Équipe no XX

Nicholas Langevin
(111 184 631)

Alexandre Turcotte
(111 172 613)

Mathématiques actuarielles IARD 1
ACT-2005

Travail pratique 2

Travail présenté à
Andrew Luong

École d'actuariat
Université Laval
Automne 2018

Question 1

Méthode de vraisemblance avec données complètes

a) Estimation des paramètres

Le jeu de données utilisé afin de compléter ce numéro comportait les 10 données suivantes :

1500 6000 3500 3800 1800 5500 4800 4200 3900 3000

À partir de ces données et de SAS, il a été possible d'estimer les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ d'une loi log-normale à partir de la méthode du maximum de vraisemblance. D'ailleurs, le code SAS se trouve dans l'Annexe à la fin du rapport. Voici, les estimés des paramètres obtenus:

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
8.1618	0.4278

Table 1: Paramètres estimés d'une loi log-normale à l'aide du maximum de vraisemblance

Il est également possible de déterminer les estimateurs de façon théorique. D'abord, il faut déterminer la fonction $g(x_i; \mu, \sigma)$ pour les dix scénarios, et ce, en fonction de la densité de X.

Alors comme $X \sim LN(\mu, \sigma)$, la densité de f(x) est la suivante :

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x\sigma} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{In(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Ensuite, il faut appliquer la vraisemblance en tenant compte des 10 scénarios et de la densité de X.

$$Ł(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{10} g(x_i; \mu, \sigma)$$

$$= f_x(1500) \cdot f_x(6000) \cdot ... \cdot f_x(3000)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}1500\sigma} e^{\frac{-1}{2}(\frac{In(1500)-\mu}{\sigma})^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}6000\sigma} e^{\frac{-1}{2}(\frac{In(6000)-\mu}{\sigma})^2}\right] \cdot ... \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}3000\sigma} e^{\frac{-1}{2}(\frac{In(3000)-\mu}{\sigma})^2}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5 \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{10} \left(\frac{1}{2.795153962 \times 10^{35}}\right) e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left[(In(1500)-\mu)^2+(In(6000)-\mu)^2+...+(In(3000)-\mu)^2\right]}$$

Par la suite, il faut appliquer la log vraisemblance.

$$\begin{aligned}
l(\mu,\sigma) &= In(L(\mu,\sigma)) = In\prod_{i=1}^{10} g(x_i;\mu,\sigma)\\
&= -5In(2\pi) - 10In(\sigma) - In(2.795153962\times 10^{35})\\
&- \frac{1}{2\sigma^2}\left[(In(1500)-\mu)^2 + (In(6000)-\mu)^2 + ... + (In(3000)-\mu)^2\right]
\end{aligned}$$

Finalement, il faut dériver la log vraisemblance selon les deux paramètres et égaliser les deux équations à 0 pour pouvoir estimer les paramètres en les isolant.

Dériver selon μ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\mu}l(\mu,\sigma) &= \frac{-1}{2\sigma^2}\left[-2(In(1500)-\mu) - 2(In(6000)-\mu) - ... - 2(In(3000)-\mu)\right]\\
0 &= \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\left[In(1500) + In(6000) + ... + In(3000) - 10\hat{\mu}\right]\\
\hat{\mu} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} In(x_i) \;=\; 8.161836544
\end{aligned}$$

Dériver selon σ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}l(\mu,\sigma) &= \frac{-10}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{10}(In(x_i)-\mu)^2\\
0 &= \frac{-10}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{10}(In(x_i)-\hat{\mu})^2\\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(In(x_i)-8.161836544)^2 \;=\; 0.1830137502\\
\hat{\sigma} &= \sqrt{\hat{\sigma}^2} \;=\; 0.427801064
\end{aligned}$$

Donc, les estimateurs de la loi log-normale, selon la méthode du maximum de vraisemblance, sont $\hat{\mu} = 8.1618$ et $\hat{\sigma} = 0.4278$.

b) Détermination des primes stop-loss

En ayant obtenu les estimés des paramètres à la question a), il est maintenant possible d'effectuer divers calculs puisque la distribution du modèle est maintenant connue. Par conséquent, il est possible de calculer la prime stop-loss $E[(X-d)_+]$, et ce, pour différentes valeurs de déductible, soit d = 2000, 2100, ..., 3000. Pour y arriver, il faut utiliser la formule suivante:

$$E\left[(X-d)_+\right] = e^{\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{Ind-\hat{\mu}-\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}}\right)\right) - d\left(1-\Phi\left(\frac{Ind-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right)$$

où $\hat{\mu} = 8.1618$, $\hat{\sigma} = 0.4278$ et d = déductible. Par conséquent, les valeurs obtenues pour la prime stop-loss sont les suivantes:

d	**Prime stop-loss**
2000	1872.5736
2100	1783.0847
2200	1695.7633
2300	1610.7845
2400	1528.3012
2500	1448.4425
2600	1371.3131
2700	1296.9934
2800	1225.5400
2900	1156.9871
3000	1091.3484

