

# Guide de survie en Actuariat



# Guide de survie en Actuariat

Gabriel Crépeault-Cauchon    
Nicholas Langevin  

Dépôt officiel de ce document  
Dernière mise à jour : 30 novembre 2019

# Introduction

On explique ici les motivations du document

# Liste des collaborateurs

Voici la liste des personnes ayant collaboré à ce document :

- › Gabriel Crépeault-Cauchon
- › Nicholas Langeevin

# Table des matières

Introduction	i
Liste des collaborateurs	ii
<b>I Fondements mathématiques utiles</b>	<b>1</b>
1 Notions de calcul différentiel et calcul intégral	2
1.1 Règles de dérivation . . . . .	2
2 Algèbre linéaire	3
2.1 Définition d'un vecteur et une matrice . . . . .	3
2.2 Matrice transposée . . . . .	5
2.3 Opérations matricielles . . . . .	5
2.4 Trace, déterminant et matrice inverse . . . . .	6
2.4.1 Trace d'une matrice . . . . .	6
2.4.2 Déterminant d'une matrice . . . . .	6
2.4.3 Matrice inverse . . . . .	7
2.5 Décomposition LDU de Choleski . . . . .	7
2.6 Vecteurs et valeurs propres . . . . .	7
2.6.1 Définition . . . . .	7
2.6.2 Propriétés intéressantes . . . . .	7
2.6.3 Décomposition spectrale . . . . .	8
2.7 Dérivées de matrice ou vecteurs . . . . .	8

<b>II</b>	<b>Matière vue dans le baccalauréat en actuariat</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Probabilités et statistiques</b>	<b>10</b>
3.1	Concepts de probabilité de base . . . . .	10
3.1.1	Probabilité conditionnelle . . . . .	10
3.1.2	Théorème de Bayes . . . . .	11
3.2	Définition d'une variable aléatoire . . . . .	11
3.3	Distribution d'une variable aléatoire . . . . .	11
3.4	Moments et quantités importantes . . . . .	11
3.5	Distribution de probabilité qui reviennent souvent .	12
<b>4</b>	<b>Mathématiques financières</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Processus aléatoires</b>	<b>14</b>
5.1	Chaîne de Markov . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Théorie du risque</b>	<b>15</b>
6.1	Modèle pour les risques et méthodes d'estimation .	15
6.1.1	Méthode d'estimation . . . . .	15
6.2	Processus Stochastique . . . . .	17
6.2.1	Processus de poisson homogène . . . . .	17
6.2.2	Processus non-homogene . . . . .	21
6.2.3	Processus Homogène Composée . . . . .	22
6.2.4	Processus Poisson Mixte . . . . .	24
6.2.5	Processus de renouvellement . . . . .	26
<b>III</b>	<b>Matière pour les examens professionnels</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>Principales distribution de probabilité utilisées</b>	<b>29</b>
<b>B</b>	<b>Résultats (et démonstrations) utiles</b>	<b>30</b>
B.1	Stop-Loss ( $\pi_X(d)$ ) . . . . .	30
B.2	TVaR . . . . .	32
B.2.1	Les 3 formes explicites de la $TVaR$ . . . . .	32
B.3	Sous-additivité de la $TVaR$ . . . . .	33
B.3.1	À l'aide de la fonction convexe $\varphi(x)$ . . . . .	34
B.3.2	Avec les fonctions indicatrices . . . . .	36



B.3.3	À l'aide des statistiques d'ordre . . . . .	38
B.4	Loi des grands nombres . . . . .	38
B.5	Somme de v.a. indépendantes d'une loi Poisson Com- posée . . . . .	39
B.6	Théorème d'Euler . . . . .	41
B.7	Dérivée de l'écart-type (générale) . . . . .	42
B.8	Distribution limite de $W_n$ . . . . .	45
B.9	Équation de Wald . . . . .	47
C	Travail collaboratif avec git . . . . .	49

Première partie

Fondements mathématiques  
utiles



# Chapitre 1

## Notions de calcul différentiel et calcul intégral

### 1.1 Règles de dérivation

Dans le tableau, on utilise  $k \in \mathbb{R}$  ou  $n$  pour parler d'une constante,  $u$ ,  $v$  ou  $w$  pour parler d'une fonction.

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = kx$	$f'(x) = k$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = kg(x)$	$f'(x) = kg'(x)$
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$
$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n \cdot g(x)^{n-1} \cdot g'(x)$
$f(x) = k^{g(x)}$	$f'(x) = k^{g(x)} \ln k \cdot g'(x)$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

# Chapitre 2

## Algèbre linéaire

### 2.1 Définition d'un vecteur et une matrice

**Vecteur ligne** Un vecteur ligne  $\mathbf{x}$  est un vecteur de dimension  $p \times 1$ , tel que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix}$$

**Matrice** Une matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  de dimension  $m$  lignes par  $n$  colonnes, définie telle que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

**Matrice carrée** Une matrice carrée  $\mathbf{A}$  de dimensions  $m \times m$  a autant de lignes que de colonnes.

**non-négative**  $\mathbf{A}$  est définie comme *non-négative* si  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**positive**  $\mathbf{A}$  est définie comme *positive* si  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ .

**semi-positive**  $\mathbf{A}$  est définie comme non-négative, mais elle n'est pas définie positive.

**Orthogonale**  $\mathbf{A}$  est *orthogonale* si elle est non-singulière et  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\top$  (voir [sous-section 2.4.3](#) pour définition de  $\mathbf{A}^{-1}$ )

**Matrice symétrique** La matrice  $\mathbf{A}$  est symétrique si  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ , i.e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matrice triangulaire (inférieure ou supérieure)** Une matrice inférieure  $\mathbf{L}$  est constituée de 0 en dessous de la diagonale :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

À l'inverse, on peut aussi avoir une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{U}$  , où les éléments en haut de la diagonale sont tous égaux à 0 :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

**Matrice diagonale** Une matrice diagonale  $\mathbf{D}$  a des éléments  $d_{ii} > 0$  sur sa diagonale seulement. Cette matrice est à la fois triangulaire inférieure et supérieure. i.e.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un cas spécial de la matrice diagonale est la matrice identité  $\mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}_{ii} = 1, \forall i$ , i.e

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

**Matrice diagonalisable** Une matrice  $\mathbf{A}_{n \times n}$  est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice carrée  $\mathbf{Q}_{n \times n}$  inversible (ou non-singulière) et une matrice  $\mathbf{D}$  diagonale telle que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} \quad (2.3)$$

(Théorème sur les matrices symétriques) : Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale  $\mathbf{Q}$ .

## 2.2 Matrice transposée

Soit la matrice  $\mathbf{A}$  définie en (2.1). On peut trouver la matrice transposée  $\mathbf{A}^\top$ , où  $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ . **En d'autres mots, les lignes deviennent des colonnes.** Voici quelques propriétés intéressantes avec les matrices transposées :

- ›  $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$
- ›  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
- ›  $(k\mathbf{A})^\top = k\mathbf{A}^\top$
- ›  $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$
- ›  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  et  $\mathbf{AA}^\top$  sont symétriques.

