

CONTRIBUTEURS

ACT-2011 Gestion des risques financiers II

aut. Nicholas Langevin

aut. Gabriel Crépeault-Cauchon

aut., cre. Alec James van Rassel

src. Claire Bilodeau

src. Thomas Landry

1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.

Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. On peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peut couper des patates. Le risque dépend de leur utilisation.

Les produits dérivés apparaissent souvent en raison d'une augmentation du risque du sous-jacent ; ils sont en fait des **outils de gestion du risque**.

Origine

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devises de chaque pays.

Causes de la transformation des marchés :

- > Déréglementation;
- > Automatisation des traitements avec l'informatique;
- > Mondialisation.

Exemples de produits dérivés

- > Contrat à terme standardisé (« *futures contract* »);
- > Contrat à terme de gré à gré (« *forward contract* »);
Gré : acceptation, ou consentement;
- > Option d'achat (« *call* »);
- > Option de vente (« *put* »);
- > Les « *swaps* ».

Exemples de sous-jacent aux produits dérivés

- > Indice boursier;
- > Taux d'intérêt;
- > Taux de change;
- > Climat;
- > Prix d'une marchandise.

Utilité

- > **Gestion des risques (hedging)**;
Par exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole;
On dit qu'elle « *hedge* », ou protège sa position, contre le prix du pétrole.
- > **Spéculation**;
Par exemple, un investisseur croit que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat.
- > **Réduction des frais de transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger;
- > **Arbitrage réglementaire** : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges.
Par exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote.

Parties prenantes

Utilisateur final participant au contrat du produit dérivé;

- > « *end-user* ».

Teneur de marché "crée" le marché en tant qu'intermédiaire;

- > Il cherche à faire un profit, une "cote", sur la transaction;
- > « *Market-makers* ».

Observateur économique observateurs du marché qui analysent et réglementent les activités des teneurs de marché et utilisateurs.

Ingénierie financière

Création de produits dérivés à partir de d'autres produits.

Implications

- > Les teneurs de marchés peuvent **couvrir** leurs positions (« *hedging position* »);
- > Les teneurs de marchés peuvent **personnaliser** les produits dérivés;
- > L'arbitrage réglementaire est difficile à empêcher puisqu'il existe souvent plusieurs façons pour recréer un produit dérivé.
 - Pour comprendre le concept, $1 + 3 = 4$ tout comme $2 + 2$;
 - Si le numéro 3 est illégal, on peut arriver à 4 d'une autre façon.

Marchés financiers

Transaction gré à gré

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse sur un marché hors cote.

Raisons pour ce type de transaction

- > Ce sont souvent de grosses transactions permettant d'économiser sur les frais de transaction;
- > On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs microtransactions et plusieurs types d'actifs.

Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** »;
 - > C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc.;
 - > Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire nommé la **chambre de compensation** (« *clearing house* »);
 - > Elle met en relation les acheteurs et vendeurs (*1^{ère} étape*), et tient compte des obligations et paiements.
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* »;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Chambre de compensation « *clearing house* »

- > La chambre de compensation règle beaucoup de transactions sur les marchés organisés;
- > Elle est une entité standardisée et réglementée;
- > **Novation** est défini comme un processus de substitution;
- > Dans le cas de produits dérivés, la chambre de compensation, *par novation*, devient le vendeur de tous les acheteurs et l'acheteur de tous les vendeurs;
- > Donc, la chambre de compensation est un intermédiaire pour les acheteurs et vendeurs.

Mesures de taille et d'activité d'un marché

Volume total des transactions : Nombre total de titres transigés pendant une période de temps donnée;

Valeur marchande : Valeur de tout ce qui pourrait être transigé;

- > nombre d'actions \times prix par action (\$);
- > en anglais, le « *market value* »;
- > Dans le cas des produits dérivés, ce n'est pas intéressant

Valeur notionnelle : Valeur du sous-jacent au produit dérivé;

Position ouverte : Nombre de contrats pour lesquels un des parties a une obligation.

- > « *Open interest* ».

Les compagnies recueillent du capital en émettant des actions et obligations selon leurs objectifs.

Obligations Une obligation se compare à un emprunt bancaire et est traitée comme de la dette;

- > Souvent, elles sont émises pour des besoins de liquidité à court terme ou,
- > Pour le démarrage d'une entreprise.

Actions Une action correspond à une partie de la compagnie.

- > Souvent, une compagnie va faire une offre publique lorsqu'elle cherche, ou nécessite de l'argent pour soit s'élargir, développer de nouveaux produits, etc.;
- > L'avantage en comparaison à une obligation est qu'il n'y a pas de promesse de rembourser les fonds;
- > En revanche, la compagnie est forcée d'échanger une partie de son contrôle.

Il s'ensuit que le **marché des actions** est plus actif (a un volume total de **transactions** plus important) que le **marché des obligations**; les obligations se transigent moins souvent que les actions. Cependant, la taille des deux marchés (valeur marchande) est similaire.

Rôle des marchés financiers : Partage du risque et diversification des risques. Si un risque est non diversifiable.

Écart acheteur-vendeur « *Bid-Ask Spread* »

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**).

Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask - Bid > 0$.

Prix

Ask : Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent;

- > Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé;
- > « *ask price* » se traduit au **cours vendeur** représentant l'idée de regarder les prix auxquels se transigent l'actif.

Bid : Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent.

- > Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible;
- > « *bid price* » se traduit au **cours acheteur**.

Terminologie des marchés

Ordre au cours du marché : On achète et vend selon les meilleurs prix bid-ask actuels;

- > « *Market order* ».

Ordre à cours limité : Ordre pour une quantité précise dans une tranche spécifiée de prix;

- > « *Limit order* »;
- > On achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$ sinon aucune transaction a lieu.

Ordre de vente stop : Ordre au cours du marché déclenché par l'atteinte d'un certain prix;

- > « *Stop-loss order* »;
- > On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur et le vendre si $Bid \leq k$.

Longue On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une **hausse** du sous-jacent;

- › La position peut également être déterminé selon le produit dérivé; on se considère en position longue si l'on possède quelque-chose.

Courte On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une **baisse** du sous-jacent.

- › La position peut également être déterminé selon le produit dérivé; on se considère en position longue si l'on emprunte quelque-chose.

Vente à découvert

Vente à découvert « (short-sell) »

La vente d'un actif qu'on ne possède pas. On peut y penser comme l'inverse d'un achat.

Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre;
2. Vente du titre;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre;
4. Remboursement du titre.

Exemple de vente à découvert

- › Mon ami James possède 5 actions d'Apple ayant chacune une valeur de 5\$;
- › Je lui emprunte ses 5 actions et lui promets d'y retourner;
- › Immédiatement, je revends ses actions sur le marché des actions;
 - Je ne suis pas inquieté, je suis certain que le prix va baisser;
 - Ce faisant, je suis certain que je serai capable de racheter ses actions plus tard à un prix plus faible.
- › Après une certaine période de temps, j'achète 5 actions au nouveau prix et j'y retourne.

Raisons pour une vente à découvert

- › **Spéculation** : Un investisseur tire profit d'une baisse de prix;
- › **Financement** : Une vente à découvert est une façon d'emprunter de l'argent;
- › **Couverture** (hedging) : Un investisseur peut éliminer le risque d'une position longue sur une action avec une vente à découvert.

Type de risques

Risque de défaut (de crédit) Risque de ne pas être payé;

- > Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité;
- > « *credit risk* ».

Risque de rareté Risque qu'il soit difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent.

- > C'est le risque lié à un actif peu liquide;
- > En raison du faible nombre de transactions, il peut être difficile d'établir des clauses et conditions avec peu de transactions sur lesquelles se baser;
- > Il s'ensuit qu'il y a beaucoup de négociations et de variations dans les prix.

« **Dividends** » Il est possible que des dividendes soient payables lors du prêt;

- > Puisque le détenteur de l'action sera celui à qui l'investisseur a vendu les actions, l'investisseur et le prêteur ne vont pas les recevoir;
- > Du point de vue du prêteur, les dividendes sont des paiements en espèce qu'il aurait reçus s'il n'avait pas prêté l'action;
- > Ce faisant, l'investisseur va payer ces dividendes au prêteur s'il y en a;
- > Pour le prêteur ils sont imposables alors que pour l'investisseur ils sont déductibles d'impôts;
- > Ce paiement se nomme le **taux de location** (« *lease rate* ») de l'actif.

Frais

L'**investisseur** est le *short-seller* et le **prêteur** le *détenteur des actions empruntées* par l'investisseur.

« **short-sale proceeds** » Les recettes de la vente sont conservées comme collatéraux au cas où que l'investisseur ne retourne pas les actions;

- > Soit le prêteur, ou un parti tiers, va conserver les revenus de la vente à découvert jusqu'au retour des actions;
- > À ce moment, elles seront retournées à l'investisseur.

« **a haircut** » Marge de sécurité pour couvrir le risque que le prix des actions augmente trop pour que l'investisseur ait la capacité financière des retourner, le prêteur exige un « dépôt » additionnel;

- > Comme les recettes de la vente, cette marge de sécurité sera retournée au prêteur.

« **Interest** » Il est naturel que le prêteur exige un retour sur la vente à découvert également;

- > Dans le marché des actions, l'intérêt accumulé sur le collatéral est le « *short rebate* »;
- > Dans le marché des obligations, c'est le **taux de mise en pension** (« *repo rebate* »);
- > Ces taux sont habituellement *plus faibles que* ceux du *marché* et sont fondés sur l'offre et la demande.

2 Introduction aux Forwards et aux options

Terminologie

Prime : Flux financiers à $t = 0$;

- > Dans le cas d'options, la prime est le coût $C(K)$;
- > Si **positif**, il s'agit d'un **coût**;
- > Si **négatif**, il s'agit d'une **compensation**.

Valeur à l'échéance T : L'argent que l'on reçoit à l'échéance;

- > « *payoff* »;
- > C'est à dire, les flux de trésorier au temps $t = T$;
- > Dans le cas de l'achat d'un actif, on reçoit son prix S_T ; s'il est nul, on ne reçoit rien.

Profit = (valeur à l'échéance) - (valeur accumulée du coût initial)
= VA(flux monétaires)^a

- > Le profit soustrait les flux financiers initiaux accumulés de la valeur à l'échéance;
- > Par exemple, acheter une voiture et la revendre 10 ans plus tard :
profit = (prix de revente à dans 10 ans) -
(valeur accumulée du coût d'achat initial
à 0 au courant des 10 dernières années)
- > Dans le cas d'options, on soustrait la valeur accumulée de la prime.

r taux (force) d'intérêt sans risque (effectif annuel);

T date d'échéance.

a. Valeur Accumulée au taux sans risque.

Contrats à terme de gré à gré

Contrat à terme (de gré à gré) « *forward contract* »

Contrat selon lequel :

- > deux partis s'**engagent d'échanger**—un à *acheter* et l'autre à *vendre*;
- > une *certaine quantité* d'un *certain bien*—l'actif sous-jacent S ;
- > à un *certain prix*—prix à terme $F_{0,T}$;
- > à un *certain endroit* à une *certaine date*—date d'échéance, T ;

L'engagement est au départ à $t = 0$ mais aucune transaction y a lieu. Ce faisant, le profit sera égal à la valeur à l'échéance puisqu'il n'a pas de flux financiers à 0 à accumuler. L'achat **ferme** en revanche, implique l'*achat* et la livraison de l'actif au départ à $t = 0$. Donc :

Transaction	Valeur à l'échéance	Profit
Achat ferme	S_T	$S_T - S_0 e^{rT}$
Contrat à terme (achat)	$S_T - F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

Notation de prix

S_t : **Valeur** de l'actif sous-jacent à t ;

S_0 : **Prix au comptant**;

- « (*spot price*) »;
- C'est le paiement pour la livraison immédiate à $t = 0$;
- En d'autres mots, le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui payable dans le cas d'un achat ferme.