Table 2: Valeurs de la prime stop-loss pour chacun des déductibles d donnés

À partir des valeurs de la *Table 2*, il est possible d'observer une baisse du niveau de la prime lorsque le déductible augmente. De plus, en regardant le graphique (A) de la *Figure 1*, il est possible d'observer cette décroissance qui semble à première vue assez linéaire. Toutefois, en regardant le graphique (B) de la *Figure 1*, ayant un plus grand nombre de valeurs de d, on remarque la convexité de la courbe, ce qui signifie que plus d augmente, moins la diminution est significative. Par exemple, l'écart entre 2000 et 2100 est plus important que l'écart entre 2900 et 3000. Bref, cela fait du sens puisqu'en ajoutant un déductible, la compagnie vient diminuer le risque ainsi que le montant de prestation qu'elle devra verser. Par conséquent, le niveau de la prime devrait diminuer, et ce, avec un impact de moins en moins significatif, car la valeur ajoutée d'augmenter le déductible pour la compagnie est de moins en moins importante.

c) Détermination de l'espérance limitée

Maintenant, toujours en utilisant les paramètres estimés en a), il faut désormais calculer l'espérance limitée, sans déductible, et ce, pour différentes limites supérieures, soit u = 3000, 3100, ..., 4000. Pour y arriver, il faut utiliser la formule suivante:

$$E\left[X\Lambda u\right] = e^{\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}}\Phi\left(\frac{In(u)-\hat{\mu}-\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}}\right) + u\left(1-\Phi\left(\frac{In(u)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right)$$

où $\hat{\mu} = 8.1618$, $\hat{\sigma} = 0.4278$ et u = limite. Par conséquent, les valeurs obtenues pour l'espérance limitée sont les suivantes:

u	**Espérance limitée**
3000	2748.9541
3100	2811.6843
3200	2871.5287
3300	2928.5251
3400	2982.7242
3500	3034.1882
3600	3082.9884
3700	3129.2039
3800	3172.9195
3900	3214.2249
4000	3253.2129

Table 3: Valeurs de l'espérance limitée pour chacune des limites u données

À partir des valeurs de la *Table 3*, il est possible d'observer une hausse du niveau de la prime lorsque la limite augmente. De plus, en regardant le graphique (C) de la *Figure 1*, il est possible d'observer cette croissance. D'ailleurs, en regardant le graphique (D) de la *Figure 1*, ayant un plus grand nombre de valeurs u, on remarque la concavité de la courbe, ce qui signifie que plus u augmente, moins l'augmentation est significative. Bref, cela fait du sens puisqu'en ayant une limite plus faible, la compagnie vient diminuer le risque ainsi que le montant de prestation qu'elle devra verser puisqu'elle ne payera pas ce qui a en excédent. Par conséquent, le niveau de la prime va augmenter plus la limite est grande, car la compagnie devra débourser de plus grandes sommes, et ce, avec un impact de moins en moins significatif, car, à un certain point, le fait d'augmenter la limite va affecter peu de gens, donc la hausse des sommes à débourser sera moins importante.

