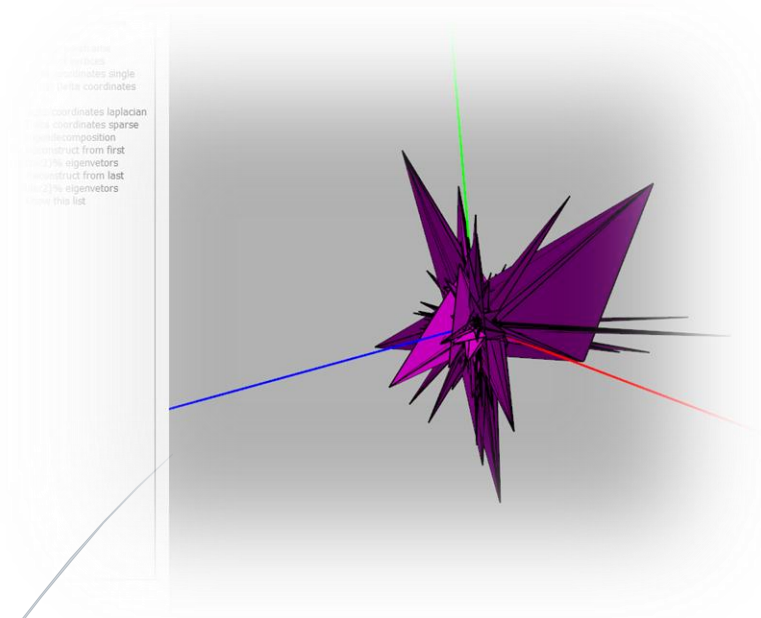


2025

# 3D ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ & ΟΡΑΣΗ

## 6<sup>η</sup> Εργαστηριακή Άσκηση



## Πίνακας περιεχομένων

Ασκήσεις 0 και 1:.....	2
Ερώτημα c.....	2
Ερώτημα d.....	3
Άσκηση 2 <sup>η</sup> : .....	4
Ερώτημα f .....	4
Άσκηση 3 <sup>η</sup> : .....	5
Άσκηση 4 <sup>η</sup> : .....	6
Ερώτημα c.....	7
Άσκηση 5 <sup>η</sup> : .....	8

## Ασκήσεις 0 και 1:

Υλοποιήστε τη δυνατότητα επιλογής κάποιας κορυφής του μοντέλου χρησιμοποιώντας το ποντίκι.

Υπολογίστε τις διαφορικές συντεταγμένες μίας κορυφής του μοντέλου.

- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **find\_adjacent\_vertices**, η οποία θα εντοπίζει τα γειτονικές κορυφές μίας κορυφής του μοντέλου.
- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **delta\_coordinates\_single**, η οποία θα υπολογίζει τις διαφορικές συντεταγμένες τις δοθείσας κορυφής του μοντέλου.

Υπόδειξη: Για τον υπολογισμό των διαφορικών συντεταγμένων της  $i$ -κορυφής, αξιοποιήστε τον τύπο:

$$\delta_i = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j,$$

όπου  $N(i)$ , το σύνολο των γειτονικών κορυφών της κορυφής  $i$  και  $d_i$ , ο πληθάριθμος του συνόλου  $N(i)$  (δηλαδή, το πλήθος των γειτονικών κορυφών).

## Απάντηση:

✓ Τα παραπάνω ερωτήματα ολοκληρώθηκαν κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου!

