1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.
Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. Cependant, on peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peu couper des patates. Les produits dérivés sont en fait des **outils de gestion du risque** qui deviennent utile lorsque le risque du sous-jacent augmente.

Origine

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devise de chaque pays.

Exemples de produits dérivés

- Contrat à terme standardisé (**futures**) ;
- Contrat à terme de gré-à-gré (**forwards**) ;
  Gré : acceptation, ou consentement ;
- Option d'achat (**call**) ;
- Option de vente (**put**) ;
- Les **swaps** ;

Exemples de sous-jacent aux produits dérivés

- Action ;
- Indice boursier ;
- Devise ;
- Climat ;
- Prix d'une marchandise ;

Utilité

- Gestion des risques (**hedging**) ;
  Pour exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole ;
  On dit qu'elle « *hedge* » contre le prix du pétrole.
- **Spéculation** ;
  Pour exemple, un investisseur croît que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat ;
- **Réduction** des **frais** de **transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger ;
- **Arbitrage** réglementaire : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges ;
  Pour exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote ;

Parties prenantes

End-users : Participants au contrat du produit dérivé ;

Market-makers : Intermédiaire visant à faire un profit de la transaction entre end-users

Economic observers : Observateurs du marché analysant et régulant les activités des market-makers et end-users ;

Transactions

Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent ;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** » ;
   - C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc. ;
   - Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire surnommé le « **clearing house** » ;
   - Elle met en relation les acheteurs et vendeurs *(1ère étape)*, et tient compte des obligations et paiements ;
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* » ;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Transaction gré-à-gré

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse.

Raisons pour ce type de transaction

- Ce sont souvent de grosses transaction. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transaction et plusieurs types d'actifs.

Vente à découvert

Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre ;
2. Vente du titre ;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre ;
4. Remboursement du titre

Raisons pour une vente à découvert

- Spéculation ;
- Financement ;
- Couverture.

Type de risques

Risque de défaut Risque de ne pas être payé. Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité.

Risque de rareté Si il est difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent (pas beaucoup de transactions signifie beaucoup de négociations et de variation dans les prix)

Mesures de taille et d'activité d'un marché

Volume total des transactions : Nombre total de titres transigés pendant une période ;

Valeur marchande : nombre d'actions $\times$ prix par action ($) ;

Valeur notionnelle : Valeur de l'actif sous-jacent du produit dérivé ;

Position ouverte : Nombre de contrats encore en vigueur du produit dérivé ;

Rôle des marchés financiers Partage du risque et diversification des risques.

Bid-Ask Spread

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**). Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$.

Prix

Ask : Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent ;

Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé ;

Bid : Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent

Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible ;

Terminologie des marchés

Ordre au marché (market order) : On achète et vend selon les prix Bid Ask actuels.

Ordre limite (limit order) : On achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$.

Ordre de vente stop (stop loss) : On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si $Bid \leq k$.

