2 Données manquantes

Le chapitre utilise la **mise en contexte** suivante :

- Il y a une réclamation pour un accident d'auto en Ontario ;
- Le contrat d'assurance couvre les frais médicaux ;
- On désire calculer la probabilité de paiement (variable réponse) en fonction de :
  1. La gravité de l'accident (variable explicative) ;

     3 niveaux : mineur-majeur-catastrophique ;
  2. La souffrance du réclamant ;

     Échelle de 1 (peu) à 5 (beaucoup) ;

Problèmes de modélisation :

- Comment analyser les données malgré les valeurs manquantes ?
- Quels enjeux ou problèmes devrait-on considérer dans la modélisation ?

Terminologie

Notation

Y_{ij} : Valeur de la variable explicative j pour l'observation i où $j \in \{1,\ldots,p\}$ et $i \in \{1,\ldots,n\}$;

$\mathbf{Y}_{n\times p}$: Matrice contenant les données **complètes** ;

$\mathbf{Y}$ est partitionné en deux, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_{obs}, \mathbf{Y}_{mis}\}$

$\mathbf{Y}_{obs}$: matrice avec les données ayant toutes les valeurs observées ;

$\mathbf{Y}_{mis}$: matrice avec les données comportant des valeurs manquantes ;

$\mathbf{R}_{n\times p}$: **Matrice de réponse** des variables indicatrices $R_{ij} = \mathbf{1}_{\{Y_{ij}\text{ observé}\}}$;

θ : **Paramètre de nuisance**

Mécanisme de non-réponse

La distribution de $\mathbf{R}$ est le *mécanisme de non-réponse* ;

Types de données manquantes :

1. **MCAR** : Missing Completely at Random ;
   - Le patron de non-réponse (pattern of missing values) est indépendant des données $\mathbf{Y}$;
   - Il s'ensuit que la probabilité de réponse $f(R|\mathbf{Y},\theta)$ ne dépend pas des données complètes $\mathbf{Y}$:
     $$f(R|\mathbf{Y},\theta) = f(R|\theta)$$

     Exemple avec un θ de 10%

     On perd 10% des valeurs mesurées alors, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,p\}$, la distribution du mécanisme de non-réponse :
     $$R_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\theta = 10\%)$$
   - Tester la différence de moyennes :

     $\mathcal{H}_0 : \left\{p_{\text{Cat, mis}} - p_{\text{Cat, obs}} = 0\right\}$ et $\left\{p_{\text{Maj, mis}} - p_{\text{Maj, obs}} = 0\right\}$

     Est équivalent à tester :

     $\mathcal{H}_0$: les données sont MCAR

     avec un test du khi-carré de Pearson ;
2. **MAR** : Missing at Random ;
   - La probabilité de réponse $f(R|Y,\theta)$ dépend seulement de variables qui ont été observées dans le jeu de données $\mathbf{Y}_{\text{obs}}$:
     $$f(R|\mathbf{Y},\theta) = f(R|\mathbf{Y}_{\text{obs}},\theta)$$
   - Exemple de patients d'un hôpital : les données sont MAR lorsque la probabilité de non-réponse ne dépend pas de la qualité de vie sachant l'âge ;
3. **NMAR** : Not Missing at Random ;
   - Le patron de non-réponse pour $\mathbf{Y}$ est relié à sa valeur et les variables observées ;

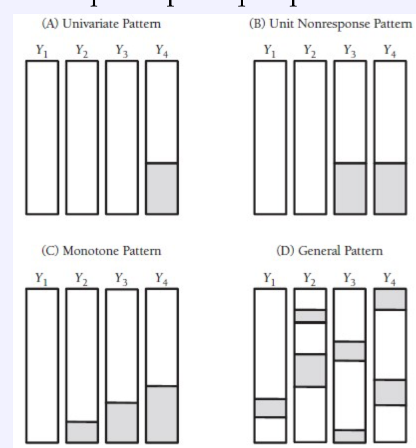
     Ce même si ont conditionne sur les valeurs observées ;
   - La probabilité de réponse $f(R|\mathbf{Y},\theta)$ dépend également de $\mathbf{Y}_{\text{mis}}$ et ne peut pas être simplifiée ;
   - Pour exemple, les patients malades ne répondent pas aux sondages en plus des patients plus jeunes et donc la probabilité de réponse dépend de la qualité de vie ;
   - Pour exemple, la probabilité de réponse dépend d'une autre variable non observée ;

