

1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.

Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. Cependant, on peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peut couper des patates. Les produits dérivés sont en fait des **outils de gestion du risque** qui deviennent utiles lorsque le risque du sous-jacent augmente.

Origine

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devises de chaque pays.

Exemples de produits dérivés

- > Contrat à terme standardisé (**futures**);
- > Contrat à terme de gré-à-gré (**forwards**);
Gré : acceptation, ou consentement;
- > Option d'achat (**call**);
- > Option de vente (**put**);
- > Les **swaps**;

Exemples de sous-jacent aux produits dérivés

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| > Action; | > Climat; |
| > Indice boursier; | |
| > Devise; | > Prix d'une marchandise; |

Utilité

- > **Gestion des risques (hedging)**;
Pour exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole;
On dit qu'elle « *hedge* » contre le prix du pétrole.
- > **Spéculation**;
Pour exemple, un investisseur croit que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat;
- > **Réduction des frais de transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger;
- > **Arbitrage réglementaire** : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges;
Pour exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote;

Parties prenantes

- End-users** : Participants au contrat du produit dérivé;
- Market-makers** : Intermédiaire visant à faire un profit de la transaction entre end-users
- Economic observers** : Observateurs du marché analysant et régulant les activités des market-makers et end-users;

Transactions

Transaction gré-à-gré

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse.

Raisons pour ce type de transaction

- > Ce sont souvent de grosses transactions. On peut donc économiser sur les frais de transaction.
- > On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs micro-transactions et plusieurs types d'actifs.

Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent ;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** » ;
 - › C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc. ;
 - › Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire surnommé le « **clearing house** » ;
 - › Elle met en relation les acheteurs et vendeurs (1^{ère} étape), et tient compte des obligations et paiements ;
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* » ;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Exemple de vente à découvert

- › Mon ami James possède 5 actions d'Apple ayant chacune une valeur de 5\$;
- › Je lui emprunte ses 5 actions et lui promets d'y retourner ;
- › Immédiatement, je revends ses actions sur le marché des actions ;
 - Je ne suis pas inquiet, je suis certain que le prix va baisser ;
 - Ce faisant, je suis certain que je serai capable de racheter ses actions plus tard à un prix plus faible.
- › Après une certaine période de temps, j'achète 5 actions au nouveau prix et j'y retourne.

Raisons pour une vente à découvert

- › **Spéculation** : Un investisseur tire profit d'une baisse de prix ;
- › **Financement** : Une vente à découvert est une façon d'emprunter de l'argent ;
- › **Couverture** (hedging) : Un investisseur peut éliminer le risque d'une position longue sur une action avec une vente à découvert.

Type de risques

Risque de défaut (de crédit) Risque de ne pas être payé ;

- › Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité ;
- › « *credit risk* ».

Risque de rareté Si il est difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent (pas beaucoup de transactions signifie beaucoup de négociations et de variation dans les prix).

📄 Vente à découvert « (*short-sell*) »

Lorsqu'on croit que le prix d'une action va baisser, on peut faire un profit quand même.

Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre ;
2. Vente du titre ;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre ;
4. Remboursement du titre

Frais

investisseur : short-seller prêteur : Détenteur des actions dont l'investisseur a emprunté ;

« *short-sale proceeds* » Le recettes de la vente sont conservés comme collatéral au cas où que l'investisseur ne retourne pas les actions ;

- › Soit le prêteur, ou un parti tierce, va conserver les revenus de la vente à découvert jusqu'au retour des actions ;
- › À ce moment, elles seront retournées à l'investisseur.

« *a haircut* » Marge de sécurité pour couvrir le risque que le prix des actions augmente trop pour que l'investisseur ait la capacité financière des retourner, le prêteur exige un « dépôt » additionnel ;

- › Comme les recettes de la vente, cette marge de sécurité sera retournée au prêteur.

« *Interest* » Il est naturel que le prêteur exige un retour sur la vente à découvert également ;

- › Dans le marché des actions, l'intérêt accumulé sur le collatéral est le « *short rebate* » ;
- › Dans le marché des obligations, c'est le **taux de mise en pension** (« *repo rebate* ») ;
- › Ces taux sont habituellement *plus faible que* ceux du marché et sont fondés sur l'offre et la demande.

« *Dividends* » Il est possible que des dividendes sont payables lors du prêt ;

- › Puisque le détenteur de l'action sera celui à qui l'investisseur a vendu les actions, l'investisseur et le prêteur ne vont pas les recevoir ;
- › Du point de vue du prêteur, les dividendes sont des paiements en espèce qu'il aura reçu s'il n'avait pas prêté l'action ;
- › Ce faisant, l'investisseur va payer ces dividendes au prêteur s'il y en a ;
- › Ce paiement se nomme le **taux de location** (« *lease rate* ») de l'actif.

