数据科学入门1.6：简单时间序列预测与总结

Introduction to Data Science Part1.6: Time Series and Sumary

时间序列与ARIMA模型

刚才我们都是用几个independent variable x来与的dependent variable y。x和y都属于一次观测。如果我们只有一个变量就是y本身，然后不停的一次接一次的观测y，得到一个序列，然后我们想要预测未来的y值怎么玩呢？例如我们有一支股票他几个月以来每一天的收盘价，我们想预测明天的股票价格。

首先我们定义一下这个模型。对于一个随机事件，我们每个一段时间观测一次，或者每隔一段时间按顺序发生的一个随机事件，我们叫他随机序列。对于第t次观测值，我叫做 y_t ，前一次就叫做 y_{t-1} ，前一次的前一次叫做 y_{t-2} ，那么 y_{t-k} 能够理解了吧。

我们首先搞个简单的模型叫线性自回归模型（auto-regressive model）

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{k} \beta_i * y_{t-i} + \epsilon$$

这个能看懂吧，就是下一个y的观测值=之前k次的观测值的线性组合+上一个随机的误差。这个模型你想想你用我们之前学的知识可以做吧。这个就是表现了未来的值，和历史值有关。

ok我们现在学一个更加复杂也是实际中用的更多的一个模型叫做ARIMA（auto-regeressive integrated moving average）。我这不是数学、也不是统计学课，我不将太复杂，但是我觉得基本的远离还是要熟悉一下：

一个ARIMA模型的表达式是(我移动了一下你们看着简单点)：

$$y_t^d = c + \sum_{i=1}^{p} \beta_i L^i y_t^d + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i \epsilon_t$$

先讲几个算子：

1. lag算子：超简单就是 $L^i y_t = y_{t-i}$
2. d差分算子：y_t^d y的d阶差分，d=1是 就是 $y_t - y_{t-1}$，d是2的时候就是 $(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-1})$，简单吧。

I是integrated的意思，就是这个模型是加起来用的，他预测的是y的差分也就是y的变化量，并不直接是y。为什么这么做呢，他是为了让模型不受trend和seasonal分量的印象。trend就是数据在时间上有个趋势，例如房间年年涨，这种。seasonal就是周期新的分量，例如每年夏天电费都素会比其他季节高。去掉了他们的影响，我们的模型才不受时间的影响，不会说上半年能用下半年就不能用了。这个就叫做模型是Stationary的。

前面和y有关的就是各个说过的AR模型。

那MA是什么意思呢？Moving Average的意思就是后面$\left(1+\sum_{i=1}^{q}\theta_i L^i\right)\epsilon_t$这一项代表一个moving average模型预测与之前观测数据误差的一个线性组合。它代表了一个未知扰动量对未来值得影响。

这个ARIMA模型实际上最早是来自于金融领域，说白了就是为了预测股票价格的。我们再看看AR，他表示的就是前几天得行情与明天行情得关系，前几天的行情，是我们可以观测得量。同时后面MA得部分，代表一个扰动，原文叫做“shock”，这一部分是我们无法直接观测的，只能通过他对y得印象来推测。例如突然发证了地震，或者病毒疫情导致股票下跌，在ARIMA模型模型中，是没有地震和疫情这个变量输入的，但是他们的影响在MA那一部分通过前几次的误差得线性组合被考虑了。

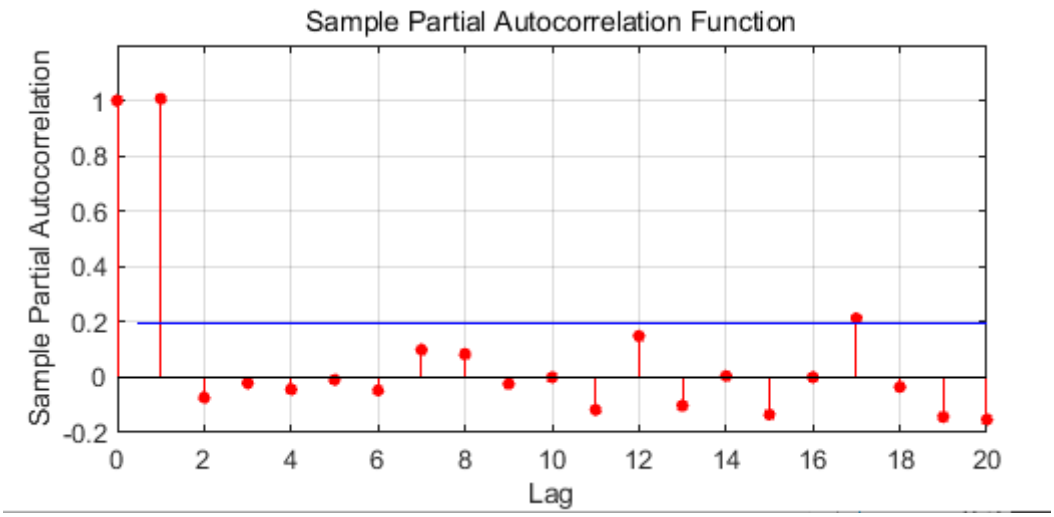
为什么搞得这么纠结，当然是应为这样一般情况下更准一些，一本模型越复杂拟合的越好，你要记住的是p，d，q这3个超参数(我们后面会讲什么是超参数)。p是AR部分阶数，就是和过去几次观测有关，q是MA部分的阶数，就是和过去几次扰动有关，d是差分阶数，我们一般=1就可以了。

