Contributeurs

ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

aut. Nicholas Langevin
aut. Gabriel Crépeault-Cauchon
aut. Alexandre Turcotte
aut., cre. Alec James van Rassel
src. Ilie-Radu Mitric

Rappels

Approximation Woolhouse

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$
$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} + \ln p_x)$$

Hypothèse DUD

Mortalité

$${}_sq_x = sq_x,\ s \in (0,1)$$

Assurance

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$
$$A^{(m)}_{x::\overline{n}|} \overset{DUD}{=} \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Rentes

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)$$
$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_nE_x$$
$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n + {}_nE_x)$$

où :

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Relations

Assurance

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$$

Rente

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$$
$${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$
$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \underbrace{v^{\frac{1}{m}}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x}_{{}_{\frac{1}{m}}E_x}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{m}:\overline{n-\frac{1}{m}}|}$$

Note rente différée : pas faire l'erreur d'oublier de soustraire les n années sans paiements de la rente :

$${}_{n|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0 & ,K = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & ,K = n, n+1 \end{cases}$$

Mortalité

Tables

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$$
$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \qquad {}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}$$

Sélection à l'âge $[x]$

$$\bar{A}^{\,1}_{[x]+h:\overline{n-h}|} = \int_0^{n-h} e^{-\delta t}\,{}_tp_{[x]+h}\mu_{[x]+h+t}dt$$
$$= \int_h^n e^{-\delta(s-h)}\frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hp_{[x]}}\mu_{[x]+s}ds$$

1 Calcul de réserve

Notation

${}_hL$: Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h.

- Puisque la perte est évaluée au temps h, on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :
  $${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$$

${}_hV$: Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge (x) au temps h.

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :
  $${}_hV = \mathrm{E}[{}_hL]$$

${}_hV^g$: Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$: Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

${}_hV^I$ Réserve initiale au début de l'année h ;
$${}_hV^I = {}_hV + \pi$$

$VP_{@h}$: La valeur présente au temps h.

$VPA_{@h}$: La valeur présente anticipée au temps h.
$$VPA_{@t} = \mathrm{E}[VP_{@h}]$$

Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$$
\begin{aligned}
{}_hL &= MZ_{x+h} - \pi\ddot{Y}_{x+h} \\
\mathrm{Var}({}_hL) &= \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+h} - (A_{x+h})^2\right] \\
{}_hV^n &= MA_{x+h} - \pi\ddot{a}_{x+h} \\
&\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}
\end{aligned}
$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$$
\begin{aligned}
{}_hV^n &\overset{PEP}{=} M\left[\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right] \\
&\overset{PEP}{=} M\left[1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right]
\end{aligned}
$$

Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$$
\begin{aligned}
{}_hL &= b_{K_{x+h}+h+1}v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h}v^i \\
{}_hV^n &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1}v^{j+1}{}_jp_{x+h}q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h}v^i{}_jp_{x+h}
\end{aligned}
$$

Note

- La prestation b est payable au moment $K_{x+h} + h + 1$.
- Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps h, il y a seulement $K_{x+h} + 1$ années à actualiser.

Calcul de réserves

Méthodes d'évaluation de la réserve

Prospective

$$
\begin{aligned}
{}_hV^g = & \; VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{prestations futures} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
& + VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{frais futurs} \\ \text{à payer}\end{pmatrix} \\
& - VPA_{@t}\begin{pmatrix}\text{primes futures} \\ \text{à recevoir}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Rétrospective

$$
\begin{aligned}
{}_hV^g = & \; \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x} \\
& + \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{primes recues} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x} \\
& - \frac{VPA_{@0}\begin{pmatrix}\text{prestations à payer} \\ \text{avant } h\end{pmatrix}}{{}_hE_x}
\end{aligned}
$$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte n années :

Méthode prospective ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

Méthode rétrospective ${}_hV^n = 0 + \dfrac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA^{1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer **avant** h.