Mesures de taille et d'activité d'un marché

Volume total des transactions : Nombre total de titres transigés pendant une période ;

Valeur marchande : nombre d'actions \times prix par action (\$);

« *Market value* ».

Valeur notionnelle : Valeur de l'actif sous-jacent du produit dérivé ;

Position ouverte : Nombre de contrats encore en vigueur du produit dérivé ;

« *Open interest* ».

Rôle des marchés financiers : Partage du risque et diversification des risques.

Bid-Ask Spread

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**). Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché (*market maker*) conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$.

Prix

Ask : Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent ;

Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé ;

« *ask price* » se traduit au **cours vendeur** représentant l'idée de regarder les prix auxquels se transigent l'actif ;

Bid : Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent

« *bid price* » se traduit au **cours acheteur** ;

Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible ;

Terminologie des marchés

Ordre au cours du marché : On achète et vend selon les prix Bid Ask actuels ;

« *Market order* ».

Ordre à cours limité : On achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$.

« Limit order ».

Ordre de vente stop : On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur. Donc, on va vendre le sous-jacent si $Bid \leq k$.

« Stop-loss order ».

Longue On se considère en position longue par rapport au sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent.

Courte On se considère en position longue par rapport au sous-jacent si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

2 Introduction aux Forwards et aux options

Terminologie

Premium : Flux financiers à $t = 0$;

Prix de l'option / prime;

Si positif, il s'agit d'un coût;

Si négatif, il s'agit d'une compensation.

Valeur à l'échéance T : Les flux de trésorerie au temps $t = T$;

- > « payoff »;
- > C'est à dire, l'argent que l'on reçoit à l'échéance;
- > Dans le cas de l'achat d'un actif, on reçoit son prix et donc s'il est nul on ne reçoit rien;
- > C'est le profit qui prend en compte les dépenses initiales et qui sera négatif.

Profit^a = (valeur à l'échéance) - (valeur accumulée du coût initial)
 = $VA(\text{flux monétaires})^b$

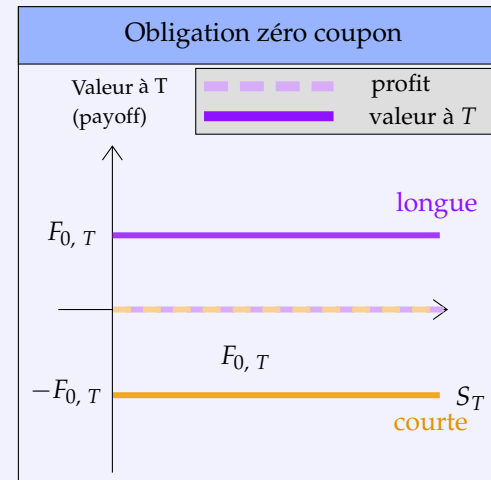
r_f : taux d'intérêt sans risque (effectif annuel).

r : force d'intérêt sans risque (annuelle).

a. Valeur Accumulée au taux sans risque.

b. Pour exemple acheter une voiture et la revendre 10 ans plus tard—(prix de revente à dans 10 ans) - (valeur accumulée du coût d'achat initial à 0 au courant des 10 dernières années).

Obligation zéro coupon



Le profit sera donc toujours nul.

La position

longue : Équivaut à un dépôt;

courte : Équivaut à un emprunt.

Valeur à l'échéance
$F_{0,T}$
Profit
$F_{0,T} - (F_{0,T} - e^{-rT})e^{rT}$

Contrat à terme (de gré à gré) « forward contract »

Contrat selon lequel :

- > deux partis s'engagent d'échanger—un à acheter et l'autre à vendre;
- > une certaine quantité d'un certain bien—l'actif sous-jacent S ;
- > à un certain prix—prix à terme $F_{0,T}$;
- > à un certain endroit à une certaine date—date d'échéance, T ;

L'engagement est au départ à $t = 0$ mais aucune transaction y a lieu. Ce faisant, le profit sera égale à la valeur à l'échéance puisqu'il n'a pas de flux financiers à 0 à accumuler. L'achat ferme en revanche, implique l'achat et la livraison de l'actif au départ à $t = 0$. Donc :

Transaction	Valeur à l'échéance	Profit
Achat ferme	S_T	$S_T - S_0 e^{rT}$
Contrat à terme (achat)	$S_T - F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

Notation de prix

S_t : **Valeur** de l'actif sous-jacent à t ;

S_0 : **Prix au comptant**;

- > Le prix au comptant représente le paiement pour la livraison immédiate à $t = 0$;
- > « *spot price* ».

$F_{0,T}$: est le **prix à terme**;

$$> F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$$

$F_{0,0}$: est nul;

- > La notation $F_{0,T}$ vient de « future » ou « forward ».