$F_{0,T}$: **Prix à terme** payable à T ;

$$F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$$

$F_{0,0}$: est nul.

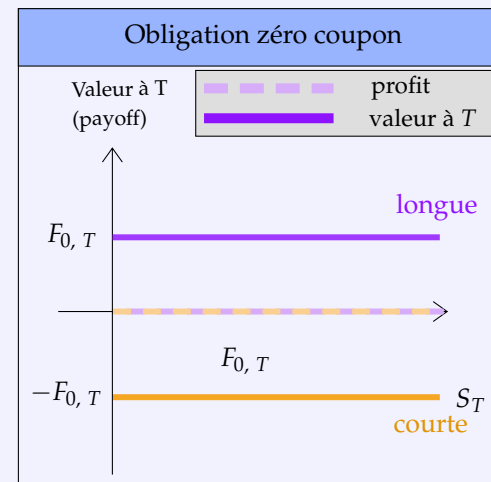
La notation $F_{0,T}$ vient de « *future* » ou « *forward* ».

Exemple de bateau

- > Je veux acheter un (*quantité*) bateau (*bien*), mais il est inconvenient pour moi de le recevoir maintenant;
- > En lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente (*engagement*) pour l'acheter;

- > La seule différence entre l'acheter aujourd'hui (*au prix au comptant* S_0) et l'acheter lorsque la neige fond (*au prix à terme* $F_{0,T}$) est l'accumulation d'intérêt;
- > Puisqu'on suppose tout les deux d'être fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque (r) et le prix payable rendu à l'été (T) sera $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$;
Si le taux sans risque est un **taux** plutôt qu'une *force* d'intérêt, on obtient $F_{0,T} = S_0(1 + r_f)^T$.

Obligation zéro coupon



La position

longue Équivaut à un dépôt;
courte Équivaut à un emprunt.

Valeur à l'échéance
$F_{0,T}$
Profit
$F_{0,T} - (F_{0,T} - e^{-rT})e^{rT}$

Option d'achat

Contrat qui :

- > permet (**optionnel**) à son détenteur d'acheter;
- > une certaine **quantité** d'un certain **bien**—l'actif sous-jacent;
- > à un certain **prix**—prix d'exercice K ;
- > à un certain **endroit** à, ou d'ici, une certaine **date**—date d'échéance, T ;

Notation

C_0 Prix pour acheter l'option d'achat;

$C(K)$ Notation pour représenter l'option d'achat (« Call ») avec un prix d'exercice de K .

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $C(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec C_0 .

Exercice (levée)

Décision d'exercer l'option d'achat ou de vente.

Notation

K : Prix d'exercice (*strike price*);

Types d'exercices

Européen : Au moment d'expiration de l'option T ;

Américain : N'importe quand (any moment) d'ici T ;

Bermudien : À quelques périodes (bounded periods) d'ici T ;

En réalité, la majorité des options sont américaines.

Option de vente

Contrat qui *permet* à son *détenteur* de **vendre** au lieu d'acheter.

Notation

P_0 **Prix** pour acheter l'option de vente ;

$P(K)$ Notation pour représenter l'option de vente (« *Put* ») avec un prix d'exercice de K .

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $P(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec P_0 .

Note L'acheteur d'une option de vente a une position **longue** par rapport à l'**option** mais une position **courte** par rapport au **sous-jacent**.

Règlement en espèce et livraison

En **théorie**, avec un contrat à terme de gré à gré, l'acheteur reçoit l'actif sous-jacent à la *date de livraison* et le vendeur reçoit, à ce même moment, l'argent (*le prix à terme*) en échange.

En **pratique**, il arrive que le sous-jacent ne soit jamais transigé. En lieu, le règlement se fait en espèce au parti ayant fait un profit dans la transaction.

Ceci revient à ce que l'acheteur paye $F_{0,T}$ au vendeur en échange de S_T ; puis, il va immédiatement revendre l'actif au cours du marché. Les profits sont alors de $S_T - F_{0,T}$ pour l'acheteur et de $F_{0,T} - S_T$ pour le vendeur.

Il n'y a aucun impact sur les profits et le **vendeur peut ne jamais avoir possédé l'actif** sous-jacent. Les contrats « *forward* » permettent donc aux investisseurs de spéculer ou d'atténuer des risques pris dans d'autres transactions, positions et investissements tout en **évitant des frais de transactions**.

Profit (perte) extrême

Position	Minimum	Maximum
Contrat à terme (longue)	$-F_{0,T}$	$+\infty$
Contrat à terme (courte)	$-\infty$	$+F_{0,T}$
Option d'achat (longue)	$-C_0e^{rT}$	$+\infty$
Option d'achat (courte)	$-\infty$	$+C_0e^{rT}$
Option de vente (longue)	$-P_0e^{rT}$	$K - P_0e^{rT}$
Option de vente (courte)	$-(K - P_0e^{rT})$	$+P_0e^{rT}$

Types de positions :

Position capitalisée Une position est dite "capitalisée" si elle est payée en entier au début (à $t = 0$) ;

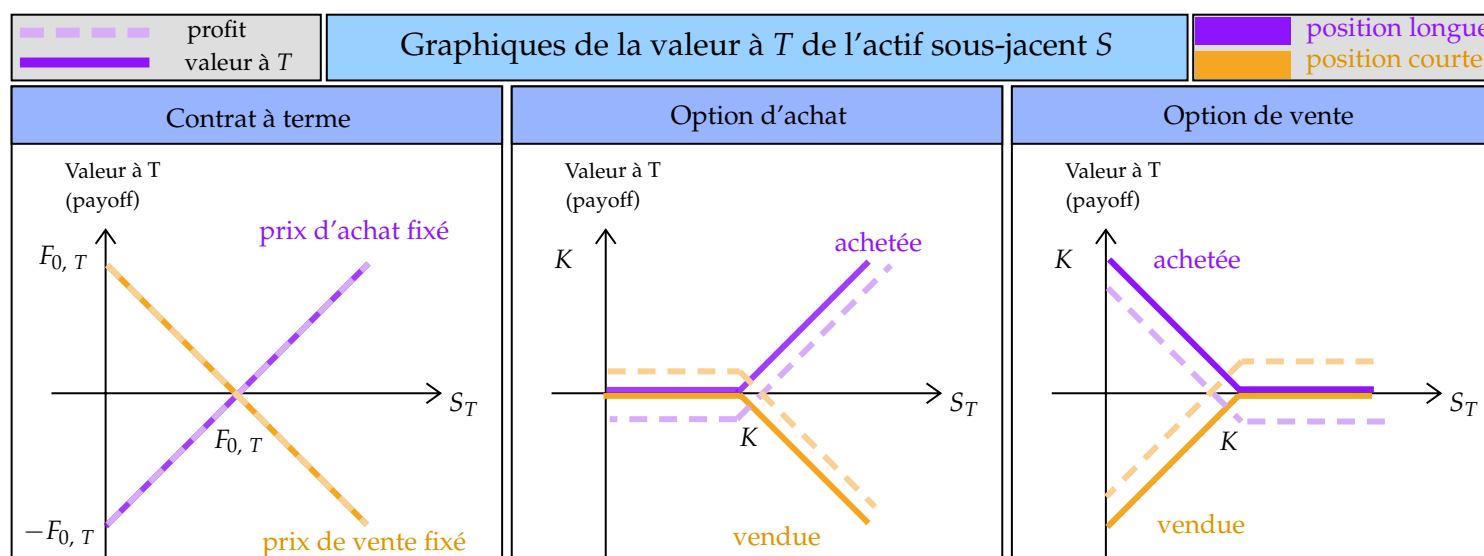
› Par exemple, l'achat ferme d'un action aujourd'hui.

Position non capitalisée Une position est dite "non capitalisée" si le paiement en est différé.

› Par exemple, un contrat à terme de gré à gré dont le paiement est différé à l'échéance.

En bref, la différence fondamentale entre l'achat ferme et l'achat différé est le moment du règlement de l'achat.

Autre	Contrat	Position	Rôle	Stratégie	Valeur à T (payoff)	Profit
	Contrat à terme	Longue	obligation d'acheter	garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent	$S_T - F_{0,T}$	
		Courte	obligation de vendre	garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent	$-(S_T - F_{0,T})$	
Option	d'achat (call)	Longue	droit d'acheter	achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$\max\{0, S_T - K\}$	$\max\{0, S_T - K\} - C_0 e^{rT}$
		Courte	obligation de vendre	vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$-\max\{0, S_T - K\}$	$-\max\{0, S_T - K\} + C_0 e^{rT}$
	de vente (put)	Longue	droit de vendre	achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$\max\{0, K - S_T\}$	$\max\{0, K - S_T\} - P_0 e^{rT}$
		Courte	obligation d'acheter	vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$-\max\{0, K - S_T\}$	$-\max\{0, K - S_T\} + P_0 e^{rT}$



Degré de parité	« Moneyness »	Option d'achat	Option de vente
au cours	« At-the-money »	$S_0 = K$	$S_0 = K$
dans le cours	« In-the-money »	$S_0 > K$	$S_0 < K$
hors du cours	« Out-of-the-money »	$S_0 < K$	$S_0 > K$

3 Stratégie de couverture

Préliminaires

Hypothèses

Pour tout le chapitre, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Taux d'intérêt i constant;
2. Aucuns frais de transaction;
3. Aucun risque de défaut;
4. Aucun versement intermédiaire.

Propriétés des maximums et minimums

$$\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)$$

$$\min(a, b) + c = \min(a + c, b + c)$$

$$\min(a, b) = -\max(-a, -b)$$

$$\max(a, b) \times c = \max(a \times c, b \times c), c > 0$$

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$$

Une option est dite d'être non-couverte si nous avons aucune position dans l'actif sous-jacent. En revanche, une option est couverte si l'on a une position correspondant à l'obligation de l'option.

Une **option d'achat couverte** est la vente de l'option d'achat $-C(K)$ et l'achat du sous-jacent $+S_0$.

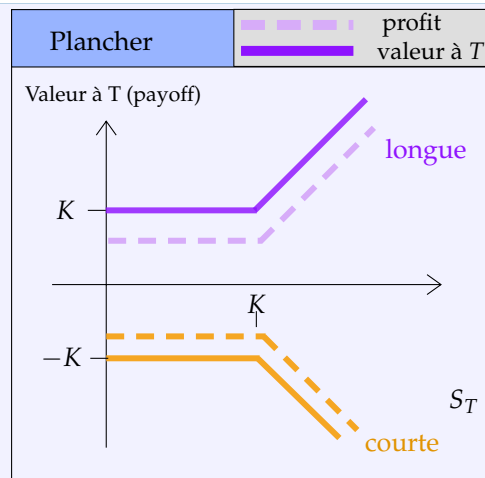
Une **option de vente couverte** est la vente de l'option de vente $-P(K)$ et de la vente à découvert du sous-jacent.