Relation : $\{T_x - t | T_x > t\} \overset{d}{=} T_{x+t}$ où $\overset{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$$ {}_hV^n = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}b_{h+1}\right] v - \pi_h $$
$$ {}_hV^g = \left[p_{x+h}\,{}_{h+1}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})\right] v - (G_h - e_h) $$

La réserve pour l'année h est composée de :

- La réserve au temps $h+1$ si l'assuré survie l'année h et
- la prestation payable (et frais encourus) à $h+1$ si l'assuré décède lors de l'année h,
- actualisés de $h+1$ à h,
- moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année h.

où

G_h La prime *(gross premium)* à recevoir à $t = h$;

e_h Les frais reliés à la collecte de la prime *(per premium expenses)* ;

E_h Les frais reliés au paiement de la prestation *(settlement expenses)*.

Avec la réserve pour l'année $h+1$ isolée :
$$ {}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}} $$
Avec le montant net au risque réserve pour l'année $h+1$ isolé :
$$ \underbrace{\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g\right)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g $$

Note Si on a une assurance mixte dont la prestation est fonction de la réserve (e.g., $b_k = 1000 + {}_kV$), on commence de la fin puisqu'on sait que ${}_nV = M$.

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$$ {}_{h+s}V^g \approx \left({}_hV^g + G_h - e_h\right)(1-s) + \left({}_{h+1}V^g\right)(s),\ s \in (0,1) $$

Profit de l'assureur

Notation

N_h : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps h.

${}_{h+1}V^E$: Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt (i), la mortalité (q_{x+h}) et les frais (e_h et E_h) **espérés** (**E**xpected) pour l'année h.

${}_{h+1}V^A$: Réserve totale pour l'année $h+1$ du portefeuille selon l'intérêt (i'), la mortalité (q'_{x+h}) et les frais (e'_h et E'_h) **réellement** (**A**ctually) encourus lors de l'année h.

Le profit de l'assureur pour l'année h sera donc ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$.

Si uniquement ______ change(nt), alors le profit sur ______ pour l'année h est :

les frais $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

l'intérêt $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e_h)\right)(i' - i)$.

la mortalité $\left(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g\right)\left(N_hq_{x+h} - N_hq'_{x+h}\right)$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient $N_h\left({}_hV^g + (G_h - e'_h)\right)(i' - i)$.
- Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient $N_h\left[(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}\right]$.

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de ${}_tV$.
$$ \frac{\partial}{\partial t}{}_tV^g = \delta_t\,{}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t} $$

- Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps t.
- Le montant est fixe et payé au début de l'année t.
- Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à t.

on peut approximer ${}_hV^g$ avec la Méthode d'Euler :
$$ {}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h\left[(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}\right]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}} $$

Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$ Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).
$$ {}_hV^e = DAC_h = VPA_{@t}\,(\text{frais}) - VPA_{@t}\,(\text{primes pour les frais futurs}) $$
$$ \equiv {}_hV^g - {}_hV^n $$

- « *expense reserve* » ou « *Deferred Acquisition Costs* ».

- Si $e_0 > e_h$, c'est une réserve négative.
- Si $e_0 = e_h$ alors ${}_hV^g = {}_hV^n = 0$ et $DAC_h = 0$.

P^g : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute G).

P^n : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette P).

P^e : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^g - P^n$$

FTP

${}_hV^{FTP}$ Réserve de primes FTP.

π_0^{FTP} Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} bvq_{[x]}$$

π_h^{FTP} Prime nivelée FTP pour les $h = 1, 2, \ldots$ autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat}\\\text{vie entière}}}{=} b\frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition ;
- Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contrat ;
- Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple ;
- Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première ;
- **Note** : Lorsqu'on calcule la réserve FTP ${}_hV^{\text{FTP}}$ on n'a pas besoin de calculer π_0^{FTP}, on y va directement avec π_h^{FTP}.

2 Modèles à plusieurs états

${}_kQ_t^{(i,j)}$ Probabilité de transition de l'état i au temps t à l'état j au temps $t+k$.

- De façon équivalente, ${}_kp_{x+t}^{ij}$.

M_t État au temps t parmi les $\{1, 2, \ldots, r\}$ ou $\{0, 1, \ldots, r\}$ états.