Exemple de bateau

- > Je veux acheter un (*quantité*) bateau (*bien*), mais il est inconvenient pour moi de le recevoir maintenant;
 - > En lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente (*engagement*) pour l'acheter;
 - > La seule différence entre l'acheter aujourd'hui (*au prix au comptant* S_0) et l'acheter lorsque la neige fond (*au prix à terme* $F_{0,T}$) est l'accumulation d'intérêt;
 - > Puisqu'on suppose tout les deux d'être fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque (r) et le prix payable rendu à l'été (T) sera $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$;
- Si le taux sans risque est un **taux plutôt** qu'une *force* d'intérêt, on obtient $F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$.

Types d'exercices

Européen : Au moment d'expiration de l'option T ;

Américain : N'importe quand (*any moment*) d'ici T ;

Bermudien : À quelques périodes (*bounded periods*) d'ici T ;

En réalité, la majorité sont *américain* et donc nous effectuons uniquement des calculs avec ce type.

Option d'achat

Contrat qui :

- > permet (**optionnel**) à son détenteur d'**acheter**;
- > une certaine **quantité** d'un certain **bien**—l'actif sous-jacent;
- > à un certain **prix**—prix d'exercice K ;
- > à un certain **endroit** à, ou d'ici, une certaine **date**—date d'échéance, T ;

Notation

C_0 : **Prix** pour acheter l'option d'achat;

$C(K)$: Notation pour représenter l'option d'achat (« *Call* ») avec un prix d'exercice de K .

Option de vente

Contrat qui permet à son détenteur de **vendre** au lieu d'acheter.

Notation

P_0 : **Prix** pour acheter l'option de vente;

$P(K)$: Notation pour représenter l'option de vente (« *Put* ») avec un prix d'exercice de K .

Exercice (levée)

Décision d'*exercer* l'option d'achat ou de vente.

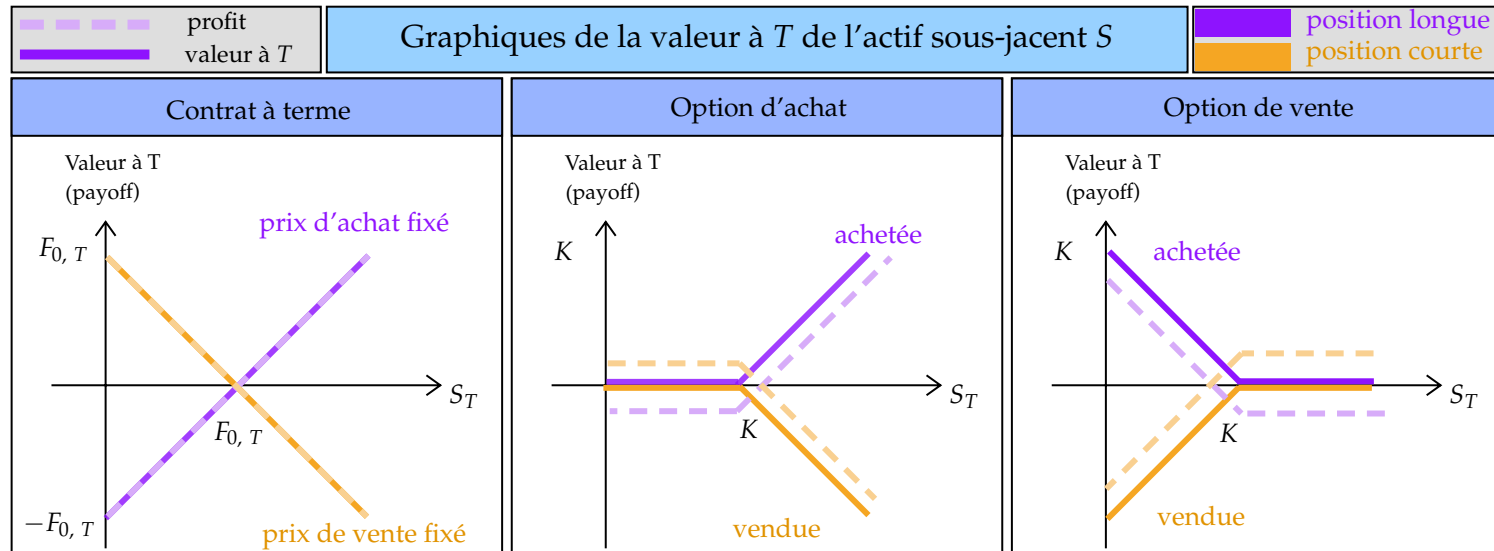
Notation

K : **Prix d'exercice** (*strike price*);

Pour bien comprendre les définitions de profit au tableau ci-dessous, ne pas oublier que C_0 représente le prix, ou « *premium* », payé par l'acheteur d'une option et donc qu'il est naturel de le soustraire de sa valeur à l'échéance. Le vendeur de l'option tant qu'a lui reçoit ce paiement et on y additionne la valeur accumulée en lieu. Il s'ensuit donc que la ligne de profit pour la position longue est moins élevée, car on y soustrait la valeur accumulée du prix alors que celle de la position courte est

plus élevée.

