1 Rappels d'intro 2

1.1 Mesures de risques

Voir les preuves de TVaR en annexe. Il est pratique de se rappeler des 3 formes de la TVaR.

Value-at-risk $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa)$. De plus, pour φ une fonction strictement croissante, on a que
$$VaR_\kappa(\varphi(X)) = \varphi\left(VaR_\kappa(X)\right)$$

2 Distribution multivariées

2.1 Classes de Fréchet

Soit $F_1, \ldots, F_n$ des fonction de répartition univariées et $F_{\mathbf{X}} = F_{X_1,\ldots,X_n}$ la fonction de répartition du vecteur $\mathbf{X}$.
On définit la classe de Fréchet $CF(F_1, \ldots, F_n)$ par l'ensemble des fonctions de répartition $F_{\mathbf{X}}$ dont les marginales sont $F_1, \ldots, F_n$.

2.1.1 Bornes d'une classe de Fréchet

Si $F_{\mathbf{X}} \in CF(F_1, \ldots, F_n)$, alors
$$W(x_1, \ldots, x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \leq M(x_1, \ldots, x_n)$$
où
$$W(x_1, \ldots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1); 0\right) \tag{1}$$
et
$$M(x_1, \ldots, x_n) = \min\left(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\right) \tag{2}$$
Preuve des bornes à savoir !

2.2 Comonotonicité

Les composantes de $\mathbf{X}$ sont dites comonotones si $X_i = F_{X_i}(U)$, $i = 1, \ldots, n$ et $U \sim U(0,1)$.

2.2.1 Algorithme

1. Simuler $U^{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$
2. Calculer $X_i^{(j)} = F_{X_i}(U^{(j)}), i = 1, \ldots, n$

variable comonotone et la borne supérieure de Fréchet

Le vecteur $\mathbf{X}$ a des composantes comonotones ssi
$$F_{\mathbf{X}(x_1,\ldots,x_n)} = M(x_1, \ldots, x_n)$$
Preuve à savoir

Additivité des VaR et $TVaR$

On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(U) = \varphi(U)$, où φ est une fonction croissante pour $y \in (0,1)$. Alors, on a
$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i)$$
$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i)$$
Preuve à savoir

2.3 Antimonotonicité

Un couple de v.a.[1] $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ dont les composantes sont définies par $X_1 = F_{X_1}(U)$ et $X_2 = F_{X_2}(1-U)$ est antimonotone par définition.

2.3.1 Algorithme

1. Simuler $U_{(j)}$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$
2. Calculer $X_1^{(j)} = F_{X_1}(U^{(j)})$ et $X_2^{(j)} = F_{X_2}(1 - U^{(j)})$

variable antimonotone et la borne inférieure de Fréchet

Le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ a des composantes antimonotone ssi
$$F_{\mathbf{X}(x_1,x_2)} = W(x_1, x_2)$$
Preuve à savoir

2.4 Loi de Poisson bivariée Teicher

- Couple de v.a. (M_1, M_2) dont les marginales sont $Pois(\lambda_1)$ $Pois(\lambda_2)$
- paramètre de dépendance α_0 avec $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$
- $\alpha_1 = \lambda - \alpha_0$ et $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$

1. L'antimonotonicité est seulement définie pour $n = 2$.

- On définit les v.a. M_1 et M_2 telles que (avec $K_i \sim Pois(\alpha_i)$)
  $M_1 = K_1 + K_0$ et $M_2 = K_2 + K_0$
  avec $M_i \sim Pois(\lambda_i)$

2.4.1 Fonction de masse de probabilité (fmp)

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = e^{-\lambda_i - \lambda_2 + \alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1, m2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1 - j}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2 - j}}{(m_2 - j)!}$$

Preuve à savoir

2.4.2 Fonction génératrice des probabilités (fgp)

$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = e^{(\lambda_1 - \alpha_0)(t_1 - 1)} e^{(\lambda_2 - \alpha_0)(t_2 - 1)} e^{\alpha_0 (t_1 t_2 - 1)}$$

Preuve à savoir

Covariance de M_1 et M_2 Cov $(M_1, M_2) =$ Var $(K_0) = \alpha_0$ Preuve à savoir