## 2.3 Opérations matricielles

Voici une liste non-exhaustive des opérations matricielles possibles. Côté notation,  $A$  et  $B$  représente des matrices,  $c$  représente une constante

- ›  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$
- ›  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]$
- ›  $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$
- › Produit matriciel :

$$\mathbf{AB} = \left[ \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]_{i \times j} \quad (2.4)$$

avec  $\mathbf{A} = [a_{ip}]$  et  $\mathbf{B} = [b_{pj}]$

- ›  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- ›  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{AA}^{-1}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité (voir Équation 2.2) et  $\mathbf{A}^{-1}$  est la matrice inverse de  $\mathbf{A}$  (voir sous-section 2.4.3 au besoin)
- ›  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

## 2.4 Trace, déterminant et matrice inverse

### 2.4.1 Trace d'une matrice

Soit la matrice carrée  $\mathbf{A}$ . On peut trouver la trace de cette matrice en sommant les éléments de sa diagonale, i.e.

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (2.5)$$

#### Propriétés de la trace d'une matrice

- ›  $\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B})$
- ›  $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$  et  $\text{Tr}(\mathbf{ABC}) = \text{Tr}(\mathbf{CAB}) = \text{Tr}(\mathbf{BCA})$

### 2.4.2 Déterminant d'une matrice

Soit la matrice carrée  $\mathbf{A}$ . On peut trouver le déterminant de  $\mathbf{A}$ , noté  $\det(\mathbf{A})$  ou  $|\mathbf{A}|$ , avec

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (2.6)$$

De façon générale, lorsque les dimensions de la matrice carrée sont supérieures à 2, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (2.7)$$

avec  $1 \leq i \leq n$  où  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  et  $M_{ij}$  est le déterminant de la nouvelle matrice en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

Si la matrice  $\mathbf{A}$  est inversible (ou non-singulière, voir la [sous-section 2.4.3](#)), alors le déterminant aura les propriétés suivantes :

- ›  $\det(A^\top) = \det(A)$
- ›  $\det(kA) = k^n \det(A)$
- ›  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$
- ›  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- ›  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(AB)} = \det(A)^{-1}$

### 2.4.3 Matrice inverse

Soit la matrice carrée  $\mathbf{A}$ . On peut trouver la matrice inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  telle que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A}) \quad (2.8)$$

où  $\text{Adj}(\mathbf{A}) = [C_{ij}]_{m \times n}^T$  et  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

## 2.5 Décomposition LDU de Choleski

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice carrée symétrique définie positive. Alors, il existe une décomposition unique telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U} \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{U}$  sont respectivement des matrices triangulaire inférieure, triangulaire supérieure et diagonale.

Cette décomposition peut être fortement utile en programmation lorsqu'on fait des opérations sur des matrices, afin de limiter le nombre d'opérations.

## 2.6 Vecteurs et valeurs propres

### 2.6.1 Définition

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice carrée. On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $\mathbf{A}$  s'il existe un vecteur  $\mathbf{x} \neq 0$  tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.10)$$

On appelle le vecteur  $\mathbf{x}$  un *vecteur propre* correspondant à la valeur propre  $\lambda$ . De plus, l'ensemble des nombres réels  $\lambda$  satisfaisant l'Équation 2.10 est appelé *spectre* de la matrice  $\mathbf{A}$ .

### 2.6.2 Propriétés intéressantes

Les vecteurs propres et valeurs propres permettent d'avoir plusieurs propriétés appréciables, notamment :

- › Si  $\mathbf{x}$  est un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $c\mathbf{x}$  sera également un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  correspondant à  $\lambda$ .

- › Si  $\mathbf{A}$  est symétrique et  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de  $\mathbf{A}$ , alors  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont des vecteurs orthogonaux, i.e.  $\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2 = 0$ .
- › Si  $\mathbf{A}$  a les valeurs propres (pas nécessairement distinctes)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors  $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

### 2.6.3 Décomposition spectrale

Soit  $\mathbf{A}_{n \times n}$  une matrice symétrique avec les  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Il existe une matrice orthogonale  $\mathbf{Q}$  telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^\top \quad (2.11)$$

avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Cette décomposition est fort utile lorsqu'on veut faire des produits matriciels successifs de la même matrice (appliqué directement dans les chaînes de Markov, voir [section 5.1](#)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{A} &= \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \underbrace{\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}}_{=\mathbf{I}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^\top \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{Q}^\top \end{aligned}$$

## 2.7 Dérivées de matrice ou vecteurs

Voici quelques entités pratiques :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{w}^\top \mathbf{v} = w$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \mathbf{v}$$



## Deuxième partie

### Matière vue dans le baccalauréat en actuariat

# Chapitre 3

## Probabilités et statistiques

### 3.1 Concepts de probabilité de base

#### 3.1.1 Probabilité conditionnelle

Définition de base

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad (3.1)$$

**Loi des probabilités totales** Soit  $E_i$  le *outcome*  $i$  parmi l'ensemble des  $n$  *outcome* possibles de l'évènement  $E$ , alors, on peut représenter la probabilité que l'évènement  $A$  survienne comme

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(A|E_i) \Pr(E_i) \quad (3.2)$$

avec  $\sum_{i=1}^n \Pr(E_i) = 1$ .

**Relation importante** de l'Équation 3.1, on peut représenter  $\Pr(A|B)$  comme

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Théorème de Bayes

En combinant l'Équation 3.3 et la loi des probabilités totales (l'Équation 3.2), on obtient le théorème de Bayes :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\sum_{i=1}^n \Pr(B|A_i) \Pr(A_i)} \quad (3.4)$$

## 3.2 Définition d'une variable aléatoire

## 3.3 Distribution d'une variable aléatoire

Fonction de densité, répartition, survie, hazard rate, etc.

## 3.4 Moments et quantités importantes

Espérance, variance, covariance, coefficient de variation, corrélation

**Espérance** Soit une v.a.  $X$  (continue ou discrète). Son espérance est définie telle que

$$\mathbb{E}[X] = \mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \Pr(X = x) = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \quad (3.5)$$

L'espérance d'une fonction de la v.a  $X$  est

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x=0}^{\infty} g(x) \Pr(X = x) = \int_0^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (3.6)$$

**Variance**

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \quad (3.7)$$

quelques propriétés à savoir :

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX) &= a^2 \text{Var}(X) \\ \text{Var}(X + b) &= \text{Var}(X) \end{aligned}$$

### **Covariance**

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (3.8)$$

## **3.5 Distribution de probabilité qui reviennent souvent**

Un tableau récapitulatif des différentes distribution de probabilité est disponible à l'

# Chapitre 4

## Mathématiques financières

to-do

# Chapitre 5

## Processus aléatoires

to-do

### 5.1 Chaîne de Markov

# Chapitre 6

## Théorie du risque

### 6.1 Modèle pour les risques et méthodes d'estimation

**Introduction** Dans le cours *Introduction à l'actuariat II*, on a vu comment produire des réalisations  $x^{(j)}$  de  $x$  du modèle fréquence-sévérité, dans le cas où  $B \sim \text{Gamma}$ . Dans ce cours, on développe des techniques récursives pour évaluer la convolution.

#### 6.1.1 Méthode d'estimation

##### Context #1

- (1) Pour chaque contrat ( $j$ ), on dispose du nombre de sinistres ( $n_j$ ) et des montants de chaque sinistres ( $y_1, \dots, y_{n_j}$ ).
- (2) On définit

$$X_j = \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k}$$

où  $X_j = 0$  si  $n_j = 0$ .

