac{\tan C-\tan(\arctan(x))}{1+\tan C\tan\arctan x}\\ &=\frac{K-x}{1+Kx}\quad \text{où } K=\tan C\end{aligned}$$

2. $$y'+\frac{y}{x\ln x}=x^4,\quad x>1$$

   Ici, bonne chance pour séparer les x et les y. Puisque toute l'équation est fonction de x, il s'agît d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $p(x)=\frac{1}{x\ln x}$ et $q(x)=x^4$. Il faut alors multiplier chacun des deux côtés (membres) de l'équation par $e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}$.

$$
\begin{aligned}
e^{\int p(x)dx} &= e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx} \\
&\text{avec } u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx, \\
&= e^{\int \frac{du}{u}} \\
&= e^{\ln|\ln x| + C} \\
&= e^{\ln(\ln x)}{}^{1} \\
&= \ln x
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\ln xy' + \frac{\cancel{\ln x}y}{x\cancel{\ln x}} &= x^4 \ln x \\
\ln xy' + \frac{1}{x}y &= x^4 \ln x \\
\frac{d}{dx}[\ln xy] &= x^4 \ln x \quad \text{dérivée de la règle du produit.} \\
\ln xy &= \int x^4 \ln x \quad \rightarrow \text{intégration par partie} \\
u = \ln x \quad du &= \frac{1}{x}dx \\
dv = x^4 dx \quad v &= \frac{x^5}{5} \\
\ln xy &= \left(\frac{x^5}{5}\right)\ln x - \int \frac{x^4}{5}dx \\
&= \left(\frac{x^5}{5}\right)\ln x - \frac{x^5}{25} + C \\
y &= \frac{x^5 \ln x}{5\ln x} - \frac{x^5}{25\ln x} + \frac{C}{\ln x} \\
&= \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{25\ln x} + \frac{C}{\ln x}
\end{aligned}
$$

3.
$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3y^3}, \quad x > 0 \quad \text{tel que } y(1) = 2$$

— Est-ce que c'est séparable ? Non

— Est-ce que c'est linéaire ? non.

C'est une équation différentielle de Bernouilli, où $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x^3}$ et $n = -3$. Il faut donc multiplier chaque membre de l'égalité par $(1 - n)y^{-n} = 4y^3$.

Ainsi,

$$4y^3y' + \frac{1}{x}\left(4y^4\right) = \frac{4}{x^3}$$
$$\frac{d}{dx}\left[y^4\right] + \frac{4}{x}y^4 = \frac{4}{x^3}$$

Soit $z = y^4$. Alors,

$$z' + \frac{4}{x}z = \frac{4}{x^3}$$

On a donc une équation différentielle linéaire de premier ordre où $p(x) = \frac{4}{x}$ et $q(x) = frac4x^3$. Il faut donc multiplier les deux membres de l'égalité par $e^{\int p(x)dx}$.

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{4}{x}dx} &= e^{4\ln|x|} \\ &= e^{\ln x^4} \\ &= x^4 \end{aligned}$$

Si on revient à l'équation :

$$\begin{aligned} \underbrace{x^4z' + 4x^3z}_{\text{dérivée du produit}} &= 4x \\ \frac{d}{dx}(x^4z) &= 4x \\ x^4z &= \int 4xdx \\ x^4z &= 2x^2 + C \\ z &= \frac{2x^2 + C}{x^4} \end{aligned}$$

On a trouvé la réponse générale, mais on est capable (sachant que $y(1) = 2$) de trouver C. De plus, il est préférable de remettre z en terme de y :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{2x^2 + C}{x^4} \\
y^4 &= \frac{2x^2 + C}{x^4} \\
y &= \pm\sqrt[4]{\frac{2x^2 + C}{x^4}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{2x^2 + C}{x^4}} \quad \text{on peut enlever le } \pm\text{, car } y(1) > 0
\end{aligned}$$

Étant donné que $y(1) = 2$,

$$\begin{aligned}
2 &= \sqrt[4]{\frac{2(1)^2 + C}{(1)^4}} \\
&= \sqrt[4]{4 + C} \\
2^4 &= 4 + C \\
C &= 16 - 2 \\
C &= 14
\end{aligned}$$

La solution finale est donc

$$y = \frac{\sqrt[4]{2x^2 + 14}}{x}$$

4.