Plancher « floor »

On achète une option de vente pour garantir un prix minimum de vente et couvrir une position longue dans l'actif sous-jacent. On dit donc avoir une **option de vente de protection** qui sert de *plancher* minimale.

$$\text{Floor} = +S_T + P(K)$$

$$\text{Valeur à l'échéance} = \max(0, K - S_T) + S_T = \max(S_T, K)$$

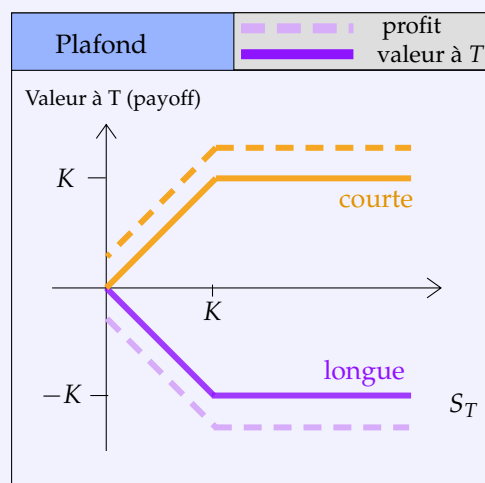


Plafond « cap »

On achète une option d'achat pour garantir un prix maximal d'achat et couvrir une position courte dans l'actif sous-jacent. Ce faisant, on *plafonne* le prix d'achat.

$$\text{Cap} = -S_T + C(K)$$

$$\text{Valeur à l'échéance} = \max(0, S_T - K) - S_T = -\min(S_T, K)$$



Écarts et tunnels

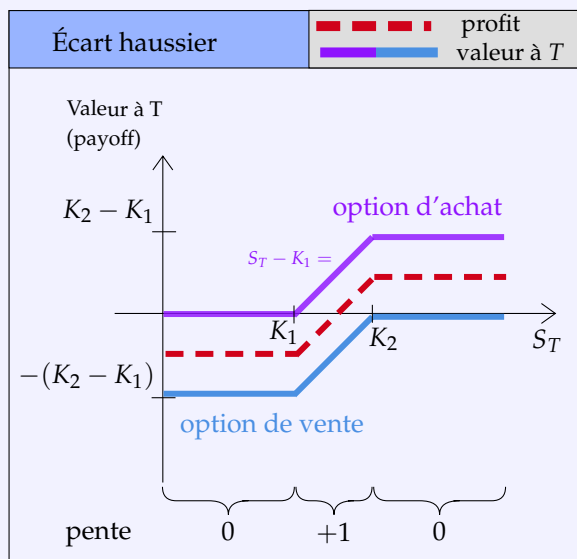
Écart haussier « Bull Spread »

Crée en :

- > Achetant une option d'achat $C(K_1)$ et vendant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- > Achetant une option de vente $P(K_1)$ et vendant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- > Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va augmenter, *mais*
 - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse;
 - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
 - > « Bull Spread » provient de l'idée d'être « bull-ish » et prévoir une augmentation du prix de l'action à un intervalle;
- On peut également visualiser un taureau avec ses cornes pointues vers le haut prêt à attaquer.



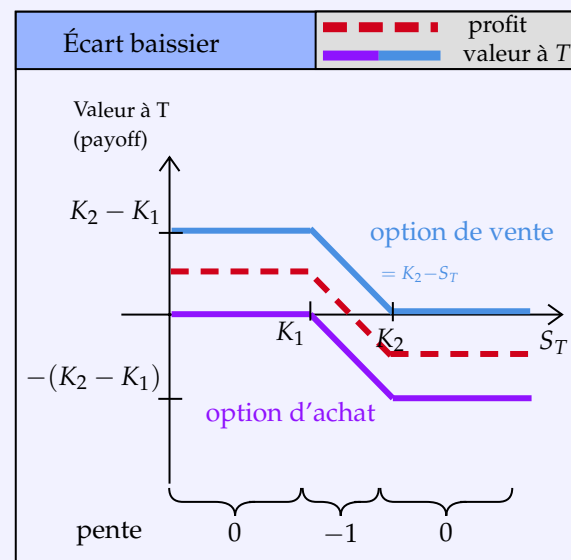
Écart baissier « Bear Spread »

L'inverse d'un écart haussier, il est crée en :

- > Vendant une option d'achat $C(K_1)$ et achetant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- > Vendant une option de vente $P(K_1)$ et achetant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- > Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va baisser, *mais* qu'il
 - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse;
 - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
 - > « Bear Spread » provient de l'idée d'investir avec précaution pour « bear-er » une et baisse du prix de l'action à un intervalle;
- On peut également visualiser un ours qui va « strike down » avec ses pattes d'ours en attaque.



Écart sur ratio d'options « Ratio Spread »

Crée en :

- > **achetant** m options à un prix d'exercice K_1 et
- > puis **vendant** n options à un prix d'exercice K_2 différent où
- > $m \neq n$ et $K_1 \neq K_2$.

Boite « Box Spread »

- > La stratégie consiste à acheter un écart haussier ainsi qu'un écart baissier où l'un utilise des options d'achat et l'autre des options de vente (ayant les mêmes caractéristiques);
- > Il est utilisé pour emprunter ou prêter de l'argent avec une valeur à l'échéance connue en avance, peu importe la direction prise par la valeur de l'actif sous-jacent;
- > Il est donc équivalent à une obligation zéro-coupons.



Par exemple, on achète (position longue) un écart haussier d'options d'achat et un écart baissier d'options de vente :

option	$0 \leq S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$K_2 \leq S_T$
$+C(K_1)$	0	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$
$-C(K_2)$	0	0	$-(S_T - K_2)$
$-P(K_1)$	$-(K_1 - S_T)$	0	0
$+P(K_2)$	$K_2 - S_T$	$K_2 - S_T$	0
net	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$

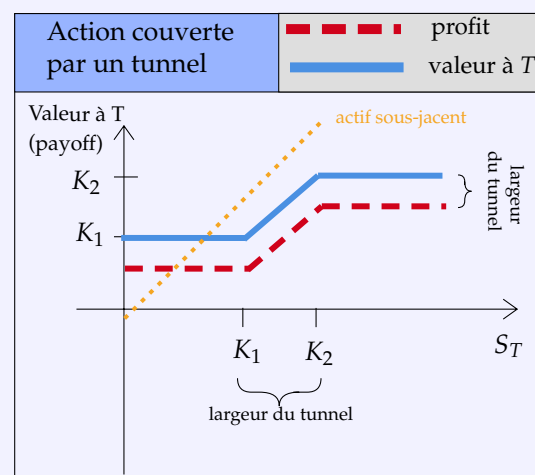
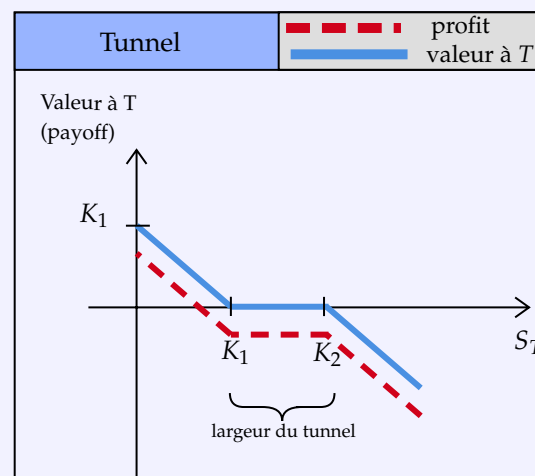
Tunnel « Collar » et action couverte par un tunnel « Collared stock »

Le tunnel (« Collar ») est crée en

- > Achetant une option de vente $P(K_1)$ et
- > vendant une option d'achat $C(K_2)$ où
- > $K_1 < K_2$.

Lorsqu'on achète l'actif (position longue) en plus, nous obtenons une action couverte par un tunnel (« Collared stock »).

La largeur du tunnel est $K_2 - K_1$.



$$\text{tunnel} = P(K_1) - C(K_2)$$

action couverte par un tunnel = $P(K_1) - C(K_2) + S_T$

Si l'on achète deux options ayant la même prime, on obtient un tunnel à prime zéro. Par exemple, on vend une option d'achat $C(120) = 5$ et achète une option de vente $-P(120) = -5$ ayant donc un coût initial nul.

Spéculation sur la volatilité

Stellage « straddle »

Créé en achetant une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice K .

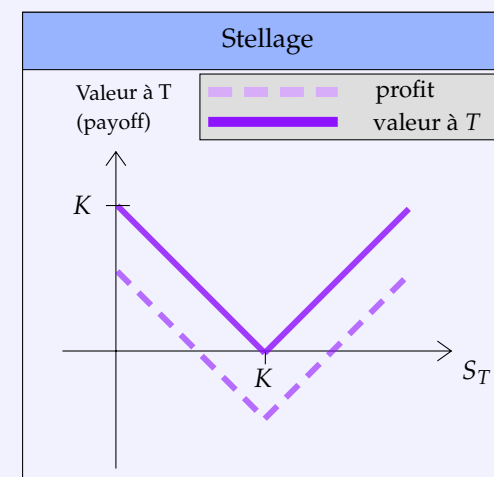
Contexte

- > Souvent bâti avec un prix d'exercice au cours du marché (in-the-money);
- > L'idée est de faire un profit si le prix de l'actif sous-jacent **baisse ou descend**;
- > Son avantage est donc qu'il peut être profitable avec une baisse ou hausse du prix de l'actif sous-jacent;
- > Cependant, puisqu'il faut acheter deux options au cours du marché, le coût est plutôt élevé.

$$\text{Straddle} = \text{Put}(K, T) + \text{Call}(K, T).$$

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$|S_T - K| \equiv \begin{cases} (K - S_T) + 0 = K - S_T, & S_T \leq K \\ 0 + (S_T - K) = S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$



Stellage élargi « strangle »

Créé en

- > achetant une option de vente avec un prix d'exercice K_1 et
- > achetant une option d'achat avec un prix d'exercice K_2 où
- > $K_1 < K_2$.

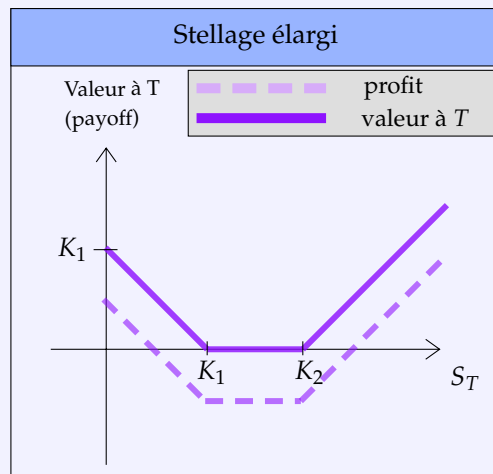
Contexte

- > Pour réduire le coût des primes, les options sont à des prix d'exercice hors du cours du marché (out-of-the-money);
- > Cela réduit la perte maximale, mais augmente la variation nécessaire pour faire un profit.

$$\text{Strangle} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_2, T).$$

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$\begin{cases} (K_1 - S_T) + 0 = K_1 - S_T, & S_T \leq K_1 \\ 0 + 0 = 0, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 + (S_T - K_2) = S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$



Écart papillon « Butterfly Spread (BFS) »

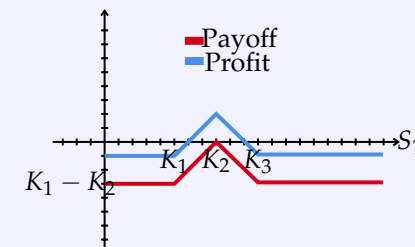
Créé en

- > achetant stellage élargi avec prix d'exercices K_1 et K_3 ;
 - > vendant un stellage avec un prix d'exercice K_2 ;
 - > où $K_1 < K_2 < K_3$;
 - > L'écart papillon est symétrique avec $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$.
- $$\text{BFS} = \text{Put}(K_1, T) + \text{Call}(K_3, T) - \text{Put}(K_2, T) - \text{Call}(K_2, T).$$

Notes

- > Il existe plusieurs façons de recréer un écart papillon;
- > Par exemple, un écart haussier aux prix d'exercice K_1 et K_2 combiné avec un écart baissier aux prix d'exercice K_2 et K_3 .

$$\text{BFS} = \text{Call}(K_1, T) - 2\text{Call}(K_2, T) + \text{Call}(K_3, T).$$



Écart papillon asymétrique

- > La distinction avec un écart papillon symétrique est qu'on achète/vend en différentes proportions des options d'achat;
- > $A\text{-BFS} = m\text{Call}(K_1, T) - (m + n)\text{Call}(K_2, T) + n\text{Call}(K_3, T)$;
- > L'écart est asymétrique avec $m(K_2 - K_1) = n(K_3 - K_2)$.

Puisque la différence en prix n'est pas symétrique, on fait une "interpolation" de sorte.