- (3) On pose  $\underline{\theta}^N$  et  $\underline{\theta}^Y$ , les paramètres à estimer. On utilise la méthode du



maximum de vraisemblance pour estimer ses paramètres.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) &= \prod_{j=1}^m \left\{ f_n(n_j | \underline{\theta}^n) \prod_{k=1}^{n_j} f_y(y_{j,k} | \underline{\theta}^y) \right\} \\
 &= \left( \prod_{j=1}^m f_n(n_j | \underline{\theta}^n) \right) \left( \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{n_j} f_y(y_{j,k} | \underline{\theta}^y) \mathbb{1}_{\{n_j > 0\}} \right) \\
 &= \mathcal{L}(\underline{\theta}^N) \mathcal{L}(\underline{\theta}^Y)
 \end{aligned}$$

(4) Remarque :

- › Le résultat découle de l'indépendance entre  $N$  et  $\underline{Y}$ .
- › Ce résultat facilite l'estimation.
- › On peut estimer des paramètres avec des lois de fréquence et sévérité séparément.

## Context #2

- (1) Pour chaque contrat ( $j$ ), on dispose du nombre de sinistres ( $n_j$ ) et si le nombre de sinistre est non null, on connaît le montant **total** des sinistres. On ne connaît pas les montants de chaque sinistre.
- (2) On pose  $\underline{\theta}^N$  et  $\underline{\theta}^Y$ , les paramètres à estimer. On utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer ses paramètres.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) &= \prod_{j=1}^m f_n(n_j | \underline{\theta}^n) f_{Y_1 + \dots + Y_{n_j}}(x_j | \underline{\theta}^y) \mathbb{1}_{\{n_j > 0\}} \\
 &= \mathcal{L}(\underline{\theta}^N) \mathcal{L}(\underline{\theta}^{Y_1 + \dots + Y_{n_j}})
 \end{aligned}$$

(3) Remarque :

- › Le résultat découle de l'indépendance entre  $N$  et  $\underline{Y}$ .
- › Ce résultat facilite l'estimation.
- › On peut estimer des paramètres avec des lois de fréquence et sévérité séparément si on connaît la loi de  $Y_1 + \dots + Y_{n_j}$ .

## Context #3

- (1) Pour chaque contrat ( $j$ ), on connaît uniquement les coûts totaux, null ou non null.

- (2) On pose  $\underline{\theta}^N$  et  $\underline{\theta}^Y$ , les paramètres à estimer. On utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer ses paramètres.
- (3) Possibilités #1, modèle forfaitaire,  $X_j = C \cdot \mathbb{1}_{\{I=1\}}$ .

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) = \prod_{j=1, x_j=0}^m f_I(0|\underline{\theta}^I) \prod_{j=1, x_j>0}^m f_I(1|\underline{\theta}^I) \cdot f_C(x_j|\underline{\theta}^C)$$

- (4) Possibilités #2, modèle fréquence-sévérité. Si on connaît la loi de la somme ( $Y_1 + \dots + Y_k$ ). La distribution est donc mixte avec masse de probabilité à 0. Ainsi on a

$$\begin{aligned} f_X(0|\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) &= \Pr(N = 0|\underline{\theta}^N) \\ f_X(x_j|\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k|\underline{\theta}^N) f_{Y_1+\dots+Y_k}(x_j|\underline{\theta}^Y) \\ \mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) &= \prod_{j=1, x_j=0}^m \Pr(N = 0|\underline{\theta}^N) \prod_{j=1, x_j>0}^m f_X(x_j|\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^Y) \end{aligned}$$

- (5) Remarque : Contrairement au deux autre context, on ne peut pas estimé séparément  $\underline{\theta}^N$  et  $\underline{\theta}^Y$ .

## 6.2 Processus Stochastique

### 6.2.1 Processus de poisson homogène

#### Definition

Le processus de comptage  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $N(0) = 0$
- (2) un accroissement sur un intervalle de temps de longueur  $t$  obéit à une loi Poisson de paramètre  $\lambda t$  ( $t > 0$ ) :
  - $\cdot N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t) :$
  - $\cdot N(s, s+t) \sim \text{Pois}(\lambda t) :$
- (3) I des accroissements indépendants :
  - pour  $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2 < \infty$ ,  $N(s_1, s_2]$  et  $N(t_1, t_2]$  sont indépendants ;
  - c. -  $\ddot{a} - d$ . I les accroissements sur deux intervalles disjoints de temps sont indépendants

(4)  $\underline{N}$  a des accroissements stationnaires :  $N(t) \sim N(s, s + t]$

### Proposition 1

Soit les processus de Poisson indépendants  $\underline{N}_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$  et  $\underline{N}_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$  avec des taux  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Alors, le processus défini par  $\underline{M} = \{M(t), t \geq 0\}$

ou

$$M(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

est aussi un processus de Poisson process avec un taux  $\lambda_1 + \lambda_2$

### Algorithme PP1

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$
2. Pour  $i = 1, \dots, n$  on a,
  - 2.1 On simule  $W_i^{(j)}$
  - 2.2 On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$

```
PP1 <- function(time, lam, giveN = FALSE){  
  T_i <- 0  
  while(tail(T_i, 1) <= time){  
    u <- runif(1)  
    w <- qexp(u, lam)  
    T_i <- c(T_i, tail(T_i, 1) + w)  
  }  
  if(giveN) length(T_i[-c(1, length(T_i))])  
  else T_i[-c(1, length(T_i))]  
}
```

Listing 6.1 – Mise en oeuvre de PP1 en R

### Algorithme PP2

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$
2. On simule la réalisation  $N(t)^{(j)}$  de  $N(t)$
3. Sachant  $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$ 
  - 3.1 On simule le vecteur de réalisations  $(U_1^{(j)}, \dots, U_{N(t)}^{(j)})$  de  $(U_1, \dots, U_{N(t)}(t))$   
ou les va.  $U_i \sim U \sim \text{Unif}(0, 1)$  :

3.2 On trie les réalisations en  $[1]$  et on obtient  $(U_{[1]}^{(j)}, \dots, U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  ou

$$U_{[1]}^{(j)} < \dots < U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)}$$

3.3 On calcule  $T_i^{(j)} = t \times U_{[i]}^{(j)}$ , pour  $i = 1, \dots, N(t)^{(j)}$

```
PP2 <- fonction(t, lam, giveN = FALSE){
  N_t <- rpois(1, t * lam)
  if(N_t == 0) return(0)
  U_i <- runif(N_t)
  T_i <- t * sort(U_i)
  if(giveN) N_i
  else T_i
}
```

Listing 6.2 – Mise en oeuvre de PP2 en R

## Proposition 2

Soit un processus de Poisson  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  avec le taux  $\lambda$ . Soit le vecteur de v.a. continues iid  $(Y_1, \dots, Y_n)$  ou  $Y_i \sim Y \sim \text{Unif}(0, t)$  avec  $f_Y(t) = \frac{1}{t}$ ,  $t \in (0, t]$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . On définit le vecteur de statistiques d'ordre  $(Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$  à partir de  $(Y_1, \dots, Y_n)$

Alors, on a

$$(T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]})$$

### Note

$$\Pr(X \in (x, x + dx)) = f_X(x)dx$$

## Preuve (Proposition 2)

(1) On pose  $h_1, \dots, h_n$  très très petit. On fixe  $0 \leq s_1 \leq s_1 + h_1 \leq \dots \leq s_n \leq s_n + h_n$ .

$$\Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1), \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n) | N(t) = n) \approx f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(s_1, \dots, s_n | n) h_1 \cdots h_n$$

(2) On veut identifier  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}$ , on développe

$$\begin{aligned} & \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1), \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n) | N(t) = n) \\ &= \frac{\Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1), \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n), N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \end{aligned}$$

(3) On réécrit en fonction des accroissements du processus

$$= \frac{\Pr(N(0, s_1] = 0, N(s_1, s_1 + h_1] = 1, \dots, N(s_n, s_n + h_n] = 1, N(s_n + h_n, t] = 0)}{\Pr(N(t) = n)}$$

Note : la condition  $N(s_n + h_n, t] = 0$  permet de respecter  $N(t) = n$ .

