Теоретический минимум. Подробный разбор вопросов

Оглавление

1. Сформулируйте определение комплексного числа.

Ответ:

Комплексное число — это элемент множества **C**, которое определяется как декартово произведение множества вещественных чисел **R** на себя:

```
C = R × R
```

То есть, каждое комплексное число представляется в виде упорядоченной пары:

```
z = (a, b), где a, b ∈ R
```

В алгебраической форме комплексное число записывается как:

```
z = a + i*b
```

где:

- `a` — вещественная часть (`Re(z)`),
- `b` — мнимая часть (`Im(z)`),
- `i` — мнимая единица, такая что `i^2 = -1`.

Из лекции:

В §2 определено, что комплексное число — это элемент декартова произведения `R × R` с двумя операциями сложения и умножения, задаваемыми определенными правилами.

---

2. Как сложить и перемножить два комплексных числа (в представлении чисел как `(a, b)` и `(c, d)`)?

Ответ:

Пусть даны два комплексных числа:

```
z1 = (a, b)
z2 = (c, d)
```

Сложение комплексных чисел:

```
z1 + z2 = (a + c, b + d)
```

То есть, складываем соответствующие вещественные и мнимые части.

Умножение комплексных чисел:

```
z1 * z2 = (a*c - b*d, a*d + b*c)
```

- Вещественная часть: `a*c - b*d`
- Мнимая часть: `a*d + b*c`

Пример:

```
z1 = (2, 3)
z2 = (4, -1)

Сложение:
z1 + z2 = (2 + 4, 3 + (-1)) = (6, 2)

Умножение:
z1 * z2 = (2*4 - 3*(-1), 2*(-1) + 3*4) = (8 + 3, -2 + 12) = (11, 10)
```

Из лекции:

В §2 описаны операции сложения и умножения комплексных чисел, заданные на декартовом произведении `R × R`.

---

3. Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность сложения комплексных чисел.

Ответ:

Ассоциативность сложения:

Для любых комплексных чисел `z1`, `z2`, `z3` выполняется:

```
(z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3)
```

Коммутативность сложения:

Для любых комплексных чисел `z1`, `z2` выполняется:

```
z1 + z2 = z2 + z1
```

Пояснение:

- **Ассоциативность** означает, что порядок выполнения операций сложения не влияет на результат.
- **Коммутативность** означает, что сумма не зависит от порядка слагаемых.

Из лекции:

В §2 свойства операций на комплексных числах наследуются от вещественных чисел, где сложение ассоциативно и коммутативно.

---

4. Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность умножения комплексных чисел.

Ответ:

Ассоциативность умножения:

Для любых комплексных чисел `z1`, `z2`, `z3` выполняется:

```
(z1 * z2) * z3 = z1 * (z2 * z3)
```

Коммутативность умножения:

Для любых комплексных чисел `z1`, `z2` выполняется:

```
z1 * z2 = z2 * z1
```

Пояснение:

- **Ассоциативность** умножения гарантирует, что при умножении нескольких чисел результат не зависит от расстановки скобок.
- **Коммутативность** означает, что произведение не зависит от порядка множителей.

Из лекции:

В §2 операции умножения на комплексных числах определены таким образом, что сохраняются ассоциативность и коммутативность, свойственные умножению вещественных чисел.

---

5. Какой элемент множества комплексных чисел называется нулевым и почему?

Ответ:

Нулевым элементом в множестве комплексных чисел является число:

```
0 = (0, 0)
```

Причина:

- При сложении любого комплексного числа `z = (a, b)` с нулевым элементом получаем само число:

  ```
  z + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z
  ```

- Нулевой элемент является нейтральным элементом относительно операции сложения.

Из лекции:

В §2 указано, что множество вещественных чисел вложено в множество комплексных чисел, и нулевой элемент `(0, 0)` соответствует числу `0` в вещественных числах.

---

6. Какой элемент является противоположным к `(a, b)` на множестве комплексных чисел относительно операции сложения и почему?

Ответ:

Противоположным элементом к `z = (a, b)` является элемент:

```
(-a, -b)
```

Причина:

- Сумма числа и его противоположного равна нулевому элементу:

  ```
  z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)
  ```

- Таким образом, для каждого элемента существует обратный относительно сложения.

Из лекции:

В §2 обсуждаются свойства комплексных чисел, где для каждого элемента определен противоположный элемент относительно сложения.

---

7. Какой элемент множества комплексных чисел называется единицей? Что будет, если комплексное число умножить на единицу?

Ответ:

Единичным элементом является число:

```
1 = (1, 0)
```

При умножении любого комплексного числа на единицу:

```
z * 1 = (a, b) * (1, 0) = (a*1 - b*0, a*0 + b*1) = (a, b) = z
```

Причина:

- Единичный элемент является нейтральным относительно умножения.
- Умножение на единицу не изменяет комплексное число.

Из лекции:

В §2 отмечено, что вещественное число `1` соответствует комплексному числу `(1, 0)` и является нейтральным элементом относительно умножения.

---

8. Сформулируйте определение обратного элемента и запишите его для комплексного числа (в представлении числа как `(a, b)`).

Ответ:

Определение:

Обратным элементом к ненулевому комплексному числу `z = (a, b)` относительно умножения является такое число `z^(-1)`, что:

```
z * z^(-1) = 1
```

Формула для обратного элемента:

```
z^(-1) = (a / (a^2 + b^2), -b / (a^2 + b^2))
```

Пояснение:

- Для нахождения обратного элемента умножаем `z` на предполагаемый обратный элемент и приравниваем произведение к единице `(1, 0)`.
- Решая уравнение, получаем формулы для вещественной и мнимой частей обратного элемента.

Из лекции:

В §2 обсуждается понятие нормы комплексного числа `N(z) = a^2 + b^2`, что используется при нахождении обратного элемента.

---

9. Какая форма комплексного числа называется алгебраической?

Ответ:

Алгебраическая форма комплексного числа:

```
z = a + i*b
```

где:

- `a` — вещественная часть (`Re(z)`),
- `b` — мнимая часть (`Im(z)`),
- `i` — мнимая единица (`i^2 = -1`).