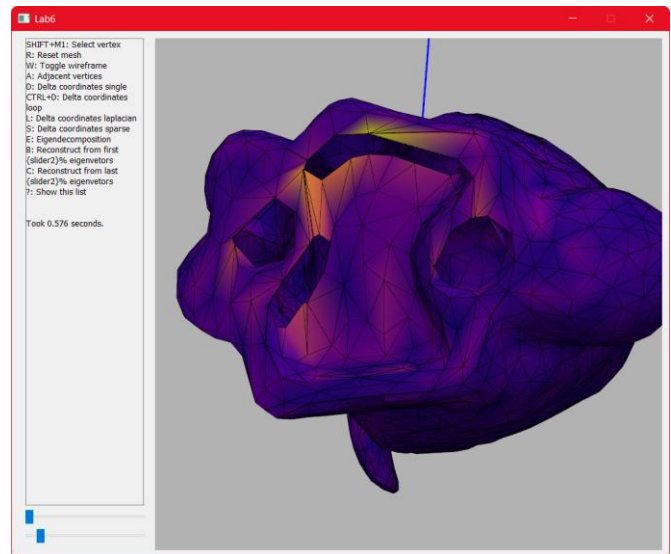
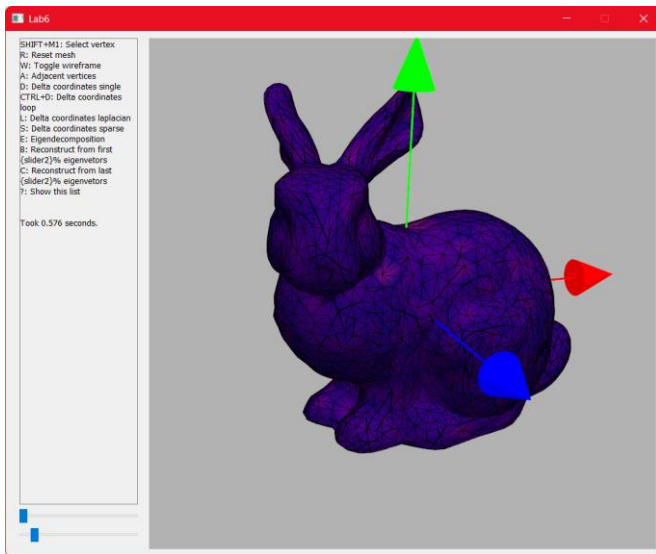
## Ερώτημα c

Εκτελέστε επαναληπτικά τη συνάρτηση **delta\_coordinates\_single** για κάθε κορυφή του μοντέλου. Τι παρατηρείτε;

- Εκτελώντας επαναληπτικά τη **delta\_coordinates\_single** για κάθε κορυφή (Ctrl+D), παρατηρούμε ότι στις ομαλές περιοχές του μοντέλου οι διαφορικές συντεταγμένες είναι σχεδόν μηδενικές (ψυχρά χρώματα), ενώ σε περιοχές με έντονες μεταβολές οι διαφορικές συντεταγμένες γίνονται μεγαλύτερες (θερμά χρώματα).

## Ερώτημα d

Δείξτε το μέτρο των διαφορικών συντεταγμένων επάνω στο μοντέλο. Είναι σωστό το αποτέλεσμα;



- Προβάλλοντας το μέτρο των διαφορικών συντεταγμένων πάνω στο μοντέλο, παρατηρούμε ότι στις **ομαλές περιοχές το μέτρο είναι πολύ μικρό (ψυχρά χρώματα)**, ενώ **σε περιοχές με έντονες τοπικές μεταβολές της γεωμετρίας το μέτρο είναι μεγαλύτερο (θερμά χρώματα)**. Το αποτέλεσμα είναι σωστό, καθώς απεικονίζει την αναμενόμενη συμπεριφορά των διαφορικών συντεταγμένων!

## Άσκηση 2<sup>η</sup>:

Υπολογίστε τις διαφορικές συντεταγμένες ολόκληρου του μοντέλου.

- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **adjacency**, η οποία θα υπολογίζει τον πίνακα γειτνίασης των κορυφών του μοντέλου.
- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **degree**, η οποία θα υπολογίζει τον πίνακα βαθμού των κορυφών του μοντέλου.
- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **diagonal\_inverse**, η οποία θα υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα ενός διαγώνιου πίνακα.
- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **random\_walk\_laplacian**, η οποία θα υπολογίζει τη “random walk” κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα Laplacian.

Υπόδειξη: Η “random walk” κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα Laplacian μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου:

$$\mathbf{L}^{RW} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A},$$

όπου **A** ο πίνακας γειτνίασης των κορυφών, **D** ο πίνακας βαθμού των κορυφών και **I** ο μοναδιαίος πίνακας μεγέθους όσο το πλήθος των κορυφών.

- Υλοποιήστε τη συνάρτηση **delta\_coordinates**, η οποία θα υπολογίζει τις διαφορικές συντεταγμένες όλου του μοντέλου με τη βοήθεια της συνάρτησης **random\_walk\_laplacian**.

## Απάντηση:

✓ Τα παραπάνω ερωτήματα ολοκληρώθηκαν κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου.