Pour calculer le nombre d'options à acheter/vendre aux différents prix :

1. On calcule la différence en prix total $K_3 - K_1$;
2. On calcule séparément les différences de prix :

$$\begin{aligned} &K_2 - K_1 \\ &K_3 - K_2 \end{aligned}$$

Intuition La somme de ces deux différences résulte en l'écart total.

$$(K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) = (K_3 - K_1)$$

3. On :

- > vends $K_3 - K_1$ options au prix d'exercice K_2 ;
- > achète $K_2 - K_1$ options au prix K_3 ;
- > achète $K_3 - K_2$ options au prix K_1 .

4. Avec des options d'achat, on obtient :

$$+(K_3 - K_2)C(K_1) - (K_3 - K_1)C(K_2) + (K_2 - K_1)C(K_3)$$

Intuition On peut donc pondérer par la différence totale et obtenir une "interpolation" :

$$+ \frac{(K_3 - K_2)}{(K_3 - K_1)} C(K_1) - C(K_2) + \frac{(K_2 - K_1)}{(K_3 - K_1)} C(K_3)$$

C'est d'ici que provient la notation avec λ :

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Pour chaque option avec un prix d'exercice de K_2 vendue, on achète λK_1 et $(1 - \lambda)K_3$.

5 Contrats à terme

4 façons d'acheter une action

Il y a plusieurs façons d'acheter une action et le prix va dépendre du **moment de paiement** et du **moment de la livraison**.

Contrat	Moment de paiement	Moment de la livraison	Paiement
Outright purchase	0	0	S_0
Forward contract	T	T	$F_{0,T}$
Prepaid forward contract	0	T	$F_{0,T}^P$
Fully leveraged purchase	T	0	$S_0 e^{rT}$

Achat pleinement par emprunt « fully leveraged purchase » On emprunte de l'argent pour obtenir l'actif immédiatement (à $t = 0$) en différant le paiement (remboursement) au temps T ;

Contrat à terme de gré à gré prépayé « prepaid forward contract » On paye immédiatement (à $t = 0$) au prix $F_{0,T}^P$, mais on reçoit quand même l'actif plus tard.

Ce faisant, on s'attend à ce que $F_{0,T} = F_{0,T}^P e^{rT}$.

Notation de prix

$F_{0,T}^P$: est le **prix à terme** d'un contrat à terme de gré à gré **prépayé**;
 $> F_{0,T} = F_{0,T}^P e^{rT}$.

La loi du prix unique

Stipule que deux portefeuilles avec les mêmes profits doivent avoir le même prix.

Nous tarifions des contrats à terme de gré à gré *prépayés* et utilisons ces prix pour dériver les prix des contrats à terme de gré à gré.

Tarification d'un contrat à terme de gré à gré prépayé

Sans dividendes, le prix du contrat à terme de gré à gré prépayé est le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui— S_0 .

Si une action a des dividendes, elles seront payables au propriétaire de l'action. Puisque l'acheteur du contrat (position longue) va seulement posséder le contrat au temps T , il ne recevra pas de **dividendes**. Cela va donc faire **baissier la valeur de l'action** et le prix à terme du contrat devra le tenir en compte. Également, on présume que le **droit de vote n'a aucune valeur** pour calculer le prix à terme.

Dans le cas de **dividendes discrets**, il suffit de soustraire la valeur actualisée des dividendes : $F_{0,T}^P = S_0 - PV(div)$. Ces dividendes sont supposés d'être réinvestis dans des obligations zéro coupon.

Un modèle de **dividendes payés continûment** suppose un taux de dividendes continûment composé δ . Une part de l'action au temps initial devient $e^{\delta T}$ parts au temps T . Cependant, nous souhaitons avoir seulement une part au temps T et donc achetons $e^{-\delta T}$ parts au début. Le prix du contrat est donc $F_{0,T}^P = S_0 e^{-\delta T}$.

Dans le cas de dividendes **proportionnels**, on suppose qu'ils sont réinvestis dans le sous-jacent.

En bref :

Dividendes	Prix à terme prépayé	Prix à terme
Sans dividendes	S_0	$S_0 e^{rT}$
Dividendes payés continûment	$S_0 e^{-\delta T}$	$S_0 e^{(r-\delta)T}$
Dividendes discrets	$S_0 - PV(div.)$	$S_0 e^{rT} - FV(div.)$

Prime à terme « forward premium »

Défini comme le ratio du prix à terme au prix courant de l'actif sous-jacent :

$$\text{Prime à terme} = \frac{F_{0,T}}{S_0}$$

La prime à terme annualisée (« *annualized forward premium* ») est $\frac{1}{T} \ln \left(\frac{F_{0,T}}{S_0} \right)$.

Est-ce de l'arbitrage?

Flux monétaires	Oui	Non
Au temps 0, est-ce que le flux monétaire net est ≥ 0 ?	X	
Est-ce que tous les flux monétaires nets futurs sont ≥ 0 ?	X	
Est-ce qu'au moins un des flux monétaires nets futurs est > 0 ?	X	

Si la réponse à toutes les questions est oui, alors il y a une opportunité d'arbitrage. Pour identifier les flux monétaires, on utilise l'approche à deux étapes :

1. Écrire, sous forme d'inégalité, ce qui est observé;

2. Déplacer tout ce qui est sur le côté inférieur ($<$) au côté supérieur ou égal (\geq);
Nous avons les signes appropriés pour les transactions.

Position synthétique

Une position synthétique réplique la valeur à l'échéance d'une autre position.

Achat d'action synthétique

On peut synthétiquement répliquer l'achat d'une action en prêtant de l'argent et achetant un contrat à terme de gré à gré.

Transaction	$t = 0$	$t = T$
Prêt de $S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{(r-\delta)T} = F_{0,T}$
Achat d'un contrat à terme de gré à gré	0	$S_T - F_{0,T}$
Net	$-S_0 e^{-\delta T}$	S_T

Obligation zéro-coupon synthétique

On peut créer une obligation zéro-coupon synthétique en achetant une action et vendant un contrat à terme de gré à gré.

Transaction	$t = 0$	$t = T$
Achat de $e^{-\delta T}$ actions	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un contrat à terme de gré à gré	0	$F_{0,T} - S_T$
Net	0	$F_{0,T} = S_0 e^{(r-\delta)T}$

Le rendement de cette stratégie s'appelle le **taux de mise en pension implicite** (« *implied repo rate* »). Cela signifie le taux implicite dans cette stratégie pour répliquer un rendement équivalent à une obligation zéro-coupon.

Contrat à terme synthétique « *synthetic forward* »

Un contrat à terme synthétique réplique la valeur à l'échéance d'un contrat à terme sans réellement en signer un.

Avec un **vrai** contrat à terme :

- > le coût initial est nul et

- > la valeur à l'échéance est l'écart entre le prix à terme et la valeur du sous-jacent ($S_T - F_{0,T}$).

Avec un contrat à terme **synthétique** :

- > on prévoit l'échange du bien contre un prix quelconque K et
- > la valeur à l'échéance est leur écart ($S_T - K$).
- > Il s'ensuit que le coût initial ne peut être nul et
- > c'est pourquoi on **emprunte de l'argent**, ou de façon équivalente, **vend une obligation zéro-coupons**.

En bref, on **achète l'actif et emprunte de l'argent** :

Transaction	Flux au temps 0	Flux au temps T
Acheter un actif	$-S_0$	$+S_T$
Emprunter de l'argent	$+S_0$	$-S_0 e^{rT} = -F_{0,T}$
Net des flux monétaires	0	$S_T - F_{0,T}$

Le montant du prêt n'a pas besoin d'être S_0 puisque le contrat est synthétique. Ce faisant, si le montant emprunté d'un contrat est de S_0 on qu'il est au cours du marché.

Comptant terme « *Cash-and-carry* »

Dans un comptant terme, alias l'achat au comptant - vente à terme, achète une action avec un emprunt et vend un contrat à terme de gré à gré.

La stratégie s'apparente à une obligation zéro coupon financé par une obligation zéro coupon. Il s'ensuit que, sans arbitrage, le profit sera nul.

Transaction	$t = 0$	$t = T$
Achat de $e^{-\delta T}$ actions	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un contrat à terme de gré à gré	0	$F_{0,T} - S_T$
Emprunt de $S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{(r-\delta)T}$
Net	0	$F_{0,T} - S_0 e^{(r-\delta)T}$

Sans arbitrage, la dernière ligne s'annule.

L'inverse arrive lorsque le marché offre un contrat à terme de gré à gré sous-évalué.

Contrats de change

Notation de devises

DD **Devise domestique** (ou de départ);

DÉ **Devise étrangère**;

i_D taux d'intérêt dans la DD;

i_E taux d'intérêt dans la DÉ;

$F_{0,T}^P$: est le prix d'un contrat de change à terme prépayé en DD;

$$F_{0,T}^P = x_0(1 + i_E)^{-T} \text{DD}$$

$F_{0,T}$: est le prix d'un contrat de change à terme en DD;

$$F_{0,T} = x_0(1 + i_E)^{-T}(1 + i_D)^T \text{DD}$$

x_t taux de change au temps t en DD/DÉ

– Par exemple, $x_0 = \frac{2\$}{1\text{€}} = \left(2 \frac{\$}{\text{€}}\right) \equiv \frac{2\text{DD}}{1\text{DÉ}}$

La logique des formules des contrats à terme de gré à gré est :

$$F_{0,T}^P(1\text{DÉ}) = \left(1\text{DÉ} \cdot e^{-i_{\text{DÉ}} T}\right) \cdot \left(x_0 \frac{\text{DD}}{\text{DÉ}}\right) = x_0 \cdot e^{-i_{\text{DÉ}} T} \text{DD}$$

Un actif peut avoir un prix défini dans n'importe quelle devise; on dit qu'il est « *denominated* » dans cette devise.

Contrat de change synthétique

1. Emprunt de $x_0(1 + i_E)^{-T} \text{DD}$ au taux i_D ;
2. Convertir les DD en DÉ;
3. Dépôt de $(1 + i)^{-T} \text{DÉ}$ (au taux i) de 0 à T .

La valeur à l'échéance sera $x_t - x_0 \left(\frac{1+i_D}{1+i_E}\right)^T$.

Contrat à terme standardisé

Les contrats à terme standardisés sont transigés à la bourse. Ces transactions peuvent avoir lieu soit sur le plancher ou électroniquement.

Contrat à terme standardisé « *future contract* »

Différences des contrats à terme standardisés aux contrats à terme de gré à gré :

1. Personnalisable;

- › Les contrats « *forwards* » peuvent être **faits de gré à gré** sur n'importe quel actif avec n'importe quelle clause et/ou condition;
L'acheteur et le vendeur peuvent choisir n'importe quel prix, montant, date d'échéance ou actif sous-jacent;
- › Les contrats « *futures* » sont **surveillés et contrôlés** par des instances officielles au même titre que la bourse;
On dit donc qu'ils sont **standardisés**.

2. Valorisation au prix du marché « *Marked-to-Market* »;

- › Pour un « *forward* », toutes les échanges d'argent se produisent à l'échéance (le contrat est réglé à l'échéance);
- › Pour un « *future* », les pertes et profits sont réglés tous les jours (processus de valorisation au prix du marché) en espèces.

3. Risque de défaut;

- › Pour un « *forward* », le contrat est pleinement exposé au risque de défaut;
- › Pour un « *future* », avec le règlement quotidien des pertes et profits, le risque de défaut est minimisé.

4. Liquidité : fait référence à l'aise d'acheter ou de vendre un actif ou, de façon équivalente, de sortir ou entrer de leur position;

- › Pour un « *forward* », il est impossible de sortir d'un contrat et donc ils ne sont pas liquides;
- › Pour un « *future* », puisqu'ils sont transigés sur les marchés boursiers, ils sont liquides.

5. Limite de prix;

- › Pour un « *forward* », il n'y a aucune limite de prix sur l'actif sous-jacent et il peut varier sans limites;
- › Pour un « *future* », il y a des limites incluses dans le contrat sur la variation du prix du sous-jacent;

› Par exemple, s'il y a une baisse de 13% au S & P 500, il y a un « *circuit breaker* » qui arrête temporairement l'échange.