Пояснение:

- Эта форма удобна для выполнения операций сложения и умножения.
- В алгебраической форме комплексное число представлено как сумма вещественной и мнимой частей.

Из лекции:

В §3 дано определение алгебраической формы комплексного числа и введены обозначения для вещественной и мнимой частей.

---

10. Какая форма комплексного числа называется тригонометрической?

Ответ:

Тригонометрическая форма комплексного числа:

```
z = r * (cos(φ) + i*sin(φ))
```

где:

- `r = |z| = sqrt(a^2 + b^2)` — модуль комплексного числа,
- `φ` — аргумент (угол), такой что `tan(φ) = b / a`.

Пояснение:

- Тригонометрическая форма удобна при умножении, делении и возведении в степень комплексных чисел.
- Она связывает комплексное число с его геометрическим представлением на комплексной плоскости.

Из лекции:

В §3 описана тригонометрическая форма, где комплексное число представлено через полярные координаты `(r, φ)`.

---

11. Пусть z — комплексное число. Какое число `z̄` является комплексно сопряженным к z?

Ответ:

Комплексно сопряженное число:

Если `z = a + i*b`, то его комплексно сопряженное `z̄` определяется как:

```
z̄ = a - i*b
```

Пояснение:

- Комплексно сопряженное число имеет ту же вещественную часть и противоположную мнимую часть.
- Сопряжение полезно при делении комплексных чисел и вычислении модуля.

Из лекции:

В §3 введено понятие комплексно сопряженного числа и его свойства.

---

12. Как определяется модуль `|z|` комплексного числа z?

Ответ:

Модуль комплексного числа:

```
|z| = sqrt(a^2 + b^2)
```

где `z = a + i*b`.

Пояснение:

- Модуль соответствует расстоянию от начала координат до точки `(a, b)` на комплексной плоскости.
- Он всегда неотрицателен и отражает "длину" вектора, представляющего комплексное число.

Из лекции:

В §3 определен модуль как корень из нормы комплексного числа `N(z) = a^2 + b^2`.

---

13. Запишите формулу Муавра.

Ответ:

Формула Муавра:

Для любого натурального числа `n` и любого вещественного числа `φ`:

```
(cos(φ) + i*sin(φ))^n = n(cos(n*φ) + i*sin(n*φ))
```

Пояснение:

- Формула используется для возведения комплексных чисел в степень.
- Следует из свойств экспоненциальной функции и тригонометрических соотношений.

Из лекции:

Хотя формула Муавра не была явно приведена, тригонометрическая форма и операции с ней предполагают знание этой формулы.

---

14. Как определяется декартово произведение множеств?

Ответ:

Декартово произведение множеств `A` и `B`:

```
A × B = { (a, b) | a ∈ A, b ∈ B }
```

Пояснение:

- Это множество всех возможных упорядоченных пар, где первый элемент из `A`, а второй из `B`.
- Используется для определения множеств пар, таких как комплексные числа `(a, b)`.

Из лекции:

В §1 алгебраических систем дано определение декартова произведения при введении внутренних законов композиции.

---

15. Что называется внутренним законом композиции на множестве M?

Ответ:

Внутренний закон композиции:

Это отображение:

```
*: M × M → M
```

то есть операция, которая каждой паре элементов `(x, y)` из `M × M` ставит в соответствие элемент `z ∈ M`.

Пояснение:

- Результат операции над элементами множества `M` также принадлежит `M`.
- Примеры: сложение и умножение на множестве чисел.

Из лекции:

В §1 алгебраических систем введено понятие внутреннего закона композиции и приведены примеры.

---

16. Какой закон композиции называется ассоциативным?

Ответ:

Ассоциативный закон композиции:

Закон `*` называется ассоциативным, если для любых `x, y, z ∈ M` выполняется:

```
(x * y) * z = x * (y * z)
```

Пояснение:

- Расстановка скобок не влияет на результат операции.
- Ассоциативность важна для упрощения вычислений в алгебраических структурах.

Из лекции:

В §1 определено понятие ассоциативного закона композиции и приведены примеры.

---

17. Какой закон композиции называется коммутативным?

Ответ:

Коммутативный закон композиции:

Закон `*` называется коммутативным, если для любых `x, y ∈ M` выполняется:

```
x * y = y * x
```

Пояснение:

- Порядок элементов не влияет на результат операции.
- Коммутативность не всегда присутствует, например, умножение матриц не коммутативно.

Из лекции:

В §1 обсуждаются коммутативные законы композиции с примерами.

---

18. Сформулируйте определение нейтрального элемента `e` относительно закона композиции `*` на множестве M.

Ответ:

Нейтральный элемент:

Элемент `e ∈ M` называется нейтральным относительно операции `*`, если для любого `x ∈ M` выполняется:

```
e * x = x * e = x
```

Пояснение:

- Нейтральный элемент не изменяет другие элементы при операции `*`.
- Примеры: число `0` для сложения, число `1` для умножения.

Из лекции:

В §2 алгебраических систем дано определение нейтрального элемента и обсуждены его свойства.

---

19. Сформулируйте определение поглощающего элемента `θ` относительно закона композиции `*` на множестве M.

Ответ:

Поглощающий элемент:

Элемент `θ ∈ M` называется поглощающим относительно операции `*`, если для любого `x ∈ M` выполняется:

```
θ * x = x * θ = θ
```

Пояснение:

- При операции с поглощающим элементом результат всегда равен самому поглощающему элементу.
- Пример: при умножении на ноль в числовых множествах.

Из лекции:

В §2 введено понятие поглощающего элемента и приведены примеры, такие как пустое множество при операции пересечения.

---

20. Сформулируйте определение обратного элемента относительно операции.

Ответ:

Обратный элемент:

Для элемента `x ∈ M` обратным элементом `y ∈ M` относительно операции `*` называется такой элемент, что:

```
x * y = y * x = e
```

где `e` — нейтральный элемент.

Пояснение:

- Обратный элемент "отменяет" действие исходного элемента.
- Важен для операций, где возможно "обратное действие", например, вычитание или деление.

Из лекции:

В §2 обсуждается понятие обратного элемента, его существование и единственность при определенных условиях.

---

21. Что называется алгебраической структурой?