Autre Contrat	Position	Rôle	Stratégie	Valeur à T (payoff)	Profit
Contrat à terme	Longue	obligation d'acheter	garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent	$S_T - F_{0,T}$	
	Courte	obligation de vendre	garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent	$-(S_T - F_{0,T})$	
Option	d'achat (call)	Longue	droit d'acheter	achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$\max\{0, S_T - K\}$
		Courte	obligation de vendre	vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$-\max\{0, S_T - K\}$
	de vente (put)	Longue	droit de vendre	achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$\max\{0, K - S_T\}$
		Courte	obligation d'acheter	vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$-\max\{0, K - S_T\}$



Degré de parité	« Moneyness »	Option d'achat	Option de vente
au cours	« At-the-money »	$S_T = K$	$S_T = K$
dans le cours	« In-the-money »	$S_T > K$	$S_T < K$
hors du cours	« Out-of-the-money »	$S_T < K$	$S_T > K$

3 Stratégie de couverture

3.1 Préliminaires

Hypothèses

Pour tout le chapitre, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Taux d'intérêt i constant;
2. Aucuns frais de transaction;
3. Aucun risque de défaut;
4. Aucun versement intermédiaire.

Propriétés des maximums et minimums

$$\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)$$

$$\min(a, b) + c = \min(a + c, b + c)$$

$$\min(a, b) = -\max(-a, -b)$$

$$\max(a, b) \times c = \max(a \times c, b \times c), c > 0$$

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$$

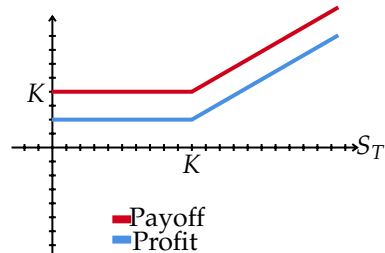
Floor

On achète S en se protégeant contre une baisse trop importante du sous-jacent (**position longue**)

$$\text{Floor} = \text{Stock} + \text{Put}(K, T)$$

$$\text{Premium} = S_0 + P(K, T) > 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K & , S_T \leq K \\ S_T & , S_T > K \end{cases}$$



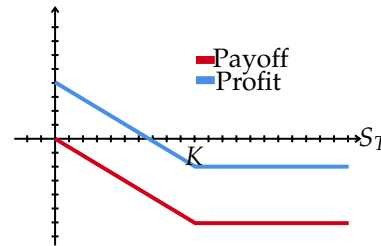
Cap

On vend à découvert S en se protégeant contre une hausse trop importante du sous-jacent (car il faudra éventuellement le racheter!). **Position courte.**

$$\text{Cap} = \text{Call}(K, T) - \text{Stock}$$

$$\text{Premium} = C(K, T) - S_0 < 0$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} -S_T & , S_T \leq K \\ -K & , S_T > K \end{cases}$$



Position synthétique

Une position synthétique réplique la valeur à l'échéance d'une autre position.

Contrat à terme synthétique « *synthetic forward* »

Un contrat à terme synthétique réplique la valeur à l'échéance d'un contrat à terme sans réellement en signer un.

Avec un **vrai** contrat à terme :

- > le coût initial est nul et
- > la valeur à l'échéance est l'écart entre le prix à terme et la valeur du sous-jacent ($S_T - F_{0,T}$).

Avec un contrat à terme **synthétique** :

- > on prévoit l'échange du bien contre un prix quelconque K et
- > la valeur à l'échéance est leur écart ($S_T - K$).
- > Il s'ensuit que le coût initial ne peut être nul et
- > c'est pourquoi on **emprunte de l'argent**, ou de façon équivalente, **vend une obligation zéro-coupons**.

En bref, on **achète l'actif** et **emprunte de l'argent** :

Transaction	Flux au temps 0	Flux au temps T
Acheter un actif	$-S(0)$	$+S(T)$
Emprunter de l'argent	$+S(0)$	$-S(0)e^{rT} = -F_{0,T}$
Net des flux monétaires	0	$S(T) - F_{0,T}$

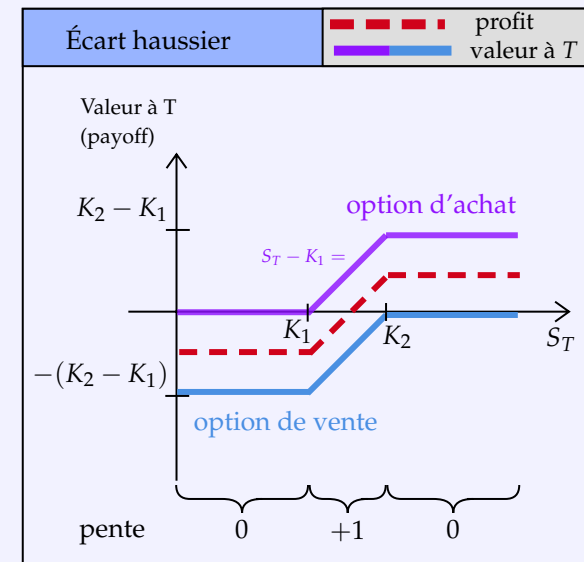
Écart haussier « *Bull Spread* »

Crée en :

- > Achetant une option d'achat $C(K_1)$ et vendant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- > Achetant une option de vente $P(K_1)$ et vendant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- > Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va augmenter **mais** qu'il
 - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
 - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
 - > « *Bull Spread* » provient de l'idée d'être « **bull-ish** » et prévoir une augmentation du prix de l'action à un intervalle ;
- On peut également visualiser un taureau avec ses cornes pointues vers le haut prêt à attaquer.