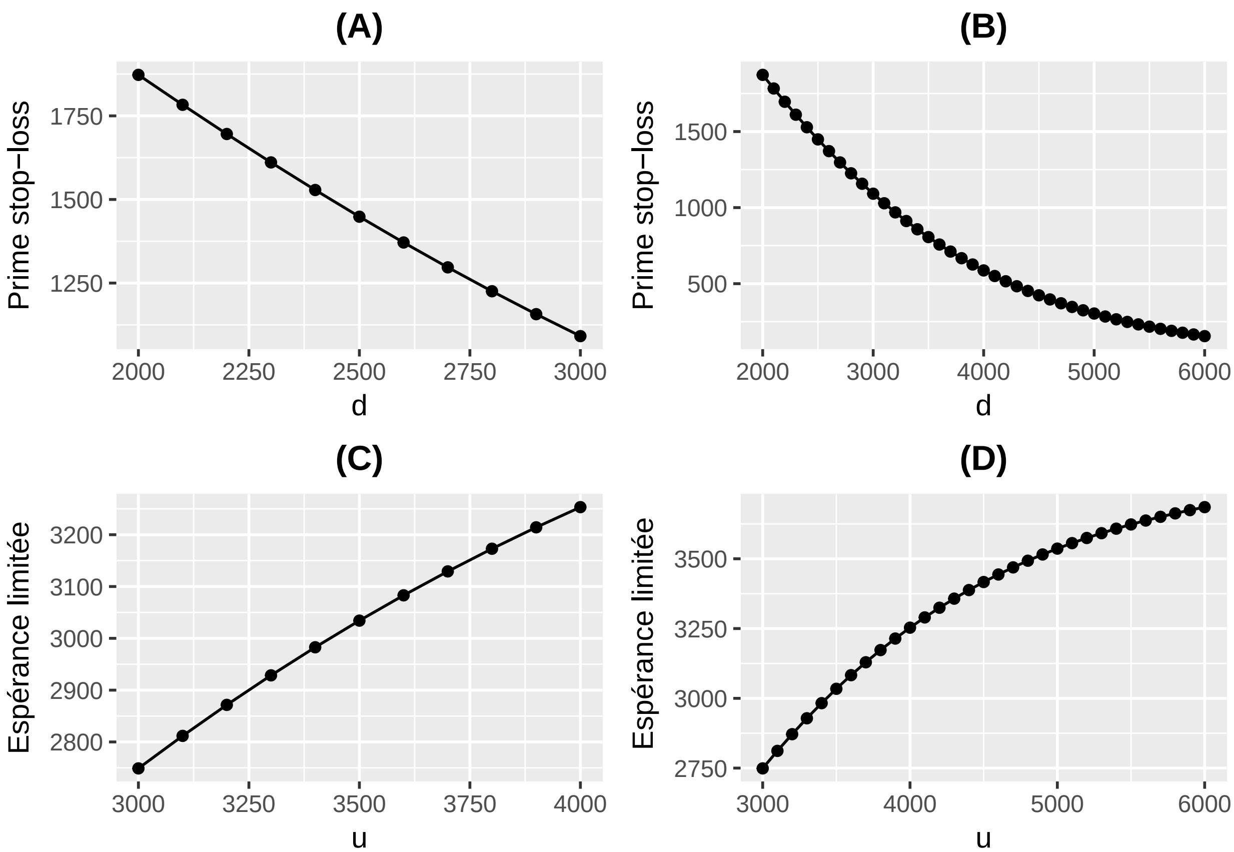


Figure 1 : (A) et (B) Représentation graphique de la prime stop-loss en fonction de d. (C) et (D) Représentation graphique de l'espérance limitée en fonction de u. Toutefois, l'étendu des valeurs sur l'axe des

abscisses est plus importante pour les graphiques (B) et (D) afin de mieux discerner la tendance.

d) Détermination de la prime stop-loss par simulation avec un déductible de 2000

Il est également possible d'approximer la prime stop-loss par simulation. Alors, il est possible de tirer un échantillon de la loi log-normale suffisament grand pour estimer la prime stop-loss. Cela a été fait avec un m = 100 000, 500 000 et 1 000 000. Pour y arriver, il faut utiliser la formule suivante:

$$E\left[(X-2000)_{+}\right]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}max(0,X-2000)$$

Par conséquent, les valeurs obtenues pour la prime stop-loss sont les suivantes:

m	**approximation**
100000	1870.0455
500000	1872.1354
1000000	1872.3536

Table 4: Valeurs approximées par simulations de la prime stop-loss ayant un déductible de 2000

La valeur de la prime stop-loss calculée en b) pour un déductible de 2000 est de 1872.5736. Puis, en regardant les résultats obtenus à l'aide de la simulation, on se rend compte que ceux-ci sont très près de la valeur théorique, soit 1870.0455, 1872.1354 et 1872.3536 pour 100 000, 500 000 et 1 000 000 simulations respectivement. En effet, les écarts relatifs sont de 0.135%,0.0234% et 0.0117%. Par conséquent, l'approximation est très précise et donne sensiblement la même valeur que la valeur théorique lorsqu'un grand nombre de simulations est effectué.

Question 2

Méthode de vraisemblance avec données groupées

a) Estimation des paramètres

Le jeu de données utilisé afin de compléter ce numéro comportait les données suivantes :

Intervalles	**nombres**
0-250	3
250-500	4
500-750	5
750-1000	5
1000-1250	4
1250-1500	3
1500-2000	3
2000-2500	3
2500-3000	2
3000-5000	2

Table 5: Jeux de données de la question 2

À partir de ces données et de SAS, il a été possible d'estimer les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ d'une loi log-normale à partir de la méthode du maximum de vraisemblance. D'ailleurs, le code SAS se trouve dans l'Annexe à la fin du rapport. Voici, les estimés des paramètres obtenus:

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
6.8418	0.8278

Table 6: Paramètres estimés d'une loi log-normale à l'aide du maximum de vraisemblance

Afin de déterminer les estimateurs de la loi log-normale, il faut d'abord trouver la fonction $g(x_i;\mu,\sigma)$ pour l'ensemble des scénarios, et ce, en fonction de la répartition de X puisque les valeurs correspondent à un interval et non à une valeur ponctuelle.

Alors comme $X \sim LN(\mu,\sigma)$, la fonction de répartition F(x) est la suivante :

$$F_x(x) = \Phi\left(\frac{In(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

Ensuite, il faut appliquer la vraisemblance en tenant compte de tous les scénarios possibles et de la répartition de X.

$$\begin{aligned}
Ł(\mu,\sigma) &= \prod_{i=1}^{10} g(x_i;\mu,\sigma)\\
&= [F_x(250)-F_x(0)]^3 \cdot [F_x(500)-F_x(250)]^4 \cdot ... \cdot [F_x(5000)-F_x(3000)]^2
\end{aligned}$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{In(250)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{In(0)-\mu}{\sigma}\right)\right]^3 \cdot \left[\Phi\left(\frac{In(500)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{In(250)-\mu}{\sigma}\right)\right]^4$$
$$\cdot \ldots \cdot \left[\Phi\left(\frac{In(5000)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{In(3000)-\mu}{\sigma}\right)\right]^2$$

Par la suite, il faut appliquer la log vraisemblance.

$$\begin{aligned} \text{ł}(\mu,\sigma) = In(L(\mu,\sigma)) &= In\prod_{i=1}^{10} g(x_i;\mu,\sigma) \\ &= 3In\left[\Phi\left(\frac{In(250)-\mu}{\sigma}\right) - 0\right] + 4In\left[\Phi\left(\frac{In(500)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{In(250)-\mu}{\sigma}\right)\right] \\ &+ \ldots + 2In\left[\Phi\left(\frac{In(5000)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{In(3000)-\mu}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

Finalement, il faut chercher à maximiser la fonction log vraisemblance afin d'obtenir les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$. Cela a été fait à l'aide du logiciel SAS.