(4) On applique la proposition des accroissements indépendant du processus de Poisson.

$$\begin{aligned} &= \frac{\Pr(N(0, s_1] = 0) \Pr(N(s_1, s_1 + h_1] = 1) \cdots \Pr(N(s_n, s_n + h_n] = 1) \Pr(N(s_n + h_n, t] = 0)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{(e^{-\lambda s_1}) (\lambda h_1 e^{-\lambda h_1}) \cdots (\lambda h_n e^{-\lambda h_n}) (e^{-\lambda(t-s_n-h_n)})}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\ &= \frac{\lambda^n h_1 \cdots h_n e^{s_1+h_1+s_2-s_1-h_1+\dots+h_n+t-s_n-h_n}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\ &= n! \frac{h_1}{t} \cdots \frac{h_n}{t} \end{aligned}$$

(5) En éliminant les  $h_i$  de chaque coté avec l'équation en (1), on obtient

$$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(s_1, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n}$$

(6) Lemme :

Soit le vecteur de v.a. continues id  $(Y_1 \dots, Y_n)$  où  $Y_i \sim Y$  avec la fonction de densité  $f_{Y_i} = f_Y$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . On définit le vecteur de statistiques d'ordre  $(Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$  à partir de  $(Y_1 \dots, Y_n)$ . Alors, la fonction de densité de conjointe de  $(Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$  est donnée par  $f_{Y_{[1]}, X_{[3]}, \dots, X_{[n]}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! f_Y(y_1) \times f_Y(y_2) \times \dots \times f_Y(y_n), y_1 < y_2 < \dots < y_n. \quad (2)$

(7) En effet, on défini

$$Y_1, \dots, Y_n \sim Y \sim Unif(0, t)$$

avec fonction de densité  $f_Y(s) = \frac{1}{t}$

(8) On conclut que

$$(T_1, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$$

### 6.2.2 Processus non-homogene

**Definition** Le processus de comptage  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  est dit un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité  $\lambda(t) \geq 0$  pour  $t \geq 0$  si

- (1)  $N(0) = 0$
- (2)  $\{N(t), t \geq 0\}$  possède des accroissements indépendants
- (3)  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
- (4)  $(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

#### Proposition 1

Soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité  $\lambda(t)$ . Alors,

$$N(t+s) - N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t+s) - \Lambda(s)), \forall t, s \geq 0$$

ou

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy$$

est la fonction d'intensité cumulée du processus. Ainsi,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{[\Lambda(t+s) - \Lambda(s)]^n e^{-[\Lambda(t+s) - \Lambda(s)]}}{n!}$$

#### Algorithme PPNH1

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$
2. Pour  $i = 1, \dots, n$ , on a
  - 2.1 On simule les réalisations  $(Z_1^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$  du vecteur de v.a. iid avec  $Z_i \sim Z \sim \text{Exp}(1)$
  - 2.2 On simule  $W_i^{(j)} = \Lambda_{T_{i-1}}^{-1}(Z_i)$
  - 2.3 On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$

```

PPNH1 <- function(t, inverseFUN, giveN = FALSE){
  T_i <- 0
  while(tail(T_i, 1) <= t){
    u <- runif(1)
    z <- qexp(u, 1)
    w <- inverseFUN(z, tail(T_i, 1))
    T_i <- c(T_i, tail(T_i, 1) + w)
  }
  if(giveN) length(T_i[-c(1, length(T_i))])
  else T_i[-c(1, length(T_i))]
}

```

Listing 6.3 – Mise en oeuvre de PPNH1 en R

### Algorithme PPNH2

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$
2. On simule la réalisation  $N(t)^{(j)}$  de  $N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$ .
3. Sachant  $N(t) = N(t)^{(j)} > 0$ 
  - 3.1 On simule le vecteur de réalisations  $(V_1^{(j)}, \dots, V_{N(t)}^{(j)})$  du vecteur de v.a. ind  $(V_1, \dots, V_{N(t)})$  ou  $V_i \sim V$  avec  $f_V(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}, 0 < x < t (i = 1, 2, \dots, N(t)^j)$
  - 3.2 On trie les réalisations en [3.1] et on obtient  $(V_{[1]}^{(j)}, \dots, V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  ou  $V_{[1]}^{(j)} < \dots < V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)}$
  - 3.3 On calcule  $T_i^{(j)} = V_{[i]}^{(j)}$ , pour  $i = 1, \dots, N(t)^{(j)}$

to-do

Listing 6.4 – Mise en oeuvre de PPNH2 en R

## 6.2.3 Processus Homogène Composée

### Definition

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$$



## Fonction de répartition

$$F_{S(t)}(x) = \Pr(N(t) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(t) = k) * F_{X_1 + \dots + X_k}(x)$$

```
F_s <- function(x, t){  
  dpois(0, lambda * t) + sum(sapply(1:k0, function  
    (k) dpois(k, lambda * t) * pgamma(x, alpha *  
    k, beta)  
})
```

Listing 6.5 – Exemple Pois-Gamma

## Value at risk

$$\text{VaR}_k(S(t)) = F_{S(t)}^{-1}(k)$$

```
VaR_s <- function(kappa, t){  
  if(kappa <= dpois(0, lambda * t)  
    return(0)  
  uniroot(function(x) F_s(x, t) - kappa, c(0,  
    10000))$root  
}
```

Listing 6.6 – Exemple Pois-Gamma

## Tail Values at Risk

$$\text{TVaR}_k(S(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N(t) = k) \cdot \text{TVaR}_k(X_1 + \dots + X_k)$$

```
TvaR_S <- function(kappa, t){  
  sum(sapply(1:k0, function(k) dpois(k, 1.8 * t) *  
    alp      ha * k / beta * (1 - pgamma(VaR_s(  
    kappa, t), (alpha*k)+1, beta)))) / (1 - kappa  
  )  
}
```

Listing 6.7 – Exemple Pois-Gamma

### 6.2.4 Processus Poisson Mixte

**Definition** Soit  $\Lambda$  une variable aléatoire positive (continue ou discrète). Si le processus de comptage  $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$  étant donné que  $\Lambda = \lambda$  est un processus de Poisson de taux  $\Lambda$  alors  $\underline{N} = \{N(t); t \geq 0\}$  est appelé un processus de Poisson mixte.

Les accroissements du processus de Poisson mixte  $\underline{N}$  sont **indépendant** et **stationnaire**.