Puisque le règlement des contrats à terme standardisé est quotidien alors que le règlement des contrats à terme de gré à gré s'effectue à l'échéance, le prix à terme est différent.

Marges initiales et de maintien « *initial and maintenance margins* »

Compte Afin de contrer le risque de défaut, l'acheteur et le vendeur doivent déposer de l'argent dans un compte (« *a margin account* ») accumulant de l'intérêt;

Marge initiale Le dépôt initial est nommé la marge initiale (« *initital margin* »);

Marge de maintien Les pertes et profits sont soustraits du compte et donc un niveau minimal est requis—la marge de maintien (« *maintenance margin* »);

Appel de marge Si le montant dans le compte descend en dessous de la marge de maintien, nous recevons un appel de marge (« *margin call* ») qu'il faut y ajouter des fonds pour ramener la balance à la **marge initiale**.

Exemple

On suppose l'achat d'une action se transigeant au prix de 950\$ aujourd'hui (S_0) ayant 250 parts sous-jacentes. La force d'intérêt (δ) est de 6%, la marge initiale égale à 80% de la valeur notionnelle et la marge de maintien 10% de la marge initiale.

Ce faisant, la **balance de la marge** dans une semaine sera :

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\underbrace{250}_{\text{nombre sous-jacent}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{950}_{\text{prix initial}} \times \underbrace{0.10}_{\text{taux de marge initiale}} \times \underbrace{e^{0.06(1/52)}}_{\text{accumulé sur une semaine}}}_{\text{marge de maintien}} \\
 & + \underbrace{\underbrace{250}_{\text{nombre sous-jacent}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{(F_{1/52,T} - 950)}_{\text{profit par action dans une semaine}}}_{\text{gains (pertes)}}
 \end{aligned}$$

Note Le S & P 500 a 250 parts sous-jacentes.

9 Parité et autres liens entre les options

Équation de parité des options vente-achat

$$C_{\text{Eur}}(K, T) - P_{\text{Eur}}(K, T) = F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT}$$

En anglais c'est le « **Put-Call Parity Equation** ». Cette équation vaut pour les options européennes seulement puisque les américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment.

Positions synthétiques

Avec l'équation de parité, on peut créer des options, actions ou obligations zéro-coupon synthétiques.

Option d'achat

$$-C(S, K) = \underbrace{-P(S, K)}_{\text{achat d'une option de vente équivalente}} + \underbrace{-F_{0,T}^P(S)}_{\text{achat d'une part de l'action}} + \underbrace{+Ke^{-rT}}_{\text{emprunt de } Ke^{-rT} \text{ au taux sans risque}}$$

Option de vente

$$-P(S, K) = \underbrace{-C(S, K)}_{\text{achat d'une option d'achat équivalente}} + \underbrace{+F_{0,T}^P(S)}_{\text{vente d'une part de l'action}} + \underbrace{-Ke^{-rT}}_{\text{pret de } Ke^{-rT} \text{ au taux sans risque}}$$

Action

$$-S_0 = \underbrace{+e^{\delta T}P(S, K)}_{\text{vente de } e^{\delta T} \text{ options de vente}} - \underbrace{e^{\delta T}C(S, K)}_{\text{achat de } e^{\delta T} \text{ options d'achat}} - \underbrace{Ke^{-(r-\delta)T}}_{\text{pret de } Ke^{-(r-\delta)T} \text{ au taux sans risque}}$$

Bon du Trésor (« Treasury Bill (T-Bill) »)

$$-Ke^{-rT} = \underbrace{+C(S; K)}_{\text{vente d'une option d'achat}} - \underbrace{P(S; K)}_{\text{achat d'une option de vente}} - \underbrace{S_0e^{-\delta T}}_{\text{achat de } e^{-\delta T} \text{ parts de l'action}}$$

Parité des options

Parité des options sur devises

$C(x_0, K, T)$ Option d'achat qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance T;

$P(x_0, K, T)$ Option de vente qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance T.

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(x_0, K, T) - P(x_0, K, T) = x_0(1 + i_E)^{-T} - K(1 + i_D)^{-T}$$

Parité des options sur obligation

B_0 Prix aujourd'hui ($t = 0$) d'une obligation avec coupons;

$F_{0,T}^P(B)$ Prix d'un contrat à terme standardisé prépayé sur une obligation avec coupons.

$$F_{0,T}^P(B) = B_t - PV(\text{coupons})$$

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(B_0, K, T) - P(B_0, K, T) = F_{0,T}^P(B) - F_{0,T}^P(K)$$

Parité généralisée et option d'échange

On peut généraliser toute option comme étant l'option d'échanger des actifs—l'*actif sous-jacent* et l'*actif d'exercice*—que l'on nomme des **options d'échange**.

Les options d'achat et de vente sont donc des options d'échange avec de l'argent comme actif d'exercice. On généralise d'abord la notation au-delà du concept d'achat et de vente pour un certain prix :

Notation

$C(S, K)$: Permet au détenteur de l'option d'achat de recevoir S en échange de K ;

$P(S, K)$: Permet au détenteur de l'option de vente de recevoir K en échange de S .

On peut penser à cette notation comme $C(\text{Receive}, \text{Give up})$ et $P(\text{Receive}, \text{Give up})$. Dans les deux cas, la valeur à l'échéance est $\max(0; \text{Receive} - \text{Give up})$.

Notation Claire

S_t : Prix à t de l'actif sous-jacent—le titre A ;

Q_t : Prix à t du prix d'exercice—le titre B ;

$C_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T - t)$: Permet, à T , d'acheter le titre A au prix du titre B ;

$P_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T - t)$: Permet, à T , de vendre le titre A au prix du titre B .

Équation de parité des options d'échange

$$C_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T - t) - P_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T - t) = F_{t,T}^P(S) - F_{t,T}^P(Q)$$

Options sur devise

$$C^{DD}(x_0, K, T) = K \cdot P^{DD}\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{K}; T\right) = x_0 K \cdot P^{\text{DÉ}}\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{K}; T\right)$$

Note Si le prix d'exercice est dans la même devise que le prix de l'option.

Comparaison de différentes options

Considérations différents types d'options

La première considération est que la valeur à l'échéance d'une option ne sera jamais négative puisqu'un investisseur « rationnel » n'exercerait simplement pas l'option. L'émetteur de l'option va donc toujours demander une **prime positive** pour accepter ce risque de perte.

Donc les options américaines et européennes vont toujours avoir une **valeur d'au moins 0\$** :

$$C(S, K, T) \geq 0 \quad P(S, K, T) \geq 0$$

Une option européenne peut uniquement être exercée à l'échéance alors qu'une option américaine peut être exercée à n'importe quel moment d'ici l'échéance. Il s'ensuit qu'une **option américaine vaut au moins autant qu'une option européenne** :

$$C_{\text{amer}}(S, K, T) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \quad P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq P_{\text{euro}}(S, K, T)$$

Bornes inférieures

Option européenne Avec l'équation de parité des options vente-achat et que le coût ne peut pas être négatif, on obtient :

$$\begin{aligned} C_{\text{euro}}(S, K, T) &= F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT} + P_{\text{euro}}(S, K, T) \\ &\geq \max\left(F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT}; 0\right) \\ P_{\text{euro}}(S, K, T) &= F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT} + C_{\text{euro}}(S, K, T) \\ &\geq \max\left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^P(S); 0\right) \end{aligned}$$

Option américaine Une option américaine aura une valeur d'au moins l'option européenne. Également, puisqu'une option américaine peut être exercée à tout moment, sa valeur doit être au moins la valeur d'un exercice immédiat.

En bref

Bornes inférieures options

$$\begin{aligned} C_{\text{amer}}(S, K, T) &\geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT}; 0\right) \\ P_{\text{amer}}(S, K, T) &\geq P_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^P(S); 0\right) \\ \text{et} \quad C_{\text{amer}}(S, K, T) &\geq S - K \quad P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq K - S \end{aligned}$$

Bornes supérieures

Option américaine

Option d'achat À son exercice, l'option permet d'obtenir l'actif sous-jacent. Si cette option coûtait plus que le prix du sous-jacent, on a simplement à l'acheter au lieu d'une option.

Ce faisant, **la borne supérieure d'une option d'achat américaine est le prix au comptant (« spot price »)** :

$$S \geq C_{\text{amer}}(S, K, T) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$

Option de vente La valeur à l'échéance maximale d'une option de vente est le prix d'exercice K ; lorsque la valeur de l'action est nulle on a $\max(K - 0; 0) = K$. Si le prix était supérieur à K , le vendeur n'aurait qu'à vendre son action directement sur le marché.

Ce faisant, **la borne supérieure d'une option de vente américaine est le prix d'exercice** :

$$K \geq P_{\text{amer}}(S, K, T) \geq P_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^P(S); 0\right)$$

Option européenne

Option d'achat La valeur à l'échéance sera au plus $\max(S_T - 0; 0) = S_T$. Le prix aujourd'hui pour avoir S_T à T correspond à un contrat à terme de gré à gré prépayé $F_{0,T}^P(S)$.

Ce faisant, **la borne supérieure d'une option d'achat américaine est ce contrat à terme de gré à gré prépayé** :

$$F_{0,T}^P(S) \geq C_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max\left(F_{0,T}^P(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$

Option de vente La distinction avec la valeur maximale d'une option européenne est qu'elle est seulement reçue à T .

Ce faisant, la borne supérieure d'une option de vente européenne est le prix d'exercice actualisé à 0 :

$$Ke^{-rT} \geq P_{\text{euro}}(S, K, T) \geq \max \left(Ke^{-rT} - F_{0,T}^P(S); 0 \right)$$

Exercice hâtif des options américaines

Notions d'intérêt et d'escompte

La valeur actualisée de l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice K est $PV(\text{intérêt sur le prix d'exercice}) = K(1 - e^{-rT})$.

La valeur actualisée des dividendes correspond à l'écart entre le prix de l'action aujourd'hui S_0 et le prix à terme prépayé $F_{0,T}^P$; $PV_{0,T}(\text{divs}) = S_0 - F_{0,T}^P(S)$.

Dans le cas continu, $PV(\text{dividendes}) = S_0(1 - e^{-\delta T})$ et le cas discret $PV(\text{dividendes}) = \sum_{i=1}^n \text{div}_i e^{-rt_i}$.

Options d'achat américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la **réception des dividendes**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est l'**intérêt accumulé sur le prix d'exercice K** et la protection, ou *assurance*, contre le **risque d'une baisse du prix de l'action**. Une protection contre ce risque de baisse correspond donc à une **option de vente**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K) - PV(\text{assurance})$;
 $PV(\text{assurance})$ sera donc égal au coût de l'option de vente équivalente.
2. Il n'est **jamais rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une option d'achat américaine **sans dividendes**;
Il s'ensuit qu'une **option d'achat américaine** sur une action **sans dividendes** a le **même prix** qu'une **option d'achat européenne** équivalente.

3. Il est **possiblement rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K)$.

Options de vente américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la réception de prix d'exercice K et l'**intérêt qu'on peut accumuler avec**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est de **continuer à recevoir des dividendes**. Également, la protection contre le risque de **ne pas vendre l'action à un prix plus élevé**. Une protection contre ce risque d'une hausse de prix correspond donc à une **option d'achat**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes}) + PV(\text{assurance})$;
 $PV(\text{assurance})$ sera donc égal au coût de l'option d'achat équivalente.
2. Il est **possiblement rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes})$;
3. Il s'ensuit qu'il est **possiblement rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une **option d'achat américaine sans dividendes**.

Effet du prix d'exercice

Trois arguments sur comment différents prix d'exercices font varier les prix d'options. Ces arguments, ou *propositions* expliquent le lien :

- › La première proposition relie le prix d'option au prix d'exercice;
- › La deuxième proposition relie la différence des prix d'options à la différence des prix d'exercices;
- › La troisième proposition relie le taux de variation du prix de l'option selon le prix d'exercice.

