Contributeurs

Variables aléatoires

Notions aléatoires

1 Notion d'expérience aléatoire

Cadre dans lequel on observe différentes actions dues au hasard.

Notation

ω Le ***résultat*** d'une expérience aléatoire, alias *épreuve* ou *issue*.

Ω L'***ensemble* des résultats possibles**.

- Il s'ensuit que $\omega \in \Omega$.
- Par exemple, pour le lancer d'un dé où l'on désire savoir le résultat $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$.
- On dénote par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'**ensemble de toutes les parties** de Ω.

2 Notion d'événement aléatoire

Événement lié à une certain expérience aléatoire.

Un événement est tout **sous-ensemble** de Ω. Par exemple, pour l'expérience aléatoire de jeter un dé on a que l'ensemble des résultats possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement A « obtenir un nombre pair » s'écrit $A = \{2, 4, 6\}$. De ceci on déduit qu'à toute propriété définie sur Ω, on associe un sous-ensemble de Ω composé de tous les ω qui vérifient la propriété.

Algèbre de Boole des événements

Algèbre de Boole (« *boolean algebra* ») des événements

La classe $\mathcal{E}$ des événements est l'**algèbre de Boole de parties de** Ω, si elle contient Ω et est stable par intersection, réunion et complémentation.

Note On dit habituellement algèbre plutôt qu'algèbre de Boole.

Opérations logiques

Les opérations logiques que l'on peut effectuer sur les événements sont :

1. Soit les événements $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, alors :
   - $A \cup B$ est un événement réalisé ssi **au moins un** des deux est réalisé.
   - $A \cap B$ est un événement réalisé ssi **les deux** sont réalisés simultanément.
2. $\emptyset$ est un événement qui ne peut être réalisé appelé l'**événement impossible**. À chaque expérience, Ω est toujours réalisé et appelé l'**événement certain**.
3. $A \subset \Omega$ est un événement.
   - Le complément A^c ou $\overline{A}$ est appelé **événement contraire de** A et se réalise si $\omega \notin A$.
4. La **différence de deux événements** A et B est $\boxed{A \setminus B = A \cap B^c}$ se réalise si A est réalisé mais pas B.
5. La **différence symétrique** de A et B est $\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$ se réalise si l'un des deux événements est réalisé mais pas l'autre.
6. Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'événement A_n représente « **gagner** n **matchs** », alors
   - $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ représente « **gagner au moins un match** ».
   - $\cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ représente « **ne pas gagner de matchs** ».
7. Deux événements sont **incompatibles** si $\boxed{A_1 \cap A_2 = \emptyset}$.
   - On peut aussi dire que les parties de Ω représentées par A_1 et A_2 sont disjointes.
   - Si deux événements sont incompatibles, on a une somme au lieu d'une réunion avec $\boxed{A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2}$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
8. Si les événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment une **partition** de Ω, on dit que ses événements $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ forment un **système exhaustif** de Ω.
9. La suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :

   croissante ssi $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

   décroissante ssi $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$
10. Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements d'un ensemble Ω, on représente que :

    une infinité de A_n est réalisé en écrivant que, quel que soit le rang $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des événements de rang supérieur (à k) qui sont réalisés : $\boxed{\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n}$.

    un nombre fini de A_n est réalisé en écrivant qu'il existe un rang tel qu'à partir de ce rang, tous les événements réalisés sont les contraires des événements A_n : $\boxed{\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n^c}$.

Limites de suite d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω. On défini les limites inf et sup d'événements par :

$$A_* = \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$A^* = \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

De plus, si les ensembles A_* et A^* coïncident, alors on écrit $A = A_* = A^* = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Propositions

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ une suite d'événements de Ω.

i) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Espaces probabilisables

Power set $\mathcal{P}$

Le « *power set* » $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble Ω ; il est plus facile de donner un exemple que d'expliquer en mots.

Exemple de « *power set* »

Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{\begin{matrix} \{\} \\ \{a\}, \{b\}, \{c\} \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \\ \{a,b,c\} \end{matrix}\right\}$$

Pour un ensemble de n éléments, il y aura 2^n sous-ensembles possibles. Ceci découle du binaire ! Voir cette page pour plus d'information.

Note En anglais, on appelle la tribu $\mathcal{A}$ composée des « ***events*** » le « *event space* » et l'ensemble Ω composé des « ***outcomes*** » le « *sample space* ».