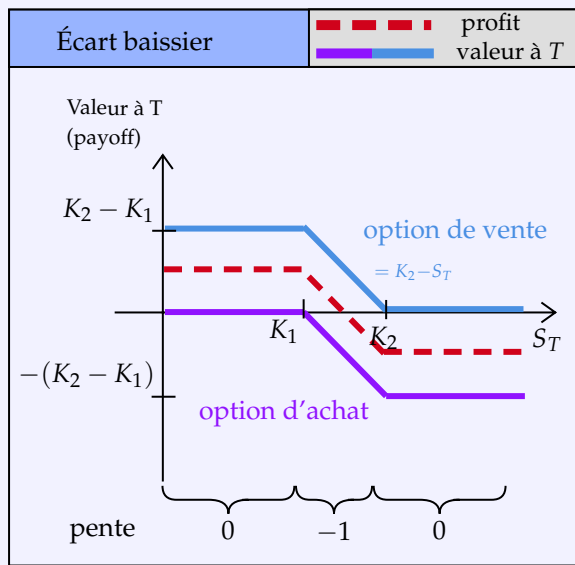
Écart baissier « Bear Spread »

L'inverse d'un écart haussier, il est créé en :

- > Vendant une option d'achat $C(K_1)$ et achetant une autre option d'achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- > Vendant une option de vente $P(K_1)$ et achetant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- > Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va baisser *mais* qu'il
 - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
 - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
 - > « Bear Spread » provient de l'idée d'investir avec précaution pour « *bear-er* » une baisse du prix de l'action à un intervalle ;
- On peut également visualiser un ours qui va « strike down » avec ses pattes d'ours en attaque.



Écart sur ratio d'options « Ratio Spread »

Crée en :

- > **achetant** m options à un prix d'exercice K_1 et
- > puis **vendant** n options à un prix d'exercice K_2 différent où
- > $m \neq n$ et $K_1 \neq K_2$.

Boîte « Box Spread »

- > La stratégie consiste à acheter un écart haussier ainsi qu'un écart baissier où l'un utilise des options d'achat et l'autre des options de vente (ayant les mêmes caractéristiques) ;
- > Il est utilisé pour emprunter ou prêter de l'argent avec une valeur à l'échéance connue en avance, peu importe la direction prise par la valeur de l'actif sous-jacent ;
- > Il est donc équivalent à une obligation zéro-coupons.

Si on crée un écart haussier avec des

- > options d'achat

- > options de ventes

et un écart baissier avec

- > options de ventes

- > options d'achat

la valeur à l'échéance est équivalente à celle d'une obligation zéro-coupon sans risque

- > à position longue.

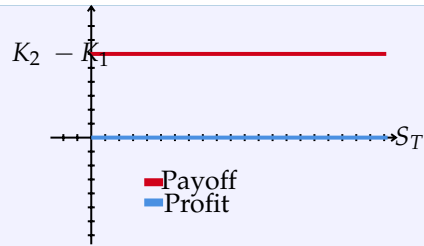
- > à position courte.

Cela est donc équivalent à

- > à prêter de l'argent.

- > à emprunter de l'argent.

$$\begin{aligned}
 \text{Box Spread} &= \text{Bull}(\text{Call}) + \text{Bear}(\text{Put}) \\
 &= \text{Call}(K_1, T) - \text{Call}(K_2, T) \\
 &\quad + \text{Put}(K_2, T) - \text{Put}(K_1, T) \\
 \text{Premium} &= C(K_1, T) - C(K_2, T) \\
 &\quad + P(K_2, T) - P(K_1, T) > 0 \\
 \text{Payoff} &= K_2 - K_1, \forall S_T
 \end{aligned}$$



