ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εισαγωγή

Οι πρώτοι αριθμοί, από αρχαιοτάτων χρόνων, έχουν απασχολήσει τους περισσότερους από όσους ασχολούνται με την επιστήμη των Μαθηματικών χάρη στην ιδιαίτερα μυστηριώδη φύση τους, και στην δυσκολία των ερωτημάτων που μας δημιουργούν. Οι περισσότεροι μαθαίνουν για πρώτη φορά για τους πρώτους αριθμούς στην 6η Δημοτικού και από εκεί και μετά, δυστυχώς δεν ξαναγίνεται καμία αναφορά σε όλη τη σχολική πορεία των μαθητών μέχρι και την 3η Λυκείου. Ο Ευκλείδης ήταν από τους πρώτους Έλληνες μαθηματικούς που εισήγαγαν την ανθρωπότητα στον κόσμο των πρώτων αριθμών. Στη συνέχεια, ακόμα κι αν οι πρώτοι αριθμοί ήταν παραμελημένοι για πολλούς αιώνες, κατά τον 17ο αιώνα ο Gauss τους επανήγαγε στο φάσμα των μαθηματικών με το περίφημο Θεώρημα Πρώτων Αριθμών. Τεράστια συνεισφορά επάνω στο θεώρημα αυτό, παρέχουν τα θεωρήματα των Euler,

Riemann, Dirichlet, Charles Jean de la Vallée Poussin και άλλων γνωστών μαθηματικών που θα αναφερθούν παρακάτω. Μέχρι και σήμερα, υπάρχει η λεγόμενη «Υπόθεση του Riemann» που συνδέεται άμεσα με το Θεώρημα Πρώτων Αριθμών, για την οποία όμως δεν έχει βρεθεί ακόμα απόδειξη, ενώ το CMI (Clay Mathematical Institute) το ένταξε στα «7 Προβλήματα της Χιλιετίας (7 Millennium Problems)» και εγγυάται ότι ο άνθρωπος που θα την αποδείξει θα λάβει χρηματικό ποσό ύψους 1.000.000€ καθώς το θεώρημα αυτό έχει μείνει αναπόδεικτο για περισσότερο από 150 χρόνια και έχει μέγιστη σημασία για την πρόοδο των Μαθηματικών. Το πρώτο πράγμα με το οποίο έρχεται αντιμέτωπος κάποιος όταν θέλει να εξερευνήσει τον κόσμο των πρώτων αριθμών, είναι το μπαράζ ερωτήσεων που δημιουργούνται. Έτσι λοιπόν κι εμείς θα καλύψουμε όσες περισσότερες ερωτήσεις μπορούν να προκύψουν, ξεκινώντας με την βασική:

Τι είναι ο πρώτος αριθμός;

Στα μαθηματικά **πρώτος αριθμός** (ή απλά πρώτος) είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας με την ιδιότητα ότι οι μόνοι φυσικοί διαιρέτες του είναι η μονάδα και ο εαυτός του. Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας , ο οποίος δεν είναι πρώτος αριθμός ονομάζεται **σύνθετος αριθμός**. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι πρώτος, επειδή μόνο οι αριθμοί 1 και 5 τον διαιρούν εξίσου, ενώ ο 6 είναι σύνθετος επειδή έχει διαιρέτες τους 2 και 3 πέρα των 1 και 6. Το 0 και το 1 δεν είναι πρώτοι αριθμοί καθώς το 1 δεν πληροί την προϋπόθεση του να υπάρχουν δύο διαιρέτες, και το 0 συχνά δεν θεωρείται καν φυσικός αριθμός.

Η ακολουθία των 20 πρώτων αριθμών είναι η εξής:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, …

Όπως παρατηρείται, κανένας από αυτούς τους αριθμούς δεν διαιρείται ακριβώς με οποιονδήποτε μικρότερο του φυσικό αριθμό, και επίσης οι αριθμοί μεταξύ τους δεν ακολουθούν κάποιον κανόνα ώστε να είναι γνωστός με σιγουριά κάθε επόμενος πρώτος. Παρ'όλα αυτά, πλέον υπάρχουν μερικές μέθοδοι που μπορούν να μας υπολογίσουν αν ένας τυχαίος αριθμός είναι πρώτος.

Για παράδειγμα, μια απλή αλλά αργή μέθοδος για να επαληθευτεί αν ένας δοθείς αριθμός *n* είναι πρώτος είναι η λεγόμενη «δοκιμαστική διαίρεση». Η δοκιμαστική διαίρεση συνίσταται στον έλεγχο αν ο n είναι πολλαπλάσιο κάποιου ακέραιου αριθμού μεταξύ του 2 και του $N(\sqrt{n})$. Οι αλγόριθμοι που είναι πολύ πιο αποτελεσματικοί από τη δοκιμαστική διαίρεση έχουν επινοηθεί για να ελέγχεται αν πολύ μεγαλύτεροι αριθμοί είναι πρώτοι. Ιδιαίτερα γρήγορες μέθοδοι είναι διαθέσιμες για αριθμούς ειδικών μορφών, όπως είναι οι «*αριθμοί Μερσέν*» (δηλαδή οι αριθμοί της μορφής $2^p - 1$).

Ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός μέχρι στιγμής βρέθηκε τον Δεκέμβριο του 2018 και είναι ο $M_{82589933} = 2^{82589933} - 1$ με 24.862.048 ψηφία.

Πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν;

Επιστρέφοντας στους αρχαίους Έλληνες, αξίζει να γίνει αναφορά στο πιο γνωστό θεώρημα που ανέπτυξε ο Ευκλείδης που αφορά τους πρώτους αριθμούς. Γενικότερα, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (περίπου στο 300 π.Χ.) περιέχουν σημαντικά θεωρήματα για τους πρώτους αριθμούς, συμπεριλαμβανομένου του θεωρήματος του πλήθους των πρώτων αριθμών. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει πως βάσει του θεωρήματος αυτού, το πλήθος των πρώτων αριθμών δεν είναι πεπερασμένο, αλλά άπειρο αποδεικνύοντας το με εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή:

Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ και P είναι το γινόμενο τους $P = p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * p_n$.