Tribu d'événements

La tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω tel que :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors l'événement $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Espace probabilisable (ou mesurable)

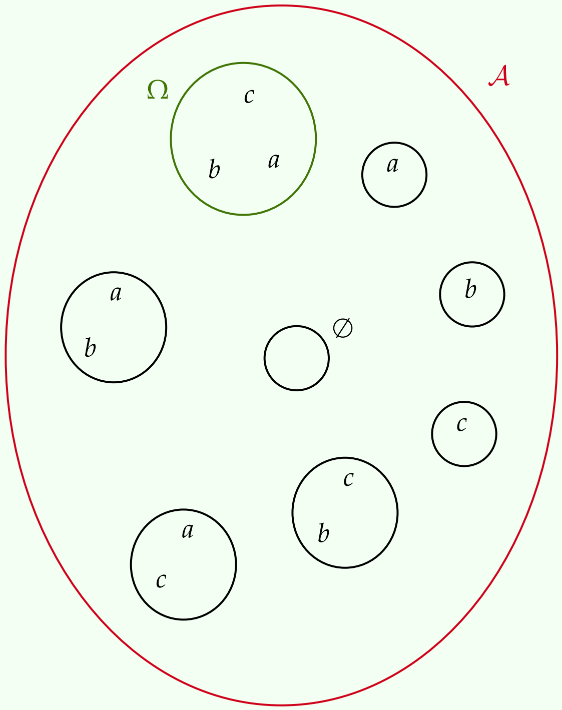
Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ composé d'un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.

Les éléments de Ω sont appelés ***éventualités*** (« *outcomes* ») et les éléments de $\mathcal{A}$ ***événements*** (« *events* »).

› En anglais, on dit « *measurable space* ».

Visualisation

Voici une visualisation de ce que représente l'espace mesurable :



On peut donc visualiser les 3 conditions dans la définition de la tribu. L'ensemble Ω est contenu, tous les événements possibles (alias toutes les combinaisons de $\{a, b, c\}$ possibles) sont contenus et tous leurs compléments sont contenus. Finalement, toute union d'événements sera contenue dans la tribu !

Propriétés de la tribu

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

a) $\boxed{\emptyset \in \mathcal{A}}$.

b) $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, alors $\boxed{\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}}$ et $\boxed{\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}}$.

c) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}}$.

d) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\liminf A_n \in \mathcal{A}}$.

e) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\boxed{\limsup A_n \in \mathcal{A}}$.

Note Voir la page 19 des notes de cours du chapitre 1 pour les preuves.

Variables aléatoires

Variable aléatoire

On définit une **variable aléatoire** comme une *fonction mesurable*. Pour ce faire, on défini 2 espaces mesurables :

1. On pose que le premier est $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. On pose que le deuxième est tout ensemble E et sa tribu $\mathcal{E}$: $(E, \mathcal{E})$.
   - Habituellement, on pose que $E = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

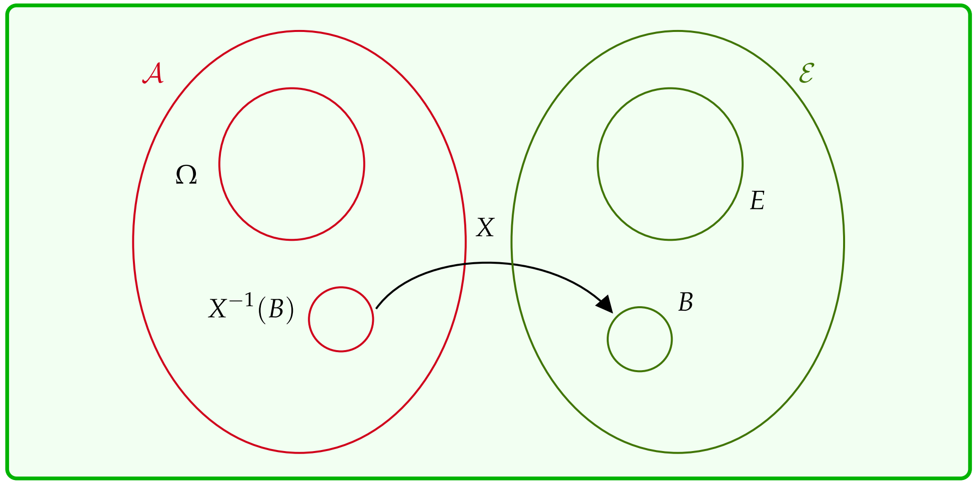
Une fonction mesurable est une fonction qui associe les éléments de Ω aux éléments de E avec quelques propriétés additionnelles. On note qu'en associant les éléments de Ω, la fonction associe les ***éventualités*** et non les *événements* aux éléments de E.