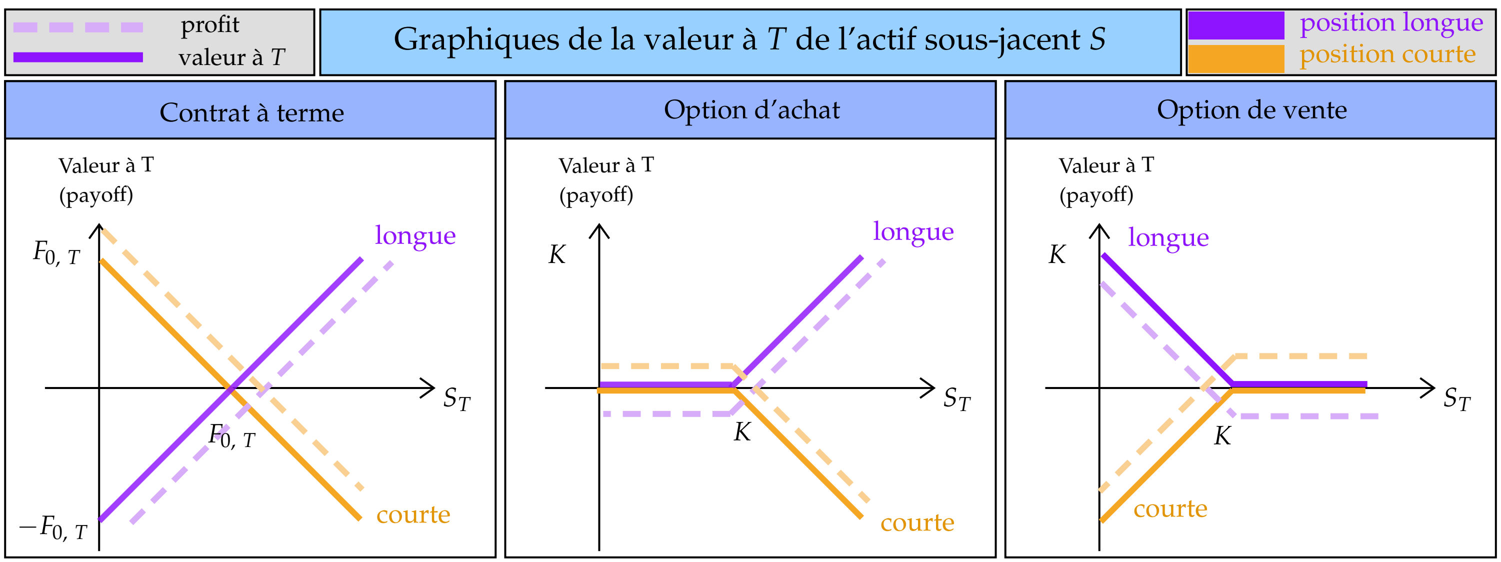
Longue On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent.

Courte On se considère en position longue sur le sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

Degré de parité	*Moneyness*	Option d'achat	Option de vente
au cours	At-the-money	$S_T = K$	$S_T = K$
dans le cours	In-the-money	$S_T > K$	$S_T < K$
hors du cours	Out-of-the-money	$S_T < K$	$S_T > K$

Autre	Contrat	Position	Rôle	Stratégie	Valeur à T (payoff)
Contrat à terme		Longue	obligation d'acheter	garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent	$S_T - F_{0,T}$
		Courte	obligation de vendre	garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent	$-(S_T - F_{0,T})$
Option	d'achat (call)	Longue	droit d'acheter	achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$\max\{0, S_T - K\}$
		Courte	obligation de vendre	vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$-\max\{0, S_T - K\}$
	de vente (put)	Longue	droit de vendre	achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$\max\{0, K - S_T\}$
		Courte	obligation d'acheter	vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$-\max\{0, K - S_T\}$

Graphiques de la valeur à T de l'actif sous-jacent S



2 Introduction aux Forwards et aux options

Terminologie

Premium Flux financiers à $t = 0$;

Si positif, il s'agît d'un **coût** ;

Si négatif, il s'agît d'une **compensation**.

Valeur à l'échéance T **(payoff) :** Les flux de trésorie au temps $t = T$;

Profit[a]

$$= \begin{cases} \text{Payoff} - VA(\text{Premium}) & \text{si position longue} \\ \text{Payoff} + VA(\text{Premium}) & \text{si position courte} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow VA(\text{flux de trésorie})$$

r_f **:** taux sans risque.

Peut être exprimé comme une force d'intérêt r continue ou comme un taux d'intérêt r_f.

a. **V**aleure **A**ccumulée au taux sans risque.

Contrat à terme

Contrat selon lequel :

- *deux* partis s'**engagent** d'**échanger**—un à *acheter* et l'autre à *vendre* ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent S ;
- à un *certain* **prix**—prix à terme $F_{0,T}$;
- à un *certain* **endroit** à une *certaine* **date**—date d'échéance, T ;

L'engagement est au départ à $t = 0$.

Notation de prix

S_t : **Prix du sous-jacent** à t *(spot price)* ;

S_0 : **Prix au comptant** ;

- Le prix au comptant représente le paiement pour la livraison immédiate à $t = 0$.