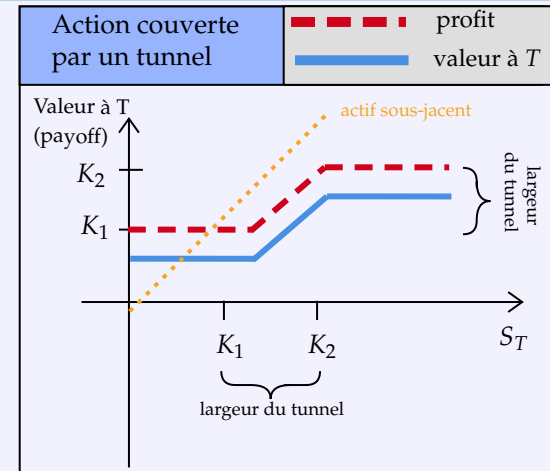
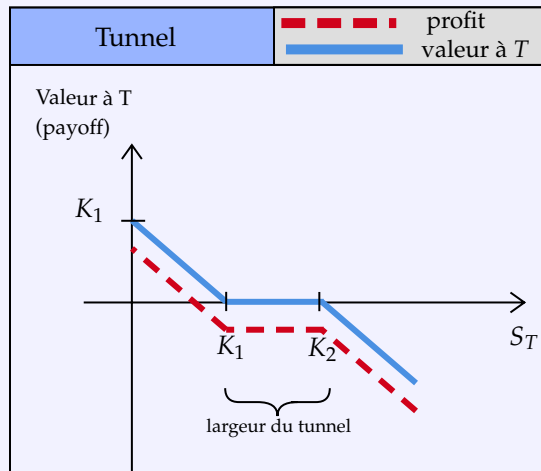
📖 Tunnel « Collar » et action couverte par un tunnel « Collared stock »

Le tunnel (« Collar ») est crée en

- > Achetant une option de vente $P(K_1)$ et
- > vendant une option d'achat $C(K_2)$ où
- > $K_1 < K_2$.

Lorsqu'on achète l'actif (position longue) en plus, nous obtenons une action couverte par un tunnel (« Collared stock »).

La largeur du tunnel est $K_2 - K_1$.



$$\text{tunnel} = P(K_1) - C(K_2)$$

$$\text{action couverte par un tunnel} = P(K_1) - C(K_2) + S_T$$

3.2 Spéculations sur la volatilité

Ces combinaisons bénéficient d'une

Stellage « straddle »

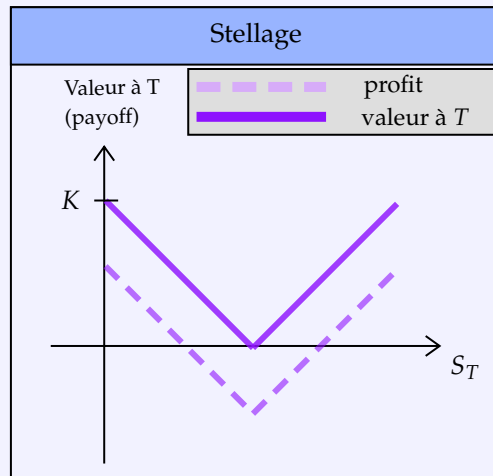
Créé en achetant une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice K .

$$\text{Straddle} = \text{Put}(K, T) + \text{Call}(K, T).$$

Souvent bâti avec des options au cours.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$|S_T - K| \equiv \begin{cases} (K - S_T) + 0 = K - S_T, & S_T \leq K \\ 0 + (S_T - K) = S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$



Stellage élargi « strangle »

Créé en

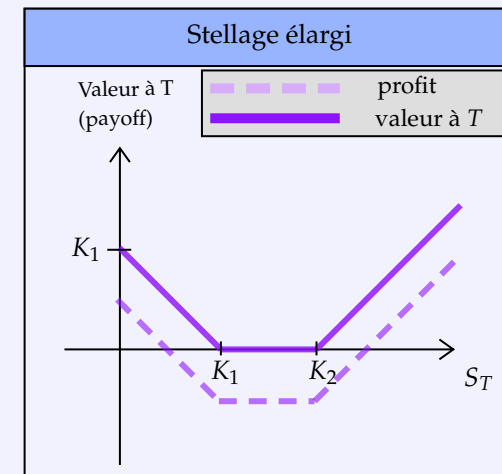
- > achetant une option de vente avec un prix d'exercice K_1 et
- > achetant une option d'achat avec un prix d'exercice K_2 où
- > $K_1 < K_2$.

$$\text{Strangle} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_2, T).$$

Souvent bâti avec des options hors du cours.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$\begin{cases} (K_1 - S_T) + 0 = K_1 - S_T, & S_T \leq K_1 \\ 0 + 0 = 0, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 + (S_T - K_2) = S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$



Écart papillon asymétrique

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Pour chaque option avec un prix d'exercice de K_2 achetée, on achète λK_1 et $(1 - \lambda)K_3$.