Donc, les estimateurs de la loi log-normale, selon la méthode du maximum de vraisemblance, sont $\hat{\mu} = 6.8418$ et $\hat{\sigma} = 0.8278$.

b) Détermination des primes stop-loss

En ayant obtenu les estimés des paramètres à la question a), il est maintenant possible d'effectuer divers calculs puisque la distribution du modèle est maintenant connue. Par conséquent, il est possible de calculer la prime stop-loss $E[(X-d)_+]$, et ce, pour différentes valeurs de déductible, soit d = 2000, 2100, . . . , 3000. Pour y arriver, il faut utiliser la formule suivante:

$$E\left[(X-d)_+\right] = e^{\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{Ind-\hat{\mu}-\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}}\right)\right) - d\left(1-\Phi\left(\frac{Ind-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right)$$

où $\hat{\mu} = 6.8418$, $\hat{\sigma} = 0.8278$ et d = déductible. Par conséquent, les valeurs obtenues pour la prime stop-loss sont les suivantes:

À partir des valeurs de la *Table 7*, il est possible d'observer une baisse du niveau de la prime lorsque le déductible augmente. De plus, en regardant le graphique (A) de la *Figure 2*, il est possible d'observer cette décroissance qui semble à première vue assez linéaire. Toutefois, en regardant le graphique (B) de la *Figure 2*, ayant un plus grand nombre de valeurs de d, on remarque la convexité de la courbe, ce qui signifie que plus d augmente, moins la diminution est significative. Bref, cela fait du sens puisqu'en ajoutant un déductible, la compagnie vient diminuer le montant qu'elle devra verser en prestations. Par conséquent, le niveau de la prime devrait diminuer, et ce, avec un impact de moins en moins significatif, car la valeur ajoutée d'augmenter le déductible pour la compagnie est de moins en moins importante.

c) Détermination de l'espérance limitée

Maintenant, toujours en utilisant les paramètres estimés en a), il faut désormais calculer l'espérance limitée, sans déductible, et ce, pour différentes limites supérieure, soit u = 3000, 3100, . . . , 4000. Pour y arriver, il faut utiliser la formule suivante:

d	Prime stop-loss
2000	253.3579
2100	236.1653
2200	220.3997
2300	205.9213
2400	192.6061
2500	180.3436
2600	169.0355
2700	158.5939
2800	148.9402
2900	140.0041
3000	131.7223

Table 7: Valeurs de la prime stop-loss pour chacun des déductibles d donnés

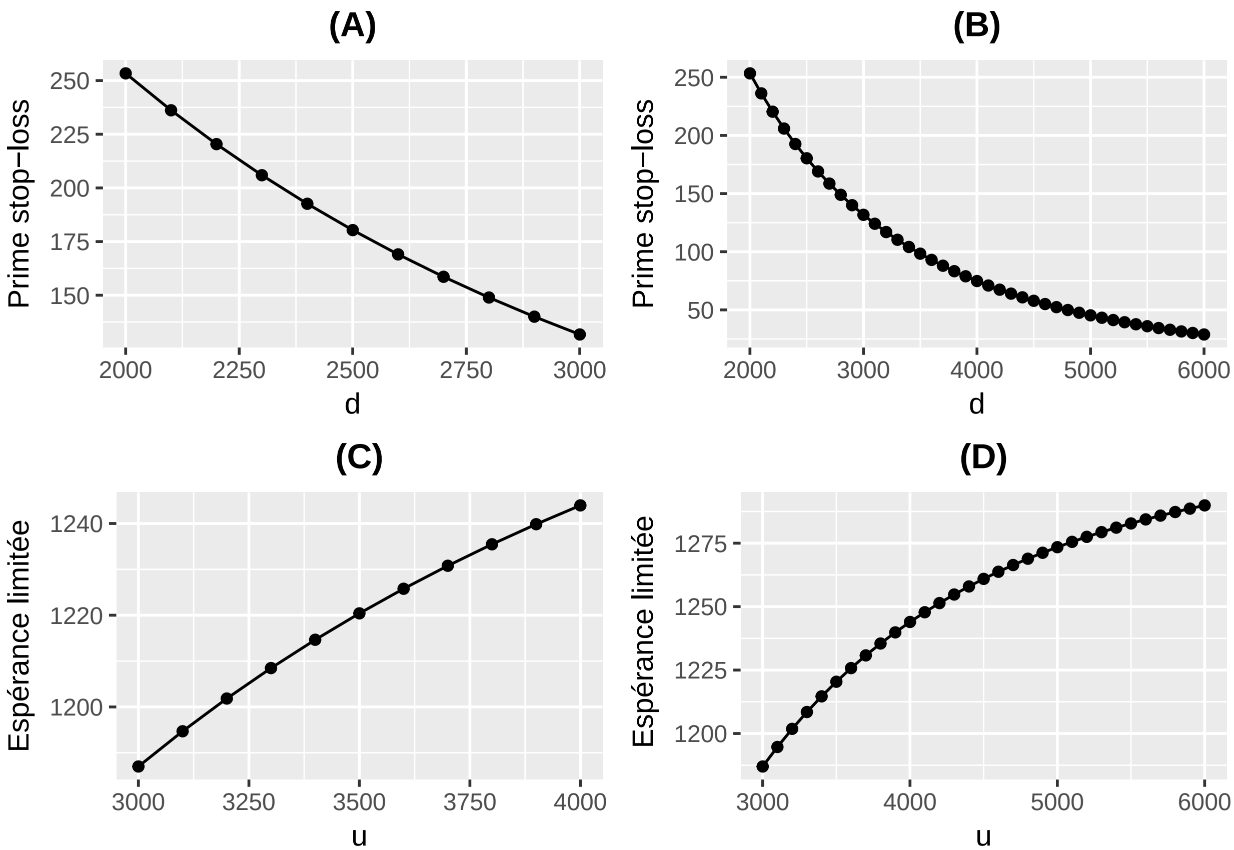
$$E\left[X\Lambda u\right] = e^{\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}}\Phi\left(\frac{Inu-\hat{\mu}-\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}}\right)+u\left(1-\Phi\left(\frac{Inu-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right)$$