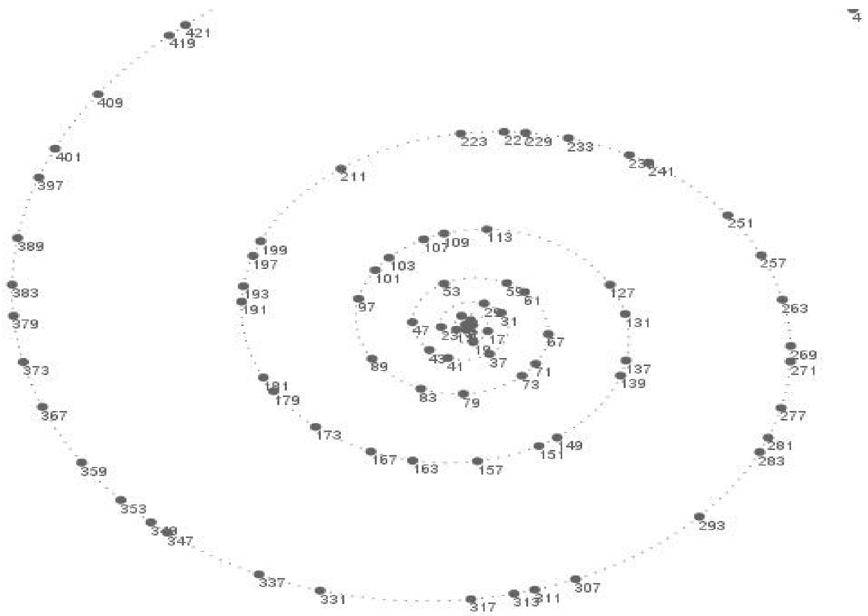
Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό $N = P + 1$.

- Αν ο N είναι πρώτος αριθμός, τότε ήδη αποδείξαμε ότι η υπόθεση είναι ψευδής.

- Αν ο N δεν είναι πρώτος αριθμός, τότε κάποιος συνδυασμός των παραπάνω πρώτων αριθμών θα διαιρούν ακριβώς τον N. Όμως κανένας από αυτούς τους αριθμούς δεν θα πληροί αυτήν την προϋπόθεση λόγω του +1 στην εξίσωση. Άρα ο N πρέπει να είναι πρώτος αριθμός, άρα άτοπο.

Έτσι κατάφερε ο Ευκλείδης να αποδείξει την απειρία των πρώτων αριθμών δίνοντας στους μελλοντικούς μαθηματικούς ένα πολύ χρήσιμο κλειδί για την εύρεση νέων δεδομένων για τους πρώτους αριθμούς. Το παραπάνω θεώρημα, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, είναι υψίστης σημασίας, ειδικά για το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών, ώστε μπορέσουμε να ερμηνεύσουμε μερικές λειτουργίες του.

Ένα εντυπωσιακό γεγονός είναι πως στην φύση υπάρχουν στοιχεία συσχέτισης με τον τρόπο που κατανέμονται οι πρώτοι αριθμοί. Στο σχήμα των γαλαξιών, των κυκλώνων, των λουλουδιών, μέχρι και σε ορισμένα κύτταρα του ανθρώπινου σώματος παρατηρείται η λεγόμενη λογαριθμική σπείρα η οποία όσο επεκτείνεται, απομακρύνεται κι από το κέντρο της. Το εντυπωσιακό στοιχείο είναι πως η αναλογία της περιστροφής της λογαριθμικής σπείρας συσχετίζεται με την πυκνότητα των πρώτων αριθμών δηλαδή το πόσοι υπάρχουν όσο επεκτεινόμαστε στο άπειρο.



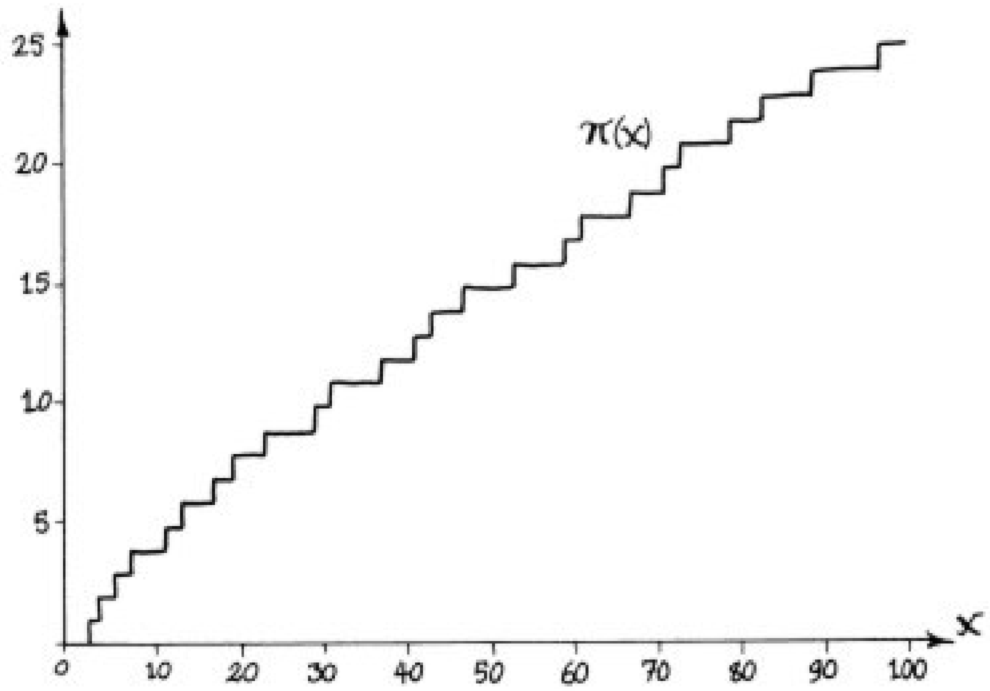
Τι αναφέρει το Θεώρημα Πρώτων Αριθμών;

