Contributeurs

1 Terminologie

arg max Si on pose que $\hat{\theta} = \arg\max L(\theta; \boldsymbol{X})$ on dit que la valeur maximale de $L(\theta; \boldsymbol{X})$ est au point $\hat{\theta}$.

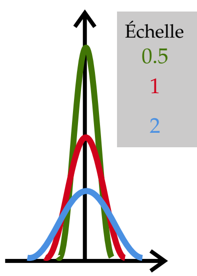
Paramètre

de forme Affecte la forme générale de la distribution ;

- « *shape parameter* » ;
- Il est important de saisir que le paramètre de forme n'a aucune incidence sur l'emplacement de la densité (paramètre de l'emplacement) ni sur l'échelle de la densité (paramètre d'échelle) ;
- Par exemple, la distribution Gamma a un paramètre de forme qui impact comment qu'elle est représentée ;
- Par exemple, la distribution exponentielle n'a pas de paramètre de forme et bien que l'échelle de la distribution peut être modifiée, la forme générale est constante.

d'échelle Sert à déterminer la forme et l'emplacement de la distribution en étirant ou compressant la densité ;

- « *scale parameter* » ;
- Le plus gros le paramètre d'échelle, le plus rependue la distribution ;
- On peut voir ceci visuellement où avec un paramètre d'échelle de 1, la distribution est inchangée :



de fréquence L'interprétation dépend du contexte.

- « *rate parameter* » ;
- Dans le cas d'un processus de Poisson, le paramètre de fréquence décrit le taux auquel les événements se produisent ;
- Souvent, il est défini comme le réciproque du paramètre d'échelle pour indiquer le taux de déclin d'une fonction exponentielle ;
- Des valeurs près de 1 impliquent un déclin lent alors que des valeurs près de 0 impliquent un déclin rapide.

d'emplacement Stipule où la densité est située.

- « *location parameter* » ;
- Plus précisément, indique où sur l'axe des x la distribution est centrée relatif à la distribution normale standard ;
- Une distribution normale standard est centrée à 0 donc un paramètre d'emplacement de 5 implique que la densité est centrée à $x = 5$.

Notation

S Les coûts d'un portefeuille.

$\rho(S)$ Une mesure de risque.

2 Mesures de risque

Capital économique Allocation de surplus de la compagnie ;

$$CE(S) = \rho(S) - \mathrm{E}[S]$$

Marge de risque associée à une prime $P(X)$;

$$MR(X) = \rho(X) - \mathrm{E}[X]$$

ρ introduit une marge de risque :

positive lorsque $\rho(X) \geq \mathrm{E}[X]$ pour une v.a. X avec $\mathrm{E}[X] < \infty$;

justifiée lorsque $\rho(X) = \rho(a) = a$ pour une v.a. X avec $\Pr(X = a) = 1, \alpha > 0$;

non-excessive lorsque $\rho(X) \leq a_{\max}$ pour une v.a. X s'il existe $a_{\max} < \infty$ tel que $\Pr(X \leq a_{\max}) = 1$;

2.1 Propriétés désirables d'une mesure de risque

Homogénéité

Soit une v.a. X et un scalaire $c > 0$, la mesure de risque ρ est dite homogène si $\rho(cX) = c\rho(X)$.

Invariance à la translation

Soit une v.a. X et un scalaire $c \in \mathbb{R}$, la mesure de risque ρ satisfait la propriété d'invariance à la translation si $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.

Ajouter un montant positif à un risque ajoute un montant équivalent à la mesure de risque.

Monotonicité

Soit les v.a. X_1 et X_2 tel que $\Pr(X \leq X_2) = 1$, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de monotonicité si $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$ ou si $\forall u \in (0, 1)$, $F_{X_1}^{-1}(u) \leq F_{X_2}^{-1}(u)$.

Sous-additivité

Soit les v.a. X_1 et X_2, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de sous-additivité si $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

Convexité

Soit les v.a. X_1 et X_2, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de convexité si $\rho(\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2) \leq \alpha\rho(X_1) + (1 - \alpha)\rho(X_2)$.

2.2 TVaR et VaR

- La **Value-at-Risk** correspond au $100\alpha^{e}$ pourcentile ;
- Si X représente les gains, on s'intéresse à l'extrémité inférieure de la distribution des gains et $TVaR_\alpha(X) = \mathrm{E}\left[X | X \leq \alpha\right] = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha} x f_X(x) dx$;
- Si X représente les pertes, on s'intéresse à l'extrémité supérieure de la distribution des gains et $TVaR_\alpha(X) = \mathrm{E}\left[X | X > \alpha\right] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} x f_X(x) dx$;

3 Modèles de risques non-vie

Notation

M Variable aléatoire du nombre de sinistres pour un risque ;

B_k Variable aléatoire du montant du k^{e} sinistre.

Modèle fréquence-sinistre

On défini la v.a. X comme étant les coûts (pertes) pour un risque tel que $\boxed{\forall M > 0}$:

$$X = \sum_{k=1}^{M} B_k$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}_{\mathrm{M}}\left[\mathrm{E}_{\mathrm{B}}[X|M]\right] \\ &= \mathrm{E}[M] \times \mathrm{E}[B] \\ \mathrm{Var}(X) &= \underbrace{\mathrm{Var}_{\mathrm{M}}(\mathrm{E}_{\mathrm{B}}[X|M])}_{\text{variabilité du } \textit{nombre} \text{ de sinistres}} + \underbrace{\mathrm{E}_{\mathrm{M}}\left[\mathrm{Var}_{\mathrm{B}}(X|M)\right]}_{\text{variabilité du } \textit{coût} \text{ par sinistre}} \\ &= \mathrm{E}[M]\mathrm{Var}(B) + \mathrm{E}^2[B]\mathrm{Var}(M) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) F_{B_1 + \cdots + B_k}(x)$$

Par exemple, pour $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$F_X(x) = \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) H(x; \alpha k, \beta)$$

$$\mathcal{L}_X(t) = P_M\left(\mathcal{L}_B(t)\right), \quad t > 0$$

$$\mathrm{E}\left[X \times \mathbf{1}_{\{X > b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) E\left[(B_1 + \cdots + B_k) \times \mathbf{1}_{\{B_1 + \cdots + B_k > b\}}\right]$$

Par exemple, pour $B_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$\mathrm{E}\left[X \times \mathbf{1}_{\{X > b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b; \alpha k + 1, \beta)$$