好的我们做个例子，如我们

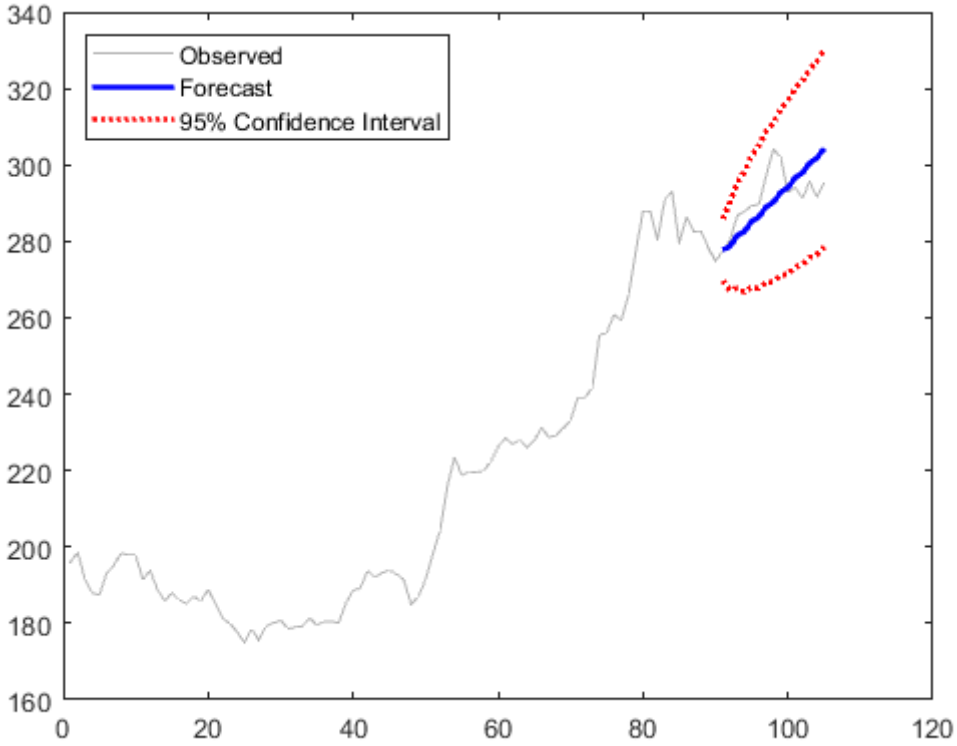
> exp7 这里给出谷歌5个月的股价，我们来预测看看。

```
%%fit the model
parcorr(exp7.price)
Mdl = arima(2,1,2);
model=estimate(Mdl,exp7.price(1:90))

%% forcast
[pred,ymse]=forecast(model,15,exp7.price(1:90))

% just plot
h1 = plot(exp7.price,'Color',[.7,.7,.7])
hold on
h2 = plot(91:105,pred,'b','LineWidth',2)
h3= plot(91:105,pred + 1.96*sqrt(ymse),'r:',...
                'LineWidth',2);
plot(91:105,pred - 1.96*sqrt(ymse),'r:',...
                'LineWidth',2);

legend([h1 h2 h3],'Observed','Forecast',...
                '95% Confidence Interval','Location','NorthWest');
hold off
```

首先我们先用parcorr这个函数看看，当前股价和过去几天的股价有没有什么关系，可以看到t-1和体关系很明显，后面的就不是很明显了，所以我们模型的p可以选1-2就够了，d一般都是选1，q的话和p选差不多一本也不错，其实p可以通过调用autocorr看在哪里cutoff来判断，不过这个数据不是很好参考意义不大。



然后我们调用estimate来fit我们的模型。我这里要吐个槽，matlab不同工具箱，差不多的东西风格差异很大，这好蠢。我们用1-90填的数据来预测，再用forecast来预测，我们直接预测之后15天的股价走势。看看预测的还是挺准的。这个forecast返回两个东西，一个是预测值，实际上是一个期望值，还有一个是这个期望值对应的variance，然后你可以通过*1.96得到95%的置信区间，就是这个模型给出的分布，95%的概率在这+-1.96 * variance范围内。



VARM 模型 Vector Autoregression Models

各个讲的那个ARIMA模型，它适用的时单个变量的数据，有时候一个时间序列它包含了多个变脸怎么办呢?

