

## CONTRIBUTEURS

### ACT-2007 Mathématiques actuarielles vie II

**aut.** Nicholas Langevin

**aut.** Gabriel Crépeault-Cauchon

**aut.** Alexandre Turcotte

**aut., cre.** Alec James van Rassel

**src.** Ilie-Radu Mitric

## Rappels

### Woolhouse

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x - {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}))$$

### DUD

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \stackrel{DUD}{=} A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}$$

### Relation

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + v^{\frac{1}{m}} {}_{\frac{1}{m}}p_x \ddot{a}_{x+\frac{1}{m}:\overline{n-\frac{1}{m}}|}^{(m)}$$

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

### Sélection à l'âge $[x]$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{[x]+h:\overline{n-h}}^1 &= \int_0^{n-h} e^{-\delta t} {}_tp_{[x]+h} \mu_{[x]+h+t} dt \\ &= \int_h^n e^{-\delta(s-h)} \frac{{}_sp_{[x]}}{{}_hP_{[x]}} \mu_{[x]+s} ds \end{aligned}$$

# 1 Calcul de réserve

## Notation

${}_hL$  : Perte nette future sur un contrat d'assurance pour un individu d'âge ( $x$ ) au temps  $h$ .

- Puisque la perte est évaluée au temps  $h$ , on suppose que l'assuré va décéder par après et conditionne à sa survie :

$${}_hL = \{{}_hL | T_x > h\}$$

${}_hV$  : Réserve nette pour un contrat d'assurance pour un individu d'âge ( $x$ ) au temps  $h$ .

- La réserve est basée sur ce qu'on s'attend à avoir comme perte :

$${}_hV = E[{}_hL]$$

${}_hV^g$  : Réserve pour contrat avec primes brutes (lorsqu'il y a des frais).

${}_hV^n$  : Réserve pour contrat avec primes pures (lorsqu'il n'y a pas de frais).

$VPA_{@h}$  : La valeur présente au temps  $h$ .

$VPA_{@h}$  : La valeur présente anticipée au temps  $h$ .

$$VPA_{@t} = E[VPA_{@h}]$$

## Notation pour un contrat d'assurance vie entière

$${}_hL = MZ_{x+h} - \pi \ddot{Y}_{x+h}$$

$$\text{Var}({}_hL) = \left(M + \frac{\pi}{d}\right)^2 [2A_{x+h} - (A_{x+h})^2]$$

$${}_hV^n = MA_{x+h} - \pi \ddot{a}_{x+h}$$

$$\equiv \left(M + \frac{\pi}{d}\right) A_{x+h} - \frac{\pi}{d}$$

Sous le principe d'équivalence du portefeuille (PEP) :

$${}_hV^n \stackrel{PEP}{=} M \left[ \frac{A_{x+h} - A_x}{1 - A_x} \right]$$

$$\stackrel{PEP}{=} M \left[ 1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x} \right]$$

## Notation pour un contrat d'assurance avec primes non-nivelées

$${}_hL = b_{K_{x+h}+h+1} v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{i+h} v^i$$

$${}_hV^n = \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+h+1} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+h} v^i {}_j p_{x+h}$$

### Note

- > La prestation  $b$  est payable au moment  $K_{x+h} + h + 1$ .
- > Cependant, puisqu'on évalue la perte au temps  $h$ , il y a seulement  $K_{x+h} + 1$  années à actualiser.

