

Équipe no XX

Nicholas Langevin  
(111 184 631)

Alexandre Turcotte  
(111 172 613)

Mathématiques actuarielles IARD 1  
ACT-2005

## **Travail pratique 2**

Travail présenté à  
Andrew Luong

École d'actuariat  
Université Laval  
Automne 2018

## Question 1

### Méthode de vraisemblance avec données complètes

#### a) Estimation des paramètres

Les données utilisées pour ce problème se trouvent dans l'annexe sous la question 1. À partir de ces données, il a été possible d'estimer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  d'une loi log normale à partir de la méthode de vraisemblance, car le jeu de données donne de l'information sur la distribution de  $X$ , soit  $f_X(x)$ ,  $S_X(x)$  et  $F_X(x)$ . Les étapes à suivre sont donc les suivantes :

- Déterminer la fonction  $g(X, \mu, \sigma)$ .
- Appliquer la vraisemblance  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n g(X, \mu, \sigma)$
- Appliquer la log vraisemblance  $l(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln(\prod_{i=1}^n g(X, \mu, \sigma))$
- Dériver selon  $\mu$  :  $\frac{d}{d\mu}l(\theta)$
- Dériver selon  $\sigma$  :  $\frac{d}{d\sigma}l(\theta)$
- Isoler les paramètres

Mettre chacune des étapes intermédiaires + calculs + SAS surment Mettre le code dans l'annexe

Les estimateurs de la loi log normale, selon la méthode de vraisemblance, sont  $\hat{\mu} = ???$  et  $\hat{\sigma} = ???$ .

[1] 1500 6000 3500 3800 1800 5500 4800 4200 3900 3000

	mu	sigma
1	8.1618	0.4278

Table 1: Paramètres estimés d'une loi log-normale à l'aide du maximum de vraisemblance

#### b) Détermination des primes stop-loss

En ayant obtenu les estimés des paramètres à la question a), il est maintenant possible d'effectuer divers calculs puisque la distribution du modèle est maintenant connu. Par conséquent, il est possible de calculer la prime stop-loss  $E[(X - d)_+]$ , et ce, pour différentes valeurs de déductible, soit  $d = 2000, 2100, \dots, 3000$  (accroissement par tranche de 100).

il faut faire une intégrale – méthode analytique

Expliquer un peu la démarche et mettre résultats au fur à mesure ici

Mettre commentaires (impact d'augmenter  $d$ , probalblement que la prime va diminuer)

#### c) Détermination des primes limited loss

Maintenant, toujours en utilisant les paramètres estimés en a), il faut désormais calculer les primes limited loss, sans déductible, et ce, pour différentes limites supérieure, soit  $u = 3000, 3100, \dots, 4000$  (accroissement par tranche de 100).

	d	Prime
1	2000	1872.5736
2	2100	1783.0847
3	2200	1695.7633
4	2300	1610.7845
5	2400	1528.3012
6	2500	1448.4425
7	2600	1371.3131
8	2700	1296.9934
9	2800	1225.5400
10	2900	1156.9871
11	3000	1091.3484

Table 2: Valeurs de la prime STOP-LOSS pour chaque déductible d donnée

Expliquer un peu la démarche et mettre résultats au fur à mesure ici

Mettre commentaires (impact d'augmenter d, probalblement que la prime va diminuer)

	u	Prime
1	3000	2748.9541
2	3100	2811.6843
3	3200	2871.5287
4	3300	2928.5251
5	3400	2982.7242
6	3500	3034.1882
7	3600	3082.9884
8	3700	3129.2039
9	3800	3172.9195
10	3900	3214.2249
11	4000	3253.2129

Table 3: Valeurs de l'espérance limitée pour chaque limite u donnée

#### d) Détermination de la prime stop-loss par simulation avec un déductible $d = 2000$

Il est également possible d'approximer la prime stop-loss par simulation. Alors, il est possible de tirer un échantillon de loi log-normale suffisamment grand pour estimer la prime stop-loss. Cela a été fait avec un  $m = 100\ 000$ ,  $500\ 000$  et  $1\ 000\ 000$ .

commentaire et comparaison avec b)

	m	approximation
1	100000	1873.2925
2	500000	1872.3004
3	1000000	1871.2173

Table 4: Valeurs approximées par simulations de la prime STOP-LOSS ayant un déductible de 2000

## Question 2

### Méthode de vraisemblance avec données groupées

#### a) Estimation des paramètres

	mu	sigma
1	6.8418	0.8278

Table 5: Paramètres estimés d'une loi log-normale à l'aide du maximum de vraisemblance