## Ερώτημα f

Προσπαθήστε να εκτελέσετε τη συνάρτηση **delta\_coordinates** και να παρουσιάσετε τις διαφορικές συντεταγμένες ενός περίπλοκου μοντέλου. Τι παρατηρείτε;

- Η εκτέλεση της **delta\_coordinates** απέτυχε λόγω περιορισμένης μνήμης στο σύστημα μου [4GB] σε περίπλοκο μοντέλο (original Stanford bunny), εξαιτίας της χρήσης «πυκνών/ολόκληρων» πινάκων (δέσμευση χώρου ακόμα και για «κενά» κελιά του πίνακα)!

Συγκεκριμένα:

```
numpy.core._exceptions._ArrayMemoryError: Unable to allocate 9.04 GiB for an array
with shape (34834, 34834) and data type float64
```

### Άσκηση 3<sup>η</sup>:

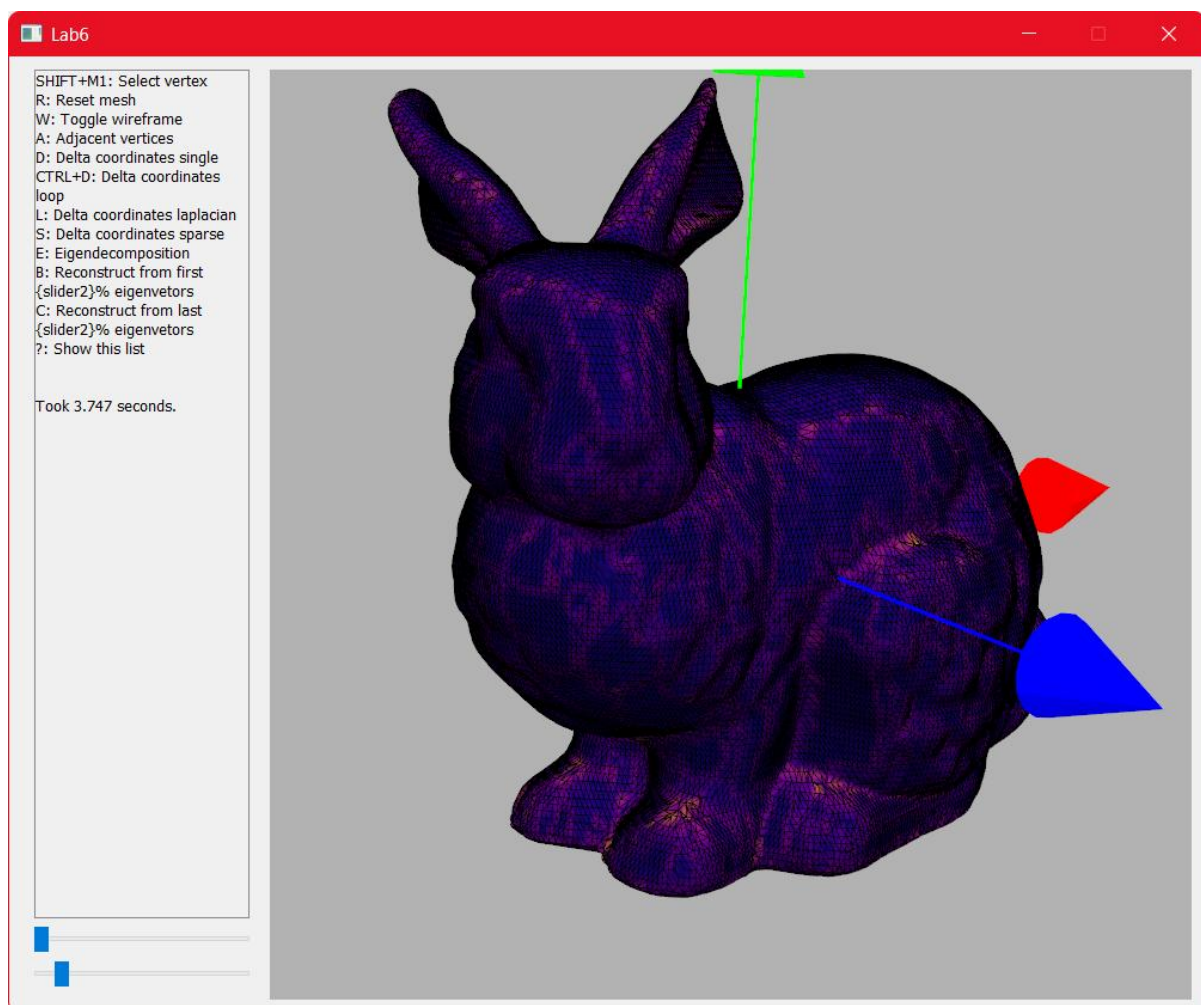
Βελτιώστε τον υπολογισμό των διαφορικών συντεταγμένων του μοντέλου.