Το **«Θεώρημα Πρώτων Αριθμών»** (Θ.Π.Α.) ήταν αρχική ιδέα του Carl Friedrich Gauss στο τέλος του 18ου αιώνα σε ηλικία μόλις 15 ετών. Στη θεωρία αριθμών , το Θ.Π.Α. περιγράφει την ασυμπτωτική κατανομή των πρώτων αριθμών μεταξύ των θετικών ακεραίων. Με άλλα λόγια, προσεγγιστικά βλέπουμε ποια συνάρτηση ακολουθεί το πλήθος των πρώτων αριθμών, αλλά ταυτόχρονα μπορούμε να εκτιμήσουμε και πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν πριν από μια δοθείσα τιμή x. Το θεώρημα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Jacques Hadamard και τον Charles Jean de la Vallée-Poussin το 1896 χρησιμοποιώντας ιδέες που εισήγαγε ο Bernard Riemann και ο Leonard Euler. Η πρώτη τέτοια κατανομή που βρέθηκε είναι η:

$$\pi(x) \sim x / \ln x$$

όπου π(x) είναι η συνάρτηση καταμέτρησης των πρώτων αριθμών και ln(x) είναι ο φυσικός λογάριθμος του x. Αυτό σημαίνει ότι για αρκετά μεγάλα x, την πιθανότητα ένας τυχαίος ακέραιος που δεν είναι μεγαλύτερος από το x μπορούμε να την εκτιμήσουμε με την συνάρτηση 1 / ln(x). Η πραγματική τιμή της π(x) παρατηρούμε ότι μπορεί να είναι αποτέλεσμα της προσεγγιστικής πιθανότητας του 1 / ln(x), εμφανίζει όμως ένα σφάλμα του οποίου το μέγεθος θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε με την **«Υπόθεση του Riemann»** που συνδέεται με την **«συνάρτηση ζ»** τα οποία θα συναντήσουμε παρακάτω από μία πολλή εξονυχιστική σκοπιά.

Η συνάρτηση αυτή προφανώς αφού έχει τύπο, θα έχει και το ανάλογο μοναδικό της γράφημα το οποίο φαίνεται στην προσεχή εικόνα:



1.Συνάρτηση Καταμέτρησης Πρώτων Αριθμών

2.http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/encoding1.htm

Αρχικά, να αναφερθεί πως ο κύριος τύπος του Θ.Π.Α. είναι ο εξής:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} = 1$$

που είναι λογικό μιας και εξ ορισμού η π(x) ~ x / ln(x).

Για να γίνει αντιληπτός, όμως, ας πάρουμε για παράδειγμα, το x = 100. Οπότε έχουμε:

π(x) = π(100) = 25 και

x / ln(x) = 100 / ln(100) ¿ 22, με

$$\frac{\pi(x)}{x / \log(x)} = \frac{25}{22} \approx 1.136$$

ενώ για x = 10^9 έχουμε:

π(x) = π(10^9) = 50847534 και

x / ln(x) = 10^9 / ln(10^9) ¿ 48254942, με

$$\frac{\pi(x)}{x / \log(x)} = \frac{50847534}{48254942} \approx 1.053$$

Στην πράξη μπορεί να δούμε ότι υπάρχει έχει ένα **«σφάλμα»**, αλλά αναλογικά όσο μεγαλώνει το x, το κλάσμα γίνεται μικρότερο και τείνει στο 1.

40 χρόνια μετά την ιδέα του Gauss, ο Dirichlet και ο Gauss ανακάλυψαν μία ακόμη καλύτερη συνάρτηση για να εκτιμήσουν την πορεία της π(x). Θεώρησαν λοιπόν την

$$\pi(x) \sim Li(x) = \frac{\int_2^x dt}{\ln(t)}$$

όπου Li(x) είναι η Λογαριθμική Συνάρτηση Ολοκλήρωσης η οποία δίνει ένα πολύ πιο εύστοχο αποτέλεσμα για διάφορες τιμές του x σε σχέση με την x / ln(x). Για παράδειγμα, για x = 10^9 έχουμε:

π(x) = π(10^9) = 50847534 και

Li(x) = Li(10^9) = 50849234, με

$$\frac{\pi(x)}{x / \log(x)} = \frac{50847534}{50849234} \approx 0.99996$$

Η προσέγγιση είναι πολύ ικανοποιητική, και αυτή η συνάρτηση εκφράζει καλύτερα την πορεία που κατανέμονται οι πρώτοι αριθμοί.

Βέβαια, μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί μερικές άλλες συναρτήσεις που πλησιάζουν ακόμη πιο πολύ την π(x). Η μια είναι γνωστή με το όνομα «σταθερά του Legendre» και με τύπο:

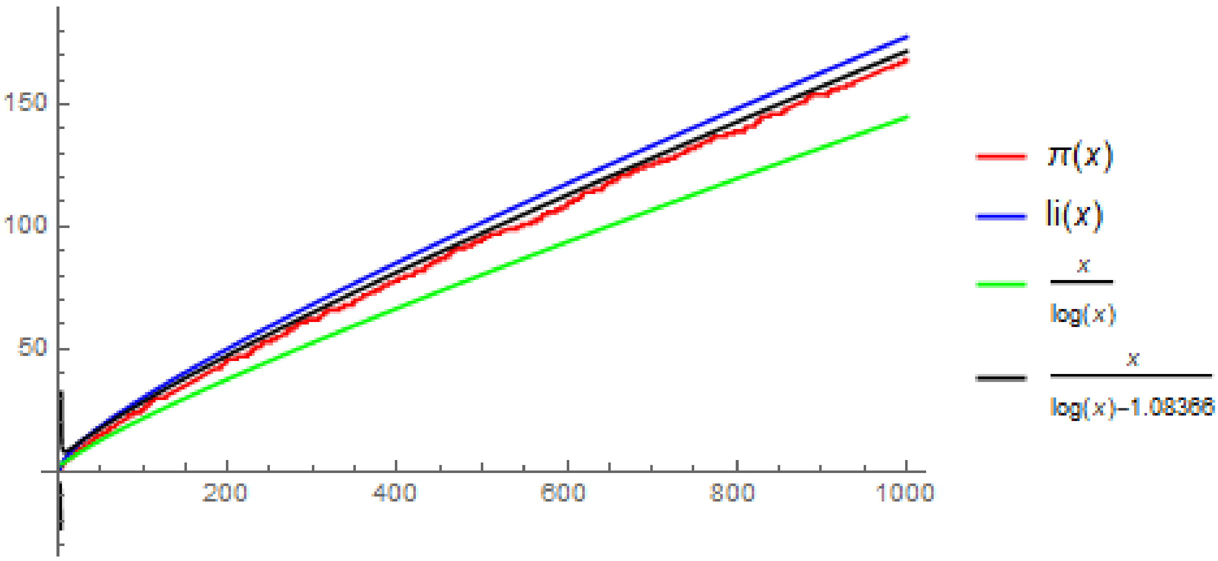
$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x) - B(x)}$$

