1. Аксиома непрерывности (полноты) множества R

7. Аксиома непрерывности (полноты)

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Тогда

$$(\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leq y) \ \Rightarrow\ (\exists c \in \mathbb{R}:\ x \leq c \leq y\ \forall x \in X\ \forall y \in Y).$$

2. Индуктивное множество

Определение 3 (Понятие индуктивного множества).
Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если

$$\forall x \in X \quad (x+1) \in X.$$

3. Множество натуральных чисел

Определение 4 (Понятие множества натуральных чисел).
Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1. Обозначается множество натуральных чисел как $\mathbb{N}$.

4. Расширенное множество R

Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы $-\infty, +\infty$ – минус и плюс бесконечностями, соответственно,

5. Окрестность и проколотая окрестность точки

Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x_0.

Кроме понятия окрестности точки x0, вводят еще и понятие проколотой окрестности – окрестности без самой точки x0.

6. Окрестности элементов +oo и -oo

Окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$(a,\ +\infty], \quad a \in \mathbb{R}.$$

ε-окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$[-\infty,\ a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

ε-окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$\left[-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

7. Ограниченность множества сверху, верхняя граница

Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным сверху, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \leq M.$$

Найденное число M называется верхней границей для X.

8. Ограниченность множества снизу, нижняя граница

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Найденное число m называется нижней границей для X.

9. Ограниченное множество

Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leq x \leq M.$$

10. Максимальный и минимальный элемент множества

Элемент $M \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется максимальным (наибольшим) элементом множества X, если

$$\forall x \in X \quad x \leq M.$$

Обозначают это так: $M = \max X$.

Элемент $m \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется минимальным (наименьшим) элементом множества X, если

$$\forall x \in X \quad x \geq m.$$

Обозначают это так: $m = \min X$.

11. Точная верхняя грань

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества X и обозначается $\sup X$.

12. Точная нижняя грань

В свою очередь, наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X и обозначается $\inf X$.

13. Целая и дробная части числа

Указанное в следствии число k называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x.

Итак, целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x. При-

14. Последовательность

Развернуто, но не менее точно можно сказать, что последовательность – это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

15. Предел последовательности на языке неравенств

Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

16. Сходящаяся последовательность

Если последовательность x_n имеет предел $A \in \mathbb{R}$ (число!), то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.

17. Бесконечные пределы последовательностей

Элемент $+\infty$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $-\infty$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

18. Возрастающая и строго возрастающая последовательности

Говорят, что последовательность x_n возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \ \ x_{n_1} \geq x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \ \ x_{n_1} > x_{n_2}.$$

19. Убывающая и строго убывающая последовательности

Говорят, что последовательность x_n убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \ \ x_{n_1} \leq x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \ \ x_{n_1} < x_{n_2}.$$

20. Подпоследовательность

Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

натуральных чисел.

Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

21. Частичные пределы последовательности

Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности x_n называются частичными пределами этой последовательности.

22. Верхний и нижний пределы последовательности

Пусть E — (непустое) множество частичных пределов последовательности x_n.

Верхним пределом последовательности x_n называется $\sup E$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\limsup\limits_n x_n$.

Нижним пределом последовательности x_n называется $\inf E$ и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\liminf\limits_n x_n$.

23. Фундаментальная последовательность

Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

24. Предельная точка множества

Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной для множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, если в любой окрестности x_0 содержится бесконечное число элементов множества E, то есть

$$\forall U(x_0)\ \ U(x_0) \cap E \ \text{ бесконечно.}$$

25. Предел функции по Коши на языке неравенств

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для E. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

26. Бесконечные пределы функции в конечной точке (на языке неравенств

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E.

Элемент $-\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

27. Конечные пределы функции в бесконечных элементах (на языке неравенств)

Число A называется пределом функции f в точке $x_0 = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta} \ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

28. Определение предела по Гейне

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка для E. Элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f в точке x_0, если **для любой** последовательности x_n такой, что:

1. $x_n \in E$.
2. $x_n \neq x_0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

29. Возрастающая и строго возрастающая функция

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

30. Убывающая и строго убывающая функция

Говорят, что что функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

31. Правосторонний и левосторонний пределы функции в конечной точке

Определение 39 (Понятие правостороннего предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$.

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 справа, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$.

Определение 40 (Понятие левостороннего предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$.

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 слева, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$.