- Χρησιμοποιήστε δομές αραιών πινάκων για να υλοποιήσετε τις συναρτήσεις **adjacency\_sparse**, **degree\_sparse**, **diagonal\_inverse\_sparse**, **random\_walk\_laplacian\_sparse** και **delta\_coordinates\_sparse**.
- Προσπαθήστε να εκτελέσετε τη συνάρτηση **delta\_coordinates\_sparse** και να παρουσιάσετε τις διαφορικές συντεταγμένες ενός περίπλοκου μοντέλου, όπως στο ερώτημα 3.f. Τι άλλαξε; Πώς το εξηγείτε;

### Απάντηση:

a. Υλοποιήθηκαν κατά την διάρκεια του εργαστηρίου.

b. Εκτελώντας τη συνάρτηση **delta\_coordinates\_sparse**, στο ίδιο περίπλοκο μοντέλο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε και στο ερώτημα 2.f, **παρατηρούμε ότι η διαδικασία ολοκληρώθηκε επιτυχώς χωρίς πρόβλημα μνήμης**, σε αντίθεση με τη χρήση της **delta\_coordinates** που απέτυχε. Η αλλαγή αυτή οφείλεται στο ότι **οι δομές sparse πινάκων αποθηκεύουν μόνο τα μη μηδενικά στοιχεία, μειώνοντας δραστικά τις απαιτήσεις μνήμης και επιτρέποντας τον αποδοτικό υπολογισμό ακόμη και σε μεγάλα και πολύπλοκα μοντέλα!**





## Άσκηση 4<sup>η</sup>:

Ερευνήστε τις ιδιότητες του Laplacian πίνακα.

- a. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **graph\_laplacian\_sparse**, η οποία θα υπολογίζει τον Laplacian πίνακα στην τυπική του μορφή (γνωστή και ως graph Laplacian ή topological Laplacian) με τη βοήθεια δομών αραιών πινάκων.

Υπόδειξη: Η τυπική μορφή του πίνακα Laplacian μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A},$$

όπου **A** ο πίνακας γειτνίασης των κορυφών και **D** ο πίνακας βαθμού των κορυφών.

- b. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Laplacian πίνακα. Τυπώστε τις ιδιοτιμές και εμφανίστε τα ιδιοδιανύσματα επάνω στο μοντέλο. Τι παρατηρείτε όσον αφορά στις ιδιότητες τους; Προσπαθήστε να το αιτιολογήσετε.

Υπόδειξη: Ο Laplacian πίνακας είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος (μπορείτε να το αποδείξετε;). Τι σημαίνει αυτό για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του;