où $\hat{\mu} = 6.8418$, $\hat{\sigma} = 0.8278$ et u = limite. Par conséquent, les valeurs obtenues pour l'espérance limitée sont les suivantes:

u	Espérance limitée
3000	1187.0103
3100	1194.6945
3200	1201.8320
3300	1208.4691
3400	1214.6471
3500	1220.4038
3600	1225.7731
3700	1230.7858
3800	1235.4700
3900	1239.8511
4000	1243.9524

Table 8: Valeurs de l'espérance limitée pour chacune des limites u données

À partir des valeurs de la *Table 8*, il est possible d'observer une hausse du niveau de la prime lorsque la limite augmente. De plus, en regardant le graphique (C) de la *Figure 2*, il est possible d'observer cette croissance. D'ailleurs, en regardant le graphique (D) de la *Figure 2*, ayant un plus grand nombre de valeurs u, on remarque la concavité de la courbe, ce qui signifie que plus u augmente, moins l'augmentation est significative. Bref, cela fait du sens puisqu'en ayant une limite plus faible, la compagnie vient diminuer le risque ainsi que le montant de prestation qu'elle devra verser puisqu'elle ne payera pas ce qui a en excédent. Par conséquent, le niveau de la prime va augmenter plus la limite est grande, car la compagnie devra débourser de plus grandes sommes, et ce, avec un impact de moins en moins significatif, car, à un certain point, le fait d'augmenter la limite va affecter peu de gens, donc la hausse des sommes à débourser sera moins importante.



(A)
Prime stop−loss
250
225
200
175
150
2000
2250
2500
2750
3000
d
(B)
Prime stop−loss
250
200
150
100
50
2000
3000
4000
5000
6000
d
(C)
Espérance limitée
1240
1220
1200
3000
3250
3500
3750
4000
u
(D)
Espérance limitée
1275
1250
1225
1200
3000
4000
5000
6000
u

Question 3

Estimateur de Bayes

a) Estimation du paramètre θ

On trouve le maximum de vraisemblance pour la loi binomial négative avec $r = 2$ pour le paramètre θ, qui représente la probabilité de succès. On supose de prime à bord qu'il n'y a pas de loi à priori. Le maximum de vraisemblance est alors défini par:

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_1 - 1}{x_i} \theta^r (1-\theta)^{x_i} \\
&= \theta^{nr} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_1 - 1}{x_i}
\end{aligned}$$

On trouve alors la log-vraisemblance

$$\begin{aligned}
l(\theta) &= \ln(\theta^{nr}) + \ln(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \sum_{i=1}^{n} \ln \binom{r + x_1 - 1}{x_i} \\
&= nr \ln\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1-\theta) - \sum_{i=1}^{n} \ln \binom{r + x_1 - 1}{x_i}
\end{aligned}$$

On dérive ensuite par rapport à θ pour trouver l'estimateur

$$\begin{aligned}
\frac{dl(\theta)}{d\theta} &= \frac{nr}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta)} = 0 \\
\Rightarrow \frac{nr}{\theta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta)} \\
\Rightarrow \frac{nr(1-\theta)}{\theta} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\Rightarrow \frac{nr}{\theta} &= \sum_{i=1}^{n} x_i + nr \\
\Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} &= \frac{nr}{\sum_{i=1}^{n} x_i + nr} \\
\Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} &= \frac{r}{\bar{x} + r}
\end{aligned}$$

On calcule ensuite le maximum de vraisemblance avec notre unique donnée $x = 5$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{r}{\bar{x} + r} = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