2.4.3 Connaître la loi de $N = M_1 + M_2$

À terminer

2.5 Loi exponentielle bivariée EFGM

fonction de répartition La fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= (1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2}) \\ &\quad + \theta (1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2}) e^{-\beta_1 x_1} e^{-\beta_2 x_2} \end{aligned}$$

fgm Il faut savoir prouver que la fgm est

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) &= (1 + \theta) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2} \right) \\ &\quad - \theta \left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2} \right) - \theta \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2} \right) \\ &\quad + \theta \left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1} \right) \left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2} \right) \end{aligned}$$

Coefficient de corrélation Il faut savoir prouver que la coefficient de corrélation est

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\theta}{4}$$

Fonction de densité On peut obtenir la fonction de densité de la loi exponentielle bivariée en dérivant 2 fois

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$$

3 Problématiques d'un rapport du BSIF

Un extrait d'un rapport du BSIF [2] présente **plusieurs incohérences**, notamment :

- La corrélation est la formule ou la méthode utilisée dans le présent document pour mesurer l'association entre des variables ;
- L'intervalle de confiance est de -1 à 1
- Une corrélation de 1 (corrélation positive parfaite) sous-entend que l'augmentation d'une variable donnée équivaudra à la hausse d'une autre variable ;
- Une corrélation de -1 (corrélation négative parfaite) sous-entend que l'augmentation d'une variable donnée se traduira par une baisse correspondante d'une autre variable
- Une corrélation zéro sous-entend l'absence de relation, ou indépendance, entre deux variables.

4 Théorie des copules

2. Étude d'impact quantitative No4 du BSIF, 2012.

Définition d'une copule

Une copule C est la fonction de répartition d'un vecteur de va $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ dont les composantes $U_i \sim U(0,1)$, $i = 1,2$. Une copule satisfait les propriétés suivantes :

(1) $C(u_1, u_2)$ est non-décroissante sur $(0,1)^2$

(2) $C(u_1, u_2)$ est continue à droite sur $(0,1)^2$

(3) $\lim_{u_i \to 0} C(u_1, u_2) = 0$, $i = 1,2$

(4) $\lim_{u_{3-1} \to 1} C(u_1, u_2) = u_i$, $i = 1,2$

(5) Inégalité du rectangle : $\forall a_i \leq b_i$, $i = 1,2$, on a
$$C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + c(a_1, a_2) \geq 0.$$
Cette égalité sera satisfaite si $\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2) \geq 0$.

On peut généraliser ces définitions pour une copule multivariée.

4.1 Théorème de Sklar

Théorème de Sklar

Soit $F_{\mathbf{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ ayant les fonctions de répartition F_1 et F_2. Il y a 2 volets au théorème :

Volet # 1 Il existe une copule C telle que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
$$F(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$$

Volet # 2 Inversement, si C est une copule de $F_1, \ldots, F_n$ sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par
$$F(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$$
est une fonction de répartition multivariée avec les fonctions de répartition marginales $F_1, \ldots, F_n$.

À prouver

4.2 Comment extraire une copule ?

Soit un vecteur de v.a. continues avec fonction de répartition $F_{\mathbf{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_n)$. Alors, la copule C associée à $F_{\mathbf{X}}$ est donnée par
$$C(u_1, \ldots, u_n) = F_{\mathbf{X}}\left(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)\right) \tag{3}$$

4.3 Bornes de Fréchet

Puisque C est une fonction de répartition, on a
$$W(u_1, \ldots, u_n) \leq C(u_1, \ldots, u_n) \leq M(u_1, \ldots, u_n)$$
où W et M sont les bornes inférieures (voir Éq. 1) et supérieures (voir Éq. 2), respectivement .

