



3Δ Υπολογιστική Γεωμετρία και Όραση

Εργαστηριακή Άσκηση 6

Οδηγίες:

- Αναρτήστε στο eclass ένα αρχείο zip το οποίο θα περιέχει τον κώδικά σας και μια αναφορά (κατά προτίμηση σε pdf format).
- Η αναφορά πρέπει να είναι οπωσδήποτε μία ενιαία για όλη την άσκηση. Στην αναφορά βάλτε screen captures με τις εικόνες του προγράμματός σας, τυχόν επεξηγήσεις και τις απαντήσεις σας στα επιμέρους ερωτήματα. Αποφύγετε την παράθεση κώδικα στην αναφορά!
- Συμπεριλάβετε όσα .py αρχεία είναι απαραίτητα για την εκτέλεση του προγράμματός σας (δηλαδή και το φάκελο "vnrpywork", όμως οι φάκελοι "__pycache__" δε χρειάζονται).

Άσκηση:

0. Υλοποιήστε τη δυνατότητα επιλογής κάποιας κορυφής του μοντέλου χρησιμοποιώντας το ποντίκι.
1. Υπολογίστε τις διαφορικές συντεταγμένες μίας κορυφής του μοντέλου.
 - a. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **find_adjacent_vertices**, η οποία θα εντοπίζει τα γειτονικές κορυφές μίας κορυφής του μοντέλου.
 - b. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **delta_coordinates_single**, η οποία θα υπολογίζει τις διαφορικές συντεταγμένες τις δοθείσας κορυφής του μοντέλου.

Υπόδειξη: Για τον υπολογισμό των διαφορικών συντεταγμένων της i -κορυφής, αξιοποιήστε τον τύπο:

$$\delta_i = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j,$$

όπου $N(i)$, το σύνολο των γειτονικών κορυφών της κορυφής i και d_i , ο πληθάριθμος του συνόλου $N(i)$ (δηλαδή, το πλήθος των γειτονικών κορυφών).

- c. Εκτελέστε επαναληπτικά τη συνάρτηση **delta_coordinates_single** για κάθε κορυφή του μοντέλου. Τι παρατηρείτε;
 - d. Δείξτε το μέτρο των διαφορικών συντεταγμένων επάνω στο μοντέλο. Είναι σωστό το αποτέλεσμα;
2. Υπολογίστε τις διαφορικές συντεταγμένες ολόκληρου του μοντέλου.
 - a. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **adjacency**, η οποία θα υπολογίζει τον πίνακα γειτνίασης των κορυφών του μοντέλου.

- b. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **degree**, η οποία θα υπολογίζει τον πίνακα βαθμού των κορυφών του μοντέλου.
- c. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **diagonal_inverse**, η οποία θα υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα ενός διαγώνιου πίνακα.
- d. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **random_walk_laplacian**, η οποία θα υπολογίζει τη “random walk” κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα Laplacian.

Υπόδειξη: Η “random walk” κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα Laplacian μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου:

$$\mathbf{L}^{RW} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A},$$

όπου \mathbf{A} ο πίνακας γειτνίασης των κορυφών, \mathbf{D} ο πίνακας βαθμού των κορυφών και \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας μεγέθους όσο το πλήθος των κορυφών.

- e. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **delta_coordinates**, η οποία θα υπολογίζει τις διαφορικές συντεταγμένες όλου του μοντέλου με τη βοήθεια της συνάρτησης **random_walk_laplacian**.
 - f. Προσπαθήστε να εκτελέσετε τη συνάρτηση **delta_coordinates** και να παρουσιάσετε τις διαφορικές συντεταγμένες ενός περίπλοκου μοντέλου. Τι παρατηρείτε;
3. Βελτιώστε τον υπολογισμό των διαφορικών συντεταγμένων του μοντέλου.
- a. Χρησιμοποιήστε δομές αραιών πινάκων για να υλοποιήσετε τις συναρτήσεις **adjacency_sparse**, **degree_sparse**, **diagonal_inverse_sparse**, **random_walk_laplacian_sparse** και **delta_coordinates_sparse**.
 - b. Προσπαθήστε να εκτελέσετε τη συνάρτηση **delta_coordinates_sparse** και να παρουσιάσετε τις διαφορικές συντεταγμένες ενός περίπλοκου μοντέλου, όπως στο ερώτημα 3.f. Τι άλλαξε; Πώς το εξηγείτε;
4. Ερευνήστε τις ιδιότητες του Laplacian πίνακα.
- a. Υλοποιήστε τη συνάρτηση **graph_laplacian_sparse**, η οποία θα υπολογίζει τον Laplacian πίνακα στην τυπική του μορφή (γνωστή και ως graph Laplacian ή topological Laplacian) με τη βοήθεια δομών αραιών πινάκων.
- Υπόδειξη: Η τυπική μορφή του πίνακα Laplacian μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A},$$

όπου \mathbf{A} ο πίνακας γειτνίασης των κορυφών και \mathbf{D} ο πίνακας βαθμού των κορυφών.

- b. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Laplacian πίνακα. Τυπώστε τις ιδιοτιμές και εμφανίστε τα ιδιοδιανύσματα επάνω στο μοντέλο. Τι παρατηρείτε όσον αφορά στις ιδιότητες τους; Προσπαθήστε να το αιτιολογήσετε.
- Υπόδειξη: Ο Laplacian πίνακας είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος (μπορείτε να το αποδείξετε;). Τι σημαίνει αυτό για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του;

- c. Ανακατασκευάστε το μοντέλο χρησιμοποιώντας ένα μικρό ποσοστό των ιδιοδιανυσμάτων. Δοκιμάστε να χρησιμοποιήσετε αρχικά μόνο τα πρώτα ιδιοδιανύσματα και έπειτα μόνο τα τελευταία. Τι παρατηρείτε; Συμφωνεί με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε στο προηγούμενο ερώτημα;
- 5. Χρησιμοποιήστε τις διαφορικές συντεταγμένες για να εφαρμόσετε smoothing στο μοντέλο.
 - a. Εφαρμόστε laplacian smoothing σε μοντέλα της επιλογής σας, και δείξτε διάφορα αποτελέσματα για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων και τιμών της παραμέτρου λ .
 - b. Εφαρμόστε taubin smoothing για να μετριάσετε το πρόβλημα του shrinkage που έπεται του laplacian smoothing.

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε τις διαφάνειες του μαθήματος.