On désire avoir une correspondance entre les événements réalisés de $\mathcal{A}$ et l'ensemble transformé d'événements $\mathcal{E}$. Pour ce faire, on impose que la variable aléatoire (alias, la fonction mesurable) $X : \Omega \to E$ est définie telle que l'image réciproque $X^{-1}(B)$ sur Ω de tout ensemble $B \in \mathcal{E}$ sur E : $\boxed{X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{E}}$.

Donc, une **variable aléatoire réelle** est toute application à valeurs réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall$ intervalle B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ soit un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

Visualisation

On peut visualiser que l'événement B, où $B \in \mathcal{E}$, a un réciproque $X^{-1}(B)$ où $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.



En posant $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on obtient la *tribu borélienne*.

Tribu borélienne

La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous ses intervalles. Les éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sont appelés les ***boréliens*** de $\mathbb{R}$.

Pour une v.a. réelle X, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ on a $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Bref, $\boxed{(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})}$. On dit que la tribu $X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sur Ω est la ***tribu des événements engendrés par*** X.

Probabilités

Mesure

Pour un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, une fonction $\boxed{\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, \infty]}$ s'appelle une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si :

1. Elle attribue une masse de zéro à l'ensemble vide : $\boxed{\mathbb{P}(\emptyset) = 0}$.
2. Elle est « *countably additive* » : $\boxed{P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{A}}$.

Mesure de probabilité

Pour un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, on appelle ***probabilité*** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :

i) $\boxed{P(\Omega) = 1}$.

ii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'événements deux à deux disjoints, $\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)}$.

La mesure de probabilité est donc une mesure qui est **restreint** sur $[0, 1]$.

Espace probabilisé

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle un **espace probabilisé** et est composé de :

Ω Le « *sample space* ».

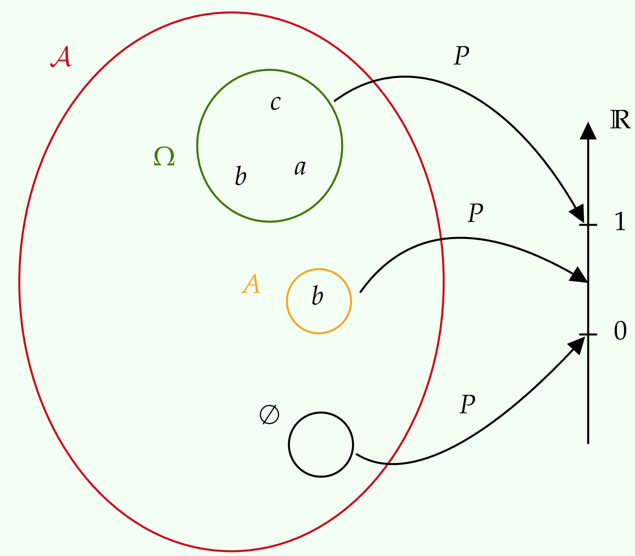
$\mathcal{A}$ Le « *event space* ».

P La ***mesure* de probabilité**.

› En anglais, on dit « ***probability space*** ».

Visualisation

Voici une visualisation de ce que représente l'*application* P :



On peut donc visualiser les 2 conditions dans la définition de l'espace probabilisé. La probabilité d'observer l'ensemble Ω est de 1 car il contient tous les événements possibles. La probabilité d'un événement sera contenu entre 0 et 1 ce qui veut dire que la probabilité de quelques événements *disjoints* correspond à la somme des probabilités.

On complète la notion précédente sur l'espace borélien avec $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ où P_X est appelée loi de probabilité de X. On définit $P_X(B) = P(X \in B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$.

Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Alors :

a) $P(\emptyset) = 0$.

b) Si A et B sont des événements disjoints, alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

c) Si A et B sont des événements quelconques, alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

d) Si A et B sont des événements tels que $A \subset B$, alors $\boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$ et $\boxed{P(A) \leq P(B)}$.

e) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$.

f) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements quelconques, alors $\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)}$.

g) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow \emptyset$, alors $\boxed{P(A_n) \downarrow 0}$.

h) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \downarrow A$, alors $\boxed{P(A_n) \downarrow P(A)}$.

i) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements tels que $A_n \uparrow A$, alors $\boxed{P(A_n) \uparrow P(A)}$.

Lemmes de Borel-Cantelli

Lemme de Borel-Cantelli *(1ère partie)*

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements telle que : $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty}$, alors $\boxed{P\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 0}$.