Ответ:

Алгебраическая структура:

Это множество `M`, на котором задан один или несколько законов композиции (операций), удовлетворяющих определенным аксиомам.

Пояснение:

- Примеры алгебраических структур: группы, кольца, поля.
- Аксиомы определяют свойства операций (ассоциативность, коммутативность и т.д.).

Из лекции:

В §2 дано определение алгебраической структуры при введении различных операций на множестве.

---

22. Что называется внешним законом композиции?

Ответ:

Внешний закон композиции:

Это операция, которая сочетает элемент из множества `M` с элементом из другого множества `K`:

```
• : K × M → M
```

Пояснение:

- Примером внешнего закона композиции является умножение вектора на скаляр.
- Внешний закон позволяет определять структуры, такие как модули и векторные пространства.

Из лекции:

В лекциях нет прямого упоминания внешнего закона композиции, но понятие следует из общей теории алгебраических структур.

---

23. Перечислите аксиомы группы.

Ответ:

Множество `G` с операцией `*` называется **группой**, если выполняются следующие аксиомы:

1. **Ассоциативность:**

   ```
   (x * y) * z = x * (y * z)
   ```

   для всех `x, y, z ∈ G`.

2. **Существование нейтрального элемента:**

   Существует элемент `e ∈ G`, такой что:

   ```
   e * x = x * e = x
   ```

   для всех `x ∈ G`.

3. **Существование обратного элемента:**

   Для каждого `x ∈ G` существует элемент `x^(-1) ∈ G`, такой что:

   ```
   x * x^(-1) = x^(-1) * x = e
   ```

Пояснение:

- Если дополнительно операция `*` коммутативна, то группа называется **абелевой**.

Из лекции:

В §3 алгебраических систем приведены аксиомы группы и обсуждены примеры групп.

---

24. Сформулируйте определение магмы.

Ответ:

Магма:

Это алгебраическая структура, состоящая из множества `M` с одной бинарной операцией `*`:

```
*: M × M → M
```

Пояснение:

- На магму не накладываются дополнительные аксиомы, такие как ассоциативность или существование нейтрального элемента.
- Магма является самой общей бинарной алгебраической структурой.

Из лекции:

В §3 упоминается магма как структура с неассоциативным законом композиции.

---

25. Какая алгебраическая структура является полугруппой?

Ответ:

Полугруппа:

Это алгебраическая структура `(M, *)`, в которой операция `*` ассоциативна:

```
(x * y) * z = x * (y * z)
```

для всех `x, y, z ∈ M`.

Пояснение:

- Полугруппа — это магма с дополнительным свойством ассоциативности.
- Не обязательно наличие нейтрального элемента.

Из лекции:

В §3 обсуждаются полугруппы как структуры с ассоциативным законом композиции.

---

26. Какая алгебраическая структура является моноидом?

Ответ:

Моноид:

Это алгебраическая структура `(M, *)`, которая является полугруппой и имеет нейтральный элемент `e`:

1. **Ассоциативность:**

   ```
   (x * y) * z = x * (y * z)
   ```

2. **Нейтральный элемент:**

   ```
   e * x = x * e = x
   ```

Пояснение:

- Моноид — это полугруппа с нейтральным элементом.
- Пример: натуральные числа с операцией умножения.

Из лекции:

В §3 моноид определяется как структура с ассоциативным законом и нейтральным элементом.

---

27. Сформулируйте определение левой (правой) дистрибутивности закона `∘` относительно закона `*`.

Ответ:

Левая дистрибутивность:

Закон `∘` называется лево-дистрибутивным относительно закона `*`, если для всех `x, y, z  M`:

```
x ∘ (y * z) = (x ∘ y) * (x ∘ z)
```

Правая дистрибутивность:

Закон `∘` называется право-дистрибутивным относительно закона `*`, если:

```
(y * z) ∘ x = (y ∘ x) * (z ∘ x)
```

Пояснение:

- Дистрибутивность связывает два закона композиции, обеспечивая совместимость операций.

Из лекции:

В §1 колец обсуждается понятие дистрибутивности и ее роль в определении структур, таких как кольца.

---

28. Когда закон называется двояко дистрибутивным?

Ответ:

Двояко дистрибутивный закон:

Закон `∘` называется двояко дистрибутивным относительно закона `*`, если он дистрибутивен и слева, и справа:

1. **Левая дистрибутивность:**

   ```
   x ∘ (y * z) = (x ∘ y) * (x ∘ z)
   ```

2. **Правая дистрибутивность:**

   ```
   (y * z) ∘ x = (y ∘ x) * (z ∘ x)
   ```

Из лекции:

В §1 колец указано, что двоякая дистрибутивность необходима для некоторых алгебраических структур.

---

29. Сформулируйте определение кольца `R`.

Ответ:

Кольцо `R`:

Это алгебраическая структура с двумя операциями `+` (сложение) и `*` (умножение), где:

1. `(R, +)` — коммутативная группа:
   - **Ассоциативность сложения**
   - **Коммутативность сложения**
   - **Нейтральный элемент `0`**
   - **Существование обратного элемента для каждого `a ∈ R`**
2. `(R, *)` — полугруппа:
   - **Ассоциативность умножения**
3. **Дистрибутивность умножения относительно сложения:**
   - Левая дистрибутивность:
     ```
     a * (b + c) = a * b + a * c
     ```
   - Правая дистрибутивность:
     ```
     (a + b) * c = a * c + b * c
     ```

Пояснение:

- Кольцо объединяет свойства сложения и умножения в одной структуре.
- Если умножение коммутативно и существует единица, то кольцо называется коммутативным с единицей.

Из лекции:

В §1 колец введено определение кольца с соответствующими аксиомами.

---

30. Какое кольцо называется кольцом вычетов?

Ответ:

Кольцо вычетов по модулю `m` (обозначается $\mathbb{Z}_m$):

- Множество классов вычетов при делении целых чисел на `m`.
- Операции сложения и умножения выполняются по модулю `m`:

  ```
  [a] + [b] = [a + b mod m]
  [a] * [b] = [a * b mod m]
  ```

Пояснение:

- Кольцо вычетов используется в теории чисел и криптографии.
- Оно образует конечное кольцо с `m` элементами.