όπου $\lim_{x \to \infty} B(x) = 1.08366$ ... και η άλλη με το όνομα «Συνάρτηση καταμέτρησης πρώτων αριθμών εν δυνάμει» (Prime Power Counting Function) και τύπο:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x^1}{2}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x^1}{3}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\pi\left(\frac{x^1}{n}\right)$$

η οποία θα εμφανιστεί στη συνέχεια.

Η καλύτερη οπτικοποίηση των συναρτήσεων είναι δυνατή με το παρακάτω γράφημα:



1.Συναρτήσεις που ακολουθεί η π(x)

2.https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.maa.org%2Fpress%2Fperiodicals%2Fconvergence%2Fthe-origin-of-the-prime-number-theorem-a-primary-source-project-for-number-theory-students&psig=AOvVaw2xDWMABg8TBrHzeVlB7Tof&ust=1609778130977000&source

Ένα χαρακτηριστικό των πρώτων αριθμών είναι πως όσο επεκτεινόμαστε προς το άπειρο, τόσο πιο λίγοι προκύπτουν. Ένας τρόπος για να γίνει αντιληπτό αυτό είναι να πάρουμε πολλά δείγματα και να τα συγκρίνουμε. Για παράδειγμα, μεταξύ του 1 και του 20, δηλαδή για x=20, υπάρχουν 8 πρώτοι αριθμοί, οπότε οι πιθανότητα του να επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 20 αριθμούς και να είναι πρώτος, είναι ίση με 8/20, δηλαδή 40%. Για x=100 έχουμε 25 πρώτους άρα και πιθανότητα 25%.

Το Θ.Π.Α., όπως προαναφέρθηκε, αποδείχθηκε περίπου 100 χρόνια, μετά την ιδέα του Gauss, το 1896 από τον Jacques Hadamard και τον Charles Jean de la Vallée-Poussin, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ζ του Riemann. Η συνάρτηση ζ του Riemann ήταν το αποτέλεσμα από μια μελέτη του Euler που εργαζόταν με αυτήν κατά τον 18^{ο} αιώνα.

<u>Η συνάρτηση του Euler</u>

Ο Euler ασχολήθηκε με τις άπειρες σειρές (όπως πχ το $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ το οποίο είναι μία αρμονική σειρά και τείνει στο άπειρο, αν και πολύ αργά). Ιδιαιτέρως ασχολήθηκε με αρμονικές σειρές αυξημένες σε κάποια δύναμη s, γνωστές και ως συνάρτηση ζ, επομένως η σειρά ήταν της εξής μορφής:

$$\zeta(s)=\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}$$

όπου s $\in N$

Γνωρίζουμε επίσης πως όλες οι σειρές με δύναμη s > 1 πάντα συγκλίνουν, ενώ αλλού αποκλίνουν. Ο Euler όμως ακολουθώντας το παρακάτω μοτίβο κατάφερε να συνδέσει το άθροισμα αυτό με ένα γινόμενο, που μάλιστα θα συνδέεται άμεσα με τους πρώτους αριθμούς. Το μοτίβο ήταν το εξής:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots \Leftrightarrow \frac{1}{2^s}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}= \frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\ldots \Leftrightarrow$$

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\ldots \Leftrightarrow \frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\ldots \Leftrightarrow$$

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\ldots\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s}=1$$

Όπως παρατηρείται αυτό που έκανε ο Euler ήταν να πολλαπλασιάζει την συνάρτηση κάθε φορά με τον δεύτερο όρο της συνάρτησης κι ύστερα να το αφαιρεί από το 1.

Το αποτέλεσμα αυτού του συλλογισμού ήταν να εξισώσει αυτήν την σειρά με ένα γινόμενο που θα περιείχε ως στοιχεία του τους πρώτους αριθμούς. Δηλαδή βρήκε ότι:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s} = \frac{\prod_{p\ prime} 1}{1-p^{-s}} = \frac{\prod_{p\ prime} p^s}{p^s-1} = \left(\frac{2^s}{2^s-1}\right) * \left(\frac{3^s}{3^s-1}\right) * \left(\frac{5^s}{5^s-1}\right) * \ldots$$

<u>Το έργο του Riemann</u>

Πάνω σε αυτόν τον τύπο του Euler εργάστηκε και ο Riemann, του οποίου μάλιστα ο καθηγητής ήταν ο Gauss στο πανεπιστήμιο, που τον έστρεψε από το μάθημα της θεολογικής στο μάθημα των μαθηματικών. Εν τέλει, ο Riemann κατέληξε να είναι ο επικεφαλής στο τμήμα του μαθηματικού εκείνου του πανεπιστημίου. Το 1859 ο Riemann έγραψε για πρώτη του φορά υλικό σχετικό με την συνάρτηση ζ, δεν είχε ασχοληθεί στο παρελθόν ξανά με τη θεωρία αριθμών, και έγραψε πάνω σε 10 μετρημένα χαρτιά τις πιο σημαντικές ιδέες που θα μπορούσε ποτέ η ανθρωπότητα να έχει μέχρι εκείνη τη περίοδο πάνω στους πρώτους αριθμούς.