**Preuve (stationnaire)**

$$\begin{aligned} M_{N(t,t+s]}(r) &= E \left[ e^{rN(t,t+s]} \right] \\ &= E [E [e^{rN(t,t+s]} | \Lambda]] \\ &= E [E [e^{rN(t,t+s]} | \Lambda]] \\ &= E [e^{\Lambda t(e^r - 1)}] \\ &= M_{\Lambda}(t(e^r - 1)) \\ &= M_{N(t)}(r) \\ &= \text{Stationnaire car fonction de } t \text{ seulement} \end{aligned}$$

**Preuve (indépendance)** A faire

#### Note

Les temps-inter siniste sont échangeable, mais ne sont pas indépendant. Par contre, les temps-inter siniste  $(W_1 | \Lambda)$  et  $(W_2 | \Lambda)$  sont conditionnellement indépendant et  $(w | \Lambda) \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

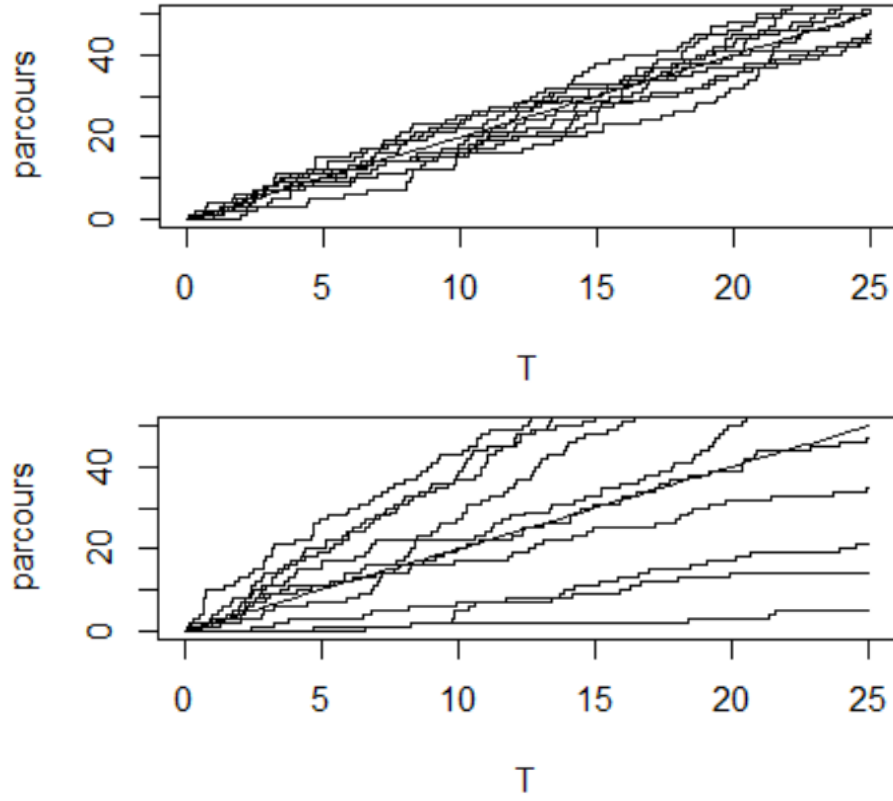


FIGURE 6.1 – Comparaison entre un processus de Poisson homogène et un processus de poisson mixte. Le graphique du bas représente le processus mixte.

$$\begin{aligned}
 \Pr(N(t) = n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N(t) = n | \Lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
 &\quad \text{si } \Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta) \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) n!} \left( \frac{\beta}{\beta + t} \right)^{\alpha} \left( \frac{t}{\beta + t} \right)^n \sim \text{BinNeg}(\alpha, \frac{\beta}{\beta + t}) \\
 \Pr(N(t, t + s] = n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N(t, t + s] = n | \Lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N(s) = n | \Lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
 \Pr(N(t) = k_1, N(t, t + s] = k_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N(t) = k_1, N(t, t + s] = k_2 | \Lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N(t) = k_1 | \Lambda) \Pr(N(s) = k_2 | \Lambda) \cdot f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(t+s)|N(t)=k_1] &= \mathbb{E}[N(t) + N(t, t+s)|N(t)=k_1] \\
&= k_1 + \mathbb{E}[\Lambda] \mathbb{E}[N(t, t+s)|N(t)=k_1, \Lambda] |N(t)=k_1 \\
&= k_1 + \mathbb{E}[\Lambda] \lambda t |N(t)=k_1 \\
&= k_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda t \frac{f_{\Lambda, N(t)}(\lambda, k_1)}{\Pr(N(t)=k_1)} d\lambda \\
&= k_1 + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda t \Pr(N(t)=k_1|\Lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N(t)=k_1|\Lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda} \\
&\text{si } \Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta) \\
&= k_1 + \frac{\alpha + n}{\beta + t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{W_1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{w_1|\Lambda}(t) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
&\text{si } \Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta) \\
&= \left( \frac{\beta}{\beta + t} \right)^{\alpha} \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{W_1, W_2}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{W_1}(t_1) F_{W_2}(t_2) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\
&\text{si } \Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta) \\
&= \left( \frac{\beta}{\beta + t_1 + t_2} \right)^{\alpha} \sim \text{Pareto Multivarié}
\end{aligned}$$

### 6.2.5 Processus de renouvellement

**Definition** Un processus de renouvellement  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  est un exemple de processus de dénombrement (comptage). IL est une généralisation du processus de Poisson. La généralisation se fait via les v.a. temps inter-sinistres. On définit les temps inter-sinistres associés à  $N$  par la suite de v.a.  $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, \dots\}$  On définit les temps d'occurrence des sinistres par la suite de v.a.  $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$ , ou  $T_0 = 0$  et  $T_j = \sum_{l=1}^j W_l, j = 1, 2, \dots$

#### Relation fondamentale

$$\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}$$

### Fonction de masse de probabilité

$$\begin{aligned}\Pr(N(t) = k) &= \Pr(\# \text{ de sinistres sur } (0, t] \text{ soit égal à } k) \\ &= \Pr(N(t) \geq k) - \Pr(N(t) \geq k + 1) \\ &= F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t)\end{aligned}$$

### Espérance de $N(t)$

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} E[1_{\{T_k \leq t\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t)$$

pour  $t > 0$

### Remarques

- ›  $m(t) = E[N(t)]$  = nombre espéré de sinistres sur l'intervalle de temps  $(0, t]$
- › La fonction  $m(t)$  est appelée la fonction de renouvellement.

### Algorithme de simulation

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$
2. Pour  $i = 1, \dots, n$  on a,
  - 2.1 On simule  $W_i^{(j)}$
  - 2.2 On calcule  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$

**Troisième partie**

**Matière pour les examens  
professionnels**

# Annexe A

## Principales distribution de probabilité utilisées

introduction



# Annexe B

## Résultats (et démonstrations) utiles

### B.1 Stop-Loss ( $\pi_X(d)$ )

Dans un contexte continu,

$$\pi_X(d) = \int_d^\infty \bar{F}(d) du$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= E[\max(X - d, 0)] \\ &= \int_0^\infty \max(x - d, 0) F_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty (x - d) 1_{\{X > d\}} f_X(x) dx \\ &= \int_d^\infty (x - d) f_X(x) dx \\ &= \int_d^\infty x f_X(x) dx - \int_d^\infty df_X(x) dx\end{aligned}$$

On doit alors faire une intégration par partie, en posant

$$\begin{aligned}u &= x & du &= dx \\ dv &= dF_X(x) & v &= -S(x)\end{aligned}$$

Note : si on fait tendre  $S(x)$  vers l'infini, ça va tendre plus rapidement vers 0 que  $x$  seul.

$$\begin{aligned}
 \pi_X(d) &= -xS(x) \Big|_d^\infty - \int_d^\infty -S(x)dx - d(F(\infty) - F(d)) \\
 &= 0 + \cancel{dS(d)} + \int_d^\infty S(x)dx - \cancel{dS(d)} \\
 &= \int_d^\infty S(x)dx
 \end{aligned}$$