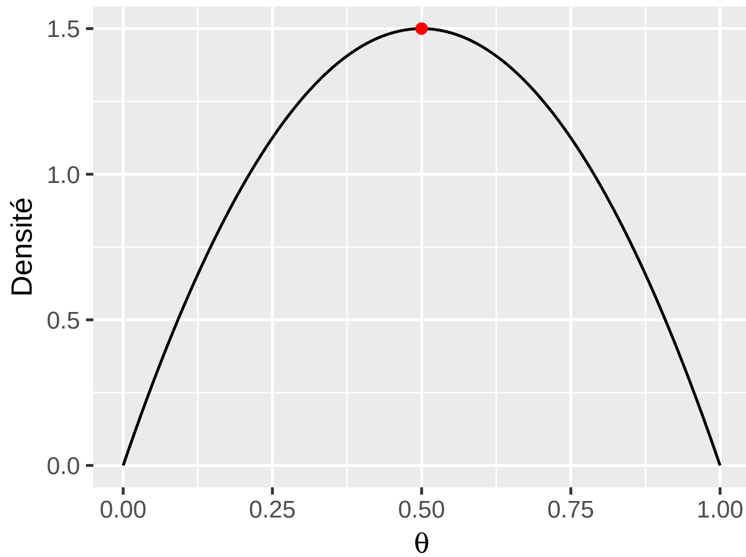


Figure 1: Densité d'une loi beta($\alpha = 2, \beta = 2$)

b) Présentation graphique de la loi beta a priori

On choisi comme loi à priori la loi beta avec $\alpha = 2$ et $\beta = 2$. On prend la loi beta puisque sont domaine respecte le domaine de notre estimateur, soit $\theta \in [0, 1]$. La figure 1 permet d'observer la moyenne de la distribution(point rouge) qui est égal à 0.5. L'équation 3.1 permet de confirmer cette valeur.

$$\begin{aligned}\theta &\sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 2)\\ E[\theta] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 0.5\end{aligned} \tag{3.1}$$

c) Détermination de la loi a posteriori ainsi que la valeur exacte de l'estimateur de Bayes

On détermine la loi à posteriori, pour ensuite trouver l'estimateur de Bayes pour notre θ. Puisque notre loi a priori est une Beta, la loi à posteriori devrait elle aussi suivre une Beta avec α' et β'.

$$\begin{aligned}f(\theta|x_1, ..., x_n) &= \frac{f(\theta) \cdot f(\theta|x_1, ..., x_n)}{\int f(\theta) \cdot f(\theta|x_1, ..., x_n) d\theta}\\ &= c(x) \cdot \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\theta^r(1-\theta)^{x_1} ... \theta^r(1-\theta)^{x_n}\\ &= c(x) \cdot \theta^{\alpha+nr-1}(1-\theta)^{\beta+\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)-1}\\ &\sim \text{Beta}(\alpha' = \alpha + nr, \beta' = \beta + \sum_{i=1}^n x_i)\end{aligned} \tag{3.2}$$

où c(x) est une constante qui fait que la densité intégrée sur tout sont domaine égal à 1. On peut ensuite trouver l'estimateur de Bayes pour notre θ, toujours en utilisant notre unique donnée $x = 5$.

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_B &= \int_0^1 \theta f(\theta|x) d\theta \\
&= \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} \\
&= \frac{\alpha + nr}{\alpha + nr + \beta + \sum_{i=1}^{n}} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + nr + \beta + \sum_{i=1}^{n}} + \frac{rn}{\alpha + nr + \beta + \sum_{i=1}^{n}} \\
&= \frac{2 + (1)2}{2 + (1)2 + 2 + 5} \\
&= \frac{4}{11}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

L'estimateur de Bayes estime une probabilité plus grande pour notre θ que l'estimateur de vraisemblance. Puisque nous avons une seul donnée, l'estimateur de maxmimum de vraisemblance possède une plus grande variance que l'estimateur de Bayes. Par contre, Bayes détermine un estimateur biaiser. En utilisant la représentation en 3.3 et en prenant $n \to \infty$, il est possible de montrer que l'estimateur de Bayes tend vers l'estimateur du maximum de vraisremblance. Il en déduit donc que l'estimateur de Bayes est préférable pour de petit échantillion de donnés, alors que celui du maximum de vraisemblance sera plus précis pour les grands échantillions.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_B &= \frac{\alpha}{\alpha + nr + \beta + \sum_{i=1}^{n} x} + \frac{rn}{\alpha + nr + \beta + \sum_{i=1}^{n} x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{\alpha + nr + \beta + \sum_{i=1}^{n} x} + \lim_{n\to\infty} \frac{rn}{n(\frac{\alpha}{n} + r + \frac{\beta}{n} + \bar{x})} \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{r}{\frac{\alpha}{n} + r + \frac{\beta}{n} + \bar{x}} \\
&= \frac{r}{r + \bar{x}} = \hat{\theta}_{MLE}
\end{aligned}
$$

d) Approximation de l'estimateur de Bayes par simulation

On simule notre estimateur de Bayes pour le comparer avec la valeur théorique calulée en C. Pour ce faire on effectue $m = 500000$ simulation de la loi à postériorie. Comme calculée à l'équation 3.2, cette loi suit aussi un beta avec $\alpha = 4$ et $\beta = 7$. L'estimateur de Bayes simulées consiste alors à la moyenne de ses simulations. Avec cette méthode et ce nombre important de simulations, nous obtenons $\hat{\theta}_B = 0.3636007$. Le résultat obtenue est différent seulement pour la 5^e décimal, ce qui est très précis. Pour plus de précision, il aurait été possible d'augmenter le nombre de simulation, mais celà aurais requis plus de puissance temps et et potentiellement plus de puissance machine pour une énorme quantité de simulations.