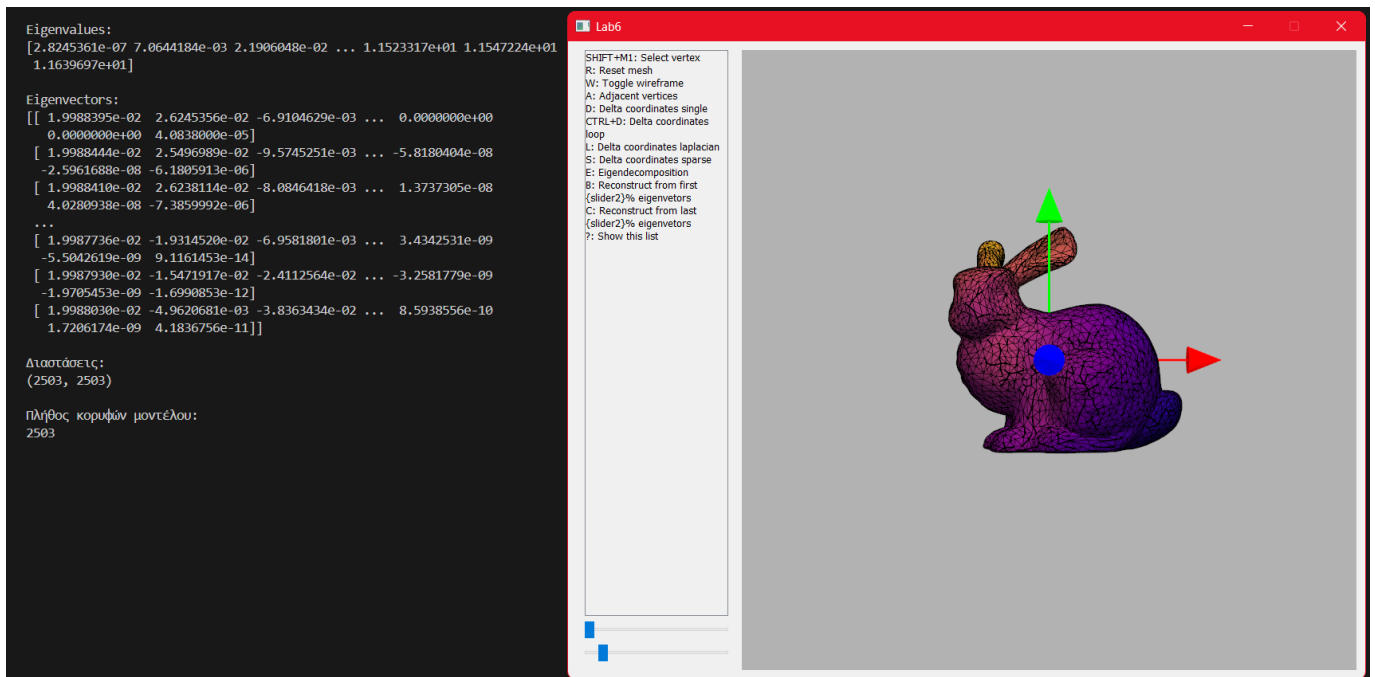
## Απάντηση:

- a. Ολοκληρώθηκε κατά την διάρκεια του εργαστηρίου.

b. Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Laplacian πίνακα, παρατηρούμε ότι **οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί και μη αρνητικοί αριθμοί**, όπως αναμενόταν. Αυτό συμβαίνει επειδή **ο Laplacian είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος!** Τα ιδιοδιανύσματα σχηματίζουν μεταξύ τους μία ορθογώνια βάση, λόγω της συμμετρίας του πίνακα. **Τα ιδιοδιανύσματα απεικονίζουν χαρακτηριστικές διακυμάνσεις της γεωμετρίας του μοντέλου**, με τα χαμηλότερης ιδιοτιμής ιδιοδιανύσματα να εκφράζουν τις πιο ομαλές μεταβολές της επιφάνειας [DC]!

<http://cs-www.cs.yale.edu/homes/spielman/sagt/sagt.pdf> [Σελ. 30/400 - Fact 1.3.3.]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Laplacian\\_matrix#Properties](https://en.wikipedia.org/wiki/Laplacian_matrix#Properties) [Property 1 & 2]



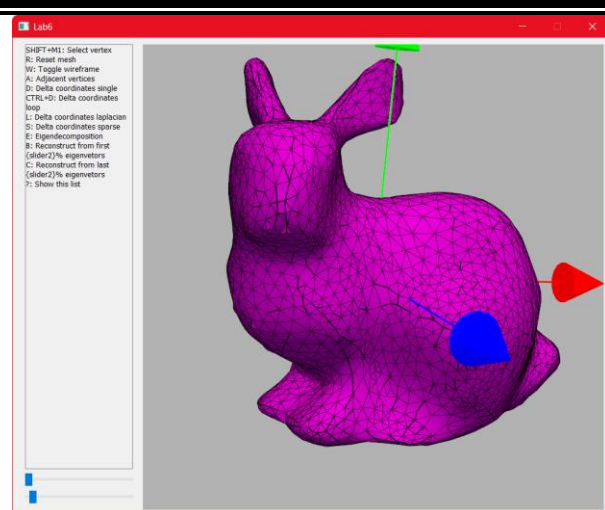
## Ερώτημα c

Ανακατασκευάστε το μοντέλο χρησιμοποιώντας ένα μικρό ποσοστό των ιδιοδιανυσμάτων. Δοκιμάστε να χρησιμοποιήσετε αρχικά μόνο τα πρώτα ιδιοδιανύσματα και έπειτα μόνο τα τελευταία. Τι παρατηρείτε; Συμφωνεί με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε στο προηγούμενο ερώτημα;