Επί της ουσίας όμως, η συνάρτηση ζ του Riemann ήταν ακριβώς η συνάρτηση του Euler, με τη μόνη διαφορά ότι το s μπορούσε να πάρει και μιγαδικές τιμές. Δηλαδή:

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} 1}{n^s} = \frac{\prod_{p\ prime} p^s}{p^s-1},\ \ για \quad s \in C \quad και \quad s = \sigma + t i$$

Το πρόβλημα με αυτή τη συνάρτηση είναι πως ορίζεται (δηλαδή συγκλίνει) μόνο για τα s > 1, διαφορετικά θα τείνει στο άπειρο ακριβώς όπως και οι αρμονικές σειρές, οπότε αυτό που έψαχνε ο Riemann είναι μια συνάρτηση που να ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς, αλλά ταυτόχρονα να είναι ίση και με την συνάρτηση του Euler όταν το πραγματικό μέρος είναι μεγαλύτερο του 1. Χάρη στην Μιγαδική Ανάλυση, υπάρχει τρόπος να βρεθεί μια συνάρτηση που να ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις, και μάλιστα, αυτός ο τρόπος είναι μοναδικός. Αυτό που συμβαίνει με λίγα λόγια είναι πως εφόσον γνωρίζουμε μια τιμή της συνάρτησης για κάποιους μιγαδικούς αριθμούς, τότε την γνωρίζουμε και για όλους τους μιγαδικούς της. Οπότε ο Riemann εφηύρε την εξής συνάρτηση:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} -1}{n^{¿}} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \ldots$$

και την διαίρεσε με:

$$(1-2^{1-s})^{-1}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}-1}{n^{¿}}= (1-2^{1-s})^{-1}\left(\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}...\right)$$

η οποία ορίζεται για μιγαδικούς αριθμούς όπου το πραγματικό μέρος του s (Re(s)) είναι μεγαλύτερο του 0, και το πιο σημαντικό, πως είναι ίση με την συνάρτηση ζ για Re(s) > 1

Οπότε αυτή η συνάρτηση συγκλίνει όταν το s είναι θετικό. Τι γίνεται όμως όταν το s είναι αρνητικό; Ο Riemann για ακόμη μια φορά δίνει την λύση θεωρώντας μία κάθετη γραμμή ανάμεσα στο 0 και στο 1 για την οποία επαληθεύεται ο παρακάτω τύπος:

$$\zeta(s)=\left(2^s*\pi^{s-1}*\eta\mu\left(\frac{\pi*s}{2}\right)*\Gamma(1-s)\right)*\zeta(1-s)$$

Αυτός ο τύπος μπορεί μεν να φαίνεται απωθητικός, αλλά κατά βάση απλώς δίνει μια μορφή αντανάκλασης της συνάρτησης ζ δεξιά κι αριστερά του σημείου $\frac{1}{2}$. Άρα αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε την τιμή της ζ για s = -1 θα έχουμε:

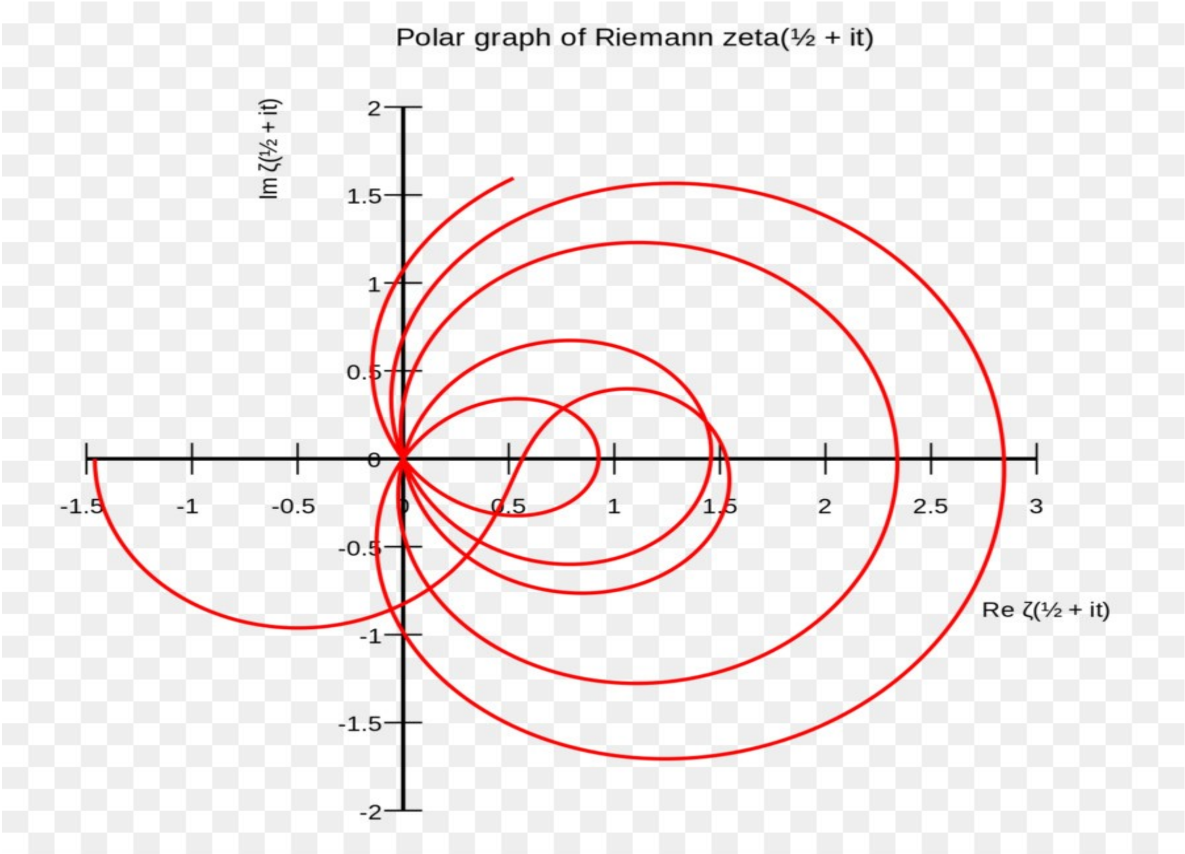
$$\zeta(-1)=\frac{-1}{2\pi^2}*\zeta(2)=\frac{-1}{2\pi^2}*\frac{\pi^2}{6}=\frac{-1}{12}$$