Annexe

Question 1

a) Estimation des paramètres

```
# Données utilisées afin de compléter le numéro 1

data <-  c(1500, 6000, 3500, 3800, 1800, 5500, 4800, 4200, 3900, 3000)
```

```
##  [1] 1500 6000 3500 3800 1800 5500 4800 4200 3900 3000
```

```
# Code SAS permettant d'estimer les paramètres de la loi log-normale
# par la méthode du maximum de vraisemblance

data MLE;
input t cens;
datalines;
1500 1
6000 1
3500 1
3800 1
1800 1
5500 1
4800 1
4200 1
3900 1
3000 1
;
run;

proc lifereg data=MLE;
    Model t*cens(0)= /covb dist=lnormal;
run;
```

b) Détermination des primes stop-loss

```
# Les estimateurs ont été calculés à l'aide de SAS en a)
mu <- 8.1618
sigma <-  0.4278

# Valeurs des déductibles d à utiliser
d <- 100 * seq(20,30)

# Calculer les primes STOP-LOSS pour les différents déductibles d
STOP_LOSS <- function(x) {
    exp(mu + sigma^2/2) * (1 - pnorm((log(x) - mu - sigma^2)/sigma)) -
        x * (1 - pnorm((log(x) - mu)/sigma))
}
```

```r
Primes_STOP_LOSS <- data.frame(d, "Prime" = sapply(d, function(x) STOP_LOSS(x)))

# Présenter les valeurs des primes STOP-LOSS en fonction de d
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(Primes_STOP_LOSS, caption = "Valeurs de la prime stop-loss pour
                 chacun des déductibles d donnés",
                 align = c("c", "c", "c"),
                 digits = c(0, 0, 4))

# Représenter graphiquement l'évolution de la prime stop-loss en fonction de d
library(ggplot2)
plot1 <- ggplot(data = Primes_STOP_LOSS, aes(x= Primes_STOP_LOSS$d,
                                             y = Primes_STOP_LOSS$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("d") + ylab("Prime stop-loss")
    + ggtitle("(A)") + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))

value_test <- data.frame(d=(100 * seq(20,60)), "Prime" = sapply((100 * seq(20,60)),
                function(x) STOP_LOSS(x)))

plot2 <- ggplot(data=value_test, aes(x=value_test$d, y=value_test$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("d") + ylab("Prime stop-loss")
    + ggtitle("(B)") + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))
```

c) Détermination des primes limited loss

```r
# Valeurs des limites u à utiliser
u <- 100 * seq(30,40)

# Calculer l'espérance limitée pour les différentes limites u
Esp_limite <- function(x) {
    exp(mu + sigma^2/2) * pnorm((log(x) - mu - sigma^2)/sigma) +
        x * (1 - pnorm((log(x) - mu)/sigma))
}

Primes_Esp_limite <- data.frame(u, "Prime" = sapply(u, function(x) Esp_limite(x)))

# Présenter les valeurs des espérances limitées en fonction de u
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(Primes_Esp_limite, caption = "Valeurs de l'espérance limitée pour
                 chacune des limites u données",
                 align = c("c", "c", "c"),
                 digits = c(0, 0, 4))

# Représenter graphiquement l'évolution de l'espérance limitée en fonction de u
library(ggplot2)
plot3 <- ggplot(data = Primes_Esp_limite, aes(x= Primes_Esp_limite$u,
                                              y = Primes_Esp_limite$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("u") + ylab("Espérance limitée") +ggtitle("(C)")
    + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))
```

```r
value_test_2 <- data.frame(u=(100 * seq(30,60)), "Prime" = sapply((100 * seq(30,60)),
                    function(x) Esp_limite(x)))

plot4 <- ggplot(data=value_test_2, aes(x=value_test_2$u, y=value_test_2$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("u") + ylab(" Espérance limitée")
    + ggtitle("(D)") + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))

# Mettre les 4 graphiques ensembles
library(gridExtra)
grid.arrange(plot1, plot2, plot3, plot4, ncol=2, nrow=2)
```

d) Détermination de la prime stop-loss par simulation avec un déductible d = 2000

```r
# Valeurs du déductible d à utiliser
d <- 2000

# Nombre de simulations
m <- c(1e5, 5e5, 1e6)

# Simuler un échantillon de m simulations de la log log-normale
# avec les paramètres estimés en a)
simul <- function(x) rlnorm(x, meanlog = mu, sdlog = sigma)
simulation <- sapply(1:3, function(i) simul(m[i]))

# Approximer la prime STOP-LOSS ayant un déductible de 2000 par simulation
approximation <- sapply(1:3, function(x)
                    mean(sapply(1:m[x], function(i)
                        max(0, simulation[[x]][i] - 2000))))

approx <- data.frame(m, approximation)

# Trouver les écarts relatifs (par rapport à la valeur théorique)
Prime_2000 <- Primes_STOP_LOSS$Prime[1]
Approx <- approx$approximation

Ecart <- abs((Approx-Prime_2000)/Prime_2000) * 100

# Présenter les valeurs approximées de la prime STOP-LOSS ayant un déductible de 2000
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(approx, caption = "Valeurs approximées par simulations de la prime stop-loss
                 ayant un déductible de 2000",
                 align = c("c", "c", "c"),
                 digits = c(0, 0, 4))
```