$$(5x^3 - y^3)dx + 3xy^2dy = 0, \quad x > 0$$

Premièrement, il faut constater que $M(x, y) = 5x^3 - y^3$ et $N(x, y) = 3xy^2$ sont toutes deux homogènes de degré 3.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
M(ax, ay) &= 5(ax)^3 - (ay)^3 \\
&= 5a^3x^3 - a^3y^3 \\
&= a^3(5x^3 - y^3) \\
&= a^3M(x, y)
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
N(ax, ay) &= 3(ax)(ay)^2 \\
&= 3(ax)(a^2y^2) \\
&= 3a^3xy^2 \\
&= a^3(3xy^2) \\
&= a^3N(x, y)
\end{aligned}
$$

$\square$

Il faut alors diviser les deux membres de l'égalité par x^3.

$$
\begin{aligned}
\left(5 - \frac{y^3}{x^3}\right) dx + 3\frac{y^2}{x^2} dy &= 0 \\
\left(5 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right) dx + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 dy &= 0
\end{aligned}
$$

Soit $u = \dfrac{y}{x}$. Alors $y = ux \to y' = u'x + u$

Donc,

$$
\begin{aligned}
(5 - u^3) + 3u^2y' &= 0 \\
(5 - u^3) + 3u^2(u'x + u) &= 0 \\
(5 - u^3) + 3u^2(u'x + u) &= u^3 - 5 \\
u'x + u &= \frac{u^3 - 5}{3u^2} \\
u'x &= \frac{u^3 - 5}{3u^2} - u \\
&= \frac{u^3 - 5 - 3u^3}{3u^2} \\
&= \frac{-2u^3 - 5}{3u^2} \\
\frac{du}{dx}x &= \frac{-2u^3 - 5}{3u^2} \\
\frac{3u^2}{-2u^3 - 5} du &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{3u^2}{-2u^3 - 5} du &= \int -\frac{dx}{x} \quad \to \text{changement variable} \\
z = 2u^3 + 5 \quad dz &= 6u^2 du \\
\int \frac{3dz/6}{z} &= -\ln|x| + C
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln|z| &= -\ln|z| + C \\
\frac{1}{2}\ln|2u^3+5| &= |\ln x + C \quad \text{(puisque } x > 0\text{)} \\
\ln|2u^3+5|^{1/2} &= -\ln x + C \\
|2u^3+5|^{1/2} &= e^{-\ln x + C} \\
&= \frac{1}{x}e^C \\
&= \frac{1}{x}A, \quad A = e^c (A > 0) \\
&= \frac{A}{x} \\
&= \frac{A^2}{x^2} \\
&= \frac{B}{x^2}, \quad B = A^2 (B > 0) \\
&= \pm\frac{B}{x^2} \\
2u^3+5 &= \frac{K}{x^2} \qquad \text{où } K = \pm B (K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \\
u^3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{K}{x^2} - 5\right] \\
\left(\frac{y}{x}\right)^3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{K}{x^2} - 5\right] \\
y^3 &= \frac{x^3}{2}(\frac{K}{x^2} - 5) \\
&= \frac{Kx}{2} - \frac{5x^3}{2} \\
&= Dx - \frac{5x^3}{2}, \quad \text{où } D = \frac{K}{2}(D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \\
y &= \sqrt[3]{Dx - \frac{5x^3}{2}}
\end{aligned}$$

5.

$$x''(t) + 9x(t) = 5\sin(t) \text{ tel que } x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

Ce type de problème se résout bien si on suit toujours la même démarche :

$\boxed{1}$ Résoudre $x'' + 9x = 0$:

$$
\begin{aligned}
x'' + 9x &= 0 \\
m^2 + 9 &= 0 \quad \rightarrow \text{équation caractéristique} \\
m^2 &= -9 \\
m &= \sqrt{-9} \\
m &= 3\sqrt{-1} \\
&= \pm 3i \\
m_1 &= 3i \\
m_2 &= -3i
\end{aligned}
$$

On est en présence du 3e cas du théorème 3.11 des notes de cours :

$$
\begin{aligned}
x_{\text{générale homogène}} &= c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad \text{avec } \alpha = 0, \beta = 3 \\
&= c_1 e^{0t}\cos(3t) + c_2 e^{0t}\sin(3t)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ Trouver une solution particulière de l'équation différentielle non-homogène.