$F_{0,T}$: est le **prix à terme** ;

- $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$

$F_{0,0}$: est nul ;

- La notation $F_{0,T}$ vient de « future » ou « forward ».

Exemple de bateau

- Je veux acheter un *(quantité)* bateau *(bien)* mais ça m'est inconvénient de l'avoir maintenant ;
- En lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente *(engagement)* pour l'acheter ;
- La seule différence entre l'acheter aujourd'hui *(au prix au comptant* S_0*)* et l'acheter lorsque la neige fond *(au prix à terme* $F_{0,T}$*)* est l'accumulation d'intérêt ;
- Puisqu'on suppose tout les deux d'êtres fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque (r) et le prix payable rendu à l'été (T) sera $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$;

Exercice (levée)

Décision d'*exercer* l'option d'achat ou de vente.

Notation

K : **Prix d'exercice** (*strike price*) ;

Types d'exercices

Européen : **Au moment** d'expiration de l'option T ;

Américain : **N'importe quand** (any moment) d'ici T ;

Bermudien : **À quelques périodes** (bounded periods) d'ici T ;

En réalité, la *majorité sont américain* et donc nous effectuons uniquement des calculs avec ce type.

Option d'achat

Contrat qui :

- *permet* **(optionnel)** à son *détenteur* d'**acheter** ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent ;
- à un *certain* **prix**—prix d'exercice K ;
- à un *certain* **endroit** à, ou d'ici, une *certaine* **date**—date d'échéance, T ;

Option de vente

Contrat qui *permet* à son *détenteur* de **vendre** au lieu d'acheter.

Quelques définitions

$F_{0,T}$ Prix *forward* du sous-jacent au temps T, qu'on définit comme
$$F_{0,T} = S_0(1+r_f)^T$$

$F^P_{0,T}$ Prix d'un forward prépayé, i.e. on débourse $F^P_{0,T}$ à $t = 0$ et on reçoit le sous-jacent à $t = T$, alors
$$F^P_{0,T} = F_{0,T}(1+r_f)^{-T}$$

Achat ferme et emprunt On utilise parfois la lettre S pour désigner dans stratégie l'action de faire un achat ferme (i.e. acheter et se faire livrer le sous-jacent à $t = 0$) et B pour désigner un dépôt/emprunt (qu'on exprime comme une obligation zéro-coupon).

$Call(K,T)$

Contrat qui *permet* au détenteur de se procurer S au prix K à l'échéance T. **position longue dans le sous-jacent**
$$Premium = C(K,T)$$

$Put(K,T)$

Contrat qui *permet* au détenteur de vendre S au prix K à l'échéance T. **position courte dans le sous-jacent**
$$Premium = P(K,T)$$

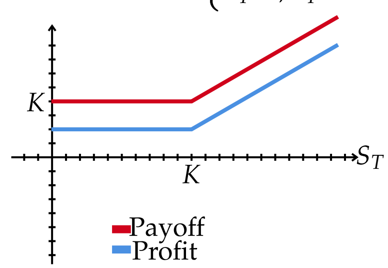
Forward synthétique

On peut créer un Forward synthétique 2 de façon (en combinant d'autres transactions) :
$$Forward = Stock - Bond$$
$$Forward = Call(K,T) - Put(K,T)$$
Ces deux égalités définissent la *Put-Call Parity* vu un peu plus loin.

3 Stratégie de couverture

Floor

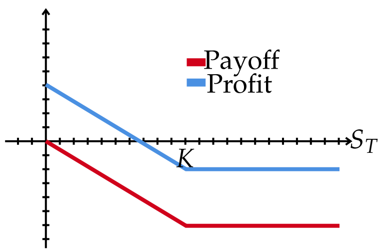
On achète S en se protégant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)
$$Floor = Stock + Put(K,T)$$
$$Premium = S_0 + P(K,T) > 0$$
$$Payoff = \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases}$$



Cap

On vend à découvert S en se protégant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter !). **Position courte**.

$$Cap = Call(K,T) - Stock$$
$$Premium = C(K,T) - S_0 < 0$$
$$Payoff \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases}$$