Butterfly Spread (BFS)

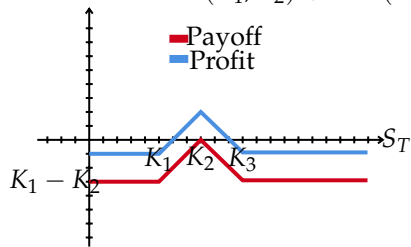
On combine un Straddle(K_2) et un Strangle(K_1, K_3) pour spéculer sur la non-volatilité du sous-jacent autour de K_2 , mais en limitant nos pertes à $K_1 - K_2$:

$$\begin{aligned} \text{Butterfly} &= \text{Strangle} - \text{Straddle}(K_2) \\ &= \text{Put}(K_1, T) - \text{Put}(K_2, T) \\ &\quad - \text{Call}(K_2, T) + \text{Call}(K_3, T) \\ \text{Premium} &= P(K_1, T) - P(K_2, T) \\ &\quad - C(K_2, T) + C(K_3, T) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Payoff} = \begin{cases} K_1 - K_2 & , S_T \leq K_1 \\ S_T - K_2 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - S_T & , K_2 < S_T \leq K_3 \\ K_2 - K_3 & , S_T > K_3 \end{cases}$$

Note De façon générale (plusieurs combinaisons sont possibles), on a

$$\text{BFS} = \text{Bull}(K_1, K_2) + \text{Bear}(K_2, K_3)$$



Asymetric Butterfly Spread

- Comme le Ratio Spread, il est possible de faire une stratégie sur mesure en achetant n Bull Spread et en achetant m Bear Spread en respectant les 3 prix d'exercices $K_1 < K_2 < K_3$.
- Si on désire avoir un BFS qui a un profit nul pour $S_T < K_1$ et $S_T > K_3$, alors on trouve n et m tel que

$$\frac{n}{m} = \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1}$$

5 Forwards et Futures

Forward avec dividendes

Définition de base

$$C(K, T) - P(K, T) = S_0 - K(1 + r_f)^T$$

Action qui verse des dividendes

$$\begin{aligned} C(K, T) - P(K, T) &= S - \text{PV}(\text{Div}) - K(1 + r_f)^T \\ &= S_0 e^{-\delta T} - K e^{-rT} \end{aligned}$$

où δ est un taux de versement des dividendes continu.

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F_{0,T}^P (1 + r_f)^T \\ &= (S_0 - \text{PV}(\text{div}))(1 + r_f)^T \\ &= S_0 - \sum_{i=1}^T d_i (1 + r_f)^{T-i} \\ &= S_0 e^{(r-\delta)T} \end{aligned}$$

Forward synthétique avec dividendes On suppose le réinvestissement des dividendes.

$$\text{Forward}_{\text{avec div.}} = e^{-\delta T} \text{Stock} - (e^{-\delta T} \cdot S_0) \text{Bond}$$

$$\text{Premium} = e^{-\delta T} S_0 - e^{-\delta T} S_0 = 0$$

$$\text{Payoff} = S_T - S_0 e^{(r-\delta)T}$$

Cash-and-carry Stratégie qui consiste à créer un Forward synthétique et vendre un Forward (profit nul).

Calcul avec prime de risque et nuance

- Certains sous-jacent ont une composante de risque non-négligeable. Or, on ne peut pas dire que $F_{0,T} = E[S_T]$. Toutefois,

$$F_{0,T} = E[S_T] e^{-(\alpha-r)T}$$

où α est la prime de risque qu'on enlève pour obtenir le prix du Forward, tel que

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha - r)}_{\text{Prime de risque}}$$

Forward de devise

Put-Call parity avec les devises

DD Devise locale

DÉ Devise étrangère

x_0 Taux de change $\frac{DD}{D}$ actuel ($t = 0$)

r_D Taux sans risque local

r Taux sans risque étranger

Le prix Forward prépayé pour une unité de DÉ à $t = 0$ (payé en DD) est

$$F_{0,T}^P = x_0 (1 + r)^{-T}$$

Et le prix Forward (à $t = T$) pour une unité de DÉ est

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= F_{0,T}^P (1 + r_D)^T \\ &= x_0 \left(\frac{1 + r_D}{1 + r} \right)^T \\ &= x_0 e^{(r_D - r)T} \end{aligned}$$

Forward synthétique de devise

- › Emprunt de $x_0(1 + r)^{-T}$ DD au taux r_D
- › Convertir les DD en DÉ
- › Dépôt de $(1 + r)^{-T}$ DÉ (au taux r) de 0 à T .

Le payoff sera $x_t - x_0 \left(\frac{1 + r_D}{1 + r} \right)^T$.

Future

Essentiellement la même chose qu'un Forward, à quelques différences près :

- › Surveillé et contrôlé par des instances officielles (aucun *Over-the-counter*)
- › S'applique sur certains types d'actifs définis seulement;
- › liquide et efficient
- › nécessite un dépôt initial des 2 parties (le risque de défaut est minimisé)
- › Transaction continues (règlement avec l'intermédiaire de façon quotidienne)
- › Variation extrêmes dans les prix de Future sont limités (possibilité du *circuit Breaker*)