□

Il existe aussi le contexte discret :

$$\pi_X(d) = \sum_{k=d}^{\infty} S(k)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 \pi_X(k) &= E[\max(N - k, 0)] \\
 &= \sum_{j=k}^{\infty} (j - k)P(N = j) \\
 &= (k - k)P(N = k) + ((k + 1) - k)P(N = k + 1) + P((k + 2) - k)P(N = k + 2) + \dots \\
 &= P(N = k + 1) + 2P(N = k + 2) + 3P(N = k + 3) + \dots \\
 &= \underbrace{(P(N = k + 1) + P(N = k + 2) + P(N = k + 3) + \dots)}_{S(k)} \\
 &\quad + \underbrace{(P(N = k + 2) + P(N = k + 3) + P(N = k + 4) + \dots)}_{S(k+1)} \\
 &\quad + \underbrace{(P(N = k + 3) + P(N = k + 4) + P(N = k + 5) + \dots)}_{S(k+2)} \\
 &\quad + \dots \\
 &= \sum_{i=k}^{\infty} S(i)
 \end{aligned}$$

□

## B.2 TVaR

### B.2.1 Les 3 formes explicites de la $TVaR$

Pour la  $TVaR$ , il y a 3 preuves à bien connaître :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X) du \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X)) du \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 \underbrace{(VaR_u(X) - VaR_\kappa(X))}_{\text{fonction quantile}} du + \underbrace{\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X) du}_{\text{intégration d'une constante}} \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)) \underbrace{f_U(u)}_{U \sim Unif(0,1)} du + \frac{1}{1-\kappa} VaR_\kappa(X) (1-\kappa) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(\underbrace{F_X^{-1}(U)}_{F_X^{-1} \sim X} - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)
\end{aligned}$$

□

à partir de la preuve ci-dessus, on peut démontrer celle-ci :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa} E[VaR_\kappa(X) \times \underbrace{1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}}_{=S_X(VaR_\kappa(X))}] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa} VaR_\kappa(X)(1 - F_X(VaR_\kappa(X))) + \frac{1-\kappa}{1-\kappa} VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(-1 + F_X(VaR_\kappa(X)) + 1 - \kappa)}{1-\kappa} \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}
\end{aligned}$$

□

Une dernière preuve fortement utilisée pour la  $TVaR$ , qui découle directement de la dernière :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa}$$

*Démonstration.* Étant donné que cette formule ne fonctionne seulement que pour une v.a. continue, elle est très facile à prouver :

$$\text{si } X \text{ est continue, } \forall x, F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$$

Alors, on peut enlever la partie de droite de l'équation.

□

### B.3 Sous-additivité de la $TVaR$

Il y a **plusieurs façons** de prouver la sous-additivité de la  $TVaR$ .

### B.3.1 À l'aide de la fonction convexe $\varphi(x)$

On sait que la fonction  $\varphi(x)$  est convexe :

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1 - \kappa} \pi_X(x)$$

Et on sait aussi que

$$TVaR_\kappa(X) = \inf \{ \varphi(x) \}$$

Il faut prouver que  $TVaR_\kappa(X + Y) \leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y)$

*Démonstration.* Puisque  $\varphi(x)$  est une fonction convexe, on peut dire que

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &\leq \varphi(x) \\ &\leq x + \frac{1}{1 - \kappa} \pi_X(x) \end{aligned}$$

On pose le changement de variable  $\boxed{X^* = \alpha X + (1 - \alpha)Y}$

On peut donc remplacer  $x$  dans  $\varphi(x)$  par

$$\begin{aligned} x_0 &= VaR_\kappa(X^*) \\ &= VaR_\kappa(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \\ &= \alpha VaR_\kappa(X) + (1 - \alpha) VaR_\kappa(Y) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(\alpha X + (1 - \alpha)Y) &\leq \alpha VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha)VaR_{\kappa}(Y) \\
&+ \frac{1}{1 - \kappa} E[\max(\alpha X + (1 - \alpha)Y - \alpha VaR_{\kappa}(X) - (1 - \alpha)VaR_{\kappa}(Y); 0)] \\
&= \alpha VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha)VaR_{\kappa}(Y) \\
&+ \frac{1}{1 - \kappa} E[\max(\alpha(X - VaR_{\kappa}(X)) + (1 - \alpha)(Y - VaR_{\kappa}(Y)); 0)] \\
&\leq \alpha VaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha)VaR_{\kappa}(Y) \\
&+ \alpha \left( \frac{1}{1 - \kappa} E[\max(X - VaR_{\kappa}(X); 0)] \right) \\
&+ (1 - \alpha) \left( \frac{1}{1 - \kappa} E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y); 0)] \right) \\
\text{Si on met en commun, on retrouve les expressions de la } TVaR \\
&= \alpha \left( \frac{1}{1 - \kappa} \pi_X(VaR_{\kappa}(X)) + VaR_{\kappa}(X) \right) \\
&+ (1 - \alpha) \left( \frac{1}{1 - \kappa} \pi_Y(VaR_{\kappa}(Y)) + VaR_{\kappa}(Y) \right) \\
TVaR_{\kappa}(\alpha X + (1 - \alpha)Y) &\leq \alpha TVaR_{\kappa}(X) + (1 - \alpha)TVaR_{\kappa}(Y)
\end{aligned}$$

La relation se vérifie très bien avec le cas où  $\alpha = 0,5$  :

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(0,5X + (1 - 0,5)Y) &\leq 0,5TVaR_{\kappa}(X) + (1 - 0,5)TVaR_{\kappa}(Y) \\
0,5TVaR_{\kappa}(X + Y) &\leq 0,5TVaR_{\kappa}(X) + 0,5TVaR_{\kappa}(Y) \\
&\text{on multiplie par 2 pour enlever les } 0,5 \\
\mathbf{TVaR}_{\kappa}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) &\leq \mathbf{TVaR}_{\kappa}(\mathbf{X}) + \mathbf{TVaR}_{\kappa}(\mathbf{Y})
\end{aligned}$$

□

### B.3.2 Avec les fonctions indicatrices

Si on a les v.a. continues  $X$  et  $Y$  (les espérances existent) avec les fonctions de répartition respectives  $F_X$  et  $F_Y$ , alors

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{1 - \kappa}$$

$$(1 - \kappa)TVaR_\kappa(X) = E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]$$

est valide pour toute v.a. continue  $X$ .

On veut alors démontrer que

$$TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) - TVaR_\kappa(X + Y) \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

*Démonstration.* .

(1) On peut écrire le membre de gauche de l'inégalité (B.1) comme

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1 - \kappa)TVaR_\kappa(X)}_{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]} + \underbrace{(1 - \kappa)TVaR_\kappa(Y)}_{E[Y \times 1_{\{Y > VaR_\kappa(Y)\}}]} - \underbrace{(1 - \kappa)TVaR_\kappa(X + Y)}_{E[(X+Y) \times 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}]} \\ &= E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] + E[Y \times 1_{\{Y > VaR_\kappa(Y)\}}] - \underbrace{E[(X + Y) \times 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}]}_{\text{On split cette espérance}} \\ &= \underbrace{E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}]}_{\text{On peut rassembler les indicatrices}} \\ &+ \underbrace{E[Y \times 1_{\{Y > VaR_\kappa(Y)\}}] - E[Y \times 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}]}_{\text{ici aussi}} \end{aligned}$$

$$= E[X \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] + E[Y \times (1_{\{Y > VaR_\kappa(Y)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \quad (\text{B.2})$$

(2) Rendu ici, on veut prouver que chacun de ces espérance  $\geq 0$ , pour que la somme des 2 soit  $\geq 0$  aussi. Étant donné que les 2 parties du membre de gauche sont identiques, on va le prouver seulement pour un côté.