Bull Spread

Combinaison de 2 Call (ou 2 Put) pour spéculer sur un marché haussier. Avec $K_1 < K_2$, on a

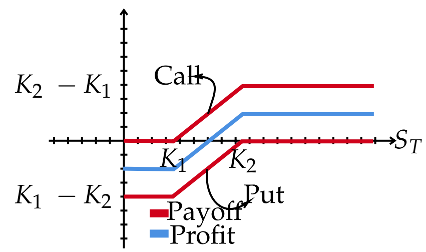
Avec option d'achat

$$BullSpread(Call) = Call(K_1,T) - Call(K_2,T)$$

$$Premium = C(K_1,T) - Call(K_2,T) > 0$$
$$Payoff = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & , k_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , S_T > K_2 \end{cases}$$

Avec option de vente

$$BullSpread(Put) = Put(K_1,T) - Put(K_2,T)$$
$$Premium = P(K_1,T) - P(K_2,T) < 0$$
$$Payoff = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



Bear Spread

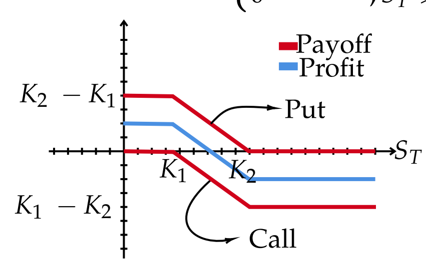
Combinaison de 2 Call ou 2 Put pour spéculer sur un marché baissier.

Avec option d'achat

$$\begin{aligned} Bear(Call) &= -Bull(Call) \\ &= Call(K_2,T) - Call(K_1,T) \\ Premium &= C(K_2,T) - C(K_1,T) < 0 \end{aligned}$$
$$Profit = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \\ K_1 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ -(K_2 - K_1) & , S_T > K_2 \end{cases}$$

Avec option de vente

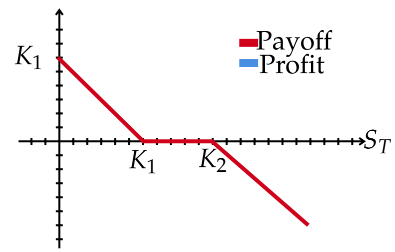
$$\begin{aligned} Bear(Put) &= -Bull(Put) \\ &= Put(K_2,T) - Put(K_1,T) \\ Premium &= P(K_2,T) - P(K_1,T) > 0 \end{aligned}$$
$$Profit = \begin{cases} K_2 - K_1 & , S_T \leq K_1 \\ K_2 - S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



Ratio Spread

Cette stratégie est une combinaison un peu sur mesure (on ne peut pas nécessairement dire si elle est longue ou courte). On achète n options d'achat à un prix d'exercice K_1 et on en vend m à un prix d'exercice K_2.[1]

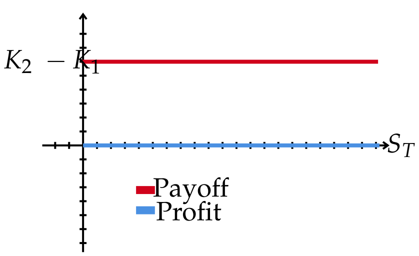
$$\begin{aligned} RatioSpread &= nCall(K_1, T) - mCall(K_2, T) \\ Premium &= nC(K_1, T) - mC(K_2, T) \\ Payoff &= ... \end{aligned}$$



Box Spread

Cette stratégie réplique l'achat d'une obligation zéro-coupon, en impliquant 2 option d'achat et 2 options de vente.

$$\begin{aligned} BoxSpread &= Bull(Call) + Bear(Put) \\ &= Call(K_1, T) - Call(K_2, T) \\ &+ Put(K_2, T) - Put(K_1, T) \\ Premium &= C(K_1, T) - C(K_2, T) \\ &+ P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0 \\ Payoff &= K_2 - K_1 \text{ }, \forall S_T \end{aligned}$$