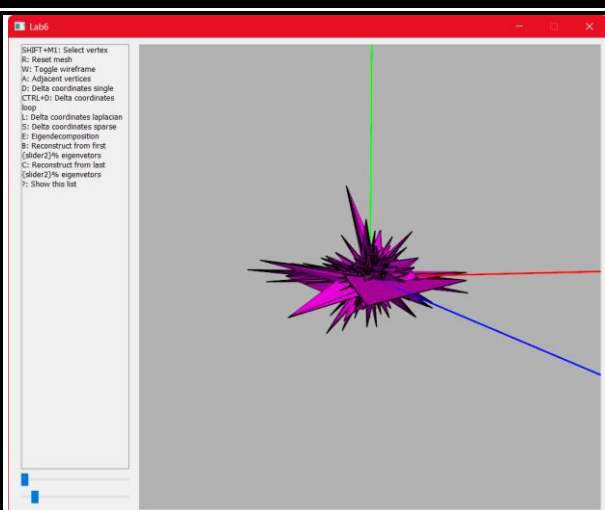
- Ανακατασκευάζοντας το μοντέλο **χρησιμοποιώντας μόνο τα πρώτα ιδιοδιανύσματα** (δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα με τις μικρότερες ιδιοτιμές), **παρατηρούμε ότι το αντικείμενο παραμένει λείο και διατηρεί τη γενική του μορφή, αν και χάνει κάποιες λεπτομέρειες.**

Αντίθετα, **χρησιμοποιώντας μόνο τα τελευταία ιδιοδιανύσματα** (δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα με τις μεγαλύτερες ιδιοτιμές), **το μοντέλο εμφανίζει θόρυβο (παίρνει την μορφή μουντζούρας) και απότομες μεταβολές. Αυτό συμφωνεί απόλυτα με τα συμπεράσματα του προηγούμενου ερωτήματος!**

**Μόνο τα πρώτα ιδιοδιανύσματα (Slider 2)**



**Μόνο τα τελευταία ιδιοδιανύσματα (Slider 2)**





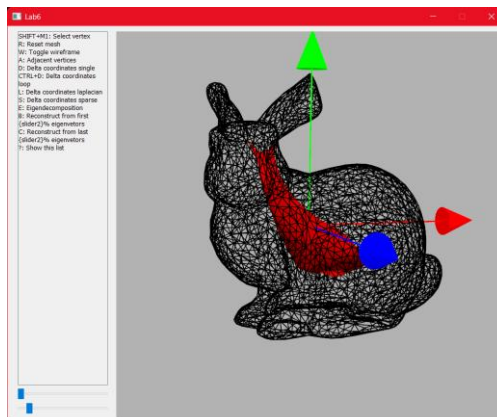
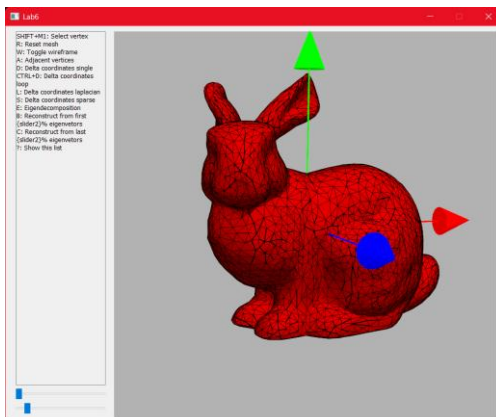
## Άσκηση 5<sup>η</sup>:

Χρησιμοποιήστε τις διαφορικές συντεταγμένες για να εφαρμόσετε smoothing στο μοντέλο.