Πολλοί ενδεχομένως να γνωρίζουν την παραπάνω ισότητα ως το άθροισμα του Ramanujan που αποδεικνύει ότι το άθροισμα 1 + 2 + 3 + 4 + ... = $\frac{-1}{12}$

Ανακεφαλαιώνοντας, η συνάρτηση ζ χωρίζεται σε 3 μέρη:

$$\zeta(s)=\begin{cases}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}1}{n^s}=\prod_{p\ prime}\frac{p^s}{p^s-1},\ \gamma\iota\alpha\ \ Re(s)>1\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^{¿}},\gamma\iota\alpha\ \ 0<Re(s)<1\\ \left(2^s*\pi^{s-1}*\eta\mu\left(\frac{\pi*s}{2}\right)*\Gamma(1-s)\right)*\zeta(1-s),\ \gamma\iota\alpha\ \ Re(s)<0\end{cases}$$

Οτιδήποτε δεν έχει οριστεί στην παραπάνω εξίσωση μπορεί να υπολογιστεί με πλευρικά όρια. Για Re(s) = 0 η συνάρτηση του $\zeta(0)=\frac{-1}{2}$ και για Re(s) = 1 δίνει $\zeta(1)=\infty$



1.Συνάρτηση ζ(s)

2.https://www.cleanpng.com/png-riemann-hypothesis-riemann-zeta-function-mathemati-6341559/

<u>Λύσεις – Ρίζες της ζ(s)</u>

Σε αυτό ακριβώς το σημείο δημιουργείται το ερώτημα, πότε η συνάρτηση ζ είναι ίση με το 0; Καταρχάς γνωρίζουμε ότι όταν το Re(s) > 1, η συνάρτηση δεν είναι ποτέ ίση με 0 διότι είναι ένα γινόμενο πρώτων αριθμών και κανένας από αυτούς τους παράγοντες δεν είναι 0. Όταν το Re(s) < 0 ενδεχομένως να παρατηρούνται κάποιες τιμές που να μας δίνουν 0, αλλά για αυτό ευθύνεται ο συντελεστής που χρησιμοποιείται για τον αντικατοπτρισμό της συνάρτησης που περιέχει το ημίτονο, και για τα s = (αρνητικοί άρτιοι) παίρνουμε ως αποτέλεσμα τις λεγόμενες «τετριμμένες ρίζες», εναλλακτικά είναι οι μη τετριμμένες ρίζες και υπάρχουν ανάμεσα στο διάστημα [0,1]. Για αυτό το ερώτημα, ο Riemann είχε για ακόμη μια φορά μια ιδέα όπου σήμερα είναι γνωστή ως «Υπόθεση Riemann».

Για αρχή σκέφτηκε πως θα μπορούσε να γράψει την συνάρτηση ζ ως μία συνάρτηση που να περιείχε τις μη τετριμμένες ρίζες στο διάστημα [0,1] όπως γίνεται και με τα πολυώνυμα που γράφονται ως γινόμενο. Η συνάρτηση που βρήκε είναι η εξής:

$$\zeta(s)=\left(\frac{\frac{\pi^{s}}{2}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}\right)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

όπου ρ είναι οι μη τετριμμένες ρίζες και η συνάρτηση αυτή είναι ίση με την προηγούμενη για το ίδιο διάστημα. Το επόμενο βήμα ήταν να τις εξισώσει και να κάνει τις απαιτούμενες πράξεις για να βρεθεί σε ένα θεμιτό αποτέλεσμα, συμπεριλαμβανομένων μερικών χρήσεων λογαρίθμων και στα δύο μέλη, λογισμού, μιγαδικής ανάλυσης, και άλλα πολλά με τελική εξίσωση την:

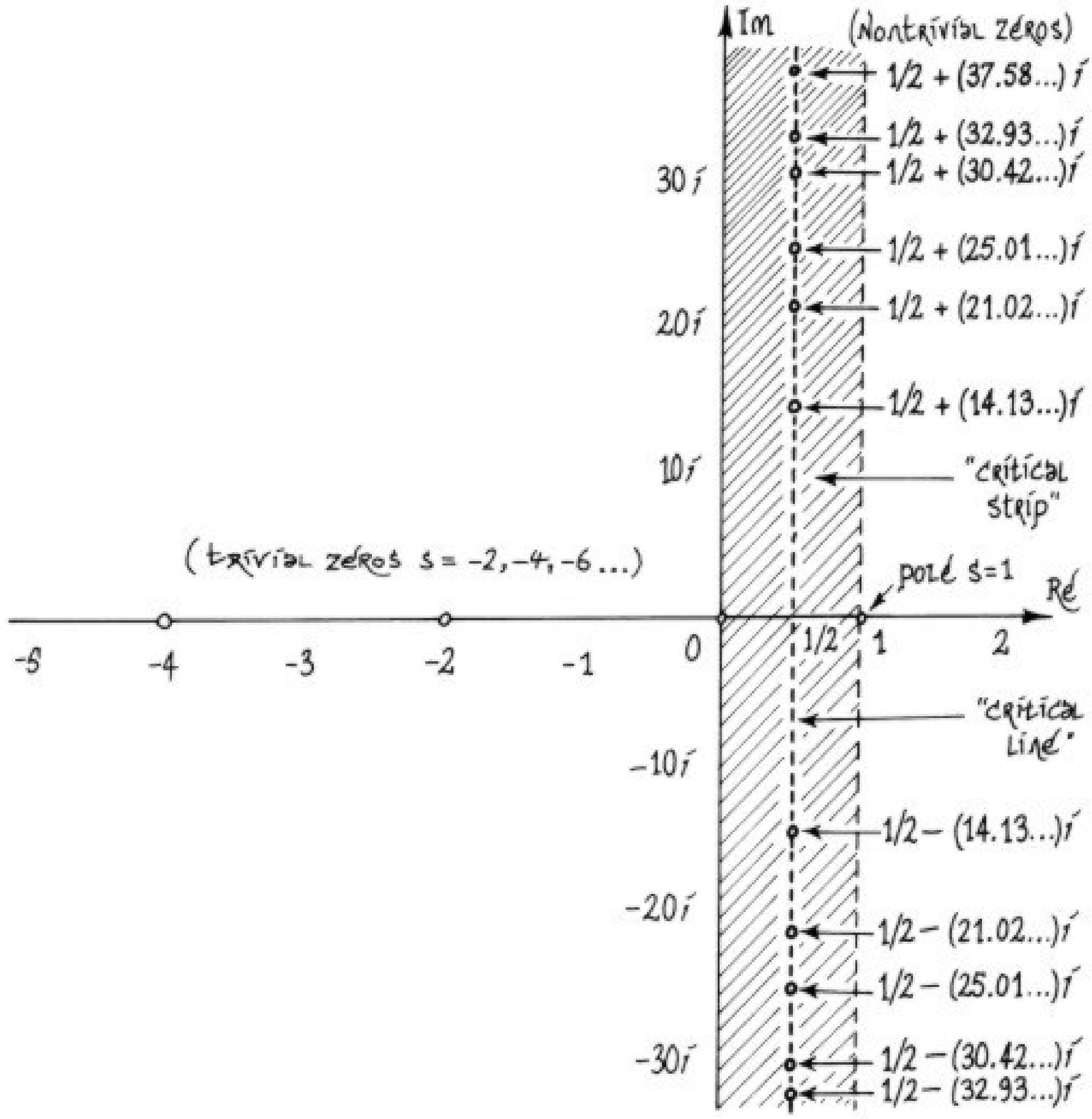
$$J(x) = Li(x) + \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \ln(2) + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)ln(t)} dt$$

Το J(x) είναι η συνάρτηση καταμέτρησης πρώτων αριθμών εν δυνάμει που την είδαμε και παραπάνω. Σε αυτό το σημείο ο Riemann θεώρησε πως η J(x) $\sim$ Li(x) και πως υπάρχει ένα σχετικό υπολογίσιμο σφάλμα. Το σφάλμα αυτό είναι το προφανές:

$$J(x) - Li(x) = \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \ln(2) + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)ln(t)} dt$$

Ο πιο σημαντικός όρος είναι το x^{ρ}. Αν ρ είναι οι μη τετριμμένες ρίζες της τότε αυτές είναι που ελέγχουν το μέγεθος του σφάλματος. Θεωρητικά οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης είναι συμμετρικές γύρω από το Re(s) = $\frac{1}{2}$. Αν όμως, όλες οι τετριμμένες τιμές της συνάρτησης είναι πάνω στο Re(s) = $\frac{1}{2}$ τότε αυτό το σφάλμα γίνεται πολύ μικρό. Η Υπόθεση του Riemann στηρίζει την άποψη ότι όλες οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης ζ βρίσκονται πάνω στην γραμμή του Re(s) = $\frac{1}{2}$. Δυστυχώς η υπόθεση αυτή δεν έχει αποδειχθεί ακόμα, μιας και θα μας έδινε σημαντικά στοιχεία για το Θ.Π.Α. Όπως είχε προαναφερθεί στο Θ.Π.Α. υπάρχει ένα σφάλμα το οποίο μπορεί να είναι μικρό, όμως υπάρχει τρόπος να υπολογιστεί. Το σφάλμα του Θ.Π.Α. εξαρτάται άμεσα από το μέγεθος των μη τετριμμένων ριζών της συνάρτησης ζ του Riemann, ξανά, όταν Re(s) = $\frac{1}{2}$.

Εξετάζοντας από αυτή τη σκοπιά το Θ.Π.Α., 100 χρόνια μετά την ιδέα του Gauss, οι μαθηματικοί κατάφεραν να το αποδείξουν, και προφανώς η απόδειξη περιείχε μεγάλο μέρος της συνάρτησης ζ του Riemann. Συγκεκριμένα αυτό που έκαναν είναι να δείξουν ότι η συνάρτηση ζ του Riemann δεν εμφανίζει μηδενικά, όχι για τα Re(s) = $\frac{1}{2}$, αλλά για τα Re(s) = 1 και αυτό ήταν αρκετό για να ισχύει το Θ.Π.Α.



1. Ρίζες της ζ(s)

2. http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/encoding1.htm

Τι γίνεται αν αποδειχθεί η Υπόθεση του Riemann;

Γενικά είναι προφανές ότι με την Υπόθεση Riemann οι πρώτοι αριθμοί αποκτούν μία τελείως διαφορετική υπόσταση στην θεωρία των αριθμών, πολύ πιο ενδιαφέρουσα και χρήσιμη. Αν αποδειχθεί η Υπόθεση του Riemann τότε πέρα από το μεγάλο βήμα προόδου που θα έχει κάνει η ανθρωπότητα, θα αναφερόμαστε και σε μία ακολουθία αποδείξεων που έχουν να κάνουν με τους πρώτους αριθμούς. Παρακάτω θα αναφερθούν οι πιο σημαντικές πληροφορίες που θα πάρουμε όταν αποδειχθεί η Υπόθεση, παρόλο που θα παραλειφθούν μερικές δευτερευούσης σημασίας. Αρχικά έχουμε πως:

1. Αν η Υπόθεση του Riemann τελικά αποδειχθεί τότε γνωρίζουμε πως και το σφάλμα έχει άνω και κάτω φράγμα και δεν μπορεί να είναι ανεξέλεγκτο το μέγεθος του, το οποίο έχει ήδη υπολογιστεί με τύπο:

$$\left|\pi(x) - Li(x)\right| \leq c\sqrt{x}\ln(x)$$

όπου c είναι μία σταθερά.