Proposition 1 : Lien entre les prix d'options et d'exercice

Option d'achat Une $\uparrow K$ mène à \downarrow valeur à l'échéance ainsi que $\downarrow C(K)$;
 $C(K_1) \geq C(K_2) \geq C(K_3)$

Option de vente Une $\uparrow K$ mène à \uparrow valeur à l'échéance ainsi que $\uparrow P(K)$;

$$P(K_1) \leq P(K_2) \leq P(K_3)$$

Proposition 2 : Lien entre la différence des prix d'options et d'exercice

- › Une option d'achat profite d'une hausse de prix;
- › Si le prix d'exercice baisse de, par exemple, 10\$, alors la valeur à l'échéance maximale possible augmente de 10\$;
- › Ce faisant le plus que je serai prêt à payer pour potentiellement avoir 10\$ de plus *est* 10\$ de plus.

Option d'achat

$$C_{\text{amer}}(K_1) - C_{\text{amer}}(K_2) \leq K_2 - K_1$$

$$C_{\text{euro}}(K_1) - C_{\text{euro}}(K_2) \leq (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

Option de vente

$$P_{\text{amer}}(K_2) - P_{\text{amer}}(K_1) \leq K_2 - K_1$$

$$P_{\text{euro}}(K_2) - P_{\text{euro}}(K_1) \leq (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

Si la différence en prix d'option était supérieure à la différence en prix d'exercice il y a arbitrage; on peut n'avoir aucun risque de perte. Pour comprendre ceci, voir le graphique d'un écart-baissier et imaginer la ligne pointillée rouge uniquement au-dessus de l'axe des x.

Proposition 3 : Lien entre le taux de variation des prix d'option et d'exercice

- › Le prix d'une option d'achat décroît plus lentement lorsque le prix d'exercice augmente;
- › Le prix d'une option de vente croît plus rapidement lorsque le prix d'exercice augmente.

Option d'achat

$$\frac{C(K_1) - C(K_2)}{K_2 - K_1} \geq \frac{C(K_2) - C(K_3)}{K_3 - K_2}$$

Option de vente

$$\frac{P(K_2) - P(K_1)}{K_2 - K_1} \leq \frac{P(K_3) - P(K_2)}{K_3 - K_2}$$

10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Modèle binomial d'évaluation des options le prix de l'actif sous-jacent au début d'une période devient un de deux prix possibles à la fin de la période.

> en anglais c'est le « *Binomial Option Pricing Model* ».

Notation de prix

u facteur de hausse « "up" factor »;
 d facteur de baisse « "down" factor »;
 S_u prix de l'action s'il y a une hausse;
 $S_u = S_0 u$
 S_d prix de l'action s'il y a une baisse;
 $S_d = S_0 d$
 h durée de chaque période;
 Δ nombre de parts d'actions à acheter;
 B montant à prêter au taux sans risque;
 V_u valeur à la node supérieure « *value at upper node* »;
 V_d valeur à la node inférieur « *value at lower node* »;
 V_0 valeur du portefeuille au temps 0 alias **le prix**.

Portefeuille réplcatif « *Replicating Portfolio* »

Créer un portefeuille réplcatif

1. Acheter $\Delta = e^{-\delta h} \left(\frac{V_u - V_d}{S_0(u-d)} \right)$ parts de l'action;
2. Prêter $B = e^{-rh} \left[V_d \left(\frac{u}{u-d} \right) - V_u \left(\frac{d}{u-d} \right) \right]$ au taux sans risque;

La valeur initiale du portefeuille réplcatif est donc $V_0 = \Delta S_0 + B$.

Selon les signes on observe :

	+	-
Δ	achète des parts de l'action	vend des parts de l'action
B	prête de l'argent	emprunte de l'argent

Également, pour répliquer les options, les combinaisons sont :

	Option d'achat	Option de vente
Δ	+	-
B	-	+

Évaluation neutre au risque

- > Présume que $E[\text{rendement}] = r_f$;
- > La technique pondère les possibilités de valeur à l'échéance des options avec des probabilités neutre au risque puis les actualise au taux sans risque;
- > En raison de la simplicité des calculs, les options sont souvent tarifées avec l'évaluation neutre au risque;
- > Le prix est en fait identique à celui obtenu avec l'approche du portefeuille réplcatif.

Notation

p^* la probabilité neutre au risque d'une hausse de l'actif.

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

Le prix est donc :

$$V_0 = e^{-rh} [p^* V_u + (1 - p^*) V_d]$$

On déduit que $0 < p^* < 1$ ce qui mène à l'équation suivante :

$$d < e^{(r-\delta)h} < u$$

Sinon, il y a arbitrage.

Construction d'un arbre binomial

Méthode générale Arbitrairement sélectionner des valeurs de u et d pour l'arbre binomial crée;

Arbre binomial standard Sélectionner des valeurs de u et d selon des prix à terme résultant en un arbre binomial standard.

Arbre binomial standard

L'intuition est de multiplier le prix à terme de l'action par un facteur variant selon la volatilité.

Notation

σ la volatilité annuelle du rendement de l'action composée continûment;
L'écart type de la volatilité sur une période de durée h est donc $\sigma\sqrt{h}$.

Le prix à terme est donc multiplié par $e^{\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix avec une hausse $S_u = F_{t,t+h}e^{\sigma\sqrt{h}}$ et $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix $S_d = F_{t,t+h}e^{-\sigma\sqrt{h}}$ avec une baisse.

On isole :

$$u = e^{(r-\delta)h + \sigma\sqrt{h}} \quad d = e^{(r-\delta)h - \sigma\sqrt{h}}$$

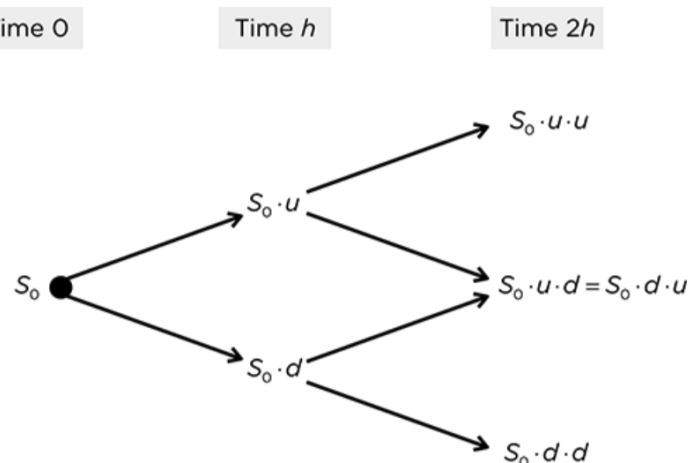
Également, pour ce cas spécial, p^* se simplifie à $p^* = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$

Arbres binomiaux à plusieurs périodes**Notation**

n nombre de périodes;
 h durée de chacune des périodes;
 $h = \frac{T}{n}$

La généralisation des méthodes précédente pour les arbres binomiaux à plusieurs périodes se résume à multiplier les facteurs u et d .

Par exemple :



Lorsque les facteurs u et d sont fixes, l'arbre se recombine et $S_0 \cdot u \cdot d = S_0 \cdot d \cdot u$.

Évaluation neutre au risque

Il y a 2 approches :

Nœud par nœud On calcule la valeur de l'option à chaque nœud récursivement avec l'évaluation neutre au risque jusqu'à arriver au prix;

Approche directe Pour les **options européennes** dont l'exercice hâtif n'est pas possible.

Approche directe

1. Calculer la valeur à l'échéance;
2. La pondérer par la probabilité neutre au risque de l'atteindre;
3. L'actualiser au taux sans risque.

- > La probabilité d'atteindre un nœud terminal est calculée avec une distribution binomiale;
- > Pour n périodes, k est le nombre de hausses u pour atteindre le nœud;
- > La probabilité est :

$$\Pr(\text{atteindre un nœud ayant } k \text{ hausses}) = \binom{n}{k} (p^*)^k (1 - p^*)^{n-k}$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$.

Pour un nœud u

$$V_u = e^{-rh} [p^* V_{uu} + (1 - p^*) V_{ud}]$$

Portefeuille réplcatif

Δ et B ne restent pas constants et donc il faut prendre l'approche nœud par nœud. Ce faisant, il est *beaucoup* plus compliqué et long de trouver le prix avec cette approche.

Pour un nœud u

$$\Delta_u = e^{-\delta h} \left(\frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_u(u-d)} \right)$$

$$B_u = e^{-rh} \left[V_{ud} \left(\frac{u}{u-d} \right) - V_{uu} \left(\frac{d}{u-d} \right) \right]$$

$$V_u = \Delta_u S_u + B_u$$

Tarification d'options américaines

La distinction avec les options américaines est la possibilité d'un exercice hâtif.

Valeur espérée actualisée (VEA) valeur (« *payoff* ») pour un maintien de l'option ;

> « *Pull-back value* » car on se retire (« *pull-back* ») d'exercer l'option immédiatement.

Valeur si levée (VSL) valeur (« *payoff* ») pour un exercice hâtif.

> « *Immediate exercise value* ».

Pour un nœud u

$$VSL = \begin{cases} \max(0, S_u - K), & \text{option d'achat} \\ \max(0, K - S_u), & \text{option de vente} \end{cases}$$

$$VEA = e^{-rh} [p^* V_{uu} + (1 - p^*) V_{ud}]$$

$$V_u = \max(VEA, VSL)$$

Processus de tarification

- À partir du nœud le plus à droite de l'arbre décider à chaque nœud de l'arbre si l'exercice hâtif est optimal ;
 - > Si $VSL > VEA$ alors il y a un exercice hâtif sinon on maintient l'option au moins une période de plus ;
 - > Donc valeur au nœud = $\max \left(\begin{array}{cc} \text{valeur pour un} & \text{valeur pour un} \\ \text{maintien de l'option,} & \text{exercice immédiat} \end{array} \right)$.
- Répéter jusqu'au nœud initial.

Tarification d'options sur un contrat à terme standardisé

Pas sur l'examen partiel hiver 2020.

Notation

T_F temps d'expiration du contrat à terme standardisé ;

T temps d'expiration d'une option ;

$$T \leq T_F$$

F_{t,T_F} Prix à terme au temps t pour un contrat à terme standardisé expirant au temps T_F .

$$F_{t,T_F} = S_t e^{(r-\delta)(T_F-t)}$$

u_F et d_F Facteurs de hausse et de baisse pour un arbre de contrats à terme standardisés ;

$$u_F = u e^{-(r-\delta)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d_F = d e^{-(r-\delta)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

L'équation pour un arbre de contrats à terme standardisés suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \Rightarrow p^* = \frac{e^{(r-r)h} - d_F}{u_F - d_F} = \frac{1 - d_F}{u_F - d_F}$$

$$u = e^{(r-\delta)h + \sigma\sqrt{h}} \Rightarrow u = e^{(r-r)h + \sigma\sqrt{h}} = e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = e^{(r-\delta)h - \sigma\sqrt{h}} \Rightarrow d = e^{(r-r)h - \sigma\sqrt{h}} = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

$$\Delta = e^{-\delta h} \left(\frac{V_u - V_d}{S(u-d)} \right) \Rightarrow \Delta = \frac{V_u - V_d}{F(u_F - d_F)}$$

$$B = e^{-rh} \left[V_d \frac{u}{u-d} - V_u \frac{d}{u-d} \right] \Rightarrow B = e^{-rh} [p^* V_u + (1 - p^*) V_d]$$

$$V_u = \Delta(Fu_F - F) + Be^{rh} \quad V_d = \Delta(Fd_F - F) + Be^{rh}$$

Tarification d'options sur devises

Notation

r_{DD} taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché domestique ;

$r_{DÉ}$ taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché étranger.