4.4 Fonction de densité d'une copule

$$c(u_1, \ldots, u_n) = \frac{\partial^2}{\partial u_1, \ldots, \partial u_n} C(u_1, \ldots, u_n) \tag{4}$$

De plus, on a
$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\partial^2}{\partial u_1, \ldots, \partial u_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u_1, \ldots, \partial u_n} C\left(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\right) \\ &= c(u_1, \ldots, u_n) f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

4.5 Fonction de répartition conditionnelle d'une copule

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \tag{5}$$

Une relation similaire existe pour $C_{1|2}$. On peut obtenir, par exemple, la fonction de répartition conditionnelle $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$ avec
$$F_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = C_{2|1}\left(F_{X_2}(x_2) | F_{X_1}(x_1)\right)$$

4.6 Construction d'une copule archimédienne

Une copule archimédienne est construite à partir de 2 v.a $Y_i|\Theta \sim \text{Exp}(\Theta)$, $i = 1,2$ (et Θ qui suit une certaine distribution) peut être construite avec
$$C(u_1, u_2) = \overline{F}_{\mathbf{Y}}\left(\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{Y_2}^{-1}(u_1)\right) \tag{6}$$
où l'on déduit que
$$F_{Y_i}(x_i) = \mathrm{E}\left[F_{Y|\Theta}(x_i|\theta)\right] = \mathrm{E}\left[e^{-\Theta x}\right] = \mathcal{L}_{\Theta}(x)$$
Plusieurs copules possibles :

Clayton $\Theta \sim \Gamma(\frac{1}{\alpha}, 1)$

AMH $\Theta \sim$ BinNég

Frank $\Theta \sim$ Logarithmique$(\gamma = 1 - e^{-\alpha})$

4.7 Méthode des rectangles

On peut approximer $F_S(s)$ avec la méthode des rectangles [3]

4.7.1 Méthode *lower*

On additionne les masses de probabilité associées aux $2^m - 1$ rectangles se trouvant en-dessous de la diagonale $x_1 + x_2 = s$.

$$A_S^{(l,m)}(s) = \sum_{i=1}^{2^m-1} \left[F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s\right) \right] \tag{7}$$

4.7.2 Méthode *upper*

On additionne les masses de probabilité associées aux 2^m rectangles se trouvant au-dessus de la diagonale $x_1 + x_2 = s$

$$A_S^{(u,m)}(s) = \sum_{i=1}^{2^m} \left[F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s\right) \right] \tag{8}$$

On a que

$$A_S^{(l,m)}(s) \leq A_S^{(l,m+k)}(s) \leq F_S(s) \leq A_S^{(u,m+k)}(s) \leq A_S^{(u,m)}(s).$$

3. Plutôt que d'apprendre les formules ci-dessous, il est mieux de se dessiner les rectangles par rapport à la diagonale puis déduire les F_{X_1,X_2} à additionner et soustraire.

5 Annexe

5.1 Les 3 formes explicites de la $TVaR$

Pour la $TVaR$, il y a 3 preuves à bien connaître :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
TvaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (\underbrace{VaR_u(X)}_{\text{fonction quantile}} - VaR_\kappa(X))du + \underbrace{\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X)du}_{\text{intégration d'une constante}} \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)) \underbrace{f_U(u)}_{U\backsim Unif(0,1)} du \\
&+ \frac{1}{\cancel{1-\kappa}}VaR_\kappa(X)(\cancel{1-\kappa}) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(\underbrace{F_X^{-1}(U)}_{F_X^{-1}\backsim X} - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X)
\end{aligned}$$

□

à partir de la preuve ci-dessus, on peut démontrer celle-ci :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa}E[VaR_\kappa(X) \times \underbrace{1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]}_{=S_X(VaR_\kappa(X))} \\
&+ VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1 - F_X(VaR_\kappa(X))) \\
&+ \frac{1-\kappa}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(-1 + F_X(VaR_\kappa(X)) + 1 - \kappa)}{1-\kappa} \\
&= \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}
\end{aligned}$$

□

Une dernière preuve fortement utilisée pour la $TVaR$, qui découle directement de la dernière :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]}{1-\kappa}$$

Démonstration. Étant donné que cette formule ne fonctionne seulement que pour une v.a. continue, elle est très facile à prouver :

si X est continue, $\quad \forall x, F_X(VaR_\kappa(X))) = \kappa$

Alors, on peut enlever la partie de droite de l'équation. □