Математический Анализ | Лекция 11 | Производная и Дифференциал

Оглавление

Введение

На данной лекции мы продолжили изучение темы **производной и дифференциала** функции. Мы ввели понятие производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента, изучили дифференциал функции и его связь с производной. Рассмотрели основные правила дифференцирования, включая правило цепочки для композиции функций и производную обратной функции. Также мы изучили производные параметрически заданных функций.

Определение Производной

Производная функции в точке характеризует скорость изменения функции в этой точке.

Определение: Пусть функция f определена на промежутке (a, b), и $x_0 \in (a, b)$. Производной функции f в точке x_0 называется предел (если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

Геометрически производная функции в точке x_0 представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Если провести секущую через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, то при $\Delta x \to 0$ секущая стремится к касательной.

Пример 1: Вычислим производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} [2 + \Delta x] = 2. \end{aligned}$$

Дифференциал Функции

Дифференциалом функции называется главная линейная часть приращения функции.

Определение: Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если её приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно представить в виде:

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

где A — постоянное число, а $o(\Delta x)$ — бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с Δx.

Дифференциал функции в точке x_0 определяется как:

$$df = A\Delta x.$$

Связь дифференциала с производной

Теорема: Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда у неё существует конечная производная в этой точке, и при этом:

$$A = f'(x_0).$$

Доказательство:

1. **Необходимость:** Если f дифференцируема, то:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Делим на Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + 0 = f'(x_0).$$

2. **Достаточность:** Если существует $f'(x_0)$, то по определению предела:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \text{где } \alpha(\Delta x) \to 0.$$

Тогда:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Дифференцируемость и Непрерывность

Теорема о непрерывности дифференцируемой функции

Теорема: Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Из дифференцируемости:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

При $\Delta x \to 0$:

$$\Delta f \to 0.$$

Следовательно:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке x_0.

Замечание: Обратное неверно: из непрерывности функции не следует её дифференцируемость. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Односторонние производные

Определения:

- **Правосторонняя производная:**

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- **Левосторонняя производная:**

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема (критерий существования производной через односторонние производные):

Функция f имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют обе односторонние производные в этой точке и они равны:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Пример: Функция $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ имеет правостороннюю производную $f'_+(0) = 1$ и левостороннюю $f'_-(0) = -1$. Так как $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, функция не имеет производной в точке $x = 0$.

Основные Правила Дифференцирования

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0.

Производная суммы

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Производная произведения

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Производная частного

Если $g(x_0) \neq 0$, то:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Доказательства правил дифференцирования

Доказательство производной суммы

Рассмотрим приращение суммы:

$$\Delta(f+g) = [f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x)] - [f(x_0) + g(x_0)] = \Delta f + \Delta g.$$

Делим на Δx:

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Переходим к пределу:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Доказательство производной частного

Рассмотрим приращение частного:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Объединим дроби:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}.$$

Числитель преобразуем:

$$\begin{aligned}&[f(x_0)+\Delta f]g(x_0) - f(x_0)[g(x_0)+\Delta g]\\ &= f(x_0)g(x_0) + \Delta f g(x_0) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)\Delta g\\ &= \Delta f g(x_0) - f(x_0)\Delta g.\end{aligned}$$

Делим на Δx:

$$\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta f g(x_0) - f(x_0)\Delta g}{\Delta x \cdot g(x_0+\Delta x)g(x_0)}.$$

Переходим к пределу:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Производная Композиции Функций (Правило Цепочки)

Теорема (Правило цепочки):

Пусть функция f определена на промежутке (a, b), $f : (a, b) \to (c, d)$, и дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Пусть функция g определена на (c, d) и дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда композиция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, и справедливо:

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Доказательство правила цепочки

Рассмотрим приращение композиции:

$$\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0),$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Так как g дифференцируема в точке y_0:

$$\Delta g = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y).$$

Подставляем $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$:

$$\Delta h = g'(y_0)[f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] + o(\Delta y).$$

Замечаем, что $o(\Delta y) = o(\Delta x)$, так как $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда:

$$\Delta h = g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Делим на Δx и переходим к пределу:

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $h(x) = g(f(x))$ равен:

$$dh = g'(f(x))\,df = g'(f(x))f'(x)\,dx.$$

Производная Обратной Функции

Теорема:

Пусть функция f строго монотонна и дифференцируема в точке x_0, причём $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, и верно:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство теоремы о производной обратной функции

Рассмотрим приращения:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Из этого следует:

$$\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

Таким образом:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)} + o(1).$$

Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таблица Производных

1. **Производная константы:**

$$(C)' = 0.$$

2. **Производная степенной функции:**

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

3. **Производная экспоненты:**

$$(e^x)' = e^x.$$

4. **Производная логарифма:**

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

5. **Производная синуса и косинуса:**

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

6. **Производная тангенса и котангенса:**

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. **Производная арксинуса и арккосинуса:**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

8. **Производная арктангенса и арккотангенса:**

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\text{\textbackslash arccot}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Вывод производных некоторых функций

Производная синуса

Цель: Доказать, что $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство:

Рассмотрим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Производная арксинуса

Цель: Доказать, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство:

Пусть $y = \arcsin x$, тогда $x = \sin y$.

По теореме о производной обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, получаем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Параметрически Заданные Функции

Функции могут быть заданы параметрически, то есть с помощью параметра t:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пример: Окружность радиуса 1:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

В данном случае зависимость y от x не является функцией, так как одному значению x соответствуют два значения y.

Производная параметрически заданной функции

Теорема:

Если функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и $\phi'(t) \neq 0$, то производная y по x выражается как:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Доказательство теоремы о производной параметрически заданной функции

Рассмотрим зависимость y от x:

$$y = \psi(t), \quad x = \phi(t).$$

Так как ϕ строго монотонна (предполагаем для существования обратной функции), существует обратная функция $t = \phi^{-1}(x)$.

Тогда $y(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$.

Применяя правило цепочки:

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi^{-1})'(x).$$

По теореме о производной обратной функции:

$$(\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}.$$

Подставляем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Заключение

На этой лекции мы углубили понимание производной и дифференциала, рассмотрев более сложные правила дифференцирования, включая правило цепочки и производную обратной функции. Мы изучили таблицу производных основных элементарных функций и научились дифференцировать параметрически заданные функции. Эти знания являются фундаментальными для дальнейшего изучения анализа и его приложений в исследовании функций и решении практических задач.

О чём была эта лекция?

Эта лекция была посвящена углубленному изучению производной и дифференциала функции. Мы рассмотрели определение производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента и обсудили её геометрический смысл как углового коэффициента касательной к графику функции. Ввели понятие дифференциала функции как главной линейной части приращения функции и установили связь между дифференцируемостью и непрерывностью функций.

Далее мы изучили основные правила дифференцирования, включая производные суммы, произведения и частного функций, и подробно доказали эти правила. Особое внимание было уделено **правилу цепочки** (производной композиции функций), которое позволяет находить производные сложных функций, и мы доказали это правило. Также мы рассмотрели производную обратной функции и привели соответствующую теорему и её доказательство.

Мы обратились к таблице производных основных элементарных функций, таких как степенные функции, тригонометрические функции и их обратные. Вывели производные некоторых из них, например, синуса и арксинуса, используя ранее изученные правила.

Наконец, мы изучили параметрически заданные функции и показали, как находить их производные, используя производные по параметру и применяя теорему о производной параметрически заданной функции. Было подчеркнуто, что не всегда параметрически заданные уравнения определяют функцию $y(x)$, и для нахождения производной необходимо учитывать условия существования обратных функций и их дифференцируемость.