Collar

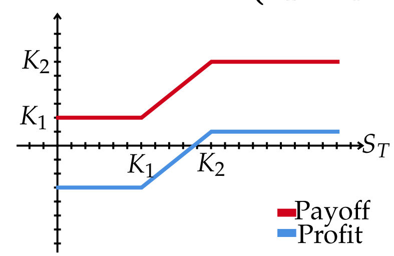
La prime initiale du Collar peut être soit positive ou négative (dépendant du strike price).

$$\begin{aligned} Collar &= Put(K_1, T) - Call(K_2, T) \\ Premium &= P(K_1, T) - C(K_2, T) \\ Payoff &= \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Stock Covered by Collar

- On effectue la même stratégie qu'un Collar, en ayant initialement le sous-jacent S. **Position longue dans le sous-jacent**.
- Cette stratégie reproduit les flux monétaires d'un Bull Spread, alors

$$\begin{aligned} BullSpread &= Collar + Stock \\ &= Put(K_1, T) - Call(K_2, T) + Stock \\ Premium &= P(K_1, T) - C(K_2, T) + S_0 > 0 \\ Payoff &= \begin{cases} K_1 & , S_T \leq K_1 \\ S_T & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 & , S_T > K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

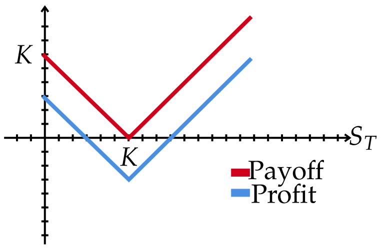


Straddle

Stratégie pour spéculer sur la volatilité du sous-jacent S autour du point K.

$$\begin{aligned} Straddle &= Put(K, T) + Call(K, T) \\ Premium &= P(K, T) + C(K, T) > 0 \\ Payoff &= \begin{cases} K - S_T & , S_T \leq K \\ S_T - K & , S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$

1. On peut faire cette stratégie avec des options de vente aussi.



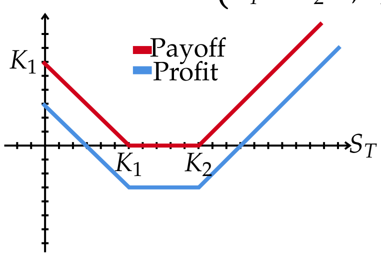
Strangle

Même genre de stratégie que le strangle, on spécule sur la volatilité du sous-jacent à l'extérieur de l'intervalle $[K_1, K_2]$:

$$Strangle = Put(K_1, T) + Call(K_2, T)$$

$$Premium = P(K_1, T) + C(K_2, T) > 0$$

$$Payoff = \begin{cases} K_1 - S_T & , S_T \leq K_1 \\ 0 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2 & , S_T > K_2 \end{cases}$$



Butterfly Spread (BFS)

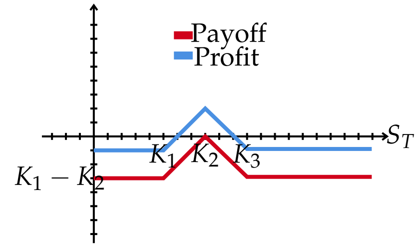
On combine un Straddle(K_2) et un Strangle(K_1, K_3) pour spéculer sur la non-volatilité du sous-jacent autour de K_2, mais en limitant nos pertes à $K_1 - K_2$:

$$\begin{aligned} Butterfly &= Strangle - Straddle(K_2) \\ &= Put(K_1, T) - Put(K_2, T) \\ &\quad - Call(K_2, T) + Call(K_3, T) \\ Premium &= P(K_1, T) - P(K_2, T) \\ &\quad - C(K_2, T) + C(K_3, T) < 0 \end{aligned}$$

$$Payoff = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , K_2 < S_T \leq K_3 \\ K_2 - K_3 & , S_T > K_3 \end{cases}$$

Note De façon générale (plusieurs combinaisons sont possibles), on a

$$BFS = Bull(K_1, K_2) + Bear(K_2, K_3)$$



Asymetric Butterfly Spread

- Comme le Ratio Spread, il est possible de faire une stratégie sur mesure en achetant n Bull Spread et en achetant m Bear Spread en respectant les 3 prix d'exercices $K_1 < K_2 < K_3$.
- Si on désire avoir un BFS qui a un profit nul pour $S_T < K_1$ et $S_T > K_3$, alors on trouve n et m tel que
$$\frac{n}{m} = \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1}$$