(2.1) Pour nous aider, on va créer un terme *auxiliaire*, i.e un terme qui est égal à zéro, mais qui va nous aider à faire la preuve, soit le terme suivant :

$$\begin{aligned}
& E[VaR_\kappa(X) \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \\
&= VaR_\kappa(X) E[(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \\
&= VaR_\kappa(X) ((1 - \kappa) - (1 - \kappa)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2.2) Alors, l'équation (B.2) devient

$$E[(X - VaR_\kappa(X)) \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})]$$

(2.3) On va prouver que la quantité à l'intérieur de l'espérance ci-haut sera toujours  $\geq 0$ , de sorte que l'espérance sera toujours positive aussi :

$$\begin{aligned}
(X - VaR_\kappa(X))(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}) &\geq 0 \text{ si } X < VaR_\kappa(X) \\
(X - VaR_\kappa(X))(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}) &= 0 \text{ si } X = VaR_\kappa(X) \\
(X - VaR_\kappa(X))(1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}}) &\geq 0 \text{ si } X > VaR_\kappa(X)
\end{aligned}$$

(2.4) Alors, on déduit que

$$\begin{aligned}
& E[(X - VaR_\kappa(X)) \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \\
&= E[X \times (1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y > VaR_\kappa(X+Y)\}})] \geq 0
\end{aligned}$$

(3) Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(1 - \kappa)TVaR_\kappa(X) + (1 - \kappa)TVaR_\kappa(Y) - (1 - \kappa)TVaR_\kappa(X + Y) &\geq 0 \\
\mathbf{TVaR}_\kappa(\mathbf{X}) + \mathbf{TVaR}_\kappa(\mathbf{Y}) - \mathbf{TVaR}_\kappa(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) &\geq 0
\end{aligned}$$

□



### B.3.3 À l'aide des statistiques d'ordre

Pour pouvoir prouver la sous-additivité de la  $TVaR$ , on peut aussi utiliser la relation des statistiques d'ordre<sup>1</sup> :

$$TVaR_{\kappa}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^n X_{j:n}}{[n(1-\kappa)]}$$

à compléter plus tard

## B.4 Loi des grands nombres

Cette preuve était demandée à l'examen Intra traditionnel H2017 du cours ACT-2001.

### Théorème

Soit les v.a. *iid*  $X_1, \dots, X_n$  avec  $E[X^m] < \infty$ ,  $m = 1, 2, \dots$  et  $Var(X) < \infty$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{W_n}(x) \rightarrow F_Z(x) \quad (\text{B.3})$$

où  $Z$  est une v.a. tel que  $P(Z = E[X]) = 1$ .

*Démonstration.* (1) Première étape, on va démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{w_n}(t) \rightarrow \mathcal{L}_Z(t)$

(1.1) On sait que  $\mathcal{L}_{w_n}(t) = \mathcal{L}_X\left(\frac{t}{n}\right)^n$   $n = 1, 2, \dots$

(1.2) Soit une v.a.  $Y$  positive. On fixe  $t$  tout petit

(1.3) Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(t) &= E[e^{-tY}] \\ &\approx E[1 - tY] \quad \text{par dév. de Taylor} \quad = E[1] - tE[Y] \end{aligned}$$

---

1. Relation qui d'ailleurs est utilisée dans le contexte de simulation Monte Carlo pour estimer la TVaR d'une variable aléatoire.

(1.4)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{w_n}(t) &= \mathcal{L}_X \left( \frac{t}{n} \right)^n \\ &\simeq \left( 1 - \frac{t}{n} E[X] \right)^n\end{aligned}$$

(1.5) On prends la limite de part et d'autre de l'égalité en (1.3)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{w_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathcal{L}_X \left( \frac{t}{n} \right) \right)^n \\ &\simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t}{n} E[X] \right)^n \\ &= e^{-tE[X]} \\ &= \mathcal{L}_Z(t)\end{aligned}$$

Ce qui correspond à la Transformée de la v.a.  $Z$  où  $P(Z = E[X]) = 1$

(2) On applique le résultat de (1.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{w_n}(x) = F_Z(x), \quad \forall x$$

□

## B.5 Somme de v.a. indépendantes d'une loi Poisson Composée

*Démonstration.* Soit les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i \sim \text{PoisComp}(\lambda_i; F_{B_i})$ ,  $i = 1, \dots, n$   
Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1}(t) &= \mathcal{P}_{M_1}(\mathcal{L}_{B_1}(t)) \\ &= e^{\lambda(\mathcal{L}_{B_1}(t)-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

On peut trouver la transformée de  $S$ ,

$$\mathcal{L}_S(t) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)} \quad (\text{B.4})$$

Le passage de l'équation (B.4) aux étapes suivantes résulte d'une propriété de la loi de Poisson, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{L}_{B_i}(t) - \lambda_i} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{L}_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{L}_{B_i}(t) - \lambda_S} \end{aligned}$$

Si on met en évidence le  $\lambda_S$  ...

$$\mathcal{L}_S(t) = e^{\lambda_S \left( \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_i}(t) - 1 \right)} \quad (\text{B.5})$$

Si on pose  $c_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_S}$ , on observe que  $0 < c_i < 1$  et que  $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ .

On se définit une nouvelle v.a.,  $D$ , où

$$\mathcal{L}_D(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L}_{B_i}(t) \quad (\text{B.6})$$

Ce qui implique que  $D$  obéit à une loi mélange :

$$F_D(x) = \sum_{i=1}^n c_i F_{B_i}(x) \quad , x \geq 0$$

en combinant (B.5) et (B.6), on obtient

$$\mathcal{L}_S(t) = e^{\lambda_S(\mathcal{L}_D(t)-1)} \quad (\text{B.7})$$

On introduit une nouvelle v.a.,  $N_S \sim \text{Pois}(\lambda_S)$  et  $P_N(s) = e^{\lambda_S(s-1)}$ . Alors, (B.7) devient

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{P}_{N_S}(\mathcal{L}_D(t))$$

On peut donc représenter  $S$  comme

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_s} D_k & N_s > 0 \\ 0 & N_s = 0 \end{cases}$$

où  $D_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  forme une suite de v.a *iid*, et  $D$  et  $N_s$  sont indépendants.  $\square$

## B.6 Théorème d'Euler

**Définition** Soit une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  homogène d'ordre  $n$ . Alors, pour toute fonction  $\phi$  dérivable partout, on a

$$n\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \phi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

*Démonstration.* .

(1) Puisque  $\phi$  est homogène d'ordre  $n$ , on a

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \phi(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{B.8})$$

(2) On dérive le terme de gauche de l'équation dans l'équation (B.8) par rapport à  $\lambda$  et on pose  $\lambda = 1$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^n \phi(x_1, \dots, x_n) \right|_{\lambda=1} &= n \lambda^{n-1} \phi(x_1, \dots, x_n) \Big|_{\lambda=1} \\ &= n \phi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(3) On dérive le terme de droite de l'équation dans l'équation (B.8) par rapport à  $\lambda$  et on pose  $\lambda = 1$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^n \phi(x_1, \dots, x_n) \right|_{\lambda=1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(x_1, \dots, x_n)}{\partial (\lambda x_i)} \frac{\partial (\lambda x_i)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\lambda x_i, \dots, \lambda x_n)}{\partial \lambda x_i} x_i \Big|_{\lambda=1} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \phi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \end{aligned}$$

(4) On pose (4) = (3), et on obtient le résultat souhaité.

□

## B.7 Dérivée de l'écart-type (générale)

Lorsqu'on prouve la contribution  $C(X_i)$  pour  $\rho(X) = \sqrt{Var(\sum_{i=1}^n X_i)}$ , on doit dériver l'écart-type... voici le développement complet, avec un exemple où  $n = 3$ . Ce qui est important de suivre, c'est qu'on cherche ici la contribution de la v.a.  $X_i$  : alors, lorsqu'on dérive par rapport à  $\lambda_i$ , ça peut être n'importe quoi le  $i : 1, 2, \dots, n$ .