例如下面这个例子:

> exp8: 他给出了一个风力发电厂几年来每10分钟一次的数据，包括风速风向、理论课发电量和实际发电量，4个变量。假设我们想预测实际发电量，实际上另外3个变量对他也是有用的，实际上预测某一个变量，其他的可能都用得上。其实和之前的auto regression模型基本上没区别是不过换成了向量，协议这种叫Vector auto regression（VAR），公式和之前是一样的，就是认为Y，和参数都是向量就行:

$$Y = C + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{B}_i * L^i Y + \mathrm{E}$$

我们再matlab里面用下免得代码建立一个VAR模型

```
model=varm(4,lag)
```

当我们fit了这个模型以后，会发现它给除了下面的参数:

```
model =
  varm - 属性:

      Description: "4-Dimensional VAR(20) Model"
      SeriesNames: "Y1"  "Y2"  "Y3"  ... and 1 more
        NumSeries: 4
                P: 20
         Constant: [4×1 vector of NaNs]
               AR: {4×4 matrices of NaNs} at lags [1 2 3 ... and 17 more]
            Trend: [4×1 vector of zeros]
             Beta: [4×0 matrix]
       Covariance: [4×4 matrix of NaNs]
```

我们的公式就是：

$$\hat{Y} = C + \sum_{i=1}^{p} AR_i * L^i Y + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{B}_i * L^i X + \delta * T$$

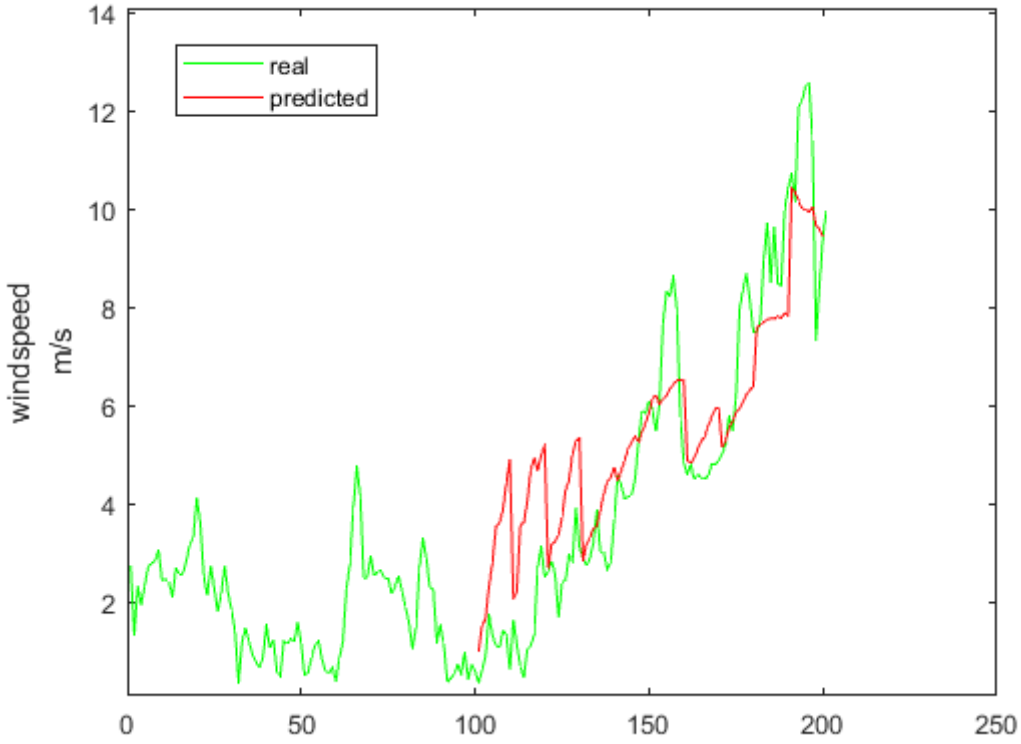
C就是Constant，AR时几个n*n的矩阵，n就是Y的元素个数，B和AR差不多，他是X的参数，X时外因变量，就是会影响Y但是我们不预测他，T时一个trend，是一个趋
势，就是一段平均值。

更多的可以参考：
https://www.mathworks.com/help/econ/model-specification-structures.html#bswxr8u-19

https://www.mathworks.com/help/econ/introduction-to-vector-autoregressive-var-models.html#bswxr8u-2

这里给大家不吱个课堂作业，就是上面这个立体我没有给出完整的解答，大家可以尝试做一下，预测效果有限，大家可以尝试不同的玩法，看看谁的准。有一个提示，就是VAR这种模型是线性的，属于很简单的模型，这里提供的数据是远远超过了这个模型需要的。

下面是我预测的风速：



总结

ok各种简单的回归我们都学完了总结一下：

1. 首先如果可以把数据plot出来看看是什么规律，这个叫做exploratory data analysis，探索新分析
2. 选取是特征并作为independent variables，那些是目标dependent variables
3. 然后根据前面探索的结果选择采用什么样的模型公式，一般情况下，简单的线性回归，多项式就可以了，如果你想不出来更好的就用这个原则。
4. 然后调用fit函数fit你的样本，得到一个模型。
5. 看看模型的adjrsqure，plot出来残差图，没啥问题的话就ok了。
6. 用模型的predict方法来预测吧。