## Calcul de réserves

### Méthodes d'évaluation de la réserve

Prospective	Rétrospective
${}_hV^g = VPA_{@t} \left( \begin{array}{c} \text{prestations futures} \\ \text{à payer} \end{array} \right) + VPA_{@t} \left( \begin{array}{c} \text{frais futurs} \\ \text{à payer} \end{array} \right) - VPA_{@t} \left( \begin{array}{c} \text{primes futures} \\ \text{à recevoir} \end{array} \right)$	${}_hV^g = \frac{{}_0V^g}{{}_hE_x} + \frac{VPA_{@0} \left( \begin{array}{c} \text{primes recues} \\ \text{avant } h \end{array} \right)}{{}_hE_x} - \frac{VPA_{@0} \left( \begin{array}{c} \text{prestations à payer} \\ \text{avant } h \end{array} \right)}{{}_hE_x}$

Exemple pour un contrat d'assurance vie mixte  $n$  années :

**Méthode prospective**  ${}_hV^n = MA_{x+h:\overline{n-h}|} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$

**Méthode rétrospective**  ${}_hV^n = 0 + \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - MA_{x:\overline{h}|}^1}{{}_hE_x}$

L'assurance mixte devient une temporaire puisque la méthode rétrospective considère seulement les prestations à payer **avant**  $h$ .

**Relation** :  $\{T_x - t | T_x > t\} \stackrel{d}{=} T_{x+t}$  où  $\stackrel{d}{=}$  veut dire égale en distribution.

## Relation récursive pour les réserves (discrètes)

$${}_hV^n = [p_{x+h+1}V^n + q_{x+h}b_{h+1}]v - \pi_h$$

$${}_hV^g = [p_{x+h+1}V^n + q_{x+h}(b_{h+1} + E_{h+1})]v - (G_h - e_h)$$

La réserve pour l'année  $h$  est composée de :

- > La réserve au temps  $h + 1$  si l'assuré survie l'année  $h$  et
- > la prestation payable (et frais encourus) à  $h + 1$  si l'assuré décède lors de l'année  $h$ ,
- > actualisés de  $h + 1$  à  $h$ ,
- > moins la prime (plus les frais) reçus de l'assuré au début de l'année  $h$ .

où

$G_h$  La prime (gross premium) à recevoir à  $t = h$ ;

$e_h$  Les frais liés à la collecte de la prime (per premium expenses);

$E_h$  Les frais liés au paiement de la prestation (settlement expenses).

Avec la réserve pour l'année  $h + 1$  isolée :

$${}_{h+1}V^g = \frac{({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - (b_{h+1} + E_{h+1})q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

Avec le montant net au risque réserve pour l'année  $h + 1$  isolé :

$$\underbrace{(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g)}_{\text{montant net au risque}} q_{x+h} = ({}_hV^g + G_h - e_h)(1+i) - {}_{h+1}V^g$$

## Approximation classique pour les réserves à durées fractionnaires

$${}_{h+s}V^g \approx ({}_hV^g + G_h - e_h)(1-s) + ({}_{h+1}V^g)(s), s \in (0,1)$$

## Profit de l'assureur

## Notation

$N_h$  : Nombre de contrats d'assurance vie (identiques) du portefeuille en vigueur au temps  $h$ .

${}_{h+1}V^E$  : Réserve totale pour l'année  $h + 1$  du portefeuille selon l'intérêt ( $i$ ), la mortalité ( $q_{x+h}$ ) et les frais ( $e_h$  et  $E_h$ ) **espérés** (Expected) pour l'année  $h$ .

${}_{h+1}V^A$  : Réserve totale pour l'année  $h + 1$  du portefeuille selon l'intérêt ( $i'$ ), la mortalité ( $q'_{x+h}$ ) et les frais ( $e'_h$  et  $E'_h$ ) **réellement** (Actually) encourus lors de l'année  $h$ .

Le profit de l'assureur pour l'année  $h$  sera donc  ${}_{h+1}V^A - {}_{h+1}V^E$ .

Si uniquement \_\_\_\_\_ change(nt), alors le profit sur \_\_\_\_\_ pour l'année  $h$  est :

**les frais**  $N_h [(e_h - e'_h)(1+i) + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}]$ .

**l'intérêt**  $N_h ({}_hV^g + (G_h - e_h)) (i' - i)$ .

**la mortalité**  $(b_{h+1} + E_{h+1} - {}_{h+1}V^g) (N_h q_{x+h} - N_h q'_{x+h})$

S'il y a des différentes ordre, il suffit de remplacer les composantes par les nouvelles.