L'équation pour un arbre standard suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \Rightarrow p^* = \frac{e^{(r_{DD}-r_{DÉ})h} - d}{u - d}$$

$$u = e^{(r-\delta)h + \sigma\sqrt{h}} \Rightarrow u = e^{(r_{DD}-r_{DÉ})h + \sigma\sqrt{h}}$$

$$d = e^{(r-\delta)h - \sigma\sqrt{h}} \Rightarrow d = e^{(r_{DD}-r_{DÉ})h - \sigma\sqrt{h}}$$

Rendements composés continûment

- La fonction **logarithmique** calcule des rendements composés continûment à partir des prix.

$$r_{t,t+h} = \log \left(\frac{S_{t+h}}{S_t} \right)$$

- La fonction **exponentielle** calcul des prix à partir des rendements composés continûment.

$$S_{t+h} = S_t e^{r_{t,t+h}}$$

- Les rendements composés continûment sont **additifs**.

$$r_{t,t+nh} = \sum_{i=1}^n r_{t+(i-1)h,t+ih}$$

Volatilité

Notation

R variable aléatoire de la force du rendement (sous base annuelle);

Hypothèse Les rendements composés continûment sur des périodes disjointes, mais de même longueur h , sont i.i.d.;

$r_{t,t+h}$ le **rendement composé continûment entre t et $t+h$** .

$$r_{t,t+h} = \ln \left(\frac{S_{t+h}}{S_t} \right)$$

On suppose n rendements, sur une période de h années, composés continûment

$r_{t,t+h}, r_{t+h,t+2h}, \dots, r_{t+(n-1)h,t+nh}$.

On peut estimer la volatilité historique avec :

$$s_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{t+(i-1)h,t+ih} - \bar{r})^2}{n-1}}, \quad \text{où} \quad \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{t+(i-1)h,t+ih}}{n}$$

Donc s_h estime σ_h et \bar{r} estime μ_h où :

$$\sigma_h = \sqrt{\text{Var} \left(\ln \left(\frac{S_{t+h}}{S_t} \right) \right)} = \sqrt{\text{Var}(R_{t,t+h})}$$

$$\mu_h = E[R_{t,t+h}]$$

Pour changer d'une base annuelle (le défaut de h) à une base quelconque, on divise par h puisqu'il faut additionner $\frac{1}{h}$ rendements.

Par exemple, sous base mensuelle $h = \frac{1}{12}$ on a $\sigma = s_{1/12} \sqrt{12}$ ou sous base hebdomadaire $h = \frac{1}{52}$ on a $\sigma = s_{1/52} \sqrt{52}$.

11 Modèle binomial d'évaluation des options : sujets sélectionnés

L'arbre binomial et la lognormalité

Compréhension de l'exercice hâtif

Avec un exercice hâtif, le détenteur d'une option d'achat :

1. Reçoit l'action et donc les dividendes futurs.
Donc, on souhaite que δ augmente.
2. Paie le prix d'exercice avant expiration et donc subit des coûts d'intérêt.
Donc, on ne souhaite pas que r augmente.
3. Perd l'assurance implicite à l'option.
Donc, on ne souhaite pas que σ augmente.

Le plus la volatilité σ est élevée, le plus élevé (faible) le prix de l'action auquel on va exercer l'option d'achat (de vente).

Si la valeur de l'assurance est nulle ($\sigma = 0$) et que $T \rightarrow \infty$, on lève l'option d'achat si $\delta S_T > rK$; c'est-à-dire, si la valeur des dividendes est supérieure à l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice.

Pour une option de vente, c'est l'inverse.

Compréhension de l'évaluation neutre au risque

Notation

- r force d'intérêt sans risque;
- δ force de dividendes;
- α force de rendement espéré sur l'action;

Aversion au risque Souhaite maximiser le rendement espéré $E[R]$ tout en *minimisant* le risque σ_R^2 .

Indifférence au risque Souhaite maximiser le rendement espéré $E[R]$ et est *indifférent* au risque σ_R^2 .

Exemple Soit 2 investissements : 1 000\$ assuré ou 2 000\$ avec une probabilité de 50% et 0\$ avec une probabilité de 50%.

Un investisseur avec une *aversion* au risque préfère la première option, car elle est moins risquée.

Un investisseur avec une *indifférence* au risque est indifférent à la première ou la deuxième option, car le rendement espéré des deux options est égal.

Donc une évaluation neutre au risque suppose que les investisseurs sont indifférents au risque **même s'ils ne le sont pas**.

Il y a 3 problèmes qui empêchent la modélisation du prix de l'action avec une marche aléatoire :

Problèmes

1. Le prix de l'action **peut devenir négatif** s'il y a suffisamment de mouvements vers le bas.
2. La magnitude d'un mouvement devrait dépendre de : la **fréquence** des mouvements et le **niveau** du prix de l'action.
 - > Il n'est pas réaliste d'avoir le prix d'une action monter ou baisser de 60\$ en une journée.
3. Le **rendement** sur l'action devrait, en moyenne, **être positif**.

Le modèle binomial est une variante du modèle de marche aléatoire qui résout ces problèmes ; il suppose que les rendements composés continûment sont une **marche aléatoire avec dérive**. Le rendement a 2 composantes : une *certaine* $(r - \delta)h$ et une *incertaine* $\pm \sigma \sqrt{h}$.

Le modèle règle donc les problèmes :

Problèmes

1. Le **prix** de l'action **ne peut pas être négatif**.
2. Si les **mouvements** du prix de l'action sont **plus fréquents**, h se rapetisse et les mouvements du prix deviennent **plus petits**.
3. On peut garantir un **prix positif**.
 - > Ceci, car il y a une composante certaine et que l'on choisit la probabilité d'une augmentation du prix.

Lognormalité

Lorsqu'on traverse un arbre binomial, on additionne implicitement les composantes de rendements $(r - \delta)h \pm \sigma \sqrt{h}$. Cette somme de variables aléatoires binomiales tend, lorsque $n \rightarrow \infty$ (ou, de façon équivalente, $h \rightarrow 0$), vers une normale. Il en résulte que les rendements composés continûment sont approximativement normalement distribués et donc que le prix de l'action a une distribution (approximativement) lognormale.

Arbres binomiaux alternatifs

Il y existe d'autres façons de construire un arbre binomial qui mènent à des mouvements de u et d différents :

Méthode	Mouvement	Notes
Arbre à terme	$e^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$	$u > e^{(r-\delta)h} > d$
Arbre de Cox-Ross-Rubenstein	$e^{\pm\sigma\sqrt{h}}$	$ud = 1$
Arbre lognormal	$e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h \pm \sigma\sqrt{h}}$	$p^* \approx \frac{1}{2}$

Note Il est possible qu'avec un arbre de Cox-Ross-Rubenstein, si h est gros et σ petit, $e^{rh} > e^{\sigma\sqrt{h}}$.

Malgré que toutes les différentes méthodes mènent à des prix différents lorsque n est fini, elles tendent vers le même prix lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, malgré que les mouvements u et d sont différents, le ratio des facteurs $\frac{u}{d}$ est le même :

$$\frac{u}{d} = e^{2\sigma\sqrt{h}}$$

Alors, peu importe la méthode utilisée pour construire l'arbre, la distance proportionnelle entre u et d mesure la volatilité.

Est-ce un modèle réaliste ?

Hypothèses

Il y a des hypothèses douteuses à la distribution lognormale des prix :

- Volatilité σ constante.
- Pas de grandes variations spontanées.
- Indépendance entre les rendements composés continûment.

En pratique, aucune de ces hypothèses n'est vérifiée. Le modèle n'est pas parfait, mais sert plutôt de bon point de départ.

12 Modèle lognormale

Rappels de la distribution normale

Si $X \sim \mathcal{N}(m, v^2)$ alors $Z = \frac{X-m}{v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On définit $Pr(Z \leq x) = N(x)$. Rappel que la distribution normale est symétrique et donc $N(-x) = 1 - N(x)$.

Rappels de la distribution lognormale

Lorsque $Y = e^X$ alors $Y \sim LN(m, v^2)$.

Rappel que les deux premiers moments sont obtenus de la FGM de la distribution normale et ne sont *pas* les paramètres :

$$E[Y] = e^{m + \frac{1}{2}v^2} \quad \text{Var}(Y) = (E[Y])^2 (e^{v^2} - 1)$$

2 propriétés intéressantes de la distribution lognormale :

1. La variable aléatoire ne peut pas être négative puisque $e^X \geq 0$.
 - › Donc supposer que les prix d'actions suivent une distribution lognormale suppose que les prix ne peuvent pas être négatifs (une hypothèse réaliste).
2. Le *produit* (et non la somme) de deux variables aléatoires lognormale est une variable aléatoire.
 - › $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}$
 - › $e^{X_1} \times e^{X_2} \sim LN$

Modèle lognormale pour le prix d'une action

Notation

$R(0, t)$ Rendement sur l'action composé continûment ;

$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ Gains en capitaux ;

δt Dividend yield ;

α Rendement espéré sur l'action composé continûment ;

$\alpha - \delta$ Parfois noté comme le taux d'appréciation.

Hypothèses

Pour modéliser le prix d'une action avec le modèle lognormal, on doit poser :

1. Le rendement composé continûment d'une action $R(0, t)$ suit une distribution normale.
 - › Soit une action achetée au temps 0 pour S_0 \$ et vendue au temps t pour S_t \$.
 - › Le rendement composé continûment équivaut à la somme des **gains en capitaux** $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ et du **dividend yield** δt .
 - › Donc, $R(0, t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) + \delta t$.
2. Les rendements de l'action sont indépendants entre périodes de temps.

Distribution

Avec l'hypothèse d'une distribution normale des rendements, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &\sim \mathcal{N}\left(m = \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, v^2 = \sigma^2 t\right) \\ \ln(S_t) &\sim \mathcal{N}\left(m = \ln(S_0) + \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, v^2 = \sigma^2 t\right) \\ S_t &= S_0 e^{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z} \end{aligned}$$

On obtient la deuxième équation en traitant $\ln(S_0)$ comme une constante connue.

On obtient la troisième équation avec la relation $X = m + vZ$.

📄 Moyenne variance et covariance

Avec la distribution lognormale, on obtient :

$$E[S_t] = S_0 e^{(\alpha - \delta)t}$$

$$\text{Var}(S_t) = (E[S_t])^2 (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

$$\text{Cov}(S_t, S_t) = E\left[\frac{S_t}{S_t}\right] \cdot \text{Var}(S_t) = e^{(\alpha - \delta)(T-t)} \text{Var}(S_t)$$

Trouver le p -ème percentile de S_t

1. Trouver le percentile correspondant z_α de la distribution normale standard Z .
2. Insérer le percentile correspondant de Z dans l'équation pour S_t .

Note Utiliser la même approche pour trouver un intervalle de prévision.

Tarification d'options avec une action lognormale

On pose :

$$\hat{d}_1 = \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (\alpha - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right)$$

$$\hat{d}_2 = \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (\alpha - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Trouver une probabilité pour S_t

$$\Pr(S_t < K) = N(-\hat{d}_2)$$

Comment trouver une probabilité avec S_t

1. Isoler la distribution normale $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$;

$$\Pr(S_t < K) \equiv \Pr\left(\ln \frac{S_t}{S_0} < \ln \frac{S_t}{S_0}\right)$$

2. Centrer et réduire pour obtenir la distribution normale standard Z .

$$\begin{aligned} \Pr(S_t < K) &\equiv \Pr\left(\frac{\ln \frac{S_t}{S_0} - m}{v} < \frac{\ln \frac{K}{S_0} - (\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= \Pr\left(Z < -\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right) \\ &= \Pr(Z < -\hat{d}_2) \\ &= N(-\hat{d}_2) \end{aligned}$$

Espérance conditionnelle du prix de l'action

$$E[S_t | S_t < K] = \frac{PE[S_t | S_t < K]}{\Pr(S_t | S_t < K)} = \frac{S_0 e^{(\alpha - \delta)t} N(-\hat{d}_1)}{N(-\hat{d}_2)}$$

$$E[S_t | S_t > K] = \frac{PE[S_t | S_t > K]}{\Pr(S_t | S_t > K)} = \frac{S_0 e^{(\alpha - \delta)t} N(+\hat{d}_1)}{N(+\hat{d}_2)}$$

Notation

γ Rendement espéré sur l'option composé continûment.