Probabilité conditionnelle

Formule de Bayes *(2 événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $\Pr(A) \neq 0$, $\Pr(A^C) \neq 0$ et $\Pr(B) \neq 0$. Alors :

$$\Pr(A \setminus B) = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|A^C)\Pr(A^C)}$$

Théorème des probabilités totales

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition de Ω telle que $\forall i$, $\Pr(A_i) \neq 0$. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$, $\boxed{\Pr(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \Pr(B|A_i)\Pr(A_i)}$.

Formule de Bayes *(n événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ une partition **finie** de Ω telle que $\forall i$, $\Pr(A_i) \neq 0$. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$ tel que $\Pr(B) \neq 0$,

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(B|A_i)\Pr(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \Pr(B|A_j)\Pr(A_j)}$$

Indépendance

Indépendance *(2 événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A et B deux événements de $\mathcal{A}$. Alors A et B sont indépendants pour la probabilité P **si et seulement si** $\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)}$.

Il est important de bien saisir que le notion d'indépendance n'est pas intrinsèque aux événements, mais *dépend* de la probabilité P choisie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Deux événements peuvent êtres indépendants pour une probabilité, mais être dépendants pour une autre.

Propriétés *(2 événements)*

1. A^C et B sont indépendants.
2. A et B^C sont indépendants.
3. A^C et B^C sont indépendants.

Indépendance *(n événements)*

Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ un n-uple d'événements. On dit qu'ils sont **indépendants**, ou ***mutuellement indépendants***, **si et seulement si** $\forall k = 1, \ldots, n$, si $\forall$ sous-ensemble $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ de k événements choisis parmi les $(A_1, \ldots, A_n)$, on a $\boxed{\Pr(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \Pr(A_{i_1}) \times \cdot \times \Pr(A_{i_k})}$.

Indépendance *(suite d'événements)*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et une suite d'événements indépendants $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{A}$. Alors on a $\boxed{\Pr\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \Pr(A_n)}$.

Lemme de Borel-Cantelli (2ème partie)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendants de $\mathcal{A}$ telle que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) = \infty}$, alors $\boxed{\Pr\left(\limsup_n A_n\right) = 1}$

Fonction de répartition

Mesure image

La mesure image, ou « *pushforward measure* » en anglais, est obtenue « *by pushing* » une mesure d'un espace mesurable à un autre avec une fonction mesurable.

Loi de probabilité

La *mesure image* de P par X, notée $\boxed{P_X}$, s'appelle la ***loi de probabilité*** de X.

Fonction de répartition

Pour une mesure de probabilité P_X, on a que $\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction F est définie comme $\boxed{F(x) = P_X(]-\infty, x])}$. Cette fonction a les propriétés suivantes :

1. F est croissante au sens large.
2. F est continue à droite.
3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Note Il y a une relation biunivoque entre les mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et les fonctions de répartition.

Classification des lois de probabilité sur la tribu borélienne

Pour une probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, on classifie les lois de probabilités en 2 groupes :

1 Diffuse

On dit que P est diffuse si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P(x) = 0}$.

2 Discrète

On dit que P est discrète s'il existe un ensemble au plus dénombrable S tel que $\boxed{P(S) = 1}$.

Cependant, si P désigne une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ni diffuse ni discrète, alors $\exists \alpha \in]0,1[$, P_1 une loi discrète et P_2 une loi diffuse tel que $\boxed{P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2}$.

Variable aléatoire discrète

Toute variable aléatoire X telle qu'il existe un sous-ensemble fini ou dénombrable S_X (ou tout simplement S) de $\mathbb{R}$ vérifiant $P(\{X \in S\} = 1$. On peut donc définir $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} : P_X(\{x\}) = P((\{X = x\}) > 0\}}$. Donc, on note $p_x = P((\{X = x\}) = P_X(\{x\})$

Loi continue

Une mesure de probabilité absolument continue est une mesure de probabilité de la forme $\boxed{P(B) = \int_B f(x)dx}$ $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ où f est une densité de probabilité. C'est-à-dire, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions :

1. $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Toute variable aléatoire X telle qu'il existe un sous-ensemble fini ou dénombrable S_X (ou tout simplement S) de $\mathbb{R}$ vérifiant $P(\{X \in S\} = 1$. On peut donc définir $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} : P_X(\{x\}) = P((\{X = x\}) > 0\}}$. Donc, on note $p_x = P((\{X = x\}) = P_X(\{x\})$