Из лекции:

В §2 приведен пример кольца вычетов Z_m и его свойств.

---

31. Как определяется многочлен от одной переменной с коэффициентами из кольца `R`?

Ответ:

Определение многочлена:

Многочлен от одной переменной `x` с коэффициентами из кольца `R` — это выражение вида:

$$p(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + ... + a_n * x^n$$

где:

- `n` — натуральное число или ноль (степень многочлена),
- $a_k \in R$ для `k = 0, 1, ..., n` — коэффициенты многочлена,
- `x` — формальная переменная.

Пояснение:

- Многочлен — это конечная сумма членов, каждый из которых является произведением коэффициента на степень переменной `x`.
- Коэффициенты берутся из заданного кольца `R`.

Из лекции:

В §3 кольца многочленов дано определение многочлена от одной переменной и описано, как операции сложения и умножения определяются на множестве многочленов `R[x]`, делая его кольцом.

---

32. В каком случае многочлен `p(x)` делится на многочлен `q(x)`?

Ответ:

Определение делимости многочленов:

Многочлен `p(x)` делится на многочлен `q(x)` (обозначается `q(x) | p(x)`), если существует такой многочлен $g(x) \in R[x]$, что:

```
p(x) = q(x) * g(x)
```

Пояснение:

- Делимость означает, что `p(x)` кратен `q(x)`, то есть `q(x)` является делителем `p(x)` без остатка.
- Многочлены `p(x)` и `q(x)` принадлежат кольцу многочленов `R[x]`.

Из лекции:

В §3 обсуждается понятие делимости многочленов и приводится определение, а также свойства делимости.

---

33. Перечислите свойства делимости многочленов.

Ответ:

Свойства делимости многочленов:

1. **Транзитивность делимости:**

   Если `p(x) | q(x)` и `q(x) | r(x)`, то `p(x) | r(x)`.

2. **Линейная комбинация:**

   Если `p(x) | q(x)` и `p(x) | r(x)`, то для любых многочленов $a(x), b(x) \in R[x]$:

   ```
   p(x) | a(x)*q(x) + b(x)*r(x)
   ```

3. **Ассоциативность делимости:**

   Если `p(x) | q(x)`, то для любого многочлена $k(x) \in R[x]$:

   ```
   p(x) * k(x) | q(x) * k(x)
   ```

Пояснение:

- Эти свойства позволяют проводить операции с делимостью многочленов, аналогично целым числам.
- Они важны для факторизации многочленов и решения уравнений.

Из лекции:

В §3 кольца многочленов приведены свойства делимости и соответствующие леммы.

---

34. Когда многочлены `p(x)` и `q(x)` являются ассоциированными?

Ответ:

Определение ассоциированных многочленов:

Многочлены `p(x)` и `q(x)` называются **ассоциированными**, если существует обратимый элемент $u \in R$, такой что:

```
p(x) = u * q(x)
```

Пояснение:

- Обратимый элемент `u` — это такой элемент из кольца `R`, для которого существует $u^{-1} \in R$, и $u * u^{-1} = 1$.
- Ассоциированные многочлены отличаются друг от друга только на множитель, обратимый в `R`.
- В кольце многочленов над полем обратимыми элементами являются ненулевые скаляры.

Из лекции:

В §3 определение ассоциированных многочленов и обсуждение их свойств приведено в контексте делимости и факторизации.

---

35. Что называется степенью многочлена?

Ответ:

Определение степени многочлена:

Степенью многочлена `p(x)` называется наибольший показатель степени переменной `x` при ненулевом коэффициенте.

Обозначение:

```
deg(p(x)) = n
```

если старший ненулевой коэффициент находится при x^n.

Пояснение:

- Степень многочлена показывает его "высшую степень" и важна для анализа свойств многочлена.
- Если многочлен нулевой (все коэффициенты равны нулю), его степень обычно определяют особым образом.

Из лекции:

В §3 обсуждается понятие степени многочлена, обозначается как `deg(p)`, и приводятся свойства степени.

---

36. Чему равна степень нулевого многочлена `θ(t)`?

Ответ:

Степень нулевого многочлена:

Степень нулевого многочлена `θ(t)` определяется как:

```
deg(θ(t)) = -∞
```

Пояснение:

- Это соглашение позволяет сохранять верными формулы и свойства степеней при операциях с многочленами.
- Нулевой многочлен не имеет ненулевых коэффициентов, поэтому степень не может быть определена обычным способом.

Из лекции:

В §3 указано, что для нулевого многочлена степень принимается равной `-∞`.

---

37. Перечислите свойства степени при делении многочленов.

Ответ:

Свойства степени многочленов:

1. **Степень произведения:**

   ```
   deg(p(x) * q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x))
   ```

2. **Степень суммы:**

   ```
   deg(p(x) + q(x)) ≤ max(deg(p(x)), deg(q(x)))
   ```

3. **Степень остатка:**

   Если при делении `p(x)` на `q(x)` получается остаток `r(x)`, то:

   ```
   deg(r(x)) < deg(q(x))
   ```

Пояснение:

- Эти свойства помогают при анализе и упрощении многочленов, особенно в алгоритмах деления.
- Степень остатка всегда меньше степени делителя, что важно для алгоритма Евклида.

Из лекции:

В §3 приведены свойства степени многочленов и соответствующие леммы.

---

38. Как связана степень остатка `r(x)` от деления полинома `p(x)` на полином со степенями этих полиномов?

Ответ:

Связь степени остатка:

При делении многочлена `p(x)` на многочлен `q(x)` (где `q(x)` не является нулевым многочленом) остаток `r(x)` имеет степень:

```
deg(r(x)) < deg(q(x))
```

Пояснение:

- Остаток всегда имеет степень меньше степени делителя `q(x)`.
- Это свойство используется в алгоритме деления многочленов и в теории алгоритмов.

Из лекции:

В §3 обсуждается деление многочленов с остатком и приводится это свойство.

---

39. Какое число называется корнем многочлена кратности `n`?