On trouve les dérivées de l'équation pour débuter :

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= a\sin t + b\cos t \\
\tilde{x}'(t) &= a\cos t - b\sin t \\
\tilde{x}''(t) &= -a\sin t + b\cos t
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
-a\sin t - b\cos t + 9(a\cos t + b\sin t) &= 5\sin t \\
8a\sin t + 8b\cos t &= 5\sin t
\end{aligned}
$$

On peut décomposer les sin et les cos...

$$
\begin{aligned}
8a &= 5 \quad & 8b &= 0 \\
a &= \frac{5}{8} \quad & b &= 0
\end{aligned}
$$

La solution particulière est donc :

$$
\tilde{x}(t) = \frac{5}{8}\sin t
$$

Ainsi, la solution générale est de la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{générale homogène}} + tildex(t) \\ &= c_1 e^{0t}\cos(3t) + c_2 e^{0t}\sin(3t) + \frac{5}{8}\sin t \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Trouver les constantes avec les informations données On sait que $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3c_1\sin(3t) + 3c_2\cos(3t) + \frac{5}{8}\cos t \\ x'(0) &= 3c_2 + \frac{5}{8} \\ 0 &= 3c_2 + \frac{5}{8} \\ c_2 &= \frac{-5}{24} \end{aligned}$$

Alors,

$$x(t) = \cos(3t) - \frac{5}{24}\sin(3t) + \frac{5}{8}\sin t$$

6.

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 12x \text{ tel que } y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$\boxed{1}$ Trouver la solution générale de l'équation homogène
Équation caractéristique :

$$\begin{aligned} m^2 + m - 6 &= 0 \\ (m-2)(m+3) &= 0 \\ m_1 &= 2 \\ m_3 &= -3 \end{aligned}$$

Alors,

$$y_{homo}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$\boxed{2}$ Trouver une solution particulière ($\tilde{y}$) de l'équation. Dans notre situation, au lieu du 0 c'est $12x$. C'est donc représentée par une polynomiale de degré 1. On va donc déterminer $\tilde{y}$ à partir de notre solution générale (ou du moins ce qu'on connaît jusqu'à maintenant !) :

$$\tilde{y}''(x) + \tilde{y}'(x) - 6\tilde{y}(x) = 12x$$

On commence par trouver nos dérivées :

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(x) &= ax + b \\
\tilde{y}'(x) &= a \\
\tilde{y}''(x) &= 0
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
0 + a - 6(ax + b) &= 12x \\
-6a &= 12 \\
a &= -2 \\
a - 6b &= 0 \\
b &= -\frac{2}{6} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Or,

$$\tilde{y}(x) = -2x - \frac{1}{3}$$

$\boxed{3}$ Trouver les constantes c_k en utilisant les conditions initiales.

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_{homo}(x)\tilde{y}(x) \\
&= c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + -2x - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$,

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 e^{2(0)} + c_2 e^{-3(0)} + -2(0) - \frac{1}{3} \\
1 &= c_1 + c_2 - \frac{1}{3} \\
c_2 &= \frac{4}{3} - c_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x} - 2 \\
y'(0) &= 2c_1 e^{2(0)} - 3c_2 e^{-3(0)} - 2 \\
2 &= 2c_1 - 3\left(\frac{4}{3} - c_1\right) - 2 \\
8 &= 2c_1 + 3c_1 \\
c_1 &= \frac{8}{5} \\
c_2 &= \frac{4}{3} - \frac{8}{5} \\
&= -\frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Alors, la solution finale est

$$y(x) = \frac{8}{5}e^{2x} - \frac{4}{15}e^{-3x} + -2x - \frac{1}{3}$$

Annexe B

Raccourcis mathématiques

B.1 Décomposition d'une fraction

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Comment on arrive à ce résultat ?

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1} \Leftrightarrow$$

B.2 Intégration par partie en tabulation

Rappel de la formule d'intégration par partie :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Lorsqu'on a plusieurs intégrales par parties à faire successives, il peut être utile de connaître l'intégration par partie en tabulation.

B.3 Triangle de Pascal

Lorsqu'on a la forme $(x+y)^a$, il peut devenir compliqué de développer le polynôme...

Avec le triangle de Pascal (ce n'est pas la seule application), on peut développer rapidement le polynôme :

Exemples

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2\\
&= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}
$$

La représentation graphique du triangle de Pascal nous permet de savoir les coefficients du polynôme éclatés.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Mathématiquement, le théorème du binôme nous donne ceci :

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \tag{B.1}$$

Exemples avec le théorème...

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} a^{3-i} b^i\\
&= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3\\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$