32. Бесконечно малая и бесконечно большая функции

Определение 41 (Понятие бесконечно малой функции).
Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Итак, бесконечно малая в точке x_0 функция – это та функция, предел которой (а не значение!) в этой точке равен нулю. Почти аналогичным образом вводится понятие бесконечно большой функции.

Определение 42 (Понятие бесконечно большой функции).
Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} |\beta(x)| = +\infty.$$

33. О-большое от функции

Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная для E, и существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $f(x) = \alpha(x) g(x)$ при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$.

1. Если $\alpha(x)$ ограничена на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «О большое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

34. о-малое от функции

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «о малое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

35. Эквивалентная функция

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

УТВЕРЖДЕНИЯ

1.Принцип математической индукции

Теорема 1 (Принцип математической индукции).
Если множество $X \subset \mathbb{N}$ таково, что $1 \in X$ и $\forall x \in X \quad (x+1) \in X$, то $X = \mathbb{N}$.

2.Принцип точной грани

Теорема 4 (Принцип точной грани).
Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный $\sup X$ $(\inf X)$.

3. Принцип Архимеда

Теорема 6 (Принцип Архимеда).
Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ существует единственное целое $k \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$(k-1)x \leq y < kx.$$

4. Свойства последовательностей, имеющих конечный предел

Лемма 21 (Свойства последовательностей, имеющих предел).
Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$. Тогда:

1. При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.
2. При $A \in \mathbb{R}$ последовательность x_n ограничена.
3. В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.

5. Арифметические свойства пределов последовательностей в расширенном R

Теорема 8 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть
$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$
2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть
$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB.$$
3. Предел частного равен частному пределов, то есть
$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0.$$

6. Предельный переход в неравенствах для последовательностей

Следствие 11 (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $x_n > y_n$, начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geq B$.
2. Если $x_n \geq y_n$, начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geq B$.

Теорема 9.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A < B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда
$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n < y_n.$$

7. О сжатой переменной для последовательностей

Теорема 10 (О сжатой переменной).
Пусть, начиная с какого-то номера n_0, выполняется $x_n \leq z_n \leq y_n$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда
$$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

8. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности

Теорема 11 (Вейерштрасса).
Возрастающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Теорема 12 (Обобщенная теорема Вейерштрасса).
Возрастающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

9. О связи пределов последовательности и её подпоследовательностей

Пусть последовательность x_n имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.

10. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 15 (Теорема Больцано–Вейерштрасса).
У любой ограниченной последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность.

11. Критерий Коши для последовательностей

Теорема 16 (Критерий Коши).
Последовательность x_n сходится (в $\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

12. Локальные свойства функций, имеющих предел

Теорема 18 (Локальные свойства функций, имеющих предел).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда:

1. При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.
2. При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена.
3. Если $A \neq 0$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и A совпадают.

13. Арифметические свойства пределов функций в расширенном R

Теорема 19 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть
$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$
2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть
$$f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} AB.$$
3. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой $\overset{o}{U}(x_0)$, то предел частного равен частному пределов, то есть
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{A}{B}.$$

14. Предельный переход в неравенствах для функций

Следствие 13 (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $f(x) > g(x)$ на E, то $A \geq B$.
2. Если $f(x) \geq g(x)$ на E, то $A \geq B$.

15. О сжатой переменной для функций

Теорема 21 (О сжатой переменной).
Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ на E и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

16. Теорема Вейерштрасса о пределах возрастающей и убывающей функций

Теорема 22 (О пределе монотонной функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – возрастающая (на E) функция, $s = \sup E$ – предельная для E. Тогда
$$\lim_{x\to s} f(x) = \sup_{x\in E} f(x).$$
Конечность последнего предела равносильна ограниченности f (на E) сверху.

17. Критерий Коши для функции

Теорема 23 (Критерий Коши).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для E. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \;\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

18. Критерий существования предела через односторонние

Теорема 24 (Критерий существования предела через одностороннние).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множеств

$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

19. О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций

Лемма 31 (О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).
Пусть $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

– бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пусть $\alpha : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \;\; \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

— бесконечно большая при $x \to x_0$.

20. О свойствах бесконечно малых функций

Лемма 32.
Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда:

1. Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.
2. Функция $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.
3. Если функция $\theta : E \to \mathbb{R}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, то функция $\alpha(x)\theta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

21. Критерий существования конечного предела в терминах бесконечно малых функций

Теорема 25 (Критерий существования конечного предела в терминах б.м.). Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная для E. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.