Ответ:

Определение корня многочлена кратности `n`:

Число $x_0 \in R$ называется корнем многочлена $p(x)$ кратности n, если:

$$p(x) \text{ делится на } (x - x_0)^n\text{, но не делится на } (x - x_0)^{n+1}$$

То есть:

$$p(x) = (x - x_0)^n * q(x)\text{, где } q(x) \in R[x]\text{, и } q(x_0) \neq 0$$

Пояснение:

- Кратность корня показывает, сколько раз множитель $(x - x_0)$ входит в разложение многочлена.
- Корень кратности 1 называется простым корнем.

Из лекции:

В §3 вводится понятие корня многочлена и его кратности при обсуждении делимости многочленов.

---

40. Чему равен остаток от деления $p(x) \in R[x]$ на $(x - x_0)$? А если x_0 — корень $p(x)$?

Ответ:

Остаток от деления на $(x - x_0)$:

По теореме Безу, остаток от деления многочлена $p(x)$ на $(x - x_0)$ равен значению многочлена в точке x_0:

$$r = p(x_0)$$

Если x_0 — корень $p(x)$:

- Тогда $p(x_0) = 0$, поэтому остаток равен нулю.
- Это означает, что $(x - x_0)$ является делителем $p(x)$.

Пояснение:

- Теорема Безу устанавливает связь между значением многочлена в точке и остатком от деления на $(x - x_0)$.
- Это важно для нахождения корней и разложения многочлена на множители.

Из лекции:

В §3 теорема о делении с остатком и следствие о значении остатка приводятся с доказательствами.

---

41. Какие элементы кольца называются делителями нуля?

Ответ:

Определение делителя нуля:

Элемент $a \neq 0$ из кольца R называется **делителем нуля**, если существует ненулевой элемент $b \in R$, такой что:

```
a * b = 0
```

или

```
b * a = 0
```

Пояснение:

- Делители нуля умножаются на другие ненулевые элементы и дают в результате нуль.
- Наличие делителей нуля влияет на свойства кольца, например, невозможность сокращения.

Из лекции:

В §1 полей и колец матриц дано определение делителей нуля и приведены примеры.

---

42. Какое кольцо называется областью целостности?

Ответ:

Определение области целостности:

Кольцо `R` называется **областью целостности**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. **Коммутативное кольцо с единицей:**
    - Умножение коммутативно.
    - Существует мультипликативная единица `1 ≠ 0`.
2. **Отсутствие делителей нуля:**
    - Если произведение двух элементов равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю:

      ```
      a * b = 0 ⇒ a = 0 или b = 0
      ```

Пояснение:

- В области целостности можно применять закон сокращения.
- Примеры: кольцо целых чисел `ℤ`, поле вещественных чисел `ℝ`.

Из лекции:

В §1 полей и колец матриц обсуждается понятие области целостности и приводятся примеры.

---

43. Сформулируйте определение нильпотента.

Ответ:

Определение нильпотента:

Элемент `a ∈ R` кольца называется **нильпотентом**, если существует такое натуральное число `n`, что:

$$a^n = 0$$

где $n \geq 1$.

Пояснение:

- Нильпотентные элементы при возведении в некоторую степень обращаются в нуль.
- Нильпотенты всегда являются делителями нуля (кроме случая нулевого элемента).

Из лекции:

В §1 дано определение нильпотента и отмечено, что каждый нильпотент является делителем нуля.

---

44. Какое кольцо является полем?

Ответ:

Определение поля:

Кольцо F называется **полем**, если:

1. **Кольцо с единицей:**
   - Существует мультипликативная единица $1 \neq 0$.
2. **Каждый ненулевой элемент обратим:**
   - Для любого $a \in F$, где $a \neq 0$, существует $a^{-1} \in F$, такое что:

     $$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

3. **Коммутативность умножения:**
   - Умножение коммутативно.

Пояснение:

- В поле можно выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на ноль).
- Примеры: поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Из лекции:

В §1 полей и колец матриц дано определение поля и обсуждены его свойства.

---

45. Сформулируйте определение матрицы. Что называется коэффициентами матрицы?

Ответ:

Определение матрицы:

Матрица — это прямоугольная таблица элементов из поля K, организованных в m строк и n столбцов:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

```
| ...   ...   ...  ... |
| a_m1  a_m2  ...  a_mn |
```

Коэффициенты матрицы:

Элементы a_{ij} называются коэффициентами или элементами матрицы, где:

- `i` — номер строки (`i = 1, 2, ..., m`),
- `j` — номер столбца (`j = 1, 2, ..., n`).

Пояснение:

- Матрицы используются для компактного представления систем уравнений, линейных отображений и т.д.
- Размер матрицы определяется количеством строк и столбцов.

Из лекции:

В §2 определение матрицы дано с описанием коэффициентов и примерами матриц разных размеров.

---

46. Какое множество обозначается как `MatK(m,n)`? Что в этой записи значат `K`, `m`, `n`?

Ответ:

Обозначение `MatK(m, n)`:

- `MatK(m, n)` — множество всех матриц размера `m × n` с элементами из поля `K`.

Значения:

- `K` — поле, из которого берутся элементы матрицы (коэффициенты).
- `m` — число строк в матрице.
- `n` — число столбцов в матрице.

Пояснение:

- Это обозначение позволяет говорить о множестве матриц определенного размера и с определенным типом элементов.
- Например, $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3, 2)$ — множество всех вещественных матриц размера `3 × 2`.

Из лекции:

В §3 действий с матрицами вводится это обозначение и обсуждается структура этих множеств.

---

47. Какие матрицы называются квадратными? Единичными?

Ответ:

Квадратные матрицы:

- Матрица называется **квадратной**, если число строк равно числу столбцов:

  ```
  m = n
  ```

- Размер такой матрицы — `n × n`.

Единичные матрицы:

- **Единичная матрица** — это квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю:

```
E = | 1  0  ...  0 |
    | 0  1  ...  0 |
    | ... ... ... ... |
    | 0  0  ...  1 |
```

Пояснение:

- Единичная матрица играет роль нейтрального элемента при умножении матриц.
- Квадратные матрицы часто используются при решении систем линейных уравнений и в других областях линейной алгебры.

Из лекции:

В §3 и §4 описаны квадратные и единичные матрицы и их свойства.

---

48. Как определяется сложение матриц?

