Contributeurs

Notation

S Les coûts d'un portefeuille.

$\rho(S)$ Une mesure de risque.

1 Mesures de risque

Capital économique Allocation de surplus de la compagnie ;
$CE(S) = \rho(S) - \mathrm{E}[S]$

Marge de risque associée à une prime $P(X)$;
$MR(X) = \rho(X) - \mathrm{E}[X]$

ρ introduit une marge de risque :

positive lorsque $\boxed{\rho(X) \geq \mathrm{E}[X]}$ pour une v.a. X avec $\boxed{\mathrm{E}[X] < \infty}$;

justifiée lorsque $\boxed{\rho(X) = \rho(a) = a}$ pour une v.a. X avec $\boxed{\Pr(X = a) = 1, \alpha > 0}$;

non-excessive lorsque $\boxed{\rho(X) \leq a_{\max}}$ pour une v.a. X $\boxed{\text{s'il existe } a_{\max} < \infty}$ $\boxed{\text{tel que } \Pr(X \leq a_{\max}) = 1}$;

1.1 Propriétés désirables d'une mesure de risque

Homogénéité

Soit une v.a. X et un scalaire $\boxed{c > 0}$, la mesure de risque ρ est dite homogène si $\boxed{\rho(cX) = c\rho(X)}$.

Invariance à la translation

Soit une v.a. X et un scalaire $\boxed{c \in \mathbb{R}}$, la mesure de risque ρ satisfait la propriété d'invariance à la translation si $\boxed{\rho(X + c) = \rho(X) + c}$.

Ajouter un montant positif à un risque ajoute un montant équivalent à la mesure de risque.

Monotonicité

Soit les v.a. X_1 et X_2 $\boxed{\text{tel que } \Pr(X \leq X_2) = 1}$, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de monotonicité si $\boxed{\rho(X_1) \leq \rho(X_2)}$ ou si $\boxed{\forall u \in (0, 1)}$, $\boxed{F_{X_1}^{-1}(u) \leq F_{X_2}^{-1}(u)}$.

Sous-additivité

Soit les v.a. X_1 et X_2, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de sous-additivité si $\boxed{\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)}$.

Convexité

Soit les v.a. X_1 et X_2, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de convexité si $\boxed{\rho(\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2) \leq \alpha\rho(X_1) + (1 - \alpha)\rho(X_2)}$.

1.2 TVaR et VaR

- La **Value-at-Risk** correspond au $100\alpha^{e}$ pourcentile ;
- Si X représente les gains, on s'intéresse à l'extrémité inférieure de la distribution des gains et $\boxed{TVaR_{\alpha}(X) = \mathrm{E}[X | X \leq \alpha] = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{VaR_{\alpha}} x f_X(x) dx}$;
- Si X représente les pertes, on s'intéresse à l'extrémité supérieure de la distribution des gains et $\boxed{TVaR_{\alpha}(X) = \mathrm{E}[X | X > \alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR_{\alpha}}^{\infty} x f_X(x) dx}$;

2 Modèles de risques non-vie

Notation

M Variable aléatoire du nombre de sinistres pour un risque ;

B_k Variable aléatoire du montant du k^{e} sinistre.

Modèle fréquence-sinistre

On défini la v.a. X comme étant les coûts (pertes) pour un risque tel que $\boxed{\forall M > 0}$:

$$X = \sum_{k=1}^{M} B_k$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X\right] &= \mathrm{E_M}\left[\mathrm{E_B}[X|M]\right] \\
&= \mathrm{E}[M] \times \mathrm{E}[B] \\
\mathrm{Var}(X) &= \underbrace{\mathrm{Var_M}(\mathrm{E_B}[X|M])}_{\text{variabilité du \textit{nombre} de sinistres}} + \underbrace{\mathrm{E_M}\left[\mathrm{Var_B}(X|M)\right]}_{\text{variabilité du \textit{coût} par sinistre}} \\
&= \mathrm{E}[M]\mathrm{Var}(B) + \mathrm{E}^2[B]\mathrm{Var}(M)
\end{aligned}$$

$$F_X(x) = \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) F_{B_1+\cdots+B_k}(x)$$

Par exemple, pour $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$F_X(x) = \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) H(x; \alpha k, \beta)$$

$$\mathcal{L}_X(t) = P_M\left(\mathcal{L}_B(t)\right), \quad t > 0$$

$$\mathrm{E}\left[X \times \mathbf{1}_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) E\left[(B_1 + \cdots + B_k) \times \mathbf{1}_{\{B_1+\cdots+B_k>b\}}\right]$$

Par exemple, pour $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$\mathrm{E}\left[X \times \mathbf{1}_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b; \alpha k + 1, \beta)$$