# Annexe

## Question 1

### a) Estimation des paramètres

```
# Données utilisées afin de compléter le numéro 1

data <- c(1500, 6000, 3500, 3800, 1800, 5500, 4800, 4200, 3900, 3000)

## [1] 1500 6000 3500 3800 1800 5500 4800 4200 3900 3000

# Code SAS permettant d'estimer les paramètres de la loi log-normale
#par la méthode du maximum de vraisemblance

data MLE;
input t cens;
datalines;
1500 1
6000 1
3500 1
3800 1
1800 1
5500 1
4800 1
4200 1
3900 1
3000 1
;
run;

proc lifereg data=MLE;
  Model t*cens(0)= /covb dist=lnormal;
run;
```

### b) Détermination des primes stop-loss

```
# Les estimateurs ont été calculés à l'aide de SAS en a)
mu <- 8.1618
sigma <- 0.4278

# Valeurs des déductibles d à utiliser
d <- 100 * seq(20,30)

# Calculer les primes STOP-LOSS pour les différents déductibles d
STOP_LOSS <- function(x) {
  exp(mu + sigma^2/2) * (1 - pnorm((log(x) - mu - sigma^2)/sigma)) -
    x * (1 - pnorm((log(x) - mu)/sigma))
}
```

```

Primes_STOP_LOSS <- data.frame(d, "Prime" = sapply(d, function(x) STOP_LOSS(x)))

# Présenter les valeurs des primes STOP-LOSS en fonction de d
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(Primes_STOP_LOSS, caption = "Valeurs de la prime STOP-LOSS pour chaque déductible d donnée",
       align = c("c", "c", "c"),
       digits = c(0, 0, 4))

```

### c) Détermination des primes limited loss

```

# Valeurs des limites u à utiliser
u <- 100 * seq(30,40)

# Calculer l'espérance limitée pour les différents limites u
Esp_limite <- function(x) {
  exp(mu + sigma^2/2) * pnorm((log(x) - mu - sigma^2)/sigma) +
  x * (1 - pnorm((log(x) - mu)/sigma))
}

Primes_Esp_limite <- data.frame(u, "Prime" = sapply(u, function(x) Esp_limite(x)))

# Présenter les valeurs des espérances limitées en fonction de u
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)
xtable(Primes_Esp_limite, caption = "Valeurs de l'espérance limitée pour chaque limite u donnée",
       align = c("c", "c", "c"),
       digits = c(0, 0, 4))

```

### d) Détermination de la prime stop-loss par simulation avec un déductible $d = 2000$

```

# Valeurs du déductible d à utiliser
d <- d[1]

# Nombre de simulations
m <- c(1e5, 5e5, 1e6)

# Simuler un échantillon de m simulations de la log log-normale
# avec les paramètres estimés en a)
simul <- function(x) rlnorm(x, meanlog = mu, sdlog = sigma)
simulation <- sapply(1:3, function(i) simul(m[i]))

# Approximer la prime STOP-LOSS ayant un déductible de 2000 par simulation
approximation <- sapply(1:3, function(x)
  mean(sapply(1:m[x], function(i)
    max(0, simulation[[x]][i] - 2000))))

approx <- data.frame(m, approximation)
# Présenter les valeurs approximées de la prime STOP-LOSS ayant un déductible de 2000
library(xtable)
options(xtable.comment = FALSE)

```

```
xtable(approx, caption = "Valeurs approximées par simulations de la prime STOP-LOSS ayant un déductible",
       align = c("c", "c", "c"),
       digits = c(0, 0, 4))
```

## Question 2

### a) Estimation des paramètres

```
# Code SAS permettant d'estimer les paramètres de la loi log-normale
# par la méthode du maximum de vraisemblance
data donnees;
input lb ub;
datalines;
0.00001 250
0.00001 250
0.00001 250
250 500
250 500
250 500
250 500
500 750
500 750
500 750
500 750
500 750
750 1000
750 1000
750 1000
750 1000
750 1000
1000 1250
1000 1250
1000 1250
1000 1250
1250 1500
1250 1500
1250 1500
1500 2000
1500 2000
1500 2000
2000 2500
2000 2500
2000 2500
2500 3000
2500 3000
3000 5000
3000 5000
;
run;

proc lifereg data=donnees;
```

```
Model (lb,ub)= /covb dist=lnormal;  
run;
```