Ответ:

Определение сложения матриц:

Две матрицы одинакового размера $m \times n$ складываются поэлементно:

Если $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, то $C = A + B$ определяется как $C = [c_{ij}]$, где:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Пояснение:

- Сложение возможно только для матриц одинаковых размеров.
- Результатом является матрица того же размера.

Из лекции:

В §3 определено сложение матриц и доказано, что эта операция образует коммутативную группу на множестве матриц заданного размера.

---

49. Как определяется умножение матрицы на число?

Ответ:

Определение умножения матрицы на число:

Умножение матрицы $A = [a_{ij}]$ на скаляр (число) $\lambda \in K$ выполняется поэлементно:

$$C = \lambda * A, \text{ где } c_{ij} = \lambda * a_{ij}$$

Пояснение:

- Каждой элемент матрицы умножается на одно и то же число.

- Результатом является матрица того же размера.

Из лекции:

В §3 описано умножение матрицы на скаляр и его свойства.

---

50. Как определяется умножение матриц? Какие матрицы можно перемножать?

Ответ:

Определение умножения матриц:

Если матрица `A` имеет размер `m × p`, а матрица `B` — размер `p × n`, то их произведение `C = A * B` определяется как матрица размера `m × n`, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{p} (a_{ik} * b_{kj})$$

Условия для умножения матриц:

- Число столбцов первой матрицы `A` должно совпадать с числом строк второй матрицы `B`:

  ```
  Число столбцов A (p) = Число строк B (p)
  ```

Пояснение:

- Умножение матриц не коммутативно, то есть обычно `A * B ≠ B * A`.
- Эта операция соответствует композиции линейных отображений.

Из лекции:

В §3 определяется умножение матриц и обсуждаются условия, при которых оно возможно.

---

51. Какое результирующее число строк и столбцов будет при перемножении матриц `A_(n×m)` и `B_(m×k)`?

Ответ:

Результирующий размер матрицы:

- При умножении матриц `A` размера `n × m` и `B` размера `m × k`, результирующая матрица `C = A * B` будет иметь размер:

  ```
  n × k
  ```

- То есть число строк результирующей матрицы равно числу строк первой матрицы, а число столбцов — числу столбцов второй матрицы.

Пояснение:

- Элементы результирующей матрицы c_{ij} вычисляются как скалярное произведение `i`-й строки матрицы `A` и `j`-го столбца матрицы `B`.

Из лекции:

В §3 при определении умножения матриц указаны размеры матриц и результирующего произведения.

---

52. Умножение матриц коммутативно? Почему?

Ответ:

Умножение матриц не является коммутативным:

- В общем случае для матриц `A` и `B`:

  ```
  A * B ≠ B * A
  ```

Причины:

- Размеры матриц могут не позволять выполнить обратное умножение.
- Даже если размеры позволяют, результаты умножения могут отличаться.
- Порядок множителей влияет на результат из-за особенностей определения умножения матриц.

Пояснение:

- Умножение матриц соответствует композиции линейных отображений, которые в общем случае не коммутативны.
- Пример: если `A` — поворот, а `B` — масштабирование, то `A * B` и `B * A` дадут разные преобразования.

Из лекции:

В §3 отмечено, что умножение матриц не коммутативно, и приводятся примеры.

---

53. Как вводится операция транспонирования матриц?

Ответ:

Определение транспонирования:

Транспонированная матрица `A^T` получается из матрицы $A = [a_{ij}]$ путем замены строк на столбцы:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Пояснение:

- Элемент на позиции `(i, j)` в `A^T` равен элементу на позиции `(j, i)` в исходной матрице `A`.
- Размер транспонированной матрицы `A^T` будет `n × m`, если исходная матрица `A` имеет размер `m × n`.

Из лекции:

В §3 описывается операция транспонирования матриц и ее свойства.

---

54. Перечислите свойства операции транспонирования.

Ответ:

Свойства транспонирования:

1. **Двойное транспонирование:**

   ```
   (A^T)^T = A
   ```

2. **Транспонирование суммы:**

   ```
   (A + B)^T = A^T + B^T
   ```

3. **Транспонирование произведения скаляра и матрицы:**

   ```
   (λ * A)^T = λ * A^T
   ```

   где `λ ∈ K`.

4. **Транспонирование произведения матриц:**

   ```
   (A * B)^T = B^T * A^T
   ```

   Обратите внимание на изменение порядка множителей.

Пояснение:

- Эти свойства позволяют упрощать выражения с транспонированными матрицами.
- Транспонирование сохраняет многие важные характеристики матрицы.

Из лекции:

В §3 перечислены свойства транспонирования и доказаны некоторые из них.

---

55. Запишите, как найти определители матриц `A_(1×1)` и `A_(2×2)`.

Ответ:

Определитель матрицы `1 × 1`:

Для матрицы `A = [a]`:

```
det(A) = a
```

Определитель матрицы `2 × 2`:

Для матрицы:

```
A = | a_11  a_12 |
    | a_21  a_22 |
```

Определитель вычисляется по формуле:

```
det(A) = a□□ * a□□ - a□□ * a□□
```

Пояснение:

- Для `1 × 1` матрицы определитель равен единственному элементу.
- Для `2 × 2` матрицы определитель вычисляется как разность произведений по диагоналям.

Из лекции:

В §4 определитель матрицы описывается для малых размеров и приводятся соответствующие формулы.

---

56. Запишите алгоритм нахождения определителя матрицы `A_(3×3)`.

Ответ:

Алгоритм вычисления определителя `3 × 3` матрицы:

Для матрицы:

```
A = | a□□  a□□  a□□ |
    | a□□  a□□  a□□ |
    | a□□  a□□  a□□ |
```

Определитель вычисляется по формуле:

```
det(A) = a□□ * (a□□ * a□□ - a□□ * a□□)
        - a□□ * (a□□ * a□□ - a□□ * a□□)
        + a□□ * (a□□ * a□□ - a□□ * a□□)
```

Или по правилу Саррюса:

1. Выписываем матрицу и дописываем первые два столбца справа:

   ```
   | a□□  a□□  a□□ | a□□  a□□ |
   | a□□  a□□  a□□ | a□□  a□□ |
   | a□□  a□□  a□□ | a□□  a□□ |
   ```

2. Суммируем произведения по диагоналям слева направо:

   ```
   S□ = a□□ * a□□ * a□□ + a□□ * a□□ * a□□ + a□□ * a□□ * a□□
   ```

3. Суммируем произведения по диагоналям справа налево:

   ```
   S□ = a□□ * a□□ * a□□ + a□□ * a□□ * a□□ + a□□ * a□□ * a□□
   ```

4. Вычисляем определитель:

   ```
   det(A) = S□ - S□
   ```

Пояснение:

- Этот метод удобен для ручных вычислений.
- Правило Саррюса применимо только для матриц `3 × 3`.

