

# 1 Distribution multivariées

## 1.1 Classes de Fréchet

Soit  $F_1, \dots, F_n$  des fonction de répartition univariées et  $F_X = F_{X_1, \dots, X_n}$  la fonction de répartition du vecteur  $\mathbf{X}$ .

On définit la classe de Fréchet  $CF(F_1, \dots, F_n)$  par l'ensemble des fonctions de répartition  $F_X$  dont les marginales sont  $F_1, \dots, F_n$ .

### 1.1.1 Bornes d'une classe de Fréchet

Si  $F_X \in CF(F_1, \dots, F_n)$ , alors

$$W(x_1, \dots, x_n) \leq F_X(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n)$$

où

$$W(x_1, \dots, x_n) = \max \left( \sum_{i=1}^n F_i(x_i) - (n-1); 0 \right)$$

$$M(x_1, \dots, x_n) = \min(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Preuve des bornes à savoir!

## 1.2 Comonotonicité

Les composantes de  $\mathbf{X}$  sont dites comonotones si  $X_i = F_{X_i}(U)$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $U \sim U(0, 1)$ .

### 1.2.1 Algorithme

1. Simuler  $U^{(j)}$  de la v.a.  $U \sim U(0, 1)$
2. Calculer  $X_i^{(j)} = F_{X_i}(U^{(j)})$ ,  $i = 1, \dots, n$

variable comonotone et la borne supérieure de Fréchet

Le vecteur  $\mathbf{X}$  a des composantes comonotones ssi

$$F_{X(x_1, \dots, x_n)} = M(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve à savoir

Additivité des  $VaR$  et  $TVaR$

On définit  $S = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_{X_i}(U) = \varphi(U)$ , où  $\varphi$  est une fonction crois-

1. L'antimonotonicité est seulement définie pour  $n = 2$ .

sante pour  $y \in (0, 1)$ . Alors, on a

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i)$$

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i)$$

Preuve à savoir

## 1.3 Antimonotonicité

Un couple de v.a.<sup>1</sup>  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  dont les composantes sont définies par  $X_1 = F_{X_1}(U)$  et  $X_2 = F_{X_2}(1 - U)$  est antimonotone par définition.

### 1.3.1 Algorithme

1. Simuler  $U^{(j)}$  de la v.a.  $U \sim U(0, 1)$
2. Calculer  $X_1^{(j)} = F_{X_1}(U^{(j)})$  et  $X_2^{(j)} = F_{X_2}(1 - U^{(j)})$

variable antimonotone et la borne inférieure de Fréchet

Le vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  a des composantes antimonotone ssi

$$F_{X(x_1, x_2)} = W(x_1, x_2)$$

Preuve à savoir

## 1.4 Loi de Poisson bivarieée Teicher

- > Couple de v.a.  $(M_1, M_2)$  dont les marginales sont  $Pois(\lambda_1)$   $Pois(\lambda_2)$
- > paramètre de dépendance  $\alpha_0$  avec  $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$
- >  $\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$  et  $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$
- > On définit les v.a.  $M_1$  et  $M_2$  telles que (avec  $K_i \sim Pois(\alpha_i)$ )  
 $M_1 = K_1 + K_0$  et  $M_2 = K_2 + K_0$   
 avec  $M_i \sim Pois(\lambda_i)$

### 1.4.1 Fonction de masse de probabilité (fmp)

$$f_{M_1, M_2}(m_1, m_2) = e^{-\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1, m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1-j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2-j)!}$$

Preuve à savoir

#### 1.4.2 Fonction génératrice des probabilités (fgp)

$$P_{M_1, M_2}(t_1, t_2) = e^{(\lambda_1 - \alpha_0)(t_1 - 1)} e^{(\lambda_2 - \alpha_0)(t_2 - 1)} e^{\alpha_0(t_1 t_2 - 1)}$$

Preuve à savoir

Covariance de  $M_1$  et  $M_2$   $\text{Cov}(M_1, M_2) = \text{Var}(K_0) = \alpha_0$  Preuve à savoir

#### 1.4.3 Connaître la loi de $N = M_1 + M_2$

À terminer