- De façon équivalente, $M(t)$.
- Le processus M_t est une "Chaine de Markov" ssi $\forall t = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} Q_t^{(i,j)} &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, \ldots, M_0) \\ &= \Pr(M_{t+1} = j | M_t = i) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Q}_t$ Matrice des probabilités de transition.

- Les transitions sont en fin d'année.
- Si la matrice :

dépend du temps alors M_t est une chaîne de Markov **non-homogène**.

ne dépend pas du temps alors M_t est une chaîne de Markov **homogène**.

Également, dans ce cas-ci, on dénote $\boldsymbol{Q}_t$ par $\boldsymbol{Q}$ puisque $Q_t^{ij} = Q^{ij}\, \forall t \geq 0$

${}_k\boldsymbol{Q}_t$ Matrice de k-étapes des probabilités de transition.

$${}_{m+n}Q_t^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{r} {}_mQ_t^{(i,k)}\, {}_nQ_{t+m}^{(k,j)}$$

En temps continu

${}_kp_{x+t}^{ij}$ probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps $x+t$ soit dans l'état j (où j peut être égale à i) au temps $x+t+k$.

$${}_kp_{x+t}^{ij} = \Pr(Y_x(t) = j | Y_x = i)$$

${}_kp_{x+t}^{\overline{ij}}$ probabilité qu'un individu d'âge x dans l'état i au temps $x+t$ reste dans dans l'état i continument jusqu'au temps $x+t+k$.

$${}_kp_{x+t}^{\overline{ij}} = \Pr(Y_x(s) = i, \quad \underbrace{\forall s \in [0, t]}_{\text{sans sortir et revenir}} \quad | Y_x = i)$$

$Y_x(t)$ Processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$ de l'état dont les transitions peuvent se produire à n'importe quel moment $t \geq 0$ et donc pas seulement en fin d'année.

- De façon équivalente, $Y(x+t)$.
- $Y_x(t) = i$ si l'assuré d'âge (x) est à l'état i au temps t (ou, à l'âge $x+t$).

Il s'ensuit que ${}_kp_{x+t}^{ij} \geq {}_kp_{x+t}^{\overline{ij}}$ car :

$${}_kp_{x+t}^{ij} = {}_kp_{x+t}^{\overline{ij}} + \Pr(Y_x(t) = i, \text{après avoir sorti et revenu} | Y_x = i)$$

Donc, pour le modèle actif (0) décédé (1), on substitut ${}_tp_x$ pour ${}_tp_x^{\overline{00}}$ (ou ${}_tp_x^{00}$ puisque décéder est un état absorbant) et ${}_tq_x$ pour ${}_tp_x^{01}$ avec la nouvelle notation.

Hypothèses

1. Le processus stochastique Y_t est une chaîne de Markov.
$$\Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i, Y_u, 0 \leq u < 1) = \Pr(Y_{t+s} = j | Y_t = i)$$
2. Pour toute intervalle de longueur h,
$$\Pr\left(\begin{array}{c} \text{2, ou plus, transitions} \\ \text{pendant une période de longueur } h \end{array}\right) = o(h)$$
   - Une fonction $g \in o(h)$ si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.
3. Pour tous les états i et j et toute âge $x \geq 0$, ${}_tp_x^{ij}$ est différentiable par rapport à t.

μ_x^{ij} **Force de transition** de l'état i à l'état j pour un assuré d'âge (x).

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h}, \; i \neq j$$

- Il s'ensuit que ${}_hp_x^{ij} = h\mu_x^{ij} + o(h)$.
Donc, ${}_hp_x^{ij} \approx h\mu_x^{ij}, i \neq j$ pour $h > 0$ très petit.
- Pour le modèle actif (0) décédé (1), μ_x^{01} est la force de mortalité μ_x.

Remarques

1. ${}_hp_x^{ii} = {}_hp_x^{\overline{ij}} + o(h)$ où $o(h)$ est la probabilité de sortir et revenir de l'hypothèse 2.
2. $${}_hp_x^{ij} \geq {}_hp_x^{\overline{ii}} \qquad = 1 - \sum_{j \neq i, j=0}^{n} {}_hp_x^{ij} + o(h) \qquad = 1 - h\sum_{j \neq i, j=0}^{n} \mu_x^{ij} + o(h)$$