Question 2

a) Estimation des paramètres

```
# Code SAS permettant d'estimer les paramètres de la loi log-normale
# par la méthode du maximum de vraisemblance
data donnees;
input lb ub;
datalines;
0.00001 250
0.00001 250
0.00001 250
250 500
250 500
250 500
250 500
500 750
500 750
500 750
500 750
500 750
750 1000
750 1000
750 1000
750 1000
750 1000
1000 1250
1000 1250
1000 1250
1000 1250
1250 1500
1250 1500
1250 1500
1500 2000
1500 2000
1500 2000
2000 2500
2000 2500
2000 2500
2500 3000
2500 3000
3000 5000
3000 5000
;
run;

proc lifereg data=donnees;
    Model (lb,ub)= /covb dist=lnormal;
run;
```

b) Détermination des primes stop-loss

```
# Les estimateurs ont été calculés à l'aide de SAS en a)
mu_2 <- 6.8418
sigma_2 <-  0.8278

# Valeurs des déductibles d à utiliser
d_2 <- 100 * seq(20,30)

# Calculer les primes STOP-LOSS pour les différents déductibles d
STOP_LOSS_2 <- function(x) {
    exp(mu_2 + sigma_2^2/2) * (1 - pnorm((log(x) - mu_2 - sigma_2^2)/sigma_2)) -
        x * (1 - pnorm((log(x) - mu_2)/sigma_2))
}

Primes_STOP_LOSS_2 <- data.frame(d_2, "Prime" = sapply(d_2, function(x) STOP_LOSS_2(x)))

# Présenter les valeurs des primes STOP-LOSS en fonction de d
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(Primes_STOP_LOSS_2, caption = "Valeurs de la prime STOP-LOSS pour
                 chacun des déductibles d donnés",
                 align = c("c", "c", "c"),
                 digits = c(0, 0, 4))

# Représenter graphiquement l'évolution de la prime stop-loss en fonction de d
library(ggplot2)
plot5 <- ggplot(data = Primes_STOP_LOSS_2, aes(x= Primes_STOP_LOSS_2$d_2,
                                             y = Primes_STOP_LOSS_2$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("d") + ylab("Prime stop-loss")
    + ggtitle("(A)") + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))

value_test_3 <- data.frame(d=(100 * seq(20,60)), "Prime" = sapply((100 * seq(20,60)),
                    function(x) STOP_LOSS_2(x)))

plot6 <- ggplot(data=value_test_3, aes(x=value_test_3$d, y=value_test_3$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("d") + ylab("Prime stop-loss") +ggtitle("(B)")
    + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))
```

c) Détermination des primes limited loss

```
# Valeurs des limites u à utiliser
u_2 <- 100 * seq(30,40)

# Calculer l'espérance limitée pour les différents limites u
Esp_limite_2 <- function(x) {
    exp(mu_2 + sigma_2^2/2) * pnorm((log(x) - mu_2 - sigma_2^2)/sigma_2) +
        x * (1 - pnorm((log(x) - mu_2)/sigma_2))
}

Primes_Esp_limite_2 <- data.frame(u_2, "Prime" = sapply(u_2, function(x) Esp_limite_2(x)))
```

```r
# Présenter les valeurs des espérances limitées en fonction de u
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(Primes_Esp_limite_2, caption = "Valeurs de l'espérance limitée
                 pour chacune des limites u données",
                 align = c("c", "c", "c"),
                 digits = c(0, 0, 4))

# Représenter graphiquement l'évolution de l'espérance limitée en fonction de u
library(ggplot2)
plot7 <- ggplot(data = Primes_Esp_limite_2, aes(x= Primes_Esp_limite_2$u_2,
                                                y = Primes_Esp_limite_2$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("u") + ylab("Espérance limitée")
    + ggtitle("(C)") + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))

value_test_4 <- data.frame(u=(100 * seq(30,60)), "Prime" = sapply((100 * seq(30,60)),
                    function(x) Esp_limite_2(x)))

plot8 <- ggplot(data=value_test_4, aes(x=value_test_4$u, y=value_test_4$Prime))
    + geom_point() + geom_line() + xlab("u") + ylab(" Espérance limitée")
    + ggtitle("(D)") + theme(plot.title =  element_text(face="bold", hjust = 0.5))

# Mettre les 4 graphiques ensembles
library(gridExtra)
grid.arrange(plot5, plot6, plot7, plot8, ncol=2, nrow=2)
```

Question 3

a) Estimation du paramètre θ

Aucun code n'a été utilisé pour cette section.

b) Présentation graphique de la loi beta a priori

```r
# Création du graphique de la loi beta
ggplot(data.frame(x=c(0, 1)),aes(x)) +
    stat_function(fun=dbeta, args = list(2,2))+
    xlab(expression(theta))+
    ylab("Densité")+
    geom_point(aes(x=0.5, y=1.5), colour="red")
```

c) Détermination de la loi a posteriori ainsi que la valeur exacte de l'estimateur de Bayes

Aucun code n'a été utilisé pour cette section.

d) Approximation de l'estimateur de Bayes par simulation

```r
# Simulation de l'estimation de Bayes
set.seed(4545)
nsim <- 500000
simul_posterorie <- rbeta(nsim, 4, 7)
simul_bayes <- mean(simul_posterorie)
```