Par exemple :

- > Si l'ordre est frais-intérêt-mortalité, le profit sur l'intérêt devient  $N_h ({}_hV^g + (G_h - e'_h)) (i' - i)$ .
- > Si l'ordre est intérêt-frais-mortalité, le profit sur les frais devient  $N_h [(e_h - e'_h)(1+i') + (E_{h+1} - E'_{h+1})q_{x+h}]$ .

## Équation de Thiele

Cette équation permet d'obtenir le *taux instantané d'accroissement* de  ${}_tV$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tV^g = \delta_t {}_tV^g + (G_t - e_t) - (b_t + E_t - {}_tV^g)\mu_{[x]+t}$$

- > Applique continûment l'intérêt à la réserve au temps  $t$ .
- > Le montant est fixe et payé au début de l'année  $t$ .
- > Applique continûment la mortalité au montant payable pour un décès à  $t$ .

on peut approximer  ${}_hV^g$  avec la Méthode d'Euler :

$${}_hV^g = \frac{{}_{t+h}V^g - h [(G_h - e_h) - (b_h + E_h)\mu_{[x]+h}]}{1 + h\delta_t + h\mu_{[x]+h}}$$

## Frais d'acquisition reportés

${}_hV^e$  Réserve pour les frais d'acquisition reportés (DAC).

$${}_hV^e = DAC_h = VPA_{@t}(\text{frais}) - VPA_{@t}(\text{primes pour les frais futurs}) \\ \equiv {}_hV^g - {}_hV^n$$

- > « expense reserve » ou « Deferred Acquisition Costs ».
- > Si  $e_0 > e_h$ , c'est une réserve négative.
- > Si  $e_0 = e_h$  alors  ${}_hV^g = {}_hV^n = 0$  et  $DAC_h = 0$ .

$P^g$  : Prime nivelée pour un contrat avec des frais (alias la prime brute  $G$ ).

$P^n$  : Prime nivelée pour un contrat sans frais (alias la prime nette  $P$ ).

$P^e$  : Prime pour les frais (« *expense premium* »).

$$P^e = P^g - P^n$$

## FTP

${}_hV^{FTP}$  Réserve de primes FTP.

$\pi_0^{FTP}$  Prime FTP pour la première année.

$$\pi_0^{FTP} = {}_1P_{[x]} \underset{\substack{\text{contrat} \\ \text{vie entière}}}{=} b v q_{[x]}$$

$\pi_h^{FTP}$  Prime nivelée FTP pour les  $h = 1, 2, \dots$  autres années.

$$\pi_h^{FTP} = P_{[x]+1} \underset{\substack{\text{contrat} \\ \text{vie entière}}}{=} b \frac{A_{[x]+1}}{\ddot{a}_{[x]+1}}$$

- › Habituellement, il y a plus de frais au temps d'acquisition.
- › Ces frais supplémentaire sont répartis sur la durée du contra.
- › Habituellement, on utilise la prime nette pour faire les calculs puisque c'est plus simple.
- › Lorsqu'on établit l'équation pour la perte, utilisée les frais et la prime applicables à partir de la deuxième année et soustraire la différence pour la première.

## 2 Modèles à plusieurs états

${}_t p_x^{ij}$  probabilité qu'un individu dans l'état  $i$  au temps  $x$  soit dans l'état  $j$  (où  $j$  peut être égale à  $i$ ) au temps  $x + t$ .

${}_t \bar{p}_x^{i\bar{j}}$  probabilité qu'un individu dans l'état  $i$  au temps  $x$  reste dans dans l'état  $i$  continument jusqu'au temps  $x + t$ .

Donc, où l'état 0 est la vie et 1 la mort,  ${}_t p_x$  devient  ${}_t \bar{p}_x^{\bar{0}0}$  (ou  ${}_t p_x^{00}$  puisque décéder est un état absorbant) avec la nouvelle notation et  ${}_t q_x$  devient  ${}_t p_x^{01}$ .