**Rappel d'ACT-1002** Pour les propriétés de la covariance, voir la sous-section ??.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sqrt{Var \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \right)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{Var \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \right)}} \right) \times$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_i \lambda_k Cov(X_i, X_k) \right)$$

### Explication de la forme générale de la variance

Avec un exemple  $n = 3$ , il est très facile de comprendre d'où vient la formule générale de la variance (qui est universelle si les  $X_i$  sont indépendants ou non).

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) &= \text{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3) \\ &\quad + \text{Cov}(X_2, X_1) + \text{Cov}(X_2, X_2) + \text{Cov}(X_2, X_3) \\ &\quad + \text{Cov}(X_3, X_1) + \text{Cov}(X_3, X_2) + \text{Cov}(X_3, X_3) \end{aligned}$$

On remarque en **bleu** les variances séparées pour chacun de nos  $X_i$  de notre exemple, qu'on va pouvoir rassembler ensemble dans une même somme. On remarque aussi que les covariances sont similaires. On remarque en **orange** les covariances reliées à  $X_1$ , en **vert** les covariances reliées à  $X_2$  et finalement en **violet** les covariances qui sont reliées à  $X_3$ .

En étant attentif, on remarque qu'on peut sommer ensemble chaque *paquet* de covariance sur tout le support ( $n = 3$ ), sauf la combinaison  $\text{Cov}(X_i, X_i)$ , car celle-ci a été prise pour rassembler les variances ensemble ( $\text{Var}(X_i) = \text{Cov}(X_i, X_i)$ ).

Alors, on obtient (pour le cas  $n = 3$ ) :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^3 X_i\right) = \sum_{i=1}^3 \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1, k \neq i}^3 \text{Cov}(X_i, X_k)$$

Si on développe le **la dérivée en rouge** seule du reste (en prenant l'exemple

du cas  $n - 3$  et qu'on dérive par rapport à  $\lambda_1$ ), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \rho(X_1 + X_2 + X_3) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \lambda_1^2 \text{Var}(X_1) + \lambda_2^2 \text{Var}(X_2) + \lambda_3^2 \text{Var}(X_3) \right. \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}(X_1, X_2) + \lambda_1 \lambda_3 \text{Cov}(X_1, X_3) \\
&\quad + \lambda_2 \lambda_1 \text{Cov}(X_2, X_1) + \lambda_2 \lambda_3 \text{Cov}(X_2, X_3) \\
&\quad \left. + \lambda_3 \lambda_1 \text{Cov}(X_3, X_1) + \lambda_3 \lambda_2 \text{Cov}(X_3, X_2) \right] \\
&= 2\lambda_1 \text{Var}(X_1) \\
&\quad + \lambda_2 \text{Cov}(X_1, X_2) + \lambda_3 \text{Cov}(X_1, X_3) \\
&\quad + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, X_1) + \lambda_3 \text{Cov}(X_3, X_1) \\
&= 2\lambda_1 \text{Var}(X_1) + \sum_{k=1, k \neq 1}^3 \lambda_k \text{Cov}(X_1, X_k) + \sum_{k=1, k \neq 1}^3 \lambda_k \text{Cov}(X_k, X_1) \\
&= 2\lambda_1 \text{Var}(X_1) + 2 \sum_{k=1, k \neq 1}^3 \lambda_k \text{Cov}(X_1, X_k)
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remettre toute l'équation ensemble :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda_i \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{k=1, k \neq i}^3 \lambda_k \text{Cov}(X_i, X_k)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i)}}$$

Si on pose  $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = \dots = \lambda_n = 1$  et qu'on utilise les définitions des covariances pour rentrer les sommes dans la covariance, tel que

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_i) + \sum_{k=1, k \neq i}^n \text{Cov}(X_i, X_k) &= \sum_{k=1}^n \text{Cov}(X_i, X_k) \\
&= \text{Cov}\left(X_i, \sum_{k=1}^n X_k\right)
\end{aligned}$$

Alors,

$$C(X_i) = \frac{\text{Cov}(X_i, \sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\text{Cov}(X_i, S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}$$

## B.8 Distribution limite de $W_n$

Soit la v.a.  $Z$  où  $\Pr(Z = E[X]) = 1$ . On veut démontrer (à l'aide des transformées de Laplace) que

$$F_{W_n}(x) \longleftarrow F_Z(x) \quad x > 0$$

où  $\Pr(Z = \gamma_j) = \Pr(\Theta = \theta_j)$  et  $\gamma_j = E[X|\Theta = \theta_j]$ .

*Démonstration.* Pour faire la preuve, il faut savoir les 2 résultats suivants :

$$e^{-x} \approx 1 - x \tag{B.9}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{B.10}$$



Si on développe la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E[e^{-tW_n}] \\
&= E_{\Theta}[E[e^{-tW_n}|\Theta = \theta]] \\
&= \int_0^{\infty} E[e^{-tW_n}|\Theta = \theta] f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\infty} E[e^{\frac{t}{n}(X_1 + \dots + X_n)}|\Theta = \theta] f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n E[e^{-\frac{t}{n}X_i}|\Theta = \theta] f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (\text{Car les risques sont cond. indep.}) \\
&= \int_0^{\infty} E[e^{-\frac{t}{n}X}|\Theta = \theta]^n f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (\text{car les v.a. sont id}) \\
&\approx \int_0^{\infty} E\left[\left(1 - \frac{t}{n}X\right)|\Theta = \theta\right]^n f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (\text{par l'équation (B.9)}) \\
&= \int_0^{\infty} \left(E[1|\Theta] - \frac{t}{n}E[X|\Theta]\right)^n f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}E[X|\Theta]\right)^n f_{\Theta}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Si on pose la limite  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}E[X|\Theta]\right)^n f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\infty} e^{-tE[X|\Theta]} f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (\text{par l'équation (B.10)}) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t\gamma} f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad , \text{ où } \gamma = E[X|\Theta] \\
&= \mathcal{L}_Z(t)
\end{aligned}$$

□

## B.9 Équation de Wald

### Critères

1. Soit  $T_1, T_2, T_3, \dots$  une suite de variables aléatoires (iid) avec espérance finie  $\mu < \infty$ .
2. Soit la variable aléatoire  $N$ 
  - (a) Prenant valeur uniquement dans les entiers positifs  $n \in \mathcal{N}$ ;
  - (b) Indépendante de la série  $T_1, T_2, T_3, \dots$  (donc la réalisation ou pas de l'événement  $\{N \geq n\}$  est indépendante du temps auquel elle y a lieu);
  - (c) Avec espérance finie  $E[N] < \infty$ .

### Équation de Wald

$$E[S_N] = \mu E[N]$$

## Preuve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_N] &= \mathbb{E}[T_1 + \cdots + T_N] \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N T_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} T_n \times \mathbf{1}_{\{N(t) \geq n\}}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[T_n \times \mathbf{1}_{\{N(t) \geq n\}}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[T_n] \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N(t) \geq n\}}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[T_n] \Pr(N(t) \geq n) \\ &\stackrel{i.d.}{=} \mu \sum_{n \geq 1} \Pr(N(t) \geq n) \\ &\Leftrightarrow \mu \sum_{n \geq 1} n \Pr(N(t) = n) \\ &= \mu \mathbb{E}[N] \end{aligned}$$

# Annexe C

## Travail collaboratif avec git

```
$ wget http://tex.stackexchange.com
```