5 Forwards et Futures

Forward avec dividendes

Définition de base

$$C(K, T) - P(K, T) = S_0 - K(1 + r_f)^T$$

Action qui verse des dividendes

$$\begin{aligned} C(K, T) - P(K, T) &= S - \mathrm{PV}(Div) - K(1 + r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-rT} \end{aligned}$$

où δ est un taux de versement des dividendes continu.

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F_{0,T}^P (1 + r_f)^T \\ &= (S_0 - \mathrm{PV}(div))(1 + r_f)^T \\ &= S_0 - \sum_{i=1}^{T} d_i (1 + r_f)^{T-i} \\ &= S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

Forward synthétique avec dividendes On suppose le réinvestissement des dividendes.

$$\text{Forward}_{\text{avec div.}} = e^{-\delta T} Stock - (e^{-\delta T} \cdot S_0) Bond$$
$$Premium = e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 = 0$$
$$Payoff = S_T - S_0 e^{(r-\delta)T}$$

Cash-and-carry Stratégie qui consiste à créer un Forward synthétique et vendre un Forward (profit nul).

Calcul avec prime de risque et nuance

- Certains sous-jacent ont une composante de risque non-négligeable. Or, on ne peut pas dire que $F_{0,T} = \mathrm{E}[S_T]$. Toutefois,
  $F_{0,T} = \mathrm{E}[S_T] e^{-(\alpha-r)T}$

où α est la prime de risque qu'on enlève pour obtenir le prix du Forward, tel que

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha - r)}_{\text{Prime de risque}}$$

Forward de devise

Put-Call parity avec les devises

DD Devise locale

DÉ Device étrangère

x_0 Taux de change $\frac{DD}{D}$ actuel ($t = 0$)

r_D Taux sans risque <u>local</u>

r Taux sans risque étranger

Le prix Forward prépayé pour une unité de DÉ à $t = 0$ (payé en DD) est

$$F^P_{0,T} = x_0 (1+r)^{-T}$$

Et le prix Forward (à $t = T$) pour une unité de DÉ est

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F^P_{0,T} (1+r_D)^T \\ &= x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r} \right)^T \\ &= x_0 e^{(r_D - r)T} \end{aligned}$$

2. Cette marge est souvent exprimée en % de la marge initiale.

Forward synthétique de devise

- Emprunt de $x_0(1+r)^{-T}$ DD au taux r_D
- Convertir les DD en DÉ
- Dépôt de $(1+r)^{-T}$ DÉ (au taux r) de 0 à T.

Le payoff sera $x_t - x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r}\right)^T$.

Future

Essentiellement la même chose qu'un Forward, à quelques différences près :

- Surveillé et contrôlé par des instances officielles (aucun *Over-the-counter*)
- S'applique sur certains types d'actifs définis seulement ;
- liquise et efficient
- nécessite un dépôt initial des 2 parties (le risque de défaut est minimisé)
- Transaction continues (règlement avec l'intermédiaire de façon quotidienne)
- Variation extrêmes dans les prix de Future sont limités (possibilité du *circuit Breaker*)

Fonctionnement

1. L'intermédaire demande un dépôt initial (*initial margin*), **souvent un % de la valeur notionnelle**.
2. Ce dépôt est accumulé à un taux de rendement i fixé par l'intermédiaire.
3. À chaque période de règlement, on calcule la marge en fonction du prix du Future :
   $\text{Marge}_T = \text{Marge}_t \cdot (1+i)^{T-t} + \text{Variation totale}_{[t,T]}$
4. Si $\text{Marge}_t < \text{Maintenance margin}$[2], on doit **ajouter des fonds à la marge pour revenir à la marge initiale.** avec $t < T$

9 Put-Call Parity

$$Call - Put = Stock - Bond$$

Put-Call Parity avec devises

$Call(x_0, K, T)$ **:** Option d'achat qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

$Put(x_0, K, T)$ **:** Option de vente qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

Alors, on peut réécrire l'équation Put-Call Parity :

$$Call(x_0, K, T) - Put(x_0, K, T) = x_0(1+r)^{-T} - K(1+r_D)^{-T}$$

Parité généralisée et option d'échange

$Call(S_t, Q_t, T-t)$ **:** Option d'achat qui permet d'acheter le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps $t = T$.