Fonctionnement

1. L'intermédiaire demande un dépôt initial (*initial margin*), **souvent un % de la valeur notionnelle**.
2. Ce dépôt est accumulé à un taux de rendement i fixé par l'intermédiaire.
3. À chaque période de règlement, on calcule la marge en fonction du prix du Future :

$$\text{Marge}_T = \text{Marge}_t \cdot (1 + i)^{T-t} + \text{Variation totale}_{[t,T]}$$
4. Si $\text{Marge}_t < \text{Maintenance margin}^1$, on doit **ajouter des fonds à la marge pour revenir à la marge initiale**. avec $t < T$

1. Cette marge est souvent exprimée en % de la marge initiale.

9 Put-Call Parity

$$\text{Call} - \text{Put} = \text{Stock} - \text{Bond}$$

Put-Call Parity avec devises

$\text{Call}(x_0, K, T)$: Option d'achat qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

$\text{Put}(x_0, K, T)$: Option de vente qui permet d'acheter 1 unité de DÉ pour K unité de DD à l'échéance $t = T$.

Alors, on peut réécrire l'équation Put-Call Parity :

$$\text{Call}(x_0, K, T) - \text{Put}(x_0, K, T) = x_0(1 + r)^{-T} - K(1 + r_D)^{-T}$$

Parité généralisée et option d'échange

$\text{Call}(S_t, Q_t, T - t)$: Option d'achat qui permet d'acheter le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps $t = T$.

$\text{Put}(S_t, Q_t, T - t)$: Option de vente qui permet de vendre le sous-jacent S au prix du sous-jacent Q au temps $t = T$.

On peut généraliser l'équation Put-Call Parity :

$$C(S_t, Q_t, T - t) - P(S_t, Q_t, T - t) = F_{t,T}^P(S) - F_{t,T}^P(Q)$$

Options sur devise

$$\begin{aligned} \text{Call}_{DD}(x_0, K, T) &= K \cdot \text{Put}_{DD} \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T \right) \\ &= K \cdot x_0 \cdot \text{Put}_D \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T \right) \end{aligned}$$

Comparaison de différentes options

Option américaine vs européenne

$$C_{amer}(K, T) \geq C_{euro}(K, T)$$

$$P_{amer}(K, T) \geq P_{euro}(K, T)$$

Option d'achat américaine Bien qu'on puisse exercer l'option américaine au moment qu'on veut, il peut être optimal d'exercer avant l'échéance seulement si

$$PV(div) > K \left(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right)$$

ou si

$$PV(div) > P(K, T - t) + K \left(1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right)$$

Option de vente américaine Le moment optimal pour exercer le Put serait tout juste **après la date ex-dividende**.

Date d'expiration Pour $T_1 < T_2$,

$$C(K, T_1) \leq C(K, T_2)$$

$$P(K, T_1) \leq P(K, T_2)$$

Prix d'exercice Les différentes conditions énumérées ci-bas doivent être respectées :

$$C(K, T) \geq S_0 - K$$

$$P(K, T) \geq K - S_0$$

$$C(K_1, T) > C(K_2, T)$$

$$P(K_1, T) < P(K_2, T)$$

$$C(K_1, T) - C(K_2, T) \leq K_2 - K_1 \quad P(K_2, T) - P(K_1, T) \leq K_2 - K_1$$

$$\frac{C(K_1, T) - C(K_2, T)}{K_2 - K_1} \geq \frac{C(K_2, T) - C(K_3, T)}{K_3 - K_2} \quad \frac{P(K_2, T) - P(K_1, T)}{K_2 - K_1} \geq \frac{P(K_3, T) - P(K_2, T)}{K_3 - K_2}$$

Si le prix d'exercice est *Constant en valeur actualisée*², alors, avec $t < T$

$$C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$$

$$P(K_t, t) \leq P(K_T, T)$$

10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Probabilité neutre au risque

- › $U = uS$ est la valeur supérieure que peut prendre le sous-jacent S
- › $D = dS$ est la valeur inférieure que peut prendre le sous-jacent S
- › p est la probabilité (Bernouilli) que le sous-jacent prenne la valeur U .
- › C_u, C_d, P_u et P_d sont les payoff d'un call (ou put) selon la valeur du sous-jacent après h périodes.

- › r et δ sont respectivement la force d'intérêt sans risque et le taux de dividende continu.

Alors, la probabilité *neutre au risque* est

$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

Portefeuille réplcatif d'une option

On peut reproduire une option (Call ou Put) avec la stratégie suivante :

$$C = \Delta S + B$$

où B et ΔS changent de signe selon si c'est un Call ou un Put. On peut obtenir la prime initiale (*Premium*) et les composantes du portefeuille réplcatif avec

$$\Delta = e^{-\delta h} \left(\frac{C_u - C_d}{U - D} \right) = e^{-\delta h} \left(\frac{C_u - C_d}{S(u - d)} \right)$$

$$B = e^{-rh} \left(\frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D} \right) = e^{-rh} \left(\frac{uC_d - dC_u}{u - d} \right)$$

$$\text{Premium} = \Delta S_0 + B$$

2. i.e. $K_t = K(1 + r_f)^T$.