2. Το Θ.Π.Α. επίσης δείχνει ότι το μέσο κενό μεταξύ δύο διαδοχικών πρώτων αριθμών είναι περίπου ln(x) και αν πάρουμε ως δεδομένο ότι η Υπόθεση του Riemann είναι αληθής, τότε θα υπάρχει και ένα αντίστοιχο παρόμοιο άνω και κάτω φράγμα για τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς με τύπο:

$$p_{n+1} - p_n \leq c\sqrt{p_n}\ln(p_n)$$

3. Μια ακόμη σημαντική πληροφορία είναι η Αδύναμη Εικασία του Goldbach (Goldbach's Weak Conjecture) η οποία ορίζεται ως εξής: Όλοι οι μονοί ακέραιοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 5 μπορούν να εκφραστούν ως το άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.

4. Αν η Υπόθεση του Riemann είναι βάσιμη, τότε πάντα θα υπάρχει ένας πρώτος αριθμός μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών υψωμένοι εις τον κύβο, δηλαδή θα ισχύει:

$$\boldsymbol{x^3 \leq p \leq (x+1)^3}$$

όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε και μία σταθερά γνωστή ως σταθερά του Mill έστω ϑ, τέτοιο ώστε:

$$\vartheta : \left(\vartheta^{¿}\right)\ να\ είναι\ πρώτος\ \forall\ n \in N$$

Για την ακρίβεια αυτός ο τύπος ήδη υπάρχει αλλά το ϑ πρέπει να είναι κι αυτό πρώτος αριθμός. Στην συγκεκριμένη όμως περίπτωση το ϑ δεν χρειάζεται να είναι πρώτος αριθμός πράγμα που σημαίνει ότι παράγονται πολλοί περισσότεροι πρώτοι με το ϑ να έχουμε βρει πως μπορεί να πάρει ελάχιστη τιμή περίπου το $\vartheta \simeq 1.30637$. Παραδείγματος χάρη:

Για $\vartheta \simeq 1.30637$ και με n = 1 θα πάρουμε την ακέραια τιμή 2 (πρώτος αριθμός)

Για $\vartheta \simeq 1.30637$ και με n = 2 θα πάρουμε την ακέραια τιμή 11 (πρώτος αριθμός)

Για $\vartheta \simeq 1.30637$ και με n = 3 θα πάρουμε την ακέραια τιμή 1361 (πρώτος αριθμός) κ.ο.κ.

Σύνοψη

Όπως είναι προφανές οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν μια ξεχωριστή κατηγορία μελέτης στον κλάδο των Μαθηματικών και συγκεκριμένα στη Θεωρία Αριθμών. Υπάρχουν πολλές πτυχές από όπου μπορεί κανείς να προσεγγίσει τους πρώτους αριθμούς χάρη στα πολυάριθμα θεωρήματα που έχουν ανακαλυφθεί με βάσει το πως αυτοί συμπεριφέρονται. Από την ίδια τη φύση μέχρι και το διάστημα μπορούμε να συσχετίσουμε τους πρώτους αριθμούς με πολλά φυσικά φαινόμενα, και σίγουρα όσα περισσότερα μαθαίνει ο άνθρωπος για αυτούς, κάνει πάντα κι ένα βήμα μπροστά προς την επίλυση δυσκολότερων προβλημάτων.

Το Θεώρημα Πρώτων Αριθμών αποτελεί ίσως την πιο χρήσιμη πληροφορία που έχουμε μέχρι στιγμής στα χέρια μας αφού σε συνδυασμό με την συνάρτηση ζ δημιουργούν ένα από τα πιο όμορφα, αλλά και δύσκολα ερωτήματα. Εφόσον υπάρξει κάποιος κάποια στιγμή που θα αποδείξει την Υπόθεση του Riemann, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, θα λάβει χρηματικό έπαθλο $1.000.000. Το αστείο της υπόθεσης αυτής είναι πως αν κάποιος το ανταποδείξει με αντίφαση, κοινώς ως εις άτοπον απαγωγή, τότε δεν θα λάβει κανένα χρηματικό ποσό. Ένας λόγος ενδεχομένως να είναι ότι οι μαθηματικοί φοβούνται ότι στο μέλλον ίσως αυτή η ανταπόδειξη να φανεί ψευδής και να έχουν δωρίσει 1 εκατομμύριο δολάρια άνευ ανταλλάγματος. Ένα μη θεμιτό στοιχείο που απέδειξε ο Godfrey Hardy είναι πως πάνω σε αυτήν την κρίσιμη γραμμή προκύπτουν άπειρες μη τετριμμένες ρίζες, αλλά αυτό δεν αποτελεί συμπερασματική απόδειξη ότι όντως όλα τα μηδενικά ανήκουν εκεί. Γενικά όμως θα μας ήταν πιο εύχρηστο να ξέραμε ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός τετριμμένων ριζών.

Συνεπώς ευελπιστώντας ότι οι ανερχόμενοι μαθηματικοί θα παρουσιαστούν στον κόσμο με νέες ιδέες και ζήλο για αναζήτηση απαντήσεων, αυξάνονται οι πιθανότητες κάποια μέρα να βρεθεί ένας που να μας ρίξει φως στο σκοτάδι που επικρατεί στο $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Παραπομπές

https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem

https://www.britannica.com/science/Riemann-zeta-function

https://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html

https://www.theoremoftheday.org/NumberTheory/EulerProduct/TotDEulerProduct.pdf

https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/riemann-zeta-function

https://www.youtube.com/watch?v=7jzCJJIc59E&t

https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjbwqlYw&t

https://www.youtube.com/watch?v=dktH8hJadyU&t

https://www.youtube.com/watch?v=rGo2hsoJSbo

http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/riemannhyp.htm