$Put(S_t, Q_t, T-t)$ **:** Option de vente qui permet de vendre le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps $t = T$.

On peut généraliser l'équation Put-Call Parity :

$$C(S_t, Q_t, T-t) - P(S_t, Q_t, T-t) = F^P_{t,T}(S) - F^P_{t,T}(Q)$$

Options sur devise

$$\begin{aligned} Call_{DD}(x_0, K, T) &= K \cdot Put_{DD}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \\ &= K \cdot x_0 \cdot Put_D\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right) \end{aligned}$$

Comparaison de différentes options

Option américaine vs européenne

$$C_{amer}(K,T) \geq C_{euro}(K,T)$$
$$P_{amer}(K,T) \geq P_{euro}(K,T)$$

Option d'achat américaine Bien qu'on puisse exercer l'option américaine au moment qu'on veut, il peut être optimal d'exercer avant l'échéance seulement si

$$PV(div) > K\left(1 - (1+r_f)^{-(T-t)}\right)$$

ou si

$$PV(div) > P(K, T-t) + K\left(1 - (1+r_f)^{-(T-t)}\right)$$

Option de vente américaine Le moment optimal pour exercer le Put serait tout juste **après la date ex-dividende**.

Date d'expiration Pour $T_1 < T_2$,

$$C(K, T_1) \leq C(K, T_2)$$
$$P(K, T_1) \leq P(K, T_2)$$

Prix d'exercice Les différentes conditions énumérées ci-bas doivent être respectées :

$C(K,T) \geq S_0 - K$	$P(K,T) \geq K - S_0$
$C(K_1,T) > C(K_2,T)$	$P(K_1,T) < P(K_2,T)$
$C(K_1,T) - C(K_2,T) \leq K_2 - K_1$	$P(K_2,T) - P(K_1,T) \leq K_2 - K_1$
$\frac{C(K_1,T)-C(K_2,T)}{K_2-K_1} \geq \frac{C(K_2,T)-C(K_3,T)}{K_3-K_2}$	$\frac{P(K_2,T)-P(K_1,T)}{K_2-K_1} \geq \frac{P(K_3,T)-P(K_2,T)}{K_3-K_2}$

Si le prix d'exercice est *Constant en valeur actualisée*[3], alors, avec $t < T$

$$C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$$
$$P(K_t, t) \leq P(K_T, T)$$

10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Probabilité neutre au risque

- $U = uS$ est la valeur supérieure que peut prendre le sous-jacent S
- $D = dS$ est la valeur inférieure que peut prendre le sous-jacent S
- p est la probabilité (Bernouilli) que le sous-jacent prenne la valeur U.
- C_u, C_d, P_u et P_d sont les payoff d'un call (ou put) selon la valeur du sous-jacent après h périodes.
- r et δ sont respectivement la force d'intérêt sans risque et le taux de dividende continu.

Alors, la probabilité *neutre au risque* est

$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

3. i.e. $K_t = K(1+r_f)^T$.

Portefeuille réplicatif d'une option

On peut reproduire une option (Call ou Put) avec la stratégie suivante :

$$C = \Delta S + B$$

où B et ΔS changent de signe selon si c'est un Call ou un Put. On peut obtenir la prime initiale (*Premium*) et les composantes du portefeuille réplicatif avec

$$\Delta = e^{-\delta h}\left(\frac{C_u - C_d}{U - D}\right) = e^{-\delta h}\left(\frac{C_u - C_d}{S(u-d)}\right)$$

$$B = e^{-rh}\left(\frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D}\right) = e^{-rh}\left(\frac{uC_d - dC_u}{u-d}\right)$$

$$\text{Premium} = \Delta S_0 + B$$