- > Typiquement, γ est inconnu et donc il est difficile de trouver le prix d'une option.
- > En lieu, on utilise l'approche d'évaluation neutre au risque.

📄 Prix d'options européennes

$$\begin{aligned} C(K) &= e^{-\gamma T} E[\text{valeur à l'échéance de l'option d'achat}] \\ &= e^{-\gamma T} (S_0 e^{(\alpha - \delta)T} N(\hat{d}_1) - KN(\hat{d}_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(K) &= e^{-\gamma T} E[\text{valeur à l'échéance de l'option de vente}] \\ &= e^{-\gamma T} (KN(-\hat{d}_2) - S_0 e^{(\alpha - \delta)T} N(-\hat{d}_1)) \end{aligned}$$

Tarification neutre au risque

On pose à la fois le rendement sur les options γ et sur les actions α comme étant égale au taux sans risque r .

On pose :

$$d_1 = \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right)$$

$$d_2 = \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

La seule modification apportée est de remplacer α par r ; en bref :

- > \hat{d}_1 et \hat{d}_2 suivent la véritable mesure en utilisant α ;
- > d_1 et d_2 suivent la mesure **neutre au risque** en utilisant r .

Formule de Black-Scholes pour le prix d'options européennes

En remplaçant γ et α par r on obtient la **formule de Black-Scholes** :

$$C(K) = S_0 e^{-\delta T} N(\hat{d}_1) - K e^{-rT} N(\hat{d}_2)$$

$$P(K) = K e^{-rT} N(-\hat{d}_2) - S_0 e^{-\delta T} N(-\hat{d}_1)$$

Note On identifie par un astérisque (*) ce qui est une mesure neutre au risque.

Énoncés équivalents

- > Le modèle de Black-Scholes s'applique.
- > Le prix de l'action suit un modèle lognormale.
- > $\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left(m = \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, v^2 = \sigma^2 t \right)$.
- > $S_t = S_0 e^{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$.

Estimation du rendement et de la volatilité

Estimation des paramètres de la distribution lognormale

On obtient les estimations des paramètres avec $n + 1$ observations de prix historiques S_0, S_1, \dots, S_n à un intervalle de longueur h .

1. Calculer les rendements composés continûment.

$$r_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

2. Calculer la moyenne de l'échantillon des rendements.

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n} \stackrel{\text{prop. des log}}{=} \frac{\ln \frac{S_n}{S_0}}{n}$$

3. Estimer l'écart-type des rendements.

$$\hat{\sigma}_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n-1}}$$

4. Mettre l'estimation de l'écart-type sous base annuelle.

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_h}{\sqrt{h}}$$

5. Mettre l'estimation du rendement espéré sous base annuelle.

$$\begin{aligned} E \left[\ln \frac{S_{t+h}}{S_t} \right] &= \left(\hat{\alpha} - \delta - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \right) h = \bar{r} \\ \therefore \hat{\alpha} &= \frac{\bar{r}}{h} + \delta + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \end{aligned}$$

Formule de Black-Scholes généralisée

Hypothèses de la formule de Black-Scholes

Sur la distribution de l'action sous-jacente

- › Le rendement composé continûment sur l'action a une distribution normale et est indépendant avec le temps.
- › La volatilité est connue et constante.
- › Les futurs dividendes sont connus.

Sur l'environnement économique

- › Le taux sans risque est connu et constant.
- › Il n'y a pas d'impôt ni de frais de transactions.
- › Il n'y a aucun coût relié à la vente à découvert.
- › Les investisseurs peuvent emprunter et prêter au taux sans risque.

Formule de Black-Scholes généralisée

Équations généralisées :

$$d_1 = \left(\frac{\ln \frac{F^P(S)}{F^P(K)} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{t}} \right) \quad d_2 = \left(\frac{\ln \frac{F^P(S)}{F^P(K)} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{t}} \right) \equiv d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Prix d'options **européennes** selon la formule de Black-Scholes :

$$C(K) = F^P(S)N(d_1) - F^P(K)N(d_2)$$

$$P(K) = F^P(K)N(-d_2) - F^P(S)N(-d_1)$$

Notes

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}(\ln F_{t,T}^P(S))}{t}} \equiv \sqrt{\frac{\text{Var}(\ln F_{t,T}(S))}{t}} \equiv \sqrt{\frac{\text{Var}(\ln S_t)}{t}}, \forall 0 < t \leq T$$

$\ln S_t$ **Volatilité de l'action** ou, de façon équivalente, volatilité du rendement sur l'action composé continûment.

Options sur d'autres sous-jacents

Avec la formule généralisée, on peut appliquer la formule de Black-Scholes à d'autres sous-jacents. Il y a quelques considérations à prendre dans un tel cas pour option sur :

Contrats à terme standardisés Il peut arriver que la date d'échéance— T —de l'option ne soit pas la même que la date d'échéance— T' —du contrat à terme standardisé sur un actif quelconque Q .

Dans un tel cas, il faut que $T' \geq T$ et qu'on actualise le prix à terme $F_{0,T'}(Q)$ à partir de T (et non T').

$$F_{0,T}^P(F) = F_{0,T'}(Q)e^{-rT}$$

$$F_{0,T}^P(K) = Ke^{-rT}$$

Devises Les prix à terme prépayés doivent être dans la même devise que l'option.

Les grecs de l'option

Grec	Définition	Mesure le changement de la valeur (V)
Δ	$\frac{\partial V}{\partial S}$	de l'option par une augmentation (de 1\$) du prix de l'action.
Γ	$\frac{\partial \Delta}{\partial S} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	du Delta par une augmentation (de 1\$) du prix de l'action.
$\theta/365$	$\frac{\partial V}{\partial t}$	de l'option par une baisse (d'un jour) de la date d'échéance.
Vega	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	de l'option par une augmentation (de 1%) de la volatilité.
$\rho/100$	$\frac{\partial V}{\partial r}$	de l'option par une augmentation (de 1%) du taux sans risque.
$\psi/100$	$\frac{\partial V}{\partial \delta}$	de l'option par une augmentation (de 1%) de la force de dividende.

Notes

- Si on fait référence au « Delta » d'une option, on suppose la position longue.
De même pour tous les autres grecs.

Grecs

Delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du prix de l'action.

Expressions du Delta pour les options

$$\Delta_C = e^{-\delta T} N(d_1)$$

$$\Delta_P = -e^{-\delta T} N(-d_1)$$

Domaine

$$0 \leq \Delta_C \leq 1$$

$$-1 \leq \Delta_P \leq 0$$

Notes

- Le Delta Δ_C (Δ_P) peut être interprété comme le nombre d'actions à acheter (vendre) pour répliquer une option d'achat (de vente).
- Une option d'achat devient de plus en plus profitable lorsque le prix de l'action sous-jacente augmente.
Alors, Δ_C se rapproche de 0 lorsque l'option est hors du cours ($S_T < K$) et de 1 lorsqu'elle est dans le cours ($S_T > K$).

Cependant, le Δ_C ne sera jamais négatif car l'option d'achat a un seuil minimal de 0 pour sa valeur à l'échéance.

De même, Δ_P ne sera jamais positif.

- Dans les deux cas, le Δ augmente avec le prix de l'action.
- Mathématiquement, le domaine est restreint puisque $0 \leq N(x) \leq 1, \forall x$ et $0 \leq e^{-\delta T} \leq 1$.

Gamma $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$

Mesure la variation du Delta de l'option correspondante à une augmentation du prix de l'action.

Expressions du Gamma pour les options

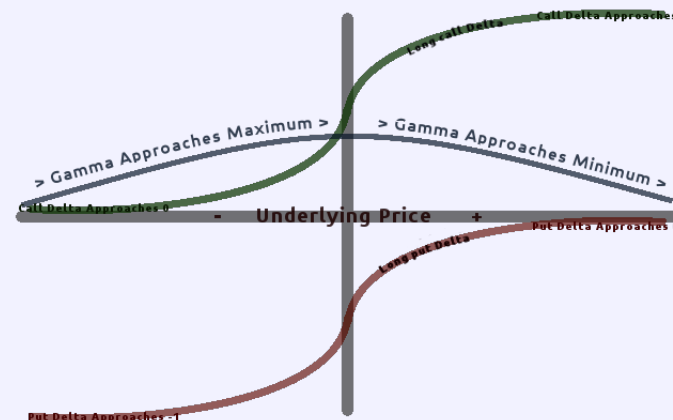
$$\Gamma_C = \Gamma_P = e^{-\delta T} N'(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Domaine

$$0 \leq \Gamma_C = \Gamma_P$$

Notes

- Le Γ mesure le *taux* de variation du Δ .
Puisque le Δ augmente toujours, le Γ est toujours positif.
- Le Γ est maximisé au cours du marché car c'est où le Δ connaît le plus de variation.



 Theta $\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à l'écoulement du temps.

Expressions du Theta pour les options

$$\theta_C = \delta Se^{-\delta(T-t)}N(d_1) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - \frac{Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

$$\theta_P = \theta_C + rKe^{-r(T-t)} - \delta Se^{-\delta(T-t)}$$

Notes

- > La valeur d'une option décroît avec le temps.
 θ estime de combien, ceteris paribus, la valeur décroît par jour.
- > Ce faisant, θ est habituellement **négatif**.
Il est *possible* qu'il soit négatif pour une option profondément dans le cours du marché ayant un taux de dividende très élevé.
- > Pour obtenir la variation en valeur par jour, il suffit de diviser θ par 365.
- > Theta pour temps.

 Vega $Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation de la volatilité de l'action.

Expression du Vega pour les options

$$Vega_C = Vega_P = Se^{-\delta T}N'(d_1)\sqrt{T}$$

Notes

- > Une augmentation de la volatilité mène toujours à une augmentation des prix d'options.
Il s'ensuit que le Vega sera toujours positif et augmente avec la volatilité.
- > Pour obtenir la variation en pourcentage, il suffit de diviser *Vega* par 100.
- > Vega pour volatilité.

 Rho $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du taux sans risque.

Expression du Rho pour les options

$$\rho_C = TKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\rho_P = -TKe^{-rT}N(-d_2)$$

Notes

- > Une augmentation du taux sans risque r fait baisser la valeur actualisée du prix d'exercice Ke^{-rT} .
Selon la formule de Black-Scholes, baisser Ke^{-rT} fait **augmenter** la valeur d'une option d'achat mais **baisser** celle d'une option de vente.
Donc, $\rho_C > 0$ et $\rho_P < 0$.
- > Pour obtenir la variation en pourcentage, il suffit de diviser ρ par 100.
- > Rho pour taux sans risque.

 Psi $\psi = \frac{\partial V}{\partial \delta}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du taux de dividendes.

Expression du Psi pour les options

$$\psi_C = -TSe^{-\delta T}N(d_1)$$

$$\psi_P = TSe^{-\delta T}N(-d_1)$$

Notes

- > Une augmentation du taux de dividendes δ fait baisser la valeur actualisée du prix de l'action $Se^{-\delta T}$.
Selon la formule de Black-Scholes, baisser $Se^{-\delta T}$ fait **baisser** la valeur d'une option d'achat mais **augmenter** celle d'une option de vente.
Donc, $\psi_C < 0$ et $\psi_P > 0$.
- > Pour obtenir la variation en pourcentage, il suffit de diviser ψ par 100.

Portfolio

Le grecque d'un portefeuille composé de N options sur une même action, avec n_i options de chaque type, est simplement la somme des grecques :

$$\text{Grec}_{\text{ptf.}} = \sum_{i=1}^N n_i \text{Grec}_i$$