Contributeurs

ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

aut. Nicholas Langevin

aut. Gabriel Crépeault-Cauchon

aut. Alexandre Turcotte

aut., cre. Alec James van Rassel

src. Ilie-Radu Mitric

1 Calcul de réserve

Notation

$_tL$: Perte prospective de l'assuré au temps t ;

- Le symbole représente la perte pour un assuré d'âge x à partir du temps t et peut donc être réécrit comme :
  $_tL = \{_tL | T_x > t\}$

$_tV$: Réserve de l'assureur au temps t ;

- Le symbole représente la réserve pour un contrat d'assurance d'un assuré d'âge x à partir du temps t et peut donc être réécrit comme :
  $_tV = \mathrm{E}[\{_tL | T_x \geq t\}]$

$VP_{@t}$: La valeur présente au temps t ;

$VPA_{@t}$: La valeur présente actuarielle au temps t ;
$VPA_{@t} = \mathrm{E}[VP_{@t}]$

Termes

endowment : Mixte ;

Calcul de réserves

Perte prospective : la perte prospective, $_tL$, actualise les transactions qui vont arriver dans le futur :
$_tL = VP_{@t}(\text{prestations à payer}) - VP_{@t}(\text{primes à reçevoir}) + VP_{@t}(\text{frais à payer})$
S'il y a des frais pour les contrats, il suffit de l'ajouter à la perte.

Relation : $\{T_x - t | T_x > t\} \stackrel{d}{=} T_{x+t}$ où $\stackrel{d}{=}$ veut dire égale en distribution.

Réserve : La réserve, $_tV$, est l'espérance du montant que l'assureur devra payer dans le futur—alias, l'espérance de la perte. Il y a donc plusieurs façons de calculer ces réserves mais on utilise surtout la méthode prospective.
Selon la méthode **prospective**,

$$\begin{aligned} {}_tV &= \mathrm{E}\left[{}_tL\right] \\ &= VPA_{@t}(\text{prestations à payer}) - VPA_{@t}(\text{primes à reçevoir}) \\ &\quad + VPA_{@t}(\text{frais à payer}) \end{aligned}$$

Remarque : Pour des primes **nivelées** établies selon le principe d'équivalence du portefeuille, on pose $_0V = 0$. Donc :
$VPA_{@t}(\text{primes à reçevoir}) = VPA_{@t}(\text{prestations à payer}) + VPA_{@t}(\text{frais à payer})$

Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$$({}_hV + \pi_h)(1+i) = q_{x+h}b_{h+1} + p_{x+h}\,{}_{h+1}V$$

On ajoute la prime P à la réserve $_hV$ au temps h et accumule pour un an.
Ceci est équivalent à soit décéder à l'âge $x+h$ et payer la prestation en cas de décès b_{h+1} ou survive et ajouter à la réserve $_{h+1}V$ au temps $x+h$.

Formule générale [1] :

$$_{h+1}V = \frac{({}_hV + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

où

G_h La prime *(gross premium)* à recevoir à $t = h$;

e_h Les frais relié à la collecte de la prime *(per premium expenses)* ;

E_h Les frais reliés aux paiement de la prestation *(settlement expenses)*.

Alternativement, on peut récrire :

$$\underbrace{(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV + G_h - e_h)(1+i)$$

Formules alternatives pour Contrat d'assurance-vie entière (si π^{PE})

$$_hV = MA_{x+h} - \pi\ddot{a}_{x+h} = M\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right) = M\left(\frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x}\right)$$

Remarque : ces formules fonctionnent aussi dans le cas d'un contrat d'assurance-vie entière continu.

Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$$_{h+s}V = ({}_hV + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V)(s)$$

Profit de l'assureur

Profit de l'assureur en changeant les 3 composantes

$$\begin{aligned} {}_{k+1}V^A - {}_{k+1}V^E &= N_k({}_kV + G - e'_k)(1+i') - (b_{k+1} + E'_{k+1} - {}_{k+1}V)N_k q'_{x+k} \\ &\quad - [N_k({}_kV + G = e_k)(1+i) - (b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)N_k q_{x+k}] \end{aligned}$$

1. Si les frais ne sont pas applicables pour le problème, simplement poser $G_h = E_h = 0$.

Profit de l'assureur en changeant une seule composante :

Intérêt (i)	$N_k({}_kV + G - e_k)(i' - i)$
Frais e_k ou E_k	$N_k(e_k - e_k')(1+i) + (E_{k+1} - E_{k+1}')N_k q_{k+1}$
Mortalité q_{x+k}	$(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V)(N_k q_{x+k} - N_k q_{x+k}')$

Quote-Part de l'actif (*Asset shares*)

Alors que la réserve ${}_tV$ nous dit le montant que l'assureur doit avoir de côté, la quote-part de l'actif nous indique plutôt le montant réel que l'assureur a de côté pour le contrat donné.

$$AS_{K+1} = \frac{(AS_k + G_k - e_k')(1+i') - (b_{k+1} + E_{k+1}')q_{x+k}'}{p_{x+k}'}$$

Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantanné d'accroissement* de ${}_tV$.

$$\frac{\partial}{\partial t}({}_tV) = \delta_t {}_tV + G_t - e_t - (b_t + E_t) - {}_tV\mu_{[x]+t}$$

on peut approximer ${}_tV$ avec la Méthode d'Euler :

$${}_tV = \frac{{}_{t+h}V - h(G_t - e_t - (b_t + E_t)\mu_{[x]+t})}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+t}}$$

Modification de contrat

Valeur de rachat (Cash value at surrender)

Approximations

Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - v^n {}_np_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - v^n {}_np_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

Frais d'acquisition reportés

${}_tV^g$ Réserve de primes brutes ;

${}_tV^n$ Réserve de primes nettes ;

${}_tV^{FTP}$ Réserve de primes FTP ;

- Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition ;
- Ce frais supplémentaire est réparti sur la durée du contrat ;
- en anglais c'est le « *Deferred Acquisition Cost* (**DAC**) » ;
- Le frais est défini comme la différence entre la réserve pour un contrat avec primes brutes (avec des frais) et la réserve avec primes pures (sans frais) :
  $$DAC_t = {}_tV^g - {}_tV^n = {}_tV^e$$
- La réserve est négative pour les frais si $e_0 > e_k$.

Primes

P^e Chargement pour les frais ;

P^g Prime nivelée pour un contrat avec des frais ;

P^n Prime nivelée pour un contrat sans frais ;

$$P^e = P^g - P^n$$

Prime FTP

$$\pi_0^{\text{FTP}} = vq_{[x]}$$

Contrat vie entière

$$\pi_i^{\text{FTP}} = \frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}, \; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Contrat temporaire

$$\pi_i^{\text{FTP}} = \frac{A^{1}_{[x]+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}^{1}_{[x]+1:\overline{n-1}|}}, \; i = 1, 2, 3, \ldots$$

2 Modèles à plusieurs états

${}_tp_x^{ij}$ probabilité qu'un individu dans l'état i au temps x soit dans l'état j (où j peut être égale à i) au temps $x+t$.

${}_tp_x^{\overline{ij}}$ probabilité qu'un individu dans l'état i au temps x reste dans dans l'état i continument jusqu'au temps $x+t$.

Donc, où l'état 0 est la vie et 1 la mort, ${}_tp_x$ devient ${}_tp_x^{\overline{00}}$ (ou ${}_tp_x^{00}$ puisque décéder est un état absorbant) avec la nouvelle notation et ${}_tq_x$ devient ${}_tp_x^{01}$.