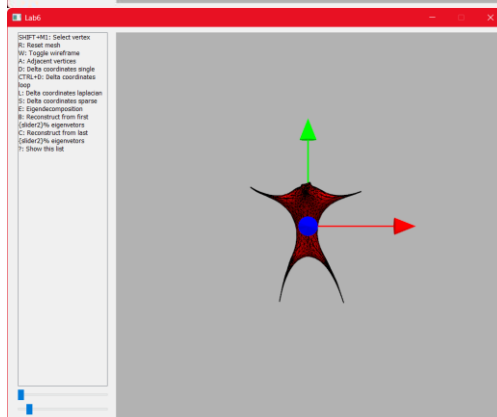
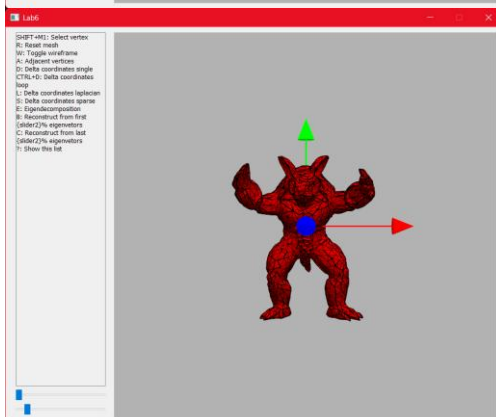
- Εφαρμόστε laplacian smoothing σε μοντέλα της επιλογής σας, και δείξτε διάφορα αποτελέσματα για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων και τιμών της παραμέτρου  $\lambda$ .
- Εφαρμόστε taubin smoothing για να μετριάσετε το πρόβλημα του shrinkage που έπεται του laplacian smoothing.

### Απάντηση:

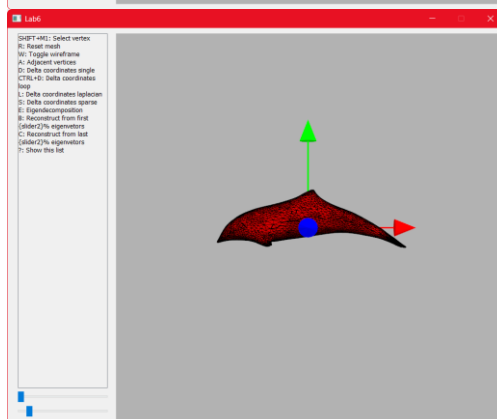
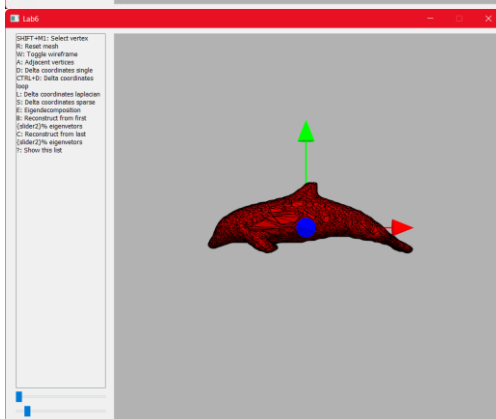
a.



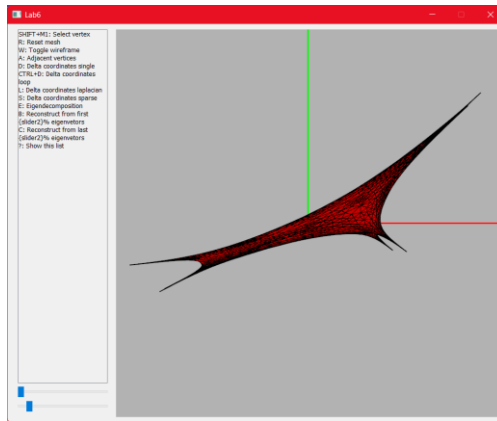
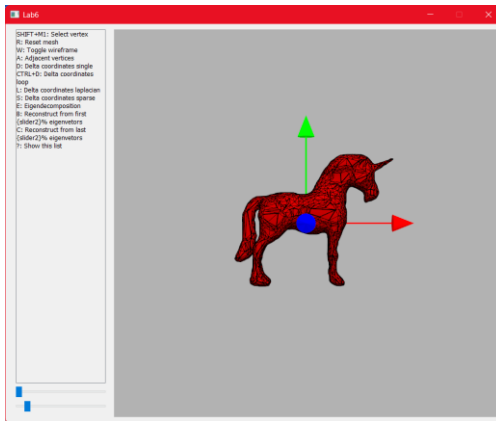
Iterations = 3000  
 $\lambda = 0.1$



