# Mathématique actuarielles IARD I
# Travail pratique 1

*Nicholas Langevin*
*Alexandre Turquotte*

*2018-10-26*

# Question 1

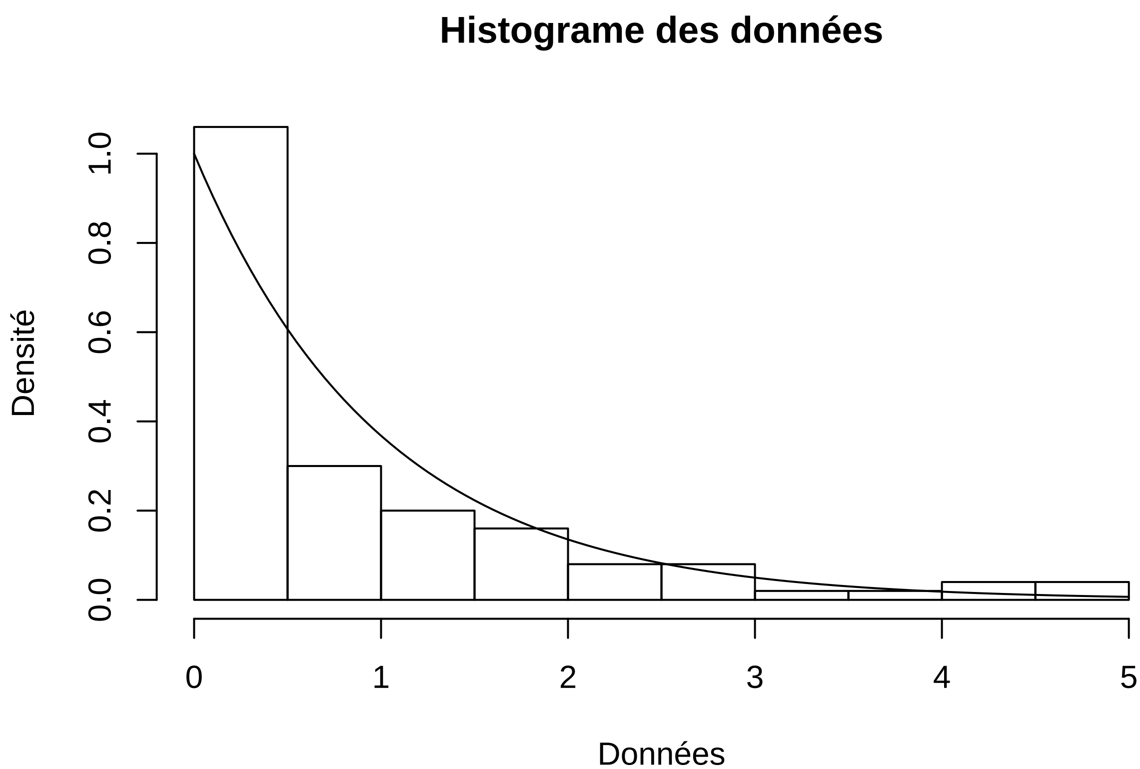
**a) Estimation du coéficient d'asymétrie**

```r
data <-  rexp(100, 1)

coef_asymetrie <- function(x){
    mu <- mean(x)
    sd <- sd(x)
    mean((x - mu)^3) / sd^3
}

estimateur_coef_asymetrie <- coef_asymetrie(data)

hist(data, probability = TRUE,
     main = "Histograme des données",
     ylab = "Densité",
     xlab = "Données");curve(dexp(x,1), add = TRUE)
```




On apperçoit à l'aide de l'histograme que la masse de densité est concentré à gauche et la queue de la distribution va vers la droite. On s'attend donc à avoir un coéficient d'asymétrie possitif. En effet, le coéficient d'asymétrie estimé empiriquement est de 1.808146.

### b) Interval de confiance pour le coéficient d'asymétrie

```r
teta <- mean(data)
echantillion <- lapply(1:50, function(i) rexp(50, teta))
coef_asymetrie_simul <- sapply(1:50, function(i) coef_asymetrie(echantillion[[i]]) )

mu_y <- mean(coef_asymetrie_simul)
variance_coef_asymetrie <- sum((coef_asymetrie_simul - mu_y)^2)

IC_y <- cbind(estimateur_coef_asymetrie - qnorm(0.975) * sqrt(variance_coef_asymetrie),
              estimateur_coef_asymetrie + qnorm(0.975) * sqrt(variance_coef_asymetrie))
```

Avec la méthode 'bootstrap', on obtient une variances estimé pour le coéficient d'asymétrie de 25.1297908, ce qui nous permet d'obtenir l'interval de confiance suivant:

$$[-8.0170795, 11.6333715]$$

### c) Coeficient d'asymétrie théorique

Les moments de la loi expodentiel sont donnés par:

$$\begin{aligned} E[x] &= M_x'(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\theta}{(\theta-t)^B}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\theta} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E[x^2] &= M_x''(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{(\theta-t)^2}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{-2\theta}{(\theta-t)^3}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{2}{\theta^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E[x^3] &= M_x'''(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{-2\theta}{(\theta-t)^3}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{6\theta}{(\theta-t)^4}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{6}{\theta^3} \end{aligned}$$

Ainsi, le coeficient d'asymétrie théorique est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma &= E\left[\frac{(x-\mu)^3}{\sigma^3}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma^3}\left(E[x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3]\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^3}\left(E[x^3] - 3\mu E[x^2] + 3\mu^2 E[x] - \mu^3\right) \\ &= \theta^3\left[\frac{6}{\theta^3} - 3\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{2}{\theta^2}\right) + 3\left(\frac{1}{\theta}\right)^3 - \left(\frac{1}{\theta}\right)^3\right] \\ &= \theta^3\left[\frac{6}{\theta^3} - \frac{6}{\theta^3} + \frac{2}{\theta^3}\right] \\ &= 6 - 6 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

## Question 2

```r
plot(ecdf(data))
```