Visualisation et détection

Traiter les données manquantes

1. Détectez, visualisez et documentez les données manquantes ;
2. Identifier le patron de non-réponse ;

   Pour exemple, voici quelques patrons de non-réponse pour quelques variables :



3. Comparer les distributions des autres variables selon la valeur des variables indicatrices $R_{1j}, \ldots, R_{nj}$;

Identification des types de non-réponse

- Pour les variables continues, on fait un **test** t **sur les différences de moyenne** au lieu du khi-carré de Pearson comme pour MCAR ;
- Problème de comparaisons multiples ;
- Le test MCAR de Little est peu utile, mais peut adresser le problème de comparaisons multiple avec un hypothèse testant toutes les variables ;

Traitement des données manquantes

En continuant la mise en contexte, on suppose qu'on veut estimer le vecteur **fi** des coefficients de la régression logistique pour prédire la probabilité de paiement ; Une question valide est si les options pour le traitement des données manquantes dépendent du **type** de non-réponse
Options de traitement :

1. Utiliser seulement les **cas complets** *(complete-case analysis)* ;
   - L'option par défaut pour les fonctions :

     `lm, glm, na.rm, na.omit`

   - **Impact** :

     ↓ taille de l'échantillon

     ↑ variance des estimateurs

     ↓ puissance des tests

   - Uniquement valide sous MCAR ;
2. Utiliser seulement les **cas disponibles** *(available-case analysis)* ;
   - Utilise uniquement les données observées pour l'analyse ;
   - Rarement applicable ;
   - ↓ la taille de l'échantillon **moins** qu'en utilisant d'uniquement les cas complets ;
   - Sans biais **uniquement** sous MCAR ;
3. **Imputation** simple par la **moyenne ou** la **médiane**
   - Substitue les `NA` par la moyenne ou médiane de la variable ;
   - **Impact** :

     ↓ variabilité de la variable

     ↓ corrélation de la variable avec les autres

   - Même sous MCAR, les données sont **sévèrement** « distorted » ;
4. Imputation simple par une régression ;
   - Substitue les `NA` par la prévision d'une régression de la variable sur les autres avec les cas complets ;
   - Si plusieurs variables ont des donnés manquantes, leurs patrons doivent être traités séparément ;
   - L'inter **corrélation** des variables est **conservée**, mais est **surestimée** (même si MCAR) ;
   - La variance est **sous-estimée**, mais **moins** qu'avec l'imputation par la moyenne ;
5. Imputation stochastique par une régression ;
   - Ajoute un terme d'erreur ε (normalement distribué) à la prévision de la régression ;
   - *Si plusieurs variables sont manquantes dans un patron, les erreurs sont corrélées*
   - Corrige les biais pour la méthode d'imputation par la régression (sous-estimation de la variance et surestimation de l'inter corrélation des variables) ;
   - La variance des paramètres est **sous-estimée**, *sauf si on en tient compte dans les calculs* ;
   - Fonctions `R` utiles du paquetage `mice` :

     `mice.impute.norm.nob(),`
     `mice.impute.norm()`
6. Imputation simple *hot-deck* ;
   - Substitue les valeurs `NA` d'une observation par les valeurs observées d'une autre observation choisie aléatoirement ; ;
   - Habituellement, cette observation fait parmi d'un sous-ensemble d'observations *proches* (pensez au K-NN, clustering, etc.) ;
   - Souvent utilisée pour les sondages ;
   - N'altère par les distributions univariées
   - ↓ l'inter corrélation des variables ;
   - Biais des estimations des coefficients **fi** de régression ;
7. Imputation **multiple** ;
   - Répète l'imputation stochastique et agrège les résultats ;
   - Ce faisant, la variabilité additionnelle dût à l'imputation des valeurs manquante est adressée et la variance des estimateurs est *non biaisée* ;

Autres méthodes :

- MLE avec données manquantes ;
- Algorithme EM (expectation-maximisation)
- Inférence bayésienne ;

Conseils

- Conserver un script pour le traitement de données manquantes et ne **pas hard-coder** ;
- *Utiliser une méthode d'imputation qui respecte le format de la variable ;*
- Plus la proportion de non-réponses est élevée, plus l'impact sur l'analyse sera important ;

- S'il y a plusieurs patrons de non-réponse différents, l'ordre dans lequel les données sont imputées est important ;