Из лекции:

В §4 описан алгоритм нахождения определителя матрицы `3 × 3` и приведены примеры.

---

57. Сформулируйте определение системы линейных алгебраических уравнений. Запишите в общем виде.

Ответ:

Определение СЛАУ:

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — это система вида:

```
{
  a□□ * x□ + a□□ * x□ + ... + a□□ * x□ = b□
  a□□ * x□ + a□□ * x□ + ... + a□□ * x□ = b□
  ...
  a□□ * x□ + a□□ * x□ + ... + a□□ * x□ = b□
}
```

где:

- `x□, x□, ..., x□` — неизвестные,
- `a□□` — коэффициенты при неизвестных,
- `b□` — свободные члены,
- `i = 1, 2, ..., m` — номер уравнения.

Пояснение:

- Все уравнения являются линейными относительно неизвестных.
- Коэффициенты и свободные члены обычно принадлежат полю `K`.

Из лекции:

В §1 систем линейных уравнений дано определение СЛАУ и описана ее запись.

---

58. Что в СЛАУ называют свободными членами? А что — неизвестными?

Ответ:

Свободные члены:

- В системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) свободными членами называются значения, стоящие в правой части уравнений.

- Обозначаются как `b□, b□, ..., b□` в системе:

  ```
  {
    a□□ * x□ + a□□ * x□ + ... + a□□ * x□ = b□
    a□□ * x□ + a□□ * x□ + ... + a□□ * x□ = b□
    ...
  ```

```
  a_m1 * x_1 + a_m2 * x_2 + ... + a_mn * x_n = b_m
}
```

Неизвестные:

- Неизвестными называются переменные, значения которых нужно найти, чтобы уравнения системы выполнялись.
- Обозначаются как $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пояснение:

- Свободные члены представляют результат линейной комбинации неизвестных.
- Задача решения СЛАУ состоит в нахождении значений неизвестных, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Из лекции:

В §1 основных определений СЛАУ обсуждаются компоненты системы уравнений, включая коэффициенты, неизвестные и свободные члены.

---

59. Как записать СЛАУ в матричном виде?

Ответ:

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде как:

```
A * X = b
```

где:

- `A` — матрица коэффициентов размером $m \times n$, элементы которой — коэффициенты a_{ij}.

- `X` — столбец-матрица неизвестных размером $n \times 1$:

  ```
  X = | x_1 |
      | x_2 |
      | ... |
      | x_n |
  ```

- `b` — столбец-матрица свободных членов размером $m \times 1$:

  ```
  b = | b_1 |
      | b_2 |
      | ... |
      | b_m |
  ```

Пояснение:

- Матричная форма записи удобна для применения методов линейной алгебры при решении СЛАУ.
- Операции с матрицами позволяют компактно записывать преобразования системы.

Из лекции:

В §2 методов решения СЛАУ приводится матричная запись системы и используются матрицы для описания методов решения.

---

60. Что значит решить СЛАУ?

Ответ:

Решить систему линейных алгебраических уравнений означает найти такие значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых все уравнения системы превращаются в истинные числовые равенства.

Пояснение:

- Решение может быть единственным, бесконечным множеством или не существовать (система несовместна).
- При решении СЛАУ используется анализ матрицы коэффициентов и определителей.

Из лекции:

В §1 основных определений обсуждается цель решения СЛАУ и что означает найти решение системы.

---

61. Что такое расширенная матрица в рамках решения СЛАУ?

Ответ:

Расширенная матрица:

- Это матрица, полученная объединением матрицы коэффициентов `A` и столбца свободных членов `b`.
- Обозначается как `Â` или `[A | b]`.

Пример для системы с тремя уравнениями:

$$
\hat{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}
$$

Пояснение:

- Расширенная матрица используется в методе Гаусса и других методах решения СЛАУ.
- Она содержит всю информацию о системе, необходимую для проведения элементарных преобразований.

Из лекции:

В §2 методов решения СЛАУ вводится понятие расширенной матрицы и ее роль в методе Гаусса.

---

62. Какие преобразования называются эквивалентными преобразованиями матрицы?

Ответ:

Эквивалентные преобразования матрицы:

Это операции над строками (или столбцами) матрицы, которые не изменяют множество решений соответствующей системы уравнений. К ним относятся:

1. **Перестановка строк:**
    - Меняем местами две строки матрицы.
2. **Умножение строки на ненулевой скаляр:**
    - Умножаем все элементы строки на одно и то же ненулевое число.
3. **Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число:**
    - К элементам одной строки прибавляем соответствующие элементы другой строки, умноженные на какой-либо коэффициент.

Пояснение:

- Эти преобразования используются для приведения матрицы к удобному для решения виду, например, к треугольной форме.
- Они не влияют на решение системы, то есть эквивалентные системы имеют одинаковые решения.

Из лекции:

В §2 метода Гаусса подробно обсуждаются эквивалентные преобразования и их применение при решении СЛАУ.

---

63. Для чего нужны методы Крамера и Гаусса?

Ответ:

Метод Крамера:

- Предназначен для решения систем линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов (число уравнений равно числу неизвестных) и ненулевым определителем.
- Позволяет найти решение системы, используя определители матриц.

Метод Гаусса:

- Универсальный метод решения СЛАУ, применимый к любым системам.
- Заключается в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому или треугольному виду с помощью эквивалентных преобразований.
- Облегчает процесс нахождения решений путем последовательного исключения переменных.

Пояснение:

- Оба метода позволяют найти решения СЛАУ, но применяются в разных ситуациях.
- Метод Крамера эффективен для небольших систем, тогда как метод Гаусса масштабируется на большие системы.