Iterations = 1000  
 $\lambda = 0.1$



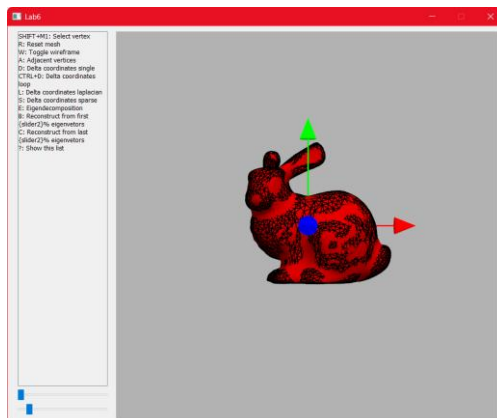
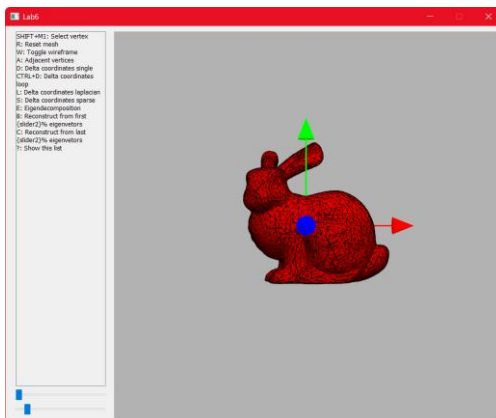
Iterations = 100  
 $\lambda = 0.5$



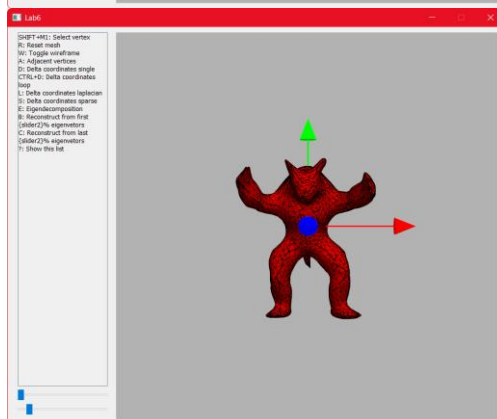
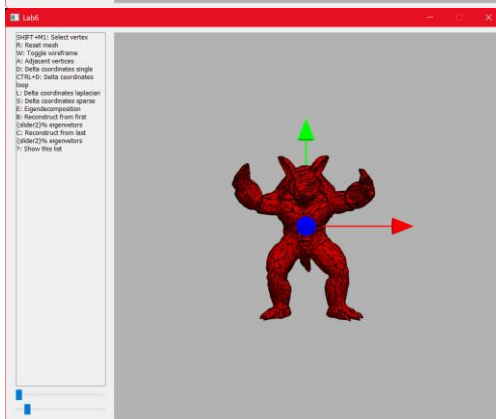
Iterations = 3000  
 $\lambda = 0.5$

**Παρατηρούμε το φαινόμενο shrinkage, καθώς κάθε κορυφή κινείται συνεχώς προς τον μέσο όρο των γειτονικών κορυφών της. Η ένταση του φαινομένου εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων και την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ : όσο μεγαλύτερες είναι αυτές οι τιμές, τόσο πιο έντονη γίνεται η συρρίκνωση του μοντέλου!**

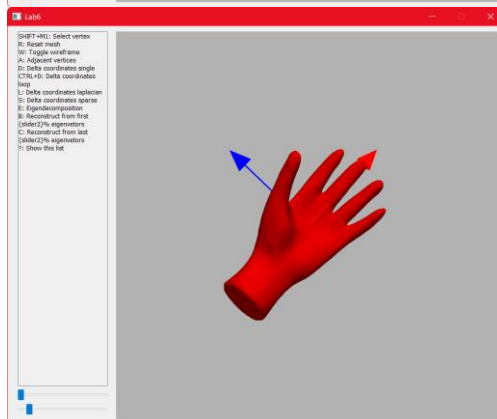
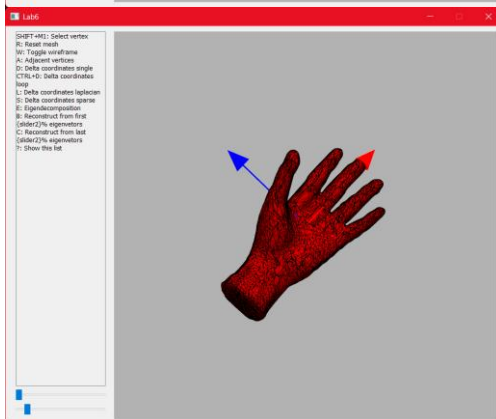
b.



Iterations = 3000  
 $\lambda = +0.1$   
 $\mu = -0.1$



Iterations = 1000  
 $\lambda = +0.1$   
 $\mu = -0.1$



Iterations = 100  
 $\lambda = +0.5$   
 $\mu = -0.5$