Из лекции:

В §2 методов решения СЛАУ описаны оба метода, их особенности и области применения.

---

64. В чем заключается метод Крамера?

Ответ:

Суть метода Крамера:

- Основан на вычислении определителей матрицы коэффициентов и матриц, полученных заменой столбцов.

- Для системы с n уравнениями и n неизвестными, где определитель матрицы коэффициентов $\Delta \neq 0$, решение находится по формулам:

  $$x_k = \Delta_k / \Delta, \text{ для } k = 1, 2, ..., n$$

- Здесь Δ — определитель матрицы коэффициентов A, а Δ_k — определитель матрицы A_k, полученной заменой k-го столбца матрицы A на столбец свободных членов b.

Пояснение:

- Метод Крамера предоставляет явные формулы для решения.
- Требует вычисления нескольких определителей, что при больших n может быть вычислительно затруднительно.

Из лекции:

В §2 метода Крамера описан алгоритм метода с примерами вычисления определителей.

---

65. При каком условии возможно нахождение решения СЛАУ методом Крамера?

Ответ:

Условия применения метода Крамера:

- Матрица коэффициентов A должна быть квадратной, то есть число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$).

- Определитель матрицы коэффициентов Δ должен быть отличен от нуля:

  $$\Delta = \det(A) \neq 0$$

Пояснение:

- Ненулевой определитель гарантирует, что матрица коэффициентов обратима, и система имеет единственное решение.
- Если $\Delta = 0$, метод Крамера неприменим, и система может иметь бесконечное множество решений или быть несовместной.

Из лекции:

В §2 метода Крамера указаны условия применимости метода и обсуждены ситуации, когда метод неприменим.

---

66. В чем заключается метод Гаусса?

Ответ:

Суть метода Гаусса:

- Метод Гаусса — это алгоритм решения СЛАУ, основанный на последовательном применении эквивалентных преобразований для приведения расширенной матрицы к верхнетреугольному (ступенчатому) виду.
- Основные шаги:
  1. **Прямой ход:**
     - Используя эквивалентные преобразования, обнуляем элементы ниже главной диагонали.
     - Приводим матрицу к треугольному виду.
  2. **Обратный ход (метод обратной подстановки):**
     - Начиная с последнего уравнения, последовательно находим значения неизвестных, подставляя их в предыдущие уравнения.

Пояснение:

- Метод применим к системам любого размера и структуры.
- Позволяет определить, совместна ли система, имеет ли единственное решение или бесконечное множество решений.

Из лекции:

В §2 метода Гаусса подробно описан алгоритм метода с примерами преобразования матриц и нахождения решений.

---

67. В чем заключается метод обратной матрицы для решения СЛАУ?

Ответ:

Суть метода обратной матрицы:

- Если матрица коэффициентов `A` квадратная и обратимая (то есть `det(A) ≠ 0`), то решение СЛАУ можно найти с помощью обратной матрицы A^{-1}.
- Решение выражается как:

$$X = A^{-1} * b$$

- Где:
  - `X` — столбец-матрица неизвестных.
  - A^{-1} — обратная матрица к `A`.
  - `b` — столбец свободных членов.

Пояснение:

- Метод основан на умножении обеих частей матричного уравнения `A * X = b` на A^{-1}.
- Требует вычисления обратной матрицы, что может быть трудоемким для больших матриц.

Из лекции:

В §2 метода обратной матрицы описан этот подход и способы нахождения обратной матрицы.

---

68. Как найти обратную матрицу, используя метод Гаусса?

Ответ:

Нахождение обратной матрицы методом Гаусса:

- Составляем расширенную матрицу, где слева — исходная матрица `A`, а справа — единичная матрица `E` того же размера:

  ```
  [ A | E ]
  ```

- Применяем элементарные преобразования строк к расширенной матрице с целью преобразования левой части в единичную матрицу:

  $$[E \mid A^{-1}]$$

- После того как слева получится единичная матрица, правая часть расширенной матрицы станет обратной матрицей A^{-1}.

Пояснение:

- Элементарные преобразования включают перестановку строк, умножение строки на ненулевое число и прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число.
- Метод эффективен для матриц небольшого и среднего размера.

Из лекции:

В §2 метода обратной матрицы обсуждается использование метода Гаусса для нахождения обратной матрицы с подробным описанием шагов.

---

69. Как найти обратную матрицу, используя метод союзной матрицы?

Ответ:

Нахождение обратной матрицы через союзную матрицу:

- Обратная матрица A^{-1} выражается через союзную матрицу `Â` по формуле:

  $$A^{-1} = (1 / \det(A)) * \hat{A}^T$$

- Шаги:

  1. **Вычисление определителя `det(A)`:**
     - Если `det(A) = 0`, обратной матрицы не существует.
  2. **Нахождение матрицы алгебраических дополнений `Â`:**
     - Для каждого элемента a_{ij} матрицы `A` вычисляется алгебраическое дополнение A_{ij}.

3. **Транспонирование матрицы алгебраических дополнений:**
    - Получаем союзную (присоединенную) матрицу $\hat{A}^T$.
4. **Вычисление обратной матрицы:**
    - Умножаем союзную матрицу на `1 / det(A)`.

Пояснение:

- Метод требует вычисления большого числа определителей меньшего порядка (миноров), что может быть трудоемким для больших матриц.
- Применим для матриц небольшого размера.

Из лекции:

В §2 метода союзной матрицы подробно описан этот метод и приведены формулы для нахождения обратной матрицы.

---

70. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?

Ответ:

Алгебраическое дополнение элемента матрицы:

- Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы `A` называется число A_{ij}, вычисляемое по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{(i + j)} * M_{ij}$$

- Где:
    - M_{ij} — минор элемента a_{ij}, то есть определитель матрицы, полученной из `A` удалением `i`-й строки и `j`-го столбца.

Пояснение:

- Алгебраические дополнения используются при вычислении определителя матрицы и при нахождении обратной матрицы через союзную матрицу.
- Знак `(-1)^(i + j)` учитывает чередование знаков в разложении определителя.

Из лекции:

В §4 определения алгебраического дополнения и его использование при нахождении обратной матрицы подробно описаны.
